

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA - UFAM

Tese de Doutorado

**Problemas em Dinâmica Populacional com Termos
Não-Lineares e Não-Locais**

Ítalo Bruno Mendes Duarte

Belém
Julho de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA - UFAM

Ítalo Bruno Mendes Duarte

**Problemas em Dinâmica Populacional com Termos
Não-Lineares e Não-Locais**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA - UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Suárez Fernández

Co-Orientador: Prof. Dr. Manuel Delgado Delgado

Belém

Julho de 2017

Duarte, Ítalo Bruno Mendes

Problemas em dinâmica populacional com termos não-lineares e não-locais / Ítalo Bruno Mendes Duarte; orientador, Antonio Suárez Fernández.-2017.

150 f. il. 29cm.

Inclui bibliografias

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Belém, 2017.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Teoria da bifurcação. 3. Dinâmica populacional. 4. Teoria do ponto fixo. 5. Teorema de Krein-Rutman. I. Fernández, Antonio Suárez, orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 515.3533

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA - UFAM

Ítalo Bruno Mendes Duarte

Problemas em Dinâmica Populacional com Termos Não-Lineares e Não-Locais

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA - UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 07 de Julho de 2017.

Resultado: APROVADO

Banca Examinadora



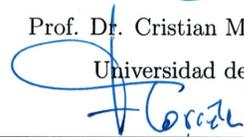
Prof. Dr. Antonio Suárez Fernández (Orientador)

Universidad de Sevilla



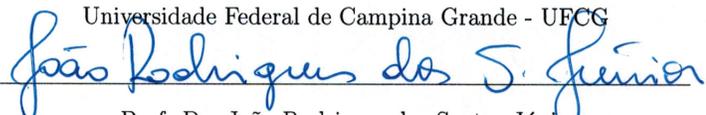
Prof. Dr. Cristian Morales Rodrigo

Universidad de Sevilla



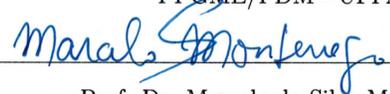
Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG



Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

PPGME/PDM - UFPA



Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

IMECC - UNICAMP

Dedicatória

Aos meus AMADOS familiares e aos meus GRANDES amigos.

Em especial à Kamilla Duarte, Maria Rita e Steve Araújo.

Com todo carinho.

Agradecimentos

Ao meu Deus-Pai, por ter me dado força e saúde para chegar até aqui, guiando sempre os meus caminhos e me ajudando em cada momento, principalmente nos que mais precisei.

A todos os meus familiares que sempre me ajudaram e incentivaram o meu estudo. Em especial à minha querida mãe, Maria Rita, por todas as suas orações, pela educação e por todo o seu amor. Mãe, você merece muito mais do que um simples obrigado e palavras me faltam nesse momento para lhe agradecer por tudo que fez por mim, espero muito em breve poder lhe retribuir tudo isso em dobro. Também agradeço as minhas irmãs, Bianca e Bárbara, por todo carinho e por terem me presenteado com meus amados sobrinhos Ágata e Asafe. E aos meus queridos primos Rafael, Fernando e Fernanda, que para mim também são irmãos.

À minha amada esposa, Kamilla Duarte, pelo companheirismo, paciência e compreensão. Por abrir mão temporariamente dos seus planos para estar do meu lado. E por se fazer presente em cada momento de fraqueza que tive, me colocando de pé e me dando forças para seguir em frente. Espero muito em breve desfrutar com você as consequências desta tese. Aproveito para agradecer também a sua família, que sempre acreditou nos nossos planos.

A todos os meus grandes amigos por tantos momentos de alegria. Dentre todos, destaco o meu irmão Adrian e toda a sua família, meu grande amigo Fábio e o trio Jossean, Lorena e Meyce, por todo carinho.

A todos os professores que me ajudaram a chegar no Doutorado. Em especial ao estimado professor e amigo Steve Araújo, que me instruiu ao caminho da pós-graduação e sempre acreditou que eu poderia chegar longe. Ao professor Gilberlândio Dias, por me orientar na graduação, com ensinamentos valiosos para a minha formação. E ao professor Giovany Figueiredo, por me orientar no mestrado, me incentivar a continuar no doutorado e ter gentilmente me ajudado a fazer meu doutorado sanduíche na Espanha.

Aos meus orientadores, Antonio Suárez e Manuel Delgado, o meu mais sincero obrigado, por toda a confiança, paciência e aprendizado. Por terem me recebido com toda disposição em Sevilha, fazendo com que a viagem fosse ainda mais agradável. Muito obrigado por todas as palavras de animo e pela amizade. Por terem me instruído no mundo da pesquisa e por terem sempre me ajudado com muita disposição.

Ao Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico da Universidad de Sevilla e ao IMUS, bem como todos os seus funcionários, por terem me recebido tão bem durante o meu doutorado sanduíche em Sevilha. E também a todos os espanhóis e brasileiros que tive o prazer de conhecer na Espanha e compartilhar momentos inesquecíveis. Em especial aos professores Antonio Langa e Cristian Morales.

Ao Programa de Doutorado em Matemática da UFPA e a todos os funcionários, por estarem sempre disponíveis a ajudar. A todos os professores do programa, em especial ao professor João Rodrigues, por todos os ensinamentos e pela amizade.

Aos amigos da turma do doutorado, grandes amizades que conquistei nesta caminhada: Andréia, Bruno, Gelson, Julio, Jeziel, João, Mirelson e Raimundo. E todos os demais amigos da pós-graduação, com os quais tive o prazer de compartilhar diversões e conhecimentos. Em especial aos meus grandes amigos Claudionei Pereira e Willian Cintra, por tantas horas de estudo e alegria.

Aos professores Antonio Suárez, Cristian Morales, Francisco Júlio Corrêa, João Rodrigues e Marcelo Montenegro, por aceitarem gentilmente avaliar esta tese e por contribuírem para a melhoria da versão final.

À Capes e aos cidadãos brasileiros, por financiarem os meus estudos e por terem me dado a oportunidade de estudar e morar na incrível cidade de Sevilha na Espanha.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos dois sistemas elípticos não-locais que surgem a partir do estudo da dinâmica populacional de determinadas espécies com características específicas. Usaremos métodos de Análise Funcional Não-Linear para encontrar estados de coexistência para estes sistemas. Mais precisamente, utilizaremos o Método de Bifurcação Bi-Paramétrica, a Teoria do Índice de Ponto Fixo sobre cones positivos e teoremas de ponto fixo. O uso desses métodos requer primeiramente um estudo de problemas não-locais, os quais resolveremos estabelecendo um Método de Sub-Super Solução e usando Teoria de Bifurcação. Além disso, para provar este Método de Sub-Super Solução, precisaremos estudar problemas não-locais de autovalor, os quais geralmente não são auto-adjuntos e, portanto, aplicaremos o Teorema de Krein-Rutman para resolvê-los. Finalmente, estudaremos as propriedades das soluções obtidas para estes sistemas, interpretando os seus significados para os respectivos modelos.

Palavras-chave: Problemas Elípticos Não-Locais, Estados de Coexistência, Problemas em Dinâmica Populacional, Método de Sub-Super Solução, Método de Bifurcação, Teoria do Índice de Ponto Fixo, Teorema de Krein-Rutman.

Abstract

In this work, we will study two nonlocal elliptic systems that arise from the study of the population dynamics of certain species with specific characteristics. We will use methods of Nonlinear Functional Analysis to find coexistence states for these systems. More precisely, we will use the Bi-Parametric Bifurcation Method, the Fixed Point Index Theory on positive cones and fixed point theorems. The use of these methods requires first a study of nonlocal problems, which we will solve by establishing a Sub-Super Solution Method and using Bifurcation Theory. Moreover, to prove this Sub-Super Solution Method, we will need to study nonlocal eigenvalue problems, which generally are not self-adjoint, and therefore we will apply the Krein-Rutman's Theorem to solve them. Finally, we will study the properties of the solutions obtained for these systems, interpreting their meanings for the respective models.

Key-words: Nonlocal Elliptic Problems, Coexistence States, Problems in Population Dynamics, Sub-Super Solution Method, Bifurcation Method, Fixed Point Index Theory, Krein-Rutman's Theorem.

Conteúdo

Notações	xi
Introdução	1
1 Resultados Prévios	17
1.1 Princípios de Máximo	18
1.2 O Teorema de Krein-Rutman	20
1.3 Autovalor Principal e Propriedades	22
1.4 Teoria do Índice de Ponto Fixo	25
1.5 Resultados de Bifurcação	28
2 Problemas de Autovalor e Propriedades	33
2.1 Motivação	34
2.2 Problema de Autovalor I	35
2.3 Autovalor Principal e o Princípio do Máximo Forte	39
2.4 Propriedades do Autovalor Principal	43
2.5 Problema de Autovalor II	49
3 Problemas Não-Locais Decorrentes de Processos Birth-Jump	53
3.1 Motivação	54
3.2 O Método de Sub-Super Solução	55
3.3 Problema Não-Linear	57
3.4 Equação Logística Não-Local	60
3.5 Conclusões	65

4	Sistema Elíptico Não-Local Decorrente do Crescimento de Células-Tronco Cancerígenas	67
4.1	Motivação	69
4.2	Soluções Semi-Triviais e Problema Perturbado	70
4.3	Cotas a Priori e Resultados de Não Existência	72
4.4	Estados de Coexistência Para o Caso $\delta \neq 1$	73
4.5	Estados de Coexistência Para o Caso $\delta = 1$	81
4.6	Região de Coexistência e Interpretações	88
4.7	Conclusões	96
5	Estudo de uma Equação Singular Não-Local por meio de uma Teoria de Bifurcação Não-Padrão	99
5.1	Motivação	101
5.2	Teoria de Bifurcação	102
5.3	Equação Logística Singular e Não-Local	111
5.4	Equação de Holling-Tanner do Tipo II Singular e Não-Local	118
6	Sistema Elíptico Não-Local Decorrente da Dinâmica Populacional Entre Amebas e Bactérias	125
6.1	Motivação	127
6.2	Sistema Local	129
6.3	Sistema Não-Local	137
6.4	Região de Coexistência e Interpretações	141
	Bibliografia	144

Notações

- $\int_X f(x) dx$:= denotará a integral de Lebesgue sobre o conjunto X . Quando não houver confusão, omitiremos x e/ou dx do integrando.
- $|u|_q$:= denotará a norma usual de u em $L^q(X)$, para $q \in [1, \infty]$.
- (\cdot, \cdot) := denotará o produto interno usual do espaço de Hilbert $L^2(X)$.
- $\|u\|$:= denotará a norma usual de u em $H_0^1(X)$.
- $\text{supp } u$:= denotará o suporte da função u .
- $u^+ := \max\{u, 0\}$ e $u^- := \min\{u, 0\}$.
- Dada uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, denotaremos

$$u_L = \min_{\overline{\Omega}} u \quad \text{e} \quad u_R = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

- $d(T, Y, y)$:= denotará o grau de Leray-Schauder do operador T sobre o aberto Y e no ponto $y \in Y$.
- T^* denotará o operador adjunto de T , quando este estiver bem definido.
- *q.t.p* := indicará que uma propriedade é válida em quase todo ponto, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula.
- \square := indicará o final de uma demonstração.

Introdução

Nesta tese, estudaremos dois sistemas elípticos não-locais, os quais motivaremos mais adiante, que surgem a partir de casos estacionários de problemas em dinâmica populacional. Uma vez que cada variável destes sistemas irá representar a concentração de uma determinada população, estamos interessados principalmente em resultados de existência nos quais as soluções possuem ambas as componentes positivas. Este tipo de solução é conhecida como estado de coexistência (ver [64]). Além disso, sempre que for possível, vamos interpretar a importância dos nossos resultados e quais são as suas implicações nos respectivos modelos.

O primeiro sistema que estudaremos é o caso estacionário do modelo de dinâmica entre células-tronco cancerígenas (*CTCs*) e células tumorais (*CTs*) em um determinado tecido Ω , proposto em [31]. Mais precisamente, vamos analisar o sistema não-local:

$$\begin{cases} -D_1\Delta u = \delta\gamma F(u+v)\mathcal{K}(u) & \text{em } \Omega, \\ -D_2\Delta v + \alpha v = (1-\delta)\gamma F(u+v)\mathcal{K}(u) + \rho F(u+v)\mathcal{K}(v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

onde Ω é um domínio regular e limitado de \mathbb{R}^N , $D_1, D_2, \gamma, \alpha, \rho > 0$, $\delta \in [0, 1]$ e $F \in C^1(\mathbb{R}_+)$ é uma função decrescente com $F(0) = 1$ e $F(t) = 0$, para $t \geq 1$. A função

$$\mathcal{K}(u) : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$$

é dada por

$$\mathcal{K}(u)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy,$$

onde $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula.

O segundo sistema que iremos estudar é o caso estacionário do modelo de reação-difusão do tipo predador-presa, proposto [38], que modela a interação de duas populações: uma de amebas e a outra de bactérias virulentas. Essencialmente, estudaremos o sistema não-local:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^2 - buv & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta v \left(\frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - \frac{\gamma uv}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.2)$$

onde $\lambda, \delta, \gamma, b > 0$ e Ω é um domínio regular e limitado de \mathbb{R}^N .

Existem diversos estudos experimentais que podem ser modelados por sistemas com derivadas parciais do tipo reação-difusão, dentre os quais podemos citar como exemplo os livros [15] e [64]. O interesse pelo estudo do caso estacionário destes tipos de modelos vêm sendo explorado por diversos matemáticos que trabalham com equações diferenciais parciais elípticas, afim de alguns exemplos veja os artigos [28], [40] e [65]. Por outro lado, a partir do pioneiro trabalho de Furter e Grinfeld [39], termos não-locais foram incluídos em modelos de dinâmica populacional para se levar em conta que a variação da espécie em um determinado ponto depende não só do comportamento dela nesse ponto, mas em todo o habitat no qual ela se encontra. Entretanto, termos não-locais não se restringem apenas a motivações em dinâmica populacional. Estes termos têm chamado a atenção de diversos autores matemáticos durante os últimos anos. Não somente pelas dificuldades matemáticas que eles apresentam, as quais geralmente não aparecem no caso local, mas também pela sua vasta aplicação em estudos de Biologia, Física e Química, por exemplo. Nesses casos, podemos citar Kirchhof [45] e Lions [52], onde os autores estudam a equação não-local de Kirchhoff (ver também [9], [34] e [35], e suas referências); Freitas [37] e Lacey [48], onde os autores aplicam termos não-locais ao estudo de aquecimento ôhmico; e Pao [63], onde termos não-locais são aplicados na teoria da combustão. Esses trabalhos tornam o estudo de sistemas com termos não-locais ainda mais motivador.

O Capítulo 1 desta tese será dedicado a enunciar resultados já conhecidos na literatura e que serão usados ao longo do texto. No que segue, iremos explicar a estrutura dos demais capítulos e apontar os principais resultados obtidos. Iremos também apresentar os modelos que originam os sistemas (0.1) e (0.2), que serão de fundamental importância para as nossas interpretações.

Os Capítulos 2, 3 e 4 desta tese serão dedicados ao estudo do sistema (0.1). Como já mencionamos, tal sistema é o caso estacionário do modelo de dinâmica entre células-tronco cancerígenas (*CTCs*) e células tumorais (*CTs*) em um determinado tecido Ω . Este modelo é proposto no artigo [31], onde os autores analisam o seguinte sistema que depende do tempo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D_1 \Delta u + \delta \gamma \int_{\Omega} K(x, y, p(x, t)) u(y, t) dy, \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = D_2 \Delta v - \alpha v + \rho \int_{\Omega} K(x, y, p(x, t)) v(y, t) dy \\ \quad + (1 - \delta) \gamma \int_{\Omega} K(x, y, p(x, t)) u(y, t) dy. \end{cases} \quad (0.3)$$

A seguir explicaremos o significado de cada termo em (0.3).

- (i) As variáveis $u(x, t)$ e $v(x, t)$ denotam a densidade populacional, em células por unidade de espaço celular, de células (*CTCs*) e (*CTs*), em um tempo t e na localização x , respectivamente.
- (ii) A função $p(x, t) = u(x, t) + v(x, t)$ denota a densidade total de células, em células por unidade de espaço celular.
- (iii) O núcleo $K(x, y, p)$ descreve a taxa de contribuição progênie à uma localização x de uma célula localizada em y , por tempo de ciclo celular.
- (iv) As constantes $D_1, D_2 > 0$ são os coeficientes de difusão das células (*CTCs*) e (*CTs*), respectivamente.
- (v) Os parâmetros $\gamma, \rho > 0$ denotam, respectivamente, o número de tempo de ciclo celular, por unidade de tempo, de células (*CTCs*) e (*CTs*).
- (vi) O número $\alpha > 0$ denota a taxa de morte das células (*CTs*).
- (vii) O número $\delta \in [0, 1]$ denota a fração de divisão de células (*CTCs*) que são simétricas, ou seja, a probabilidade na qual as células (*CTCs*) podem dar origem a duas células (*CTCs*). Consequentemente, $1 - \delta$ é a fração de divisão de (*CTCs*) que não são simétricas, ou seja, a probabilidade na qual as células (*CTCs*) podem dar origem a uma célula (*CTC*) e uma célula (*CT*).

As definições das unidades de tempo e medida exibidas acima podem ser encontradas em [31], as quais não entraremos em maiores detalhes aqui. Gostaríamos apenas de mencionar que (*CTCs*) são células cancerígenas que ainda não passaram pelo processo de diferenciação celular, possuem a capacidade de se dividir, dando origem a duas células semelhantes as originais, podendo se diferenciar e especializar em diversos tipos celulares. Por outro lado, (*CTs*) são células cancerígenas que não possuem metástase, ou seja, tendem a ficar onde estão. Para modelar o sistema (0.3), com os significados acima mencionados, as células (*CTCs*) e (*CTs*) devem satisfazer ainda as seguintes hipóteses:

- **Hipóteses para (*CTCs*):** são imortais, ou seja, possui taxa de mortalidade nula. Sua capacidade de proliferação é infinita. Uma célula (*CTCs*) pode dar origem a duas (*CTCs*) ou a uma (*CTC*) e outra (*CTs*);
- **Hipóteses para (*CTs*):** A proliferação resulta sempre em duas células (*CTs*). Têm uma probabilidade positiva de morte celular refletindo a exaustão do seu potencial de proliferação, bem como a morte espontânea devido a instabilidade genômica ($\alpha > 0$).

As condições de fronteira para o sistema (0.3) podem ser tanto de Dirichlet quanto de Neumann, dependendo do tecido Ω que é um domínio regular e limitado de \mathbb{R}^N :

- **Condições homogêneas de fronteira de Neumann:** Corresponde aos tecidos rodeados por membranas, como por exemplo os tecidos muscular liso e ósseo, os quais, para o propósito do modelo, são impenetráveis pelas células. Nesse caso, as condições são:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

onde η denota o vetor normal unitário exterior à fronteira de Ω .

- **Condições homogêneas de fronteira de Dirichlet:** Corresponde aos tecidos nos quais as células podem deixá-los livremente, mas que não podem retornar, tal como a intravasação em vasos sanguíneos adjacentes. Neste caso, as condições são:

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Nesta tese serão estudados apenas problemas com condições homogêneas de fronteira de Dirichlet. Ressaltamos que o estudo do sistema (0.1) com condições homogêneas de fronteira de Neumann, ao menos em nosso conhecimento, até a presente tese, ainda não foi explorado. Até mesmo o caso com condições de Dirichlet, que trataremos aqui, ainda não tinha sido estudado.

Para não fugir dos objetivos desta tese, não iremos exibir a forma com a qual os autores chegam no sistema (0.3), por meio das hipóteses apresentadas acima. Iremos apenas indicar o artigo [30], onde a dedução de (0.3) pode ser encontrada. Além disso, em [31] os autores estudam resultados de existência de solução global e estabilidade para (0.3), em casos particulares. Também mostram analiticamente o *paradoxo do crescimento tumoral*, o qual diz que com o aumento da morte celular das células (*CTCs*), o crescimento tumoral é acelerado.

Uma vez que na mitose uma célula-filha de (*CTCs*) ou (*CTs*) ocupa o lugar da mãe enquanto a segunda célula-filha é transportada imediatamente à outra localização, o crescimento e a movimentação das células não são processos independentes. Isto significa que as células (*CTCs*) e (*CTs*), modeladas pelo sistema (0.3), pertencem à classe de processos birth-jump. Em um processo birth-jump o crescimento e a movimentação das espécies não podem ser desacoplados. Estes processos são descritos pela seguinte equação integral-diferencial:

$$u_t - d\Delta u = \int_{\Omega} K(x, y, u(x, t))\alpha(u(y, t))u(y, t)dy - \alpha(u(x, t))u(x, t) + \int_{\Omega} S(x, y, u(x, t))\beta(u(y, t))u(y, t)dy - \delta(u(x, t))u(x, t).$$

Na equação acima, os dois primeiros termos descrevem um processo position-jump não-linear (ver [44] para esta definição), onde $\alpha(u)$ é a taxa para um indivíduo sair da localização x . O núcleo K é um núcleo de redistribuição que representa a probabilidade de um indivíduo localizado em y saltar para x , condicionada à ocupação local em x dada por $u(x, t)$. O terceiro termo descreve o processo birth-jump. A função $\beta(u)$ é a taxa de proliferação na localização y , e S é o núcleo de redistribuição para indivíduos recém-gerados em y saltar à posição x . O processo birth-jump não leva a um termo negativo nas equações, uma vez que age apenas em indivíduos recém-gerados. Observamos que, em (0.3), os mecanismos de transporte para as células-mães e para as células-filhas são os mesmos, ou seja, $K = S$. O último termo da equação é um termo de morte padrão com a taxa de mortalidade $\delta(u)$. Indicamos o artigo [42] para maiores detalhes sobre processos birth-jump e a modelagem da equação que o descreve.

Agora, discutiremos sobre os resultados que obtivemos para o sistema (0.1), para o qual usaremos ferramentas de Análise Funcional Não-Linear afim de encontrar estados de coexistência. Tais métodos necessitam de um conhecimento prévio das soluções semi-triviais de (0.1), ou seja, soluções da forma $(u, 0)$ ou $(0, v)$, com $u, v > 0$ em algum espaço de Banach adequado. Observe que quando zeramos uma das funções variáveis de (0.1), a outra satisfaz uma equação do tipo

$$\begin{cases} -d\Delta w + \beta w = \sigma F(w) \int_{\Omega} K(x, y)w(y)dy & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.4)$$

com $\beta \geq 0$, $d > 0$ e $\sigma > 0$. Tal equação ainda não tinha sido estudada na literatura com a estrutura que estamos considerando. Ressaltamos que a escolha das hipóteses sobre F e K que estamos impondo para (0.1) é motivada no trabalho [33].

Para resolver (0.4), vamos estabelecer um método de sub-super solução para o seguinte problema não-local (mais geral que (0.4)):

$$\begin{cases} -d\Delta u = \int_{\Omega} G(x, y, u(x), u(y))dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.5)$$

onde $G \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Precisamente, baseados nas ideias presentes em [18], mostramos por um argumento de ponto fixo que, assumindo a existência de um par de sub-super solução (em um apropriado sentido) de (0.5), existe uma solução para (0.5).

Para aplicarmos o método de sub-super solução obtido para (0.5) à equação (0.4), precisaremos estudar o seguinte problema de autovalor não-local e não auto-adjunto:

$$\begin{cases} -d\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.6)$$

Quando o núcleo K é não-negativo, não-identicamente nulo e separável por variáveis, ou seja,

$$K(x, y) = a(x)b(y), \quad \forall x, y \in \Omega,$$

o problema de autovalor (0.6) é estudado em [1] e [21] (ver também [17]). Em [36], com algumas condições sobre K , os autores mostram a existência de um autovalor principal para (0.6) e analisam a dificuldade que surge neste problema quando K não é positiva.

Pela natureza biológica do problema, vamos supor que K é não-negativa e não-identicamente nula. Além disso, K não necessariamente é uma função separável por variáveis, desse modo os nossos resultados são mais gerais que os obtidos em [1]. No Capítulo 2, utilizaremos o Teorema de Krein-Rutman para mostrar que se $m \in L^\infty(\Omega)$ e $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ então (0.6) possui um autovalor principal, o qual denotaremos por

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); K).$$

Baseados nas propriedades do autovalor principal para o caso local (ver [28], [54] e [58]), mostraremos propriedades de monotonia do autovalor principal $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$ com respeito aos pesos m e K , bem como a relação entre sua positividade com o Princípio do Máximo Forte. Além disso, mostraremos que este autovalor depende continuamente do domínio Ω .

No Capítulo 3, estabeleceremos o método de sub-super solução para (0.5). Para ilustrarmos esse método, antes de estudarmos a equação (0.4), vamos considerar um caso particular dela. Mais precisamente, estudaremos o seguinte problema logístico não-local:

$$\begin{cases} -d\Delta u = \sigma g(u) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.7)$$

onde $g(u) := (A(x) - u^p)^+$, com $p \geq 1$, $A \in C(\bar{\Omega})$ e $A^+ \neq 0$. Definindo $\tilde{K}(x, y) = A^+(x)K(x, y)$ e buscando soluções positivas de (0.7) em $C_0^1(\bar{\Omega})$, obtemos os seguintes resultados:

- Se $\tilde{K}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, então (0.7) não possui solução positiva.
- Se $\tilde{K} \neq 0$, então existe $\sigma_1(d; 0; \tilde{K}) > 0$ tal que (0.7) possui solução positiva $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ se, e somente se, $\sigma > \sigma_1(d; 0; \tilde{K})$. Além disso, $u(x) \leq A_R^{1/p}$, para todo $x \in \Omega$.
- A solução $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ do item anterior, quando existe, é única.

Gostaríamos de ressaltar que estes resultados obtidos no Capítulo 2 e no Capítulo 3 são novos e originaram o artigo [26], o qual foi aceito pela revista “Proceedings of The Royal Society of Edinburgh, Section A” no ano de 2017.

Ainda no Capítulo 3 estudaremos o problema (0.4) e finalizaremos o capítulo interpretando os resultados obtidos para estas equações não-locais, onde também faremos uma breve discussão sobre difusão aleatória pura e processo birth-jump.

No Capítulo 4, encontraremos as soluções semi-triviais de (0.1) utilizando o estudo feito para a equação (0.4). Consecutivamente, estudaremos cotas a priori e resultados de não existência para (0.1). Com isso, analisaremos os estados de coexistência de (0.1). Este estudo será dividido em dois casos: $\delta \in (0, 1)$ e $\delta = 1$. Quando $\delta = 0$ o sistema (0.1) não possui estados de coexistência, uma vez que $\delta = 0$ implica em $u = 0$.

Para o caso $\delta \in (0, 1)$ usamos argumentos de bifurcação presentes em [19], [57] e [58], para encontrar um contínuo ilimitado de estados de coexistência de (0.1) que bifurca de um determinado ponto específico (ver Seção 4.4 para mais detalhes). Com isso, obtemos a existência de uma curva no plano $(\gamma - \rho)$, que denotaremos por $\gamma = \mathcal{F}_\delta(\rho)$, e provamos o seguinte resultado:

- *Assuma que $\delta \in (0, 1)$ e $\rho > 0$. Se $\gamma > \mathcal{F}_\delta(\rho)$, então existe pelo menos um estado de coexistência de (0.1).*

Para $\delta = 1$, não fomos capazes de obter resultados de não existência para usar o mesmo argumento do caso $\delta \in (0, 1)$. Dessa forma, usaremos a teoria do índice de ponto fixo com respeito ao cone positivo, presente em [2] e [22], para obtermos a existência de duas curvas, que denotaremos por $\gamma = \mathcal{F}_1(\rho)$ e $\rho = \mathcal{G}(\gamma)$, e mostrarmos o seguinte resultado:

- *Assuma que $\delta = 1$. Existem números positivos $\sigma_{1,1}$ e $\sigma_{1,2}$ tais que se $\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$, então existe pelo menos um estado de coexistência de (0.1) quando*

$$(\gamma - \mathcal{F}_1(\rho)) \cdot (\rho - \mathcal{G}(\gamma)) > 0.$$

Finalizamos o Capítulo 4 estudando a região de coexistência das soluções de (0.1) dada pelos resultados acima e também interpretando o significado desses resultados. Ressaltamos que para o estudo da região de coexistência e para as interpretações que faremos, precisamos supor que K satisfaz a seguinte hipótese:

$$K(x, x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega,$$

uma vez que só foi possível estudar o comportamento das curvas acima com esta imposição.

