



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM
ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

Sistema Elástico Poroso e Sistema Mindlin Timoshenko: Análise Assintótica e Análise Numérica

Elany da Silva Maciel

Belém-Pa

2018

Elany da Silva Maciel

**Sistema Elástico Poroso e Sistema Mindlin Timoshenko:
Análise Assintótica e Análise Numérica**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: **Análise**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém-Pa

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M152s Maciel, Elany da Silva
Sistema Elástico Poroso e Sistema Mindlin Timoshenko: Análise Assintótica e Análise Numérica / Elany da Silva Maciel. — 2018
148 f.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Coorientação: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo.

1. Sistema elástico poroso. 2. Sistema de Mindlin Timoshenko. 3. Sistema termoelástico. 4. Decaimento exponencial. 5. Decaimento polinomial. I. Santos, Mauro de Lima, *orient.* II. Título

Sistema Elástico Poroso e Sistema Mindlin Timoshenko: Análise Assintótica e Análise Numérica

por

Elany da Silva Maciel

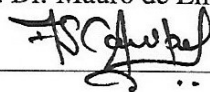
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE
DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM
MATEMÁTICA - PDM/UFPA, COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM
MATEMÁTICA.

Avaliada em 29 de junho de 2018.

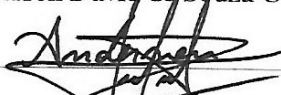
Resultado: **APROVADO**



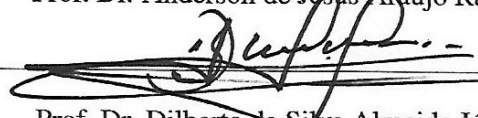
Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos(PDM/UFPA)



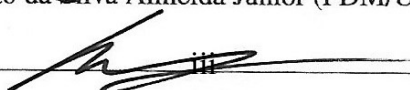
Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (PPGME/UFPA)



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (PDM/UFPA)



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (PDM/UFPA)



Prof. Dr. Huy Hoang Nguyen (IM/UFRJ)

*Posso tudo posso naquele que me fortalece
Nada e ninguém no mundo vai me fazer desistir
Quero, tudo quero, sem medo entregar meus projetos
Deixar-me guiar nos caminhos que Deus desejou para mim.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por me guiar e dar tranquilidade diante das dificuldades.

Em segundo, aos meus pais Raimundo e Emília por toda motivação que me deram, entenderam as minhas faltas e as vezes que precisei me afastar do convívio familiar. Eles me mostraram a importância dos estudos, mesmo não tendo eles a mesma oportunidade no passado.

Ao meu irmão Rafael que acreditou em mim, que me ajudou nos momentos que precisei e que sempre lutou comigo pra dar uma vida melhor para nossos pais e assim me manteve tranquila pra estudar e seguir forte nessa jornada.

Ao meu noivo, Adam, que sempre me deu incentivo ao longo de todos esses anos que estamos juntos. Ele sempre acreditou que eu iria conseguir e me acalmava com seu abraço (tão necessário) e me dava segurança nos momentos que mais precisava.

Ao meu orientador por toda paciência e compreensão que teve durante todos os momentos de dificuldades que passei. Pela disponibilidade de me ajudar sempre que precisava e por toda atenção dada ao longo desses anos.

Ao professor Anderson Campelo pela amizade e por toda contribuição dada ao meu trabalho.

Ao professor Dilberto da S. A. Júnior e aos demais professores do programa de doutorado em matemática da UFPA (PDM) por todo apoio .

A todos os meus amigos do PDM, em especial ao meu amigo Manoel Lucival por toda atenção dada e ajuda nos momentos de dificuldades.

Ao Campus Universitário do Tocantins/Cametá pelo apoio e incentivo que tive pra estudar e terminar o doutorado. Quero agradecer de coração aos meus amigos de FAMAT por todo carinho.

Finalmente, agradeço a todos os meus familiares e amigos que sempre torceram pelo meu sucesso.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Sistema Elástico Poroso e Sistema Mindlin Timoshenko: Análise Assintótica e Análise Numérica.

por Elany da Silva Maciel

Nesta tese, estudamos questões relativas a existência e unicidade de soluções obtida por meio da teoria de semigrupos de operadores lineares e comportamento assintótico de soluções.

Inicialmente, estudamos o sistema elástico poroso com "delay", onde nosso principal resultado é sobre o decaimento exponencial de soluções. Este resultado é baseado no método da energia para sistemas dissipativos, onde construímos funcionais lineares equivalentes à energia das soluções. E este decaimento ocorrerá caso obedeça a uma relação entre os coeficientes $\kappa, \rho_1, \delta, J$.

Em seguida investigamos um sistema termoelástico poroso onde a condução de calor é dada pela lei de Coleman-Gurtin. Mostramos que o sistema é exponencialmente ou polinomialmente estável, dependendo de uma relação entre os coeficientes de velocidade de propagação da onda.

Outra parte desta tese versa sobre o sistema de Mindlin-Timoshenko. Mostramos que dois mecanismos dissipativos, um do tipo atrito e outro do tipo kelvin-Voigt, que atuam nas equações dos ângulos de rotação não são fortes o suficiente para fazer as soluções decaírem exponencialmente independente de qualquer relação. Além disso, provamos que o nosso modelo apresenta estabilidade polinomial sem nenhuma relação entre os coeficientes $\kappa, \rho_1, D, \rho_2$, isto é, o operador resolvente não é uniformemente limitado ao longo do eixo imaginário. No entanto, ele decai polinomialmente com taxa ótima.

Para certificar nossos resultados analíticos, fazemos um estudo numérico do nosso modelo dissipativo utilizando o método de diferenças finitas.

Palavras-chave: Sistema elástico poroso; sistema de Mindlin Timoshenko; sistema termoelástico; decaimento exponencial; falta de estabilidade; decaimento polinomial; delay; Kelvin-Voigt; damping; diferenças finitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Porous Elastic System and Mindlin Timoshenko System: Asymptotic Analysis and Numerical Analysis.

por Elany da Silva Maciel

In this thesis, we studied questions regarding the existence and uniqueness of solutions obtained through the theory of semigroups of linear operators and asymptotic behavior of solutions.

Initially, we studied the porous elastic system with "delay", where our The main result is about the exponential decay of solutions. This result is based on the energy method for dissipative systems, where we construct linear functional equivalents to the energy of the solutions. And this decay will occur if it obeys a relation between the coefficients $\kappa, \rho_1, \delta, J$.

We then investigate a porous thermoelastic system where the heat conduction is given by Coleman-Gurtin law. We show that the system is exponentially or polynomially stable, depending on a relation between the coefficients of propagation velocity of the wave.

Another part of this thesis concerns the Mindlin-Tymoshenko system. We show that two dissipative mechanisms, one friction type and one kelvin-Voigt type, acting on the rotational angle equations are not strong enough to make the solutions decay exponentially independent of any relation. Furthermore, we prove that our model exhibits polynomial stability with no relation between the coefficients $\kappa, \rho_1, D, \rho_2$, that is, the resolving operator is not uniformly bounded along the imaginary axis. However, it decays polynomially at optimal rates.

To certify our analytical results, we perform a numerical study of our dissipative model using the finite difference method.

Keywords: Porous elastic system; Mindlin Timoshenko system; thermoelastic system; exponential decay; lack of stability; polynomial decay; delay; Kelvin-Voigt; damping; finite differences; thermoelastic system.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Considerações Gerais e Motivação	1
1.1.1	Sistema Elástico Poroso	1
1.1.2	Sistema Mindlin Timoshenko	9
1.2	Objetivo do Tese	17
1.3	Organização da Tese	17
2	Modelo Elástico Poroso com atraso no tempo	19
2.1	Introdução	19
2.2	Energia total do sistema	20
2.3	O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares	25
2.4	Decaimento Exponencial	31
3	Modelo Termoelástico Poroso com Lei de Coleman-Gurtin	48
3.1	Introdução	48
3.2	Configuração Funcional e Notações	49
3.2.1	Hipóteses sobre o núcleo de memória	49
3.2.2	O Cenário de Semigrupo	50
3.3	Falta de Decaimento Exponencial	54
3.4	Decaimento Exponencial	57
3.5	Decaimento Polinomial	67
4	Modelo Dissipativo de uma placa de Mindlin-Timoshenko	71
4.1	Introdução	71
4.2	O Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares	73
4.3	A energia do sistema	76
4.4	Falta de Estabilidade Exponencial	77

4.5	Decaimento Polinomial	81
5	Modelo espaço - tempo em Diferenças Finitas	98
5.1	Fundamentação Teórica	98
5.2	Método Numérico Explícito em diferenças finitas	98
5.3	Energia Discreta	105
5.4	Simulações Numéricas	127
6	Considerações Finais	133
	Referências Bibliográficas	135

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais e Motivação

1.1.1 Sistema Elástico Poroso

Neste trabalho, estudamos o comportamento assintótico das soluções do sistema unidimensional do tipo elástico poroso com damping fraco na presença de termo de atraso.

Vamos começar definindo que materiais porosos são materiais que possuem espaços vazios funcionais, chamados de poros ou células, distribuídos regularmente no interior da matriz. A porosidade de um material exerce influência sobre algumas de suas propriedades físicas, tais como densidade, condutividade térmica e resistência mecânica. Como consequência, o controle da estrutura porosa é de grande importância, por exemplo, no design de catalisadores, adsorventes industriais, membranas e cerâmicas [57].

A propriedade de porosidade é, na verdade, um pouco mais complexa do que a simples percentagem de espaço vazio no interior de um material. Outra consideração importante é a forma e o tamanho dos espaços vazios no material.

No reino mineral, um exemplo típico é a pedra-pomes, rocha vulcânica cujos poros podem ser vistos a olho nu, muito usada em salões de beleza para esfoliar a sola dos pés e os calcanhares (ver FIGURA 1.1). Outro material, não tão popular, capaz de diminuir o tempo de uma reação,



FIGURA 1.1: Pedra Pomes

aumentando sua velocidade são as peneiras moleculares (ver FIGURAS 1.2).



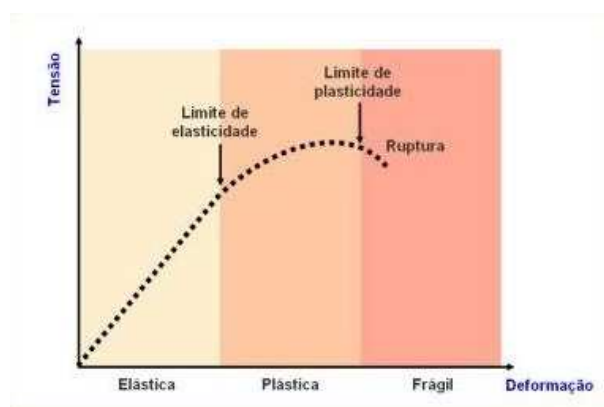
FIGURA 1.2: Areia Hidratada, Carvão ativado, Zeolita.

Conhecidas e estudadas há séculos, esse tipo de material poroso foi identificado ainda na metade do século XVIII. As peneiras moleculares só ganharam uma definição científica em 1932. São materiais capazes de reter em sua superfície (adsorver), por meio de interações de natureza física ou química, átomos, moléculas ou íons de certos tamanhos, segundo o diâmetro de seus poros. Daí o nome: peneira (ver [50]).

A elasticidade é uma propriedade que algum objeto tem de recuperar a sua forma inicial, depois de sofrerem algumas deformações temporárias, provocadas por uma força exterior.

A deformação é, em geral, proporcional à força exterior aplicada e inversamente proporcional à secção do material. A constante de proporcionalidade designa-se por coeficiente de elasticidade e o seu valor inverso é denominado de módulo de elasticidade, ou módulo de Young. Geralmente, quando uma força é aplicada a um corpo, a deformação aumenta proporcionalmente até atingir um certo ponto, chamado limite de proporcionalidade. Este fenômeno está

de acordo com a Lei de Hooke. A partir deste ponto, os corpos já não recuperam o seu estado inicial e atinge-se o chamado limite elástico. Antes de atingir o limite a amostra é elástica, isto é, retoma o seu estado inicial. Avançando para além do limite o material deixa de ser elástico e passa a ser plástico (deformação permanente). As diferenças de elasticidade dos materiais podem ser explicadas com base no modelo molecular. As substâncias com um módulo de elasticidade elevado são difíceis de deformar uma vez que possuem forças de atração entre os átomos ou as moléculas fortes. Pelo contrário, as substâncias com um módulo de elasticidade reduzido possuem forças de atração menores [59].



Nas últimas décadas, os materiais elásticos com espaços vazios, do inglês "voids", que tem boas propriedades físicas, são usados largamente na engenharia, como em veículos, aeronaves, estruturas grandes e assim por diante. Devido às suas inúmeras aplicações, os problemas de elasticidade desses tipos de materiais tornaram-se problemas fortes que atraem as atenções de muitos pesquisadores.

Os sólidos elásticos com voids é uma das extensões simples da teoria da elasticidade clássica, que permite o tratamento de sólidos porosos em que o material da matriz é elástico e os interstícios são materiais vazios (ver Goodman and Cowin [14] e Nunziato e Cowin [31]). Vale a pena notar que, nas últimas décadas, a investigação sobre sistemas elásticos porosos foi feita considerando-se vários tipos de mecanismos dissipativos. Então vamos considerar as equações de evolução para a teoria unidimensional de materiais porosos com temperatura e microtemperatura dadas por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_x, \\ J\phi_{tt} = H_x + G, \\ \rho\eta_t = q_x, \\ \rho E_t = P_x + q - Q, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde T é tensão, H é a tensão de equilíbrio, G é a força de equilíbrio, q é o fluxo de calor, η é a entropia, P é o primeiro momento do fluxo de calor, Q é o baixo fluxo de calor, E é o primeiro momento da energia. As variáveis u e ϕ são, respectivamente, o deslocamento do material elástico sólido e o volume de fração dos poros. As equações constitutivas são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \mu u_x + b\phi - \beta\theta, \\ H = \delta\phi_x - d\omega, \\ G = -bu_x - \xi\phi + m\theta - \tau\phi_t, \\ \rho\eta = \beta u_x + c\theta + m\phi, \\ q = \kappa\theta_x + \kappa_1\omega, \\ P = -\kappa_2\omega_x, \\ Q = \kappa_3\omega + \kappa_4\theta_x, \\ \rho E = -\alpha\omega - d\phi_x, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

onde $\rho, J, \mu, b, \delta, m, d, \xi, \tau, \beta, c, \kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ e α são os coeficientes constitutivos, θ e ω são temperatura e microtemperatura, respectivamente. As equações constitutivas, no caso unidimensional, satisfazem

$$\xi > 0, \delta > 0, \mu > 0, \rho > 0, J > 0 \text{ e } \mu\xi \geq b^2.$$

Em nosso trabalho consideramos o acoplamento dado por b , que deve ser diferente de 0, mas o sinal não é matéria de análise. Por outro lado, quando efeitos térmicos são considerados, assumimos que a capacidade térmica c e a condutividade térmica κ são estritamente positivas. De maneira análoga, se a microtemperatura está presente, os parâmetros α, κ, κ_2 são positivos.

A análise do decaimento temporal em materiais unidimensionais porosos elásticos foi inicialmente estudado em [37] por Quintanilla. O autor mostrou que a dissipação dada pela viscosidade porosa não era suficiente forte para obter a estabilidade exponencial das soluções. As soluções decaem exponencialmente se elas são exponencialmente estáveis e, se não forem, dizemos que o decaimento é lento. Se o decaimento for exponencial, após um curto período de tempo, as deformações termomecânicas são muito pequenas e podemos desconsiderá-las. No entanto, se o decaimento é lento, as soluções enfraquecem de forma que as deformações termomecânicas podem ser apreciadas em um sistema após algum tempo. Portanto, a natureza das soluções determina o comportamento temporal do sistema e no ponto de vista termodinâmico

é importante classificá-los. Em [9, 10, 25, 26, 27] os autores mostram o tipo de decaimento quando combinamos temperatura, viscosidade elástica, viscosidade porosa e microtemperatura.

Por exemplo, quando em (1.2) não assumimos microtemperatura, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\phi_t - m\theta = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \beta u_{tx} + m\phi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ (u(x, 0), \phi(x, 0), \theta(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x), \theta_0(x)) \text{ em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) \text{ em } (0, L), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Em [9], Casas e Quintanilha estudaram o comportamento assintótico do sistema (1.3) com $x \in (0, \pi)$, onde são considerados dois tipos de mecanismos dissipativos: o tipo viscosidade na estrutura porosa e a dissipação térmica. Sabe-se que quando consideramos apenas o amortecimento térmico ou poroso temos um decaimento lento das soluções. Desta forma, os autores provaram que quando levamos em consideração ambos os mecanismos dissipativos nas equações de evolução (1.1) as soluções são exponencialmente estáveis baseada em um método desenvolvido por Liu and Zheng [23]. Método esse, muito diferente de alguns métodos da literatura, como o tradicional método da energia.

Quando combinamos dissipação porosa com microtemperaturas w , obtemos o seguinte sistema dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + dw_x + \xi\phi + \tau\phi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \alpha w_t - \kappa_2 w_{xx} + d\phi_{tx} + \kappa_3 w = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0), w(0, t)) = (u_0(x), \phi_0(x), w_0(x)), \text{ em } (0, L) \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)), \text{ em } (0, L). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Vale ressaltar que o sistema (1.4) foi estudado por Magaña e Quintanilla em [26]. Os autores usaram o teorema de Routh-Hurwitz para provar a falta de decaimento exponencial se $\chi = \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \neq 0$. Por sua vez em [48], Santos et. al., provaram que o sistema (1.4) é exponencialmente estável se e somente se $\chi = 0$. Quando $\chi \neq 0$, provaram que o sistema é polinomialmente

estável com taxa de decaimento ótima. Nesse caso, os autores usaram técnicas de semigrupo de operadores lineares.

Santos e Almeida Júnior. [47] estudaram o sistema elástico poroso

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \gamma(x)(u_t + \phi_t) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_{xx} + \xi\phi + \gamma(x)(u_t + \phi_t) = 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)) \text{ em } \Omega, \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde o damping localizado envolve a soma da velocidade de deslocamento de um material elástico sólido e a velocidade de fração do volume. Neste trabalho, os autores consideram $\Omega = (0, L)$ e $\omega = (L_1, L_2)$ com $0 \leq L_1 \leq L_2 \leq L$ e $\gamma \in L^\infty$ sendo uma função não negativa que satisfaz

$$\exists \gamma_0 > 0; \gamma(x) \geq \gamma_0, \forall x \in \omega, \quad (1.6)$$

com as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Dirichlet

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \forall t > 0,$$

ou condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \forall t > 0.$$

A principal contribuição dos autores, em relação ao sistema (1.5), foi ter encontrado uma condição necessária e suficiente para a estabilidade forte e, combinando o método do domínio da frequência com técnicas multiplicativas, conseguiram mostrar o decaimento exponencial do sistema elástico poroso com dissipação localizada.

Santos et al. [45] analisaram o sistema elástico poroso, onde é verificado que a viscoelasticidade não é forte o suficiente para mostrar o decaimento exponencial das soluções, independente de qualquer relação entre os coeficientes de velocidade de propagação de onda. No entanto, ele decai polinomialmente com taxa ótima.

Por outro lado, quando o amortecimento poroso é acoplado à microtemperaturas, os autores caracterizam explicitamente a taxa de decaimento se é do tipo exponencial ou do tipo polinomial, dependendo da relação entre os coeficientes de velocidade de propagação de onda. O resultado obtido é diferente de todos os existentes na literatura para materiais elásticos porosos, onde a soma dos dois processos de decaimento lento determina um processo que decai exponencialmente.

Vale lembrar que o sistema elástico poroso com dois amortecimentos independentes, um no deslocamento de um material elástico sólido e um na fração de volume é exponencialmente estável, independentemente de qualquer relação entre os coeficientes de velocidade de propagação de onda (ver [53, 54, 55] para mais detalhes).

Os autores mencionam o caso onde $\mu = \xi = b$. Neste caso temos um sistema de Timoshenko, onde as variáveis u e ϕ representa, respectivamente, o deslocamento transversal da viga e o ângulo de rotação do filamento. Com as observações citadas o sistema torna-se um sistema de Timoshenko com amortecimento viscoelástico.

O termo "Delay" significa atraso e representa a diferença de um tempo entre o envio e o recebimento de um sinal ou informação em sistemas de comunicação, por exemplo.

Esta palavra oriunda da língua inglesa é agregada ao português e costuma ser empregada para se referir aos retardos de sinais, principalmente no atraso de som nas transmissões via satélite.

O sistema de Timoshenko sem delay já vem sendo estudado por muitos autores nas últimas décadas. Raposo et al [38], colaboraram com o sistema linear

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \kappa(u_x - \psi)_x + u_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(u_x - \psi) + \psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0 \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

que possui dois mecanismos dissipativos do tipo atrito nas duas equações. Os autores mostraram que o sistema decai exponencialmente, sem qualquer relação entre os coeficientes, e para isto, usaram o método desenvolvido por Liu and Zheng [23] e seus colaboradores.

O sistema de Timoshenko com termo de atraso na função de rotação, dado por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - \kappa(\varphi_x + \psi)_x(x, t) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + \kappa(\varphi_x + \psi)(x, t) + \mu_1 \psi_t(x, t) + \mu_2 \psi_t(x, t - \tau) = 0, \\ \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0, \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, \psi(x, 0) = \psi_0, \psi_t(x, 0) = \psi_1, \\ \psi_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), \quad (x, t) \in (0, 1) \times [0, \tau]. \end{cases} \quad (1.8)$$

Onde $(x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty)$, $\tau > 0$ representa o atraso no tempo e μ_1 e μ_2 são constantes positivas. O sistema (1.8) foi estudado por Said-Houari e Laskri [44], onde a viga fixada em pontos da extremidade tem, além de um amortecimento interno, um feedback com delay. Neste trabalho, os autores mostraram que o problema é bem posto e que o sistema é exponencialmente estável.

Raposo et al. [39] estudaram o seguinte sistema de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) - \kappa(\varphi_x + \psi)_x(x, t) + \mu_1 \varphi_t(x, t) + \mu_2 \varphi_t(x, t - \tau) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + K(\varphi_x + \psi)(x, t) + \mu_3 \psi_t(x, t) + \mu_4 \psi_t(x, t - \tau) = 0, \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0, \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, \psi(x, 0) = \psi_0, \psi_t(x, 0) = \psi_1, \\ \varphi_t(x, t - \tau) = f_0(x, t - \tau), \psi_t(x, t - \tau) = g_0(x, t - \tau), \quad (x, t) \in (0, L) \times [0, \tau]. \end{cases} \quad (1.9)$$

Assim sendo, os autores estudaram o comportamento assintótico quando $t \rightarrow \infty$ baseando-se nos resultados devido á Gearhart-Herbst-Pruss-Huang [12, 16, 36].

A análise do comportamento assintótico com termoelasticidade porosa tem atraído a atenção de pesquisadores logo após Cowin e Nunziato [31] introduzirem a teoria linearizada para materiais elásticos com voids (espaços vazios). Um modelo interessante, entre o de Fourier e o de Gurtin-Pipkin, é obtido assumindo a lei (parabólica-hiperbólica) de Coleman-Gurtin para o fluxo de calor.

Em relação ao objetivo do presente trabalho, temos o artigo de Rivera e Quintanilla [41], onde eles estudaram o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta = 0 \quad \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \beta u_{tx} + m\phi_t = 0 \quad \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(\pi, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(\pi, t) = 0 \quad t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0), \theta(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x), \theta_0(x)) \quad \text{em } (0, \pi), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) \quad \text{em } (0, \pi). \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Eles provaram que o sistema (1.10) decai polinomialmente para $\frac{1}{t}$ sempre que

$$m(\beta b - m\mu) > 0.$$

Além disso, eles também provaram que a taxa pode melhorar de acordo com a regularidade dos dados iniciais. Para fazer isso, eles usaram o método de energia e algumas técnicas para mostrar a estabilidade polinomial.

Em suma, dois amortecimentos independentes, um em cada equação causa estabilidade exponencial do modelo. Além disso, o mesmo amortecimento atuando nas duas equações causa a estabilidade exponencial do sistema. A questão em aberto é saber se a lei de Coleman-Gurtin, ao agir sobre o sistema elástico poroso, causa uma estabilidade exponencial, que depende de uma relação entre os coeficientes de velocidade de propagação das ondas. Esta questão também será abordada nesta tese.

1.1.2 Sistema Mindlin Timoshenko

Placas são elementos estruturais delimitados por dois planos paralelos. A distância entre as faces do plano são denominados espessura (uniforme) da placa. Se a espessura é pequena comparada as outras dimensões das superfícies, tais como comprimento e largura, as placas são designadas por placas finas.

Enrijecedores são elementos lineares (barras) que, ao serem soldados à placa, conferem maior rigidez ao conjunto. Desse modo, o conjunto passa a apresentar maior resistência às solicitações impostas.

O estudo do comportamento estrutural de placas, seja ela enrijecida ou não, é de extrema importância devido à vasta aplicação desta em muitas estruturas civis e militares. Como por exemplo, em uma laje de ponte, ou laje de um edifício, na fuselagem de um avião, no casco de um navio, entre outros.

Dentre esses inúmeros materiais que vem sendo amplamente estudados, destacamos as lajes, que são componentes básicos das estruturas, sendo as lajes de concreto armado as mais utilizadas. A sua principal função é servir de piso ou cobertura nas construções e que se destina geralmente a receber os carregamentos atuantes no andar, provenientes do uso da construção (pessoas, móveis, equipamentos, paredes e etc.) e transferi-los para os apoios que são as vigas localizados em suas extremidades que as transmitem, por sua vez, aos pilares, através dos quais são as cargas transmitidas as fundações e daí para o solo [28].



FIGURA 1.3: TORCH Engenharia e Computação Gráfica

A literatura revela um grande uso da teoria de Reissner (1913-1996) [40], teoria de placas Mindlin (1906-1987) [29] e vigas de Timoshenko (1878-1972) [58] para descrever a dinâmica de placas e vigas elásticas.

Apesar das teorias de placas Reissner e Mindlin, ambos considerando-se em sua formulação a deformação por cisalhamento; fator de grande importância no estudo de placas espessas, confiam em hipóteses diferentes e muitas vezes foram associados como uma única teoria: "Teoria da placa Reissner-Mindlin"



FIGURA 1.4: Eric Reissner, Raymond Mindlin, Stephen Timoshenko.

O modelo de Mindlin-Timoshenko descreve o movimento elástico de uma placa fina homogênea e isotrópica. O movimento presume-se ser elástico, no sentido de que não ocorre nenhuma deformação permanente da placa [8]. Este modelo é considerado um dos mais importantes pois leva em consideração tanto deformações transversais como também rotacionais.

Vamos considerar a placa em coordenadas retangulares $(x, y, z) \in R^3$, onde $\Omega \subset R^2$ é um domínio limitado com fronteira suave, dada da seguinte forma $\Gamma = \partial\Omega$. Aqui, levamos em consideração a espessura da placa h e assumimos que, em estado de equilíbrio, ela ocupa a região $R = \Omega \times \left] -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right[$, isto é as faces estão no plano $z = \pm \frac{h}{2}$, chamado de plano médio da placa (ver figura 1.5, obtida em [35]). As funções $\psi(x, y, t)$ e $\varphi(x, y, t)$ representam os ângulos de rotação de um filamento da placa e a função $\omega(x, y, t)$ representa o deslocamento transversal da superfície média da placa, para $(x, y) \in \Omega, t > 0$.

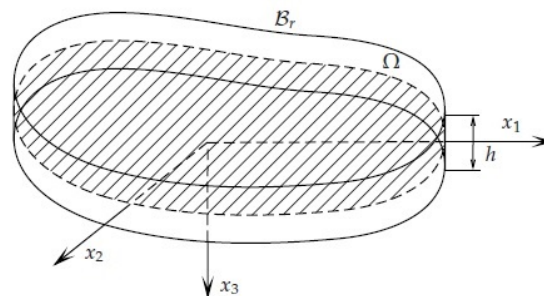


FIGURA 1.5: Placa Fina

No modelo de Mindlin-Timoshenko [21, 22] os filamentos da placa mantem-se normais ao plano médio se não forem submetidos a nenhuma tensão de deformação, mas estes filamentos não necessariamente mantem-se perpendicular ao plano médio da placa sob deformação (ver figura 1.6, obtida em [35]). Isto ocorre pois se considera a deformação do corte transversal, o que nos leva as seguintes relações aproximadas

$$\psi \approx -\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \tilde{\psi}\right), \quad \varphi \approx -\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \tilde{\varphi}\right),$$

onde $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$ representam um fator de correção devido ao efeito de corte.

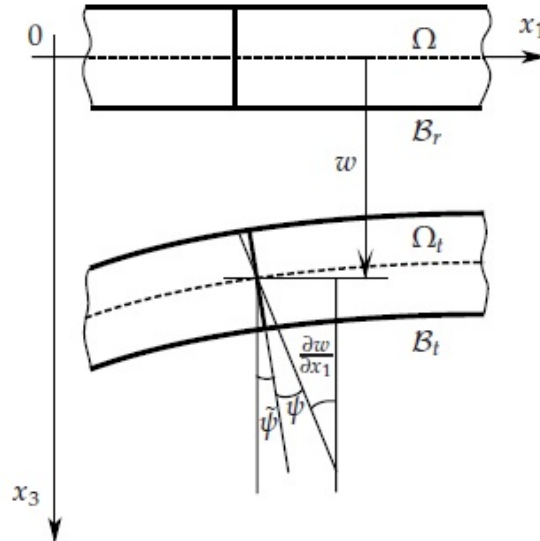


FIGURA 1.6: Seção transversal de uma placa deformada

De um modo geral, podemos descrever as equações de movimento bidimensionais que regem a teoria de Mindlin-Timoshenko para o estiramento de placas como:

$$\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (1.11)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x \quad (1.12)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \quad (1.13)$$

em que $I = h^3/12$ é o momento de inércia, ρ representa a densidade do material, M o momento fletor e Q o esforço cortante.

Tanto os momentos fletores, quanto as forças cortantes são grandezas por unidade de tempo, e levando em conta a lei de Hooke e as hipóteses de que $\psi, \varphi, \nabla\omega$, são pequenos (ver [20]).

As equações constitutivas são dadas por

$$M_x = D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), M_y = D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), M_{xy} = D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (1.14)$$

$$Q_x = \kappa Gh \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi \right), Q_y = \kappa Gh \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \varphi \right), \quad (1.15)$$

tal que $D = EI/(1 - \mu^2)$ é a rigidez à flexão da placa, κ é o fator de correção do cortante e G exprime o módulo de rigidez do cortante e é dado por $G = E/2(1 + \mu)$, em que E é o módulo de Young e μ é a constante de Poisson. O valor do fator de correção κ dependente de μ e varia quase linearmente de 0,76 a 0,91. Por outro lado, μ está variando entre 0 e 1/2.

Muitos pesquisadores em matemática têm desenvolvido um interesse crescente para determinar o comportamento assintótico das soluções para os sistemas de Timoshenko. E desde que, são muito semelhantes com modelos de placas de Mindlin-Timoshenko, seria interessante analisar alguns trabalhos.

Inicialmente, mencionamos um resultado devido à Renardy *et al.* [19], onde os autores mostram que o sistema de Timoshenko

$$\begin{cases} \rho \omega_{tt} - K \omega_{xx} + K \phi_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ I_\rho \phi_{tt} - EI \phi_{xx} + K(\phi - \omega_x) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \omega(0, t) = \phi(0, t) = 0, \\ K \phi(L, t) - K \omega_x(L, t) = \alpha \omega_t(L, t), \\ EI \phi_x(L, t) = -\beta \phi_t(L, t), \end{cases} \quad (1.16)$$

pode ser estabilizado uniformemente por meio de um controle na fronteira. No trabalho também foi feito um estudo numérico sobre o espectro.

Em 1999, Soufyane [51] considerou o sistema de Timoshenko com um único amortecimento do tipo atrito, representado pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} - K(\varphi_x - \psi)_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ I_\rho\psi_{tt} - EI\psi_{xx} - K(\varphi_x - \psi) + b(x)\psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

com $I_\rho = \rho I$, $\rho = \rho A$, $K = \kappa GA$ e $b(x)$ uma função contínua e positiva tal que

$$0 < b_0 \leq b(x) \leq b_1.$$

Soufyane estudou a estabilização uniforme desse modelo dissipativo e provou que a energia das soluções decresce exponencialmente se, e somente se, as velocidades de propagação de ondas associadas ao sistema são iguais, isto é

$$\frac{K}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}, \quad (1.18)$$

Muñoz Rivera e Racke [42], em 2003, consideraram um caso linear com dissipação $a\psi_t$ ($a > 0$), no qual provaram que a propriedade de decaimento exponencial ocorre se, e somente se, a relação (1.18) ocorre.