Os resultados obtidos no Capítulo 4 originaram o artigo [25], que está submetido à revista “Discrete and Continuous Dynamical System - B”.

Agora, passaremos a discutir os resultados obtidos para o sistema (0.2), o qual será estudado no Capítulo 5 e no Capítulo 6. Como já mencionamos, este sistema é o caso estacionário do modelo de interação entre amebas e bactérias virulentas em um determinado habitat Ω . Este modelo é proposto na tese [38], onde a autora propõe o seguinte sistema, dependente do tempo, para modelar a dinâmica entre duas populações em Ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = D_1 \Delta u + u(1 - u - v), \\ v_t = D_2 \Delta v - \chi \nabla \cdot (v \nabla u) - \mu v + \delta v \frac{\int_{\Omega} uv dx}{\int_{\Omega} v dx} - \frac{\gamma uv}{1 + \tau v}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x, t) = 0, \quad \forall x \in \partial \Omega \quad \text{e} \quad \forall t \geq 0, \end{array} \right. \quad (0.8)$$

onde Ω é um domínio regular e limitado de \mathbb{R}^N , com $N = 1$ ou $N = 2$. Além disso, η denota o vetor normal unitário exterior à fronteira de Ω .

No sistema em (0.8) as amebas se alimentam da população bacteriana. Devido à virulência das bactérias estudadas, a população ameboide se comportam como predador e hospedeiro, enquanto a população de bactérias tem comportamento de presa e patógeno.

A seguir, iremos explicar o significado de cada termo em (0.8):

- (i) As variáveis $u(x, t)$ e $v(x, t)$ denotam a densidade populacional de bactérias e amebas, respectivamente, no tempo t e na posição x .
- (ii) As funções $u_0(x)$ e $v_0(x)$ são condições iniciais do sistema.
- (iii) As constantes D_1 e D_2 representam a taxa de difusão das bactérias e das amebas, respectivamente.
- (iv) O número χ é um coeficiente de quimiotaxia.
- (v) O número μ é a taxa de mortalidade intrínseca das amebas.

Para falarmos sobre as demais constantes, precisamos destacar duas propriedades a respeito das populações estudadas:

- 1– O termo não-local na segunda equação de (0.8) descreve o fato de que, na escassez de alimentos, as amebas se comportam como um único organismo, a fim de redistribuir o alimento entre todas as células; δ é a taxa de crescimento das amebas.
- 2– O último termo da segunda equação de (0.8) é devido ao fato de que a população bacteriana sob investigação pertence a uma classe virulenta, isto é, as amebas são infectadas por bactérias e morrem. Os autores levam isto em consideração assumindo que as amebas são atacadas por bactérias seguindo uma função de tipo Holling II (ver [38]), com tempo de manipulação do primeiro ataque τ e com taxa de matança γ .

Precisamos enaltecer que o sistema (0.2) é o caso estacionário de (0.8) com condições homogêneas de fronteira de Dirichlet, ou seja,

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Essa troca foi feita para unificar as condições de fronteira no trabalho, além de não existir na literatura nenhum estudo de (0.2) com essa condição. Destacamos que o caso com condições homogêneas de fronteira de Neumann, ao menos em nosso conhecimento, até a presente tese, ainda não foi estudado. Observamos que com esta mudança (0.2) não perde as características do modelo, apenas troca o ambiente no qual as populações se encontram, o qual, devido às condições de fronteira, agora é cercado por áreas inóspitas. Em outras palavras, as populações podem até deixar o habitat Ω , mas não podem retornar.

Além disso, no sistema (0.2) estamos supondo que não existe coeficiente de quimiotaxia, ou seja, $\chi = 0$. Isso significa que não existe nenhum estímulo químico sobre as amebas para que busquem maiores concentrações de bactérias. Por outro lado, por mais que estejamos supondo que $\mu = 0$ e $\tau = 1$, um estudo análogo poderia ser feito considerando estes coeficientes não-negativos. Estes ajustes técnicos são apenas para simplificar o estudo do sistema (0.2).

Mais detalhes sobre o sistema (0.8) podem ser encontrados na tese [38] e no artigo [67]. Na tese [38] é feito o estudo do modelo, por meio de simulações e aproximações numéricas. Os autores também estudam questões de existência de soluções globais e estabilidade dessas soluções, impondo condições sobre os parâmetros γ e μ . No artigo [67] os autores estudam condições sobre a taxa de difusividade das amebas e, com isso, encontram existência de solução global para (0.8).

Vamos agora resumir os resultados que obtivemos para o sistema (0.2). Primeiro observamos que, quando fixamos a população de bactérias $u = u_0 \in C_0^1(\bar{\Omega})$, a população ameboide v satisfaz a seguinte equação singular e não-local:

$$\begin{cases} -D_2\Delta v = \delta v \left(\frac{\int_{\Omega} u_0(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - \frac{\gamma u_0 v}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.9)$$

Destacamos que a primeira parcela do segundo membro de (0.9) não é diferenciável em zero. Sendo assim, não podemos usar diretamente os resultados clássicos de bifurcação presentes em [19], [57] e [68]. Inspirados nesta dificuldade, no Capítulo 5, estudaremos o seguinte problema elíptico não-local e singular:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - g(x, v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.10)$$

onde Ω é um domínio limitado e regular do \mathbb{R}^N , $A \in C^1(\bar{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula. O operador \mathcal{L} é uniformemente elíptico de segunda ordem da forma:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_i \partial_j + \sum_{j=1}^N b_j(x) \partial_j + c(x),$$

com

$$a_{ij} \in C(\bar{\Omega}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad b_j, c \in L^\infty(\Omega), \quad i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

O número real λ é um parâmetro de bifurcação e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em $C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ tal que $g(\cdot, t) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, para cada $t \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in (0, 1)$, e ainda satisfaz uma das seguintes hipóteses:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x, t)}{t} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (0.11)$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x, t)}{t} = g_0(x), \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (0.12)$$

onde $g_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, não-negativa e não-identicamente nula. Observe que em (0.9) a função g satisfaz (0.12) para $g_0 = \gamma u_0$, neste caso a equação é dita de Holling-Tanner do Tipo II. A função g satisfaz (0.11) no caso logístico, por exemplo.

Quando a função A é constante o problema (0.10) se torna a equação local

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda Av - g(x, v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuja teoria de bifurcação foi aplicada para problemas similares por diversos autores com diferentes hipóteses sobre g , incluindo (0.11) e (0.12). Indicamos [5], [6] e [57], bem como suas referências, para um estudo geral sobre o caso local. Destacamos que nossos resultados generalizam o caso local quando g satisfaz (0.11) ou (0.12).

Uma vez que não podemos usar diretamente os resultados clássicos de bifurcação presentes em [19], [57] e [68], faremos uma análise mais cuidadosa em (0.10), verificando se o índice de um operador específico muda quando λ cruza os possíveis pontos de bifurcação de (0.10) desde a solução trivial. Com isso, aplicaremos uma modificação no Teorema 1.3 de [68], como feito em [3], para obter a existência de um ponto de bifurcação $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$ de soluções positivas de (0.10) desde a solução trivial, quando g satisfaz (0.11), onde denotamos por $\lambda_1(\mathcal{L})$ o autovalor principal do operador \mathcal{L} com condições homogêneas de fronteira de Dirichlet, φ_1 denota a única autofunção positiva associada a este autovalor que satisfaz $\|\varphi_1\|_\infty = 1$ e

$$\mathcal{A}(\varphi_1) := \frac{\int_\Omega \varphi_1(x) dx}{\int_\Omega A(x) \varphi_1(x) dx}. \quad (0.13)$$

Mais precisamente, mostramos o seguinte resultado:

- *Suponha que g satisfaça (0.11). Desde $(\lambda, v) = (\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ de soluções positivas de (0.10).*

Quando g satisfaz (0.12), é possível provar um resultado similar ao do item anterior. Em realidade, usamos este item para provar o seguinte resultado:

- *Suponha que g satisfaça (0.12). Desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\bar{\varphi}_1), 0)$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ de soluções positivas de (0.10).*

Acima, estamos denotando por $\bar{\varphi}_1$ a autofunção principal associada ao operador $\mathcal{L} + g_0(x)$, com condições homogêneas de fronteira de Dirichlet, que satisfaz $\|\bar{\varphi}_1\|_\infty = 1$.

É claro que os resultados anteriores nos dão várias possibilidades para o comportamento global do contínuo de soluções positivas, dependendo das características da função g . Dessa forma, aplicaremos os resultados obtidos para a equação (0.10) a dois problemas não-locais: um logístico com g satisfazendo (0.11) e outro de Holling-Tanner do tipo II com g satisfazendo (0.12). As formas explícitas de g permitirão estudar globalmente este contínuo.

Os resultados do Capítulo 5 deram origem ao artigo [27], que está submetido à revista “Journal of Mathematical Analysis and Applications”.

Finalmente, no Capítulo 6, estudamos os estados de coexistência de (0.2). Novamente a dificuldade está no termo não-local e singular presente neste sistema. Para contornar esta dificuldade, vamos considerar

$$R = \frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}, \text{ para } \int_{\Omega} v(x) dx \neq 0,$$

obtendo assim um sistema elíptico local, para o qual podemos aplicar os resultados de bifurcação presentes em [55] e [57]. Depois de resolver o sistema local, vamos usar argumentos de ponto fixo, que podem ser encontrados em [7] e [16], e uma versão do Teorema de Bolzano para espaços de Banach, os quais nos permitirão encontrar condições sobre os parâmetros λ e δ para os quais (0.2) possui estados de coexistência. Nesse sentido, mostraremos o seguinte resultado:

- *O sistema (0.2) possui pelo menos um estado de coexistência para cada*

$$\lambda > \lambda_1(-\Delta) \quad e \quad \delta > \lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda) \left(\frac{\int_{\Omega} \Psi_\lambda(x)}{\int_{\Omega} \theta_\lambda(x)\Psi_\lambda(x)} \right),$$

onde $\theta_\lambda \in C_0^1(\bar{\Omega})$ é uma função positiva e $\Psi_\lambda \in C_0^1(\bar{\Omega})$ é uma autofunção positiva específica (ver Seção 6.3 para mais detalhes).

Finalizamos o Capítulo 6 estudando a região de coexistência de (0.2) dada pelo resultado anterior e, com isso, interpretaremos o significado dos resultados obtidos. Os resultados do Capítulo 6 originaram um artigo intitulado “Nonlocal singular elliptic system arising from the amoeba-bacteria population dynamics”, que está em fase de finalização.

Para finalizarmos esta introdução, iremos listar problemas que ainda ficaram em aberto nesta tese. Alguns deles são apenas questões que não fomos capazes de responder durante nossos estudos, outros são problemas que não estudaremos nesta tese, mas pretendemos seguir estudando como linhas de pesquisa futuras.

- Nos estudos do sistema (0.1) estamos considerando K uma função não-negativa e não-identicamente nula. Uma pergunta natural então seria: o que acontece com os problemas dos três primeiros capítulos quando o núcleo K muda de sinal? Este é um caso em aberto, com alguns estudos para o problema de autovalor (0.6). Por exemplo, em [36], os autores mostram que se K é separável por variáveis (e satisfaz algumas hipóteses) então (0.6) possui vários autovalores cujas as autofunções associadas podem ser tomadas positivas. O caso geral é um problema aberto cuja dificuldade é discutida em [36] e se deve ao fato de que, com a introdução do termo não-local, em geral, (0.6) não satisfaz um princípio de máximo ou de comparação.

Por outro lado, estamos supondo ainda $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$. Esta hipótese será crucial para obter a existência de autovalor principal para (0.6) utilizando o Teorema de Krein-Rutman. O caso em que $|K|_\infty$ não é limitado também é um problema aberto.

- No Método de Sub-Super Solução para a equação (0.5) estamos supondo que a função limitada G é da forma $G(x, y, u(x), u(y))$. Porém, no sistema (0.1) temos um caso bem particular para G que é:

$$G(x, y, u(x), u(y)) = F(u(x))K(x, y)u(y). \quad (0.14)$$

Isso nos levou a estudar (0.4) na forma (0.14). Seria interessante o estudo da equação:

$$\begin{cases} -d\Delta u + \beta u = \sigma \int_{\Omega} G(x, y, u(x), u(y))dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.15)$$

uma vez que já temos um método de sub-super solução geral. Ressaltamos que o monotonia da função F e a positividade de K são essenciais para obter um par de sub-super solução para (0.4). Também podemos pensar em resolver (0.15) por teoria de bifurcação.

- Em todos os resultados de coexistência para (0.1), a compacidade de certos operadores é essencial. Assim, precisamos que os coeficientes D_1 e D_2 sejam ambos positivos. Quando D_1 e/ou D_2 são nulos, o termo integral é de fato um termo de difusão não-local (veja a Observação 2.2 em [33]). Este caso é um problema muito interessante para analisarmos as soluções estacionárias.

- A falta de um bom conhecimento das funções $\mathcal{F}_1(\rho)$ e $\mathcal{G}(\gamma)$ dadas no estudo dos estados de coexistência de (0.1) quando $\delta = 1$, nos levou a considerar algumas possíveis regiões de coexistência para (0.1) neste caso. Discorrer a cerca destas funções não é uma tarefa simples, tendo em vista a quantidade de parâmetros que elas envolvem. Na Seção 4.6, iremos considerar apenas um caso no qual foi possível encontrar informações sobre a posição relativa entre estas curvas. Se fôssemos capazes de aplicar a teoria de bifurcação bi-paramétrica de [58] para (0.1), poderíamos falar mais sobre essas funções, analisando o comportamento local das soluções bifurcadas. Porém, não conseguimos aplicar esta teoria no caso $\delta = 1$, por falta de resultados de não existência. Um conhecimento completo dessas funções daria maior precisão para as interpretações dos nossos resultados.
- Estudamos a teoria de bifurcação para o problema (0.10), entretanto não analisamos a direção de bifurcação desses pontos, uma vez que não existe este estudo na literatura para a estrutura da equação (0.10) (não-local e singular). Este estudo é de extrema importância para falar sobre multiplicidade de soluções positivas de (0.10) para os casos particulares que iremos estudar. Na falta desses resultados, consideramos possíveis direções de bifurcação de soluções positivas para (0.10) no caso logístico e no caso Holling-Tanner do Tipo II. Nesse sentido, um estudo interessante (e que não foi feito nesta tese) seria tentar encontrar resultados de direção de bifurcação, similares aos que podem ser encontrados em [5] e [6], para equações do tipo (0.10).
- O estudo da região de coexistência de (0.2) necessita primeiramente do estudo de uma função $F : (\lambda_1(-\Delta), +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$F(\lambda) = \lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x)) \left(\frac{\int_{\Omega} \Psi_\lambda(x) dx}{\int_{\Omega} \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx} \right).$$

Novamente, esta função envolve vários parâmetros. Além disso, não fomos capazes de dizer o que ocorre com o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda).$$

Isso nos levou a considerar um possível caso para a região de coexistência supondo que este limite não explode. Observamos que esta suposição será apenas para que possamos fazer um esboço da região de coexistência de (0.2) e que isto não interfere em nada nos resultados obtidos.

- Por fim, ressaltamos novamente que todos os problemas tratados nesta tese são com condições homogêneas de fronteira de Dirichlet. Em linguagem de dinâmica populacional, os habitat Ω são cercados por áreas inóspitas em ambos os sistemas tratados, ou seja, as populações podem até deixar Ω , mas não podem retornar a ele. Em estudos futuros, estes problemas podem ser considerados com condições de fronteira mais gerais como por exemplo, Robin e Neumann (ou não-lineares). Chamamos mais atenção à condição de Neumann, já que os sistemas (0.1) e (0.2) são modelados sobre essas condições. Neste caso, o fluxo é zero sobre $\partial\Omega$, ou seja, as populações não podem deixar Ω e este também não pode receber novos indivíduos. Observamos ainda que o sistema (0.1) não possui soluções semi-triviais da forma $(u, 0)$, com $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ positiva em Ω , devido as condições de fronteira de Dirichlet (ver Seção 4.2). Isso não ocorreria se as condições de fronteira fossem de Neumann, o que mudaria totalmente o estudo feito aqui. Além disso, o caso parabólico de (0.1) foi estudado nestas condições (ver [31], [33] e [61]). O caso parabólico do sistema (0.2) foi estudado em [38] e [67]. Portanto, o estudo desses sistemas com condições de fronteira de Neumann é interessante do ponto de vista matemático e biológico, pois este estudo permitirá comparar os resultados obtidos com o caso parabólico e o caso Dirichlet tratado aqui. Além de ser um caso mais realista para o modelo (0.8).

Capítulo 1

Resultados Prévios

Ao longo desta tese, usaremos diversos resultados que são conhecidos na literatura. Alguns deles, por serem clássicos no estudo de equações diferenciais elípticas, serão apenas usados, sem muitos detalhes, com suas respectivas referências citadas. Outros, acreditamos que merecem ser enunciados, com o objetivo de que a leitura da tese fique mais clara e completa. Este capítulo será dedicado a enunciar estes resultados, os quais também indicaremos as respectivas referências onde suas demonstrações podem ser encontradas. Antes de enunciá-los, primeiro fixaremos algumas notações.

No que segue, vamos considerar Ω um domínio limitado e regular do \mathbb{R}^N , com $N \geq 1$, ou seja, Ω é um subconjunto aberto e conexo do \mathbb{R}^N cuja a fronteira $\partial\Omega$ é suficientemente regular. Também vamos considerar \mathcal{L} um operador uniformemente elíptico da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_i \partial_j + \sum_{j=1}^N b_j(x) \partial_j + c(x), \quad (1.1)$$

com

$$a_{ij} \in C(\overline{\Omega}), \quad b_j, c \in L^\infty(\Omega), \quad i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.2)$$

Lembramos que \mathcal{L} é um operador uniformemente elíptico quando existe uma constante $\alpha > 0$ tal que, para cada $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2,$$

onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana do \mathbb{R}^N .

Dada uma função mensurável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que $f \geq 0$ se $f(x) \geq 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$, e, dada outra função mensurável $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que $f \geq g$ se $f - g \geq 0$. Além disso, diremos que $f > 0$ quando $f \geq 0$ e $f > 0$ em um conjunto de medida positiva. e escreveremos $f > g$ se $f - g > 0$. Similarmente, para cada $f, g \in C(\partial\Omega)$, diremos que $f \geq 0$ (resp. $f > 0$) quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ (resp. $f \geq 0$ e existir $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $f(x_0) > 0$), enquanto que escreveremos $f \geq g$ (resp. $f > g$) se $f - g \geq 0$ (resp. $f - g > 0$).

1.1 Princípios de Máximo

Nesta seção, vamos enunciar alguns resultados referentes a princípios de máximo, uma das principais ferramentas utilizadas no estudo de equações diferenciais elípticas. Sobre este assunto existem inúmeras versões em diferentes referências, das quais citamos [41], [54] e [66] para um estudo geral. Abaixo apresentaremos os resultados clássicos presentes [54].

Teorema 1.1 (Princípio do Máximo Clássico). *Suponha que $c \geq 0$ e $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz*

$$\mathcal{L}u(x) < 0 \quad \text{para cada } x \in \Omega.$$

Então, u não pode atingir um máximo local não-negativo em Ω .

De forma mais geral, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2 (Princípio do Máximo de Hopf Clássico). *Suponha que $c \geq 0$ e $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz*

$$\mathcal{L}u \leq 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad M := \sup_{\Omega} u \in [0, +\infty).$$

Então, ou $u = M$ em Ω , ou $u(x) < M$ para todo $x \in \Omega$. Em outras palavras, u não pode atingir M em Ω , a menos que $u = M$ em Ω . Em particular, se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u = M.$$

Para o próximo resultado, conhecido também como Lema de E. Hopf, lembramos que Ω deve satisfazer a condição de esfera interior uniforme. Como estamos supondo Ω suficientemente regular, não vamos entrar nos detalhes desta condição. O livro [54] pode ser consultado para mais informações.

Teorema 1.3 (Princípio do Máximo Forte). *Suponha que $c \geq 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ satisfaz*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$u > 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Além disso, se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então para cada $x \in \partial\Omega \cap u^{-1}(0)$ temos

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

onde η denota o vetor normal unitário exterior à fronteira de Ω .

Observação 1.4. (i) *As hipóteses em (1.2) podem ser eventualmente relaxadas para que os resultados acima permaneçam verdadeiros, conforme é discutido em [54].*

(ii) *Os Teoremas 1.1 e 1.2 possuem versões similares para o caso $\mathcal{L}u \geq 0$ em Ω , conhecidas como princípios de mínimo.*

(iii) *Os princípios de máximo acima são ferramentas bastante úteis quando se estuda unicidade e positividade de soluções para problemas elípticos. Porém, em muitos casos, as soluções de problemas mais gerais não necessariamente estão em $C^2(\Omega)$ e tampouco em $C^1(\overline{\Omega})$. Na literatura existem versões que exigem menos regularidade da solução obtida, dentre as quais indicamos os trabalhos [12], [51] e [59]. Nos resultados seguintes vamos enunciar versões para funções em $W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, cujas demonstrações podem ser encontradas em [54]. Tais versões serão necessárias e suficientes para o nosso estudo. Note que, das imersões contínuas dos espaços de Sobolev (Teorema 4.1.5 de [54]),*

$$W^{2,q}(\Omega) \subset C^{1,1-\frac{N}{q}}(\overline{\Omega}),$$

para cada $q > N$. Além disso, pelo Teorema 4.1.8 de [54], cada função $u \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, possui segunda derivada clássica em quase todo ponto de Ω .

Teorema 1.5 (Princípio do Máximo de Hopf Fraco). *Suponha que $c \geq 0$ e $u \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, satisfaz*

$$\mathcal{L}u \leq 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad M := \sup_{\Omega} u \in [0, +\infty).$$

Então, ou $u = M$ em Ω , ou $u(x) < M$ para todo $x \in \Omega$. Em outras palavras, u não pode atingir M em Ω , a menos que $u = M$ em Ω . Além disso,

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u = M.$$

Teorema 1.6 (Lema de Hopf Fraco). *Suponha que $c \geq 0$ e seja $u \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, uma função não-constante satisfazendo*

$$\text{inf ess } \mathcal{L}u \geq 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad m := \inf_{\Omega} u \in (-\infty, 0].$$

Assuma ainda que existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u(x_0) = m$. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0.$$

1.2 O Teorema de Krein-Rutman

Esta seção será dedicada à apresentação da teoria espectral para operadores não auto-adjuntos. Usaremos essa teoria ao longo da tese para encontrar a existência de um autovalor principal para determinados operadores. Note que, em geral, o operador \mathcal{L} não é auto-adjunto.

Definição 1.7. *Dado um espaço de Banach E possuindo uma relação de ordem, definimos o cone positivo de E por*

$$P := \{u \in E : u \geq 0\}.$$

Dizemos que E é um espaço de Banach ordenado (e.B.o) se seu cone positivo é fechado.

Definição 1.8. *Sejam (E, P_1) e (F, P_2) dois e.B.o, e $T : E \rightarrow F$ linear.*

- (a) *Dizemos que T é positivo se $T(P_1) \subset P_2$.*
- (b) *Dizemos que T é estritamente positivo se $T(P_1 \setminus \{0\}) \subset P_2 \setminus \{0\}$.*
- (c) *Se $\text{int}(P_2) \neq \emptyset$, dizemos que T é fortemente positivo se $T(P_1 \setminus \{0\}) \subset \text{int}(P_2)$.*

Definição 1.9. *Seja (E, P) um e.B.o tal que $\text{int}(P) \neq \emptyset$. Dizemos que um elemento $u \in E$ é estritamente positivo quando $u \in \text{int}(P)$.*

Com essas definições podemos enunciar o importante Teorema de Krein-Rutman, cuja demonstração pode ser encontrada em [2] e [24].

Teorema 1.10 (Krein-Rutman). *Seja (E, P) um e.B.o tal que $\text{int}(P) \neq \emptyset$. Seja $T : E \rightarrow E$ um operador linear, contínuo, compacto e fortemente positivo. Então:*

(i) *O raio espectral de T , definido por*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{1/n},$$

é positivo.

(ii) *$r(T)$ é um autovalor simples de T com autofunção positiva e não existe outro autovalor de T que tenha uma autofunção positiva.*

(iii) *Qualquer outro autovalor, λ , de T verifica $|\lambda| \leq r(T)$.*

(iv) *$r(T)$ é um autovalor simples de T^* , o qual possui uma autofunção estritamente positiva.*

(v) *Para cada $f \in P \setminus \{0\}$, a equação $\lambda x - Tx = f$ tem exatamente uma solução positiva se $\lambda > r(T)$ e não tem solução positiva se $\lambda \leq r(T)$.*

Observação 1.11. (a) *O autovalor $r(T)$ é chamado de autovalor principal de T . Note que, a menos de multiplicação por constantes, existe uma única autofunção associada a $r(T)$ que, quando tomada positiva, é chamada de autofunção principal associada a T .*

(b) *Em geral, para a propriedade (iv) do Teorema 1.10, supõe-se ainda que o cone P seja normal (ver [2] ou [54] para esse conceito). Porém, para operadores irredutíveis, que é o caso de operadores lineares e fortemente positivos (ver [23]), não é preciso essa suposição. Para mais detalhes sobre o assunto indicamos as referências [23], [62] e [69]. Voltaremos a falar disso no Capítulo 4.*

(c) *Existem outras versões do Teorema de Krein-Rutman tentando evitar condições como o cone ter interior não-vazio. Para essas versões destacamos as referências [2], [47] e [54].*

Para finalizar essa seção, gostaríamos de ressaltar que a aplicação do Teorema 1.10 requer uma boa escolha para o espaço que será feito o estudo, uma vez que o cone positivo deste espaço precisa ter interior não-vazio. A seguir, daremos alguns exemplos de cones positivos em espaços de Banach ordenados. Para mais detalhes e exemplos, indicamos o artigo [2].

Observação 1.12. (i) O espaço $C(\overline{\Omega})$ é um e.B.o cujo cone positivo P tem interior não-vazio, dado por:

$$\text{int}(P) = \{f \in C(\overline{\Omega}) : f(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega\}.$$

Já o espaço $C_0(\overline{\Omega})$ é um e.B.o cujo cone positivo tem interior vazio.

(ii) O espaço $C_0^1(\overline{\Omega})$ é um e.B.o. Seu cone positivo P tem interior não-vazio, dado por:

$$\text{int}(P) = \left\{ u \in P : u > 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega \right\}.$$

Este exemplo será bastante usado nesta tese.

(iii) O espaço $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, é um e.B.o com cone positivo dado por:

$$P = \{f \in L^q(\Omega) : f(x) \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega\}.$$

Este cone tem interior vazio quando $1 \leq q < \infty$ e não-vazio quando $q = \infty$. Os espaços de Sobolev, $W^{m,q}(\Omega)$, com $m \geq 1$, constituem um e.B.o com respeito à ordem natural induzida por $L^q(\Omega)$. Em geral, seu cone positivo tem interior vazio. No caso em que $N < mq$, tal cone tem interior não-vazio.

1.3 Autovalor Principal e Propriedades

Nesta seção, falaremos sobre a existência de um autovalor principal para o operador \mathcal{L} e daremos as suas principais propriedades. Para tanto, consideremos o problema de autovalor

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

em $W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$. Temos o seguinte resultado:

Teorema 1.13. *Existe pelo menos um autovalor real de (1.3), denotado por $\lambda_1^\Omega(\mathcal{L})$ e chamado de autovalor principal de \mathcal{L} em Ω . Este autovalor é simples e possui uma única autofunção, a menos de multiplicação por constantes, a qual pode ser tomada positiva e, neste caso, chamada de autofunção principal associada a \mathcal{L} em Ω . Além disso, a autofunção principal é estritamente positiva e $\lambda_1^\Omega(\mathcal{L})$ é o único autovalor de (1.3) possuindo uma autofunção positiva. Mais ainda, qualquer outro autovalor λ de (1.3) satisfaz $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_1^\Omega(\mathcal{L})$.*

Quando \mathcal{L} é auto-adjunto e $c \geq 0$, a existência de um primeiro autovalor positivo de \mathcal{L} satisfazendo as condições do Teorema 1.13 segue basicamente da teoria espectral de operadores compactos e auto-adjunto (ver [13]), para a demonstração de tal fato indicamos os livros [32] e [41]. No caso geral, a demonstração segue como consequência do Teorema de Krein-Rutman, indicamos as referências [28], [54] e [58] para mais detalhes.

Observação 1.14. *Quando estiver claro quem é Ω , denotaremos $\lambda_1^\Omega(\mathcal{L})$ apenas por $\lambda_1(\mathcal{L})$.*

Agora daremos as principais propriedades de $\lambda_1^\Omega(\mathcal{L})$, as quais serão bastante utilizadas ao logo desta tese.

Proposição 1.15. (i) *Sejam $V_1, V_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que $V_1 \leq V_2$. Então,*

$$\lambda_1(\mathcal{L} + V_1) \leq \lambda_1(\mathcal{L} + V_2).$$

Além disso, se $V_1 \neq V_2$ em um conjunto de medida positiva, então a desigualdade é estrita.

(ii) *Se $V_n \in L^\infty(\Omega)$, $n \geq 1$, é uma sequência de potenciais tais que $V_n \rightarrow V$ em $L^\infty(\Omega)$, então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1(\mathcal{L} + V_n) = \lambda_1(\mathcal{L} + V).$$

(iii) *Se Ω_1 é um subdomínio de Ω suficientemente regular, então*

$$\lambda_1^{\Omega_1}(\mathcal{L}) > \lambda_1^\Omega(\mathcal{L}).$$

Essas propriedades são bem conhecidas para o caso auto-adjunto e resultam facilmente da caracterização variacional do primeiro autovalor de \mathcal{L} , ver [41], por exemplo. Para o caso não auto-adjunto, indicamos novamente as referências [28], [54] e [58]. Para resultados similares com menos regularidade sobre os coeficientes de \mathcal{L} e o domínio Ω , indicamos o artigo [10].

A positividade de $\lambda_1(\mathcal{L})$ está fortemente relacionado com o Princípio do Máximo Forte, como veremos a seguir. Mas antes, precisamos das seguintes definições:

Definição 1.16. (i) Diremos que uma função $\bar{u} \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, é uma super solução estrita de \mathcal{L} se $\bar{u} \geq 0$ em Ω e satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{L}\bar{u} \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com alguma desigualdade estrita.

(ii) Diremos que \mathcal{L} satisfaz o Princípio do Máximo Forte (PMF) se toda função $u \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, que verifica $u \neq 0$ e

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

também verifica $u > 0$ em Ω e

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0, \text{ para todo } x_0 \in \partial\Omega \text{ tal que } u(x_0) = 0.$$

O seguinte resultado nos mostra a relação entre a positividade do autovalor principal de \mathcal{L} e a propriedade de \mathcal{L} satisfazer o (PMF), sua demonstração pode ser encontrada em [58].

Lema 1.17. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\lambda_1(\mathcal{L}) > 0$.

(ii) \mathcal{L} possui uma super solução estrita positiva.

(iii) \mathcal{L} satisfaz o Princípio do Máximo Forte.

Observação 1.18. Além das propriedades enunciadas acima, $\lambda_1(\mathcal{L})$ satisfaz também a importante propriedade de dependência contínua com respeito ao domínio Ω . Isto significa que a aplicação $\Omega \mapsto \lambda_1^\Omega(\mathcal{L})$ é contínua. Essa propriedade envolve conceitos que deixaremos para abordar no Capítulo 2. Indicamos o artigo [58] para este caso local.

1.4 Teoria do Índice de Ponto Fixo

Uma das principais ferramentas da Análise Funcional Não-Linear é o grau de Leray-Schauder para aplicações compactas definidas no fecho de subconjuntos abertos em espaços de Banach (ver [49]). Contudo, quando buscamos solução positiva para alguma equação específica, é natural definirmos aplicações compactas sobre abertos (relativos) do cone positivo de algum e.B.o. Neste caso, se o cone positivo não possuir pontos interiores, o grau de Leray-Schauder não é aplicável imediatamente. Porém, devido ao fato do cone positivo ser um retrato de espaços de Banach (ver [2]), é possível definir um índice de ponto fixo para aplicações compactas definidas no cone positivo. Nesta seção abordaremos as principais propriedades desta teoria, que serão usadas nessa tese. Para mais detalhes, indicamos o artigo [2].

Começemos com o resultado que garante a existência do índice de ponto fixo para aplicações compactas. A demonstração desse resultado decorre basicamente das propriedades do grau de Leray-Schauder e pode ser encontrada em [2].

Teorema 1.19. *Seja X um retrato de algum espaço de Banach E . Para cada aberto U de X e cada operador compacto $f : \bar{U} \rightarrow X$ que não tenha ponto fixo sobre ∂U , existe um inteiro $i_X(f, U)$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) (Normalização) *Se $f : \bar{U} \rightarrow U$ é constante, então $i_X(f, U) = 1$.*

(ii) (Aditividade) *Para cada par de abertos disjuntos $U_1, U_2 \subset U$ tais que f não possui ponto fixo sobre $\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$,*

$$i_X(f, U) = i_X(f, U_1) + i_X(f, U_2),$$

onde $i_X(f, U_k) := i_X(f|_{\bar{U}_k}, U_k)$, $k = 1, 2$.

(iii) (Invariância por Homotopia) *Para cada intervalo compacto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e cada aplicação compacta $h : \Lambda \times \bar{U} \rightarrow X$ tal que $h(\lambda, x) \neq x$ para todo $(\lambda, x) \in \Lambda \times \partial U$,*

$$i_X(h(\lambda, \cdot), U)$$

está bem definido e não depende de $\lambda \in \Lambda$.

(iv) (*Permanência*) Se Y é um retrato de X e $f(\bar{U}) \subset Y$, então

$$i_X(f, U) = i_Y(f, U \cap Y),$$

onde $i_Y(f, U \cap Y) := i_Y(f|_{\overline{U \cap Y}}, U \cap Y)$.

Além disso, a família

$$\{i_X(f, U) : X \text{ retrato de } E, U \text{ aberto em } X \text{ e } f : \bar{U} \rightarrow X \text{ compacta sem ponto fixo sobre } \partial U\}$$

é determinada de maneira única pelas propriedades (i) – (iv), e $i_X(f, U)$ é chamado índice de ponto fixo de f (sobre U com respeito a X).

Como consequência das propriedades acima, temos imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 1.20. *Nas condições do Teorema 1.19, o índice de ponto fixo satisfaz ainda as seguintes propriedades:*

(v) (*Excisão*) Para cada aberto $V \subset U$ tal que f não possui ponto fixo em $\bar{U} \setminus V$,

$$i_X(f, U) = i_X(f, V).$$

(vi) (*Existência de Solução*) Se $i_X(f, U) \neq 0$, então f possui pelo menos um ponto fixo em U .

Observação 1.21. *Ainda sob as condições do Teorema 1.19, suponha que U é um conjunto aberto de X também aberto em E (ou seja, $\text{int}(X) \neq \emptyset$), suponha ainda que $x_0 \in U$ seja um ponto fixo isolado de f . Então, existe um número real positivo ρ_0 tal que $x_0 + \rho\bar{B} \subset U$, para todo $\rho \in [0, \rho_0]$, onde B denota a bola aberta unitária de E . Além disso, podemos supor, sem perda de generalidade, que x_0 é o único ponto fixo de f em $x_0 + \rho B$. Assim, pela propriedade de excisão, fica bem definido o inteiro*

$$i_X(f, x_0) := i_X(f, x_0 + \rho B)$$

chamado índice local de f em x_0 , o qual não depende de $\rho \in [0, \rho_0]$. Gostaríamos de observar ainda que, neste caso, $i_X(f, x_0)$ coincide com o conhecido índice local definido a partir da Teoria do Grau de Leray-Schauder (ver [46]).

Como consequência da Observação 1.21 temos a seguinte propriedade que envolve a derivada da aplicação compacta f (quando esta existe). Para a demonstração, ver [2].

Lema 1.22. *Seja X um e.B.o com cone positivo P_X e denote por \overline{P}_ρ o conjunto $\rho B \cap P_X$. Seja ainda $f : \overline{P}_\rho \rightarrow P_X$ uma aplicação compacta tal que $f(0) = 0$. Suponha que f possui derivada à direita $f'_+(0)$ em zero tal que 1 não é um autovalor de $f'_+(0)$ possuindo uma autofunção positiva associada. Então, existe uma constante $\sigma_0 \in (0, \rho]$ tal que para qualquer $\sigma \in (0, \sigma_0]$,*

(i) $i_X(f, P_\sigma) = 1$ se $f'_+(0)$ não possui autofunção positiva para um autovalor maior que 1;

(ii) $i_X(f, P_\sigma) = 0$ se $f'_+(0)$ possui uma autofunção positiva para um autovetor maior que 1.

Para o próximo resultado, precisamos fixar algumas notações, as quais também serão usadas no Capítulo 4. Embora o próximo resultado seja válido para e.B.o mais gerais, vamos considerar $X = C_0^1(\overline{\Omega})$ e denotaremos o seu cone positivo por P_X (ver Exemplo (ii) na Observação 1.12). Façamos

$$E = X \times X \quad \text{e} \quad W = P_X \times P_X$$

e consideremos os conjuntos

$$W_y = \{x \in E : y + tx \in W, \text{ para algum } t > 0\} \quad \text{e} \quad S_y = \{x \in \overline{W}_y : -x \in \overline{W}_y\}.$$

Seja M_y o complementar de S_y em E e consideremos $P_y : E \rightarrow M_y$ a projeção contínua sobre M_y . Por fim, seja $H : [0, 1] \times E \rightarrow E$ uma homotopia. Com essas considerações podemos enunciar o seguinte resultado que pode ser encontrado em [22]:

Lema 1.23. (i) *Se $I - D_x H(1, y)$ é um operador invertível sobre E e o raio espectral de $P_y D_x H(1, y)|_{M_y}$, denotado por $\text{Spr}(P_y D_x H(1, y)|_{M_y})$, é maior que 1, então*

$$i_W(H(1, \cdot), y) = 0.$$

(ii) *Se $I - D_x H(1, y)$ é um operador invertível sobre E e $\text{Spr}(P_y D_x H(1, y)|_{M_y}) < 1$, então $i_W(H(1, \cdot), y) = (-1)^\chi$, onde χ é a soma das multiplicidades de todos os autovalores de $D_x H(1, y)$ maiores que 1.*

(iii) *Se $I - D_x H(1, y)$ é um operador invertível sobre W_y ao invés de E e existe algum $w \in W_y$ tal que a equação $(I - D_x H(1, y))x = w$ não possui solução $x \in W_y$, então*

$$i_W(H(1, \cdot), y) = 0.$$

1.5 Resultados de Bifurcação

Nesta seção, faremos uma revisão sobre os principais resultados de bifurcação que usaremos ao longo da tese. O método de bifurcação é uma poderosa ferramenta de Análise Funcional Não-Linear usada no estudo de equações do tipo

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0, \quad (1.4)$$

onde $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E \rightarrow F$, com E e F espaços de Banach, satisfaz

$$(H1) \quad \mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R} \times E; F);$$

$$(H2) \quad \mathcal{F}(\lambda, 0) = 0.$$

Note que por (H2), $u = 0$ é solução de (1.4), para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, é natural buscar pontos do eixo $\mathbb{R} \times \{0\}$ de onde parta uma nova família de soluções não-triviais de (1.4). Estes são os chamados pontos de bifurcação.

Definição 1.24. Dizemos que λ_0 é um ponto de bifurcação para \mathcal{F} desde a solução trivial quando existe uma sequência $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times E$, com $u_n \neq 0$ e $\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$, tais que $(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda_0, 0)$.

Observamos que uma condição necessária, mas não suficiente, para que $(\lambda_0, 0)$ seja um ponto de bifurcação é que $D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)$ não seja invertível (ver [4]). Abaixo enunciaremos o famoso Teorema de Crandall-Rabinowitz [19], o qual nos proporciona condições suficientes para que $(\lambda_0, 0)$ seja um ponto de bifurcação e também nos diz sobre o comportamento local das soluções não-triviais geradas.

Teorema 1.25 (Crandall-Rabinowitz). *Suponha que (H1) e (H2) sejam satisfeitas e que*

$$(i) \quad \text{Ker}(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)) = \text{Span}\{U_0\};$$

$$(ii) \quad \text{cod}(R(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0))) = 1;$$

$$(iii) \quad D_\lambda D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)U_0 \notin R(D_u \mathcal{F}(\lambda_0, 0)),$$

onde $\text{Ker}(L)$ e $R(L)$ denotam o núcleo e a imagem do operador L , $\text{Span}\{U_0\}$ denota o subespaço gerado por X em E e $\text{cod}(G)$ denota a dimensão do espaço quociente F/G , para cada $G \subset F$.

Seja Z o complemento topológico de $\text{Span}\{U_0\}$ em E , ou seja, $E = \text{Span}\{U_0\} \oplus Z$. Então, λ_0 é um ponto de bifurcação para \mathcal{F} e o conjunto de soluções não-triviais de (1.4) em uma vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ é uma única curva cartesiana de classe C^1 com representação paramétrica sobre Z , isto é, existem $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ e aplicações de classe C^1

$$\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad s \longmapsto \lambda(s) \quad \text{e} \quad \psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow Z; \quad s \longmapsto \psi(s),$$

com $\lambda(0) = \lambda_0$, $\psi(0) = 0$ e tais que

(a) (Existência de soluções não-triviais) A família $\lambda = \lambda(s)$, $u = s(U_0 + \psi(s))$ constituem uma curva de soluções (não-triviais se $s \neq 0$) da equação (1.4) que bifurcam desde $(\lambda_0, 0)$.

(b) (Unicidade) Se $(\lambda, u) \in B_\rho((\lambda_0, 0))$ é qualquer solução não-trivial de (1.4), então existe $0 < |s| < \varepsilon$ tal que

$$(\lambda, u) = (\lambda(s), s(U_0 + \psi(s))).$$

Além disso, se $\mathcal{F} \in C^k(\mathbb{R} \times E; F)$ então $\lambda, u \in C^{k-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Agora daremos resultados de bifurcação com caráter global. Para isso, suponhamos que $E = F$ e o operador \mathcal{F} possa ser escrito da forma

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = u - T_\lambda u, \tag{1.5}$$

com

$$T_\lambda : E \longrightarrow E, \quad T_\lambda(u) = \lambda Lu + h(\lambda, u), \tag{1.6}$$

verificando as seguinte hipóteses:

(H3) $L : E \longrightarrow E$ é linear e compacto;

(H4) $h : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ é compacto;

(H5) $h(\lambda, u) = o(\|u\|_E)$ em $u = 0$ uniformemente sobre intervalos limitados de \mathbb{R} , ou seja,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{h(\lambda, u)}{\|u\|_E} = 0$$

uniformemente sobre intervalos limitados de \mathbb{R} .

Observação 1.26. *Com as hipóteses (H3) – (H5) é possível encontrar condições suficientes para existência de pontos de bifurcação para \mathcal{F} desde a solução trivial, sem exigir condições de diferenciabilidade sobre \mathcal{F} . De fato, observemos primeiro que uma condição necessária, mas não suficiente (veja [57]), para que $\lambda_0 \neq 0$ seja um ponto de bifurcação é que $1/\lambda_0$ seja um autovalor de L . Em [46] mostra-se que, sob as hipóteses (H3) – (H5), se $1/\lambda_0$ for um autovalor de L com multiplicidade ímpar, então ele é um ponto de bifurcação. Dessa forma, o estudos dos pontos de bifurcação passa previamente pelo estudo do espectro do operador L .*

Abaixo enunciamos o resultado devido a Rabinowitz [68] que diz respeito ao comportamento global da curva de soluções não-triviais de (1.4) que bifurca desde $(\lambda_0, 0)$.

Teorema 1.27 (Rabinowitz). *Suponhamos que (H3)–(H5) sejam satisfeitas e seja $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $1/\lambda_0$ é um autovalor de L com multiplicidade ímpar. Então, desde $(\lambda_0, 0)$ bifurca uma componente conexa maximal, que denotaremos por Σ , do fecho do conjunto das soluções não-triviais de (1.4) que ou bem*

- (i) Σ é não limitado; ou bem
- (ii) Σ alcança $u = 0$ em outro ponto $(\mu, 0) \neq (\lambda_0, 0)$, sendo $1/\mu$ outro autovalor de L .

Observação 1.28. (i) *O conjunto Σ também é frequentemente chamado de contínuo.*

(ii) *O termo maximal significa que Σ não é um subconjunto próprio de nenhum outro fechado e conexo contido no conjunto das soluções não-triviais de (1.4).*

(iii) *Em verdade, na demonstração do Teorema 1.27 não usa explicitamente a forma (1.6) de T_λ mas sim o seu caráter compacto para que esteja bem definido o grau de Leray-Schauder. Por outro lado, não é necessário que $1/\lambda_0$ seja um autovalor de L com multiplicidade ímpar, é suficiente que $i(I - T_\lambda, 0)$ mude quando λ cruza λ_0 , como veremos no seguinte corolário (para mais detalhes veja [68]).*

Corolário 1.29. *Suponhamos que (H3) – (H5) sejam satisfeitas e seja $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $i(I - T_\lambda, 0)$ muda quando λ cruza λ_0 . Então, desde $(\lambda_0, 0)$ bifurca um contínuo, Σ , de soluções não-triviais (1.4) que ou bem satisfaz o item (i) do Teorema 1.27 ou bem satisfaz o item (ii).*

Por fim, vamos fazer uma revisão da teoria de bifurcação para sistemas de equações elípticas, também conhecida como bifurcação bi-paramétrica. Para isso, seja $X = C_0^1(\bar{\Omega})$ e P_X o seu cone positivo. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = u(\lambda + f(x, u) + F(x, u, v)v) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 v = v(\mu + g(x, v) + G(x, u, v)u) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde \mathcal{L}_k , $k = 1, 2$, são da forma (1.1), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e

(S1) $f(x, w)$, $g(x, w)$ são Hölder contínuas em x e C^2 em w , com $f(x, 0) = g(x, 0) = 0$.

(S2) $F(x, u, v)$, $G(x, u, v)$ são Hölder contínuas em x e C^2 em (u, v) .

Observamos que (1.7) possui três tipos de soluções em $X \times X$ com alguma de suas componentes não-negativa:

(i) *a trivial*: $(0, 0)$;

(ii) *as semi-triviais*: soluções da forma $(u, 0)$ e $(0, v)$ com $u, v \in X$ positivas em Ω ;

(iii) *os estados de coexistência*: soluções da forma (u, v) com $u, v \in X$ positivas em Ω .

Note que as soluções semi-triviais de (1.7) da forma $(u, 0)$ são soluções positivas do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = u(\lambda + f(x, u)) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Analogamente, soluções semi-triviais de (1.7) da forma $(0, v)$ são soluções positivas do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 v = v(\mu + g(x, v)) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

Assim, para encontrar as soluções semi-triviais de (1.7) precisamos fazer um estudo das duas equações anteriores. Quanto aos estados de coexistência de (1.7) temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [55].

Teorema 1.30. *Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o problema (1.8) possui uma solução $\theta_\lambda \in \text{int}(P_X)$ positiva e não-degenerada. Seja*

$$\mu_\lambda := \lambda_1(\mathcal{L}_2 - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda).$$

Então desde o ponto $(\mu, u, v) = (\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$ bifurca um contínuo $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times \text{int}(P_X) \times \text{int}(P_X)$ de estados de coexistência de (1.7) tal que ou bem

(i) \mathcal{C}^+ *é ilimitado em $\mathbb{R} \times C_0^1(\bar{\Omega}) \times C_0^1(\bar{\Omega})$; ou*

(ii) *existe um $\mu_\infty \in \mathbb{R}$ e uma solução θ_{μ_∞} de (1.9) para $\mu = \mu_\infty$ tal que*

$$\lambda = \lambda_1(\mathcal{L}_1 - F(x, 0, \theta_{\mu_\infty})\theta_{\mu_\infty})$$

e $(\mu_\infty, 0, \theta_{\mu_\infty}) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$, onde $\text{cl}(\mathcal{C}^+)$ denota o fecho do conjunto \mathcal{C}^+ ; ou

(iii) *existe uma solução positiva θ_λ^1 de (1.8), com $\theta_\lambda^1 \neq \theta_\lambda$, tal que*

$$(\lambda_1(\mathcal{L}_2 - G(x, \theta_\lambda^1, 0)\theta_\lambda^1), \theta_\lambda^1, 0) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+); \text{ ou}$$

(iv) $\lambda = \lambda_1(\mathcal{L}_1)$ *e $(\lambda_1(\mathcal{L}_2), 0, 0) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$.*

Observação 1.31. (a) *Uma solução θ_λ de (1.8) é dita não-degenerada se a linearizada de (1.8) em θ_λ , ou seja,*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 w = w(\lambda + f(x, \theta_\lambda) + D_u f(x, \theta_\lambda)\theta_\lambda) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.10)$$

possui somente a solução trivial $w = 0$. Observe que uma condição suficiente para que isso ocorra é que

$$\lambda_1(\mathcal{L}_1 - \lambda - f(x, \theta_\lambda) - D_u f(x, \theta_\lambda)\theta_\lambda) > 0.$$

(b) *Se (1.8) tem unicidade de solução positiva, então a alternativa (iii) do Teorema 1.30 não pode ocorrer. Similarmente, se $\lambda \neq \lambda_1(\mathcal{L}_1)$ a alternativa (iv) também não ocorre.*

(c) *Resultados similares ao Teorema 1.30 para espaços distintos de $C_0^1(\bar{\Omega})$ podem ser encontrados em [55] e [57].*

Capítulo 2

Problemas de Autovalor e Propriedades

Como já mencionamos na Introdução, neste capítulo vamos estudar o seguinte problema de autovalor não auto-adjunto:

$$\begin{cases} -d\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

com $m \in L^{\infty}(\Omega)$ e K é uma função não-negativa e não-identicamente nula. Precisamente, iremos impor condições sobre K para que (2.1) possua um autovalor principal. Além disso, iremos demonstrar as principais propriedades deste autovalor. Essas propriedades serão usadas para estudarmos o seguinte problema também de autovalor e não auto-adjunto:

$$\begin{cases} -d\Delta u + m(x)u = \sigma \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

O estudo de (2.2) será essencial para encontrar existência de solução positiva para os problemas não-lineares associados a processos Birth-Jump, os quais abordamos na Introdução.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na Seção 2.1, iremos motivar o estudo de (2.1) e também explicaremos a relação entre os dois problemas de autovalor acima. Na Seção 2.2, utilizaremos o Teorema de Krein-Rutman para mostrar existência de um autovalor principal para (2.1), supondo que $K \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega)$. Na Seção 2.3 iremos mostrar a relação entre este autovalor e o Princípio do Máximo Forte. Na Seção 2.4 mostraremos as propriedades do autovalor principal de (2.1). Na Seção 2.5, estudaremos a existência de um autovalor principal para (2.2).

2.1 Motivação

Conforme já foi dito, o estudo do sistema (0.1) necessita primeiro saber o que acontece com problema não-linear

$$\begin{cases} -d\Delta w + \beta w = \sigma F(w) \int_{\Omega} K(x, y)w(y)dy & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

Sendo F uma função decrescente, se linearizarmos (2.3) em $u = 0$, obtemos:

$$\begin{cases} -d\Delta \xi + \beta \xi = \sigma F(0) \int_{\Omega} K(x, y)\xi(y)dy & \text{em } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Uma vez que pretendemos utilizar o Método de Sub-Super Solução para resolver (2.3), funções proporcionais às autofunções positivas associadas a (2.4) são candidatas a sub solução de (2.3). Este motivo nos levou ao estudo do problema de autovalor (2.2).

A grande dificuldade do problema (2.2) é que a presença do termo não-local torna este problema não auto-adjunto, quando a função K não é simétrica. Dessa forma, iremos primeiro estudar o problema:

$$\begin{cases} -d\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

que também é não auto-adjunto. Porém, se somarmos Mu em ambos os membros de (2.5), podemos associar a este problema um operador linear, compacto e fortemente positivo, conforme veremos na próxima seção. Isto nos permitirá utilizar o Teorema de Krein-Rutman e mostrar a existência de um autovalor principal para (2.5), o qual denotaremos por $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$.

Por fim, observe que encontrar um autovalor σ para (2.2) é equivalente a obter

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) = 0.$$

Portanto, a existência de um autovalor principal para (2.2) equivale ao estudo da aplicação $\sigma \mapsto \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K)$. Por esse motivo estudaremos primeiro o problema (2.5) e as propriedades do autovalor principal $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$.

2.2 Problema de Autovalor I

Nesta seção, iremos estudar a existência de um autovalor principal para o problema

$$\begin{cases} -d\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $d > 0$, $m \in L^{\infty}(\Omega)$ e $K \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega; \mathbb{R})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula. Para tanto, seguiremos as ideias presentes em [58] usando o Teorema de Krein-Rutman para um operador adequado. Nesse sentido, precisamos analisar o que acontece com a equação linear associada. Em outras palavras, vamos estudar primeiro o problema:

$$\begin{cases} -d\Delta u + (m(x) + M)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $M \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\Omega)$. O motivo de ter aparecido Mu no lado esquerda de (2.7) ficará claro mais adiante. Com respeito ao problema (2.7), temos o seguinte resultado:

Lema 2.1. *Existe $M_0 > 0$ tal que, para todo $M \geq M_0$ e $f \in L^2(\Omega)$, (2.7) possui uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\| \leq C\|f\|_2. \quad (2.8)$$

Prova. Definamos a forma bilinear $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\begin{aligned} B(u, v) &= d \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} (m(x) + M)u(x)v(x) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \right) v(x) dx. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$|B(u, v)| \leq d\|u\|\|v\| + (|m|_{\infty} + M)|u|_2|v|_2 + |K|_{\infty}|u|_1|v|_1 < +\infty, \quad (2.9)$$

a função B está bem definida. Além disso, B tem as seguintes propriedades:

(i) B é contínua, para cada $M > 0$.

De fato, pelas imersões contínuas dos espaços de Sobolev, a partir de (2.9) obtemos

$$|B(u, v)| \leq (d + (|m|_\infty + M)C_1^2 + |K|_\infty C_2^2) \|u\| \|v\|,$$

onde C_1, C_2 são constantes positivas. Logo, B é contínua para cada $M > 0$.

(ii) Existe algum $M_0 > 0$, suficientemente grande, tal que B é coerciva para cada $M \geq M_0$.

De fato, observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \left(\int_\Omega K(x, y) u(y) dy \right) u(x) dx \right| &\leq |K|_\infty \int_\Omega \left(\int_\Omega |u(y)| dy \right) |u(x)| dx \\ &\leq |K|_\infty |u|_1^2. \end{aligned}$$

Assim, da imersão contínua $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} B(u, u) &\geq d \|u\|^2 + (-|m|_\infty + M) |u|_2^2 - |K|_\infty |u|_1^2 \\ &\geq d \|u\|^2 + (-|m|_\infty + M - C_3 |K|_\infty) |u|_2^2, \end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante positiva. Portanto, para M_0 suficientemente grande,

$$-|m|_\infty + M_0 - C_3 |K|_\infty > 0, \quad (2.10)$$

e conseqüentemente,

$$B(u, u) \geq d \|u\|^2.$$

Logo, B é coerciva para cada $M \geq M_0$.