Resultados análogos, foram obtidos por Ammar-Khodja, et al. [4] em 2003 e Almeida Junior, et al. [3] em 2013. O primeiro estudou o sistema de Timoshenko e levou em consideração o mecanismo dissipativo do tipo memória atuando somente na equação das rotações angulares, e o segundo considerou um efeito dissipativo do tipo linear atuando na equação do deslocamento transversal. Nos dois casos, a estabilidade exponencial está relacionado com a igualdade entre as velocidades de propagação de ondas do sistema.

Motivados nos resultados da literatura em estabilização de sistemas dissipativos unidimensionais de Timoshenko, Fernádes Sare [11] expandiu as propriedades de estabilização assintótica para equação da placa no caso bidimensional (N=2) por meio de sistema de equações de segunda ordem de Mindlin-Timoshenko.

O modelo conservativo de uma placa fina bidimensional de Mindlin-Timoshenko é dado por

$$\rho_1 \omega_{tt} - K \mathcal{L}_1(\omega, \psi, \varphi) = 0, \quad (1.19)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D \mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + K \left(\psi + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.20)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D \mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + K \left(\varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.21)$$

onde

$$\mathcal{L}_1(\omega, \psi, \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad (1.22)$$

$$\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad (1.24)$$

em que $\Omega \times (0, \infty)$, onde Ω é um domínio limitado de \mathbf{R}^2 . Levamos em consideração $\rho_1 = \rho h$ e $\rho_2 = \frac{\rho h^3}{12}$, onde ρ é a densidade de massa do material que compõe a placa, h é a espessura uniforme da placa, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ representa o módulo de rigidez à flexão e $K = \frac{\kappa Eh}{2(1+\mu)}$ denota o módulo de cisalhamento, onde μ é chamada *coeficiente de Poisson* que é tomada em $(0, 1/2)$, κ é um fator de correção de cisalhamento e E denota o módulo de Young. As funções $\psi(x, y, t)$ e $\varphi(x, y, t)$ representam os ângulos de rotação de um filamento da placa e a função $\omega(x, y, t)$ denota o deslocamento transversal da superfície média da placa, para $(x, y) \in \Omega, t > 0$.

Lagnese [22] associou ao sistema (1.19)-(1.21), condições geométricas na fronteira e introduziu dampings na fronteira do conjunto Ω e provou que o sistema é exponencialmente estável, sem qualquer relação entre os coeficientes do sistema. Um resultado equivalente foi obtido por Muñoz Rivera e Aquendo et al. [43] em 2003. Os autores consideraram condições de fronteira do tipo memória e provaram que as soluções do sistema (1.19)-(1.21) são exponencialmente estáveis, desde que os núcleos tenham um comportamento exponencial, e são polinomialmente estáveis para núcleos do tipo polinomial.

Fernández adicionou dissipações friccionais $d_1 \psi_t$ e $d_1 \varphi_t$ atuando somente sobre as equações dos ângulos de rotação, considerando condições de fronteira do tipo Dirichlet e concluiu que o

modelo dissipativo não é exponencialmente estável independentemente de qualquer relação entre os coeficientes do sistema, diferente do análogo unidimensional. Entretanto, o autor mostra que as soluções do sistema decaem polinomialmente para zero onde as taxas de decaimento podem ser melhoradas de acordo com a regularidade dos dados iniciais.

Campelo et al. [8] em 2017, estudaram o sistema

$$\rho_1 \omega_{tt} - K(\psi + \omega_x)_x + K(\varphi + \omega_y)_y = 0, \quad (1.25)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\psi_{yy} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\varphi_{xy} + K(\psi + \omega_x) + \alpha_1 \psi_t = 0, \quad (1.26)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\varphi_{xx} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\psi_{xy} + K(\varphi + \omega_y) + \alpha_2 \varphi_t = 0. \quad (1.27)$$

Os autores provam que quando adiciona-se amortecimentos de atrito em cada uma das equações dos ângulos de rotação, então, o sistema é exponencialmente estável se, e somente se

$$\frac{K}{\rho_1} = \frac{D}{\rho_2}, \quad (1.28)$$

O que em outras palavras significa dizer que o sistema decai exponencialmente se, e somente se, as velocidades de propagação de ondas são iguais.

Agora, considere dois mecanismos dissipativos da forma $D_1 \mathcal{L}_2(\psi_t, \varphi_t)$ e $D_1 \mathcal{L}_3(\varphi_t, \psi_t)$ atuando nas equações (4.2) e (4.3), respectivamente. Jorge Silva et al. [17], provaram que o sistema

$$\rho_1 \omega_{tt} - K \mathcal{L}_1(\omega, \psi, \varphi) = 0, \quad (1.29)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D \mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + K(\psi + \omega_x) - D_1 \mathcal{L}_2(\psi_t, \varphi_t) = 0, \quad (1.30)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D \mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + K(\varphi + \omega_y) - D_1 \mathcal{L}_3(\varphi_t, \psi_t) = 0, \quad (1.31)$$

não é exponencialmente estável. Além disso, usando um resultado devido a Borichev & Tomilov [5], os autores mostram que solução possui decaimento do tipo polinomial com taxa ótima.

Agora, adotando-se os dois tipos de dampings nas mesmas equações, é possível obter o decaimento exponencial como em [8] dependendo dos coeficientes do sistema? Ou o decaimento obtido será polinomial, independente das relações de velocidade de propagação de ondas?

A fim de buscar responder estas e outras questões, iremos analisar o comportamento da energia. Com essa finalidade, vamos adicionar quatro dissipações internas $\alpha_1\psi_t$ e $D_1\mathcal{L}_2(\psi_t, \varphi_t)$ em (4.2) e $\alpha_2\varphi_t$ e $D_1\mathcal{L}_3(\varphi_t, \psi_t)$ em (4.3) e observar o que acontece nesse caso.

1.2 Objetivo do Tese

O principal objetivo desta tese é estudar o comportamento da energia de soluções de sistemas do tipo elástico poroso com um termo de atraso e elástico poroso com condução de calor e sobre efeito de microtemperaturas. Também estudamos um modelo de Mindlin-Timoshenko com dissipação do tipo atrito e viscoelástica.

Neste contexto, motivados pelos trabalhos que expomos anteriormente, vamos mostrar o resultado que caracteriza a estabilidade para os modelos citados, ainda que esteja condicionada a uma possível relação entre os seus coeficientes.

Paralelamente, com objetivo de comprovar numericamente nossos resultados analíticos para o sistema de Mindlin-Timoshenko além de comparar os trabalhos [17] e [8], são feitas simulações numéricas sobre o caso conservativo da energia e quando estes tem um comportamento polinomial.

1.3 Organização da Tese

Para uma melhor organização do nosso trabalho, optamos por inserir os teoremas de análise matemática na medida que forem necessários para estudar. Por exemplo: as questões como a existência, unicidade e a estabilidade do modelo em estudo.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, apresentamos um modelo dissipativo elástico poroso com dissipação do tipo atrito atuando em uma equação do sistema, ou seja, $\alpha_2\phi_t$, e um delay do tipo $\mu_2\phi_t(x, t - \tau)$. Apresentamos aqui a energia do sistema e mostramos naturalmente que é não crescente, em seguida analisamos a existência e unicidade de soluções e as questões de decaimento exponencial usando o método da energia. Através desse método para obter o decaimento exponencial,

construímos funcionais não-lineares equivalentes a energia das soluções onde está condicionada a relação $\kappa/\rho_1 = \delta/J$.

No capítulo 3, apresentamos o sistema termoelástico poroso obtido assumindo a lei de Coleman-Gurtin, onde encontramos a energia do sistema e estudamos existência e unicidade de soluções usando técnicas de semigrupo. Dando continuidade, mostraremos que se $\kappa/\rho = \delta/J$, então o semigrupo de contração $S(t) = e^{At}$ é exponencialmente estável, caso contrário, decai polinomialmente.

No capítulo 4, apresentamos um modelo dissipativo de Mindlin-Timoshenko com dissipações agindo somente na equação que governa o deslocamento transversal, onde apresentamos a energia do sistema, a qual naturalmente é não-crescente e posteriormente analisamos a existência e unicidade de soluções, via técnicas de semigrupos de operadores lineares. Em seguida, mostraremos a falta de estabilidade exponencial, em que não está condicionada a qualquer relação existente entre os coeficientes do sistema $\rho_1, \kappa, D, \rho_2$. Prosseguindo, mostramos outro resultado importante, que versa sobre o decaimento polinomial, onde iremos usar três lemas auxiliares. Para ambos os resultados, usaremos o método baseado no teorema de Gearhart-Herbst-Pruss-Huang [12], [16], e [36], para sistemas dissipativos, além de mostrarmos que a sua taxa é ótima. Para provar este resultado, utilizamos o teorema de Borichev e Tomilov.

No capítulo 5, desenvolvemos resultados numéricos referentes ao nosso sistema Mindlin-Timoshenko, e por simplicidade adotamos condições de contorno do tipo dirichlet homogênea. Iniciamos discretizando nosso sistema, onde nos apropriamos do método de diferenças finitas. Em seguida, obteremos a energia discretizada. Finalizamos o capítulo com as simulações numéricas, que apresentam o caso conservativo da energia, falta de decaimento exponencial numérico e o seu decaimento polinomial numérico, quando imposta certas condições.

Modelo Elástico Poroso com atraso no tempo

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos o seguinte sistema dissipativo elástico poroso:

$$\rho_1 u_{tt}(x, t) - \kappa u_{xx}(x, t) - b\phi_x(x, t) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (2.1)$$

$$J\phi_{tt}(x, t) - \delta\phi_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) + \xi\phi(x, t) + \alpha_2\phi_t(x, t) + \mu_2\phi_t(x, t - \tau) = 0 \text{ em } \Omega. \quad (2.2)$$

onde $\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$, $\tau > 0$ é o tempo de atraso, α_2 e μ_2 são números reais positivos e $\alpha_2 > \mu_2$.

Associamos ao sistema as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} (u(x, 0), \phi(x, 0)) &= (u_0(x), \phi_0(x)), \text{ em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) &= (u_1(x), \phi_1(x)), \text{ em } (0, L), \\ \phi_t(x, t - \tau) &= g_0(x, t - \tau), (x, t) \in (0, L) \times (0, \tau), \end{aligned} \quad (2.3)$$

e as condições de Dirichlet homogêneas

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0. \quad (2.4)$$

Para resolução do nosso problema, vamos tomar alguns resultados preliminares que enunciaremos nas próximas seções.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 2.1 estabelecemos a energia do problema associada ao sistema (2.1)-(2.4) e mostramos que a energia é decrescente ao longo do tempo t . Na seção 2.3 discutimos existência, regularidade e unicidade de soluções globais do problema (2.1)-(2.4) via método de semigrupo de operadores lineares. Na seção 2.3, analisamos o comportamento assintótico do modelo via método da Energia.

2.2 Energia total do sistema

Nesta seção, encontramos a energia associada ao problema (2.1) - (2.4). Para esta finalidade, iremos transformar (2.1)-(2.4) em um problema equivalente como foi introduzido em [30]. As novas variáveis dependentes são

$$\omega(x, \rho, t) = \phi_t(x, t - \tau\rho), \quad \rho \in (0, 1), \quad (2.5)$$

que satisfaz para $(x, \rho, t) \in (0, L) \times (0, 1) \times (0, \infty)$.

Com uma simples diferenciação podemos mostrar que ω satisfaz

$$\tau\omega_t(x, \rho, t) + \omega_\rho(x, \rho, t) = 0.$$

Portanto, o problema (2.1)-(2.4) é equivalente ao sistema de equações

$$\rho_1 u_{tt}(x, t) - \kappa u_{xx}(x, t) - b\phi_x(x, t) = 0, \quad (2.6)$$

$$J\phi_{tt}(x, t) - \delta\phi_{xx}(x, t) + bu_x(x, t) + \xi\phi(x, t) + \alpha_2\phi_t(x, t) + \mu_2\omega(x, 1, t) = 0, \quad (2.7)$$

$$\tau\omega_t(x, \rho, t) + \omega_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad (2.8)$$

com $x \in (0, L)$, $\rho \in (0, 1)$ e $t > 0$,

apresentando as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0, \quad u_t(x, 0) = u_1, \quad x \in (0, L), \\ \phi(x, 0) &= \phi_0, \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1, \quad x \in (0, L), \\ \omega(x, \rho, 0) &= g_0(x, -\tau\rho) \text{ em } (0, L) \times (0, 1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

e condições de fronteira do tipo Dirichlet-Dirichlet

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ \omega(x, 0, t) &= \phi_t(x, t) \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para $U = (u^1, \varphi^1, \phi^1, v^1, \omega^1)'$, $V = (u^2, \varphi^2, \phi^2, v^2, \omega^2)'$ e para e

$$\tau\mu_2 < 1 < \tau(2\alpha_2 - \mu_2), \quad (2.11)$$

e

$$b^2 \leq \xi\kappa. \quad (2.12)$$

Definimos o espaço de Hilbert \mathcal{H} por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2((0, L) \times (0, 1)).$$

o qual é um espaço de Hilbert, dotado do seguinte produto interno em \mathcal{H}

$$\begin{aligned} (U, V) &= \int_0^L \left[\rho_1 \varphi^1 \overline{\varphi^2} + J v^1 \overline{v^2} + \delta \phi_x^1 \overline{\phi_x^2} + \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x^1 + \sqrt{\xi} \phi^1 \right) \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} \overline{u_x^2} + \sqrt{\xi} \overline{\phi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi} \right) u_x^1 \overline{u_x^2} \right] dx + \int_0^L \int_0^1 \omega^1(x, \rho, t) \overline{\omega^2(x, \rho, t)} d\rho dx, \end{aligned} \quad (2.13)$$

e norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L \left[\rho_1 |\varphi^1|^2 + J |v^1|^2 + \delta |\phi_x^1|^2 + \left| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x^1 + \sqrt{\xi} \phi^1 \right|^2 + \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi} \right) |u_x^1|^2 \right] dx \\ &\quad + \int_0^L \int_0^1 |\omega^1(x, \rho, t)|^2 d\rho dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Definimos a energia de soluções do sistema elástico poroso (2.6)-(2.10) por:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 |u_t|^2 + J |\phi_t|^2 + \delta |\phi_x|^2 + \left| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right|^2 + \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi} \right) |u_x|^2 \right] dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^1 \omega^2(x, \rho, t) d\rho dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Lema 2.1. (Lei de dissipação de energia) Existe uma constante positiva C tal que para qualquer solução (u, ϕ, ω) do problema (2.6)-(2.10) e para todo $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -C \int_0^L (|\phi_t|^2 + |\phi_t(x, t - \tau)|^2) dx, \quad (2.16)$$

isto é,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.17)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.6) por u_t , integrando por partes em $(0, L)$ e usando as condições de contorno (2.10), obtemos

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \phi u_{xt} dx = 0. \quad (2.18)$$

Da mesma forma, multiplicando a equação (2.7) por ϕ_t , integrando por partes em $(0, L)$ e usamos as condições de fronteira (2.10), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{J}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi_t|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \phi_t dx &+ \frac{\xi}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi|^2 dx + \alpha_2 \int_0^L |\phi_t|^2 dx \\ &+ \mu_2 \int_0^L \phi_t \omega(x, 1, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Agora, multiplicando (2.8) por ω e integrando-se por partes em $(0, L) \times (0, 1)$, encontramos

$$\tau \int_0^L \int_0^1 \omega_t \omega \, dx \, d\rho + \int_0^L \int_0^1 \omega_\rho \omega \, dx \, d\rho = 0,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 |\omega|^2 \, d\rho \, dx &= - \int_0^L \int_0^1 \frac{d}{d\rho} |\omega|^2 \, d\rho \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^L |\omega(x, 1, t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\omega(x, 0, t)|^2 \, dx, \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 |\omega(x, \rho, t)|^2 \, d\rho \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t - \tau)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t)|^2 \, dx.$$

Somando as igualdades (2.18), (2.19) e (2.20), obtemos o resultado

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\rho_1 |u_t|^2 + J |\phi_t|^2 + \kappa |u_x|^2 + \delta |\phi_x|^2 + 2b\phi u_x + \xi |\phi|^2 \right) \, dx \\ &+ \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 |\omega(x, \rho, t)|^2 \, d\rho \, dx = -\alpha_2 \int_0^L |\phi_t|^2 \, dx - \mu_2 \int_0^L \phi_t \omega(x, 1, t) \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t - \tau)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t)|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Recorrendo a igualdade dada em (2.12), temos que

$$\kappa u_x^2 + 2bu_x \phi + \xi \phi^2 = \kappa \left(u_x + \frac{b}{\kappa} \phi \right)^2. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.59) em (2.20), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\rho_1 |u_t|^2 + J |\phi_t|^2 + \delta |\phi_x|^2 + \kappa \left| u_x + \frac{b}{\kappa} \phi \right|^2 \right) dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 |\omega(x, \rho, t)|^2 d\rho dx \\ &= -\alpha_2 \int_0^L |\phi_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^L \phi_t \omega(x, 1, t) dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t - \tau)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

E usando a energia dada em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= -\alpha_2 \int_0^L |\phi_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^L \phi_t \omega(x, 1, t) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t - \tau)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_t(x, t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Aplicando a desigualdade de Young, reescrevemos a equação anterior da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\frac{1}{2} \underbrace{(2\alpha_2 - \mu_2 - 1)}_{:=C_1} \int_0^L |\phi_t|^2 dx - \frac{1}{2} \underbrace{(1 - \mu_2)}_{:=C_2} \int_0^L |\phi_t(x, t - \tau)|^2 dx$$

Por (2.11) podemos afirmar que $C_1, C_2 > 0$, donde segue que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -C \int_0^L (|\phi_t|^2 + |\phi_t(x, t - \tau)|^2) dx,$$

donde $C = \min\{C_1, C_2\} > 0$.

Assim, obtemos

$$E(t) \leq E(0), \forall t > 0.$$

Desta forma, podemos afirmar que a energia do sistema é dissipativa. Concluindo assim a demonstração do lema.

2.3 O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares

Nesta seção, estudamos a existência e unicidade de soluções para o sistema elástico poroso com damping do tipo atrito e com retardo, via Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares (ver A. Pazy [33]). Para começar, vamos reescrever o problema (2.6) - (2.10), na forma de um problema de Cauchy para $U = (u, u_t, \phi, \phi_t, \omega)'$. Desse modo, o vetor U satisfaz a equação

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.23)$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, g_0)'$ é o vetor dos dados iniciais e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador diferencial denotado por

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ \phi \\ v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\kappa}{\rho_1} u_{xx} + \frac{b}{\rho_1} \phi_x \\ v \\ \frac{\delta}{J} \phi_{xx} - \frac{b}{J} u_x - \frac{\xi}{J} \phi - \frac{\alpha_2}{J} v - \frac{\mu_2}{J} \omega(\cdot, 1) \\ -\frac{1}{\tau} \omega_\rho \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Consideramos

$$D(\mathcal{A}) = \{U = (u, \varphi, \phi, v, \omega) \in H : v = \omega(\cdot, 0) \in (0, L)\},$$

onde

$$H = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times H_0^1(0, L) \times (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L; H^1(0, L))$$

Munidos dessas informações preliminares, estamos em condições de enunciar o teorema de existência e unicidade de soluções do problema (2.6) - (2.10).

Teorema 2.1. Se $\alpha_2 > \mu_2$, então o operador \mathcal{A} gera um semigrupo C_0 -de contração $S(t)$ sobre \mathcal{H} . Assim, para dados iniciais $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (2.6) - (2.10) tem uma única solução fraca

$U \in C^0([0, \infty[, \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então U é solução forte de (2.6) - (2.10), isto é

$$U \in C^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Demonstração: Seja $U = (u, \varphi, \phi, v, \omega)' \in D(\mathcal{A})$, então do produto interno em (2.13), temos

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle = -C \int_0^L (\phi_t^2 + \omega^2(x, 1, t)) dx \leq 0, \quad (2.25)$$

portanto, o operador \mathcal{A} é dissipativo. Como $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} , isto é $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, a fim de usar o Teorema de Lummer- Phillips, (ver [33]), devemos mostrar que $\lambda I - \mathcal{A}$ é sobrejetivo para $\lambda > 0$. Com esse propósito, tomando $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5) \in \mathcal{H}$, devemos encontrar $U = (u, \varphi, \phi, v, \omega) \in D(\mathcal{A})$ solução da equação resolvente

$$\lambda U - \mathcal{A}U = F, \quad (2.26)$$

Deste modo, reescrevemos a equação (2.26), em termos de suas componentes, para obter o sistema

$$\lambda u - \varphi = f^1, \quad (2.27)$$

$$\lambda \varphi - \frac{\kappa}{\rho_1} u_{xx} - \frac{b}{\rho_1} \phi_x = f^2, \quad (2.28)$$

$$\lambda \phi - v = f^3, \quad (2.29)$$

$$\lambda v - \frac{\delta}{J} \phi_{xx} + \frac{b}{J} u_x + \frac{\xi}{J} \phi + \frac{\alpha_2}{J} v + \frac{\mu_2}{J} \omega(\cdot, 1) = f^4, \quad (2.30)$$

$$\lambda \omega + \frac{1}{\tau} \omega_\rho = f^5. \quad (2.31)$$

Para encontrar $U = (u, \varphi, \phi, v, \omega) \in D(\mathcal{A})$ solução so sistema (2.6) - (2.10), procedemos como em [30]. Suponhamos que encontramos u e ϕ , assim sendo, para (2.27) e (2.29), temos

$$v = \lambda \phi - f^3, \quad (2.32)$$

e

$$\varphi = \lambda u - f^1. \quad (2.33)$$

É claro que $v, \varphi \in H_0^1(0, L)$.

Temos que

$$\omega(x, 0) = v(x), \text{ para } x \in (0, L). \quad (2.34)$$

Multiplicando (2.31) por $e^{\lambda\tau\rho}$, vem que

$$\lambda\tau\omega e^{\lambda\tau\rho} + \omega_\rho e^{\lambda\tau\rho} = \tau f^5 e^{\lambda\tau\rho},$$

donde segue que

$$\frac{d}{d\rho}\{\omega e^{\lambda\tau\rho}\} = \tau f^5 e^{\lambda\tau\rho}.$$

Integrando em $(0, \rho)$, obtemos

$$\omega(x, \rho) = \omega(x, 0)e^{-\lambda\tau\rho} + \tau e^{-\lambda\tau\rho} \int_0^\rho f^5(x, \sigma)e^{-\lambda\tau\sigma} d\sigma. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.32) na equação (2.35), chegamos

$$\omega(x, \rho) = \lambda\phi(x)e^{-\lambda\tau\rho} - f^3 e^{-\lambda\tau\rho} + \tau e^{-\lambda\tau\rho} \int_0^1 f^5(x, \sigma)e^{-\lambda\tau\sigma} d\sigma. \quad (2.36)$$

De (2.36), temos

$$\omega(x, 1) = \lambda\phi(x)e^{-\lambda\tau} + \omega_0(x), \text{ onde } x \in (0, L) \quad (2.37)$$

e

$$\omega_0(x) = -f^3 e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f^5(x, \sigma)e^{-\lambda\tau\sigma} d\sigma, \quad (2.38)$$

observe que a fórmula de ω_0 depende somente de f^3 e f^5 . Então substituímos a equação (2.27) em (2.28) e (2.29) em (2.30), encontramos

$$\rho_1 \lambda^2 u - \kappa u_{xx} - b\phi_x = \rho_1(f^2 + \lambda f^1), \quad (2.39)$$

$$J\lambda^2 \phi - \delta \phi_{xx} + bu_x + \xi \phi + \alpha_2 \lambda \phi + \mu_2 \omega(\cdot, 1) = J(f^4 + \lambda f^3) + \alpha_2 f^3. \quad (2.40)$$

Resolver o sistema (2.39) – (2.40) é equivalente encontrar

$$(u, \phi) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L),$$

tal que

$$\int_0^L \rho_1 \lambda^2 u W - \kappa u_{xx} W - b\phi_x W \, dx = \int_0^L (\rho_1(f^2 + \lambda f^1) + \alpha_1 f^1) W \, dx \quad (2.41)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^L J\lambda^2 \phi \chi - \delta \phi_{xx} \chi + bu_x \chi + \xi \phi \chi + \alpha_2 \lambda \phi \chi + \mu_2 \omega(\cdot, 1) \chi \, dx \\ = \int_0^L ((f^4 + \lambda f^3) + \alpha_2 f^3) \chi \, dx, \end{aligned} \quad (2.42)$$

para algum $(W, \chi) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. Usando integração por partes e as condições de fronteira em (2.41) e (2.42), resulta

$$\int_0^L \rho_1 \lambda^2 u W + \kappa u_x W_x - b\phi_x W \, dx = \int_0^L (\rho_1(f^2 + \lambda f^1) + \alpha_1 f^1) W \, dx, \quad (2.43)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^L (J\lambda^2 \phi \chi + \delta \phi_x \chi_x + bu_x \chi + \xi \phi \chi + \alpha_2 \lambda \phi \chi + \mu_2 \omega(\cdot, 1) \chi) \, dx \\ = \int_0^L (J(f^4 + \lambda f^3) + \alpha_2 f^3) \chi \, dx. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Substituindo (2.37) em (2.44), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^L J\lambda^2\phi\chi \, dx &+ \int_0^L \delta\phi_x\chi_x \, dx + \int_0^L bu_x\chi \, dx + \int_0^L \xi\phi\chi \, dx + \int_0^L \alpha_2\lambda\phi(x)\chi \, dx \\
 &+ \int_0^L \lambda\mu_2\phi(x)e^{-\lambda\tau}\chi \, dx = \int_0^L J(f^4 + \lambda f^3)\chi \, dx + \int_0^L \alpha_2 f^3\chi \, dx \\
 &- \int_0^L \mu_2\omega_0(x)\chi \, dx. \tag{2.45}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, somando as equações (2.43) e (2.45), segue que

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \rho_1\lambda^2 uW \, dx &+ \int_0^L \kappa u_x W_x \, dx + \int_0^L b(u_x\chi \, dx - \phi_x W) \, dx + \int_0^L \delta\phi_x\chi_x \, dx + \int_0^L \xi\phi\chi \, dx \\
 &+ \int_0^L J\lambda^2\phi\chi \, dx + \int_0^L (\alpha_2 + \mu_2e^{-\lambda\tau})\lambda\phi(x)\chi \, dx \\
 &= + \int_0^L \rho_1(f^2 + \lambda f^1)W \, dx + \int_0^L (\alpha_2 f^3 - \mu_2\omega_0(x))\chi \, dx \\
 &+ \int_0^L J(f^4 + \lambda f^3)\chi \, dx \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Sendo assim, para solucionar o problema (2.41) - (2.42), definimos a seguinte forma bilinear

$$a : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(U_1, U_2) \mapsto a(U_1, U_2)$$

onde

$$\begin{aligned}
a(U_1, U_2) : &= \int_0^L \rho_1 \lambda^2 u W \, dx + \int_0^L \kappa u_x W_x \, dx + \int_0^L b(u_x \chi \, dx - \phi_x W) \, dx + \int_0^L \delta \phi_x \chi_x \, dx \\
&+ \int_0^L \xi \phi \chi \, dx + \int_0^L J \lambda^2 \phi \chi \, dx + \int_0^L (\alpha_2 + \mu_2 e^{-\lambda \tau}) \lambda \phi(x) \chi \, dx, \quad (2.47)
\end{aligned}$$

para $U_1 = (u, \phi) \in \Gamma$ e $U_2 = (W, \chi) \in \Gamma$ com $\Gamma = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. A forma bilinear (2.47) é contínua e coerciva. Além disso, definimos a aplicação G linear e contínua

$$G : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$U_2 \mapsto G(U_2)$$

onde

$$G := \int_0^L \rho_1 (f^2 + \lambda f^1) W \, dx + \int_0^L (\alpha_2 f^3 - \mu_2 \omega_0(x)) \chi \, dx + \int_0^L J (f^4 + \lambda f^3) \chi \, dx. \quad (2.48)$$

Segue, do Teorema de Lax - Milgran (ver [6] para mais detalhes) que existe uma única solução $U_1 \in \Gamma$, que satisfaz o problema variacional

$$a(U_1, U_2) = \langle G, U_2 \rangle, \quad \forall U_2 \in \Gamma \quad (2.49)$$

Logo, existe uma única solução $U_1 = (u, \phi) \in \Gamma$ de (2.39)-(2.40). Daí

$$u, \phi \in H_0^1(0, L) \quad (2.50)$$

Além disso, de (2.28) e (2.30), vem que

$$u, \phi \in H^2(0, L) \quad (2.51)$$

De (2.50) em (2.27) e (2.29), resulta

$$\varphi, v \in H_0^1(0, L)$$

De (2.31)

$$\omega \in L^2(0, L; H^1(0, L))$$

Portanto $U = (u, \varphi, \phi, v, \omega)' \in D(\mathcal{A})$, provando que $\lambda I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Finalmente, usando o Teorema de Lummer-Phillips, concluímos que o operador \mathcal{A} é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$ do espaço de Hilbert \mathcal{H} .

2.4 Decaimento Exponencial

Teorema 2.2. Seja $U(0) \in D(\mathcal{A})$. Assuma que $\alpha_2 > \mu_2$, $\mu\xi \geq b^2$ e

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{\delta}{J}$$

Então existem duas constantes positivas C e γ independente de t tal que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0, \quad (2.52)$$

Demonstração: Para mostrar o decaimento exponencial de soluções, iremos encontrar o funcional $\mathcal{L}(t)$, equivalente a energia $E(t)$, tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma\mathcal{L}(t), \quad \gamma > 0.$$

Para encontrar o funcional $\mathcal{L}(t)$, precisaremos provar alguns Lemas auxiliares.

Definimos o seguinte funcional

$$I_1(t) := - \int_0^L (\rho_1 u_t u + J \phi_t \phi) dx - \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \phi^2 dx. \quad (2.53)$$

Então temos a seguinte estimativa.

Lema 2.2. Seja (u, ϕ, ω) uma solução de (2.6)-(2.10), então para qualquer $\varepsilon > 0$, teremos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_1(t) \leq & - \int_0^L (\rho_1 u_t^2 + J \phi_t^2) dx + (\delta + C^* \mu_2 \varepsilon) \int_0^L \phi_x^2 dx + \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \\ & - \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi} \right) \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\mu_2}{4\varepsilon} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde $C^* = 1/\pi^2$ é a constante de Poincaré.

Demonstração: Derivando I_1 no tempo, vem que

$$\frac{d}{dt} I_1(t) = - \int_0^L (\rho_1 u_t^2 + J \phi_t^2) dx - \int_0^L (\rho_1 u_{tt} u + J \phi_{tt} \phi) dx - \alpha_2 \int_0^L \phi \phi_t dx. \quad (2.55)$$

Agora, multiplicando (2.6) por u , integrando-se por partes e usando as condições de contorno, vem que

$$\int_0^L \rho_1 u_{tt} u dx = -\kappa \int_0^L u_x^2 dx - b \int_0^L u_x \phi dx. \quad (2.56)$$

Por outro lado, multiplicando-se (2.7) por ϕ e procedendo como anteriormente, resulta

$$\int_0^L J \phi_{tt} \phi dx + \alpha_2 \int_0^L \phi \phi_t dx = -\delta \int_0^L \phi_x^2 dx - b \int_0^L u_x \phi dx - \xi \int_0^L \phi^2 dx - \mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t) \phi dx. \quad (2.57)$$

Somando (2.56) e (2.57), tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho_1 u_{tt} u + J \phi_{tt} \phi) dx + \alpha_2 \int_0^L \phi \phi_t dx = & -\kappa \int_0^L u_x^2 dx - 2b \int_0^L u_x \phi dx \\ & - \delta \int_0^L \phi_x^2 dx - \xi \int_0^L \phi^2 dx - \mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t) \phi dx. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Considerando

$$\kappa u_x^2 + 2bu_x\phi + \xi\phi^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}}u_x + \sqrt{\xi}\phi\right)^2 + \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi}\right)u_x^2, \quad (2.59)$$

podemos reescrever (2.58) como

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho_1 u_{tt}u + J\phi_{tt}\phi) dx + \alpha_2 \int_0^L \phi\phi_t dx &= -\delta \int_0^L \phi_x^2 dx - \mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t)\phi dx \\ &- \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}}u_x + \sqrt{\xi}\phi\right)^2 - \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi}\right)u_x^2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Substituindo o resultado de (2.60) em (2.55), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I_1(t) &= -\int_0^L (\rho_1 u_t^2 + J\phi_t^2) dx + \delta \int_0^L \phi_x^2 dx + \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}}u_x + \sqrt{\xi}\phi\right)^2 dx \\ &+ \int_0^L \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi}\right)u_x^2 dx + \underbrace{\mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t)\phi dx}_{:=P_1}. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré em P_1 , obtemos a conclusão do Lema. \blacksquare

Em seguida, apresentamos o seguinte funcional

$$I_2(t) = \int_0^L (J\phi_t\phi + \frac{\rho_1 b}{\kappa}u_tv) dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \phi^2 dx \quad (2.61)$$

onde v é definido como solução de

$$-v_{xx} = \phi_x, \quad v(0) = v(L) = 0. \quad (2.62)$$

Assim, apresentamos o seguinte resultado.