As propriedades (i) e (ii) acima nos dizem que B é uma forma bilinear, contínua e coerciva, para cada $M \geq M_0$. Por outro lado, fixado $f \in L^2(\Omega)$, o operador $g_f : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$g_f(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx$$

está bem definido. Além disso, g_f é um funcional linear e contínuo. Pelo Teorema de Lax-Milgram, para cada $M \geq M_0$, existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u, v) = g_f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja, u é solução fraca de (2.7). Para finalizar a demonstração, note que $M \geq M_0$ implica

$$d\|u\|^2 \leq B(u, u) = g(u) \leq C_1|f|_2\|u\|.$$

Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\| \leq C|f|_2.$$

□

Observação 2.2. Uma consequência do Lema 2.1 é que, dado $M \geq M_0$, fica bem definido o operador $T_M : C_0^1(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0^1(\bar{\Omega})$, no qual, para cada $f \in C_0^1(\bar{\Omega})$, $T_M(f)$ é a única solução de (2.7). De fato, dada $f \in C_0^1(\bar{\Omega})$, temos que $f \in L^2(\Omega)$ e pelo Lema 2.1, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u = T_M(f)$. Devemos então mostrar que $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$. Para isso, note que a função $\hat{K} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\hat{K}(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy,$$

pertence a $L^\infty(\Omega)$, pois

$$|\hat{K}(x)| \leq |K|_\infty|u|_1, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

e conseqüentemente, $f + \hat{K} \in L^\infty(\Omega)$. Como

$$\begin{cases} -d\Delta u + (m(x) + M)u = f + \hat{K} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então, $u \in W_0^{2,q}(\Omega)$, para todo $q \geq 1$. Pelas imersões contínuas dos espaços de Sobolev, obtemos $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$. Portanto, T_M está bem definido. Além disso, o operador T_M é compacto. Com efeito, seja $f_n \in C_0^1(\bar{\Omega})$ e $u_n = T_M(f_n)$, pelas imersões compactas dos espaços de Sobolev, é suficiente mostrar que $u_n \in W^{2,p_0}(\Omega)$, para algum $p_0 \in (1, +\infty)$ tal que $2p_0 > N$. Pela regularidade elíptica, $u_n \in W^{2,2}(\Omega)$. Assim, é suficiente mostrar que $u_n \in L^{p_0}(\Omega)$. Isto decorre imediatamente por um argumento do tipo boot-strapping. Portanto, T_M também é compacto. Note ainda que, sendo T_M linear, então sua compacidade implica que ele também é contínuo. Vamos aplicar o Teorema de Krein-Rutman para o operador T_M . Para isso, basta mostrarmos que ele é fortemente positivo. Faremos isso no próximo resultado.

Proposição 2.3. *Para cada $M \geq M_0$, o operador T_M definido acima é fortemente positivo.*

Prova. Denotemos por P o cone positivo de $C_0^1(\bar{\Omega})$. Devemos mostrar que

$$T_M(P \setminus \{0\}) \subset \text{int}(P).$$

Seja $f \in P \setminus \{0\}$. Note que $u = T_M(f) \neq 0$. Considerando

$$u^- = \min\{u, 0\} \quad \text{e} \quad u^+ = \max\{u, 0\},$$

temos que $u^-, u^+ \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando (2.7) por u^- , obtemos

$$d \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 + \int_{\Omega} (m(x) + M)(u^-)^2 - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \right) u^-(x)dx \leq 0. \quad (2.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \right) u^-(x)dx &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y)(u^+ + u^-)(y)dy \right) u^-(x)dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y)u^-(y)dy \right) u^-(x)dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \right) u^-(x)dx \leq C_3 |K|_{\infty} |u^-|_2^2.$$

Combinando a expressão acima com a equação (2.11), obtemos

$$d \|u^-\|^2 + (m_L + M - C_3 |K|_{\infty}) |u^-|_2^2 \leq \int_{\Omega} f u^- \leq 0.$$

De (2.10), $M \geq M_0$ implica que $u^- = 0$, ou seja, $u \geq 0$. Uma vez que $M_0 > 0$ é suficientemente grande, podemos supor, sem perda de generalidade, que os Teoremas 1.5 e 1.6 são válidos para o operador $(-d\Delta + m(x) + M)$. Como $u \neq 0$ e $f + \hat{K} \in L^{\infty}(\Omega)$, estes princípios de máximo implicam que

$$T_M(f) = u \in \text{int}(P),$$

provando o resultado. □

Agora podemos aplicar o Teorema de Krein-Rutman pro operador T_M e provar a existência de um autovalor principal para (2.6). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4. *Assuma que $m \in L^\infty(\Omega)$ e $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula. Então, existe um autovalor principal para (2.6), que denotaremos por*

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); K),$$

o qual é real, simples, tem uma autofunção positiva associada e ele é o único autovalor de (2.6) possuindo uma autofunção que não muda de sinal. Além disso, qualquer outro autovalor λ de (2.6) satisfaz

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) < \operatorname{Re}(\lambda).$$

Prova. Pela Observação 2.2 e pela Proposição 2.3, para M é suficientemente grande, podemos utilizar o Teorema de Krein-Rutman e garantir que o operador T_M , definido na Observação 2.2, tem um autovalor principal $r(T_M)$ satisfazendo os itens do Teorema 1.10. Por outro lado, se μ é um autovalor de T_M , então

$$\lambda = \frac{1}{\mu} - M$$

é um autovalor de (2.6). Portanto,

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) = \frac{1}{r(T_M)} - M$$

satisfaz as condições do teorema.

□

O autovalor principal do Teorema 2.4 será de fundamental importância para os estudos que desenvolveremos nesta tese. Nas próximas seções, iremos estudar as suas propriedades.

2.3 Autovalor Principal e o Princípio do Máximo Forte

Nesta seção, iremos mostrar que a positividade do autovalor principal $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$ está relacionada com o fato de (2.6) verificar o (PMF) e possuir uma super solução estrita. Para isso, precisamos primeiro das seguintes definições:

Definição 2.5. Uma função $\bar{u} \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, é chamada super solução estrita para (2.6) se $\bar{u} \geq 0$ em Ω e satisfaz

$$-d\Delta\bar{u} + m(x)\bar{u} - \int_{\Omega} K(x,y)\bar{u}(y)dy \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \quad \bar{u} \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

com alguma desigualdade estrita.

Definição 2.6. Dizemos que (2.6) satisfaz o Princípio do Máximo Forte (PMF) quando toda função $u \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, que verifica $u \neq 0$ e

$$\begin{cases} -d\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

também verifica

$$u > 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0, \quad \text{para todo } x_0 \in \partial\Omega \quad \text{tal que } u(x_0) = 0.$$

Com essas definições podemos mostrar o seguinte resultado, o qual é similar ao Lema 1.17 para o problema não-local (2.6).

Lema 2.7. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Existe uma super solução estrita para (2.6);
- (ii) (2.6) verifica o (PMF);
- (iii) $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) > 0$.

Prova. (i) \Rightarrow (ii) Seja $u \in W^{2,q}(\Omega)$, com $q > N$, verificando $u \neq 0$ e (2.12). Primeiro, vamos mostrar que $u \geq 0$ em Ω . Para isso, seja \bar{u} uma super solução estrita para o problema (2.6) e consideremos

$$\mu = \min \{ \epsilon > 0 : u_{\epsilon} = u + \epsilon\bar{u} \geq 0 \quad \text{em } \Omega \}.$$

Se existisse um $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) < 0$, então teríamos $\mu > 0$. Daí, para $M > 0$ suficientemente grande, obteríamos

$$\begin{cases} -d\Delta u_{\mu} + (m(x) + M)u_{\mu} \geq \int_{\Omega} K(x,y)u_{\mu}(y)dy \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u_{\mu} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com alguma desigualdade estrita. Pelo Princípio do Máximo para o operador $(-d\Delta + m(x) + M)$ (Teorema 1.5 e Teorema 1.6), tem-se que $u_\mu > 0$ em Ω e

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial \eta}(x_0) < 0, \quad \forall x_0 \in \partial\Omega \quad \text{tal que} \quad u_\mu(x_0) = 0.$$

Assim, existiria $\mu_1 < \mu$ tal que $u_{\mu_1} \geq 0$ em Ω , que contradiz o fato de μ ser um mínimo. Então, $u \geq 0$ em Ω . Portanto,

$$\begin{cases} -d\Delta u + (m(x) + M)u \geq \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy + Mu \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com alguma desigualdade estrita. Como $u \neq 0$, aplicando novamente o Princípio do Máximo para o operador $(-d\Delta + (m(x) + M))$, temos que $u > 0$ em Ω e satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0, \quad \text{para todo } x_0 \in \partial\Omega \quad \text{tal que} \quad u(x_0) = 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Suponhamos que $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) \leq 0$ e seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$. Temos que $-\varphi_1 \neq 0$ e

$$\begin{cases} -d\Delta(-\varphi_1) + m(x)(-\varphi_1) - \int_{\Omega} K(x, y)(-\varphi_1(y))dy \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo (PMF), $\varphi_1 < 0$ em Ω , o que é uma contradição. Portanto, $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) > 0$.

(iii) \Rightarrow (i) Se $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) > 0$, então qualquer autofunção $\varphi_1 > 0$ associada a $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$, é uma super solução estrita para (2.6).

□

O Lema 2.7 será muito importante para mostrarmos as propriedades de $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$. A seguir, iremos mostrar a relação entre este autovalor principal e o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para tanto, continuaremos denotando por P o cone positivo de $C_0^1(\bar{\Omega})$. Além disso, vamos considerar o operador L definido, no sentido fraco, por

$$Lu = -d\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy, \quad \forall u \in C_0^1(\bar{\Omega}).$$

Observamos que pelo, Teorema de Krein-Rutman, $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$ é um autovalor simples do operador L^* , adjunto de L , o qual possui uma autofunção positiva associada.

Proposição 2.8. (i) Se $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$, então o problema linear:

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.13)$$

possui uma única solução em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, se $f \in P$, então $u \in P$. Consequentemente, se $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) > 0$ e $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u = 0$ em Ω .

(ii) Se $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) \neq 0$ e $u \in P$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u = 0$ em Ω .

Prova. (i) Considere $M > 0$ e defina o operador $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ por $T(f) = u$, onde $u \in H_0^1(\Omega)$ e

$$-\Delta u + (m(x) + M)u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = f.$$

Pela Observação 2.2, para $M > 0$ suficientemente grande, T é um operador bem definido, linear e compacto. Assim, pelo Teorema da Alternativa de Fredholm, a existência e unicidade de

solução para (2.13) é equivalente a mostrar que o problema homogêneo associado

$$\begin{cases} u - MTu = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.14)$$

admite somente a solução trivial. Como $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) > 0$, o Lema 2.7 implica que (2.14) possui somente a solução trivial. Portanto, (2.13) possui uma única solução. Por fim, se $f \in P$, o Princípio do Máximo implica que $u \in P$.

(ii) Como observamos anteriormente, existe uma autofunção $\varphi_1^* > 0$ de L^* associada ao autovalor $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$. Logo,

$$0 = (\varphi_1^*, Lu) = (L^*\varphi_1^*, u) = \lambda_1(-d\Delta + m(x); K) \int_{\Omega} \varphi_1^* u.$$

Como $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K) \neq 0$ e $\varphi_1^* > 0$, então $u = 0$ em Ω .

□

2.4 Propriedades do Autovalor Principal

Inspirados nas propriedades do autovalor principal para os casos locais (ver [28], [54] e [58]), nesta seção vamos adaptar essas propriedades para $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$.

Proposição 2.9. (i) *Sejam $K_1, K_2 \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ funções não-negativas e não-identicamente nulas. Se $K_1 \leq K_2$ em $\Omega \times \Omega$, então*

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); K_2) \leq \lambda_1(-d\Delta + m(x); K_1).$$

Além disso, se $K_1 \neq K_2$ em um conjunto de medida positiva, a desigualdade é estrita.

(ii) *Sejam $m_1, m_2 \in L^\infty(\Omega)$. Se $m_1 \leq m_2$ em Ω , então*

$$\lambda_1(-d\Delta + m_1(x); K) \leq \lambda_1(-d\Delta + m_2(x); K).$$

Além disso, se $m_1 \neq m_2$ em um conjunto de medida positiva, a desigualdade é estrita.

(iii) Sejam Ω_1, Ω_2 subdomínios regulares de Ω . Se $\Omega_1 \subset \Omega_2$, então

$$\lambda_1^{\Omega_2}(-d\Delta + m(x); K) \leq \lambda_1^{\Omega_1}(-d\Delta + m(x); K).$$

Além disso, se $\Omega_1 \neq \Omega_2$, a desigualdade é estrita. Aqui, $\lambda_1^{\Omega_i}(-d\Delta + m(x); K)$, $i = 1, 2$, denota o autovalor principal do problema (2.6) em Ω_i .

(iv) Sejam $K_n \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ funções não-negativas e não-identicamente nulas. Se $K_n \rightarrow K$, $n \rightarrow +\infty$, em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$, então

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); K_n) \rightarrow \lambda_1(-d\Delta + m(x); K), \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Prova. (i) Se $K_1 = K_2$ em Ω , o resultado segue imediatamente. Para $K_1 \neq K_2$ em Ω , considere $\varphi_1 > 0$ uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K_2)$. Note que

$$-d\Delta\varphi_1 + [m(x) - \lambda_1(-d\Delta + m(x); K_2)]\varphi_1 - \int_{\Omega} K_1\varphi_1 = \int_{\Omega} (K_2 - K_1)\varphi_1 > 0.$$

Assim, φ_1 é uma super solução estrita para o problema

$$\begin{cases} -d\Delta u + [m(x) - \lambda_1(-d\Delta + m(x); K_2)]u - \int_{\Omega} K_1(x, y)u(y)dy = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema 2.7,

$$\lambda_1(-d\Delta + [m(x) - \lambda_1(-d\Delta + m(x); K_2)]; K_1) > 0,$$

de onde (i) segue. Com um argumento análogo obtemos o item (ii).

(iii) Se $\Omega_1 = \Omega_2$, nada temos a fazer. Para $\Omega_1 \neq \Omega_2$, considere $\varphi_1 > 0$ uma autofunção positiva associada a $\lambda_1^{\Omega_2}(-d\Delta + m(x); K)$. Então, φ_1 é uma super solução estrita para o problema

$$\begin{cases} -d\Delta u + [m(x) - \lambda_1^{\Omega_2}(-d\Delta + m(x); K)]u - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = \lambda u & \text{em } \Omega_1, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Pelo Lema 2.7, temos que

$$\lambda_1^{\Omega_2}(-d\Delta + m(x); K) < \lambda_1^{\Omega_1}(-d\Delta + m(x); K).$$

(iv) Neste item, por simplicidade, vamos denotar $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$ somente por $\lambda_1(K)$. Como $K_n \rightarrow K$ em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow K - \varepsilon \leq K_n \leq K + \varepsilon \quad \text{em } \Omega.$$

Assim, fixado ε suficientemente pequeno, $\lambda_1(K - \varepsilon) \leq \lambda_1(K_n) \leq \lambda_1(K + \varepsilon)$. Logo, a sequência $(\lambda_1(K_n))$ é limitada em \mathbb{R} . Seja φ_n a autofunção positiva associada a $\lambda_1(K_n)$ satisfazendo $|\varphi_n|_2 = 1$. Então,

$$d \int_{\Omega} |\nabla \varphi_n|^2 + \int_{\Omega} m(x) \varphi_n^2 - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_n(x, y) \varphi_n(y) dy \right) \varphi_n(x) dx = \lambda_1(K_n) \int_{\Omega} \varphi_n^2.$$

Isto implica que (φ_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Consequentemente, existe $\varphi^* \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\varphi^* > 0$, $|\varphi^*|_2 = 1$ e, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} \lambda_1(K_n) \rightarrow \lambda_1^* & \text{em } \mathbb{R}, \\ \varphi_n \rightarrow \varphi^* & \text{em } H_0^1(\Omega), \\ \varphi_n \rightarrow \varphi^* & \text{em } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.15)$$

Portanto, para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$d \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} m(x) \varphi_n \varphi - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_n(x, y) \varphi_n(y) dy \right) \varphi(x) dx = \lambda_1(K_n) \int_{\Omega} \varphi_n \varphi.$$

Tendo em conta que $K_n \rightarrow K$ em $L^\infty(\Omega \times \Omega)$, de (2.15) obtemos

$$d \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} m(x) \varphi^* \varphi - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y) \varphi^*(y) dy \right) \varphi(x) dx = \lambda_1^* \int_{\Omega} \varphi^* \varphi,$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Assim, φ^* é uma autofunção associada a λ_1^* . Como $\varphi^* > 0$, então $\lambda_1^* = \lambda_1(K)$. Portanto,

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); K_n) = \lambda_1(K_n) \rightarrow \lambda_1(K) = \lambda_1(-d\Delta + m(x); K), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

□

Agora mostraremos que o autovalor principal $\lambda_1(-d\Delta + m(x); K)$ depende continuamente do domínio Ω , em outras palavras, este autovalor é contínuo com respeito ao domínio. Primeiro, vejamos a seguinte definição de convergência entre conjuntos.

Definição 2.10. *Sejam Ω_n , $n \geq 0$, subdomínios regulares de Ω . Dizemos que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega_n = \Omega_0$$

quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) *Existe uma sequência (Ω_n^I) , $n \geq 1$, de subdomínios regulares de Ω , tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_n^I \subset \Omega_{n+1}^I, \quad n \geq 1, \\ \Omega_n^I \subset \Omega_0 \cap \Omega_n, \quad n \geq 1, \\ \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^I = \Omega_0. \end{array} \right.$$

(ii) *Existe uma sequência (Ω_n^E) , $n \geq 1$, de subdomínios regulares de Ω , tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{n+1}^E \subset \Omega_n^E, \quad n \geq 1, \\ \Omega_0 \cup \Omega_n \subset \Omega_n^E, \quad n \geq 1 \\ \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^E = \bar{\Omega}_0. \end{array} \right.$$

Para a proposição seguinte, se $D \subset \Omega$ é um subdomínio regular de Ω , denotaremos por $\lambda_1^D(-d\Delta + m(x); K)$ o autovalor principal do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -d\Delta u + m(x)u - \int_D K(x, y)u(y)dy = \lambda u \quad \text{em } D, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial D. \end{array} \right.$$

Proposição 2.11. *Assuma que $m \in L^\infty(\Omega)$ e $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula. Se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega_n = \Omega_0 \tag{2.16}$$

então,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n}(-d\Delta + m(x); K) = \lambda_1^{\Omega_0}(-d\Delta + m(x); K). \tag{2.17}$$

Além disso, se $\varphi_1^{\Omega_n} > 0$ é a autofunção associada a $\lambda_1^{\Omega_n}(-d\Delta + m(x); K)$ com $\|\varphi_1^{\Omega_n}\|_{H_0^1(\Omega_n)} = 1$, então existe uma autofunção $\varphi_1^{\Omega_0}$ associada a $\lambda_1^{\Omega_0}(-d\Delta + m(x); K)$, com $\|\varphi_1^{\Omega_0}\|_{H_0^1(\Omega_0)} = 1$, satisfazendo a seguinte convergência

$$\varphi_1^{\Omega_n} \longrightarrow \varphi_1^{\Omega_0} \quad \text{em } H_0^1(\Omega_0). \tag{2.18}$$

Prova. Por simplicidade, vamos denotar $\lambda_1^D(-d\Delta + m(x); K)$ apenas por $\lambda_1^D(K)$. Observe que (2.16) implica na existência de duas sequências (Ω_n^I) e (Ω_n^E) de subdomínios regulares de Ω tais que

$$\Omega_n^I \subset \Omega_n \subset \Omega_n^E \quad \text{e} \quad \Omega_n^I \subset \Omega_0 \subset \Omega_n^E,$$

para todo $n \geq 1$. Pela Proposição 2.9, obtemos

$$\begin{cases} \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) \geq \lambda_1^{\Omega_n}(K) \geq \lambda_1^{\Omega_n^E}(K), & n \geq 1, \\ \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) \geq \lambda_1^{\Omega_0}(K) \geq \lambda_1^{\Omega_n^E}(K), & n \geq 1. \end{cases}$$

Assim, é suficiente mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) = \lambda_1^{\Omega_0}(K) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n^E}(K). \quad (2.19)$$

Observe primeiro que os limites acima estão bem definidos, uma vez que a sequência $(\lambda_1^{\Omega_n^I}(K))$ é não-crescente e limitada inferiormente por $\lambda_1^{\Omega_0}(K)$ e a sequência $(\lambda_1^{\Omega_n^E}(K))$ é não-decrescente e limitada superiormente também por $\lambda_1^{\Omega_0}(K)$. Vamos dividir a demonstração de (2.19) em duas partes:

$$(I) \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) = \lambda_1^{\Omega_0}(K) \quad \text{e} \quad (II) \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n^E}(K) = \lambda_1^{\Omega_0}(K).$$

$$(I) \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) = \lambda_1^{\Omega_0}(K).$$

Para cada $n \geq 1$, seja $\varphi_1^{\Omega_n^I} \in C_0^1(\overline{\Omega})$ a autofunção associada a $\lambda_1^{\Omega_n^I}(K)$ tal que $\|\varphi_1^{\Omega_n^I}\|_{H_0^1(\Omega_n^I)} = 1$.

Seja ainda φ_1^n a extensão de $\varphi_1^{\Omega_n^I}$ por zero até Ω_0 . Temos que

$$\varphi_1^n \in H_0^1(\Omega_0) \quad \text{e} \quad \|\varphi_1^n\|_{H_0^1(\Omega_0)} = 1.$$

Assim, existe $\varphi_1^0 \in H_0^1(\Omega_0)$ tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} \varphi_1^n \rightharpoonup \varphi_1^0 & \text{em} & H_0^1(\Omega_0), \\ \varphi_1^n \rightarrow \varphi_1^0 & \text{em} & L^2(\Omega_0), \\ \varphi_1^n(x) \rightarrow \varphi_1^0(x) & \text{q.t.p em} & \Omega_0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Vamos mostrar que, a menos de subsequência, (φ_1^n) é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega_0)$.

Para isso, observe que se $l \leq n$, então $\Omega_l^I \subset \Omega_n^I$. Assim,

$$\begin{aligned}
d \int_{\Omega_0} |\nabla(\varphi_1^n - \varphi_1^l)|^2 &= d \int_{\Omega_0} |\nabla\varphi_1^n|^2 - 2d \int_{\Omega_0} \nabla\varphi_1^{\Omega_n^I} \cdot \nabla\varphi_1^{\Omega_l^I} + d \int_{\Omega_0} |\nabla\varphi_1^l|^2 \\
&= (\lambda_1^{\Omega_l^I}(K) - \lambda_1^{\Omega_n^I}(K)) \int_{\Omega_n^I} \varphi_1^{\Omega_n^I} \varphi_1^{\Omega_l^I} \\
&\quad + \lambda_1^{\Omega_l^I}(K) \int_{\Omega_n^I} \varphi_1^{\Omega_l^I} (\varphi_1^{\Omega_l^I} - \varphi_1^{\Omega_n^I}) \\
&\quad + \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) \int_{\Omega_n^I} \varphi_1^{\Omega_n^I} (\varphi_1^{\Omega_n^I} - \varphi_1^{\Omega_l^I}) \\
&\quad - \int_{\Omega_n^I} m(x) (\varphi_1^{\Omega_n^I} - \varphi_1^{\Omega_l^I})^2 \\
&\quad + \int_{\Omega_n^I} \left(\int_{\Omega_n^I} K(x, y) \varphi_1^{\Omega_n^I}(y) dy \right) (\varphi_1^{\Omega_n^I} - \varphi_1^{\Omega_l^I})(x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega_n^I} \left(\int_{\Omega_n^I} K(x, y) (\varphi_1^{\Omega_l^I} - \varphi_1^{\Omega_n^I})(y) dy \right) \varphi_1^{\Omega_l^I}(x) dx.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$\|\varphi_1^n - \varphi_1^l\|_{H_0^1(\Omega_0)}^2 \leq C_4 |\varphi_1^n - \varphi_1^l|_{L^2(\Omega_0)} + C_5 |\lambda_1^{\Omega_l^I}(K) - \lambda_1^{\Omega_n^I}(K)| + |m|_\infty |\varphi_1^n - \varphi_1^l|_{L^2(\Omega_0)},$$

onde $C_4, C_5 \in \mathbb{R}$ são constantes positivas que não dependem de n e l . Como (φ_1^n) é de Cauchy em $L^2(\Omega_0)$ e $(\lambda_1^{\Omega_n^I}(K))$ é convergente, temos que (φ_1^n) é de Cauchy em $H_0^1(\Omega_0)$. Em particular,

$$\varphi_1^n \rightarrow \varphi_1^0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega_0)$$

e $\|\varphi_1^0\|_{H_0^1(\Omega_0)} = 1$. Assim, se

$$\lambda^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n^I}(K),$$

então φ_1^0 é uma autofunção associada a λ^∞ em Ω_0 . De fato, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega_0})$, existe um n_0 suficientemente grande tal que $\text{supp } \varphi \subset \Omega_n^I$, para todo $n \geq n_0$. Logo, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
d \int_{\Omega_0} \nabla\varphi_1^n \cdot \nabla\varphi &= \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) \int_{\Omega_0} \varphi_1^n \varphi - \int_{\Omega_0} m(x) \varphi_1^n \varphi \\
&\quad + \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_0} K(x, y) \varphi_1^{\Omega_n^I}(y) dy \right) \varphi dx.
\end{aligned}$$

Como o limite φ_1^0 não depende da subsequência de $(\lambda_1^{\Omega_n^I}(K))$ tomada, então

$$d \int_{\Omega_0} \nabla\varphi_1^0 \cdot \nabla\varphi = \lambda^\infty(K) \int_{\Omega_0} \varphi_1^0 \varphi - \int_{\Omega_0} m(x) \varphi_1^0 \varphi + \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_0} K(x, y) \varphi_1^0(y) dy \right) \varphi dx.$$

uma vez que $C_0^\infty(\overline{\Omega}_0)$ é denso em $H_0^1(\Omega_0)$, temos que φ_1^0 é uma autofunção associada a λ^∞ em Ω_0 . Além disso, de (2.20), temos que φ_1^0 não muda de sinal. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_1^{\Omega_n^I}(K) = \lambda^\infty = \lambda_1^{\Omega_0}(K),$$

o que prova (I). O limite (II) segue por um argumento similar ao Teorema 4.2 de [58]. Consequentemente, (2.19) segue por (I) e (II). Finalmente, para a convergência (2.18), basta usar o limite (2.17) e os argumentos do item (I) estendendo a sequência $(\varphi_1^{\Omega_n})$ por zero até Ω_0 e encontrar $\varphi_1^{\Omega_0}$ como feito acima.

□

2.5 Problema de Autovalor II

Nesta seção, vamos usar o estudo feito para o problema (2.6) para verificar em quais condições o seguinte problema (também de autovalor) possui solução:

$$\begin{cases} -d\Delta u + m(x)u = \sigma \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.21)$$

onde $\sigma \geq 0$. Para isso, observe que encontrar um autovalor σ para (2.21) é equivalente a obter

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) = 0.$$

Consequentemente, a nossa questão é: existe $\sigma_1 > 0$ tal que $\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma_1 K) = 0$? Para responder esta questão, consideremos a função

$$\sigma \mapsto \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K).$$

Na próxima proposição mostraremos, como consequência da Proposição 2.9, que esta função é contínua e decrescente. Assim, se $\lambda_1(-d\Delta + m(x)) > 0$ e existe $\sigma_0 > 0$ tal que

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma_0 K) < 0, \quad (2.22)$$

então é evidente a existência de um único $\sigma_1 > 0$ tal que o problema (2.21) possui uma solução para $\sigma = \sigma_1$. Portanto, quando $\lambda_1(-d\Delta + m(x)) > 0$, resolver (2.21) é equivalente a encontrar $\sigma_0 > 0$ que satisfaz (2.22). Daremos condições para que isto aconteça na seguinte proposição.

Proposição 2.12. *Assuma que $m \in L^\infty(\Omega)$ e $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ seja uma função não-negativa e não-identicamente nula. Então:*

(i) *A função $\sigma \mapsto \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K)$ é contínua e decrescente.*

(ii) *Se $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, então existe $\sigma_0 > 0$ satisfazendo (2.22). Além disso,*

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) \rightarrow -\infty, \text{ quando } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Prova. (i) Este item segue imediatamente da Proposição 2.9.

(ii) Inicialmente suponhamos que

$$K(x, y) \geq K_1(x) \cdot K_2(y), \quad (2.23)$$

com $K_1, K_2 \in C(\overline{\Omega})$, $K_1, K_2 \geq 0$ e $K_1, K_2 \neq 0$. Seja $e(x) > 0$ a única solução positiva do seguinte problema linear

$$\begin{cases} -d\Delta e + (M + m(x))e = K_2(x) & \text{em } \Omega, \\ e = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $M > 0$ é suficientemente grande. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K)$. Assim, multiplicando por e e integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) \int_{\Omega} \varphi_1 e &= -\sigma \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y) \varphi_1(y) dy \right) e(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} K_2 \varphi_1 - M \int_{\Omega} \varphi_1 e. \end{aligned}$$

Logo, por (2.23), obtemos

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) \int_{\Omega} \varphi_1 e \leq \int_{\Omega} K_2 \varphi_1 \left(1 - \sigma \int_{\Omega} K_1 e \right) - M \int_{\Omega} \varphi_1 e.$$

Assim, existe $\sigma_0 > 0$, suficientemente grande, satisfazendo (2.22). Agora vamos mostrar que

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) \rightarrow -\infty, \text{ quando } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Com efeito, comecemos observando que o argumento acima nos diz que para cada $m \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\lambda_1(-d\Delta + m(x) + M) > 0$, com $M > 0$, existe $\sigma_0 > 0$ satisfazendo (2.22). Assim, se para algum $M_0 > 0$ temos

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) \geq -M_0, \quad \forall \sigma > 0,$$

então, para $\lambda_1(-d\Delta + [m(x) + M_0]) > 0$, obtemos

$$\lambda_1(-d\Delta + [m(x) + M_0]; \sigma K) \geq 0, \forall \sigma > 0,$$

o que é uma contradição com o que foi feito antes. Portanto,

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) \rightarrow -\infty, \text{ quando } \sigma \rightarrow +\infty.$$

Vejamos agora o caso geral. Uma vez que $K \neq 0$, existe $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Omega$ tal que $K(x_0, y_0) > 0$. Assim, existe um aberto $B = B(x_0) \times B(y_0) \subset \Omega \times \Omega$ tal que $K(x, y) > 0$, para $(x, y) \in B$. Seja

$$K_L^B = \min_{\overline{B}} K > 0.$$

Considere as funções contínuas $K_1, K_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \geq 0, K_1 \neq 0 \text{ em } B(x_0), \\ K_1(x) = 0, \forall x \notin B(x_0), \\ \max_{\overline{B(x_0)}} K_1 < \sqrt{K_L^B}, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_2 \geq 0, K_2 \neq 0 \text{ em } B(y_0), \\ K_2(y) = 0, \forall y \notin B(y_0), \\ \max_{\overline{B(y_0)}} K_2 < \sqrt{K_L^B}. \end{array} \right.$$

Portanto,

$$K(x, y) \geq K_1(x) \cdot K_2(y), \quad \text{para todo } (x, y) \in \Omega \times \Omega,$$

como em (2.23). Consequentemente, este caso segue do caso anterior.

□

Como consequência da Proposição 2.12, temos o seguinte resultado para (2.21):

Teorema 2.13. *Assuma que $m \in L^\infty(\Omega)$ é tal que $\lambda_1(-d\Delta + m(x)) > 0$. Assuma ainda que $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ seja uma função não-negativa e não-identicamente nula. Então, existe um único autovalor $\sigma_1(d; m(x); K) > 0$ de (2.21). Além disso, para todo $\sigma > 0$,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) > 0, \text{ se } \sigma < \sigma_1(d; m(x); K), \\ \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) = 0, \text{ se } \sigma = \sigma_1(d; m(x); K), \\ \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K) < 0, \text{ se } \sigma > \sigma_1(d; m(x); K). \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Prova. Pela Proposição 2.12, existe $\sigma_0 > 0$ satisfazendo (2.22). Uma vez que a função contínua $\sigma \mapsto \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K)$ é decrescente e $\lambda_1(-d\Delta + m(x)) > 0$, então existe um único $\sigma_1(d; m(x); K) > 0$ tal que

$$\lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma_1(d; m(x); K) K) = 0,$$

ou seja, $\sigma_1(d; m(x); K)$ é um autovalor de (2.21). Para provar (2.24), basta notar novamente que a função $\sigma \mapsto \lambda_1(-d\Delta + m(x); \sigma K)$ é decrescente.

□

Outras propriedades do autovalor $\sigma_1(d; m(x); K)$ serão dadas no corolário seguinte. Sua demonstração segue imediatamente do teorema anterior junto com a Proposição 2.9.

Corolário 2.14. (i) *Suponha que $K_1, K_2 \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ sejam funções não-negativas e não-identicamente nulas. Sejam $m_1, m_2 \in L^\infty(\Omega)$ e $\lambda_1(-d\Delta + m_1(x)) > 0$. Se $K_1 \leq K_2$ em $\Omega \times \Omega$ e $m_1 \leq m_2$ em Ω , então*

$$\sigma_1(d; m_1(x); K_2) \leq \sigma_1(d; m_2(x); K_1).$$

Além disso, se $K_1 \neq K_2$ ou $m_1 \neq m_2$ em um conjunto de medida nula, então a desigualdade é estrita.

(ii) *Sejam $K_n \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$, $n \geq 1$, funções não-negativas e não-identicamente nulas. Se $\lambda_1(-d\Delta + m(x)) > 0$ e $K_n \rightarrow K$ em $C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$, quando $n \rightarrow +\infty$, então*

$$\sigma_1(d; m(x); K_n) \rightarrow \sigma_1(d; m(x); K), \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Capítulo 3

Problemas Não-Locais Decorrentes de Processos Birth-Jump

Como já foi dito, neste capítulo estabeleceremos um Método de Sub-Super Solução para a equação não-local

$$\begin{cases} -d\Delta u = \int_{\Omega} G(x, y, u(x), u(y)) dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

com $G \in L^{\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2)$. Para isso, vamos usar ideias presentes em [18]. Aplicaremos este método à duas equações não-lineares e não-locais. Mais precisamente, estudaremos primeiro o problema:

$$\begin{cases} -d\Delta u = \sigma g(u) \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $d > 0$, $\sigma > 0$, $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula, $g(u) := (A(x) - u^p)^+$, com $p \geq 1$ e $A \in C(\overline{\Omega})$ tal que $A^+ \neq 0$. Depois disso, estudaremos o problema:

$$\begin{cases} -d\Delta w + \beta w = \sigma F(w) \int_{\Omega} K(x, y) w(y) dy & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

com $\beta \geq 0$, $\sigma > 0$ e $F \in C^1(\mathbb{R}_+)$ uma função decrescente, com $F(0) = 1$ e $F(t) = 0$, para $t \geq 1$.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na Seção 3.1, faremos uma revisão sobre processos birth-jump para motivar nosso estudo. Na Seção 3.2, baseados nas ideias presentes em [18], estabeleceremos um método de sub-super solução para a equação não-local (3.1). Com o uso desse método, na Seção 3.3, encontraremos condições necessárias e suficientes para a existência de uma única solução positiva para (3.2) e também encontraremos cotas para esta solução. Analogamente, na Seção 3.4, encontraremos existência, unicidade e cotas para o problema (3.3). Na Seção 3.5, faremos alguns comentários quanto aos resultados obtidos e discutiremos sobre difusão aleatória pura e processos birth-jump.

3.1 Motivação

Nesta seção, motivaremos o estudo do problema (3.2). Desde o artigo [39], termos não-locais têm sido incluídos em modelos de dinâmica populacional no termo de reação:

$$u_t - d\Delta u = f(x, u, \bar{u}), \quad (3.4)$$

onde

$$\bar{u} = \int_{\Omega} R(x, y, u(y, t)) dy,$$

é um termo não-local. Aqui, $u(x, t)$ é a densidade populacional e o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é o seu habitat. Em (3.4), a relação entre a função variável u e suas derivadas no ponto (x, t) não dependem apenas do valor da população no mesmo ponto x , mas também do valor em uma vizinhança de x , veja [8], [17] e [70] para o caso onde f é uma não-linearidade do tipo logístico.

Mais recentemente em dinâmica populacional, existem situações onde o crescimento e a movimentação das espécies não podem ser desacoplados como em (3.4) (veja [42]). Esses modelos são chamados de processos birth-jump.

Um caso interessante de processo birth-jump é estudado em [14] e [31], como já explicamos na Introdução. Neste artigo, os autores consideram um sistema não-local de duas variáveis que descreve a dinâmica entre células-tronco cancerígenas e células tumorais em um determinado tecido. Neste caso, os processos birth-jump associados a este sistema são descritos pela seguinte equação integral-diferencial:

$$u_t - d\Delta u = \int_{\Omega} S(x, y, u(x, t)) \tilde{\beta}(u(y, t)) u(y, t) dy, \quad (3.5)$$

onde a função S é o núcleo de redistribuição para indivíduos recém-gerados em y que saltam à uma localização x , a função $\beta(\tilde{u})$ é a taxa de proliferação na localização y .

O processo birth-jump não nos leva a um termo negativo nas equações desde que age somente em indivíduos recém-gerados. Mais precisamente, em muitas situações,

$$S(x, y, u(x, t)) = g(u(x, t))K(x, y), \quad (3.6)$$

onde, g é uma função não-negativa e K é um núcleo limitado, não-negativo e depende de x e y somente através da distância $|x - y|$, isto é, $K(x, y) = \varphi(|x - y|)$, com, por exemplo, $\varphi(t) = Ae^{-Bt^2}$, onde $A, B > 0$, ou $\varphi(t) = \varphi_a(t)$, onde $a > 0$ e

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{a^2} \cdot t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{a}{2}, \\ \frac{2}{a^2} \cdot (t - a)^2 & \text{se } \frac{a}{2} \leq t \leq a, \\ 0 & \text{se } a \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por fim, observe que (3.2) é o caso estacionário associado à equação (3.5) para $\tilde{\beta} = \sigma$ e S como em (3.6), onde $g(u) = (A(x) - u^p)^+$. Analogamente, ao problema (3.3) para $g = F$.

3.2 O Método de Sub-Super Solução

Nesta seção, vamos estabelecer um método de sub-super solução para o problema

$$\begin{cases} -d\Delta u = \int_{\Omega} G(x, y, u(x), u(y))dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $G : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função que está em $L^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2)$. Primeiro, vejamos a definição de sub-super solução para este tipo de problema.

Definição 3.1. Dizemos que (3.7) tem um par de sub-super solução se existem duas funções $\underline{u}, \bar{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tais que

$$\underline{u} \leq \bar{u} \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \underline{u} \leq 0 \leq \bar{u} \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (3.8)$$

e, no sentido fraco,

$$-d\Delta \underline{u} \leq \int_{\Omega} G(x, y, \underline{u}(x), u(y)) dy, \quad -d\Delta \bar{u} \geq \int_{\Omega} G(x, y, \bar{u}(x), u(y)) dy \quad (3.9)$$

em Ω , para todo $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, com $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$, onde

$$[\underline{u}, \bar{u}] = \{u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega); \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), \forall x \in \Omega\}.$$

Nestas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Suponha que exista um par de sub-super solução para (3.7). Então, existe uma solução $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (3.7) tal que $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$.*

Prova. Considere o operador truncamento $T : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$, dado por

$$Tu(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & \text{se } u(x) \geq \bar{u}(x), \\ u(x), & \text{se } \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), \\ \underline{u}(x), & \text{se } u(x) \leq \underline{u}(x). \end{cases}$$

Defina $F : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ por

$$Fu(x) = \int_{\Omega} G(x, y, Tu(x), Tu(y)) dy.$$

Observe que existe $M > 0$ tal que $|Fu|_\infty \leq M$, para todo $u \in L^\infty(\Omega)$. Para cada $u \in L^\infty(\Omega)$, considere $\mathcal{T}(u)$ a única solução do problema

$$\begin{cases} -d\Delta v = \int_{\Omega} G(x, y, Tu(x), Tu(y)) dy & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela regularidade elíptica, o operador $\mathcal{T} : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ é compacto. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder aplicado em $B = B(0, M) \subset L^\infty(\Omega)$, existe $u \in B$ tal que $\mathcal{T}(u) = u$. Note que $u \in H_0^1(\Omega)$, assim, basta mostrar que $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$. Observe que $Tu \in [\underline{u}, \bar{u}]$. Pela definição de super solução em Tu , temos

$$-d\Delta(u - \bar{u}) \leq \int_{\Omega} [G(x, y, Tu(x), Tu(y)) - G(x, y, \bar{u}(x), Tu(y))] dy.$$

multiplicando esta equação por $(u - \bar{u})^+$ e usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla(u - \bar{u})^+|^2 \leq 0,$$

ou seja, $(u - \bar{u})^+ = 0$. Assim, $u \leq \bar{u}$ em Ω . Analogamente, podemos obter que $u \geq \underline{u}$ em Ω . Então, $u \in [\underline{u}, \bar{u}]$ e, portanto, u é solução fraca de (3.7).

□

Observação 3.3. Na realidade, a função G acima precisa ser limitada apenas em $\Omega \times \Omega \times Y^2$, onde

$$Y = \left[\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} \underline{u}(x), \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \bar{u}(x) \right].$$

3.3 Problema Não-Linear

Nesta seção, estudaremos o problema não-linear:

$$\begin{cases} -d\Delta u = \sigma g(u) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $K \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula e

$$g(u) := (A(x) - u^p)^+,$$

com $p \geq 1$, $\sigma > 0$ e $A \in C(\bar{\Omega})$, com $A^+ \neq 0$. Sendo $g \geq 0$, como vimos na seção anterior, um par de solução sub-super para (3.10) é um par de funções $\underline{u}, \bar{u} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tais que:

$$-d\Delta \underline{u} \leq \sigma g(\underline{u}) \int_{\Omega} K(x, y)\underline{u}(y)dy, \quad -d\Delta \bar{u} \geq \sigma g(\bar{u}) \int_{\Omega} K(x, y)\bar{u}(y)dy \quad (3.11)$$

em Ω , e verifica (3.8). Definamos a função contínua $\tilde{K} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{K}(x, y) = A^+(x)K(x, y).$$

Para $\tilde{K} \neq 0$, considere $\sigma_1 = \sigma_1(d; 0; \tilde{K}) > 0$, o qual existe pelo Teorema 2.13. Recorde que

$$\lambda_1(-d\Delta; \sigma_1 \tilde{K}) = 0.$$

Com essas condições temos o seguinte resultado para (3.10):

Teorema 3.4. (i) Se $\tilde{K}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \Omega \times \Omega$, então (3.10) não possui solução positiva em $C_0^1(\bar{\Omega})$.

(ii) Se $\tilde{K} \neq 0$, então (3.10) possui solução positiva $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ se, e somente se, $\sigma > \sigma_1$. Além disso,

$$u(x) \leq A_R^{1/p}, \text{ para todo } x \in \Omega. \quad (3.12)$$

(iii) A solução $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ do item anterior, quando existe, é única.

Prova. (i) Suponha que (3.10) possua uma solução $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ para $\tilde{K} = 0$. Assim,

$$\begin{cases} -d\Delta u = \sigma g(u) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \leq \sigma A^+(x) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $-d\Delta u \leq 0$ em Ω , e pelo Teorema 1.5, temos que $u = 0$, o que é uma contradição. Portanto, (3.10) não possui solução positiva em $C_0^1(\bar{\Omega})$.

(ii) Seja $\sigma > \sigma_1$. Usaremos o método de sub-super solução da seção anterior para encontrar uma solução positiva para o problema (3.10). Seja $\bar{u} = C$, com $C > 0$ suficientemente grande. Então, \bar{u} é super solução de (3.10), já que $g(\bar{u}) = (A(x) - C^p)^+ = 0$ e conseqüentemente,

$$\begin{cases} -d\Delta \bar{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} > 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, como $\sigma > \sigma_1$, temos que $\lambda_1(-d\Delta; \sigma K) < \lambda_1(-d\Delta; \sigma_1 K) = 0$. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-d\Delta; \sigma K)$ e tomemos $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Assim, \underline{u} é uma sub solução de (3.10). De fato, uma condição suficiente para que

$$-d\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq \sigma(A(x) - (\epsilon\varphi_1)^p)^+ \int_{\Omega} K(x, y)\epsilon\varphi_1(y)dy$$

é a seguinte

$$\lambda_1(-d\Delta; \sigma K) + \sigma\epsilon^p\varphi_1^{p-1} \int_{\Omega} K(x, y)\varphi_1(y)dy \leq 0, \quad (3.13)$$

já que $(A(x) - (\epsilon\varphi_1)^p)^+ \geq A^+(x) - (\epsilon\varphi_1)^p$. Uma vez que $\lambda_1(-d\Delta; \sigma K) < 0$ e $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, (3.13) é verdade. Logo, \underline{u} e \bar{u} verificam (3.11) e (3.8), isto é, (\underline{u}, \bar{u}) é um par

de sub-super solução para (3.10). Pelo Teorema 3.2, existe uma solução $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de (3.10) tal que

$$\epsilon\varphi_1(x) \leq u(x) \leq C \text{ em } \Omega.$$

Observe que pela regularidade elíptica, $u \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo $q \geq 1$. Portanto, $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$. Como $\varphi_1 > 0$, u é uma solução positiva de (3.10). Reciprocamente, se u é uma solução positiva de (3.10), temos que

$$\lambda_1(-d\Delta; \sigma_1 \tilde{K}) = 0 = \lambda_1(-d\Delta; \sigma g(u(x))K) > \lambda_1(-d\Delta; \sigma A^+(x)K) = \lambda_1(-d\Delta; \sigma \tilde{K}).$$

Pela Proposição 2.12, $\sigma > \sigma_1$. Agora, para mostrar (3.12), vamos provar que

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega; u(x) > A_R^{1/p} \right\} = \emptyset.$$

Com efeito, suponha que Ω_1 seja um conjunto não-vazio e seja $x \in \Omega_1$. Temos que $g(u(x)) = 0$ e então

$$-\Delta(u - A_R^{1/p}) = 0 \text{ em } \Omega_1, \quad u - A_R^{1/p} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_1.$$

Aplicando o Teorema 1.5 em cada componente conexa de Ω_1 , obtemos que $u = A_R^{1/p}$ em Ω_1 , uma contradição. Isto prova que Ω_1 é vazio. Então, $u \leq A_R^{1/p}$ em Ω .

(iii) Suponha que existam duas soluções positivas de (3.10), $u \neq v$ em Ω , e seja $w = u - v$.

Note que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{\sigma}\Delta w &= (A(x) - u^p)^+ \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy - (A(x) - v^p)^+ \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy \\ &= ((A(x) - u^p)^+ - (A(x) - v^p)^+) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy \\ &\quad + (A(x) - u^p)^+ \int_{\Omega} K(x, y)w(y)dy, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -d\Delta w + \sigma m(x)w - \sigma(A(x) - u^p)^+ \int_{\Omega} K(x, y)w(y)dy = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde $m(x) = h(x) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy$ e

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{(A(x) - u^p)^+ - (A(x) - v^p)^+}{u - v} & \text{se } u \neq v, \\ 0 & \text{se } u = v. \end{cases}$$

Observe que (3.14) implica que existe algum $j_0 \geq 1$ tal que

$$\lambda_{j_0} (-d\Delta + \sigma m(x); \sigma(A(x) - u^p(x))^+ K) = 0. \quad (3.15)$$

Por outro lado, $m \in L^\infty(\Omega)$. De fato, basta observar que

$$(A(x) - u^p)^+ - (A(x) - v^p)^+ = \frac{v^p - u^p}{2} + \frac{1}{2}(|A(x) - u^p| - |A(x) - v^p|),$$

e conseqüentemente,

$$|(A(x) - u^p)^+ - (A(x) - v^p)^+| \leq \frac{|u^p - v^p|}{2} + \frac{1}{2}(\| |A(x) - u^p| - |A(x) - v^p| \|) \leq |u^p - v^p|.$$

Agora, observe que $h(x) \geq 0$, para todo $x \in \Omega$. De fato, se $u(x) \geq v(x)$ temos apenas três casos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq u^p(x) \geq v^p(x) \Rightarrow h(x) \geq 0, \\ u^p(x) \geq A(x) \geq v^p(x) \Rightarrow h(x) \geq 0, \\ u^p(x) \geq v^p(x) \geq A(x) \Rightarrow h(x) = 0. \end{array} \right.$$

Um argumento similar pode ser usado para o caso $u(x) \leq v(x)$. Assim, $h(x) \geq 0$. Além disso, $h \neq 0$, pois o conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq v(x)\}$ é não-vazio. Portanto, de (3.15), temos que

$$\begin{aligned} 0 = \lambda_1 (-d\Delta; \sigma(A(x) - u^p(x))^+ K) &< \lambda_1 (-d\Delta + \sigma m(x); \sigma(A(x) - u^p(x))^+ K) \\ &\leq \lambda_{j_0} (-d\Delta + \sigma m(x); \sigma(A(x) - u^p(x))^+ K) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esta contradição completa a prova do Teorema. □

3.4 Equação Logística Não-Local

Nesta seção, existência de solução positiva para o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -d\Delta u + \beta u = \sigma F(u) \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3.16)$$

com $\beta \geq 0$, $\sigma > 0$ e $F \in C^1(\mathbb{R}_+)$ uma função decrescente, com $F(0) = 1$ e $F(t) = 0$, para $t \geq 1$. Note que estudamos esta equação na seção anterior para $\beta = 0$ e $F(u) = (A(x) - u^p)^+$, onde $p \geq 1$ e $A \in C(\overline{\Omega})$, com $A^+ \neq 0$, abaixo vamos generalizar este estudo.

Proposição 3.5. *As seguintes afirmações sobre (3.16) são verdadeiras:*

- (i) (3.16) possui uma única solução positiva em $C_0^1(\overline{\Omega})$, que denotaremos por $\theta_\sigma[d; \beta; K]$, se, e somente se, $\sigma > \sigma_1 = \sigma_1(d; \beta; K)$. Além disso,

$$\theta_\sigma[d; \beta; K] \leq 1 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.17)$$

- (ii) Se $K_1 \leq K_2$ em $\Omega \times \Omega$ e $\sigma_1 \leq \sigma_2$, então $\theta_{\sigma_1}[d; \beta; K_1] \leq \theta_{\sigma_2}[d; \beta; K_2]$ em Ω . Além disso, a aplicação $\sigma \mapsto \theta_\sigma[d; \beta; K]$ é contínua.

- (iii) Denotando $\theta_\sigma[d; \beta; K]$ simplesmente por θ_σ . Então, o autovalor principal do problema

$$\begin{cases} -d\Delta u + \beta u - \sigma F'(\theta_\sigma)\mathcal{K}(\theta_\sigma)u - \sigma F(\theta_\sigma)\mathcal{K}(u) = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.18)$$

é positivo, isto é,

$$\lambda_1(-d\Delta + \beta - \sigma F'(\theta_\sigma(x))\mathcal{K}(\theta_\sigma)(x); \sigma F(\theta_\sigma(x))K) > 0. \quad (3.19)$$

Prova. (i) Assuma primeiro que $\sigma > \sigma_1$. Vamos mostrar a existência de solução positiva de (3.16) usando o método de sub-super solução da Seção 3.2. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a $\lambda_1(-d\Delta + \beta; \sigma K)$. Então, $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, e $\bar{u} = 1$ é um par de sub-super solução para (3.16). Pelo Teorema 3.2, existe uma solução positiva $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ de (3.16) tal que

$$\epsilon\varphi_1(x) \leq u(x) \leq 1 \quad \text{em } \Omega.$$

Note que, uma vez provada a unicidade de solução positiva, (3.17) segue imediatamente. Portanto, vamos mostrar a unicidade de solução positiva de (3.16). Para isso, suponha que existam duas soluções positivas de (3.16), $u \neq v$ in Ω , e seja $w = u - v$. Temos que

$$\begin{cases} -d\Delta w + m(x)w - \sigma F(u) \int_{\Omega} K(x, y)w(y)dy = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.20)$$

onde $m(x) = \beta + \sigma h(x) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy$ e

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{se } u \neq v, \\ -F'(u) & \text{se } u = v. \end{cases}$$

Logo, (3.20) implica que existe algum $j_0 \geq 1$ tal que

$$\lambda_{j_0}(-\Delta + m(x); \sigma F(u(x))K) = 0. \quad (3.21)$$

Por outro lado, observe que v é uma super solução estrita para (3.20). De fato, é suficiente mostrar que

$$-d\Delta v + m(x)v - \sigma F(u) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy > 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.22)$$

Note que

$$\begin{aligned} -\Delta v + m(x)v &= \sigma \left[F(v) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy + h(x)v \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy \right] \\ &= \sigma(F(v) + h(x)v) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy. \end{aligned}$$

Assim, (3.22) é equivalente a provar que

$$\sigma \left[(F(v) + h(x)v - F(u)) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy \right] > 0 \quad \text{em } \Omega,$$

ou seja, devemos mostrar que

$$F(v) + h(x)v - F(u) > 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.23)$$

Para provar (3.23), vejamos os únicos três possíveis casos:

(a) Para o conjunto $\{x \in \Omega; u(x) > v(x)\}$, temos que

$$\begin{aligned} u > v &\Rightarrow F(v) > F(u) \\ &\Rightarrow -F(u)u + F(v)u > 0 \\ &\Rightarrow (F(v) - F(u))(u - v) - F(u)v + F(v)v > 0 \\ &\Rightarrow F(v) - \frac{F(u) - F(v)}{u - v} \cdot v - F(u) > 0 \\ &\Rightarrow F(v) + h(x)v - F(u) > 0, \end{aligned}$$

o que prova (3.23).

(b) Similarmente a (a), obtemos (3.23) para o conjunto $\{x \in \Omega; u(x) < v(x)\}$.

(c) Para $\{x \in \Omega; u(x) = v(x)\}$, temos que

$$F'(u) < 0 \Rightarrow -F'(u) > 0 \Rightarrow F(v) - F'(u)v - F(u) > 0,$$

o que prova (3.23) neste caso.

Logo, (3.22) é verificado e, do Lema 2.7, temos que

$$\lambda_1(-\Delta + m(x); \sigma F(u(x))K) > 0.$$

Mas isso é uma contradição porque (3.21) e o Teorema 2.4 implicam que

$$0 < \lambda_1(-\Delta + m(x); \sigma F(u(x))K) \leq \operatorname{Re}(\lambda_{j_0}(-\Delta + m(x); \sigma F(u(x))K)) = 0.$$

Portanto, $u = v$ em Ω . Finalmente, vamos mostrar que, se $u \in C_0^1(\bar{\Omega})$ é uma solução positiva de (3.16), então $\sigma > \sigma_1$. Observe que, pelo Teorema 2.4, temos

$$\lambda_1(-d\Delta + \beta; \sigma_1 K) = 0 = \lambda_1(-d\Delta + \beta; \sigma F(u(x))K) > \lambda_1(-d\Delta + \beta; \sigma K),$$

pois u é positiva e conseqüentemente $F(u) < 1$. Da equação (2.24) no Teorema 2.13, obtemos que $\sigma > \sigma_1$.

(ii) Note que $\theta_{\sigma_1}[d; \beta; K_1]$ é uma sub solução de (3.16) para $K = K_2$ e $\sigma = \sigma_2$. Como $\bar{u} = C$, com $C > 0$ suficientemente grande, é uma super solução de (3.16), (ii) segue de (i). A continuidade da aplicação $\sigma \mapsto \theta_\sigma[d; \beta; K]$ segue de (3.17) e da unicidade de solução positiva para (3.16).