Lema 2.3. Seja (u, ϕ, ω) solução de (2.6) -(2.10). Então para qualquer $\lambda_2 > 0$, teremos:

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq C_{\lambda_2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \lambda_2 \int_0^L u_t^2 dx - \frac{\delta}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\mu_2^2 C^*}{2\delta} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx, \quad (2.63)$$

onde $C_{\lambda_2} = \left(\frac{\rho_1 b^2 C^*}{2\kappa^2 \lambda_2} + J \right)$.

Demonstração: Observe que derivando a equação (2.62) com respeito a t , multiplicando por v_t , integrando-se por partes e usando Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\int_0^L v_{xt}^2 dx \leq \int_0^L \phi_t^2 dx.$$

Da desigualdade de Poincaré, encontramos

$$\int_0^L v_t^2 dx \leq C^* \int_0^L \phi_t^2 dx. \quad (2.64)$$

onde C^* é a constante de Poincaré.

Derivando I_2 em relação a variável temporal, obtemos

$$\frac{d}{dt} I_2(t) = J \int_0^L \phi_{tt} \phi dx + J \int_0^L \phi_t^2 dx + \alpha_2 \int_0^L \phi \phi_t dx + \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L u_{tt} v dx + \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L u_t v_t dx \quad (2.65)$$

Agora, multiplicando (2.6) por $\frac{b}{\kappa} v$ e integrando-se em $(0, L)$, segue que

$$\int_0^L \frac{\rho_1 b}{\kappa} u_{tt} v dx = b \int_0^L u_{xx} v dx + \frac{b^2}{\kappa} \int_0^L \phi_x v dx.$$

Admitindo-se (2.12), integrando-se por partes e de (2.62), vem que

$$\int_0^L \frac{\rho_1 b}{\kappa} u_{tt} v dx \leq b u_x v \Big|_0^L - b u v_x \Big|_0^L + b \int_0^L u v_{xx} dx + \xi \phi v \Big|_0^L - \xi \int_0^L \phi v_x dx.$$

Por condições de contorno e de (2.62), novamente, resulta

$$\int_0^L \frac{\rho_1 b}{\kappa} u_{tt} v \, dx \leq b \int_0^L u_x \phi \, dx + \xi \int_0^L \phi^2 \, dx. \quad (2.66)$$

Por outro lado, multiplicando (2.7) por ϕ e seguindo os mesmos passos de (2.66), obtemos

$$\int_0^L J \phi_{tt} \phi \, dx + \alpha_2 \int_0^L \phi \phi_t \, dx = -\delta \int_0^L \phi_x^2 \, dx - b \int_0^L u_x \phi \, dx - \xi \int_0^L \phi^2 \, dx - \mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t) \phi \, dx. \quad (2.67)$$

Somando (2.66) e (2.67), encontramos

$$\int_0^L J \phi_{tt} \phi \, dx + \alpha_2 \int_0^L \phi \phi_t \, dx + \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L u_{tt} v \, dx \leq -\delta \int_0^L \phi_x^2 \, dx - \mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t) \phi \, dx. \quad (2.68)$$

Agora, substituindo (2.68) em (2.65), encontramos

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq J \int_0^L \phi_t^2 \, dx - \underbrace{\delta \int_0^L \phi_x^2 \, dx - \mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t) \phi \, dx}_{:=P_2} + \underbrace{\frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L u_t v_t \, dx}_{:=P_3}. \quad (2.69)$$

Das desigualdades de Young e Poincaré temos que

$$P_2 = -\mu_2 \int_0^L \omega(x, 1, t) \phi \, dx \leq \frac{C^*}{2\lambda_1} \int_0^L \phi_x^2 \, dx + \frac{\mu_2^2 \lambda_1}{2} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) \, dx.$$

Escolhendo $\lambda_1 = C^*/\delta$, obtemos

$$P_2 \leq \frac{\delta}{2} \int_0^L \phi_x^2 \, dx + \frac{\mu_2^2 C^*}{2\delta} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) \, dx.$$

Analogamente, temos que

$$P_3 = \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L u_t v_t \, dx \leq \frac{\rho_1}{2} \lambda_2 \int_0^L u_t^2 \, dx + \frac{\rho_1 b^2 C^*}{2\kappa^2 \lambda_2} \int_0^L v_t^2 \, dx.$$

Usando-se a desigualdade (2.64), encontramos

$$P_3 \leq \frac{\rho_1 b^2}{2\kappa} \lambda_2 \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\rho_1 b^2 C^*}{2\kappa^2 \lambda_2} \int_0^L \phi_t^2 dx.$$

Substituindo P_2 e P_3 em (2.69), chegamos no resultado (2.63) desejado. ■

Agora nós introduzimos o seguinte funcional

$$G(t) := \frac{J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_t dx + \frac{\delta \rho_1}{b} \int_0^L \phi_x u_t dx. \quad (2.70)$$

Então temos o seguinte resultado.

Lema 2.4. Se (u, ϕ, ω) é solução de (2.6)-(2.10). Assuma que

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{\delta}{J}. \quad (2.71)$$

Então, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(t) &\leq \frac{\delta b}{\xi} \phi_x u_x \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx + \left(J + \frac{\alpha_2^2}{\xi} \right) \int_0^L \phi_t^2 dx \\ &+ \frac{\mu_2^2}{\xi} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Demonstração: Derivando $G(t)$ em relação a t , teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(t) &:= \frac{J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_{tt} dx + \frac{\delta \rho_1}{b} \int_0^L u_{tt} \phi_x dx + \frac{Jb}{\xi} \int_0^L u_{xt} \phi_t dx + J \int_0^L \phi_t^2 dx \\ &+ \frac{\delta \rho_1}{b} \int_0^L \phi_{xt} u_t dx. \end{aligned}$$

Integrando-se por partes em $(0, L)$ e usando as condições (2.12) e (2.71), tem-se

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq \frac{J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_{tt} dx + \frac{\delta \rho_1}{b} \int_0^L u_{tt} \phi_x dx + J \int_0^L \phi_t^2 dx \quad (2.73)$$

Multiplicando (2.6) por $\frac{\delta}{b} \phi_x$ e integrando em $(0, L)$, temos

$$\frac{\rho_1 \delta}{b} \int_0^L u_{tt} \phi_x dx = \frac{\kappa \delta}{b} \int_0^L u_{xx} \phi_x dx + \delta \int_0^L \phi_x^2 dx. \quad (2.74)$$

Agora, multiplicando (2.7) por $\frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)$ e integrando-se em $(0, L)$, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_{tt} dx - \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_{xx} dx + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_t dx \\ & + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_0^L (b u_x + \xi \phi) \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \frac{\mu_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \omega(x, 1, t) dx = 0. \end{aligned}$$

Integrando-se por partes, das condições de contorno e usando (2.12) e (2.71), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_{tt} dx = \frac{\delta b}{\xi} u_x \phi_x \Big|_0^L - \frac{\delta b}{\xi} \int_0^L u_{xx} \phi_x dx - \delta \int_0^L \phi_x^2 dx \\ & - \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_t dx \\ & - \frac{\mu_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \omega(x, 1, t) dx. \quad (2.75) \end{aligned}$$

Somando-se (2.74) e (2.75), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_{tt} dx + \frac{\rho_1 \delta}{b} \int_0^L u_{tt} \phi_x dx &= \frac{\delta b}{\xi} u_x \phi_x \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \\ &- \frac{\alpha_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_t dx - \frac{\mu_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \omega(x, 1, t) dx. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.73), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(t) &= \frac{\delta b}{\xi} u_x \phi_x \Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \phi_t dx \\ &+ J \int_0^L \phi_t^2 dx - \frac{\mu_2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \omega(x, 1, t) dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young concluímos o resultado (2.72). ■

Agora, a fim de lidar com os termos de fronteira que aparece em (2.72), definimos o seguinte funcional $q \in C^1([0, L])$ satisfazendo $q(0) = -q(L) = 2$, dado por

$$q(x) = 2 - \frac{4}{L}x. \quad (2.76)$$

Então, temos o seguinte resultado.

Lema 2.5. Seja (u, ϕ, ω) solução de (2.6) -(2.10). Então para qualquer $\varepsilon > 0$, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta b}{\xi} [\phi_x u_x]_{x=0}^{x=L} &\leq -\frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx - \frac{b^2}{4\varepsilon} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx + \frac{3\varepsilon}{\sqrt{\xi} L} \int_0^L u_x^2 dx \\ &+ \left[\frac{b^2 L \varepsilon}{\sqrt{\xi} \kappa^2} + \left(\frac{b^2 \delta^2}{2\sqrt{\xi} L \varepsilon} + \frac{b^4 \delta^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\delta^2 b^2}{2\xi} \right) \right] \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \\ &+ \frac{2\rho_1 \varepsilon}{\kappa L \sqrt{\xi}} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{b^2}{4\varepsilon} \left(\frac{2\delta J}{\sqrt{\xi} L} + \frac{\alpha_2^2}{\varepsilon} \right) \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{b^2 \mu_2^2}{4\varepsilon^2} \int_0^L \omega(x, 1, t)^2 dx, \quad (2.77) \end{aligned}$$

Demonstração: É fácil verificar que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx = \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_{tt} \phi_x dx + \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_{xt} dx.$$

Substituindo (2.7) na equação anterior, vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx &= \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q \frac{d}{dx} \phi_x^2 dx - \delta \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) q \phi_x dx - \alpha_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q \phi_t \phi_x dx \\ &\quad - \mu_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q \omega(x, 1, t) \phi_x dx + \frac{1}{2} \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q \frac{d}{dx} \phi_t^2 dx. \end{aligned}$$

Integrando-se por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx &= \frac{\delta^2}{2\sqrt{\xi}} q \phi_x^2 \Big|_0^L - \frac{\delta^2}{2\sqrt{\xi}} \int_0^L q_x \phi_x^2 dx - \delta \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) q \phi_x dx \\ &\quad - \alpha_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q \phi_t \phi_x dx + \frac{1}{2} \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t^2 \Big|_0^L - \frac{1}{2} \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q_x \phi_t^2 dx - \mu_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \omega(x, 1, t) q \phi_x dx. \end{aligned}$$

Segue, então, das condições de contorno que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx &= \frac{\delta^2}{2\sqrt{\xi}} [q(L) \phi_x^2(L) - q(0) \phi_x^2(0)] - \frac{\delta^2}{2\sqrt{\xi}} \int_0^L q_x \phi_x^2 dx - \frac{1}{2} \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q_x \phi_t^2 dx \\ &\quad - \delta \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) q \phi_x dx - \alpha_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q \phi_t \phi_x dx - \mu_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \omega(x, 1, t) q \phi_x dx. \end{aligned}$$

(2.78)

Agora, note que $q_x(x) = -4/L$. Substituindo esse resultado em (2.78), vem que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx &= \frac{-\delta^2}{\sqrt{\xi}} [\phi_x^2(L) - \phi_x^2(0)] + \frac{2\delta^2}{\sqrt{\xi}L} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{2\delta J}{\sqrt{\xi}L} \int_0^L \phi_t^2 dx \\ &\quad - \delta \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) q \phi_x dx - \alpha_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L q \phi_t \phi_x dx - \mu_2 \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \omega(x, 1, t) q \phi_x dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Young, chegamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx &\leq \frac{-\delta^2}{\sqrt{\xi}} [\phi_x^2(L) + \phi_x^2(0)] + \frac{2\delta^2}{\sqrt{\xi}L} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{2\delta J}{\sqrt{\xi}L} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\delta^2}{\varepsilon_1} \int_0^L \phi_x^2 dx \\ &+ \varepsilon_1 \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx + 2\varepsilon_2 \delta^2 \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\alpha_2^2}{\xi \varepsilon_2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\mu_2^2}{\xi \varepsilon_2} \int_0^L \omega(x, 1, t)^2 dx, \end{aligned}$$

donde obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx &\leq \frac{-\delta^2}{\sqrt{\xi}} [\phi_x^2(L) + \phi_x^2(0)] + \left(\frac{2\delta^2}{\sqrt{\xi}L} + \frac{\delta^2}{\varepsilon_1} + 2\varepsilon_2 \delta^2 \right) \int_0^L \phi_x^2 dx \\ &+ \varepsilon_1 \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx + \left(\frac{2\delta J}{\sqrt{\xi}L} + \frac{\alpha_2^2}{\xi \varepsilon_2} \right) \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\mu_2^2}{\xi \varepsilon_2} \int_0^L \omega(x, 1, t)^2 dx. \quad (2.79) \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx = \int_0^L \rho_1 q u_{tt} u_x dx + \int_0^L \rho_1 q u_t u_{xt} dx.$$

De (2.6), vem que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx = \int_0^L q (\kappa u_{xx} + b \phi_x) u_x dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 q \frac{d}{dx} u_t^2 dx,$$

donde segue que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa q \frac{d}{dx} u_x^2 dx + \int_0^L b q u_x \phi_x dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 q \frac{d}{dx} u_t^2 dx.$$

Integrando-se por partes, das condições de fronteira e desde que $q_x(x) = -4/L$

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx = \frac{\kappa}{2} [q(L) u_x(L) - q(0) u_x(0)] + \frac{2\kappa}{L} \int_0^L u_x^2 dx + b \int_0^L q u_x \phi_x dx + \frac{2\rho_1}{L} \int_0^L u_t^2 dx.$$

Recordando que $q(0) = -q(L) = 2$ e aplicando a desigualdade de Young, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx &\leq -\kappa [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \left(\frac{2\kappa}{L} + \varepsilon_3 \right) \int_0^L u_x^2 dx \\ &+ \frac{b^2}{\varepsilon_3} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{2\rho_1}{L} \int_0^L u_t^2 dx. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon_3 = \kappa/L$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx \leq -\kappa [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{3\kappa}{L} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{b^2 L}{\kappa} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{2\rho_1}{L} \int_0^L u_t^2 dx. \quad (2.80)$$

Agora, observe da desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned} \frac{\delta b}{\xi} [\phi_x u_x]_{x=0}^{x=L} &\leq \frac{\delta b}{\sqrt{\xi}} [\phi_x(L) u_x(L)] - \frac{\delta b}{\sqrt{\xi}} [\phi_x(0) u_x(0)] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi}} [u_x^2(L) + u_x^2(0)] + \frac{\delta^2 b^2}{4\sqrt{\xi}\varepsilon} [\phi_x^2(L) + \phi_x^2(0)]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Substituindo (2.79) e (2.80) em (2.81), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta b}{\xi} [\phi_x u_x]_{x=0}^{x=L} &\leq -\frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 q u_t u_x dx - \frac{b^2}{4\varepsilon} \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{\delta J}{\sqrt{\xi}} q \phi_t \phi_x dx + \frac{3\varepsilon}{\sqrt{\xi} L} \int_0^L u_x^2 dx \\ &+ \left[\frac{b^2 L \varepsilon}{\sqrt{\xi} \kappa^2} + \left(\frac{b^2 \delta^2}{2\sqrt{\xi} L \varepsilon} + \frac{b^2 \delta^2}{4\varepsilon_1 \varepsilon} + \frac{\varepsilon_2 \delta^2 b^2}{2\varepsilon} \right) \right] \int_0^L \phi_x^2 dx \\ &+ \frac{b^2 \varepsilon_1}{4\varepsilon} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx + \frac{2\rho_1 \varepsilon}{\kappa L \sqrt{\xi}} \int_0^L u_t^2 dx \\ &+ \frac{b^2}{4\varepsilon} \left(\frac{2\delta J}{\sqrt{\xi} L} + \frac{\alpha_2^2}{\xi \varepsilon_2} \right) \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{b^2}{4\varepsilon} \frac{\mu_2^2}{\xi \varepsilon_2} \int_0^L \omega(x, 1, t)^2 dx, \end{aligned}$$

tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon/b^2$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon/\xi$ temos o resultado (2.77). ■

Agora nós introduzimos o seguinte funcional

$$I_3(t) := \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \omega^2(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (2.82)$$

Então encontramos o seguinte resultado.

Lema 2.6. Seja (u, ϕ, ω) solução de (2.6) -(2.10), temos

$$\frac{d}{dt} I_3(t) \leq -I_3(t) - \frac{C_3}{\tau} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx + \frac{1}{\tau} \int_0^L \phi_t^2 dx, \quad (2.83)$$

onde C_3 é uma constante positiva.

Demonstração: Derivando (2.82) em relação a t , encontramos

$$\frac{d}{dt} I_3(t) = 2 \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \omega(x, \rho, t) \omega_t(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (2.84)$$

Da equação (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) &= -\frac{2}{\tau} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \omega(x, \rho, t) \omega_\rho(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= -2 \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \omega^2(x, \rho, t) d\rho dx - \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\rho} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \omega^2(x, \rho, t) d\rho dx \\ &= -2I_3(t) - \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\rho} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \omega^2(x, 1, t) d\rho dx \\ &= -I_3(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^L e^{-2\tau} \omega^2(x, 1, t) dx + \frac{1}{\tau} \int_0^L \omega^2(x, 0, t) dx \end{aligned} \quad (2.85)$$

De (2.8), segue o resultado. \square

Demonstração do Teorema 2.2: Definimos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ por

$$\mathcal{L}(t) := ME(t) + \frac{1}{8} I_1(t) + N_2 I_2(t) + G(t) + \frac{b^2}{4\varepsilon} \int_0^L q \phi_t \phi_x dx$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\kappa} \int_0^L q u_t u_x dx + I_3(t), \quad (2.86)$$

onde M , e N_2 são números reais positivos que serão escolhidos posteriormente. Consequentemente, combinando as estimativas (2.15), (2.54), (2.63), (2.72), (2.77) e (2.83), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &= ME'(t) + \frac{1}{8} I_1'(t) + N_2 I_2'(t) + G'(t) + \frac{b^2}{4\varepsilon} \frac{d}{dt} \int_0^L q \phi_t \phi_x dx \\ &+ \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L q u_t u_x dx + I_3'(t) \\ &\leq M \left[-C \int_0^L (\phi_t^2 + \omega^2(x, 1, t)) dx \right] \\ &+ \frac{1}{8} \left[- \int_0^L (\rho_1 u_t^2 + J \phi_t^2) dx + (\delta + C^* \mu_2 \varepsilon) \int_0^L \phi_x^2 dx + \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \right. \\ &- \left. \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi} \right) \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\mu_2}{4\varepsilon} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx \right] \\ &+ N_2 \left[C_{\lambda_2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \lambda_2 \int_0^L u_t^2 dx - \frac{\delta}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\mu_2^2 C^*}{2\delta} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx \right] \\ &+ \left[\frac{2\rho_1 \varepsilon}{\sqrt{\xi} \kappa L} \int_0^L u_t^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \right. \\ &+ \left. \left(J + \frac{\alpha_2^2}{\xi} + \frac{b^2 \delta J}{4\sqrt{\xi} L \varepsilon} + \frac{\alpha_2^2 b^2}{2\varepsilon^2} \right) \int_0^L \phi_t^2 dx + \left(\frac{b^2 \mu_2^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\mu_2^2}{\xi} \right) \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx \right. \\ &+ \left. \left(\frac{b^2 L}{\sqrt{\xi} \kappa^2} \varepsilon + \frac{b^2 \delta^2}{2\sqrt{\xi} L \varepsilon} + \frac{b^4 \delta^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\delta^2 b^2}{2\xi} \right) \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{3\varepsilon}{\sqrt{\xi} L} \int_0^L u_x^2 dx \right] \\ &- I_3(t) - \frac{C_3}{\tau} \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx + \frac{1}{\tau} \int_0^L \phi_t^2 dx. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq - \left[MC + \frac{J}{8} - C_{\lambda_2} - \left(J + \frac{\alpha_2^2}{\xi} + \frac{b^2\delta J}{2\sqrt{\xi}L\varepsilon} + \frac{\alpha_2^2 b^2}{4\varepsilon^2} \right) - \frac{1}{\tau} \right] \int_0^L \phi_t^2 dx \\
&- \left[MC - \frac{\mu_2}{32\varepsilon} - \frac{\mu_2^2 C^*}{2\delta} N_2 - \left(\frac{b^2\mu_2^2}{4\varepsilon^2} + \frac{\mu_2^2}{\xi} \right) + \frac{C_3}{\tau} \right] \int_0^L \omega^2(x, 1, t) dx \\
&- \left[\frac{\rho_1}{8} - \frac{\rho_1}{2} \lambda_2 N_2 - \frac{2\rho_1\varepsilon}{\sqrt{\xi}\kappa L} \right] \int_0^L u_t^2 dx \\
&- \left[-\frac{(\delta + C^*\mu_2\varepsilon)}{8} + \frac{\delta}{2} N_2 - \left(\frac{b^2 L}{\sqrt{\xi}\kappa^2} \varepsilon + \frac{b^2\delta^2}{2\sqrt{\xi}L\varepsilon} + \frac{b^4\delta^2}{2\varepsilon^2} + \frac{\delta^2 b^2}{2\xi} \right) \right] \int_0^L \phi_x^2 dx \\
&- \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \\
&- \left[\frac{1}{8} \left(\kappa - \frac{b^2}{\xi} \right) - \frac{3\varepsilon}{\sqrt{\xi}L} \right] \int_0^L u_x^2 dx - I_3(t). \tag{2.87}
\end{aligned}$$

A partir de agora, vamos escolher cuidadosamente as constantes. Escolhendo ε suficientemente pequeno e N_2 muito grande, encontramos

$$\frac{\delta}{2} N_2 > \frac{(\delta + C^*\mu_2\varepsilon)}{8} + \left(\frac{b^2 L}{\sqrt{\xi}\kappa^2} \varepsilon + \frac{b^2\delta^2}{2\sqrt{\xi}L\varepsilon} + \frac{b^4\delta^2}{2\varepsilon^2} + \frac{\delta^2 b^2}{2\xi} \right)$$

Por fim, escolhemos λ_2 muito pequeno tal que

$$\lambda_2 \leq \frac{1}{32N_2}.$$

Finalmente, escolhemos M muito grande, onde existe uma constante positiva η_1 , tal que (2.87) torna-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq - \eta_1 \int_0^L \left[u_x^2 + u_t^2 + \phi_t^2 + \phi_x^2 + \omega^2(x, 1, t) + \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 \right] dx \\
&- \eta_1 \int_0^L \int_0^1 \omega^2(x, 1, t) \rho dx
\end{aligned}$$

Isso implica por (2.15), que existe uma constante $\eta_2 > 0$, tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\eta_2 E(t), \quad \forall t > 0 \quad (2.88)$$

Neste momento, vamos comparar $\mathcal{L}(t)$ com $E(t)$. Para isso vamos usar o lema seguinte.

Lema 2.7. Para M suficientemente grande, existem duas constantes positivas β_1 e β_2 , dependendo de M e N_1, N_2, N_3 e ε tal que

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t) \quad \forall t > 0 \quad (2.89)$$

Demonstração: Considere o funcional

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{8}I_1(t) + N_2 I_2(t) + G(t) + \frac{b^2}{4\varepsilon} \int_0^L q\phi_t\phi_x dx \\ &+ \frac{\varepsilon}{\kappa} \int_0^L qu_tu_x dx + I_3(t), \end{aligned} \quad (2.90)$$

mostraremos que

$$|H(t)| \leq CE(t), \quad C > 0.$$

Por (2.53),(2.61), (2.70) e (2.82), obtemos

$$\begin{aligned} |H(t)| &= \frac{1}{8} \left| \int_0^L (\rho_1 u_t u + J\phi_t\phi) dx - \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \phi^2 dx \right| + N_2 \left| \int_0^L (J\phi_t\phi + \frac{\rho_1 b}{\kappa} u_t v) dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \phi^2 dx \right| \\ &+ \left| \frac{J}{\sqrt{\xi}} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi}\phi \right) \phi_t dx + \frac{\delta\rho_1}{b} \int_0^L \phi_x u_t dx \right| + \left| \frac{b^2}{4\varepsilon} \int_0^L q\phi_t\phi_x dx + \frac{\varepsilon}{\kappa} \int_0^L qu_tu_x dx \right| \\ &+ \left| \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \omega(x, \rho, t) d\rho dx \right| \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré encontramos

$$|H(t)| \leq \frac{\rho_1}{16} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\rho_1 C^*}{16} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{J}{16} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{JC^*}{16} \int_0^L \phi_x^2 dx$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_2 C^*}{16} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{J}{2} N_2 \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{J C^*}{2} N_2 \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\rho_1 b^2}{2\kappa} N_2 \int_0^L u_t^2 dx \\
& + \frac{\rho_1 C^*}{2\kappa} N_2 \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\alpha_2 C^*}{2} N_2 \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{J}{2\xi} \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \\
& + \frac{J}{2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\delta^2}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\rho_1^2}{2b^2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{b^2}{2} \int_0^L \phi_t^2 dx \\
& + \frac{b^2}{32\varepsilon^2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\varepsilon}{2\kappa^2} \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L \int_0^1 \omega^2(x, \rho, t) d\rho dx
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes, vem que

$$\begin{aligned}
|H(t)| & \leq \gamma_1 \int_0^L u_t^2 dx + \gamma_2 \int_0^L \phi_t^2 dx + \gamma_3 \int_0^L \phi_x^2 dx + \gamma_4 \int_0^L \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)^2 dx \\
& + \gamma_5 \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L \int_0^1 \omega^2(x, \rho, t) d\rho dx
\end{aligned} \tag{2.91}$$

onde

$$\begin{aligned}
\gamma_1 & = \frac{\rho_1}{16} + \frac{\rho_1 b^2}{2\kappa} N_2 + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\rho_1^2}{2b^2} \right) \\
\gamma_2 & = \frac{J}{16} + \frac{J}{2} N_2 + \left(\frac{J}{2} + \frac{b^2}{2} \right) \\
\gamma_3 & = \left(\frac{J C^*}{16} + \frac{\alpha_2 C^*}{16} \right) + \left(\frac{J C^*}{2} + \frac{\rho_1 C^*}{2\kappa} + \frac{\alpha_2 C^*}{2} \right) N_2 + \left(\frac{\delta^2}{2} + \frac{b^2}{32\varepsilon^2} \right) \\
\gamma_4 & = \frac{J}{2\xi} \\
\gamma_5 & = \frac{\rho_1 C^*}{16} + \frac{\varepsilon}{2\kappa^2}
\end{aligned}$$

Segundo (2.91), teremos

$$|H(t)| \leq \tilde{C} E(t)$$

onde

$$\tilde{C} = \frac{2 \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, 1\}}{\min\{\rho_1, J, \kappa, \delta, \kappa, \eta\}}$$

De onde obtemos

$$|\mathcal{L}(t) - ME(t)| = |H(t)| \leq \tilde{C}E(t)$$

onde tomamos M suficientemente grande tal que

$$(M - \tilde{C})E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (M + \tilde{C})E(t)$$

o que implica

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t)$$

onde $\beta_1 = M - \tilde{C} > 0$, $\beta_2 = M + \tilde{C} > 0$. Então o resultado (2.89) é verdadeiro.

Combinando (2.88) e (2.89), concluímos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma\mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0$$

Multiplicando a desigualdade anterior por $e^{\gamma t}$, verificamos que o primeiro membro é igual a derivada de $\mathcal{L}(t)e^{\gamma t}$, integrando obtem-se

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.92}$$

Agora, usando (2.89) e (2.92) obtemos o resultado (2.52). Isso completa a demonstração do teorema 2.2.

Modelo Termoelástico Poroso com Lei de Coleman-Gurtin

3.1 Introdução

Neste capítulo, iremos estudar o sistema poroso elástico de Coleman-Gurtin dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_1\theta_t - \frac{1}{\beta_1} [(1 - \alpha)\theta_{xx} + \alpha \int_0^\infty g(s)\theta_{xx}(t - s) ds] + \beta u_{tx} + m\phi_t = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde as funções $u(x, t)$, $\phi(x, t)$ e $\theta(x, t)$ são o deslocamento transversal do material elástico sólido, o volume de fração e a diferença de temperatura, respectivamente. Aqui ρ , J , μ , b , δ , m , ρ_1 , ξ , β , and β_1 são os coeficientes constitutivos, $\alpha \in (0, 1)$ e $g(s)$ é o núcleo de memória.

Os coeficientes constitutivos, no caso unidimensional, satisfazem

$$\xi > 0, \delta > 0, \mu > 0, \rho > 0, J > 0, \text{ e } \mu\xi \geq b^2. \quad (3.2)$$

Como o acoplamento é considerado, b , β and m deve ser diferente de zero, mas seus sinais não importam na análise.

O sistema é complementado com as condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \phi(x, 0) = \phi_0(x) & \text{in } (0, L), \\ \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } (0, L), \end{cases} \quad (3.3)$$

e condições de contorno dadas por

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.4)$$

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 3.2 discutimos existência e unicidade de soluções do sistema (3.1), (3.3)-(3.4) usando técnicas de semigrupos. Na seção 3.3, provamos que se $\frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \neq 0$, então o semigrupo $S(t) = e^{At}$ associado ao sistema (3.1), (3.3)-(3.4) não é exponencialmente estável. Na 3.4, provamos que se $\frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} = 0$ o semigrupo de contração $S(t) = e^{At}$ é exponencialmente estável. Na seção 3.5, mostramos que se $\frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \neq 0$ e $\delta|b||\beta| - 2\rho|m||\chi|(\delta + \xi C_p) > 0$, onde C_p é a constante de Poincaré, o semigrupo $S(t) = e^{At}$ decai polinomialmente para $\frac{1}{\sqrt{t}}$ e essa taxa é ótima.

3.2 Configuração Funcional e Notações

3.2.1 Hipóteses sobre o núcleo de memória

Definimos

$$K(s) = -g'(s),$$

onde o primo denota a derivada em relação a s . As seguintes hipóteses são válidas:

(I) K é uma função absolutamente contínua não-negativa e não-crescente em \mathbb{R}^+ tal que

$$K(0) = \lim_{s \rightarrow 0} K(s) \in (0, \infty).$$

(II) então existe $\nu > 0$ tal que a desigualdade diferencial

$$K'(s) + \nu K(s) \leq 0,$$

mantém para quase todos $s > 0$. Como exemplo de função satisfazendo as hipóteses acima, temos

$$g(s) = \kappa e^{-\kappa s}, \quad \forall \kappa > 0.$$

É importante notar que, em particular, K é somável em \mathbb{R}^+ com

$$\int_0^{\infty} K(s) ds = g(0).$$

Além disso, o requisito de que g tem massa total 1 se traduz em

$$\int_0^{\infty} sK(s) ds = 1.$$

3.2.2 O Cenário de Semigrupo

Em primeiro lugar, introduzimos a variável auxiliar

$$\eta = \eta^t(x, s) : (x, t, s) \in (0, L) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R},$$

representando o passado histórico integrado de θ e formalmente definido como (ver [1])

$$\eta^t(x, s) = \int_0^s \theta(x, t - \tau) d\tau = \int_{t-s}^t \theta(x, \tau) d\tau, \quad s \geq 0, t \geq 0, \quad (3.5)$$

satisfazendo assim a condição de fronteira do tipo Neumann

$$\eta_x^t(0, s) = \eta_x^t(L, s) = 0,$$

e para (3.5) concluímos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \eta^t(x, s) = 0.$$

Diferenciando (3.5) com respeito a t fornece para η satisfaz a equação suplementar

$$\eta_t^t = -\eta_s^t + \theta. \quad (3.6)$$

Com todas essas novas variáveis, reescrevemos o sistema (3.1), (3.3)-(3.4) como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_1\theta_t - \frac{1}{\beta_1} [(1-\alpha)\theta_{xx} + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_{xx}(s) ds] + \beta u_{tx} + m\phi_t = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \eta_t^t + \eta_s^t - \theta = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad \text{em } (0, L), \\ \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{em } (0, L), \\ \eta(x, 0, s) = \eta^0(x, s) \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ \eta_x^t(0, s) = \eta_x^t(L, s) = 0 \quad \text{em } [0, \infty) \times \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Com as considerações acima, introduzimos o subespaço de Hilbert

$$L_*^2(0, L) = \left\{ z \in L^2(0, L) : \int_0^L z(x) dx = 0 \right\},$$

de funções de média zero, junto com o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0, L), \quad H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L),$$

ambos dotados da norma gradiente, devido a desigualdade de Poincaré. Consideramos também o espaço $H^2(0, L)$ e o chamado espaço de memória

$$\mathbb{M} = L_K^2(\mathbb{R}^+; H_*^1(0, L))$$

de quadrado somável H_*^1 -funções com valores em \mathbb{R}^+ com respeito a medida $K(s) ds$, dotada com o produto interno

$$\langle \eta, \vartheta \rangle_{\mathbb{M}} = \int_0^\infty K(s) \int_0^L \eta_x(x, s) \vartheta_x(x, s) dx ds.$$

O gerador infinitesimal do semigrupo de translação a direita sobre \mathbb{M} é o operador linear

$$\mathcal{T}\eta = -D\eta$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}) = \left\{ \eta \in \mathbb{M} : D\eta \in \mathbb{M}, \lim_{s \rightarrow 0} \|\eta_x(s)\| = 0 \right\},$$

onde D significa derivada fraca em relação as variáveis internas $s \in \mathbb{R}^+$. Para dar uma formulação precisa do problema de evolução, estamos introduzindo o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times \mathbb{M}$$

com produto interno dado por

$$\begin{aligned} \langle \Psi, V \rangle_{\mathcal{H}} &:= \int_0^L (\rho\varphi\bar{\Phi} + \mu u_x \bar{v}_x + J\psi\bar{\varrho} + \delta\phi_x \bar{\zeta}_x + \xi\phi\bar{\zeta} + b(u_x \bar{\zeta} + \bar{v}_x \phi) + \rho_1 \theta \bar{\Theta}) dx \\ &+ \frac{\alpha}{\beta_1} \int_0^{\infty} K(s) \int_0^L \eta_x(x, s) \bar{\eta}_x(x, s) dx ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

para $\Psi = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta, \eta)'$, $V = (v, \Phi, \zeta, \varrho, \Theta, \tilde{\eta})'$. A seguir, uma barra sobreposta denota o número complexo conjugado. Por hipótese, temos $\mu\xi \geq b^2$. Tomando $\xi_1 \in (0, \xi]$ tal que $\mu\xi_1 - b^2 = 0$. Então, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{H}} &\geq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + J \int_0^L |\psi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \int_0^L \left| \mu^{\frac{1}{2}} u_x - \xi_1^{\frac{1}{2}} \phi \right|^2 dx \\ &+ (\xi - \xi_1) \int_0^L \phi^2 dx + c \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta_1} \int_0^{\infty} K(s) \int_0^L |\eta_x(x, s)|^2 dx ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Isso nos permite ver claramente que o $\langle \Psi, V \rangle_{\mathcal{H}}$ define um produto interno em \mathcal{H} , e a norma associada $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a norma usual.