(iii) Como F é não-crescente, então θ_σ é uma super solução estrita do problema (3.18). De fato, observe que

$$-d\Delta\theta_\sigma + \beta\theta_\sigma - \sigma F'(\theta_\sigma)\mathcal{K}(\theta_\sigma)\theta_\sigma - \sigma F(\theta_\sigma)\mathcal{K}(\theta_\sigma) = -\sigma F'(\theta_\sigma)\mathcal{K}(\theta_\sigma)\theta_\sigma > 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Portanto, (iii) segue do Lema 2.7.

□

Na próxima proposição, vamos mostrar que $\theta_\sigma[d; \beta; K]$ converge uniformemente para 1, sobre subconjuntos compactos de Ω , quando $\sigma \rightarrow +\infty$. Para isso, vamos supor que, além das hipóteses já impostas sobre K , ainda vale que

$$K(x, x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega. \tag{3.24}$$

Proposição 3.6. *Assuma (3.24). Então,*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \theta_\sigma[d; \beta; K] = 1, \quad \text{uniformemente sobre compactos de } \Omega. \quad (3.25)$$

Prova. Seguiremos as ideias presentes em [28] (veja também [40]). Novamente denotaremos $\theta_\sigma[d; \beta; K]$ simplesmente por θ_σ . Para provar (3.25), devemos mostrar que para cada compacto $A \subset \Omega$ e $\epsilon > 0$, existe $\sigma = \sigma(A, \epsilon) > 0$ tal que

$$\sigma > \sigma(A, \epsilon) \Rightarrow 1 - \epsilon < \theta_\sigma < 1 + \epsilon \quad \text{em } A.$$

Primeiro, observe que por (3.17), $\theta_\sigma \leq 1$ em Ω . Assim, basta mostrar que

$$\sigma > \sigma(A, \epsilon) \Rightarrow \theta_\sigma > 1 - \epsilon \quad \text{em } A. \quad (3.26)$$

Como A é compacto, para provar (3.26) é suficiente mostrar que, dado $x_0 \in A$, existe uma vizinhança de x_0 , $U_0 \subset \Omega$, e um $\sigma_1 = \sigma_1(x_0) > 0$ tal que

$$\sigma > \sigma_1 \Rightarrow \theta_\sigma > 1 - \epsilon \quad \text{em } U_0.$$

Seja $R > 0$ tal que $B_0 = B_R(x_0) \subset \Omega$. Pela Proposição 3.5(i), para $\sigma > 0$ suficientemente grande, o problema

$$\begin{cases} -d\Delta u + \beta u = \sigma F(u) \int_{\Omega \cap B_0} K(x, y) u(y) dy & \text{em } B_0, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_0, \end{cases} \quad (3.27)$$

tem uma única solução positiva em $C_0^1(\overline{\Omega})$, pois $K(x_0, x_0) > 0$. Tal solução será denotada por $\theta_\sigma^{B_0}$. Como θ_σ é uma super solução estrita de (3.27), então

$$\theta_\sigma^{B_0} \leq \theta_\sigma \quad \text{em } B_0.$$

Assim, basta mostrar que existe $\sigma_1 = \sigma_1(x_0) > 0$ tal que

$$\sigma > \sigma_1 \Rightarrow \theta_\sigma^{B_0} > 1 - \epsilon \quad \text{em } B_{R_1}(x_0),$$

com $R_1 \leq R$. Seja $\varphi_1^{B_0} > 0$ a autofunção associada a $\lambda_1^{B_0}(-d\Delta + \beta)$ tal que $|\varphi_1^{B_0}|_\infty = 1$ e $\varphi_1^{B_0}(x_0) = 1$. Como $K(x_0, x_0) > 0$, se $\delta \in (0, 1)$, $\sigma > 0$ é suficientemente grande e $\underline{u} = \delta \varphi_1^{B_0}$, então temos que

$$\lambda_1^{B_0}(-d\Delta + \beta) \varphi_1^{B_0} \leq \sigma F(\delta \varphi_1^{B_0}) \int_{\Omega} K(x, y) \varphi_1^{B_0}(y) dy \quad \text{em } B_0,$$

ou seja, \underline{u} é uma sub solução de (3.27). Portanto, como $\varphi_1^{B_0}(x_0) = 1$ e $\bar{u} = 1$ é uma super solução de (3.27), dado $\epsilon > 0$ existe $\sigma_1(x_0) > 0$ e $R_1 \leq R$ tal que, para $\sigma > \sigma_1$

$$\theta_\sigma^{B_0} \geq \underline{u} > 1 - \epsilon \quad \text{em} \quad B_{R_1}(x_0),$$

o que finaliza a prova. □

3.5 Conclusões

Em modelos de dinâmica populacional, a difusão espacial das espécies é modelada pelo operador de segunda ordem $-\Delta$ quando elas se movimentam de maneira aleatória. Contudo, como apresentamos na primeira seção deste capítulo, o processo birth-jump assume que este movimento não pode ser desacoplado do crescimento das espécies, e um termo integral é incluído no modelo, através de um núcleo de redistribuição K , representando a densidade de probabilidade para um indivíduo recém-gerado em y saltar à uma posição x , condicionado à ocupação local em x dada por $u(x, t)$.

Os resultados obtidos neste capítulo justificam que o comportamento qualitativo de ambos os modelos (difusão aleatória pura e processo birth-jump) são semelhantes. De fato, no primeiro caso a existência de um equilíbrio positivo depende do autovalor principal, λ_1 , de $-\Delta$ e no segundo caso do autovalor principal, σ_1 , do problema não-local de autovalor:

$$\begin{cases} -d\Delta u = \sigma \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Observamos ainda que, pelas hipóteses sobre o núcleo K , temos $\tilde{K} \neq 0$. Pelo Teorema 3.4, existe uma única solução de (3.2) se, e somente se,

$$\sigma > \sigma_1(d; 0; \tilde{K}) = \sigma_1(1; 0; \tilde{K}) \cdot d,$$

ou seja,

$$\frac{\sigma}{d} > \sigma_1(1; 0; \tilde{K}).$$

Isto significa que é mais provável esperar a existência de solução positiva nos casos em que:

- (a) d , o coeficiente de difusão, é pequeno;
- (b) K , o núcleo de redistribuição, é grande;
- (c) σ , a taxa de proliferação, é grande.

Interpretações análogas para a equação (3.3) podem ser feitas, supondo que $\beta = 0$.

Capítulo 4

Sistema Elíptico Não-Local Decorrente do Crescimento de Células-Tronco Cancerígenas

Neste capítulo, estudaremos o seguinte sistema elíptico não-local

$$\begin{cases} -D_1\Delta u = \delta\gamma F(u+v)\mathcal{K}(u) & \text{em } \Omega, \\ -D_2\Delta v + \alpha v = (1-\delta)\gamma F(u+v)\mathcal{K}(u) + \rho F(u+v)\mathcal{K}(v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Ω é um domínio regular e limitado de \mathbb{R}^N , $D_1, D_2, \gamma, \alpha, \rho > 0$, $\delta \in [0, 1]$ e $F \in C^1(\mathbb{R}_+)$ é uma função decrescente com $F(0) = 1$ e $F(t) = 0$, para $t \geq 1$. A função

$$\mathcal{K}(u) : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$$

é dada por

$$\mathcal{K}(u)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy,$$

onde $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula.

Observemos que existem três tipos de soluções para (4.1): (i) a solução trivial $(0, 0)$; (ii) as soluções semi-triviais $(u, 0)$ e $(0, v)$; (iii) as soluções com ambas as componentes positivas, chamadas estados de coexistência, (u, v) .

Com relação às soluções não-negativas do sistema (4.1), evidentemente a solução trivial sempre existe para quaisquer que sejam os parâmetros. Para as soluções semi-triviais, observemos que quando zeramos uma das funções variáveis, a outra satisfaz uma equação do tipo

$$\begin{cases} -d\Delta w + \beta w = \sigma F(w) \int_{\Omega} K(x, y)w(y)dy & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

com $\beta \geq 0$ e $\sigma > 0$. Este problema foi estudado no capítulo anterior. Este estudo será usado aqui para encontrarmos soluções semi-triviais de (4.1). Também será usado para o estudo da região de coexistência de (4.1).

Para os estados de coexistência, vamos fazer o estudo em dois casos: $\delta \in (0, 1)$ e $\delta = 1$, uma vez que para $\delta = 0$ o sistema (4.1) não possui estados de coexistência.

No caso $\delta \in (0, 1)$, usaremos argumentos de bifurcação que introduzimos na Seção 5 do Capítulo 1 para encontrar estados de coexistência de (4.1).

No caso $\delta = 1$, usamos a teoria do índice de ponto fixo com respeito ao cone positivo que introduzimos na Seção 4 do Capítulo 1 para encontrar estados de coexistência de (4.1).

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na Seção 4.1, vamos motivar o estudo do sistema (4.1). Na Seção 4.2, vamos encontrar existência de soluções semi-triviais para (4.1) e estudar um problema perturbado da equação logística (4.2). Na Seção 4.3, vamos estudar cotas a priori e resultados de não existência para estados de coexistência de (4.1). Estudaremos a existência de estados de coexistência de (4.1) para $\delta \in (0, 1)$ na Seção 4.4 e para $\delta = 1$ na Seção 4.5. Na Seção 4.6, estudaremos o comportamento da região de coexistência de (4.1) e interpretaremos nossos resultados. Finalmente, na Seção 4.7 faremos algumas conclusões do nosso estudo comparando com o modelo proposto em [31].

Por fim, vamos fixar algumas notações para este capítulo. Denotaremos por X o espaço $C_0^1(\bar{\Omega})$ e por P o seu cone positivo (ver Observação 1.12). Para $u \in X$, $\|u\|_X$ denotará a norma usual de X . Além disso, vamos continuar mantendo as notações dos capítulos anteriores e, por simplicidade, denotaremos:

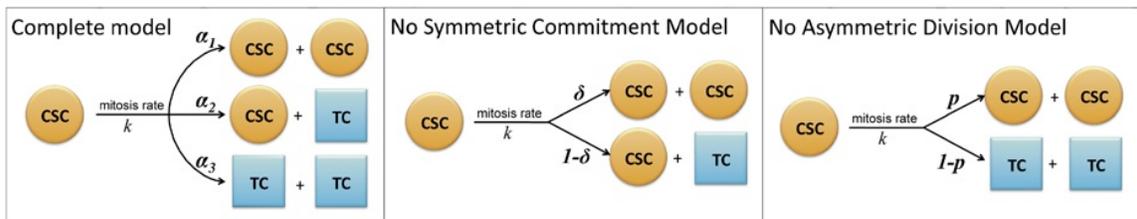
$$\sigma_{1,1} \equiv \sigma_1(D_1; 0; K) \quad \text{e} \quad \sigma_{1,2} \equiv \sigma_1(D_2; \alpha; K).$$

4.1 Motivação

Como mencionamos na Introdução desta tese, o sistema (4.1) é o caso estacionário, com condições homogêneas de fronteira de Dirichlet, do modelo de dinâmica entre células-tronco cancerígenas (*CTCs*) e células tumorais (*CTs*) em um determinado tecido Ω , proposto em [31]. Neste artigo, os autores estudam um caso particular de (*CTCs*). Mais precisamente, eles estudam o seguinte sistema que depende do tempo

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_1 \Delta u + \delta \gamma \int_{\Omega} K(x,y,p(x,t))u(y,t)dy \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = D_2 \Delta v - \alpha v + \rho \int_{\Omega} K(x,y,p(x,t))v(y,t)dy \\ \quad + (1-\delta)\gamma \int_{\Omega} K(x,y,p(x,t))u(y,t)dy, \end{cases}$$

onde $p(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$. As variáveis $u(x,t)$ e $v(x,t)$ denotam a densidade de (*CTCs*) e (*CTs*) no tempo t e localização x , respectivamente. O núcleo $K(x,y,p)$ descreve a taxa de contribuição progênie à uma localização x de uma célula localizada em y . As constantes $D_1, D_2 > 0$ são os coeficientes de difusão das células (*CTCs*) e (*CTs*), respectivamente. Os parâmetros $\gamma, \rho > 0$ denotam, respectivamente, as taxas de mitose das células (*CTCs*) e (*CTs*); e $\alpha > 0$ denota a taxa de morte das células (*CTs*). Além disso, $\delta \in [0, 1]$ denota a fração de divisão de (*CTCs*) que são simétricas, ou seja, a probabilidade na qual as células (*CTCs*) podem dar origem a duas (*CTCs*), enquanto $1 - \delta$ é a fração de divisão de (*CTCs*) que não são simétricas, ou seja, a probabilidade na qual as células (*CTCs*) podem dar origem a uma célula (*CTC*) e uma célula (*CT*). Aqui, estamos supondo que a divisão das células é dada pelo segundo caso da seguinte figura:



Os outros dois casos são similares ao segundo quando a população (*CTCs*) não está em declínio, como demonstrado em [31].

4.2 Soluções Semi-Triviais e Problema Perturbado

Nesta seção, vamos estudar a existência de soluções semi-triviais para (4.1). Este estudo será dividido em dois casos: $\delta \neq 1$ e $\delta = 1$. Lembramos que neste capítulo estamos interessados em soluções positivas que estejam em X , ou seja, a menos que se diga algo em contrário, as soluções que estamos trabalhando estão no Espaço de Banach X .

Para o caso $\delta \neq 1$, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Assuma que $\delta \neq 1$. Então:*

(i) (4.1) não possui soluções semi-triviais da forma $(u, 0)$, com $u > 0$ em Ω .

(ii) (4.1) possui soluções semi-triviais da forma $(0, \theta_\rho)$ se, e somente se, $\rho > \sigma_{1,2}$, onde

$$\theta_\rho \equiv \theta_\rho[D_2; \alpha; K]. \quad (4.3)$$

Prova. (i) Suponha que $u > 0$ em Ω . Então,

$$\begin{aligned} v = 0 \text{ em } \Omega &\Rightarrow 0 = (1 - \delta)\gamma F(u) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy \\ &\Rightarrow F(u) = 0 \\ &\Rightarrow u \geq 1 \text{ em } \Omega, \end{aligned}$$

ou seja, $u \neq 0$ sobre $\partial\Omega$. Assim, $(u, 0)$ não é solução semi-trivial de (4.1).

(ii) Se $u = 0$, o sistema (4.1) tem a forma

$$\begin{cases} -D_2\Delta v + \alpha v = \rho F(v) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

Pela Proposição 3.5, (4.4) possui única solução positiva, $\theta_\rho[D_2; \alpha; K]$, se, e somente se, $\rho > \sigma_{1,2}$. Logo, o sistema (4.1) possui soluções semi-triviais da forma $(0, \theta_\rho)$, para cara $\rho > \sigma_{1,2}$, com $\theta_\rho \equiv \theta_\rho[D_2; \alpha; K]$.

□

Agora vamos para o caso $\delta = 1$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Assuma que $\delta = 1$. Para cada $\gamma > \sigma_{1,1}$, (4.1) possui soluções semi-triviais da forma $(\theta_\gamma, 0)$, onde*

$$\theta_\gamma \equiv \theta_\gamma[D_1; 0; K]. \quad (4.5)$$

Além disso, para cada $\rho > \sigma_{1,2}$, (4.1) possui soluções semi-triviais da forma $(0, \theta_\rho)$, onde θ_ρ é como em (4.3).

Prova. Se $u = 0$, (4.1) tem a forma (4.4), ou seja, o sistema (4.1) possui soluções semi-triviais da forma $(0, \theta_\rho)$, para cada $\rho > \sigma_{1,2}$. Se $v = 0$, (4.1) tem a forma

$$\begin{cases} -D_1\Delta u = \gamma F(u) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela Proposição 3.5, este problema possui única solução positiva, $\theta_\gamma[D_1; 0; K]$, se, e somente se, $\gamma > \sigma_{1,1}$. Assim, o sistema (4.1) possui soluções semi-triviais da forma $(\theta_\gamma, 0)$, para cada $\gamma > \sigma_{1,1}$, de onde o resultado segue. □

Vamos concluir esta seção estudando a seguinte perturbação do problema (3.16), que será usada na seção seguinte:

$$\begin{cases} -d\Delta u + \beta u = B(x) + \sigma F(u) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

com $B \in C(\bar{\Omega})$ uma função não-negativa e não-identicamente nula.

Proposição 4.3. *Suponha que $B \in C(\bar{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula. Então, (4.6) possui uma única solução positiva em X , a qual vamos denotar por $\Theta_\sigma[d; \beta; B; K]$, para todo $\sigma \geq 0$.*

Prova. A existência segue de modo análogo ao do item (i) da Proposição 3.5, com $\underline{u} = 0$ sub solução e $\bar{u} = Ce$ super solução, onde $e > 0$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} -d\Delta u + \beta u = 1 & \text{em } \tilde{\Omega}, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\tilde{\Omega}, \end{cases}$$

onde $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, com $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, e $C > 0$ é uma constante suficientemente grande tal que

$$C \left(1 - \sigma F(Ce) \int_{\Omega} K(x, y)e(y)dy \right) \geq B(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Para a unicidade, suponha que exista duas soluções positivas de (4.6), $u \neq v$ em Ω , e seja $w = u - v$. Logo,

$$\begin{cases} -d\Delta w + \beta w - \sigma F(u) \int_{\Omega} K(x, y)w(y)dy = 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $m(x) = \beta + \sigma h(x) \int_{\Omega} K(x, y)v(y)dy$ e

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{F(u) - F(v)}{u - v} & \text{se } u \neq v, \\ -F'(u) & \text{se } u = v, \end{cases}$$

ou seja, a unicidade também segue de modo análogo ao item (i) da Proposição 3.5.

□

4.3 Cotas a Priori e Resultados de Não Existência

Nesta seção, vamos estudar cotas a priori para estados de coexistência de (4.1) e provar resultados de não existência de estados de coexistência de (4.1). Iniciemos pelas cotas a priori.

Proposição 4.4. *Assuma que $\delta\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$. Se $(u, v) \in X \times X$ é um estado de coexistência de (4.1), então*

$$u \leq \theta_{\delta\gamma}[D_1; 0; K] \quad \text{em } \Omega, \quad (4.7)$$

e

$$\begin{cases} v \leq \theta_{\rho} & \text{em } \Omega \quad \text{se } \delta = 1, \\ v \leq \Theta_{\rho}[D_2; \alpha; B; K] & \text{em } \Omega \quad \text{se } \delta \neq 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde $B(x) = (1 - \delta)\gamma\mathcal{K}(\theta_{\delta\gamma}[D_1; 0; K])$.

Prova. Para (4.7) basta notar que

$$-D_1\Delta u = \delta\gamma F(u+v)\mathcal{K}(u) \leq \delta\gamma F(u)\mathcal{K}(u),$$

ou seja, u é sub solução do problema

$$\begin{cases} -D_1\Delta u = \gamma\delta F(u) \int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Como $\bar{u} = 1$ é uma super solução de (4.9), então (4.7) segue da Proposição 3.5(ii). Por outro lado, por (4.7) temos

$$\begin{aligned} -D_2\Delta v + \alpha v &= (1-\delta)\gamma F(u+v)\mathcal{K}(u) + \rho F(u+v)\mathcal{K}(v) \\ &\leq (1-\delta)\gamma F(u)\mathcal{K}(u) + \rho F(v)\mathcal{K}(v) \\ &\leq (1-\delta)\gamma\mathcal{K}(\theta_{\delta\gamma}[D_1; 0; K]) + \rho F(v)\mathcal{K}(v). \end{aligned}$$

Assim, (4.8) segue similarmente a (4.7), usando a Proposição 4.3 e a equação (4.4).

□

Temos os seguintes resultados com respeito a não existência de estados de coexistência de (4.1), o qual segue imediatamente da Proposição 3.5(i).

Proposição 4.5. (i) *Se $\delta\gamma \leq \sigma_{1,1}$, então (4.1) não possui estados de coexistência.*

(ii) *Se $\delta = 1$ e $\rho \leq \sigma_{1,2}$, então (4.1) não possui estados de coexistência.*

4.4 Estados de Coexistência Para o Caso $\delta \neq 1$

Nesta seção, vamos estudar a existência de estados de coexistência de (4.1) no caso em que $\delta \neq 1$. Observe que se $\delta = 0$ então (4.1) implica que $u = 0$. Logo, neste caso, (4.1) não possui estados de coexistência. Dessa forma, em toda esta seção, vamos assumir que $\delta \neq 0$.

Vamos aplicar o método de bifurcação nesta seção. Lembremos primeiro algumas observações importantes na aplicação dos resultados da bifurcação à sistemas elípticos:

- a) Para aplicar o teorema clássico de Rabinowitz [68] (Teorema 1.27), precisamos escrever nosso sistema (4.1) da seguinte forma:

$$U = \lambda KU + N(\lambda, U) \quad \text{em } E, \quad (4.10)$$

onde $U = (u, v) \in E := E_1 \times E_2$, E_i são Espaços de Banach, K é um operador compacto e linear em E , $N(\lambda, U)$ é um operador contínuo, compacto sobre conjuntos limitados, e tal que $N(\lambda, U) = o(\|U\|_E)$ quando $U \rightarrow 0$, uniformemente em cada intervalo compacto de \mathbb{R} e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de bifurcação. No entanto, nosso sistema não pode ser escrito dessa maneira, uma vez que temos diferentes parâmetros em cada equação deste sistema.

- b) Observe que se pudéssemos aplicar o Teorema de Rabinowitz, o contínuo de soluções não-triviais emanando da solução trivial poderia conter soluções semi-triviais $(u, 0)$ ou $(0, v)$, ou seja, não teria apenas estados de coexistência.
- c) Para contornar essa dificuldade, Blat e Brown [11] (ver também [20]) fazem o seguinte: fixam o parâmetro ρ , bifurcam a partir da solução semi-trivial $(0, \theta_\rho)$ e consideram γ como um parâmetro de bifurcação. Seguindo esta ideia, em [57] é desenvolvido uma teoria abstrata para mostrar a existência de um contínuo de estados de coexistência bifurcando desde soluções semi-triviais.
- d) Primeiro, devemos encontrar um valor de γ , γ_0 , tal que o índice de ponto fixo de $(0, \theta_\rho)$ muda quando γ cruza γ_0 . No nosso caso, vamos aplicar o Teorema de Crandall-Rabinowitz (Teorema 1.25) para encontrar $\gamma_0 = \sigma_1(D_1; 0; \delta F(\theta_\rho(x))K)$.

- e) Como consequência dessa mudança de índice, existe um contínuo Σ de soluções não-triviais, o qual possui um subcontínuo Σ^+ tal que em uma vizinhança de $(\gamma_0, 0, \theta_\rho)$ existam estados de coexistência. Denotemos por \mathcal{C}^+ a subcomponente de Σ^+ satisfazendo

$$\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times \text{int}(P_1) \times \text{int}(P_2),$$

onde P_i é o cone positivo de E_i .

- f) Existem somente duas possibilidades para o contínuo \mathcal{C}^+ : ou ele é ilimitado em $\mathbb{R} \times E_1 \times E_2$ ou ele deixa o conjunto $\text{int}(P_1) \times \text{int}(P_2)$. Se a segunda opção ocorrer, então:

- (a) ou ele deixa $\text{int}(P_1) \times \text{int}(P_2)$ pela fronteira ∂P_1 , e neste caso existe γ_1 tal que $(\gamma_1, 0, v_{\gamma_1}) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$, onde $\text{cl}(\mathcal{C}^+)$ denota o fecho do conjunto \mathcal{C}^+ ;
- (b) ou ele deixa $\text{int}(P_1) \times \text{int}(P_2)$ pela fronteira ∂P_2 , e neste caso existe γ_2 tal que $(\gamma_2, u_{\gamma_2}, 0) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$;
- (c) ou existe γ_3 tal que $(\gamma_3, 0, 0) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$.

g) Por fim, devemos provar qual das possibilidades acima ocorre.

Observação 4.6. *Pela Proposição 3.5 e pelo Princípio do Máximo Forte, para $0 < \rho \leq \sigma_{1,2}$, temos $\theta_\rho \equiv 0$. Assim,*

$$\sigma_1(D_1; 0; \delta F(\theta_\rho(x))K) = \frac{\sigma_{1,1}}{\delta}, \quad \text{se } 0 < \rho \leq \sigma_{1,2}.$$

Vamos usar isso na proposição seguinte.

Teorema 4.7. *Assuma que $\delta \neq 1$ e $\delta \neq 0$. Se*

$$\rho > 0 \quad \text{e} \quad \gamma > \sigma_1(D_1; 0; \delta F(\theta_\rho(x))K), \quad (4.11)$$

então existe pelo menos um estado de coexistência de (4.1).

Prova. Vamos aplicar o Teorema de Crandall-Rabinowitz (Teorema 1.25) considerando γ como um parâmetro de bifurcação e vamos provar a existência de um valor de γ , γ_0 , o qual determina um ponto de bifurcação desde a solução semi-trivial $(0, \theta_\rho)$ para cada $\rho > \sigma_{1,2}$ e desde a solução trivial $(0, 0)$ para cada $0 < \rho < \sigma_{1,2}$. O caso $\rho = \sigma_{1,2}$ resultará por uma aproximação. Primeiro, vamos introduzir algumas notações dadas em [57]. Denote por e_1 e e_2 , respectivamente, a única solução positiva do seguintes problemas lineares:

$$\begin{cases} -D_1 \Delta e_1 = 1 & \text{em } \Omega, \\ e_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.12)$$

e

$$\begin{cases} -D_2 \Delta e_2 + \alpha e_2 = 1 & \text{em } \Omega, \\ e_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.13)$$

Observe que $e_i \in X$ são funções estritamente positivas, para $i = 1, 2$. Seja E_i , $i = 1, 2$, o espaço de Banach formado por todas as funções $w \in C(\overline{\Omega})$ para as quais existe $\beta = \beta(w) > 0$ tal que

$$-\beta e_i < w < \beta e_i, \quad (4.14)$$

munido com a norma

$$\|w\|_{E_i} := \inf \{ \beta > 0 : -\beta e_i < w < \beta e_i \}.$$

Então E_i é um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo, denotado por P_i , é normal e tem interior não-vazio. Além disso, $E_i \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (veja [2] e [57] para mais detalhes). Agora, vamos estudar cada caso dito acima. Vejamos:

Caso $\rho > \sigma_{1,2}$: Considere o operador

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \times E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1 \times E_2,$$

definido por

$$\mathcal{F}(\gamma, u, v) = \begin{pmatrix} u - L_1 [\delta \gamma F(u+v) \mathcal{K}(u)] \\ v - L_2 [(1-\delta) \gamma F(u+v) \mathcal{K}(u) + \rho F(u+v) \mathcal{K}(v)] \end{pmatrix},$$

onde $L_1 = (-D_1 \Delta)^{-1}$ e $L_2 = (-D_2 \Delta + \alpha)^{-1}$ com condições de fronteira de Dirichlet. O operador \mathcal{F} está bem definido e

$$D_{(u,v)} \mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho) = \begin{pmatrix} D_{(u,v)} \mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)_1 \\ D_{(u,v)} \mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)_2 \end{pmatrix},$$

onde

$$D_{(u,v)} \mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)_1(\xi, \eta)^t = \xi - L_1 [\delta \gamma F(\theta_\rho) \mathcal{K}(\xi)]$$

e

$$\begin{aligned} D_{(u,v)} \mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)_2(\xi, \eta)^t &= \eta - L_2 [(1-\delta) \gamma F(\theta_\rho) \mathcal{K}(\xi) \\ &\quad + \rho \mathcal{K}(\theta_\rho) (F'(\theta_\rho) \xi + F'(\theta_\rho) \eta) \\ &\quad + \rho F(\theta_\rho) \mathcal{K}(\eta)]. \end{aligned}$$

Afirmamos que, para $\gamma_0 = \sigma_1(D_1; 0; \delta F(\theta_\rho(x))K)$,

$$\dim (Ker[D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma_0, 0, \theta_\rho)]) = 1.$$

Para provar isso, consideremos φ_1 uma autofunção positiva associada a γ_0 . Pela Proposição 2.8(i) e Proposição 3.5(iii), o problema linear

$$\begin{cases} D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma_0, 0, \theta_\rho)_2(\varphi_1, \eta)^t = 0 & \text{em } \Omega, \\ \eta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.15)$$

tem uma única solução, pois

$$\lambda_1(-D_2\Delta + \alpha - \rho F'(\theta_\rho(x))\mathcal{K}(\theta_\rho)(x); \rho F(\theta_\rho(x))K) > 0.$$

Esta solução será denotada por φ_2 . Observe que

$$D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)_1(\xi, \eta)^t = 0 \Rightarrow \xi = \varphi_1. \quad (4.16)$$

Portanto, por (4.15) e (4.16), temos

$$Ker[D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma_0, 0, \theta_\rho)] = Span\{(\varphi_1, \varphi_2)\}.$$

Por outro lado, derivando com respeito a γ , obtemos

$$D_{\gamma(u,v)}\mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)(\xi, \eta)^t = \begin{pmatrix} -L_1[\delta F(\theta_\rho)\mathcal{K}(\xi)] \\ -L_2[(1 - \delta)F(\theta_\rho)\mathcal{K}(\xi)] \end{pmatrix}.$$

Devemos mostrar que

$$D_{\gamma(u,v)}\mathcal{F}(\gamma_0, 0, \theta_\rho)(\varphi_1, \varphi_2)^t \notin R(D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)). \quad (4.17)$$

Para isso, suponha que exista $(\xi, \eta) \in X \times X$ tal que

$$-D_1\Delta\xi - \delta\gamma_0 F(\theta_\rho) \int_{\Omega} K(x, y)\xi(y)dy = -\delta F(\theta_\rho) \int_{\Omega} K(x, y)\varphi_1(y)dy.$$

Seja \widehat{L}^* o adjunto do operador $\widehat{L} : X \rightarrow X$ definido por

$$\widehat{L}u = -D_1\Delta u - \delta\gamma_0 F(\theta_\rho) \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy.$$

Pelo Teorema 1.10, existe $\varphi_1^* \in X^*$ uma autofunção positiva de \widehat{L}^* associada a γ_0 . Como $\lambda_1(-D_1\Delta; \delta\sigma_1(D_1; 0; \delta F(\theta_\rho(x))K)F(\theta_\rho(x))K) = 0$, temos que

$$0 = (\widehat{L}^*\varphi_1^*, \xi) = (\varphi_1^*, \widehat{L}\xi) = -\delta \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K(x, y)\varphi_1(y)dy \right) F(\theta_\rho(x))\varphi_1^*(x)dx < 0,$$

um absurdo, o que prova (4.17). Pelo Teorema de Crandall-Rabinowitz, $(\gamma_0, 0, \theta_\rho)$ é um ponto de bifurcação desde a solução semi-trivial $(0, \theta_\rho)$.