Para cada $\eta \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, o funcional não-negativo

$$\Lambda[\eta] = - \int_0^{\infty} K'(s) \|\eta_x(s)\|_{L^2(0, L)}^2 ds,$$

está bem definido e a identidade a seguir (ver [15])

$$2\langle \mathcal{T}\eta, \eta \rangle_{\mathbb{M}} = -\Lambda[\eta]. \quad (3.10)$$

Se denotamos $\Psi = \{u, u_t, \phi, \phi_t, \theta, \eta\}$ então o sistema (3.7) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{A}\Psi, \text{ for } t > 0, \quad (3.11)$$

onde o operador \mathcal{A} é dado por

$$\mathcal{A}\Psi = \left\{ \varphi, \frac{\mu}{\rho}u_{xx} + \frac{b}{\rho}\phi_x - \frac{\beta}{\rho}\theta_x, \psi, \frac{\delta}{J}\phi_{xx} - \frac{b}{J}u_x - \frac{\xi}{J}\phi + \frac{m}{J}\theta, \right. \\ \left. \frac{1}{\rho_1\beta_1}[(1-\alpha)\theta_{xx} + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_{xx}(s) ds] - \frac{\beta}{\rho_1}\varphi_x - \frac{m}{\rho_1}\psi, \mathcal{T}\eta + \theta \right\},$$

para $\Psi = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta, \eta)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, onde

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ \Psi = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta, \eta)' \in \mathcal{H} : u, \phi \in H^2(0, L), \varphi \in H_0^1(0, L), \psi, \theta \in H_*^1(0, L), \\ \eta \in \mathcal{D}(\mathcal{T}), \phi_x \in H_0^1(0, L) \text{ e } (1-\alpha)\theta + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta(s) ds \in H^2(0, L) \}.$$

Do produto interno (3.8), temos

$$\langle \mathcal{A}\Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{\beta_1}(1-\alpha) \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \frac{\alpha}{2\beta_1} \int_0^\infty K(s) \frac{d}{ds} \int_0^L |\eta_x(s)|^2 dx ds.$$

Integrando por partes a igualdade acima e levando em conta a hipótese (II), encontramos

$$\langle \mathcal{A}\Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{\beta_1}(1-\alpha) \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta_1} \int_0^\infty K'(s) \int_0^L |\eta_x(s)|^2 dx ds \leq 0. \quad (3.12)$$

De onde se segue que o operador \mathcal{A} é dissipativo no espaço de energia \mathcal{H} , então temos os seguintes resultados referentes a existência e unicidade de solução do sistema (3.7).

Teorema 3.1. O operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração

$$S(t) = e^{t\mathcal{A}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

A prova deste fato é baseada no teorema clássico de Lumer-Phillips [33], e será omitida aqui (veja [49] para uma aplicação do teorema de Lumer-Phillips a equações com memória no passado histórico). Assim, para cada dado inicial

$$\Psi_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, \theta_0, \eta_0)' \in \mathcal{H}$$

dado no momento $t = 0$, a solução única no momento $t > 0$ para (3.11) registramos

$$\Psi(t) = (u(t), u_t(t), \phi(t), \phi_t(t), \theta(t), \eta^t) = S(t)\Psi_0.$$

Além disso, η^t cumpre a fórmula explícita de representação (ver [13, 15])

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \int_0^s \theta(t - \tau) d\tau, & 0 < s \leq t, \\ \eta_0(s - t) + \int_0^t \theta(t - \tau), & s > t. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.3 Falta de Decaimento Exponencial

Nesta seção, mostramos que o semigrupo $S(t)$ não é exponencialmente estável quando o número de estabilidade $\chi = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{j}$ é diferente de zero. A demonstração baseia-se no seguinte resultado abstrato de [36].

Teorema 3.2. $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se

$$(i) \quad i\mathbf{R} \equiv \{i\beta : \beta \in \mathbf{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$$

e

$$(ii) \quad \overline{\lim}_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty \quad (3.14)$$

onde \mathcal{A} e \mathcal{H} são entendidos como sendo o gerador infinitesimal e o espaço de fase, respectivamente.

Teorema 3.3. Seja $S(t) = e^{At}$ o semigrupo C_0 de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} associado ao sistema (3.7). Então, $S(t)$ não é exponencialmente estável se $\chi \neq 0$.

A estratégia consiste em verificar que a condição (3.14) não é válida. Sem perda de generalidade, podemos pegar $L = \pi$. Então, para todos os $n \in \mathbb{N}$, temos a equação

$$i\lambda_n \Psi_n - \mathcal{A}\Psi_n = F_n$$

na variável desconhecida

$$\Psi_n = (u_n, \varphi_n, \phi_n, \psi_n, \theta_n, \eta_n).$$

com $F_n = (0, 0, 0, \cos(nx), 0, 0)$. Nossa conclusão será alcançada se mostrarmos que Ψ_n não é limitado em \mathcal{H} , pois isso violaria (3.14). Cálculos simples implicam o sistema

$$-\rho\lambda_n^2 u_n - \mu u_{nxx} - b\phi_{nx} + \beta\theta_{nx} = 0, \quad (3.15)$$

$$-J\lambda_n^2 \phi_n - \delta\phi_{nxx} + bu_{nx} + \xi\phi_n - m\theta_n = \cos(nx), \quad (3.16)$$

$$i\rho_1\lambda_n\theta_n - \frac{1}{\beta_1}[(1-\alpha)\theta_{nxx} + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_{nxx}(s) ds] + i\lambda_n\beta u_{nx} + im\lambda_n\phi_n = 0, \quad (3.17)$$

$$i\lambda_n\eta_n - \mathcal{T}\eta_n - \theta_n = 0. \quad (3.18)$$

Agora procuramos soluções (compatíveis com as condições de contorno) da forma

$$u_n = A_n \sin(nx),$$

$$\phi_n = B_n \cos(nx),$$

$$\theta_n = C_n \cos(nx),$$

$$\eta_n = \gamma_n(s) \cos(nx),$$

para alguns $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{C}$ e alguma função de quadrado somável complexa γ_n em \mathbb{R}^+ com respeito a medida $K(s) ds$, satisfazendo $\gamma_n(0) = 0$. Isso produz

$$(-\rho\lambda_n^2 + \mu n^2)A_n + bnB_n - \beta nC_n = 0, \quad (3.19)$$

$$bnA_n + (-J\lambda_n^2 + \delta n^2 + \xi)B_n - mC_n = 1, \quad (3.20)$$

$$i\lambda_n\beta nA_n + im\lambda_n B_n + i\rho_1\lambda_n C_n + [(1-\alpha)n^2 C_n + \alpha n^2 \int_0^\infty K(s)\gamma(s) ds] = 0, \quad (3.21)$$

$$i\lambda_n\gamma_n + \gamma'_n - C_n = 0. \quad (3.22)$$

Uma integração da última equação de (3.19) dá

$$\gamma_n(s) = \frac{C_n}{i\lambda_n}(1 - e^{-i\lambda_n s}).$$

Substituindo o resultado na terceira equação de (3.19), e denotando por

$$\hat{K}(\lambda_n) = \int_0^{\infty} K(s)e^{-i\lambda_n s} ds$$

a transformada de Fourier de K , encontramos

$$p_1 A_n + b n B_n - \beta n C_n = 0, \quad (3.23)$$

$$b n A_n + p_2 B_n - m C_n = 1, \quad (3.24)$$

$$i\lambda_n \beta n A_n + i m \lambda_n B_n + p_3 C_n = 0, \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} p_1(\lambda_n) &= -\rho\lambda_n^2 + \mu n^2, \\ p_2(\lambda_n) &= -J\lambda_n^2 + \delta n^2 + \xi, \\ p_3(\lambda_n) &= i\rho_1\lambda_n + (1 - \alpha)n^2 + i\frac{\alpha n^2}{\lambda_n}(\hat{K}(\lambda_n) - g(0)). \end{aligned}$$

Assim, a solução explícita é

$$B_n = \frac{p_1 p_3 + i\lambda_n \beta^2 n^2}{p_3(p_1 p_2 - b^2 n^2) + i\lambda_n \beta n^2(\beta p_2 + b m) + i\lambda_n \beta b m n^2 + i\lambda_n m p_1}. \quad (3.26)$$

Agora escolhemos λ_n tal que

$$p_2(\lambda_n) = -J\lambda_n^2 + \delta n^2 + \xi = c_0$$

onde c_0 será escolhido mais tarde. Com isso em mente, temos

$$p_1 p_2 - b^2 n^2 = \rho \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J} \right) c_0 n^2 - b^2 n^2 - c_0 \frac{\rho \xi}{J} + c_0^2 \frac{\rho}{J} = (\rho \chi c_0 - b^2) n^2 - c_0 \frac{\rho \cdot \xi}{J} + c_0^2 \frac{\rho}{J}.$$

Então, tomamos c_0 tal que

$$c_0 = \frac{b^2}{\rho\chi},$$

e, portanto, temos que

$$p_3(p_1p_2 - b^2n^2) \approx \mathcal{O}(n^2)$$

desde que $\chi \neq 0$. Consequentemente, temos

$$p_3(p_1p_2 - b^2n^2) + i\lambda_n\beta n^2(\beta p_2 + bm) + i\lambda_n\beta bmn^2 + i\lambda_nmp_1 \approx \mathcal{O}(n^3).$$

Desde que

$$p_1p_3 + i\lambda_n\beta^2n^2 \approx \mathcal{O}(n^4)$$

concluimos que

$$B_n \approx \mathcal{O}(n),$$

para n grande. Finalmente, temos

$$\|\Psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq J \int_0^\pi \psi_n^2 dx = J|\lambda_n|^2|B_n|^2 \int_0^\pi |\cos nx|^2 dx \approx \mathcal{O}(n^4). \quad (3.27)$$

Então como $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq J \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_{L^2(0,L)}^2 = \infty.$$

Isso termina a prova. ■

3.4 Decaimento Exponencial

Esta será dedicada ao estudo da estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema (3.7). Como de costume, está subentendido que trabalhamos com soluções (regulares) decorrentes de dados iniciais pertencentes ao domínio do operador \mathcal{A} . Ao longo da seção, $C \geq 0$ denotará uma constante genérica dependendo apenas das quantidades estruturais do problema.

Também vamos explorar a desigualdade

$$\int_0^{\infty} K(s) \|\eta_x(s)\|_{L^2(0,L)} ds \leq \left(\int_0^{\infty} K(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} K(s) \|\eta_x(s)\|_{L^2(0,L)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{K(0)} \|\eta\|_{\mathbb{M}}.$$

Nosso resultado principal é o seguinte:

Teorema 3.4. O semigrupo $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se $\chi = 0$.

Foi mostrado na seção 3.3 que o semigrupo $S(t)$ não é exponencialmente estável quando o número de estabilidade $\chi \neq 0$. Então, resta mostrar que a condição $\chi = 0$ é suficiente.

Para fazer isso, vamos considerar a equação resolvente

$$i\lambda\Psi - \mathcal{A}\Psi = F, \quad (3.28)$$

com $\Psi = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta, \eta)'$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6)'$. Reescrevendo a equação resolvente (3.28) em termos de seus componentes, temos

$$i\lambda u - \varphi = f^1, \quad (3.29)$$

$$i\lambda\rho\varphi - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = \rho f^2, \quad (3.30)$$

$$i\lambda\phi - \psi = f^3, \quad (3.31)$$

$$i\lambda J\psi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta = Jf^4, \quad (3.32)$$

$$i\lambda\rho_1\theta - \frac{1}{\beta_1} \left[(1 - \alpha)\theta_{xx} + \alpha \int_0^{\infty} K(s)\eta_{xx}(s) ds \right] + \beta\varphi_x + m\psi = \rho_1 f^5, \quad (3.33)$$

$$i\lambda\eta - \mathcal{T}\eta - \theta = f^6. \quad (3.34)$$

A multiplicação natural da Eq. (3.28) por $\Psi(t)$ no espaço de energia fraca, encontramos

$$i\lambda \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}\Psi, \Psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, \Psi \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real na equação acima e considerando as hipóteses **(II)** e desigualdade (3.12), obtemos

$$\int_0^L |\theta_x|^2 dx + \|\eta\|_{\mathbb{M}}^2 \leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.35)$$

Para provar a suficiência do Teorema 3.4, será necessária uma série de lemas.

Lema 3.1. Sob as notações acima, temos

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

A prova pode ser feita usando as mesmas ideias que em [46] com as adaptações necessárias ao nosso caso, por isso omitimos aqui.

Lema 3.2. Vamos supor que os dados iniciais $(u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, \theta_0, \eta_0)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então a solução do sistema (3.7) satisfaz

$$\begin{aligned} \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{|m|}{|\lambda|} \|\psi\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

para $|\lambda| > 0$ grande o suficiente e C uma constante positiva que não depende λ .

Prova. A partir da Eqs. (3.29) e (3.33), temos

$$i\lambda\rho_1\theta - \frac{1}{\beta_1} \left[(1 - \alpha)\theta_{xx} + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_{xx}(s) ds \right] + i\lambda\beta u_x + m\psi = \beta f_x^1 + \rho_1 f^5.$$

Agora multiplicamos a equação acima por \bar{u}_x e integramos por partes $(0, L)$. O resultado é

$$\begin{aligned} i\lambda\beta \int_0^L |u_x|^2 dx + i\lambda\rho_1 \int_0^L \theta \bar{u}_x dx + \int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1 - \alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] \bar{u}_{xx} dx \\ + m \int_0^L \psi \bar{u}_x dx = \beta \int_0^L f_x^1 \bar{u}_x dx + \rho_1 \int_0^L f^5 \bar{u}_x dx. \quad (3.36) \end{aligned}$$

A substituição de \bar{u}_{xx} dado por (3.30) em (3.36) nos dá

$$\begin{aligned}
i\lambda\beta \int_0^L |u_x|^2 dx &= -i\lambda\rho_1 \int_0^L \theta \bar{u}_x dx + \int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] i\lambda \frac{\rho}{\mu} \bar{\varphi} dx \\
&+ \int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] \frac{b}{\mu} \bar{\phi}_x dx \\
&- \int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] \frac{\beta}{\mu} \bar{\theta}_x dx \\
&+ \int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] \frac{\rho}{\mu} \bar{f}^2 dx \\
&- m \int_0^L \psi \bar{u}_x dx + \beta \int_0^L f_x^1 \bar{u}_x dx + \rho_1 \int_0^L f^5 \bar{u}_x dx.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando a desigualdade (3.35), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] i\lambda \frac{\rho}{\mu} \bar{\varphi} dx \leq C|\lambda| \int_0^L |\theta_x| |\varphi| dx \\
&+ C|\lambda| \int_0^\infty K(s) \int_0^L |\eta_x(s)| |\varphi| dx ds \leq C|\lambda| \left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C|\lambda| \left(\int_0^\infty K(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty K(s) \int_0^L |\eta_x(s)|^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C|\lambda| \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Analogamente, encontramos

$$\int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] \frac{b}{\mu} \bar{\phi}_x dx \leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.39}$$

$$-\int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] \frac{\beta \bar{\theta}_x}{\mu} dx \leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.40)$$

$$\int_0^L \frac{1}{\beta_1} \left[(1-\alpha)\theta_x + \alpha \int_0^\infty K(s)\eta_x(s) ds \right] \frac{\rho \bar{f}^2}{\mu} \leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.41)$$

Substituindo as desigualdades (3.38)-(3.41) em (3.37), podemos obter a conclusão do Lema.

■

Lema 3.3. A solução $(u, \varphi, \phi, \psi, \theta, \eta)'$ do sistema (3.7) satisfaz

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \|\phi_x\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \\ &+ C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a Eq. (3.30) por \bar{u} e integrando por partes em $(0, L)$. Isso nos dá,

$$i\lambda \rho \int_0^L \varphi \bar{u} dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx - b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx = \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx.$$

Desde que $i\lambda \bar{u} = -\bar{\varphi} - \bar{f}^1$, encontramos

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &= -b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx \\ &- \rho \int_0^L \varphi \bar{f}^1 dx - \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx. \end{aligned}$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré fornece

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &+ C \left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Agora, usando desigualdade (3.35), segue-se a conclusão do Lema. ■

Lema 3.4. Com as mesmas hipóteses do Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{J\rho}{\delta|b|} |\lambda||\chi| \left| \int_0^L \varphi \phi_x dx \right| + C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para $|\lambda| > 0$ grande.

Prova. Multiplicando Eq. (3.30) por $\bar{\phi}_x$ e integrando por partes em $(0, L)$ resulta

$$i\lambda \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx + \frac{\mu}{\rho} \int_0^L u_x \bar{\phi}_{xx} dx - \frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \bar{\phi}_x dx = \int_0^L f^2 \bar{\phi}_x dx.$$

A substituição de $\bar{\phi}_{xx}$ dado por (3.32) na equação acima, nos dá

$$\begin{aligned} i\lambda \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx + \frac{\mu}{\rho} \int_0^L u_x \left(-i\lambda \frac{J}{\delta} \bar{\psi} + \frac{b}{\delta} \bar{u}_x + \frac{\xi}{\delta} \bar{\phi} - \frac{m}{\delta} \bar{\theta} - \frac{J}{\delta} \bar{f}^4 \right) dx \\ - \frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \bar{\phi}_x dx = \int_0^L f^2 \bar{\phi}_x dx, \end{aligned}$$

de onde se segue que

$$\begin{aligned} \frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &= i\lambda \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx - \underbrace{i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{\psi} dx}_{:=I_1} + \frac{\mu b}{\rho \delta} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\mu \xi}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{\phi} dx \\ &\quad - \frac{\mu m}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{\theta} dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{f}^4 dx + \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \bar{\phi}_x dx - \int_0^L f^2 \bar{\phi}_x dx. \quad (3.42) \end{aligned}$$

Agora vamos analisar o termo I_1 . Da Eq. (3.29) e (3.31), chegamos a

$$I_1 = i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx + \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{f}_x^3 dx + \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L f_x^1 \bar{\psi} dx.$$

A substituição de I_1 na equação acima, nos dá

$$\begin{aligned} \frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &= i\lambda \frac{J}{\delta} \left(\frac{\delta}{J} - \frac{\mu}{\rho} \right) \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx + \frac{\mu b}{\rho \delta} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\mu \xi}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{\phi} dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{f}^4 dx \\ &+ \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \bar{\phi}_x dx - \frac{\mu m}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{\theta} dx - \int_0^L f^2 \bar{\phi}_x dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{f}_x^3 dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L f_x^1 \bar{\psi} dx. \end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, e usando a desigualdade (3.35), tem-se a conclusão do Lema. ■

Aplicando a desigualdade de Poincaré no Lema 3.4, encontramos

$$\begin{aligned} \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq \frac{\xi J \rho C_p}{\delta |b|} |\lambda| |\chi| \left| \int_0^L \varphi \phi_x dx \right| + C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde C_p é a constante de Poincaré.

Lema 3.5. A solução $(u, \varphi, \phi, \psi, \theta, \eta)'$ do sistema (3.7) satisfaz

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\phi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &+ \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a Eq. (3.32) por $\bar{\phi}$ e integrando em $(0, L)$, temos

$$i\lambda J \int_0^L \psi \bar{\phi} dx - \delta \int_0^L \phi_{xx} \bar{\phi} dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx = J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx.$$

Desde que $i\lambda\bar{\phi} = -\bar{\psi} - \bar{f}^3$, encontramos

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &= b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx \\ &\quad + m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx - J \int_0^L \psi \bar{f}^3 dx - J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré, tem-se a conclusão do Lema. ■

Demonstração do teorema 3.4 (Suficiente)

Desde que $\chi = 0$, então do Lema 3.4 encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, da desigualdade de Young e do Lema 3.2 temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.44}$$

A partir de (3.44) e usando a desigualdade Poincaré, concluímos que

$$\begin{aligned} \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Agora, usando o Lemmas 3.2, 3.3 a desigualdade (3.44), chegamos a

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Das desigualdades (3.44), (3.45) e dos Lemas 3.2 e 3.5, encontramos

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Agora, multiplicando Eqs. (3.30) e (3.32) por \bar{u} e $\bar{\phi}$, respectivamente, e integrando por partes $(0, L)$, temos

$$\underbrace{i\lambda\rho \int_0^L \varphi \bar{u} dx}_{:=I_2} + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx = \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx \quad (3.48)$$

e

$$\underbrace{i\lambda J \int_0^L \psi \bar{\phi} dx}_{:=I_3} + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx - m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx = J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx. \quad (3.49)$$

Substituindo $i\lambda\bar{u}$ dado por (3.29) em I_2 e $i\lambda\bar{\phi}$ dado por (3.31) em I_3 , chegamos a

$$\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx = \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx - \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx + \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx + \rho \int_0^L \varphi \bar{f}^1 dx \quad (3.50)$$

e

$$\begin{aligned} \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &= J \int_0^L |\psi|^2 dx + m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx \\ &+ J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx + J \int_0^L \psi \bar{f}^3 dx. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Somando as Eqs. (3.50) e (3.51), temos que

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &\leq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + J \int_0^L |\psi|^2 dx + |\beta| \left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ |m| \left(\int_0^L |\theta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\phi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré e Young e usando Lema 3.2 e as desigualdades (3.35), (3.46) e (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L (\bar{u}_x \phi + u_x \bar{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &\leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Agora, combinando as desigualdades (3.35), (3.46), (3.47) e (3.53), e usando a desigualdade de Young, segue-se que para $|\lambda| > 0$ grande o suficiente, existe uma constante positiva M tal que

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq M \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando resultado de Prüss [36], temos a conclusão do Teorema 3.4. ■

3.5 Decaimento Polinomial

Nesta seção, mostraremos que, em geral, C_0 -semigrupo $S(t) = e^{At}$ associado ao sistema (3.1), (3.3)-(3.4) vai polinomialmente para zero com taxa $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Para fazer isso, aplicamos o seguinte Teorema devido a A. Borichev and Y. Tomilov (ver [5], **Theorem 2.4**).

Teorema 3.5. Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo limitado sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} com gerador \mathcal{A} tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Então para qualquer $\gamma > 0$ e $x \in \mathcal{H}$, temos

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| = O(|\lambda|^{-\gamma}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \iff \|S(t)\mathcal{A}^{-1}x\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-\frac{1}{\gamma}}), \quad t \rightarrow \infty \quad (3.54)$$

onde $R(\lambda, \mathcal{A})$ é o operador de resolvente de \mathcal{A} .

O principal resultado desta seção é dado pelo seguinte Teorema.

Teorema 3.6. Se $\chi \neq 0$ e $\delta|b||\beta| - 2\rho|m||\chi|(\delta + \xi C_p) > 0$, então o C_0 -semigrupo associado ao sistema (3.7) satisfaz

$$\|e^{At}\Psi_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\|\Psi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall \Psi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

onde C_p é a constante de Poincaré. Além disso, essa taxa é ótima.

Prova. Multiplicando a Eq. (3.33) por $\bar{\psi}$ e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned} & i\lambda\rho_1 \int_0^L \theta \bar{\psi} \, dx - \frac{1}{\beta_1} \left[(1 - \alpha) \int_0^L \theta_{xx} \bar{\psi} \, dx + \alpha \int_0^\infty K(s) \int_0^L \eta_{xx}(s) \bar{\psi} \, dx \, ds \right] \\ & + \beta \int_0^L \varphi_x \bar{\psi} \, dx + m \int_0^L |\psi|^2 \, dx = \rho_1 \int_0^L f^5 \bar{\psi} \, dx. \end{aligned}$$

Desde que $\bar{\psi} = -i\lambda\bar{\phi} - \bar{f}^3$, a equação acima se torna

$$\begin{aligned} & i\beta\lambda \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x \, dx = -i\lambda\rho_1 \int_0^L \theta \bar{\psi} \, dx + \frac{i\lambda}{\beta_1} \left[(1 - \alpha) \int_0^L \theta_x \bar{\phi}_x \, dx + \alpha \int_0^\infty K(s) \int_0^L \eta_x(s) \bar{\phi}_x \, dx \, ds \right] \\ & - m \int_0^L |\psi|^2 \, dx + \rho_1 \int_0^L f^5 \bar{\psi} \, dx + \frac{1}{\beta_1} \left[(1 - \alpha) \int_0^L \theta_x \bar{f}^3_x \, dx + \alpha \int_0^\infty K(s) \int_0^L \eta_x(s) \bar{f}^3_x \, dx \, ds \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré and Young e tomando a desigualdade (3.35), chegamos a

$$\begin{aligned}
|\lambda| \left| \int_0^L \varphi \phi_x dx \right| &\leq C_\epsilon |\lambda|^2 \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \epsilon \left(\int_0^L |\psi|^2 dx + \int_0^L |\phi_x|^2 dx \right) \\
&+ C_\epsilon |\lambda|^2 \left[\int_0^L |\theta_x|^2 dx + \|\eta\|_{\mathbb{M}}^2 \right] + \frac{|m|}{|\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \left[\int_0^L |\theta_x|^2 dx + \|\eta\|_{\mathbb{M}}^2 \right] + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{|m|}{|\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + \epsilon \left(\int_0^L |\psi|^2 dx + \int_0^L |\phi_x|^2 dx \right) \\
&+ C_\epsilon |\lambda|^2 \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.55}
\end{aligned}$$

onde ϵ é uma constante positiva e C_ϵ é uma constante positiva que depende ϵ .

Combinando o Lema 3.4 e a estimativa (3.55), e aplicando a desigualdade de Young, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{2J\rho|m|\chi|}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\epsilon |\lambda|^2 \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{J\rho\chi|}{\delta|b|} \epsilon \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{3.56}
\end{aligned}$$

e a desigualdade de Poincaré gera

$$\begin{aligned}
\xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq \frac{2J\rho|m|\xi|\chi|C_p}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\epsilon |\lambda|^2 \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{J\rho\xi|\chi|C}{\delta|b|} \epsilon \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Por outro lado, do Lema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L |u_x|^2 dx &\leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{|m|C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Do Lema 3.3, encontramos

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq \frac{\delta}{4} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (3.59)$$

e do Lema 3.5, temos

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\delta}{4} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &\quad + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Tendo em conta as desigualdades (3.56) e (3.57), a desigualdade acima se torna

$$\begin{aligned} \frac{J}{\delta|b||\beta|} (\delta|b||\beta| - 2\rho|m||\chi|(\delta + \xi C_p)) \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq \frac{\delta}{4} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &\quad + \frac{J\rho|\chi|C}{\delta|b|} \epsilon \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\epsilon |\lambda|^2 \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Combinando a Eqs. (3.56)–(3.60) e (3.52), levando em conta as hipóteses do Teorema e usando a desigualdade de Young, podemos escolher $|\lambda| > 0$ grande o suficiente e $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente, tal que existe uma constante positiva M que não depende λ , tal que

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M|\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

que é equivalente a

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq O(|\lambda|^2) \quad \text{quando} \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Então, usando (3.54) o Teorema pode ser concluído.

Agora, para provar a desigualdade inversa, usamos argumentos de contradição. Suponha que $O(|\lambda|^2)$ é não é ótima. Isso significa que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq O(|\lambda|^{2-\epsilon}) \quad \text{quando} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (3.61)$$

o que implica que, para todo $F \in \mathcal{H}$, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\varepsilon}} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq c \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

onde $\Psi \in \mathcal{H}$ é a solução da equação resolvente $\lambda\Psi - \mathcal{A}\Psi = F$ em \mathcal{H} .

Isso é uma contradição porque, aproveitando o Teorema 3.2 podemos construir uma sequência

$$(\lambda_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}} \subset i\mathbb{R}, \quad (\Psi_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A}) \quad \text{and} \quad (F_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H},$$

tal que

$$\|\Psi_{\mu}\|_{\mathcal{H}} \geq c |\lambda_{\mu}|^2 \|F_{\mu}\|_{\mathcal{H}} \quad (\text{ver inequação (3.27)}),$$

o que implica que

$$\frac{1}{|\lambda_{\mu}|^{2-\varepsilon}} \|R(\lambda_{\mu}, \mathcal{A})\| \geq c |\lambda_{\mu}|^{\varepsilon} \rightarrow \infty \quad (\text{as } \mu \rightarrow \infty),$$

contrariando (3.61). ■

Modelo Dissipativo de uma placa de Mindlin-Timoshenko

4.1 Introdução

Neste capítulo, iremos estudar o seguinte sistema dissipativo de uma placa fina bidimensional de Mindlin-Timoshenko:

$$\rho_1 \omega_{tt} - K \mathcal{L}_1(\omega, \psi, \varphi) = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbf{R}^+, \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D \mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + K \left(\psi + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - D_1 \mathcal{L}_2(\psi_t, \varphi_t) + \alpha_1 \psi_t = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbf{R}^+, \quad (4.2)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D \mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + K \left(\varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - D_1 \mathcal{L}_3(\varphi_t, \psi_t) + \alpha_2 \varphi_t = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbf{R}^+, \quad (4.3)$$

onde Ω é um domínio limitado do \mathbf{R}^2 , $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ os seguintes operadores lineares elípticos de segunda ordem

$$\mathcal{L}_1(\omega, \psi, \varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad (4.6)$$

Aqui, levamos em consideração $\rho_1 = \rho h$ e $\rho_2 = \frac{\rho h^3}{12}$, onde ρ é a massa por unidade de volume, h é a espessura uniforme da placa, μ é a constante de Poisson que é tomada em $(0, 1/2)$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ representa o módulo de rigidez à flexão e $K = \frac{\kappa Eh}{2(1+\mu)}$ denota o módulo de cisalhamento e κ é um fator de correção de cisalhamento. Além disso, α_1, α_2 e D_1 são constantes positivas de dissipação. As funções $\psi(x, y, t)$ e $\varphi(x, y, t)$ representam os ângulos de rotação de um filamento da placa e a função $\omega(x, y, t)$ denota o deslocamento transversal da superfície média da placa, para $(x, y) \in \Omega, t > 0$.

Para maiores detalhes sobre as considerações físicas do problema, ver [21, 22].

Associamos ao sistema as seguintes condições iniciais :

$$\omega(x, y, 0) = \omega_0(x, y), \quad \omega_t(x, y, 0) = \omega_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (4.7)$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad \psi_t(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (4.8)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (4.9)$$

e as condições de contorno mistas como sugeridas em [11], a saber

$$\omega = 0, \quad \text{em } \Gamma \times \mathbf{R}^+, \quad (4.10)$$

$$\psi = 0, \quad \left(\frac{1-\mu}{2}(\varphi_x + \psi_y), \varphi_y + \mu\psi_x \right) \nu = 0, \quad \text{em } \Gamma_1 \times \mathbf{R}^+, \quad (4.11)$$

$$\varphi = 0, \quad \left(\psi_x + \mu\varphi_y, \frac{1-\mu}{2}(\varphi_x + \psi_y) \right) \nu = 0, \quad \text{em } \Gamma_2 \times \mathbf{R}^+, \quad (4.12)$$

aqui consideramos a fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, com $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$, disjuntos e não-vazios, e $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário exterior a Γ .

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção (4.2) discutimos existência, regularidade e unicidade de soluções globais do problema (4.1)-(4.12) via método de semigrupo de operadores lineares. Na Seção (4.3) estabelecemos a energia do problema associada ao sistema

(4.1)-(4.12) e mostramos que a energia é decrescente ao longo do tempo t . Finalmente na seção (4.4) estudaremos a falta de estabilidade além do decaimento polinomial na seção (4.5) para o modelo em questão.

4.2 O Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, estudaremos a existência e unicidade de soluções para o sistema Mindlin Timoshenko (4.1)-(4.12), via Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares (ver A. Pazy [33]). Vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o interior da placa retângular

$$\Omega := [0, L_1] \times [0, L_2], \text{ com } L_1, L_2 > 0.$$

Definimos os conjuntos

$$\Gamma_1 := \{(x, y) : 0 < x < L_1, y = 0, L_2\}.$$

$$\Gamma_2 := \{(x, y) : 0 < y < L_2, y = 0, L_1\}.$$

Note que $\Gamma := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$. Sob as hipóteses acima em Ω , consideramos o seguinte espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_{\Gamma_2}^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

com

$$H_{\Gamma_i}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ em } \Gamma_i\}, i = 1, 2$$

o qual é um espaço de Hilbert, dotado do seguinte produto interno

$$\begin{aligned} (U, V) = & \int_{\Omega} \left[\rho_1 W^1 \overline{W^2} + \rho_2 \Psi^1 \overline{\Psi^2} + \rho_2 \Phi^1 \overline{\Phi^2} + K(\psi^1 + \omega_x^1) \overline{(\psi^2 + \omega_x^2)} \right. \\ & + K(\varphi^1 + \omega_y^1) \overline{(\varphi^2 + \omega_y^2)} + D\psi_x^1 \overline{\psi_x^2} + D\varphi_y^1 \overline{\varphi_y^2} + D\left(\frac{1-\mu}{2}\right) (\psi_y^1 + \varphi_x^1) \overline{(\psi_y^2 + \varphi_x^2)} \\ & \left. + D\mu\psi_x^1 \overline{\varphi_y^2} + D\mu\varphi_x^1 \overline{\psi_y^2} \right] dx dy, \end{aligned} \quad (4.13)$$

e norma

$$\begin{aligned} \|U\|^2 &= \int_{\Omega} \left[\rho_1 |W^1|^2 + \rho_2 |\Psi^1|^2 + \rho_2 |\Phi^1|^2 + K |\psi^1 + \omega_x^1|^2 + K |\varphi^1 + \omega_y^1|^2 \right. \\ &\quad \left. + D |\psi_x^1|^2 + D |\varphi_y^1|^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y^1 + \varphi_x^1|^2 + D \mu \psi_x^1 \overline{\varphi_y^1} + D \mu \varphi_y^1 \overline{\psi_x^1} \right] dx dy, \end{aligned} \quad (4.14)$$

para $U = (\omega^1, W^1, \psi^1, \Psi^1, \varphi^1, \Phi^1)'$, $V = (\omega^2, W^2, \phi^2, \Psi^2, \varphi^2, \Phi^2)'$ Por conveniência, notamos que a norma acima pode ser reescrita sob uma forma não negativa

$$\begin{aligned} \|U\|^2 &= \int_{\Omega} \left[\rho_1 |W^1|^2 + \rho_2 |\Psi^1|^2 + \rho_2 |\Phi^1|^2 + K |\psi^1 + \omega_x^1|^2 + K |\varphi^1 + \omega_y^1|^2 \right. \\ &\quad \left. + D(1-\mu)[|\psi_x^1|^2 + |\varphi_y^1|^2] + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y^1 + \varphi_x^1|^2 + D \mu |\psi_x^1 + \varphi_y^1|^2 \right] dx dy, \end{aligned} \quad (4.15)$$

O Lema a seguir, o qual é uma consequência da desigualdade de Korn, nos fornece uma equivalência entre a norma (4.14) e a norma usual em \mathcal{H} ([21, 22]). Nesse contexto, denotemos por Σ o seguinte espaço de Hilbert

$$\Sigma = H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_2}^1(\Omega).$$

Lema 4.1. Existe uma constante $\alpha_0 > 0$ tal que, para todo $(\psi, \varphi) \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[D |\psi_x|^2 + D |\varphi_y|^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 + D \mu \psi_x \overline{\varphi_y} + D \mu \varphi_y \overline{\psi_x} \right] dx dy \\ \geq \alpha_0 [\|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2]. \end{aligned}$$

Além disso, para $K_0 > 0$, existe $\beta := \beta(K_0) > 0$ tal que, para todo $K \geq K_0$ e $(\omega, \psi, \varphi) \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[K |\psi + \omega_x|^2 + K |\varphi + \omega_y|^2 + D |\psi_x|^2 + D |\varphi_y|^2 \right. \\ \left. + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 + D \mu \psi_x \overline{\varphi_y} + D \mu \varphi_y \overline{\psi_x} \right] dx dy \geq \beta \|(\omega, \psi, \varphi)\|_{\Sigma}^2. \end{aligned}$$

Para começar, vamos reescrever o problema (4.7) - (4.12), na forma de um problema de Cauchy para $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)'$. Desse modo, o vetor U satisfaz a equação

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.16)$$

onde $U_0 = (\omega_0, \omega_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1)'$ é o vetor dos dados iniciais e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador diferencial denotado por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{\rho_1} \Delta & 0 & \frac{\kappa}{\rho_1} \partial_x & 0 & \frac{K}{\rho_1} \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{K}{\rho_2} \partial_x & 0 & \frac{1}{\rho_2} (D\mathcal{B}_1 - KI) & \frac{1}{\rho_2} (D_1\mathcal{B}_1 - \alpha_1 I) & \frac{D}{\rho_2} \mathcal{B}_2 & \frac{D_1}{\rho_2} \mathcal{B}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{K}{\rho_2} \partial_y & 0 & \frac{D}{\rho_2} \mathcal{B}_2 & \frac{D_1}{\rho_2} \mathcal{B}_2 & \frac{1}{\rho_2} (D\mathcal{B}_3 - KI) & \frac{1}{\rho_2} (D_1\mathcal{B}_3 - \alpha_2 I) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

onde os operadores diferenciais $\mathcal{B}_i (i = 1, 2, 3)$, são definidos por

$$\mathcal{B}_1 := \partial_x^2 + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \partial_y^2, \quad (4.18)$$

$$\mathcal{B}_2 := \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \partial_x^2, \quad (4.19)$$

$$\mathcal{B}_3 := \partial_y^2 + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \partial_x^2. \quad (4.20)$$

Observações 4.1. Nas considerações a seguir é conveniente conhecer a seguinte expressão:

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} W \\ \frac{K}{\rho_1} \mathcal{L}_1(\omega, \psi, \varphi) \\ \Psi \\ \frac{D}{\rho_2} \mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + \frac{K}{\rho_2} (\psi + \omega_x) + \frac{D_1}{\rho_2} \mathcal{L}_2(\Psi, \Phi) - \frac{\alpha_1}{\rho_2} \Psi \\ \Phi \\ \frac{D}{\rho_2} \mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + \frac{K}{\rho_2} (\varphi + \omega_y) + \frac{D_1}{\rho_2} \mathcal{L}_3(\Phi, \Psi) - \frac{\alpha_2}{\rho_2} \Phi \end{pmatrix} \quad \text{para } U = \begin{pmatrix} \omega \\ W \\ \psi \\ \Psi \\ \varphi \\ \Phi \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

O domínio do operador \mathcal{A} é definido por

$$D(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}; W \in H_0^1(\Omega), \Psi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega), \Phi \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega), K\mathcal{L}_1(\psi, \varphi, \omega), \\ D\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + D_1\mathcal{L}_2(\Psi, \Phi) + \alpha_1\Psi, D\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + D_1\mathcal{L}_3(\Phi, \Psi) + \alpha_2\Phi \in L^2(\Omega)\}$$

o qual é denso em \mathcal{H} . Também, temos o seguinte teorema

Teorema 4.1. O operador \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo de contração $S(t)$ sobre \mathcal{H} . Assim, para todo $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (4.7) - (4.12) tem uma única solução fraca $U \in C^0([0, \infty[, \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então U é solução forte de (4.7) - (4.12), isto é

$$U \in C^1([0, \infty[, \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty[, D(\mathcal{A})).$$

Prova: Seja $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)' \in D(\mathcal{A})$, então do produto interno em (4.13) temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle &= -\alpha_1 \int_{\Omega} \Psi^2 dx dy - \alpha_2 \int_{\Omega} \Phi^2 dx dy - D_1(1 - \mu) \int_{\Omega} \Psi_x^2 dx dy \\ &\quad - D_1(1 - \mu) \int_{\Omega} \Phi_y^2 dx dy - D_1 \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\Phi_x + \Psi_y|^2 dx dy \\ &\quad - D_1\mu \int_{\Omega} |\Psi_x + \Phi_y|^2 dx dy \leq 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

portanto, o operador \mathcal{A} é dissipativo. Sabemos que o domínio $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} , isto é $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Assim, do Teorema de Lax-Milgran (ver [6] para mais detalhes), a equação resolvente $I - \mathcal{A}$ para qualquer $F \in \mathcal{H}$, admite uma solução única $U \in D(\mathcal{A})$. Portanto deduzimos que $1 \in \rho(\mathcal{A})$, onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de \mathcal{A} .

Finalmente, usando o Teorema de Lummer-Phillips (ver [33]), concluímos que o operador \mathcal{A} é o gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ do espaço de Hilbert \mathcal{H} . ■

4.3 A energia do sistema

Definimos a energia de soluções do sistema Mindlin-Timoshenko (4.1)-(4.12) por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho_1 |\omega_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_2 |\varphi_t|^2 + K |\psi + \omega_x|^2 + K |\varphi + \omega_y|^2 \right]$$

$$+ D|\psi_x|^2 + D|\varphi_y|^2 + D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)|\psi_y + \varphi_x|^2 + 2D\mu\psi_x\varphi_y \Big] dx dy. \quad (4.23)$$

O funcional energia, assim definido, é não crescente para todo $t > 0$. De fato, como mostra o Lema seguinte.

Lema 4.2. Seja qualquer solução $(\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)$ do problema (4.1)-(4.12). Então, a taxa instantânea de variação de energia do sistema em relação ao tempo t é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) = & - \alpha_1 \int_{\Omega} |\psi_t|^2 dx dy - D_1 \int_{\Omega} |\psi_{tx}|^2 dx dy - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} |\psi_{ty}|^2 dx dy \\ & - \alpha_2 \int_{\Omega} |\varphi_t|^2 dx dy - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} |\varphi_{tx}|^2 dx dy - D_1 \int_{\Omega} |\varphi_{ty}|^2 dx dy, \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.4 Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção iremos mostrar que o semigrupo associado ao sistema Mindin-Timoshenko (4.1) - (4.12) apresenta perda de estabilidade exponencial. Para essa finalidade, usaremos o método baseado no Teorema de Gearhart-Herbst-Pruss- Huang [12, 16, 36] para sistemas dissipativos.

Teorema 4.2. Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$i\mathbf{R} \equiv \{i\lambda : \lambda \in \mathbf{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}), \quad (4.25)$$

e

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad (4.26)$$

se verificam, onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente do operador diferencial \mathcal{A} .

O principal resultado desta seção é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.3. Seja $S(t) = e^{At}$ o semigrupo C_0 de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} associado ao sistema (4.1) - (4.12). Então, $S(t)$ não é exponencialmente estável independentemente de qualquer relação existente entre seus coeficientes.

Prova: Para provar a falta de estabilidade exponencial do sistema (4.1) - (4.12), iremos utilizar o teorema 4.2. Dessa forma, usando argumentos de contradicção, iremos provar que existe uma seqüência de valores $(\lambda_n) \subset \mathbf{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $U_n = (\omega_n, W_n, \psi_n, \Psi_n, \varphi_n, \Phi_n)' \in D(\mathcal{A})$ para $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6)' \in \mathcal{H}$, satisfazendo a equação resolvente

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n \quad (4.27)$$

com $\|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, tal que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} = \|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty \quad (4.28)$$

Para simplificar a notação, omitiremos o índice n. Então a nossa equação espectral (4.27) pode ser reescrita em termos de suas componentes, sendo expressa pela forma

$$i\lambda\omega - W = f^1, \quad (4.29)$$

$$i\lambda W - \frac{K}{\rho_1}(\psi + \omega_x)_x - \frac{K}{\rho_1}(\varphi + \omega_y)_y = f^2, \quad (4.30)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f^3, \quad (4.31)$$

$$i\lambda\Psi - \frac{D}{\rho_2}\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + \frac{K}{\rho_2}(\psi + \omega_x) - \frac{D}{\rho_2}\mathcal{L}_2(\Psi, \Phi) + \frac{\alpha_1}{\rho_2}\Psi = f^4, \quad (4.32)$$

$$i\lambda\varphi - \Phi = f^5, \quad (4.33)$$

$$i\lambda\Phi - \frac{D}{\rho_2}\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + \frac{K}{\rho_2}(\varphi + \omega_y) - \frac{D_1}{\rho_2}\mathcal{L}_3(\Phi, \Psi) + \frac{\alpha_2}{\rho_2}\Phi = f^6. \quad (4.34)$$

Para o nosso sistema (4.29) - (4.34), tomamos $f^1 = f^3 = f^5 = 0$. De (4.29), (4.31) e (4.33), é imediato que

$$W = i\lambda\omega, \quad \Psi = i\lambda\psi, \quad \Phi = i\lambda\varphi, \quad (4.35)$$

Usando (4.35) é imediato que

$$\mathcal{L}_2(\Psi, \Phi) = i\lambda\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) \text{ e } \mathcal{L}_3(\Phi, \Psi) = i\lambda\mathcal{L}_3(\varphi, \psi), \quad (4.36)$$

o que nos possibilita reformular o sistema (4.29) - (4.34) da seguinte maneira

$$-\lambda^2\rho_1\omega - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = \rho_1 f^2, \quad (4.37)$$

$$-\lambda^2\rho_2\psi - (D + iD_1\lambda)\left(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2}\psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy}\right) + K(\psi + \omega_x) + i\lambda\alpha_1\psi = \rho_2 f^4, \quad (4.38)$$

$$-\lambda^2\rho_2\varphi - (D + iD_1\lambda)\left(\frac{1-\mu}{2}\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\psi_{xy}\right) + K(\varphi + \omega_y) + i\lambda\alpha_2\varphi = \rho_2 f^6. \quad (4.39)$$

Sem perda de generalidade iremos tomar $\Omega \subset \mathbb{R}$ como sendo $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$ com fronteira $\partial\Omega = \Gamma := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, em que

$$\Gamma_1 := \{(x, y) : 0 < x < \pi, y = 0, \pi\},$$

$$\Gamma_2 := \{(x, y) : 0 < y < \pi, x = 0, \pi\}.$$

Tomando f^2, f^4 e f^6 como

$$f^2 := \sin(nx) \sin(ny), \quad f^4 := f^6 := 0,$$

para $n \in \mathbf{N}$.

Levando-se em conta as condições de contorno dadas em (4.10)-(4.12), tomamos soluções da forma

$$\omega(x, y) := A \sin(nx) \sin(ny),$$

$$\psi(x, y) := B \cos(nx) \sin(ny),$$

$$\varphi(x, y) := C \sin(nx) \cos(ny),$$

com A, B, C dependentes de λ que serão determinados mais tarde.

Desta forma, encontrar a solução do sistema (4.37)-(4.39) é equivalente encontrar soluções A, B, C para o seguinte sistema

$$p_1(\lambda)A + KnB + KnC = \rho_1, \quad (4.40)$$

$$KnA + (p_2(\lambda) + i\lambda\alpha_1)B + p_3(\lambda)C = 0, \quad (4.41)$$

$$KnA + p_3(\lambda)B + (p_2(\lambda) + i\lambda\alpha_2)(\lambda)C = 0. \quad (4.42)$$

Onde

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= -\lambda^2 \rho_1 + 2Kn^2, \\ p_2(\lambda) &= -\lambda^2 \rho_2 + \frac{3-\mu}{2}(D + iD_1\lambda)n^2 + K, \\ p_3(\lambda) &= \frac{1+\mu}{2}(D + iD_1\lambda)n^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, tomando

$$\lambda := \lambda_n = \sqrt{\frac{2K}{\rho_1}}n, \quad n \in \mathbf{N} \quad (4.43)$$

então $p_1(\lambda) \equiv 0$ e reecrevendo (4.40)-(4.42) na forma matricial, encontramos

$$\begin{pmatrix} 0 & kn & kn \\ kn & p_2(\lambda) + i\lambda\alpha_1 & p_3(\lambda) \\ kn & p_3(\lambda) & p_2(\lambda) + i\lambda\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Cramer, as expressões p_1, p_2 e p_3 e a escolha de λ dada em (4.43), obtemos as seguintes expressões explicitas para A, B e C

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho_1 \left[\left(-\rho_2\lambda^2 - (\mu - 1)(D + iD_1\lambda)n^2 + K \right) \left(-\rho_2\lambda^2 + 2(D + iD_1\lambda)n^2 + K \right) \right]}{2K^2n^2 \left[\rho_2\lambda^2 + (\mu - 1)(D + iD_1\lambda)n^2 - K - i\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) \right]} \\ &+ \frac{i\lambda\rho_1(\alpha_2 + \alpha_1) \left(-\lambda^2\rho_2 + \frac{3-\mu}{2}(D + iD_1\lambda)n^2 + K + 1 \right)}{2K^2n^2 \left[\rho_2\lambda^2 + (\mu - 1)(D + iD_1\lambda)n^2 - K - i\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) \right]}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$B = \frac{\rho_1 \left(\rho_2\lambda^2 + (\mu - 1)(D + iD_1\lambda)n^2 - K - i\lambda\alpha_2 \right)}{2Kn \left[\rho_2\lambda^2 + (\mu - 1)(D + iD_1\lambda)n^2 - K - i\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) \right]}, \quad (4.45)$$

e

$$C = \frac{\rho_1 \left(\rho_2\lambda^2 + (\mu - 1)(D + iD_1\lambda)n^2 - K - i\lambda\alpha_1 \right)}{2Kn \left[\rho_2\lambda^2 + (\mu - 1)(D + iD_1\lambda)n^2 - K - i\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) \right]}, \quad (4.46)$$

De (4.44), (4.45) e (4.46) resulta que

$$A := A_n \approx \mathcal{O}(n), \quad (4.47)$$

$$B := B_n \longrightarrow 0, \quad (4.48)$$

$$C := C_n \longrightarrow 0. \quad (4.49)$$

para n grande.

De (4.35) e usando a definição da norma em (4.14), segue que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_1 \int_{\Omega} |W|^2 dx dy = \rho_1 \int_{\Omega} |\lambda_n \omega_n|^2 dx dy = \rho_1 \int_{\Omega} |\lambda_n A \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(ny)|^2 dx dy \\ &= \rho_1 |\lambda_n A|^2 \int_{\Omega} |\operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(ny)|^2 dx dy \end{aligned} \quad (4.50)$$

Logo, usando (4.43) e (4.47) em (4.50), resulta

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \approx \mathcal{O}(n^4). \quad (4.51)$$

Então, como $n \rightarrow \infty$, de (4.50), (4.51) tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 > \rho_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \|W\|_{L^2}^2 = \infty,$$

equivalentemente,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} > \sqrt{\frac{K\pi}{2}} n A_n \approx \mathcal{O}(n^2). \quad (4.52)$$

Dessa maneira, aplicando o Teorema 4.2 podemos concluir que o semigrupo $S(t)$ associado ao sistema (4.1)-(4.12) não é exponencialmente estável, ou seja, apresenta uma perda de estabilidade exponencial.

4.5 Decaimento Polinomial

Nesta seção, nossa atenção estará voltada em provar que o semigrupo $S(t) = e^{At}$ gerado por \mathcal{A} , associado ao sistema (4.1)-(4.12) é polinomialmente estável, e isto ocorrerá independente de qualquer relação entre os seus coeficientes. Ou seja, mostraremos que a energia $E(t)$ de soluções do Sistema de Mindlin-Timoshenko, dada por (4.23), é controlada por um polinômio, a saber

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq f(t)\|U_0\|_{D(\mathcal{A})},$$

onde $f(t)$ é uma função polinomial positiva, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, ou seja, tende a zero polinomialmente ao longo do tempo. Portanto, fica evidente que o decaimento polinomial da energia será um processo de estabilização lenta, visto que a energia das soluções é controlada por um polinômio.

Para alcançar essa propriedade faremos uso de um resultado devido a Borichev e Tomilov[5] que nos fornece condições para obter o decaimento Polinomial.

Teorema 4.4. Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo limitado sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} , com gerador infinitesimal \mathcal{A} , tal que $i\mathbf{R} \subset \rho(A)$. Então, para qualquer $\alpha > 0$ e $x \in \mathcal{H}$, temos que

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-\alpha}), |\lambda| \rightarrow \infty \Leftrightarrow \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(t^{-1/\alpha}), t \rightarrow \infty, \quad (4.53)$$

Para iniciar, consideramos $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)' \in D(\mathcal{A})$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6)' \in \mathcal{H}$. Então a equação resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$ em termos das suas componentes fica escrita da seguinte forma

$$i\lambda\omega - W = f^1, \quad (4.54)$$

$$i\lambda W - \frac{K}{\rho_1}(\psi + \omega_x)_x - \frac{K}{\rho_1}(\varphi + \omega_y)_y = f^2, \quad (4.55)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f^3, \quad (4.56)$$

$$i\lambda\Psi - \frac{D}{\rho_2}\mathcal{L}_2(\psi, \varphi) + \frac{K}{\rho_2}(\psi + \omega_x) - \frac{D_1}{\rho_2}\mathcal{L}_2(\Psi, \Phi) + \frac{\alpha_1}{\rho_2}\Psi = f^4, \quad (4.57)$$

$$i\lambda\varphi - \Phi = f^5, \quad (4.58)$$

$$i\lambda\Phi - \frac{D}{\rho_2}\mathcal{L}_3(\varphi, \psi) + \frac{K}{\rho_2}(\varphi + \omega_y) - \frac{D_1}{\rho_2}\mathcal{L}_3(\Phi, \Psi) + \frac{\alpha_2}{\rho_2}\Phi = f^6. \quad (4.59)$$

Agora, fazendo o produto interno em \mathcal{H} , de $U \in D(\mathcal{A})$ com a equação resolvente de \mathcal{A} , isto é

$$i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Tomando a parte real da equação anterior e usando (4.22), temos que

$$\begin{aligned} \alpha_1\|\Psi\|_2^2 + \alpha_2\|\Phi\|_2^2 + D_1(1 - \mu)[\|\Psi_x\|_2^2 + \|\Phi_y\|_2^2] \\ + D_1\mu\|\Psi_x + \Phi_y\|_2^2 + D_1\left(\frac{1 - \mu}{2}\right)\|\Phi_x + \Psi_y\|_2^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que o resolvente de A é uniformemente limitado ao longo do eixo imaginário. Dessa forma, podemos estabelecer o seguinte Lema.

Lema 4.3. Sob as condições acima temos

$$i\mathbf{R} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

Prova: Desde que $(I - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto em \mathcal{H} . Desse modo, para provar nosso lema é suficiente mostrarmos que o operador \mathcal{A} não possui autovalor imaginário puro. Dessa forma, podemos supor que existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}^*$ tal que $i\lambda_0$ seja um autovalor e $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi) \in D(\mathcal{A})$ seja um autovetor normalizado, isto é, $\|U\|_{\mathcal{A}} = 1$ e tal que

$$\mathcal{A}U = i\lambda_0 U$$

Sendo assim, de (4.60), para $F = 0$ em \mathcal{H} , obtemos $\Psi = \Phi = 0$. Além disso, de (4.56), (4.58) e com $f^3 = f^5 = 0$ concluímos que $\psi, \varphi = 0$. Mais ainda, de (4.57) e (4.59) com $f^2 = f^4 = 0$ e também pela desigualdade de Poincaré encontramos $\omega = 0$. Finalmente, de (4.54) com $f^1 = 0$ temos $W = 0$, isto implica que $U = 0$. Mas isso é uma contradição, o que nos permite concluir que não existem autovalores imaginários e logo o nosso resultado está provado. ■

Para prosseguir na prova do decaimento polinomial do sistema (4.1)-(4.12), iremos enunciar e demonstrar alguns lemas auxiliares que darão o suporte necessário no desenvolvimento deste trabalho. Para facilitar a notação, usaremos o mesmo parâmetro C para denotar diferentes constantes positivas que surgirão nas estimativas.

Lema 4.4. Existe uma constante positiva C de tal modo que qualquer solução do sistema (4.1)-(4.12) satisfaz

$$\|\Psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.61)$$

$$|\lambda|^2\|\nabla\psi\|_2^2 + |\lambda|^2\|\nabla\varphi\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.62)$$

onde C é independente de λ .

Prova: Usando a desigualdade de Korn, obtemos

$$\alpha_0[\|\Psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}^2] \leq D_1(1 - \mu)[\|\Psi_x\|_2^2 + \|\Phi_y\|_2^2] + D_1\mu\|\Psi_x + \Phi_y\|_2^2$$

$$+ D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \|\Phi_x + \Psi_y\|_2^2, \quad (4.63)$$

com $\alpha_0 > 0$. Da estimativa (4.60), podemos concluir que

$$D_1(1-\mu)[\|\Psi_x\|_2^2 + \|\Phi_y\|_2^2] + D_1\mu\|\Psi_x + \Phi_y\|_2^2 + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \|\Phi_x + \Psi_y\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.64)$$

Aplicando a desigualdade (4.64) em (4.63) segue de forma imediata o resultado (4.61).

Agora, derivando em relação a x e y as equações (4.56) e (4.58), resulta

$$\begin{aligned} i\lambda\psi_x + \Psi_x &= f_x^3, & i\lambda\psi_y + \Psi_y &= f_y^3, \\ i\lambda\varphi_x + \Phi_x &= f_x^5, & i\lambda\varphi_y + \Phi_y &= f_y^5, \end{aligned}$$

respectivamente. Aplicando a desigualdade triangular e Young nas desigualdades acima, podemos obter

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \|\psi_x\|_2^2 &\leq 2\|\Psi_x\|_2^2 + 2\|f_x^3\|^2, & |\lambda|^2 \|\psi_y\|_2^2 &\leq 2\|\Psi_y\|_2^2 + 2\|f_y^3\|^2, \\ |\lambda|^2 \|\varphi_x\|_2^2 &\leq 2\|\Phi_x\|_2^2 + 2\|f_x^5\|^2, & |\lambda|^2 \|\varphi_y\|_2^2 &\leq 2\|\Phi_y\|_2^2 + 2\|f_y^5\|^2, \end{aligned}$$

A partir das desigualdades anteriores, podemos concluir que

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 (\|\psi_x\|_2^2 + \|\varphi_y\|_2^2) &\leq 2(\|\Psi_x\|_2^2 + \|\Phi_y\|_2^2) + 2(\|f_x^3\|^2 + \|f_y^5\|^2), \\ |\lambda|^2 \|\psi_x + \varphi_y\|_2^2 &\leq 2\|\Psi_x + \Phi_y\|_2^2 + 2\|f_x^3 + f_y^5\|^2, \\ |\lambda|^2 \|\varphi_x + \psi_y\|_2^2 &\leq 2\|\Phi_x + \Psi_y\|_2^2 + 2\|f_y^3 + f_x^5\|^2, \end{aligned}$$

multiplicando as desigualdades anteriores pelas devidas constantes somando os resultados obtidos e usando a norma definida em \mathcal{H} para F e a estimativa (4.64), resulta

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \left\{ D(1-\mu)[\|\psi_x\|_2^2 + \|\varphi_y\|_2^2] + D\mu\|\psi_x + \varphi_y\|_2^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \|\varphi_x + \psi_y\|_2^2 \right\} \\ \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.65) \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\psi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\varphi\|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2,$$

e usando (4.65) e a desigualdade de Korn novamente podemos concluir que

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \|\nabla \psi\|_2^2 + |\lambda|^2 \|\nabla \varphi\|_2^2 &\leq |\lambda|^2 \|\psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + |\lambda|^2 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq |\lambda|^2 \left\{ D(1-\mu) [\|\psi_x\|_2^2 + \|\varphi_y\|_2^2] + D\mu \|\psi_x + \varphi_y\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \|\varphi_x + \psi_y\|_2^2 \right\} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva dependendo somente dos coeficientes do sistema de Mindlin-Timoshenko, o que nos permite concluir a prova do Lema 4.4. \blacksquare

Lema 4.5. Existe uma constante positiva C tal que qualquer solução do sistema (4.1)-(4.12) satisfaz

$$\|\Psi\|_2^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \|\omega\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.66)$$

$$\|\Phi\|_2^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \|\omega\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.67)$$

onde C é independente de λ e $|\lambda| > 1$.

Prova: Para iniciar, iremos mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\lambda| \|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \{ \|\nabla \psi\|_2 + \|\nabla \varphi\|_2 + \|\omega\|_2 + \|\nabla \Phi\|_2 + \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} + \|F\|_{\mathcal{H}} \}, \quad (4.68)$$

$$|\lambda| \|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \{ \|\nabla \psi\|_2 + \|\nabla \varphi\|_2 + \|\omega\|_2 + \|\nabla \Psi\|_2 + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} + \|F\|_{\mathcal{H}} \}, \quad (4.69)$$

onde $H^{-1}(\Omega)$ é o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

De fato, seja $v \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando (4.57) por \bar{v} , integrando em Ω , encontramos

$$\begin{aligned} i\rho_2 \lambda \int_{\Omega} \Psi \bar{v} \, dx \, dy &= D \int_{\Omega} \left(\psi_{xx} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{yy} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{xy} \right) \bar{v} \, dx \, dy - K \underbrace{\int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{v} \, dx \, dy}_{:= I_1} \\ &\quad + D_1 \int_{\Omega} \left(\Psi_{xx} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Psi_{yy} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \Phi_{xy} \right) \bar{v} \, dx \, dy + \alpha_1 \int_{\Omega} \Psi \bar{v} \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} f^4 \bar{v} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Usando integração por partes, as condições de contorno e a equação (4.56) em I_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
i\rho_2\lambda \int_{\Omega} \Psi \bar{v} \, dx \, dy = & - D \int_{\Omega} \psi_x \bar{v}_x \, dx \, dy - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \bar{v}_y \, dx \, dy - D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{v}_x \, dx \, dy \\
& - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{v}_y \, dx \, dy + i \frac{K}{\lambda} \int_{\Omega} (\Psi + f^3) \bar{v} \, dx \, dy + K \int_{\Omega} \omega \bar{v}_x \, dx \, dy \\
& - D_1 \int_{\Omega} \Psi_x \bar{v}_x \, dx \, dy - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \Psi_y \bar{v}_y \, dx \, dy - D_1 \mu \int_{\Omega} \Phi_y \bar{v}_x \, dx \, dy \\
& - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \Phi_x \bar{v}_y \, dx \, dy + \alpha_1 \int_{\Omega} \Psi v \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} f^4 v \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Passando o módulo na igualdade acima e usando as desigualdade Triangular e Cauchy-Schwarz, encontramos

$$\begin{aligned}
\rho_2|\lambda| \int_{\Omega} |\Psi| |v| \, dx \, dy \leq & D \left(\int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left(\int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + D\mu \left(\int_{\Omega} |\varphi_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left(\int_{\Omega} |\varphi_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + \frac{K}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} + \frac{K}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |f^3|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + K \left(\int_{\Omega} |\omega|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} + D_1 \left(\int_{\Omega} |\Psi_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left(\int_{\Omega} |\Psi_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + D_1 \mu \left(\int_{\Omega} |\Phi_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left(\int_{\Omega} |\Phi_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\bar{v}_y|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \\
& + \alpha_1 \left(\int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} + \rho_2 \left(\int_{\Omega} |f^4|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v_x|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré podemos concluir existe uma constante C positiva, dependendo apenas dos coeficientes do sistema de Mindlin-Timoshenko tal que

$$|\lambda| \langle \Psi, v \rangle \leq C \{ \|\nabla\psi\|_2 + \|\nabla\varphi\|_2 + \|\omega\|_2 + \|\nabla\Phi\|_2 + \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} + \|F\|_{\mathcal{H}} \} \|\nabla v\|_2,$$

para $|\lambda| \geq 1$.