Agora, vamos usar os argumentos presentes no livro [57], que abordamos na Seção 5 do Capítulo 1, para estudar o comportamento global das soluções de (4.1) que bifurca de $(\gamma_0, 0, \theta_\rho)$. De acordo com o Teorema 4.2.3 de [57], γ_0 é um autovalor não-linear de $D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)$ com multiplicidade algébrica 1 e pelo Teorema 5.6.2 de [57] o índice local de $(0, \theta_\rho)$ muda de sinal quando γ cruza γ_0 . Além disso, pelas Proposições 2.8(ii) e 3.5(iii) temos que (ρ, θ_ρ) é uma solução positiva não-degenerada de (4.4). Como $D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma, 0, \theta_\rho)$ é um operador de Fredholm com índice zero, já que ele é uma perturbação compacta do operador identidade, podemos aplicar uma ligeira variante do Teorema 7.2.2 de [57] (ver Teorema 1.30). De fato, embora nosso problema (4.1) não tenha exatamente a estrutura do problema analisado em [57], a mudança do índice local de $(0, \theta_\rho)$ ocorre quando γ cruza γ_0 , que é o que realmente é necessário para aplicar tal teorema. Logo, concluímos que existe um contínuo $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times E_1 \times E_2$ de estados de coexistência de (4.1) bifurcando desde o ponto $(\gamma_0, 0, \theta_\rho)$ tal que ou:

- (i) \mathcal{C}^+ é ilimitado em $\mathbb{R} \times E_1 \times E_2$; ou
- (ii) existem $\bar{\gamma}_1 \in \mathbb{R}$ e $u_{\bar{\gamma}_1} \neq 0$ tais que $(\bar{\gamma}_1, u_{\bar{\gamma}_1}, 0) \in cl(\mathcal{C}^+)$; ou
- (iii) existem $\bar{\gamma}_2 \in \mathbb{R}$, com $\delta\bar{\gamma}_2 \neq \gamma_0$, e $v_{\bar{\gamma}_2}$ tais que $(\bar{\gamma}_2, 0, v_{\bar{\gamma}_2}) \in cl(\mathcal{C}^+)$; ou
- (iv) existem $\bar{\gamma}_3 \in \mathbb{R}$ tais que $(\bar{\gamma}_3, 0, 0) \in cl(\mathcal{C}^+)$.

Vamos mostrar a seguir que os três últimos itens não podem ocorrer:

(ii) Suponha que exista $(\gamma_n, u_n, v_n) \in \mathcal{C}^+$ tal que

$$(\gamma_n, u_n, v_n) \rightarrow (\bar{\gamma}_1, u_{\bar{\gamma}_1}, 0) \quad \text{em } \mathcal{C}^+.$$

Como $u_{\bar{\gamma}_1} \neq 0$, a primeira equação de (4.1), a regularidade elíptica e a Proposição 3.5 implicam que $\delta\bar{\gamma}_1 > \sigma_{1,1}$ e $u_{\bar{\gamma}_1} = \theta_{\delta\bar{\gamma}_1}[D_1; 0; K]$. Mas a segunda equação de (4.1) implica que

$$0 = (1 - \delta)\bar{\gamma}_1 F(\theta_{\delta\bar{\gamma}_1}[D_1; 0; K])\mathcal{K}(\theta_{\delta\bar{\gamma}_1}[D_1; 0; K]),$$

ou seja, $u_{\bar{\gamma}_1} \geq 1$ em Ω . Isto é uma contradição, porque $\theta_{\delta\bar{\gamma}_1}[D_1; 0; K] = 0$ sobre $\partial\Omega$.

(iii) Suponha que exista $(\gamma_n, u_n, v_n) \in \mathcal{C}^+$ tais que

$$(\gamma_n, u_n, v_n) \rightarrow (\bar{\gamma}_2, 0, v_{\bar{\gamma}_2}) \quad \text{em } \mathcal{C}^+.$$

Como acima, se $v_{\bar{\gamma}_2} \neq 0$, a segunda equação de (4.1) implica que $v_{\bar{\gamma}_2} = \theta_\rho$. Tome $w_n = u_n/|u_n|_\infty$, pela regularidade elíptica obtemos que $w_n \rightarrow w$ em X , com $w \in P$ satisfazendo

$$-D_1\Delta w = \delta\bar{\gamma}_2 F(\theta_\rho)\mathcal{K}(w),$$

ou seja, $\delta\bar{\gamma}_2 = \gamma_0$, o que é uma contradição.

(iv) Suponha que exista $(\gamma_n, u_n, v_n) \in \mathcal{C}^+$ tais que

$$(\gamma_n, u_n, v_n) \rightarrow (\bar{\gamma}_3, 0, 0) \quad \text{em } \mathcal{C}^+.$$

Considere

$$\xi_n = \frac{u_n}{|u_n|_\infty + |v_n|_\infty} \quad \text{e} \quad \eta_n = \frac{v_n}{|u_n|_\infty + |v_n|_\infty}.$$

Como acima, existem $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in P$ tais que

$$\xi_n \rightarrow \bar{\xi} \quad \text{e} \quad \eta_n \rightarrow \bar{\eta}, \quad \text{em } X.$$

Se $\delta\bar{\gamma}_3 \neq \sigma_{1,1}$, a primeira equação de (4.1) implica que $\bar{\xi} = 0$. Por outro lado, $\bar{\xi} = 0$ e a segunda equação de (4.1) implicam que $\bar{\eta} = 0$, porque $\rho > \sigma_{1,2}$. Mas isso é impossível uma vez que $|\bar{\xi}|_\infty + |\bar{\eta}|_\infty = 1$. Se $\delta\bar{\gamma}_3 = \sigma_{1,1}$, então $\bar{\xi} \neq 0$ e a segunda equação de (4.1) implicam que

$$-D_2\Delta\bar{\eta} + \alpha\bar{\eta} = (1 - \delta)\bar{\gamma}_3\mathcal{K}(\bar{\xi}) + \rho\mathcal{K}(\bar{\eta}),$$

ou seja,

$$-D_2\Delta\bar{\eta} + \alpha\bar{\eta} - \rho\mathcal{K}(\bar{\eta}) = (1 - \delta)\bar{\gamma}_3\mathcal{K}(\bar{\xi}) > 0.$$

Pelo Lema 2.7, temos que $\rho < \sigma_{1,2}$, um absurdo. Logo, (iv) não pode ocorrer.

Portanto, \mathcal{C}^+ é ilimitado em $\mathbb{R} \times E_1 \times E_2$. Pela Proposição 4.4, existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada estado de coexistência $(u, v) \in \mathcal{C}^+$, temos

$$|u|_\infty \leq C \quad \text{e} \quad |v|_\infty \leq C.$$

Pela regularidade elíptica, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{E_1} \leq C_1 \quad \text{e} \quad \|v\|_{E_2} \leq C_1.$$

Além disso, pela Proposição 4.5, (4.1) não possui estados de coexistência se $\delta\gamma \leq \sigma_{1,1}$. Consequentemente, $(\gamma_0, +\infty) \subset Proj(\mathcal{C}^+)$, com $Proj(\mathcal{C}^+)$ denotando a projeção do conjunto \mathcal{C}^+ sobre \mathbb{R} , o que conclui a prova para este caso.

Caso $0 < \rho < \sigma_{1,2}$: Neste caso, afirmamos que existe um contínuo ilimitado $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times E_1 \times E_2$ de estado de coexistência de (4.1) bifurcando desde o ponto $(\gamma_0, 0, 0)$, onde $\gamma_0 = \frac{\sigma_{1,1}}{\delta}$. De fato, observe que

$$D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma, 0, 0)(\xi, \eta)^t = \begin{pmatrix} \xi - L_1[\delta\gamma\mathcal{K}(\xi)] \\ \eta - L_2[(1 - \delta)\gamma\mathcal{K}(\xi) + \rho\mathcal{K}(\eta)]. \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\dim(Ker[D_{(u,v)}\mathcal{F}(\gamma_0, 0, 0)]) = 1,$$

porque $\rho < \sigma_{1,2}$ implica que

$$\lambda_1(-D_2\Delta + \alpha; \rho K) > 0.$$

Logo, o problema linear

$$\begin{cases} -D_2\Delta\eta + \alpha\eta = (1 - \delta)\gamma\mathcal{K}(\varphi_1) & \text{em } \Omega, \\ \eta = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui um única solução, onde φ_1 é uma autofunção associada a γ_0 . Além disso, como $\rho < \sigma_{1,2}$, o Teorema 2.13 implica que (ρ, θ_ρ) é uma solução positiva não-degenerada de (2.21). Assim, similarmente ao caso $\rho > \sigma_{1,2}$, podemos usar o Teorema 1.30 e concluir que existe um contínuo ilimitado $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times E_1 \times E_2$ de estados de coexistência de (4.1) bifurcando desde o ponto $(\gamma_0, 0, \theta_\rho)$ tal que $(\gamma_0, +\infty) \subset Proj(\mathcal{C}^+)$.

Caso $\rho = \sigma_{1,2}$: Vamos estudar este caso por aproximação. Para isso, considere o par $(\gamma, \sigma_{1,2})$, com $\delta\gamma > \sigma_{1,1}$. Pelos casos anteriores, existe uma sequência $\rho_n > \sigma_{1,2}$ tal que $\rho_n \rightarrow \sigma_{1,2}$ e estados de coexistência $(u_n, v_n) \in X \times X$ de (4.1) para os parâmetros γ e ρ_n tais que $u_n \rightarrow \bar{u}$ e $v_n \rightarrow \bar{v}$ em X . Devemos mostrar que $\bar{u}, \bar{v} > 0$. Seja

$$\xi_n = \frac{u_n}{|u_n|_\infty} \quad \text{e} \quad \eta_n = \frac{v_n}{|v_n|_\infty}.$$

Observe que $|\xi_n|_\infty = |\eta_n|_\infty = 1$. Assim, existem $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in P$ tais que

$$\xi_n \rightarrow \bar{\xi} \quad \text{e} \quad \eta_n \rightarrow \bar{\eta} \quad \text{em} \quad X.$$

Suponha que $\bar{u} = 0$. Então,

$$-D_1 \Delta \bar{\xi} = \delta \gamma \mathcal{K}(\bar{\xi}).$$

Como $\delta \gamma > \sigma_{1,1}$, temos que $\bar{\xi} = 0$, um absurdo, porque $|\xi_n|_\infty = 1$. Similar ao item (ii) acima, não podemos ter $\bar{v} = 0$, o que conclui a prova do Teorema.

□

Observação 4.8. *Embora estejamos assumindo que $\rho > 0$ por significado biológico, o teorema acima continua válido se $\rho = 0$.*

4.5 Estados de Coexistência Para o Caso $\delta = 1$

Nesta seção, vamos estudar existência de estados de coexistência de (4.1) para $\delta = 1$. Neste caso, o sistema (4.1) é simplesmente

$$\begin{cases} -D_1 \Delta u = \gamma F(u+v) \mathcal{K}(u) & \text{em } \Omega, \\ -D_2 \Delta v + \alpha v = \rho F(u+v) \mathcal{K}(v) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.18)$$

Observe que pela Proposição 4.2, para cada $\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$, o sistema (4.18) possui as soluções semi-triviais

$$y_1 = (\theta_\gamma, 0) \quad \text{e} \quad y_2 = (0, \theta_\rho).$$

Para este caso não temos resultados de não existência para este sistema o que não nos permite usar novamente resultados de bifurcação. Assim, vamos calcular os índices dessas soluções semi-triviais e da solução trivial usando a teoria do índice de ponto fixo com respeito ao cone positivo, que abordamos na Seção 4 do Capítulo 1. Para isso, consideremos primeiro os conjuntos:

$$N_1 = \{u \in P : u \leq |\theta_\gamma|_\infty + 1 \text{ em } \Omega\}, \quad N_2 = \{u \in P : u \leq |\theta_\rho|_\infty + 1 \text{ em } \Omega\} \quad \text{e} \quad N = N_1 \times N_2.$$

Seja $M > 0$ suficientemente grande e definamos a homotopia $H : [0, 1] \times N \longrightarrow X \times X$ por

$$H(t, u, v) = (L_1[Mu + \gamma F(u + tv)\mathcal{K}(u)], L_2[Mv + \rho F(tu + v)\mathcal{K}(v)]),$$

onde $L_1 = (-D_1\Delta + M)^{-1}$ e $L_2 = (-D_2\Delta + \alpha + M)^{-1}$, ambos com condições de fronteira de Dirichlet. Observe que, pela escolha de N_1 e N_2 a homotopia H está bem definida e é admissível. De fato, se existe $(u_0, v_0) \in \partial N$ tal que $H(t, u_0, v_0) = (u_0, v_0)$, para algum $t \in [0, 1]$, então

$$-\Delta u_0 = \gamma F(u_0 + tv_0)\mathcal{K}(u_0) \leq \gamma F(u_0)\mathcal{K}(u_0),$$

e, como na Proposição 4.4, obtemos $u_0 \leq \theta_\gamma$ em Ω , o que é uma contradição, pois $(u_0, v_0) \in \partial N$. Agora, façamos

$$E = X \times X \quad \text{e} \quad W = P \times P,$$

e recordemos os seguintes conjuntos da Seção 1.4:

$$W_y = \{x \in E : y + tx \in W, \text{ para algum } t > 0\} \quad \text{e} \quad S_y = \{x \in \overline{W}_y : -x \in \overline{W}_y\}.$$

Notemos que para $y_1 = (\theta_\gamma, 0)$ e $y_2 = (0, \theta_\rho)$, temos

$$W_{y_1} = X \times P, W_{y_2} = P \times X \quad \text{e} \quad S_{y_1} = X \times \{0\}, S_{y_2} = \{0\} \times X.$$

Por fim, seja $M_{y_1} = \{0\} \times X$, $M_{y_2} = X \times \{0\}$ e $P_{y_1} : E \longrightarrow M_{y_1}$, $P_{y_2} : E \longrightarrow M_{y_2}$ as projeções contínuas dadas por

$$P_{y_1}(u, v) = (0, v) \quad \text{e} \quad P_{y_2}(u, v) = (u, 0).$$

Vejamos agora o seguinte lema que terá muita utilidade para o nosso estudo:

Lema 4.9. *Assuma que T é um operador linear, compacto e fortemente positivo sobre um e.B.o \tilde{X} , com $\text{int}(P_{\tilde{X}}) \neq \emptyset$. Seja $u > 0$ um elemento positivo de \tilde{X} . Temos as seguintes conclusões:*

- (i) *Se $Tu > u$, então $\text{Spr } T > 1$.*
- (ii) *Se $Tu < u$, então $\text{Spr } T < 1$.*
- (iii) *Se $Tu = u$, então $\text{Spr } T = 1$.*

Prova. Vamos provar o item (i). Assuma que $u - Tu < 0$. Como T é um operador linear e fortemente positivo, então T é irredutível. Além disso, T é compacto e $\text{int}(P_{\tilde{X}}) \neq \emptyset$. Segue do Teorema 12.3 de [23] que $r(T) = \text{Spr } T$ é um autovalor simples de T^* com uma autofunção positiva associada. Então,

$$0 > (u, u^*) - (Tu, u^*) = (u, u^*) - (u, Tu^*) = (u, u^*) - r(T)(u, u^*),$$

de onde deduzimos que $\text{Spr } T = r(T) > 1$, pois $(u, u^*) > 0$. Os itens (ii) e (iii) seguem analogamente. □

Observação 4.10. Um resultado similar é provado em [50] assumindo que $P_{\tilde{X}}$ é um cone normal $\text{int}(P_{\tilde{X}}) \neq \emptyset$ pois o clássico Teorema de Krein-Rutman é usado (veja [2]). No entanto, vamos usar o resultado para o espaço $C_0^1(\bar{\Omega})$ cujo cone não é normal (veja [2]).

Com essas considerações, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.11. Assuma que $\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$, então as seguintes afirmações são verificadas:

- (i) $i_W(H(1, \cdot, \cdot), N) = 1$;
- (ii) $(0, 0)$ é uma solução isolada de $H(1, \cdot, \cdot)$, além disso, $i_W(H(1, \cdot, \cdot), (0, 0)) = 0$;
- (iii) $i_W(H(1, \cdot, \cdot), (0, \theta_\rho)) = 0$, se $\gamma > \sigma_1(D_1; 0; F(\theta_\rho(x))K)$;
- (iv) $i_W(H(1, \cdot, \cdot), (0, \theta_\rho)) = 1$, se $\gamma < \sigma_1(D_1; 0; F(\theta_\rho(x))K)$;
- (v) $i_W(H(1, \cdot, \cdot), (\theta_\gamma, 0)) = 0$, se $\rho > \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K)$;
- (vi) $i_W(H(1, \cdot, \cdot), (\theta_\gamma, 0)) = 1$, se $\rho < \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K)$.

Prova. (i) Pelas propriedades do índice,

$$i_W(H(1, \cdot, \cdot), N) = i_W(H(0, \cdot, \cdot), N) = \prod_{j=1}^2 i_P(H_j, N_j),$$

onde $i_P(H_j, N_j)$ é o índice de H_j sobre N_j com respeito a P ,

$$H_1(u) = L_1[Mu + \gamma F(u)\mathcal{K}(u)] \quad \text{e} \quad H_2(v) = L_2[Mv + \rho F(v)\mathcal{K}(v)].$$

Vamos mostrar que

$$i_P(H_1, N_1) = i_P(H_2, N_2) = 1.$$

Para isso, fixemos $M > 0$ e definamos as homotopias

$$G_1(t, u) = L_1(Mu + t\gamma F(u)\mathcal{K}(u))$$

$$\text{e } G_2(t, v) = L_2(Mv + t\rho F(v)\mathcal{K}(v)),$$

para cada $(t, u, v) \in [0, 1] \times N$. Pela propriedade de invariância por homotopia, obtemos

$$i_P(H_j, N_j) = i_P(G_j(1, \cdot), N_j) = i_P(G_j(0, \cdot), N_j) = i_P(G_j(0, \cdot), 0),$$

para $j = 1, 2$. Agora, observe que $\text{Spr } G_1(0, \cdot) < 1$ e $\text{Spr } G_2(0, \cdot) < 1$. De fato, por exemplo, se $r \in \mathbb{R}$ é tal que $G_1(0, u) = ru$, com $u \in N_1$ e $u \neq 0$, então

$$-D_1\Delta u = M \left(\frac{1}{r} - 1 \right) u.$$

Como $\lambda_1(-D_1\Delta) > 0$, então $r < 1$. Similarmente para $G_2(0, \cdot)$, pois $\alpha > 0$. Consequentemente, o item (i) segue pelo Lema 1.22.

(ii) Observe que

$$D_{(u,v)}H(1, 0, 0)(u, v) = \begin{pmatrix} L_1(Mu + \gamma\mathcal{K}(u)) \\ L_2(Mv + \rho\mathcal{K}(v)) \end{pmatrix}$$

Como $\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$, o operador $I - D_{(u,v)}H(1, 0, 0)$ é invertível sobre W , ou seja, 1 não é autovalor de $D_{(u,v)}H(1, 0, 0)$ com uma autofunção positiva associada. Vamos mostrar que o operador $T : P \rightarrow P$ definido por $Tu = L_1(Mu + \gamma\mathcal{K}(u))$ tem raio espectral maior que 1. Para isso, observe que sendo $M > 0$ suficientemente grande, podemos usar os argumentos da Proposição 2.8(i) e o Princípio do Máximo para concluir que o operador T é linear, compacto e fortemente positivo. Por outro lado, como $\gamma > \sigma_{1,1}$, Pelo Teorema 2.13, existe $\mu \in (\sigma_{1,1}, \gamma)$ tal que $\lambda_1(-D_1\Delta; \mu K) < 0$. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a $\lambda_1(-D_1\Delta; \mu K)$, então $T\varphi_1 > \varphi_1$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} T\varphi_1 > \varphi_1 &\Leftrightarrow L_1(M\varphi_1 + \gamma\mathcal{K}(\varphi_1)) > \varphi_1 \\ &\Leftrightarrow \gamma\mathcal{K}(\varphi_1) > \lambda_1(-D_1\Delta; \mu K)\varphi_1 + \mu\mathcal{K}(\varphi_1) \\ &\Leftrightarrow (\gamma - \mu)\mathcal{K}(\varphi_1) > \lambda_1(-D_1\Delta; \mu K)\varphi_1. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1(-D_1\Delta; \mu K) < 0$ e $\gamma > \mu$, então $T\varphi_1 > \varphi_1$. Pelo Lema 4.9, temos que

$$r_1 = \text{Spr } T > 1.$$

Seja $\Psi_1 > 0$ uma autofunção associada a r_1 . Então,

$$D_{(u,v)}H(1, 0, 0)(\Psi_1, 0) = r_1(\Psi_1, 0),$$

logo (ii) segue pelo Lema 1.22.

(v) Note primeiro que (iii) segue deste caso por simetria. Temos que

$$D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)(u, v) = \begin{pmatrix} L_1[Mu + \gamma F'(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\theta_\gamma)(u+v) + \gamma F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(u)] \\ L_2[Mv + \rho F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(v)] \end{pmatrix}.$$

Pelo Princípio do Máximo, o operador $D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ leva W_{y_1} em W_{y_1} . Vamos mostrar que $I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ é invertível sobre W_{y_1} . Para isso, seja $(u, v) \in W_{y_1}$ tal que

$$(I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0))(u, v) = (0, 0).$$

Como $\rho > \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K)$, a Proposição 2.8(iii) implica que $v = 0$. Logo,

$$-D_1\Delta u - \gamma F'(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\theta_\gamma)u - \gamma F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(u) = 0.$$

Por outro lado, pela Proposição 3.5(iii)

$$\lambda_1(-D_1\Delta - \gamma F'(\theta_\gamma(x))\mathcal{K}(\theta_\gamma)(x); \gamma F(\theta_\gamma(x))K) > 0.$$

Assim, pela Proposição 2.8(i) temos que $u = 0$. Conseqüentemente, $I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ é invertível sobre W_{y_1} . Agora, pelo Lema 1.23 basta mostrar que o operador $I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ não é sobrejetivo. Suponha por absurdo que seja e tome $v_0 \in P \setminus \{0\}$ tal que $L_2v_0 \in P$, então existe $\bar{v} \in P$ e $f \in X$ satisfazendo

$$(I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0))(\bar{u}, \bar{v}) = (f, L_2v_0),$$

ou seja,

$$-D_2\Delta\bar{v} + \alpha\bar{v} - \rho F(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)\bar{v}(y)dy = v_0 > 0.$$

Pelo Lema 2.7, temos

$$\rho < \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K),$$

um absurdo. Portanto, $I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ não é sobrejetivo, e (v) segue pelo Lema 1.23.

(vi) Como no item anterior, note que (iv) segue por simetria. Agora observe que o operador $I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ é invertível sobre E . De fato, seja $(u, v) \in E$ tal que

$$(I - D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0))(u, v) = (0, 0).$$

Novamente da Proposição 2.8(iii) temos que $v = 0$ e

$$-D_1\Delta u - \gamma F'(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\theta_\gamma)u - \gamma F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(u) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Agora, vamos mostrar que

$$\text{Spr } (P_{y_1} (D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)) |_{M_{y_1}}) < 1.$$

Isso é equivalente a mostrar que o operador $T : X \rightarrow X$ definido por

$$Tv = L_2(Mv + \rho F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(v))$$

possui raio espectral menor que 1. Para isso, observe que novamente T é linear, compacto e fortemente positivo. Por outro lado, sendo $\rho < \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K)$, existe

$$\mu \in (\rho, \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K))$$

tal que $\lambda_1(-D_2\Delta + \alpha; \mu F(\theta_\gamma(x))K) > 0$. Se $\varphi_1 > 0$ é uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-D_2\Delta + \alpha; \mu F(\theta_\gamma(x))K)$, então $T\varphi_1 < \varphi_1$. De fato, temos

$$\begin{aligned} T\varphi_1 < \varphi_1 &\Leftrightarrow L_2(M\varphi_1 + \rho F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\varphi_1)) < \varphi_1 \\ &\Leftrightarrow M\varphi_1 + \rho F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\varphi_1) < -D_2\Delta\varphi_1 + \alpha\varphi_1 + M\varphi_1 \\ &\Leftrightarrow (\rho - \mu)F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\varphi_1) < \lambda_1(-D_2\Delta + \alpha; \mu F(\theta_\gamma(x))K)\varphi_1. \end{aligned}$$

Como $\lambda_1(-D_2\Delta + \alpha; \mu F(\theta_\gamma(x))K) > 0$ e $\rho < \mu$, então $T\varphi_1 < \varphi_1$. Pelo Lema 4.9, temos que

$$\text{Spr } P_{y_1} (D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)) |_{M_{y_1}} < 1.$$

Por fim, vamos mostrar que $\chi = 0$, onde χ é a soma das multiplicidades de todos os autovalores de $D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ maiores que 1. Seja λ um autovalor de $D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)$ com autofunção (u_0, v_0) . Temos duas alternativas, $v_0 \neq 0$ ou $v_0 = 0$. Se $v_0 \neq 0$, λ é um autovalor de

$$P_{y_1} (D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)) |_{M_{y_1}}.$$

Como $P_{y_1} (D_{(u,v)}H(1, \theta_\gamma, 0)) |_{M_{y_1}}$ tem raio espectral menor que 1, obtemos $\lambda < 1$ e $\chi=0$, nesse caso. Para $v_0 = 0$, temos $u_0 \neq 0$. Assim,

$$L_1 (Mu_0 + \gamma F'(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\theta_\gamma)u_0 + \gamma F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(u_0)) = \lambda u_0.$$

É suficiente mostrar que o raio espectral do operador $T : X \rightarrow X$, definido

$$T(u) = L_1 (Mu + \gamma F'(\theta_\gamma)\mathcal{K}(\theta_\gamma)u + \gamma F(\theta_\gamma)\mathcal{K}(u)),$$

é menor que 1. Para isso, considere $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$m(x) = -\gamma F'(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)\theta_\gamma(y)dy.$$

Observe que o operador T é fortemente positivo. De fato, seja $f \in P$ e $u = T(f)$, obtemos

$$(-D_1\Delta + M)u = (M - m(x))f(x) + \gamma F(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)f(y)dy.$$

Sendo $M > 0$ suficientemente grande, o Princípio do Máximo nos dá que $T(f) = u \in \text{int } P$, ou seja, T é fortemente positivo. Além disso, T é um operador linear e compacto. Por outro lado, seja $\varphi_1 > 0$ é uma autofunção associada a $\lambda_1(-D_1\Delta + m(x); \gamma F(\theta_\gamma(x))K)$. Observe que

$$\begin{aligned} (-D_1\Delta + M)\varphi_1 &= \lambda_1(-D_1\Delta + m(x); \gamma F(\theta_\gamma)(x)K)\varphi_1 + (M - m(x))\varphi_1 \\ &\quad + \gamma F(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)\varphi_1(y)dy \\ &> M\varphi_1 - m(x)\varphi_1 + \gamma F(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)\varphi_1(y)dy, \end{aligned}$$

ou seja, $\varphi_1 > T(\varphi_1)$. Pelo Lema 4.9, temos que $\text{Spr } T < 1$, conseqüentemente, $\lambda < 1$ e $\chi=0$, também neste caso. Portanto, (v) segue pelo Lema 1.23.