Considerando a norma em $H^{-1}(\Omega)$ segue que o resultado (4.68).

Analogamente, podemos verificar a desigualdade (4.69), considerando as equações (4.58) e (4.59).

Pela desigualdade de interpolação (ver [24, 17]), para alguma constante $C_0 > 0$ vale

$$\|\Psi\|_2^2 \leq C_0 \|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\Psi\|_{H^1(\Omega)},$$

Usando a estimativa (4.68) na desigualdade acima, resulta

$$\|\Psi\|_2^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \{ \|\nabla\psi\|_2 + \|\nabla\varphi\|_2 + \|\omega\|_2 + \|\nabla\Phi\|_2 + \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} + \|F\|_{\mathcal{H}} \} \|\Psi\|_{H^1(\Omega)},$$

ou seja

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_2^2 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\omega\|_2 \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{|\lambda|} \{ \|\nabla\psi\|_2 + \|\nabla\varphi\|_2 \} \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \{ \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla\Phi\|_2 \} \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} + \|F\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, resulta

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_2^2 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\omega\|_2 \|\Psi\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{|\lambda|} \{ \|\nabla\psi\|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2 \} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \{ \|\Psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\nabla\Phi\|_2^2 \} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Fazendo uso de (4.61) e (4.62) do Lema 4.4, temos como resultado

$$\|\Psi\|_2^2 \leq \frac{C}{|\lambda|} \|\omega\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para alguma constante $C > 0$ e $|\lambda| \geq 1$, o que nos permite mostrar a desigualdade (4.66). Da mesma maneira podemos mostrar a desigualdade (4.67), usando a desigualdade de interpolação para Φ , a estimativa (4.69) e os mesmos passos feitos anteriormente. O que nos permite concluir a prova do nosso Lema.

Lema 4.6. Existe uma constante positiva C independente de λ de tal modo que qualquer solução do sistema (4.1)-(4.12) satisfaz

$$\|\omega\|_2 \leq C|\lambda|\{\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)}\} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.70)$$

para $|\lambda| > 1$.

Prova: Multiplicando a equação (4.57) por $\frac{1}{K}$ e derivando em relação a x , obtemos

$$-\omega_{xx} = i\frac{\rho_2}{K}\lambda\Psi_x - \frac{D}{K}\mathcal{L}_2(\psi, \varphi)_x + \psi_x - \frac{D_1}{K}\mathcal{L}_2(\Psi, \Phi)_x + \frac{\alpha_1}{K}\Psi_x - \frac{\rho_2}{K}f_x^4, \quad (4.71)$$

Da mesma forma, multiplicando a equação (4.59) por $\frac{1}{K}$ e derivando em relação a y , resulta

$$-\omega_{yy} = i\frac{\rho_2}{K}\lambda\Phi_y - \frac{D}{K}\mathcal{L}_3(\varphi, \psi)_y + \varphi_y - \frac{D_1}{K}\mathcal{L}_3(\Phi, \Psi)_y + \frac{\alpha_2}{K}\Phi_y - \frac{\rho_2}{K}f_y^6. \quad (4.72)$$

Somando as igualdades (4.71) e (4.72), encontramos

$$-\Delta\omega = \Upsilon$$

onde

$$\begin{aligned} \Upsilon &= i\frac{\rho_2}{K}\lambda\Psi_x - \frac{D}{K}\mathcal{L}_2(\psi, \varphi)_x + \psi_x - \frac{D_1}{K}\mathcal{L}_2(\Psi, \Phi)_x + \frac{\alpha_1}{K}\Psi_x - \frac{\rho_2}{K}f_x^4 \\ &+ i\frac{\rho_2}{K}\lambda\Phi_y - \frac{D}{K}\mathcal{L}_3(\varphi, \psi)_y + \varphi_y - \frac{D_1}{K}\mathcal{L}_3(\Phi, \Psi)_y + \frac{\alpha_2}{K}\Phi_y - \frac{\rho_2}{K}f_y^6 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Observe que a expressão para Υ faz sentido, desde que vale (4.55). Da regularidade dos problema elípticos (ver[24]) e das imersões de Sobolev, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\omega\|_2 \leq C\|\Upsilon\|_{H^{-2}(\Omega)} \quad (4.74)$$

onde $H^{-2}(\Omega)$ é o dual de $H^2(\Omega)$.

Agora, iremos estimar o lado direito de (4.74). Para isto iremos tomar $v \in H_0^1(\Omega)$.

Multiplicando (4.73) por \bar{v} e seguindo os mesmos passos do Lema anterior, resulta

$$\begin{aligned} |\langle \Upsilon, v \rangle| &\leq C|\lambda|\{\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)}\}\|v\|_{H_0^2(\Omega)} \\ &+ C\{\|\nabla\Psi\|_2 + \|\nabla\Phi\|_2 + \|\nabla\psi\|_2 + \|\nabla\varphi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}\}\|v\|_{H_0^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ dependendo unicamente dos coeficientes do sistema de Mindlin Timoshenko. De onde segue que

$$\begin{aligned} \|\Upsilon\|_{H^{-2}(\Omega)} &\leq C|\lambda|\{\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)}\} \\ &+ C\{\|\nabla\Psi\|_2 + \|\nabla\Phi\|_2 + \|\nabla\psi\|_2 + \|\nabla\varphi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}\}. \end{aligned}$$

De (4.74) e da desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \|\omega\|_2 &\leq C|\lambda|\{\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)}\} \\ &+ C\{\|\nabla\Psi\|_2 + \|\nabla\Phi\|_2 + \|\nabla\psi\|_2 + \|\nabla\varphi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}\}. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.4 e as equações componentes (4.56) e (4.58) resulta

$$\|\omega\|_2 \leq C|\lambda|\{\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)}\} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

o que conclui a prova do Lema 4.6.

Lema 4.7. Existe uma constante C independente de λ tal que

$$\|\nabla\omega\|_2^2 \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^3\|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.75)$$

$$\|W\|_2^2 \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^3\|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.76)$$

para $|\lambda| \geq 1$.

Prova. Inicialmente, iremos mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\lambda|\|\Psi\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C\{\|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Psi\|_2 + \|\Phi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}\}, \quad (4.77)$$

$$|\lambda|\|\Phi\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C\{\|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Psi\|_2 + \|\Phi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}\}, \quad (4.78)$$

onde $H^{-2}(\Omega)$ é o dual de $H^2(\Omega)$.

De fato, considerando $v \in H_0^2(\Omega)$. Multiplicando (4.57) por \bar{v} , integrando sobre Ω , usando integração por partes (duas vezes), as condições de contorno e a equação (4.56), obtemos

$$\begin{aligned}
i\rho_2\lambda \int_{\Omega} \Psi \bar{v} \, dx \, dy &= D \int_{\Omega} \psi \bar{v}_{xx} \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi \bar{v}_{yy} \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi \bar{v}_{xy} \, dx \, dy \\
&+ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi \bar{v}_{xy} \, dx \, dy + i \frac{K}{\lambda} \int_{\Omega} (\Psi + f^3) \bar{v} \, dx \, dy + K \int_{\Omega} \omega \bar{v}_x \, dx \, dy \\
&+ D_1 \int_{\Omega} \Psi \bar{v}_{xx} \, dx \, dy + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \Psi \bar{v}_{yy} \, dx \, dy + D_1 \mu \int_{\Omega} \Phi \bar{v}_{xy} \, dx \, dy \\
&+ \alpha_1 \int_{\Omega} \Psi v \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} f^4 v \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Passando o módulo na igualdade acima e utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e triangular, resulta

$$|\lambda| | \langle \Psi, v \rangle | \leq C \{ \|\psi\|_2 + \|\varphi\|_2 + \|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}} \} \|v\|_{H_0^2(\Omega)},$$

para $|\lambda| \geq 1$. Aqui, C é uma constante positiva dependendo apenas dos coeficientes do sistema de Mindlin-Timoshenko. Usamos ainda $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Usando as equações componentes (4.56) e (4.58), tem-se

$$|\lambda| | \langle \Psi, v \rangle | \leq C \{ \|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}} \} \|v\|_{H_0^2(\Omega)},$$

para $|\lambda| \geq 1$.

Tomando a norma em $H^{-2}(\Omega)$, resulta

$$|\lambda| \|\Psi\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C \{ \|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}} \},$$

o que mostra a desigualdade (4.77). De maneira equivalente segue-se (4.78). Pela desigualdade de interpolação [24, 17], para alguma constante $C > 0$ vale

$$\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|\Psi\|_{H^{-2}(\Omega)}^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2},$$

Usando (4.77), encontramos

$$\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \underbrace{\|\omega\|_{H^{-1}(\Omega)}^{1/2}}_{:=I_4} + \|\Phi\|_2^{1/2} + \|\Psi\|_2^{1/2} + \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \right\} \|\Psi\|_2^{1/2}$$

Usando componente (4.54) em I_4 , obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \frac{1}{|\lambda|^{1/2}} \|W\|_{H^{-1}(\Omega)}^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} \right\} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \|\Phi\|_2^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Psi\|_2^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} \right\} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} \end{aligned}$$

Tomando a desigualdade de Young e a componente (4.55), encontramos

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \frac{1}{|\lambda|} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} \right\} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} \right\} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ que independe de λ . Assim temos,

$$\|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\Psi\|_2^{1/2} \right\},$$

De forma análoga, encontramos

$$\|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \|\Phi\|_2^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \left\{ \|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|\Phi\|_2^{1/2} \right\}, \quad (4.79)$$

onde $C > 0$ é independente de λ e $|\lambda| \geq 1$.

Somando as estimativas (4.79) e (4.79), resulta

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} (\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2}) + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} (\|\Phi\|_2 + \|\Psi\|_2) \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} (\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2}), \end{aligned}$$

Do Lema 4.6 e da estimativa anterior, encontramos

$$\begin{aligned} \|\omega\|_2 &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \{\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2}\} + C|\lambda|^{1/2} \{\|\Psi\|_2 + \|\Phi\|_2\} \\ &\quad + |\lambda|^{1/2} \underbrace{\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} (\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2})}_{:=I_5} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \end{aligned}$$

Usando-se a desigualdade de Young em I_5 vem que

$$\begin{aligned} \|\omega\|_2 &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \{\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2}\} + C|\lambda|^{1/2} \underbrace{\{\|\Psi\|_2 + \|\Phi\|_2\}}_{:=I_6} \\ &\quad + C|\lambda|^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.5 em I_6 , tem-se

$$\begin{aligned} \|\omega\|_2 &\leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \{\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2}\} + C \underbrace{\|\omega\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/4} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/4}}_{:=I_7} \\ &\quad + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C|\lambda|^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \end{aligned}$$

Tomando a desigualdade de Young em I_7 com $\varepsilon > 0$, resulta

$$(1 - \varepsilon)\|\omega\|_2 \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \{\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2}\} + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C|\lambda|^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2},$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno, encontramos

$$\|\omega\|_2 \leq \underbrace{\frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|\nabla\omega\|_2^{1/2} \{\|\Psi\|_2^{1/2} + \|\Phi\|_2^{1/2}\}}_{:=I_8} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C|\lambda|^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2},$$

Usando novamente a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e o Lema 4.4 em I_8 , resulta

$$\|\omega\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \|\nabla\omega\|_2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C|\lambda|^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (4.80)$$

onde $C, C_\varepsilon > 0$ são independentes de λ e $|\lambda| \geq 1$. Aplicando a equação componente (4.54) em (4.80), tem-se

$$\|W\|_2 \leq \varepsilon \|\nabla\omega\|_2 + C_\varepsilon |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C |\lambda|^{3/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}, \quad (4.81)$$

Agora, multiplicando (4.55) por $\bar{\omega}$ e integrando por partes em Ω , temos

$$K \int_{\Omega} |\nabla\omega|^2 dx dy = -i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} W\bar{\omega} dx dy + K \int_{\Omega} \psi_x \bar{\omega} dx dy + K \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\omega} dx dy - \rho_1 \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} dx dy,$$

Passando o módulo na igualdade anterior, resulta

$$\int_{\Omega} |\nabla\omega|^2 dx dy \leq \underbrace{\frac{\rho_1}{K} |\lambda| \int_{\Omega} |W||\omega| dx dy}_{:I_9} + \int_{\Omega} |\psi_x||\omega| dx dy + \int_{\Omega} |\varphi_y||\omega| dx dy + \frac{\rho_1}{K} \int_{\Omega} |f^2||\omega| dx dy,$$

Da equação componente (4.54) e da desigualdade triangular em I_9 , encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla\omega|^2 dx dy &\leq \frac{\rho_1}{K} \int_{\Omega} |W|^2 dx dy + \frac{\rho_1}{K} \int_{\Omega} |W||f^1| dx dy + \int_{\Omega} |\psi_x||\omega| dx dy + \int_{\Omega} |\varphi_y||\omega| dx dy \\ &+ \frac{\rho_1}{K} \int_{\Omega} |f^2||\omega| dx dy, \end{aligned}$$

Da desigualdade de Young e Poincaré, obtemos

$$\|\nabla\omega\|_2^2 \leq C\{\|W\|_2^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\} + C\{\|\nabla\psi\| + \|\nabla\varphi\|\}\|\nabla\omega\|_2 + \|F\|_{\mathcal{H}}\|\nabla\omega\|_2$$

Agora, usando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, resulta

$$\|\nabla\omega\|_2^2 \leq C\{\|W\|_2^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\} + C\{\underbrace{\|\nabla\psi\|^2 + \|\nabla\varphi\|^2}_{:=I_{10}}\}$$

Aplicando o Lema 4.4 em I_{10} , resulta

$$\|\nabla\omega\|_2^2 \leq C\|W\|_2^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.82)$$

ou ainda

$$\|\nabla\omega\|_2 \leq C\|W\|_2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

onde $C > 0$ e independente λ . Substituindo a desigualdade anterior em (4.81), encontramos

$$\|W\|_2^2 \leq \varepsilon\{C\|W\|^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2\} + C_\varepsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^3\|F\|_{\mathcal{H}},$$

escolhendo $\varepsilon > 0$ suficiente pequeno, então temos que existe uma constante $C > 0$ independente de λ tal que

$$\|W\|_2^2 \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^3\|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.83)$$

para $|\lambda| \geq 1$. Assim, a prova da desigualdade (4.76) está concluída.

Por ultimo, substituindo esta ultima estimativa em (4.82), encontramos

$$\|\nabla\omega\|_2^2 \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^3\|F\|_{\mathcal{H}}$$

para $C > 0$ e $|\lambda| \geq 1$.

Isto conclui a prova do Lema 4.7. Diante dos lemas demonstrados anteriormente, agora já estamos em condições de enunciar e provar o principal resultado desta seção, que é dado pelo seguinte teorema

Teorema 4.5. Seja $S(t) = e^{-At}$, um C_0 -semigrupo limitado sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} , com gerador infinitesimal \mathcal{A} , tal que $i\mathbf{R} \subset \rho(A)$. Então o C_0 -semigrupo associado ao sistema (4.1)-(4.12) é polinomialmente estável, ou seja

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(A)}.$$

além disso, esta taxa de decaimento é ótima.

Para iniciar, observe que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1\|W\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_2\|\Phi\|_2^2 + K\|\psi + \omega_x\|_2^2 + K\|\varphi + \omega_y\|_2^2 \\ &+ D(1 - \mu)[\|\psi_x\|_2^2 + \|\varphi_y\|_2^2] + D\left(\frac{1 - \mu}{2}\right)\|\psi_y + \varphi_x\|_2^2 + D\mu\|\psi_x + \varphi_y\|_2^2. \end{aligned}$$

Da desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \rho_1 \|W\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \rho_2 \|\Phi\|_2^2 + K \|\psi\|_2^2 + K \|\omega_x\|_2^2 + K \|\varphi\|_2^2 + K \|\omega_y\|_2^2 \\ &+ D(1 - \mu) \|\psi_x\|_2^2 + D(1 - \mu) \|\varphi_y\|_2^2 + D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \|\psi_y\|_2^2 \\ &+ D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \|\varphi_x\|_2^2 + D\mu \|\psi_x\|_2^2 + D\mu \|\varphi_y\|_2^2. \end{aligned}$$

Logo, existe uma constante $C = C(\rho_1, \rho_2, K, D, \mu) > 0$ dependendo apenas dos coeficientes de Mindlin-Timoshenko tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \{ \|W\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\nabla\omega\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2 \}.$$

Agora, usando as equações componentes (4.56) e (4.58) e aplicando os lemas 4.4 e 4.7, segue que existe uma constante positiva C independente de λ , $|\lambda| > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^3 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

Assim, usando a desigualdade de Young, resulta

$$(1 - \varepsilon) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\varepsilon |\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\lambda|^3 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, encontramos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande. Equivalentemente,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}, \forall U \in D(\mathcal{A}),$$

Usando a equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, temos como resultado

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|R(\lambda, \mathcal{A})\| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-2}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

Então, usando o teorema 4.4 com $\alpha = 2$, vem que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(|t|^{-1/2}), \quad \text{com } |\lambda| \rightarrow \infty$$

ou seja, existe uma constante positiva C que satisfaz

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \frac{C}{t^{1/2}}, \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (4.84)$$

Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então temos que o operador \mathcal{A} é sobrejetivo, portanto a equação $-\mathcal{A}U = F$ possui uma única solução $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Assim

$$\|F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} = \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \quad (4.85)$$

Escrevendo $-U_0 = \mathcal{A}^{-1}F$, então $-S(t)U_0 = S(t)\mathcal{A}^{-1}F$.

Portanto, combinando (4.84) e (4.85), concluímos que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\| \|F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \text{ com } t \rightarrow \infty,$$

ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \text{ com } t \rightarrow \infty.$$

provando assim que o sistema é polinomialmente estável.

No que segue, provaremos por contradição que a taxa de decaimento é ótima. Desse modo, vamos supor que a taxa $t^{-1/2}$ pode ser melhorada para uma taxa da forma $t^{-1/(2-\varepsilon)}$ com $0 < \varepsilon < 2$.

Dessa forma, isto significa dizer que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/(2-\varepsilon)}}.$$

Agora, aplicando o teorema 4.4, resulta

$$|\lambda|^{\varepsilon-2} \|\lambda I - \mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \text{ quando } |\lambda| \rightarrow \infty,$$

Assim, para $F \in \mathcal{H}$, obtemos da equação resolvente

$$|\lambda|^{\varepsilon-2} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0, \quad (4.86)$$

para alguma constante $C > 0$ e $|\lambda|$ suficientemente grande. Por outro lado, assumimos sem perda de generalidade que $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$ e considerando

$$F_n = (0, \sin(nx) \sin(ny), 0, 0, 0)', \quad n \in \mathbf{N},$$

então a equação resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ possui solução $U_n = (\omega_n, W_n, \psi_n, \Psi_n, \varphi_n, \Phi_n)'$, e devido as condições de contorno para U_n , temos as seguintes formas para

$$\omega(x, y) := A \sin(nx) \sin(ny),$$

$$\psi(x, y) := B \cos(nx) \sin(ny),$$

$$\varphi(x, y) := C \sin(nx) \cos(ny),$$

$$W_n = i\lambda_n \omega_n, \quad \Psi_n = i\lambda_n \psi_n \quad \text{e} \quad \Phi_n = i\lambda \varphi_n.$$

Desta forma, tomando

$$\lambda = \lambda_n := \sqrt{\frac{2K}{\rho_1}} n = \mathcal{O}(n), \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

e segundo os mesmos passos feitos na demonstração do teorema (4.2), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|^{\varepsilon-2} \|U\|_{\mathcal{H}} = \infty$$

o que contradiz (4.86). Portanto, a taxa $t^{-1/2}$ não pode ser melhorada, e assim concluímos a prova do Teorema. ■

Modelo espaço - tempo em Diferenças Finitas

5.1 Fundamentação Teórica

5.2 Método Numérico Explícito em diferenças finitas

Para nossos propósitos, considere $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$, e para $I, J, N \in \mathbf{N}$, denotamos por $\Delta x = \frac{L_1}{I+1}$, $\Delta y = \frac{L_2}{J+1}$, $\Delta t = \frac{T}{N+1}$, considerando as seguintes subdivisões uniformes dos intervalos $[0, L_1]$ e $[0, L_2]$, e definimos a seguinte malha computacional

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_I = I\Delta x < x_{I+1} = (I+1)\Delta x = L_1, \quad (5.1)$$

$$y_0 = 0 < y_1 = \Delta y < \dots < y_J = J\Delta y < y_{J+1} = (J+1)\Delta y = L_2, \quad (5.2)$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_N = N\Delta t < t_{N+1} = (N+1)\Delta t = T, \quad (5.3)$$

onde $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ e $t_n = n\Delta t$ tais que $i = 0, 1, 2, \dots, I+1$, $j = 0, 1, 2, \dots, J+1$ e $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$. Iremos usar os seguintes operadores no espaço e no tempo.

• **Esquema Progressivo (primeira ordem)**

$$\partial_x \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x}, \quad \partial_y \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y}, \quad \partial_t \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (5.4)$$

• **Esquema Atrasado (primeira ordem)**

$$\bar{\partial}_x \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \quad \bar{\partial}_y \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \quad \bar{\partial}_t \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (5.5)$$

• **Diferença Central (segunda ordem)**

$$\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (5.6)$$

• **Esquema de Diferença Central (segunda ordem)**

$$\bar{\partial}_x \partial_x \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, \quad \bar{\partial}_y \partial_y \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2},$$

$$\bar{\partial}_t \partial_t \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (5.7)$$

onde usamos as mesmas aproximações para as funções ψ e φ na malha. Aqui denotamos por $\omega_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n$ e $\varphi_{i,j}^n$ as aproximações numéricas para as soluções exatas ω, ψ, φ , que trabalhamos na malha, respectivamente. De forma mais precisa, temos que $\omega_{i,j}^n \approx \omega(x_i, y_j, t_n)$, $\psi_{i,j}^n \approx \psi(x_i, y_j, t_n)$ e $\varphi_{i,j}^n \approx \varphi(x_i, y_j, t_n)$. Ressaltamos aqui, que a construção desses operadores são motivados pela Série de Taylor.

Nas configurações do esquema em diferenças finitas, consideremos o seguinte procedimento explícito de discretização total em diferenças finitas, que equivale encontrar $(\omega_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n, \varphi_{i,j}^n)$, satisfazendo as seguintes equações numéricas

$$\rho_1 \bar{\partial}_t \partial_t \omega_{i,j}^n = K \bar{\partial}_x \partial_x \omega_{i,j}^n + K \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \psi_{i,j}^n + K \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \varphi_{i,j}^n + K \bar{\partial}_y \partial_y \omega_{i,j}^n, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \bar{\partial}_t \partial_t \psi_{i,j}^n &= D \bar{\partial}_x \partial_x \psi_{i,j}^n + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \bar{\partial}_y \partial_y \psi_{i,j}^n + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \right) \varphi_{i,j}^n \\ &\quad - \frac{K}{2} (\psi_{i+1/2,j}^n + \psi_{i-1/2,j}^n + \psi_{i,j+1/2}^n + \psi_{i,j-1/2}^n) - K \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \omega_{i,j}^n + D_1 \bar{\partial}_x \partial_x (\bar{\partial}_t \psi_{i,j}^n) \\ &\quad + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \bar{\partial}_y \partial_y (\bar{\partial}_t \psi_{i,j}^n) + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \right) (\bar{\partial}_t \varphi_{i,j}^n) - \alpha_1 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} \psi_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
\rho_2 \bar{\partial}_t \partial_t \varphi_{i,j}^n &= D \bar{\partial}_y \partial_y \varphi_{i,j}^n + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \bar{\partial}_x \partial_x \varphi_{i,j}^n + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \right) \psi_{i,j}^n \\
&\quad - \frac{K}{2} (\varphi_{i+1/2,j}^n + \varphi_{i-1/2,j}^n + \varphi_{i,j+1/2}^n + \varphi_{i,j-1/2}^n) - K \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \omega_{i,j}^n + D_1 \bar{\partial}_y \partial_y (\bar{\partial}_t \varphi_{i,j}^n) \\
+ D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \bar{\partial}_x \partial_x (\bar{\partial}_t \varphi_{i,j}^n) &+ D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \right) (\bar{\partial}_t \psi_{i,j}^n) - \alpha_2 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} \varphi_{i,j}^n, \quad (5.10)
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$ e $n = 1, 2, \dots, N$. Aqui, $\psi_{i-1/2,j}^n$ e $\psi_{i+1/2,j}^n$ indicam as médias de $\psi_{i,j}^n$ nos pontos (x_{i-1}, y_j, t_n) , (x_i, y_j, t_n) e (x_{i+1}, y_j, t_n) , (x_i, y_j, t_n) , respectivamente.

Para escrevermos o nosso sistema (4.1)-(4.3) num esquema de diferenças finitas, iremos inicialmente concentrar-se na obtenção da discretização do termo ψ_{xxt} , ψ_{yyt} e ψ_{yxt} existente na equação (4.1), de forma análoga obtemos para os termos φ_{xxt} , φ_{yyt} e φ_{yxt} para tal usamos (5.7) e a derivada temporal atrasada de primeira ordem dada em (5.5), encontrando assim

$$\psi_{xxt} \approx \left(\frac{\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)_{xx} \approx \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2 \Delta t} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t}, \quad (5.11)$$

$$\psi_{yyt} \approx \left(\frac{\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)_{yy} \approx \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2 \Delta t} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2 \Delta t}, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{yxt} \approx \left(\frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)_{yx} &\approx \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
&\quad - \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j-1}^{n-1} - \varphi_{i-1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x \Delta y \Delta t}, \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Agora, a exemplo do modelo semidiscreto, motivados por [2], temos as seguintes aproximações

$$\psi(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{4} + \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4}. \quad (5.14)$$

É importante lembrar que a discretização numérica dada em (5.14) tem sido usada a fim de evitar a presença de anomalia numérica (trancamento do cortante) conhecida como fenômeno de bloqueio na força de cisalhamento. Como consequência, a energia numérica associada ao sistema (4.1)-(4.3) será livre de sobreestimação. Deste modo substituindo os operadores descritos em (5.4)-(5.7) no sistema (5.8)-(5.10), temos

$$\begin{aligned}
\rho_1 \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= K \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + K \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\
&\quad + K \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + K \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}, \quad (5.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= D \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\
 &+ D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x\Delta y} - K \frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{4} \\
 &- K \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4} - K \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2\Delta t} \\
 &- D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2\Delta t} + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2\Delta t} \\
 -D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2\Delta t} &+ D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x\Delta y\Delta t} \\
 -D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j-1}^{n-1} - \varphi_{i-1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x\Delta y\Delta t} &- \alpha_1 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t},
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\
 &+ D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x\Delta y} - K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{4} \\
 &- K \frac{\varphi_{i,j+1}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{4} - K \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + D_1 \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2\Delta t} \\
 &- D_1 \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - 2\varphi_{i,j}^{n-1} + \varphi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2\Delta t} + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2\Delta t} \\
 -D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} - 2\varphi_{i,j}^{n-1} + \varphi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2\Delta t} &+ D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x\Delta y\Delta t} \\
 -D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j-1}^{n-1} - \psi_{i-1,j+1}^{n-1} + \psi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x\Delta y\Delta t} &- \alpha_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t},
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Visando simplificar nossos cálculos numéricos, consideramos condições de contorno homogêneas dadas por

$$\begin{aligned}\omega_{0,j}^n &= \omega_{I+1,j}^n = \omega_{i,0}^n = \omega_{i,J+1}^n = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \\ \psi_{0,j}^n &= \psi_{I+1,j}^n = \psi_{i,0}^n = \psi_{i,J+1}^n = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \\ \varphi_{0,j}^n &= \varphi_{I+1,j}^n = \varphi_{i,0}^n = \varphi_{i,J+1}^n = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\tag{5.18}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned}\omega_{i,j}^0 &= \omega(x_i, y_j, 0), \quad \omega_{i,j}^1 = \omega_{i,j}^0 + \Delta t \omega_t(x_i, y_j, 0), \quad \forall i = 1, 2, \dots, I, j = 1, \dots, J, \\ \psi_{i,j}^0 &= \psi(x_i, y_j, 0), \quad \psi_{i,j}^1 = \psi_{i,j}^0 + \Delta t \psi_t(x_i, y_j, 0), \quad \forall i = 1, 2, \dots, I, j = 1, \dots, J, \\ \varphi_{i,j}^0 &= \varphi(x_i, y_j, 0), \quad \varphi_{i,j}^1 = \varphi_{i,j}^0 + \Delta t \varphi_t(x_i, y_j, 0), \quad \forall i = 1, 2, \dots, I, j = 1, \dots, J.\end{aligned}\tag{5.19}$$

Nosso objetivo, agora, é determinar os valores que explicitam $\omega_{i,j}^{n+1}$, $\psi_{i,j}^{n+1}$ e $\varphi_{i,j}^{n+1}$. Assim sendo, iniciamos multiplicando a equação (5.15) por Δt^2 , obtendo assim

$$\begin{aligned}\Delta t^2 \rho_1 \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= \Delta t^2 K \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \Delta t^2 K \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ &+ \Delta t^2 K \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \Delta t^2 K \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}.\end{aligned}$$

Isolando o termo $\omega_{i,j}^{n+1}$, encontramos

$$\begin{aligned}\rho_1 \omega_{i,j}^{n+1} &= 2 \left(\rho_1 - K \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \right) \omega_{i,j}^n + K \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n) + K \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} (\omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n) \\ &- \rho_1 \omega_{i,j}^{n-1} + \frac{K \Delta t^2}{2 \Delta x} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + \frac{K \Delta t^2}{2 \Delta y} (\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n).\end{aligned}\tag{5.20}$$

Da mesma forma, multiplicando a equação (5.16) por Δt^2 , obtemos

$$\begin{aligned}\Delta t^2 \rho_2 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= \Delta t^2 D \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \Delta t^2 D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ &+ \Delta t^2 D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} - \Delta t^2 K \frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{4} \\ &- \Delta t^2 K \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4} - \Delta t^2 K \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \Delta t^2 D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2 \Delta t} \\ &- \Delta t^2 D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} + \Delta t^2 D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2 \Delta t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\Delta t^2 D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2 \Delta t} + \Delta t^2 D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
 & \quad - \Delta t^2 D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j-1}^{n-1} - \varphi_{i-1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x \Delta y \Delta t} - \Delta t^2 \alpha_1 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t},
 \end{aligned}$$

Organizando a equação acima, resulta

$$\begin{aligned}
 \left(\rho_2 + \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} \right) \psi_{i,j}^{n+1} &= 2 \left(\rho_2 - D \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - K \frac{\Delta t^2}{2} - D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \psi_{i,j}^n \\
 &+ \left(D \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K \frac{\Delta t^2}{4} + D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) \\
 &+ \left(D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - K \frac{\Delta t^2}{4} + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n) \\
 &- \left(\rho_2 - \alpha_1 \frac{\Delta t}{2} - 2D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \psi_{i,j}^{n-1} - D_1 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i-1,j}^{n-1}) \\
 &- D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j-1}^{n-1}) - \frac{K}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) \\
 &+ \left(\frac{D}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} + \frac{D_1}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \right) (\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n) \\
 &- \left(\frac{D}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} + \frac{D_1}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \right) (\varphi_{i-1,j+1}^n - \varphi_{i-1,j-1}^n) \\
 &- \frac{D_1}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} (\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j-1}^{n-1}) \\
 &+ \frac{D_1}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} (\varphi_{i-1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i-1,j-1}^{n-1}). \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

Agora, multiplicando a equação (5.17) por Δt^2 , obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta t^2 \rho_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= \Delta t^2 D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + \Delta t^2 D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\
 &+ \Delta t^2 D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} - \Delta t^2 K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{4} \\
 &- \Delta t^2 K \frac{\varphi_{i,j+1}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{4} - \Delta t^2 K \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \Delta t^2 D_1 \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2 \Delta t} \\
 &- \Delta t^2 D_1 \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - 2\varphi_{i,j}^{n-1} + \varphi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2 \Delta t} + \Delta t^2 D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2 \Delta t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta t^2 D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} - 2\varphi_{i,j}^{n-1} + \varphi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} + \Delta t^2 D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - \Delta t^2 D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j-1}^{n-1} - \psi_{i-1,j+1}^{n-1} + \psi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x \Delta y \Delta t} - \Delta t^2 \alpha_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t},
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\rho_2 + \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} \right) \varphi_{i,j}^{n+1} &= 2 \left(\rho_2 - D \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K \frac{\Delta t^2}{2} - D_1 \frac{\Delta t}{\Delta y^2} - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i,j}^n \\
&+ \left(D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K \frac{\Delta t^2}{4} + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) (\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n) \\
&+ \left(D \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - K \frac{\Delta t^2}{4} + D_1 \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) (\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n) \\
&- \left(\rho_2 - \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} - 2D_1 \frac{\Delta t}{\Delta y^2} - 2D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \varphi_{i,j}^{n-1} \\
&- D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i-1,j}^{n-1}) - D_1 \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (\varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j-1}^{n-1}) \\
&- \frac{K}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta y} (\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n) \\
&+ \left(\frac{D}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} + \frac{D_1}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} \right) (\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n) \\
&- \left(\frac{D}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} + \frac{D_1}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} \right) (\psi_{i-1,j+1}^n - \psi_{i-1,j-1}^n) \\
&- \frac{D_1}{4} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} (\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j-1}^{n-1} - \psi_{i-1,j+1}^{n-1} + \psi_{i-1,j-1}^{n-1}). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

De (5.20) – (5.22) encontramos o seguinte sistema escrito explicitamente, que serve como procedimento recursivo de resolução, para todo $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
A_1 \omega_{i,j}^{n+1} &= B_1 \omega_{i,j}^n + C_1 (\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n) + D_1 (\omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n) + E_1 \omega_{i,j}^{n-1} \\
&+ F_1 (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + G_1 (\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n). \tag{5.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 \psi_{i,j}^{n+1} &= B_2 \psi_{i,j}^n + C_2 (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + D_2 (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n) + E_2 \psi_{i,j}^{n-1} \\
&+ F_2 (\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i-1,j}^{n-1}) + G_2 (\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j-1}^{n-1}) + H_2 (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I_2(\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n) \\
& + J_2(\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j-1}^{n-1} - \varphi_{i-1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i-1,j-1}^{n-1}).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
A_3\varphi_{i,j}^{n+1} & = B_3\varphi_{i,j}^n + C_3(\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n) + D_3(\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j-1}^n) + E_3\varphi_{i,j}^{n-1} \\
& + F_3(\varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i-1,j}^{n-1}) + G_3(\varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j-1}^{n-1}) + H_3(\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n) \\
& + I_3(\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n) \\
& + J_3(\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j-1}^{n-1} - \psi_{i-1,j+1}^{n-1} + \psi_{i-1,j-1}^{n-1}).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Onde

$$\begin{aligned}
A_1 & = \rho_1, \quad B_1 = 2\left(\rho_1 - K\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}\right), \quad C_1 = K\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}, \quad D_1 = K\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}, \quad E_1 = -\rho_1, \quad F_1 = \frac{K}{2}\frac{\Delta t^2}{\Delta x}, \\
G_1 & = \frac{K}{2}\frac{\Delta t^2}{\Delta y}, \quad A_2 = \rho_2 + \alpha_1\frac{\Delta t}{2}, \quad B_2 = 2\left(\rho_2 - D\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - K\frac{\Delta t^2}{2} - D_1\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\right), \\
C_2 & = D\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K\frac{\Delta t^2}{4} + D_1\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad D_2 = \left(D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - K\frac{\Delta t^2}{4} + D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\right), \\
E_2 & = -\left(\rho_2 - \alpha_1\frac{\Delta t}{2} - 2D_1\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}\right), \quad F_2 = -D_1\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad G_2 = -D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta y^2}, \\
H_2 & = -\frac{K}{2}\frac{\Delta t^2}{\Delta x}, \quad I_2 = \frac{D}{4}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x\Delta y} + \frac{D_1}{4}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x\Delta y}, \quad J_2 = -\frac{D_1}{4}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x\Delta y} \\
A_3 & = \rho_2 + \alpha_2\frac{\Delta t}{2}, \quad B_3 = 2\left(\rho_2 - D\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K\frac{\Delta t^2}{2} - D_1\frac{\Delta t}{\Delta y^2} - D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right), \\
C_3 & = D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} - K\frac{\Delta t^2}{4} + D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad D_3 = D\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} - K\frac{\Delta t^2}{4} + D_1\frac{\Delta t}{\Delta y^2}, \\
E_3 & = -\left(\rho_2 - \alpha_2\frac{\Delta t}{2} - 2D_1\frac{\Delta t}{\Delta y^2} - 2D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right), \quad F_3 = -D_1\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad G_3 = -D_1\frac{\Delta t}{\Delta y^2}, \\
H_3 & = -\frac{K}{2}\frac{\Delta t^2}{\Delta y}, \quad I_3 = \frac{D}{4}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\frac{\Delta t^2}{\Delta x\Delta y} + \frac{D_1}{4}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x\Delta y}, \quad J_3 = -\frac{D_1}{4}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x\Delta y}
\end{aligned}$$

5.3 Energia Discreta

A energia de soluções, totalmente discretizada, do sistema (5.15)-(5.19) é dada por

$$\begin{aligned}
E^n & := \frac{\Delta x\Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 \right] \\
& + D \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
& + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \\
& + K \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \\
& + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \\
& + K \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left[\left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right) \right]. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

para todo $n = 1, \dots, N$. Com o objetivo de mostrar o comportamento da energia E^n , temos a seguinte proposição:

Proposição 5.3.1. Se $E(t)$ é a energia associada ao problema (5.15)-(5.19), então

$$\begin{aligned}
\frac{E^n - E^{n-1}}{\Delta t} &= -\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_1 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 - \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\
& - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n - \varphi_{i+1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j+1}^{n-1})(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i+1,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n - \varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i+1,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
 & -D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i+1,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

para todo $n = 1, \dots, N$.

Prova. Primeiramente, iremos multiplicar a equação (5.15) por $\Delta x \Delta y \omega_t \approx \Delta x \Delta y \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$ e somarmos o seu resultado no domínio discreto $i = 1, \dots, I$ e $j = 1, \dots, J$. Desta forma, segue que

$$\begin{aligned}
 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_1 \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - K \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - K \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right. \\
 \left. - K \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} - K \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = 0,
 \end{aligned}$$

Implementamos agora algumas incrementações. Inicialmente, iremos estimar o primeiro termo da equação acima pelo multiplicador em questão. Os termos dados abaixo representam uma aproximação para $\rho_1 \int_{\Omega} \omega_t \omega_t dx dy$ o que conduzirá a expressão discretizada equivalente para a componente $\rho_1 \int_{\Omega} \omega_t^2 dx dy$ do funcional energia $E(t)$. Temos inicialmente

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1})(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 = & \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n) - (\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1})](\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 = & \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 - & \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1})(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 = & \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)^2 - (\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1})^2 \\
 + & \underbrace{\rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)(\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}) - \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1})(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)}_{=0}.
 \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\rho_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$= \rho_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 - \rho_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2. \quad (5.28)$$

Aqui, realizaremos os devidos cálculos apenas na direção de x , tomando y como análogo. Nosso próximo passo é construir uma aproximação para o termo $K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \omega_{xt} dx dy$. Segue então:

$$\begin{aligned} & K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \underbrace{(\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n)}_{\Gamma_1} (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &= K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &+ K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &= K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &+ K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &= K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i+1,j}^{n-1}) \\ &+ K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i+1,j}^{n-1}) \\ &- K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=0}^J (\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) \\ &+ K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}) + K \sum_{j=1}^J (\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}) \\ &- K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=0}^J (\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) \\ &+ K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}) + K \sum_{j=1}^J (\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}) \\ &= -K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}) + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &- K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}) + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &- K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) \\ &+ K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}) + K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - K \sum_{j=1}^J (\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{j=1}^J (\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}) + K \sum_{j=1}^J (\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}).
 \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned}
 & -K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 = & K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
 - & K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} \right) + S_1^n, \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_1^n = & - K \Delta y \sum_{i=0}^I \left(\frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + K \Delta y \sum_{i=0}^I \left(\frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + K \Delta y \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n}{2} + \frac{\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & - K \Delta y \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n}{2} + \frac{\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando os mesmos procedimentos feitos anteriormente, podemos encontrar uma aproximação equivalente para $K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \omega_{yt} dx dy$, logo

$$\begin{aligned}
 & -K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 = & K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right) \\
 - & K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} \right) + S_2^n, \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
S_2^n = & - K \Delta x \sum_{i=0}^I \left(\frac{\varphi_{0,j+1}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} + \frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{0,j+1}^{n+1} - \omega_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + K \Delta x \sum_{i=0}^I \left(\frac{\varphi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n}{2} + \frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + K \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,1}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} + \frac{\omega_{i,1}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,J+1}^n + \psi_{i,J}^n}{2} + \frac{\omega_{i,J+1}^n - \omega_{i,J}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,J+1}^{n+1} - \omega_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t}.
\end{aligned}$$

Feito isso, podemos reescrever a equação (5.28) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + K \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\
& + \left. K \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right] \\
& - \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + K \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} \right. \\
& + \left. K \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,j+1}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} \right] + S_1^n + S_2^n = 0.
\end{aligned}$$

Com procedimento análogo, iremos multiplicar a equação que governa a rotação nas seções transversais $\psi_{i,j}^n$ em (5.16) por $\Delta x \Delta y \psi_t \approx \Delta x \Delta y \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$, e somamos o seu resultado no domínio discreto para $i = 1, \dots, I$ e $j = 1, \dots, J$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J & \left[\rho_2 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - D \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right. \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{-\varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} + K \frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{4} \\
& + K \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4} + K \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2 \Delta t} \\
& \left. - D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2 \Delta t} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2 \Delta t} + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
 & \quad - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j-1}^{n-1} - \varphi_{i-1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \left] \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad = -\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_1 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Para desenvolvermos cada termo da equação acima, usamos os mesmos procedimentos feitos anteriormente. Para alguns termos, basta trocar as funções para obtermos os resultados desejados. Por isso, omitiremos a prova, levando em conta que é muito longa. Apresentaremos apenas as aproximações para os componentes numéricos da energia E^n . Desta forma, o equivalente discreto para a componente $\rho_2 \int_{\Omega} \psi_t^2$ vale:

$$\begin{aligned}
 & \rho_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 = & \rho_2 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 - \rho_2 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Agora, iremos trabalhar na aproximação dos termos $D \int_{\Omega} \psi_x^2 dx dy$ e $D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y^2 dx dy$ como em Γ_1 . Temos que

$$\begin{aligned}
 & - D \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 = & D \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \\
 & - D \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} + S_3^n,
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned}
 S_3^n = & - D \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n+1}}{2\Delta t} + D \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + D \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} - D \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I+1,j}^n - \psi_{I,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t},
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos concluir

$$\begin{aligned}
& - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Delta x\Delta y\sum_{i=1}^I\sum_{j=1}^J\frac{\psi_{i,j+1}^n-2\psi_{i,j}^n+\psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}\frac{\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta x\Delta y}{2\Delta t}\sum_{i=0}^I\sum_{j=0}^J\frac{\psi_{i,j+1}^n-\psi_{i,j}^n}{\Delta y}\frac{\psi_{i,j+1}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \\
& - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\frac{\Delta x\Delta y}{2\Delta t}\sum_{i=0}^I\sum_{j=0}^J\frac{\psi_{i,j+1}^n-\psi_{i,j}^n}{\Delta y}\frac{\psi_{i,j+1}^{n-1}-\psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y}+S_4^n, \tag{5.34}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
S_4^n & = -D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Delta x\sum_{j=0}^J\frac{\psi_{0,j+1}^n-\psi_{0,j}^n}{\Delta y}\frac{\psi_{0,j+1}^{n+1}-\psi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t}+D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Delta x\sum_{j=0}^J\frac{\psi_{0,j+1}^n-\psi_{0,j}^n}{\Delta y}\frac{\psi_{0,j}^{n+1}-\psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& +D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Delta x\sum_{i=1}^I\frac{\psi_{i,1}^n-\psi_{i,0}^n}{\Delta y}\frac{\psi_{i,0}^{n+1}-\psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t}-D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\Delta x\sum_{i=1}^I\frac{\psi_{i,J+1}^n-\psi_{i,J}^n}{\Delta y}\frac{\psi_{i,J+1}^{n+1}-\psi_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t}.
\end{aligned}$$

Na sequência, procedemos com a discretização referente a integral $-D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\int_{\Omega}\varphi_{xy}\psi_t dx dy$ (expressão à esquerda da igualdade abaixo), e conforme vimos no Lema 4.2 do Capítulo 4 este termo após os devidos cálculos se encaminha para a componente $D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\int_{\Omega}\varphi_x\psi_{yt} dx dy + D\mu\int_{\Omega}\varphi_y\psi_{xt} dx dy$ da energia total do sistema, cujo análogo discreto é dado pela expressão a direita da igualdade.

$$\begin{aligned}
& D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=1}^I\sum_{j=1}^J(\varphi_{i+1,j+1}^n-\varphi_{i+1,j-1}^n-\varphi_{i-1,j+1}^n+\varphi_{i-1,j-1}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1}) \\
& = D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=1}^I\sum_{j=1}^J[(\varphi_{i+1,j+1}^n-\varphi_{i+1,j-1}^n)-(\varphi_{i-1,j+1}^n-\varphi_{i-1,j-1}^n)](\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1}) \\
& = D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=1}^I\sum_{j=1}^J(\varphi_{i+1,j+1}^n-\varphi_{i,j}^n+\varphi_{i,j}^n-\varphi_{i+1,j-1}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1}) \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=1}^I\sum_{j=1}^J(\varphi_{i-1,j+1}^n-\varphi_{i,j}^n+\varphi_{i,j}^n-\varphi_{i-1,j-1}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1}) \\
& = D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=1}^I\sum_{j=1}^J[(\varphi_{i+1,j+1}^n-\varphi_{i,j}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1})+(\varphi_{i,j}^n-\varphi_{i+1,j-1}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1})] \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=1}^I\sum_{j=1}^J[(\varphi_{i-1,j+1}^n-\varphi_{i,j}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1})+(\varphi_{i,j}^n-\varphi_{i-1,j-1}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1})] \\
& = D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=0}^I\sum_{j=0}^J(\varphi_{i+1,j+1}^n-\varphi_{i,j}^n)(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n-1}) \\
& + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\sum_{i=0}^I\sum_{j=0}^J(\varphi_{i,j+1}^n-\varphi_{i+1,j}^n)(\psi_{i,j+1}^{n+1}-\psi_{i,j+1}^{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i+1,j}^n)(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}) \\
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n)(\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j+1}^{n-1}) \\
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I (\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n)(\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{j=1}^J (\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n)(\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=1}^I (\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n)(\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1}) + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{j=0}^J (\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n)(\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1}) \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I (\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n)(\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}) + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{j=1}^J (\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n)(\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}) \\
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I (\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n)(\psi_{i+1,J+1}^{n+1} - \psi_{i+1,J+1}^{n-1}) \\
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{j=0}^J (\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n)(\psi_{I+1,j+1}^{n+1} - \psi_{I+1,j+1}^{n-1}) \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I (\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n)(\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}) + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) (\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n)(\psi_{I+1,J+1}^{n+1} - \psi_{I+1,J+1}^{n-1}) \\
 & = -D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n)(\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}) \\
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n)(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}) \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n)(\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n)(\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}) \\
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=0}^I (\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n) \psi_{i,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J (\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n) \psi_{0,j}^{n+1} \right] \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=1}^I (\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n) \psi_{i,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J (\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n) \psi_{0,j+1}^{n+1} \right] \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=0}^I (\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n) \psi_{i+1,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J (\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n) \psi_{I+1,j}^{n+1} \right] \\
 & - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=0}^I (\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n) \psi_{i+1,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J (\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n) \psi_{I+1,j+1}^{n+1} \right] \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) (\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n) \psi_{I+1,J+1}^{n+1} \\
 & + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=0}^I (\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n) \psi_{i,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J (\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n) \psi_{0,j}^{n-1} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=1}^I (\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n) \psi_{i,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J (\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n) \psi_{0,j+1}^{n-1} \right] \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=0}^I (\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n) \psi_{i+1,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J (\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n) \psi_{I+1,j}^{n-1} \right] \\
& + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \left[\sum_{i=0}^I (\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n) \psi_{i+1,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J (\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n) \psi_{I+1,j+1}^{n-1} \right] \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) (\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n) \psi_{I+1,J+1}^{n-1}
\end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned}
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
& + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta x} \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta x} + S_5^n, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
S_5^n & = D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j}^{n+1} \right) \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j+1}^{n+1} \right) \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j}^{n+1} \right) \\
& + D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j+1}^{n+1} \right. \\
& \left. - \frac{\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,J+1}^{n+1} \right) \\
& - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j}^{n-1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j+1}^{n-1} \right) \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j}^{n-1} \right) \\
 & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j+1}^{n-1} \right. \\
 & \left. - \frac{\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,J+1}^{n-1} \right)
 \end{aligned}$$

Na sequência, procedemos com a discretização referente a integral dada por $K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \psi_t dx dy$.
Segue então

$$\begin{aligned}
 & K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [(\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + (\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n)] (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [(\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) + (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n)] (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) \\
 & = K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}) + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\psi_{I+1,j}^n + \omega_{I,j}^n) (\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - K \sum_{i=1}^I (\psi_{i,1}^n + \psi_{i,0}^n) (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=0}^J (\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=1}^I (\psi_{i,J+1}^n + \psi_{i,J}^n) (\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1}) - K \sum_{j=0}^J (\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n) (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n) (\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}) \\
& = K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}) \\
& + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}) \\
& + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n) (\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=1}^I (\psi_{i,1}^n + \psi_{i,0}^n) (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=0}^J (\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=1}^I (\psi_{i,J+1}^n + \psi_{i,J}^n) (\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1}) - K \sum_{j=0}^J (\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) + K \sum_{j=1}^J (\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n) (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n) (\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}) \\
& = K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [(\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) + (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n)] (\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J [(\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) + (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n)] (\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}) \\
& + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n) (\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I [(\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) + (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n)] (\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}) \\
& - K \sum_{i=0}^I [(\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) + (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n)] (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - K \sum_{j=0}^J (\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) - K \sum_{j=0}^J (\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n) (\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{j=1}^J [(\omega_{1,j}^n + \omega_{0,j}^n) + (\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n)] (\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{j=1}^J [(\omega_{I+1,j}^n + \omega_{I,j}^n) + (\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n)] (\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{i=1}^I (\psi_{i,1}^n + \psi_{i,0}^n) (\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{i=1}^I (\psi_{i,J+1}^n + \psi_{i,J}^n) (\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1})
 \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$\begin{aligned}
 & K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{4} + \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4} \right) \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & = K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \\
 & + K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \\
 & - K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} \\
 & - K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} + S_6^n, \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_6^n = & - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \left(\frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \left(\frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n}{2} \frac{\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n}{2} \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{1,j}^n + \omega_{0,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{I+1,j}^n + \omega_{I,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i,1}^n + \psi_{i,0}^n}{2} \frac{\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i,J+1}^n + \psi_{i,J}^n}{2\Delta t} \frac{\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Os equivalentes discretos a $D_1 \int_{\Omega} \psi_{tx}^2 dx dy$ e $D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_{ty}^2 dx dy$, encontramos, respectivamente, as expressões dadas abaixo

$$\begin{aligned}
& \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[-D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2 \Delta t} + D_1 \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] + S_7^n,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

onde

$$\begin{aligned}
S_7^n & = D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,0}^n - \psi_{i+1,0}^{n-1} + \psi_{i,0}^{n-1})(\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,0}^n - \psi_{i+1,0}^{n-1} + \psi_{i,0}^{n-1})(\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& + D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j}^n - \psi_{1,j}^{n-1} + \psi_{0,j}^{n-1})(\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\psi_{I+1,j}^n - \psi_{I,j}^n - \psi_{I+1,j}^{n-1} + \psi_{I,j}^{n-1})(\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left[-\frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2 \Delta t} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - 2\psi_{i,j}^{n-1} + \psi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] + S_8^n,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

onde

$$S_8^n = D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,0}^n - \psi_{i+1,0}^{n-1} + \psi_{i,0}^{n-1})(\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \left[\frac{(\psi_{i,J+1}^n - \psi_{i,J}^n - \psi_{i,J+1}^{n-1} + \psi_{i,J}^{n-1})(\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
 & + D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j}^n - \psi_{1,j}^{n-1} + \psi_{0,j}^{n-1})(\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
 & - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j}^n - \psi_{1,j}^{n-1} + \psi_{0,j}^{n-1})(\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right].
 \end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
 & \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[-D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right. \\
 & + \left. D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j-1}^{n-1} - \varphi_{i-1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & = D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n - \varphi_{i+1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
 & + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j+1}^{n-1})(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i+1,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
 & + S_9^n,
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_9^n & = D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n - \varphi_{i+1,1}^{n-1} + \varphi_{i,0}^{n-1})(\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \left[\frac{(\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n - \varphi_{i+1,J}^{n-1} + \varphi_{i,J+1}^{n-1})(\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n - \varphi_{i,1}^{n-1} + \varphi_{i+1,0}^{n-1})(\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n - \varphi_{i,J}^{n-1} + \varphi_{i+1,J+1}^{n-1})(\psi_{i+1,J+1}^{n+1} - \psi_{i+1,J+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n - \varphi_{1,j+1}^{n-1} + \varphi_{0,j}^{n-1})(\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{1,j}^{n-1} + \varphi_{0,j+1}^{n-1})(\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n - \varphi_{I,j+1}^{n-1} + \varphi_{I+1,j}^{n-1})(\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n - \varphi_{I,j}^{n-1} + \varphi_{I+1,j+1}^{n-1})(\psi_{I+1,j+1}^{n+1} - \psi_{I+1,j+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
& + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} (\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n - \varphi_{I,J}^{n-1} + \varphi_{I+1,J+1}^{n-1})(\psi_{I+1,J+1}^{n+1} - \psi_{I+1,J+1}^{n-1})
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a substituição de (5.32)-(5.39) em (5.31), a fim de obter

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + D \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
& \quad \left. + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right. \\
& + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} + K \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \left. \right] \\
& - \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + D \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right. \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta x} \\
& \quad \left. + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta x} \right. \\
& + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} + K \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} \left. \right] \\
& \quad \quad \quad + S_3^n + S_4^n + S_5^n + S_6^n + S_7^n + S_8^n + S_9^n \\
& = -D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n - \varphi_{i+1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j+1}^{n-1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i+1,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& \quad \quad \quad - \alpha_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)
\end{aligned}$$

(5.40)

Nossa próxima etapa, consiste em fazer a multiplicação da equação (5.17) por $\Delta x \Delta y \varphi_t \approx \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$, e em seguida efetuarmos a soma no domínio discreto $i = 1, 2, \dots, I$ e $j = 1, 2, \dots, J$. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}
 & \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right. \\
 & - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \\
 & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{-\psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} + K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{4} + K \frac{\varphi_{i,j+1}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{4} \\
 & + K \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} - D_1 \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2 \Delta t} + D_1 \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - 2\varphi_{i,j}^{n-1} + \varphi_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta y^2 \Delta t} \\
 & - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} - 2\varphi_{i,j}^{n-1} + \varphi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} + D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} - 2\varphi_{i,j}^{n-1} + \varphi_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \\
 & - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
 & + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j-1}^{n-1} - \psi_{i-1,j+1}^{n-1} + \psi_{i-1,j-1}^{n-1}}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \left. \right] \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & = -\alpha_2 \Delta x \Delta y \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma como encontramos (5.40) a partir de (5.31), reescrevemos a equação anterior como

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right. \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta} \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta y} \\
 & \left. + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} + K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} \right. \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta y} \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta y} \\
& \left. + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1}}{2} + K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1}}{2} \right] \\
& + S_{10}^n + S_{11}^n + S_{12}^n + S_{13}^n + S_{14}^n + S_{15}^n + S_{16}^n \\
& = -D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n - \varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i+1,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i+1,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - \alpha_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)
\end{aligned} \tag{5.41}$$

assim como S_{10} e S_{11} , análogos a S_3 e S_4 , dados, respectivamente, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
S_{10}^n = & - D \Delta x \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{0,j+1}^{n+1} - \varphi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} + D \Delta x \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + D \Delta x \sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i,0}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} - D \Delta x \sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i,J+1}^n - \varphi_{i,J}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,J+1}^{n+1} - \varphi_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S_{11}^n = & -D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n - \varphi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,0}^{n+1} - \varphi_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n - \varphi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I+1,j}^n - \varphi_{I,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{I+1,j}^{n+1} - \varphi_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t},
\end{aligned}$$

com S_{12} e S_{13} , a exemplo de S_5 e S_6 , dados respectivamente. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 S_{12}^n &= D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,1}^n - \psi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j+1}^n - \psi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j}^{n+1} \right) \\
 &- D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i+1,J}^n - \psi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j+1}^{n+1} \right) \\
 &- D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,1}^n - \psi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I,j+1}^n - \psi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j}^{n+1} \right) \\
 &+ D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,J}^n - \psi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{I,j}^n - \psi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j+1}^{n+1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\psi_{I,J}^n - \psi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,J+1}^{n+1} \right) \\
 &- D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,1}^n - \psi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j+1}^n - \psi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j}^{n-1} \right) \\
 &+ D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i+1,J}^n - \psi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j+1}^{n-1} \right) \\
 &+ D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,1}^n - \psi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I,j+1}^n - \psi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j}^{n-1} \right) \\
 &- D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,J}^n - \psi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{I,j}^n - \psi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j+1}^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\psi_{I,J}^n - \psi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,J+1}^{n-1} \right),
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 S_{13}^n &= -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{0,j+1}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{0,j+1}^{n+1} - \varphi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 &- K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{0,j+1}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 &- K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1,0}^{n+1} - \varphi_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 &- K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\omega_{i,1}^n + \omega_{i,0}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,1}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 &- K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\omega_{i,J+1}^n + \omega_{i,J}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,J+1}^n + \varphi_{i,J}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,J+1}^{n+1} - \varphi_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t}
 \end{aligned}$$

$$- K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^I \frac{\varphi_{1,j}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^I \frac{\varphi_{I+1,j}^n + \varphi_{I,j}^n}{2\Delta t} \frac{\varphi_{I+1,j}^{n+1} - \varphi_{I+1,j}^{n-1}}{2},$$

da mesma forma S_{14} , S_{15} , S_{16} , equivalente a S_7 , S_8 , S_9 , dados, respectivamente da seguinte maneira

$$\begin{aligned} S_{14}^n &= D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n - \varphi_{0,j+1}^{n-1} + \varphi_{0,j}^{n-1})(\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\ &- D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n - \varphi_{0,j+1}^{n-1} + \varphi_{0,j}^{n-1})(\varphi_{0,j+1}^{n+1} - \varphi_{0,j+1}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\ &+ D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i,0}^n - \varphi_{i,1}^{n-1} + \varphi_{i,0}^{n-1})(\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\ &- D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \left[\frac{(\varphi_{i,J+1}^n - \varphi_{i,J}^n - \varphi_{i,J+1}^{n-1} + \varphi_{i,J}^{n-1})(\varphi_{i,J+1}^{n+1} - \varphi_{i,J+1}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{15}^n &= D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n - \varphi_{0,j+1}^{n-1} + \varphi_{0,j}^{n-1})(\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\ &- D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\varphi_{I+1,j}^n - \varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j}^{n-1} + \varphi_{I,j}^{n-1})(\varphi_{I+1,j}^{n+1} - \varphi_{I+1,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\ &+ D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i,0}^n - \varphi_{i,1}^{n-1} + \varphi_{i,0}^{n-1})(\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\ &- D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i,0}^n - \varphi_{i,1}^{n-1} + \varphi_{i,0}^{n-1})(\varphi_{i+1,0}^{n+1} - \varphi_{i+1,0}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{16}^n &= D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{1,j+1}^n - \psi_{0,j}^n - \psi_{1,j+1}^{n-1} + \psi_{0,j}^{n-1})(\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\ &- D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\psi_{I,j+1}^n - \psi_{I+1,j}^n - \psi_{I,j+1}^{n-1} + \psi_{I+1,j}^{n-1})(\varphi_{I+1,j}^{n+1} - \varphi_{I+1,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\ &- D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j+1}^n - \psi_{1,j}^{n-1} + \psi_{0,j+1}^{n-1})(\varphi_{0,j+1}^{n+1} - \varphi_{0,j+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\ &+ D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{I,j}^n - \psi_{I+1,j+1}^n - \psi_{I,j}^{n-1} + \psi_{I+1,j+1}^{n-1})(\varphi_{I+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{I+1,j+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\ &+ D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \left[\frac{(\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,0}^n - \psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,0}^{n-1})(\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\ &- D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\psi_{i,1}^n - \psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,1}^{n-1} + \psi_{i+1,0}^{n-1})(\varphi_{i+1,0}^{n+1} - \varphi_{i+1,0}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \left[\frac{(\psi_{i+1,J}^n - \psi_{i,J+1}^n - \psi_{i+1,J}^{n-1} + \psi_{i,J+1}^{n-1})(\varphi_{i,J+1}^{n+1} - \varphi_{i,J+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \left[\frac{(\psi_{i,J}^n - \psi_{i+1,J+1}^n - \psi_{i,J}^{n-1} + \psi_{i+1,J+1}^{n-1})(\varphi_{i+1,J+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,J+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \right] \\
 & + D_1 \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} (\psi_{I,J}^n - \psi_{I+1,J+1}^n - \psi_{I,J}^{n-1} + \psi_{I+1,J+1}^{n-1})(\varphi_{I+1,J+1}^{n+1} - \varphi_{I+1,J+1}^{n-1})
 \end{aligned}$$

Somando os resultados (5.31), (5.40) e (5.41) e usando as condições de contorno Dirichlet homogêneas dadas em (4.10) - (4.12), resulta

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
 & + D \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
 & + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \\
 & + K \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \\
 & + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \\
 & + K \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right. \\
 & \left. + \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right) \\
 & - \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
 & + D \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \\
& + K \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \\
& + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \\
& + K \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \\
& + D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right. \\
& \left. + \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right) + S^n \\
& = -\Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_1 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 - \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\
& - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i+1,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - D_1 \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j+1}^{n-1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i+1,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - D_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{\Delta y^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] \\
& - D_1 \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i+1,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t} \\
& - D_1 \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i+1,j}^{n-1})(\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j+1}^{n-1})}{4\Delta x \Delta y \Delta t}
\end{aligned}$$

Substituindo 5.26 na equação acima, obtemos a seguinte lei de dissipação (5.27) no contexto numérico, obtido em analogia feita no caso contínuo. ■

5.4 Simulações Numéricas

Nesta seção, nosso objetivo estará voltado em ilustrar graficamente por meio de simulações numéricas, os resultados analíticos obtidos em seções anteriores. Nosso foco de estudo será o esquema numérico (5.16)-(5.19) e sua energia E^n dada em (5.26).

Para os exemplos numéricos, consideramos $L_1 = L_2 = 1.0$ m, espessura $h = 0.015$ m, $E = 21 \times 10^4 N/m^2$, $\rho = 7850 kg/m^3$, $k = 5/6$, $\mu = 0.29$ (taxa de Poisson) e as condições iniciais (ver [?]) são dadas por

$$\begin{aligned} \omega(x_i, y_j, 0) &= \psi(x_i, y_j, 0) = \varphi(x_i, y_j, 0) = \omega_t(x_i, y_j, 0) = \psi_t(x_i, y_j, 0) = \varphi_t(x_i, y_j, 0) \\ &= 10(x_i + 1)^2 x_i^2 (y_j + 1)^2 y_j^2 \end{aligned}$$

Vamos começar nossas simulações levando em conta o caso conservativo e com dissipação total, quando assumimos $\alpha_1 = \alpha_2 = D_1 = 0$ em (5.15)-(5.19), encontrando $E^n = E^0$, para $n = 1, 2, \dots, N + 1$, como podemos ver nas figuras

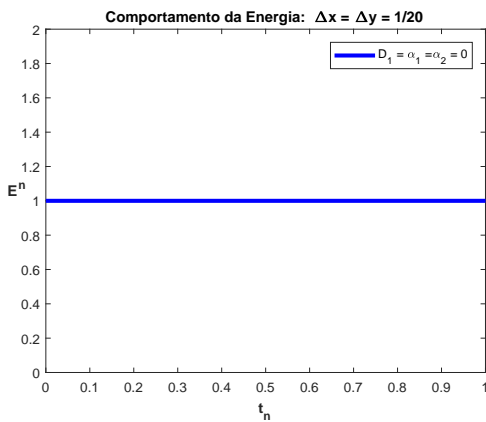


FIGURA 5.1

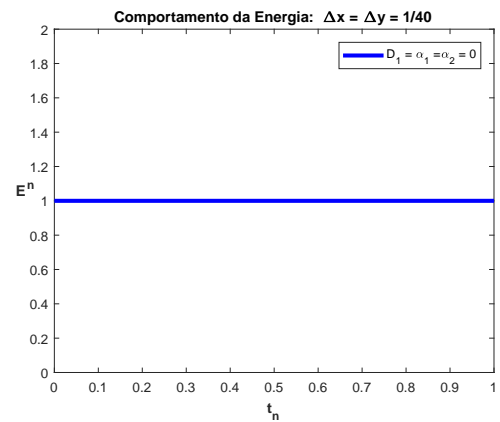


FIGURA 5.2

Agora iremos realizar uma análise gráfica do comportamento da energia (5.26) quando variamos a partição da malha, para os respectivos valores de $\Delta = \Delta y = \Delta x = 1/20, 1/40, 1/60, 1/80$, e $1/100$, onde adotamos $D_1 > 0, \alpha_1 = \alpha_2 > 0$.

Os gráficos abaixo podem ser vistos um comportamento lento onde as figuras do lado esquerdo mostram o caso em que existe a seguinte relação entre os coeficientes $\rho_2 = \rho_1 D/K$, enquanto que as figuras do lado direito representam o caso em que são diferentes.

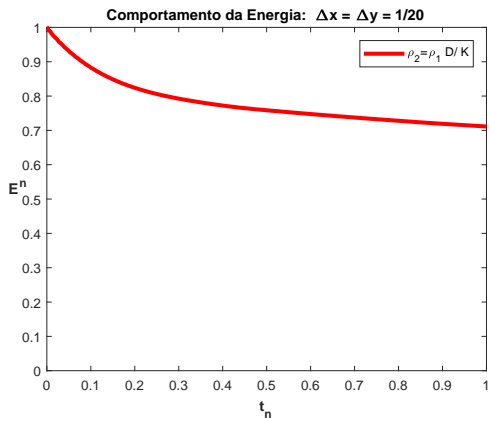


FIGURA 5.3

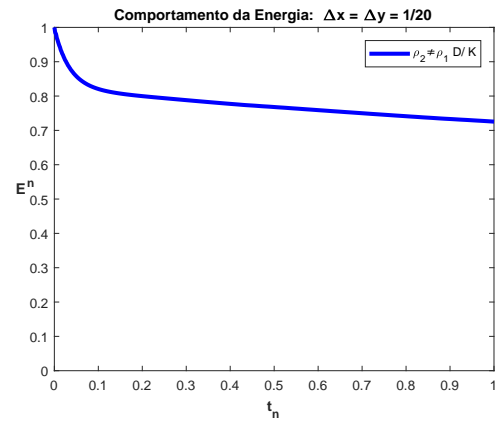


FIGURA 5.4

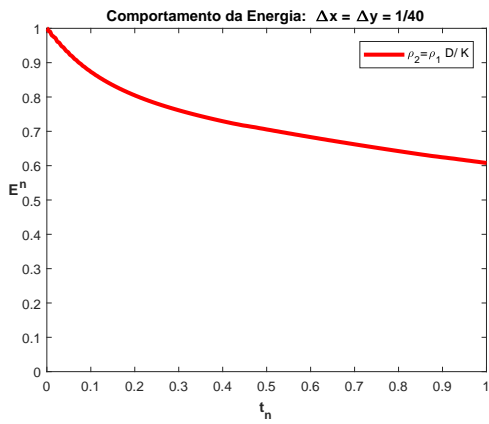


FIGURA 5.5

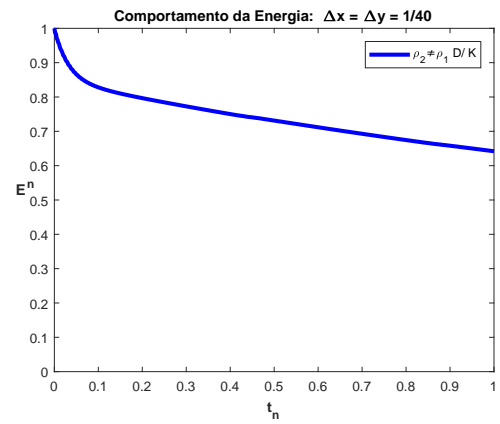


FIGURA 5.6

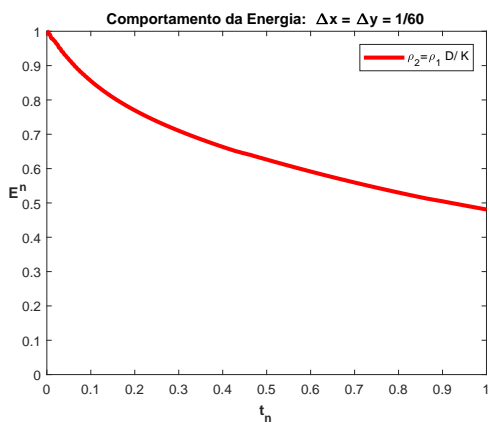


FIGURA 5.7

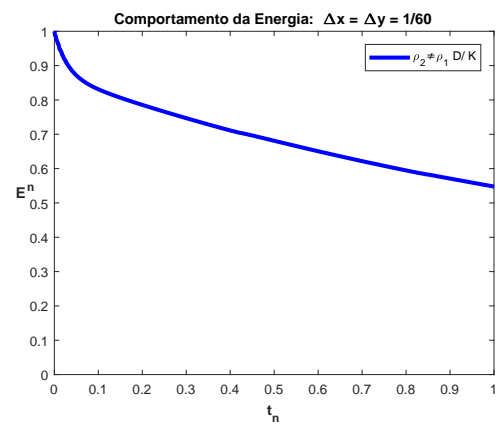


FIGURA 5.8

Para entender melhor os gráficos apresentados anteriormente, dispomos da tabela 5.1, em que exhibe os valores das taxas para o decaimento polinomial quando variamos os valores de Δ nos casos em que $\rho_2 = \rho_1 D/K$ e $\rho_2 \neq \rho_1 D/K$.

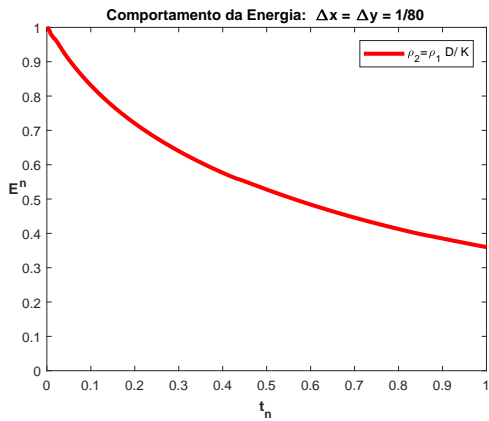


FIGURA 5.9

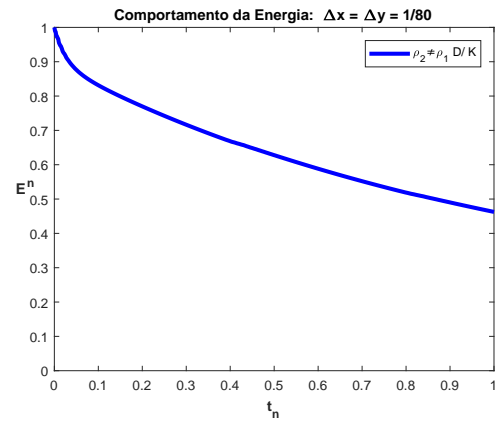


FIGURA 5.10

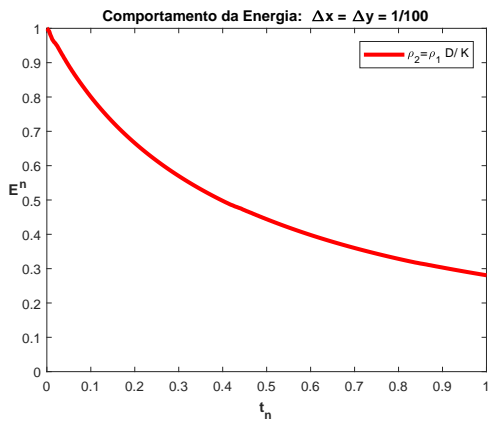


FIGURA 5.11

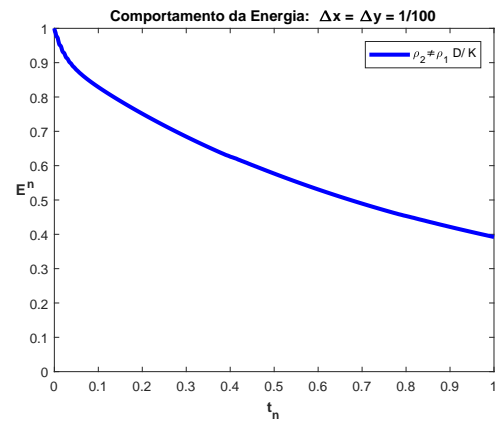


FIGURA 5.12

	$\Delta = 1/20$	$\Delta = 1/40$	$\Delta = 1/60$	$\Delta = 1/80$	$\Delta = 1/100$
$\rho_2 \neq \rho_1 D/K$	-0.090237	-0.19043	-0.302	-0.40198	-0.48351
$\rho_2 = \rho_1 D/K$	-0.10908	-0.22317	-0.35768	-0.46692	-0.5288

TABELA 5.1

Observando a tabela 5.1, podemos perceber que para o nosso esquema numérico (5.15)-(5.19) existe o decaimento polinomial, independente de qualquer relação entre os coeficientes ρ_1, ρ_2, D, K . Ademais, verificamos taxa $t^{-1/2}$ verifica numericamente.

Nosso objetivo agora é comparar numericamente nosso resultado com os trabalhos de A. D. S. CAMPELO, D. S. ALMEIDA JÚNIOR and M. L. SANTOS [8] e M.A. JORGE SILVA, T.F. MA, J.E. MUÑOZ RIVERA

[17]. Abaixo temos uma análise gráfica do comportamento da energia (5.26), quando adotamos $\Delta x = \Delta y = 1/20, 1/40, 1/60, 1/80$ e $1/100$.

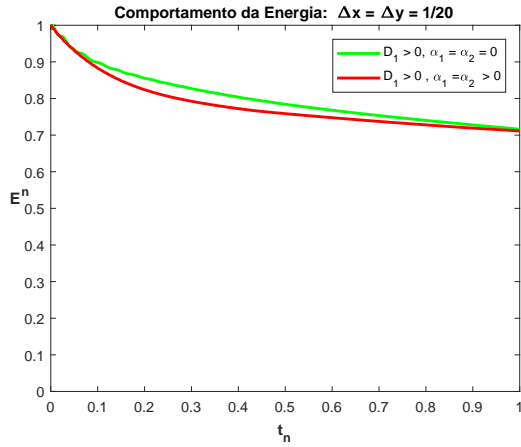


FIGURA 5.13: $\rho_1 = \rho_2 K/D$

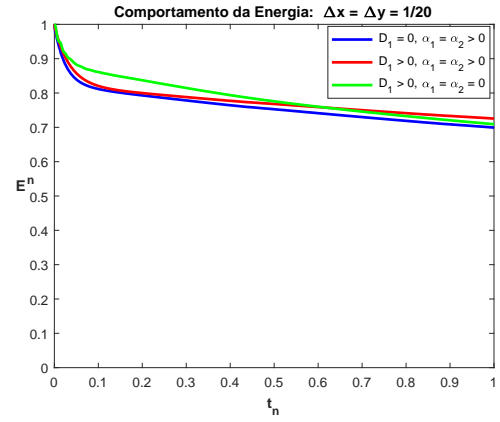


FIGURA 5.14: $\rho_2 \neq \rho_1 D/K$

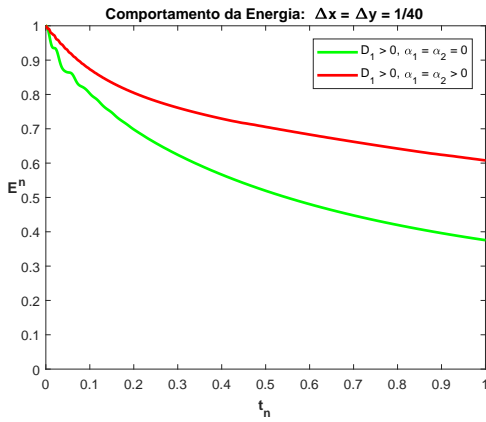


FIGURA 5.15: $\rho_2 = \rho_1 D/K$

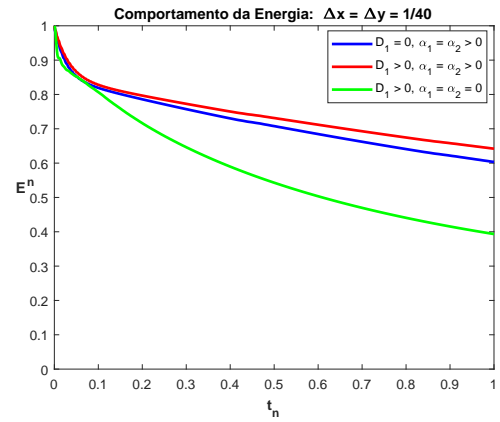


FIGURA 5.16: $\rho_2 \neq \rho_1 D/K$

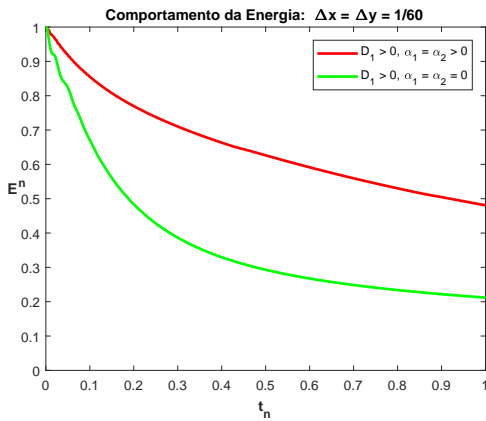


FIGURA 5.17: $\rho_2 = \rho_1 D/K$

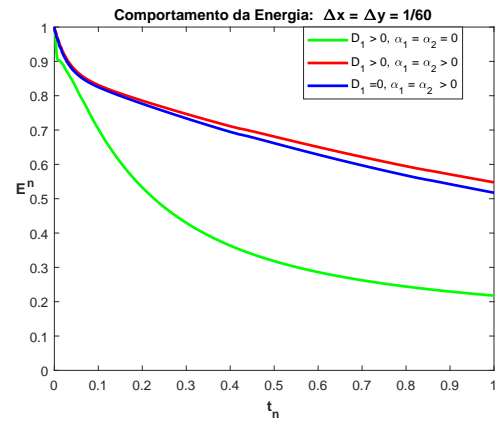


FIGURA 5.18: $\rho_2 \neq \rho_1 D/K$

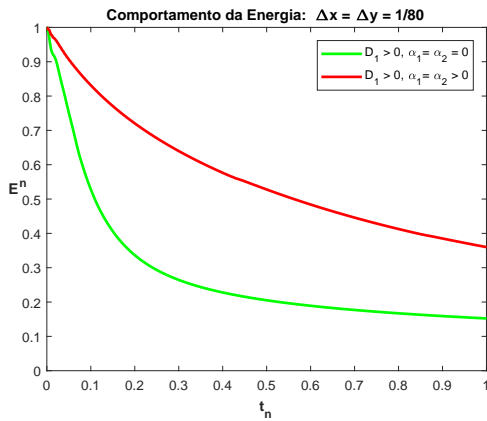


FIGURA 5.19: $\rho_1 = \rho_2 K/D$

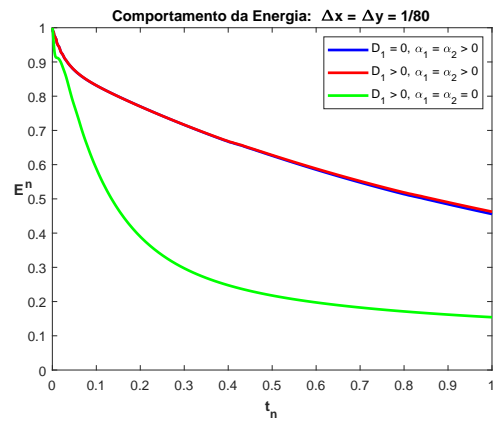


FIGURA 5.20: $\rho_2 \neq \rho_1 D/K$

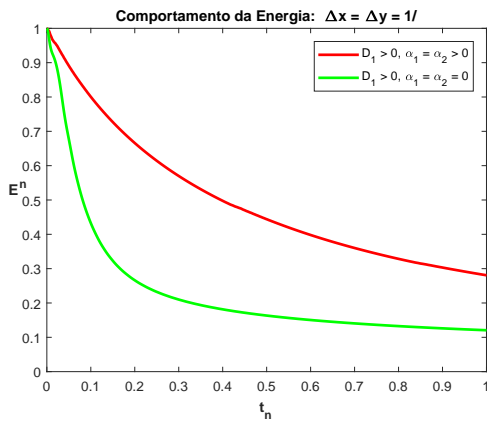


FIGURA 5.21: $\rho_2 = \rho_1 D/K$

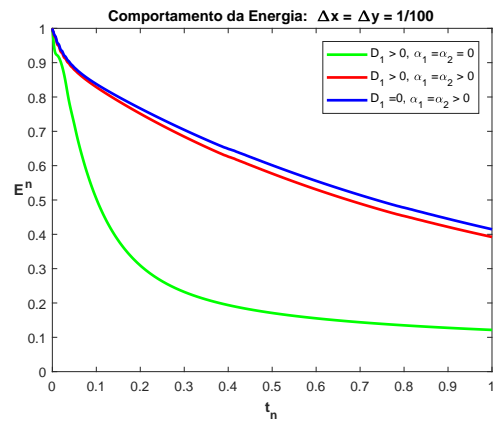


FIGURA 5.22: $\rho_2 \neq \rho_1 D/K$

A partir dos gráficos expostos nas figuras (5.13)-(5.22), dispomos das tabelas abaixo, em que exhibe os valores das taxas para o decaimento polinomial quando variamos os valores de $\Delta = \Delta x = \Delta y$ nos casos em que $\rho_2 = \rho_1 D/K$ e $\rho_2 \neq \rho_1 D/K$.

	$\Delta = 1/20$	$\Delta = 1/40$	$\Delta = 1/60$	$\Delta = 1/80$	$\Delta = 1/100$
$\rho_2 \neq \rho_1 D/K$	-0.1113	-0.22892	-0.33911	-0.4243	-0.48673

TABELA 5.2: Taxas para o decaimento polinomial (A. D. S. Campelo)

As figuras (5.13)-(5.22) mostram o comportamento da energia E^n no tempo t_n em várias situações, levando em consideração os amortecimentos sugeridos por [8] e [17]. Nossas experiências mostram um decaimento lento para

	$\Delta = 1/20$	$\Delta = 1/40$	$\Delta = 1/60$	$\Delta = 1/80$	$\Delta = 1/100$
$\rho_2 \neq \rho_1 D/K$	-0.11549	-0.36782	-0.45953	-0.49097	-0.51562
$\rho_2 = \rho_1 D/K$	-0.12529	-0.3702	-0.43861	-0.46144	-0.48279

TABELA 5.3: Taxas para o decaimento polinomial (M.A. Jorge Silva)

$v_1^2 \neq v_2^2$ o que de acordo com as tabelas (5.1) - (5.3) caracterizam um decaimento polinomial. Para ser mais claro, as taxas foram calculadas a partir dos dados $(\log t_n, \log E_n)$. Da mesma forma comprovamos numericamente os resultados de decaimento polinomial quando $v_1^2 = v_2^2$ para [17].

Respondendo a pergunta feita no início do texto, adotando-se os quatro tipos de dissipações internas $\alpha_1 \psi_t$ e $D_1 \mathcal{L}_2(\psi_t, \varphi_t)$ em (4.2) e $\alpha_2 \varphi_t$ e $D_1 \mathcal{L}_3(\varphi_t, \psi_t)$ em (4.3), numericamente, podemos observar que o decaimento obtido será polinomial, independente das relações de velocidade de propagação de ondas.

CAPÍTULO 6

Considerações Finais

Iniciamos nossas pesquisas estimulados pelos resultados de estabilização para o sistema elástico poroso, e seus diferentes mecanismos dissipativos, onde analisamos alguns artigos que nos remetem a estabilização para o sistema de Timoshenko com delay. O objetivo até agora, era obter respostas para uma questão do tipo: Será que um damping e um delay agindo sobre o sistema estudado por Quintanilha em [17] pode gerar estabilidade exponencial, de tal forma que esteja condicionada a uma relação entre os coeficientes de velocidades de propagação de onda? Com o propósito de responder a este questionamento, nos baseamos em trabalhos direcionados a sistema elástico poroso e vigas de Timoshenko, onde destacamos o artigo de Belkacem Said Houari e Yamina Laskri [16] e nos apropriamos do método da energia e técnicas da teoria de semigrupos de operadores lineares para o estudo do comportamento assintótico.

Além disso, realizamos um amplo levantamento bibliográfico dos trabalhos realizados na área de análise para modelos de Mindlin Timoshenko, em que destacamos os trabalhos de Campelo [8] e Jorge [17]. O objetivo, neste momento, era introduzir dois mecanismos dissipativos, uma do tipo atrito e a outra viscoelástica, atuando nas equações dos ângulos de rotação e observar o que acontece nesse caso. Verificamos que este sistema dissipativo apresentou uma perda de estabilidade exponencial, e este fato não está condicionado a nenhuma relação entre os coeficientes $\rho_1, \kappa, D, \rho_2$.

Também, mostramos que o semigrupo associado ao sistema de Mindlin Timoshenko possui decaimento polinomial, independentemente de qualquer relação existente entre os coeficientes $\rho_1, \kappa, D, \rho_2$ do sistema e ainda mais, mostramos que sua taxa é ótima.

No campo da análise numérica, mostramos os resultados numéricos para o nosso modelo de Mindlin Timoshenko, onde conseguimos obter simulações numéricas que mostram graficamente o decaimento polinomial do nosso modelo independente das relações entre as velocidades.

Tais comprovações numéricas foram realizadas levando em consideração a discretização espaço-temporal e livre de termos de sobre-estimação, fenômeno que ocorre principalmente em estruturas do tipo vigas e placas. Essa anomalia numérica torna os modelos numéricos inconsistentes com os análogos contínuos para um parâmetro de discretização da malha fixado.

As comprovações numéricas que realizamos estão de acordo com o estudo no contínuo, ou seja, conseguimos comprovar numericamente o decaimento polinomial independente das relações entre as velocidades.

Finalizamos nossa tese comparando numericamente nosso resultado do sistema de Mindlin Timoshenko com os trabalhos Campelo [8] e Jorge [17].

Referências Bibliográficas

- [1] DAFERMOS, C. M.: Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 37: 297-308, 1970.
- [2] ALMEIDA JUNIOR, D. S.: Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse. PhDthesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2009.
- [3] ALMEIDA JUNIOR, D. S., SANTOS, M. L. e RIVERA, J.E.M.: Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36: 1965-1976, 2013.
- [4] AMMAR-KHODJA, F., BENABDALLAH, A., RIVERA, J.E.M. e RACKE, R. Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *Journal of Differential Equation*, 194(1): 82-115, 2003.
- [5] BORICHEV, A. e TOMILOV, Y.: Optmal polynomial decay of functions and operator semigroups. *MAathematische Annalen*, 347 (2): 455-478, 2009.
- [6] BREZÍŠ, H.: *Analyse Fonctionnelle, théorie et applications*, Dunod, Paris, 2005.
- [7] CAMPELO, A. D. S.: Estabilidade assintótica e numérica de sistemas fracamente dissipativos de Mindlin-Timoshenko. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós Graduação em Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.
- [8] CAMPELO, A. D. S., ALMEIDA JÚNIOR, D. S. and SANTOS, M. L.: Stability to the dissipative Reissner-Mindlin-Timoshenko acting on displacement equation. *European Journal of Applied Mathematics (Print)*, v. 27, p. 157-193, 2016.
- [9] CASAS, P. S. e QUINTANILLA, R.: Exponential decay in one-dimensional porous-thermoelasticity. *Mechanics Research Communications*. 32, 652-658, 2005.
- [10] CASAS, P. S., QUINTANILLA, R.: Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures, *International Journal of Engineering Science*. 43, 33-47, 2005.

- [11] FERNÁNDEZ, H.D.: On the stability of Mindlin-Timoshenko plates, *Quartely of Applied Mathematics*. 67: 249-263, March, 2009.
- [12] GEARHART, L. M.: Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert Space. *Transactions of the American Mathematical Society*. 236, 385-394, 1978.
- [13] GOIORGI, C., NASO, M. G., PATA, V.: Exponential stability in linear heat conduction with memory: A semigroup approach. *Comm. Appl. Anal.* 5, 121-134, 2001.
- [14] GOODMAN, M. A. e COWIN, S. C.: A Continuum Theory for Granular Materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 44, 249-266, 1972.
- [15] GRASSELLI, M., PATA, V.: Uniform attractors of nonautonomous systems with memory, in "Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis"(A. Lorenzi and B. Ruf, Eds.), pp.155-178, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* no.50, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [16] HUANG, F. L.: Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems Hilbert spaces. *Annals of Differential Equations*. 1, 43-56, 1985.
- [17] JORGE SILVA, M. A., MA, T. F. e MUNÓZ RIVERA, J.E.: Mindlin-Timoshenko systems with Kelvin-Voigt: analyticity and optimal decay rates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Volume 417, Número 1, páginas 164 - 179, 2014.
- [18] JORGE SILVA, M. A.: Estabilidade assintótica para alguns modelos dissipativos de equações de placas. Tese (Doutorado em Matemática), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- [19] KIN, J.U., RENARDY, Y.: Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 25(6): 1417-1429, 1987.
- [20] LABUSCHAGNE, A., VAN RENSBURG, N.F.J. e VAN DER MERWE, A.J.: Vibration of a Reissner-Mindlin-Timoshenko plate-beam system. *Mathematical and Computer Modelling* 50: 1033-1044, 2009.
- [21] LAGNESE, J.E. e LIONS. J.L.: Modelling and stabilization of nonlinear plates. *Collection RMA*, Masson, Paris, 1988.
- [22] LAGNESE, J.E.: Boundary Stabilization of Thin Plates. *SIAM*, Philadelphia, 1989.
- [23] LIU, Z. e ZHENG, S.: Semigroups Associated with Dissipative Systems. In *CRC Research Notes in Mathematics* 398, Chapman Hall, 1999.
- [24] LIONS, J. L. e MAGENES, E.: Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [25] MAGAÑA, A. e QUINTANILLA, R.: On the exponential decay of solutions in one-dimensional generalized porous-thermo-elasticity, *Asymptot. Anal.* 49, 173-187, 2006.
- [26] MAGAÑA, A. e QUINTANILLA, R.: On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials, *Internat. J. Solids Struct.* 43, 3414-3427, 2006.
- [27] MAGAÑA, A. e QUINTANILLA, R.: On the time decay of solutions in porous elasticity with quasi-static microvoids, *J. Math. Anal. Appl.* 331, 617-630, 2007.

- [28] MESQUITA FILHO, J.: Sistemas Estruturais. Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2015.
- [29] MINDLIN, R.D.: Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.* 18: 31-38, 1951.
- [30] NICAISE, S. e PIGNOTTI, C.: Stability and instability result of the wave equation with a delay term in the boundary on internal feedbacks. *SIAM J. Control Optim.* 45(5), 1561-1585, 2006.
- [31] NUNZIATO, J. W.; e COWIN, S. C.: A Nonlinear Theory of elastic Materials with Voids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* 72,175-201, 1979.
- [32] OLIVEIRA, M. L. S.: Estabilidade e Análise Numérica de Sistemas Elásticos Porosos. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós Graduação em Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.
- [33] PAZY, A.: Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer- Verlag, New-York, 1983.
- [34] POKOJOVY, M.: On stability of hiperbolic thermoelastic Reissner-Mindlin-Timoshenko plates. *Math. Meth. Appl.Sci*, 2014.
- [35] POKOJOVY, M.: Zur theorie wärmeleitender Reissner-Mindlin Platten. Master's thesis, Universitat Konstanz, Deutschland, 2011.
- [36] PRÜSS, J.: On the spectrum of C_0 -semigrupos. *Transactions of the American Mathematical Society.* 284, 847-857, 1984.
- [37] QUINTANILLA R.: Slow Decay for One. Dimensional Porous Dissipation Elasticity. *Applied Mathematics Letters* 16 , 487-491, 2003.
- [38] RAPOSO, C.A., FERREIRA, J; SANTOS, M.L., CASTRO, N. N. O.: Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings. *Applied Mathematics Letters* 18, 535-541, 2005.
- [39] RAPOSO, C.A., CHUQUIPOMA, J. A. D., ÁVILA, J. A. J. e SANTOS, M.L.; CASTRO, N. N. O.: Exponential decay and numerical solution for a Timoshenko system with delay term in the internal feedback. *Int. J. Anal. Appl.*, 3 (1) , 1-13, 2013.
- [40] REISSNER, E.: On the theory of bending of elastic plates. *J. Math. Phys.* 23: 184-191, 1944.
- [41] RIVERA, J. E. M. e QUINTANILLA, R.: On the time polynomial decay in elastic solids with voids. *J. Math. Anal. Appl.* 338:1296-1309, 2008.
- [42] RIVERA, J. E. M. e RACKE, R.: Timoshenko systems with indefinite damping. *J. Math. Anal. Appl.* 341, 1068-1083, 2008.
- [43] RIVERA, J. E. M. e AQUENDO, H.P.: Asymptotic behavior on a Mindlin Timoshenko plate with viscoelastic dissipation on the boundary. *Funkcialaj Ekvacioj*, 46: 363-382, 2003.
- [44] SAID-HOUARI, B. e LASKRI, Y. A.: stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback, *Applied Mathematics and Computations*, 217, no. 6, 2857-2869, 2010.

- [45] SANTOS, M. L., JÚNIOR, D. S. A. e CAMPELO, A. D. S.: Stability to the dissipative Reissner Mindlin Timoshenko acting on displacement equation. *European Journal of Applied Mathematics* 27 (02), 157-193, 2016.
- [46] SANTOS, M. L., JÚNIOR, D. S. A. e CAMPELO, A. D. S.: Rates of Decay for Porous Elastic System Weakly Dissipative. *Acta Appl Math* 151: 1-26, 2007.
- [47] SANTOS, M. L. e JÚNIOR, D. S. A.: On porous-elastic system with localized damping. *Z. Angew. Math. Phys.*,67:63, 2016.
- [48] SANTOS, M. L., CAMPELO, A. D. S., e JÚNIOR, D. S. A. On the Decay Rates of Porous Elastic Systems. *J Elast.* 127:79-101, 2016.
- [49] SANTOS, M. L., SOUFYANE, A., e JÚNIOR, D. S. A.: Asymptotic behavior to Bresse system with past history. *Quart. Appl. Math.* 73: 23-54, (2015).
- [50] SILVA, M. M., CORTEZ, A. O. e BARROS, J. M. F.:Peneiras moleculares. *Revista Ciência Hoje*, Rio de Janeiro edição 336, maio, 2016.
- [51] SOUFYANE, A.: Stabilisation de la poutre de Timoshenko. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I-Mathematics*, 328(8):731-734,1999.
- [52] SOUFYANE, A, WEHBE, A.: Exponential stability for the Timoshenko beam by a locally distributed damping, *Electron. J. Differ. Equ.* 29, 1-14, 2003.
- [53] SOUFYANE, A.: . Energy decay for porous-thermo-elasticity systems of memory type. *Appl. Anal.* 87, 451-464, 2008.
- [54] SOUFYANE, A., AFILAL, M., CHACHA, M.: General decay of solutions of a linear one-dimensional porous-thermoelasticity system with a boundary control of memory type. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 72, 3903-3910, 2010.
- [55] SOUFYANE, A., AFILAL, M., CHACHA, M.: Boundary stabilization of memory type for the porous-thermo-elasticity system. *Abstr. Appl. Anal.* 2009.
- [56] SUH, L. H, BIEN, Z.: Use of time delay action in the controller design. *IEEE Trans. Autom. Control.* 25, 600-603, 1980.
- [57] TANG, F., FUDOUZI, H., UCHIKOSHI, T. e SAKKA, Y.: *J. Eur. Ceram. Soc.* 2004, 24, 341.
- [58] TIMOSHENKO, S. P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag.* 41: 744-746, 1921.
- [59] elasticidade (física) in *Artigos de apoio Infopédia [em linha]*. Porto: Porto Editora, 2003-2017. [consult. 2017-04-23 13:38:09]. Disponível na Internet: [https://www.infopedia.pt/\\$elasticidade-\(fisica\)](https://www.infopedia.pt/$elasticidade-(fisica)).