□

Com conseqüência do Teorema 4.11, temos os seguintes resultados:

Teorema 4.12. *Assuma que $\delta = 1$, $\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$. Se*

$$(\gamma - \sigma_1(D_1; 0; F(\theta_\rho(x))K)) \cdot (\rho - \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K)) > 0, \quad (4.19)$$

então existe pelo menos um estado de coexistência de (4.18).

Dependendo do comportamento das funções do lado direito de (4.19), pelo Teorema 4.11, obtemos os seguintes corolários:

Corolário 4.13. *Assuma que $\delta = 1$, $\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$. Se*

$$\gamma > \sigma_1(D_1; 0; F(\theta_\rho(x))K) \quad e \quad \rho > \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K),$$

então existe pelo menos um estado de coexistência de (4.18). Além disso, a soma dos índices de todos os estados de coexistência de (4.18) é 1.

Corolário 4.14. *Assuma que $\delta = 1$, $\gamma > \sigma_{1,1}$ e $\rho > \sigma_{1,2}$. Se*

$$\gamma < \sigma_1(D_1; 0; F(\theta_\rho(x))K) \quad e \quad \rho < \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K),$$

então existe pelo menos um estado de coexistência de (4.18). Além disso, a soma dos índices de todos os estados de coexistência de (4.18) é -1 .

Observação 4.15. *Recordamos que quando uma solução isolada tem índice 1 (resp. -1), ela é geralmente estável (resp. instável). Com respeito ao problema parabólico associado, indicamos o livro [43], por exemplo.*

4.6 Região de Coexistência e Interpretações

Nesta seção, vamos analisar a região de coexistência de (4.1), ou seja, vamos estudar a região do plano $(\gamma - \rho) \subset \mathbb{R}^2$ definida por (4.11) quando $\delta \neq 1$ e por (4.19) quando $\delta = 1$. Para isso, vamos supor novamente que K satisfaz (3.24), isto é,

$$K(x, x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Primeiro, vejamos o seguinte resultado de convergência:

Proposição 4.16. *O seguinte limite é verificado*

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma_1(d; \beta; F(\theta_\sigma[d; \beta; K](x))K) = +\infty.$$

Prova. Vamos denotar $\theta_\sigma[d; \beta; K]$ simplesmente por θ_σ . Suponha que exista $M > 0$ tal que

$$\sigma_n = \sigma_1(-d\Delta + \beta; F(\theta_n(x))K) \leq M, \text{ para todo } n > \sigma_1(d; \beta; K).$$

Como $F \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1(-d\Delta + \beta; \sigma_n F(\theta_n(x))K) \\ &\geq \lambda_1(-d\Delta + \beta; MF(\theta_n(x))K) \\ &\geq \lambda_1(-d\Delta + \beta; MK). \end{aligned}$$

Assim, a sequência $\{\lambda_1(-d\Delta + \beta; MF(\theta_n(x))K)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Seja $\varphi_n > 0$ autofunção associada a $\lambda_1(-d\Delta + \beta; MF(\theta_n(x))K)$, com $|\varphi_n|_2 = 1$. Então, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, obtemos

$$\begin{aligned} d \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi + \beta \int_{\Omega} \varphi_n \varphi &= \lambda_1(-d\Delta + \beta; MF(\theta_n(x))K) \int_{\Omega} \varphi_n \varphi \\ &\quad - \int_{\Omega} MF(\theta_n(x)) \left(\int_{\Omega} K(x, y) \varphi_n(y) dy \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Tomando $\varphi = \varphi_n$ temos que $\{\varphi_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, fazendo

$$\lambda_n = \lambda_1(-d\Delta + \beta; MF(\theta_n(x))K),$$

a menos de subsequência,

$$\begin{cases} \lambda_n \rightarrow \lambda_1^*, & \text{em } \mathbb{R} \\ \varphi_n \rightarrow \varphi^*, & \text{em } H_0^1(\Omega) \\ \varphi_n \rightarrow \varphi^*, & \text{em } L^2(\Omega), \end{cases}$$

com $\varphi_1^* \geq 0$ em Ω e $|\varphi_1^*|_2 = 1$. Pela Proposição 3.6, $\theta_n \rightarrow 1$ uniformemente sobre cada compacto $A \subset \Omega$, quando $n \rightarrow +\infty$. Assim, $F(\theta_n) \rightarrow 0$ uniformemente sobre cada compacto $A \subset \Omega$, quando $n \rightarrow +\infty$. Logo, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, temos

$$\int_{\Omega} MF(\theta_n(x)) \left(\int_{\Omega} K(x, y) \varphi_n(y) dy \right) \varphi(x) dx \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

De onde segue que

$$d \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \beta \int_{\Omega} \varphi^* \varphi = \lambda_1^* \int_{\Omega} \varphi^* \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Sendo $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ denso em $H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$d \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + \beta \int_{\Omega} \varphi^* \varphi = \lambda_1^* \int_{\Omega} \varphi^* \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $\lambda_1^* = \lambda_1(-d\Delta + \beta) > 0$. Mas isso é um absurdo, pois $\lambda_n \rightarrow \lambda_1^*$ e

$$\lambda_n = \lambda_1(-d\Delta + \beta; MF(\theta_n(x))K) \leq 0,$$

o que conclui a prova. □

Agora vamos analisar a região de coexistência. Para tanto, precisamos introduzir a função $\mathcal{F}_\delta : [\sigma_{1,2}, +\infty) \rightarrow [\frac{\sigma_{1,1}}{\delta}, +\infty)$ definida por

$$\mathcal{F}_\delta(\rho) = \sigma_1(D_1; 0; \delta F(\theta_\rho(x))K)$$

para $\delta \neq 1$ e a função $\mathcal{G} : [\sigma_{1,1}, +\infty) \rightarrow [\sigma_{1,2}, +\infty)$ definida por

$$\mathcal{G}(\gamma) = \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K).$$

para $\delta = 1$. As propriedades destas funções serão importantes para o estudo da região de coexistência, tais propriedades são dadas na próxima proposição.

Proposição 4.17. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $\mathcal{F}_\delta(\sigma_{1,2}) = \frac{\sigma_{1,1}}{\delta}$ e $\mathcal{G}(\sigma_{1,1}) = \sigma_{1,2}$;
- (ii) As aplicações $\rho \rightarrow \mathcal{F}_\delta(\rho)$ e $\gamma \rightarrow \mathcal{G}(\gamma)$ são contínuas e não-decrescentes;
- (iii) $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_\delta(\rho) = +\infty$ e $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \mathcal{G}(\gamma) = +\infty$;
- (iv) $\lim_{\delta \rightarrow 1} \mathcal{F}_\delta(\rho) = \mathcal{F}_1(\rho)$, se $\rho \in \Lambda$, com $\Lambda \subset \mathbb{R}$ compacto;
- (v) $\mathcal{F}_\delta(\rho) > \mathcal{F}_1(\rho)$, para todo $\rho \in [\sigma_{1,2}, +\infty)$ e $\delta < 1$.

Prova. Para (i) observe que, se $\rho = \sigma_{1,2}$, a Proposição 3.5(i) implica que $\theta_\rho = 0$. Assim, $F(\theta_\rho) = 1$ e

$$\mathcal{F}_\delta(\sigma_{1,2}) = \sigma_1(D_1; 0; \delta K) = \frac{\sigma_{1,1}}{\delta}.$$

Analogamente para $\gamma = \sigma_{1,1}$ temos $\theta_\gamma = 0$, logo $\mathcal{G}(\sigma_{1,1}) = \sigma_{1,2}$. O (ii) segue imediatamente da Proposição 3.5(ii). Além disso, (iii) segue da Proposição 4.16. Por fim, os itens (iv) e (v) seguem pelo Corolário 2.14.

□

Pela proposição acima, temos as seguintes possíveis regiões de coexistência de (4.1) dadas na Figura 4.1 para o caso $\delta \neq 1$ e nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 para $\delta = 1$.

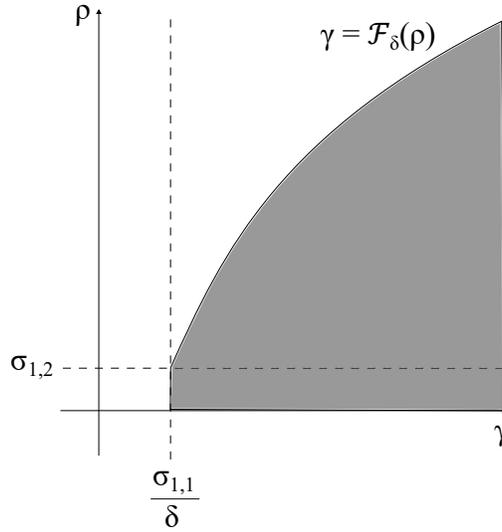


Figura 4.1: Região de coexistência de (4.1) para $\delta \neq 1$.

Observação 4.18. Note que ainda podemos estudar a dependência das funções \mathcal{F}_δ e \mathcal{G} acima com respeito a α . Com um argumento similar ao da Proposição 4.17, podemos mostrar que:

- a) $\sigma_{1,2}$ é uma função contínua e crescente sobre α . Além disso, $\sigma_{1,2} \rightarrow +\infty$ quando $\alpha \rightarrow +\infty$.
- b) Fixados $\delta \in [0, 1]$ e $\rho > \sigma_{1,2}$, a função $\mathcal{F}_\delta(\rho)$ decresce quando α cresce, e $\mathcal{F}_\delta(\rho) = \sigma_{1,1}/\delta$ quando α é grande.
- c) Fixado $\gamma > \sigma_{1,1}$, a função $\mathcal{G}(\gamma)$ cresce quando α cresce, e $\mathcal{G}(\gamma) \rightarrow +\infty$ quando $\alpha \rightarrow +\infty$.

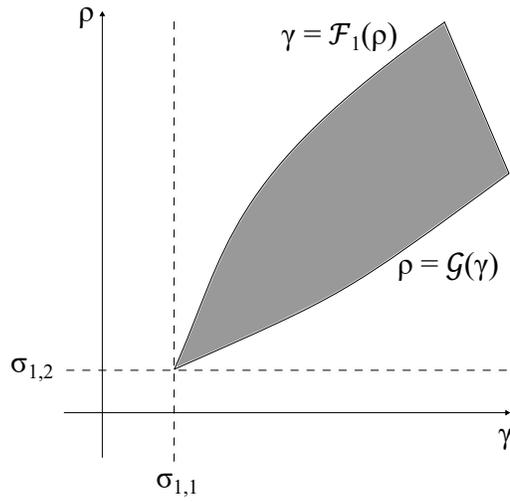


Figura 4.2: Possível região de coexistência de (4.1) para $\delta = 1$. Neste caso, a soma dos índices dos estados de coexistência de (4.1) é 1.

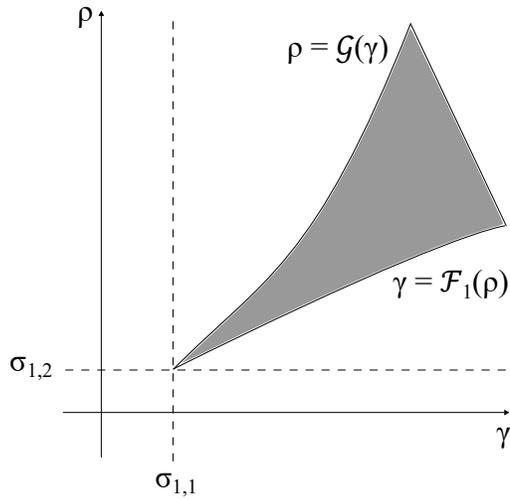


Figura 4.3: Possível região de coexistência de (4.1) para $\delta = 1$. Neste caso, a soma dos índices dos estados de coexistência de (4.1) é -1.

Observação 4.19. *Vamos estudar a região de coexistência de (4.1) e interpretar os resultados obtidos nas seções anteriores. Denotemos por C_δ e C_1 as regiões de coexistência de (4.1)*

(Teorema 4.7 e Teorema 4.12) para $0 < \delta < 1$ e $\delta = 1$, respectivamente, ou seja,

$$C_\delta = \{(\gamma, \rho) \in \mathbb{R}^2; \rho > 0 \text{ e } \gamma > \mathcal{F}_\delta(\rho)\}$$

$$\text{e } C_1 = \{(\gamma, \rho) \in \mathbb{R}^2; (\gamma - \mathcal{F}_1(\rho)) \cdot (\rho - \mathcal{G}(\gamma)) > 0\}.$$

Denotemos também por E_δ e E_1 os conjunto de extinção de (4.1) (Proposição 4.5):

$$E_\delta = \left\{(\gamma, \rho) \in \mathbb{R}^2; \gamma \leq \frac{\sigma_{1,1}}{\delta}\right\}, \text{ para } \delta \neq 1$$

$$\text{e } E_1 = \{(\gamma, \rho) \in \mathbb{R}^2; \gamma \leq \sigma_{1,1} \text{ e } \rho \leq \sigma_{1,2}\}, \text{ para } \delta = 1.$$

Na Figura 4.1 representamos C_δ e nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4 diferentes possibilidades de C_1 .

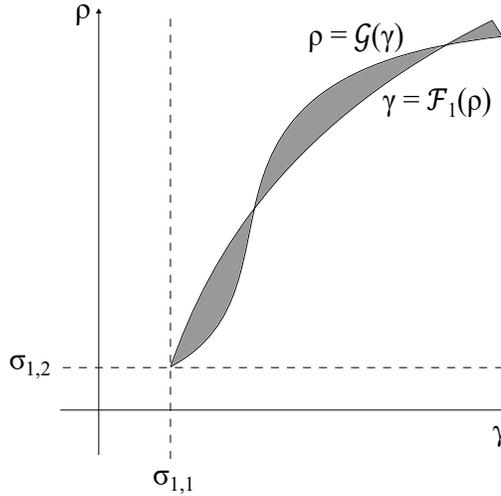


Figura 4.4: Possível região de coexistência de (4.1) para $\delta = 1$. Neste caso, existem regiões onde a soma dos índices dos estados de coexistência de (4.1) é 1 (quando \mathcal{F}_1 está por cima de \mathcal{G}) e outras onde a soma é -1 (quando \mathcal{G} está por cima de \mathcal{F}_1).

Analisemos o caso $0 < \delta < 1$. Observe que $E_\delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ quando $\delta \rightarrow 0$ (ver Figura 4.5), logo para cada $\gamma > 0$ e $\rho > 0$ existe δ_0 tal que se $\delta \leq \delta_0$ ambas espécies não coexistem. Assim, apenas a solução trivial $(u, v) = (0, 0)$ e a solução semi-trivial $(u, v) = (0, \theta_\rho)$ existem para (4.1) (esta última solução se $\rho > \sigma_{1,2}$). Isto tem um sentido lógico: se δ é pequeno as células (CTCs) se dividem em uma célula (CTC) e em outra (CT), então (CTCs) será extinta. Contudo, fixado $\gamma > 0$, para $\delta\gamma > \sigma_{1,1}$ existe pelo menos um estado de coexistência para $\rho \in (0, \rho_0(\delta))$, onde $\gamma = \mathcal{F}_\delta(\rho_0(\delta))$ (veja a Figura 4.1).

Vejamos agora $\delta = 1$. Neste caso, as células (CTCs) se dividem em duas (CTCs), ainda assim se $\gamma \leq \sigma_{1,1}$ novamente existem somente a solução trivial $(0, 0)$ e a semi-trivial $(0, \theta_\rho)$ para (4.1), a última se $\rho > \sigma_{1,2}$. Se $\gamma > \sigma_{1,1}$ então existem $\rho_1, \rho_2 > \sigma_{1,2}$ tais que $\rho_1 = \mathcal{G}(\gamma)$, $\gamma = \mathcal{F}_1(\rho_2)$ e (4.1) possui estado de coexistência para cada $\rho \in J$, onde $J = (\min \{\rho_1, \rho_2\}, \max \{\rho_1, \rho_2\})$ (ver Figuras 4.2, 4.3 e 4.4). Note ainda que J pode ser eventualmente um conjunto vazio (veja a Figura 4.4). Finalmente, observe que $C_\delta \rightarrow C_1$ quando $\delta \rightarrow 1$ (ver Figura 4.6). Esta mudança drástica no comportamento da região de coexistência é devido a ausência de soluções semi-triviais da forma $(u, 0)$ quando $\delta \neq 1$.

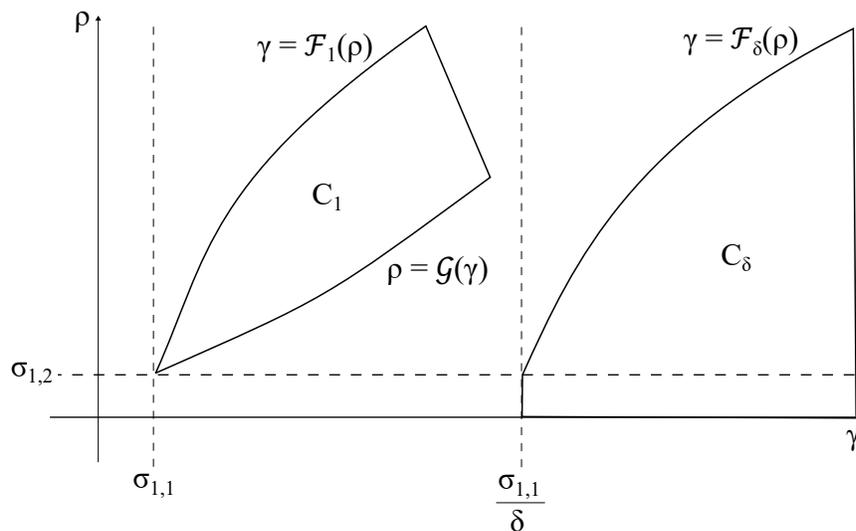


Figura 4.5: Região de coexistência de (4.1) para δ próximo de 0.

Em geral, não é uma tarefa fácil determinar a posição relativa entre as curvas $\gamma = \mathcal{F}_1(\rho)$ e $\rho = \mathcal{G}(\gamma)$. Essa dificuldade é discutida em [15] e [40] para o clássico modelo de competição do tipo Lotka-Volterra. No lema abaixo, vamos estudar um caso particular da posição relativa entre essas curvas, o qual assegura que ambas as curvas então estão na região

$$\{(\gamma, \rho) \in \mathbb{R}^2; \rho \geq \gamma\}.$$

Lema 4.20. *Assuma que $D_2 \geq D_1$. Então,*

$$\gamma < \mathcal{G}(\gamma) \quad e \quad \mathcal{F}_1(\rho) < \rho. \quad (4.20)$$

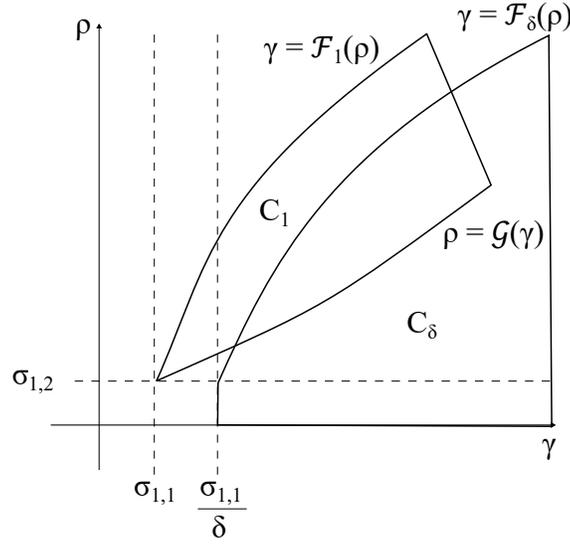


Figura 4.6: Região de coexistência de (4.1) para δ próximo de 1.

Prova. Vamos mostrar a primeira desigualdade de (4.20), a segunda segue similarmente. Lembremos que

$$\mathcal{G}(\gamma) = \sigma_1(D_2; \alpha; F(\theta_\gamma(x))K) \iff \lambda_1(-D_2\Delta + \alpha; \mathcal{G}(\gamma)F(\theta_\gamma(x))K) = 0.$$

Assim, para mostrar que $\gamma < \mathcal{G}(\gamma)$ devemos provar que

$$\lambda_1(-D_2\Delta + \alpha; \gamma F(\theta_\gamma(x))K) > 0.$$

Pelo Lema 2.7, é suficiente encontrarmos uma super solução estrita \bar{u} para o problema associado ao autovalor acima. Tomando $\bar{u} = \theta_\gamma$, temos

$$\begin{aligned} -D_2\Delta\theta_\gamma + \alpha\theta_\gamma &= \gamma \left(\frac{D_2}{D_1} - 1 \right) F(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)\theta_\gamma(y)dy + \alpha\theta_\gamma \\ &\quad + \gamma F(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)\theta_\gamma(y)dy. \end{aligned}$$

Logo,

$$-D_2\Delta\theta_\gamma + \alpha\theta_\gamma - \gamma F(\theta_\gamma) \int_{\Omega} K(x, y)\theta_\gamma(y)dy > 0,$$

de onde segue o resultado. □

4.7 Conclusões

Em dados do ano de 2017, o câncer mata 8,8 milhões de pessoas anualmente no mundo. Por esse motivo, muitos campos científicos estão engajados em compreender e solucionar este problema. Porém, este estudo é difícil porque o câncer é um fenômeno complexo que envolve muitos processos bioquímicos e fisiológicos, os quais não são completamente compreendidos. A modelagem matemática também pode contribuir para a compreensão, descrição e previsão da evolução do câncer, oferecendo seu próprio ponto de vista.

Neste capítulo, estudamos a existência de estados de coexistência para um sistema elíptico não-local que surge no estudo do crescimento de células-tronco cancerígenas (*CTCs*). O modelo considera a dinâmica dessas células quando elas competem por espaço e recursos com células tumorais (*CTs*). Em [31] uma versão simplificada (na verdade uma EDO, onde a contribuição progênie depende apenas da densidade no destino e a densidade é uniforme) deste modelo foi proposta para investigar o “paradoxo do crescimento tumoral”: *“o aumento da taxa de morte espontânea das células (CTs) reduz o tempo de espera para as células (CTCs) se proliferarem e migrarem, facilitando assim a progressão do tumor”*. Neste artigo, os autores mostram que os únicos estados estacionários são $(0, 0)$, $(0, v_0)$ (ambas instáveis) e $(u_0, 0)$ globalmente estável. Assim, as células (*CTs*) tendem a morrer. Além disso, os autores comparam diferentes tamanhos de tumores mudando α , e eles mostram que o tumor cresce quando α cresce, confirmando as observações do paradoxo do crescimento tumoral. Como conclusão, eles afirmam que *uma terapia bem-sucedida deve erradicar as células (CTCs)*.

Neste capítulo, consideramos o modelo geral (incluindo a difusão, densidade populacional não-uniforme e a contribuição progênie dependendo da origem e do destino) e concluimos que (ver Observações 4.18 e 4.19), fixadas as taxas de crescimento das células (*CTCs*) e (*CTs*):

- 1 - Diferente do modelo em [31], os estados de coexistência para (4.1) existem (Teorema 4.7 e Teorema 4.12).
- 2 - Assuma que $\delta \neq 1$.
 - (a) Se a competição entre (*CTCs*) e (*CTs*) é reduzida (aumentando a taxa de morte α das células (*CTs*)), o tumor não tende a zero; de fato, ambas as população coexistem.

(b) Por outro lado, se fixarmos α e δ for pequeno, a única população que deve persistir é a de células (CTs), levando o tumor a um estado de dormência. Lembramos que δ pequeno significa que cada célula (CTC) dá origem a uma célula (CTC) e a outra célula (CT).

(c) Combinando os parâmetros α grande e δ pequeno, obtemos a extinção de ambas as populações, e assim, a eliminação do tumor.

3 - Assuma que $\delta = 1$ (lembre-se que neste caso todas as células ($CTCs$) dão origem a duas células ($CTCs$)).

(d) Se a competição entre as células é reduzida, então ($CTCs$) levam as (CTs) à extinção; e então, ocorre uma liberação de ($CTCs$) e sua proliferação é renovada, o que pode levar ao aumento do tamanho do tumor.

Capítulo 5

Estudo de uma Equação Singular

Não-Local por meio de uma Teoria de Bifurcação Não-Padrão

Neste capítulo, vamos usar a teoria de bifurcação para estudar o seguinte problema elíptico não-local e singular:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - g(x, v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde Ω é um domínio limitado e regular do \mathbb{R}^N , $A \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula. O operador \mathcal{L} é uniformemente elíptico e da forma (1.1) com coeficientes satisfazendo (1.2). O número real λ é um parâmetro de bifurcação e $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em $C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ tal que $g(\cdot, t) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, para cada $t \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in (0, 1)$, e ainda satisfaz uma das seguintes hipóteses:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x, t)}{t} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (5.2)$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x, t)}{t} = g_0(x), \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (5.3)$$

onde $g_0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, não-negativa e não-identicamente nula.

Como aplicação dos resultados obtidos para a equação (5.1), estudaremos dois importantes problemas não-locais com forma explícita para a função g . Para o caso em que g satisfaz (5.2) vamos considerá-la da forma

$$g(x, t) = f(x)t^p,$$

com $p > 1$ e $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ estritamente positiva em $\bar{\Omega}$, onde $\alpha \in (0, 1)$. Neste caso, (5.1) é a equação logística clássica com o termo não-local adicionado na primeira parcela, ou seja, (5.1) é da forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - f(x)v^p & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.4)$$

Para o caso em que g satisfaz (5.3) vamos considerá-la da forma

$$g(x, t) = \frac{\gamma B(x)t}{1+t},$$

onde $B \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ é uma função não-negativa e não-identicamente nula, com $\alpha \in (0, 1)$. Neste caso, (5.1) é uma equação de Holling-Tanner do Tipo II com o termo não-local adicionado na primeira parcela. Isto significa que (5.1) é da forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - \frac{\gamma B(x)v}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.5)$$

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na Seção 5.1, vamos motivar o que nos levou a estudar (5.1). Na Seção 5.2, vamos associar ao problema (5.1) um operador compacto e contínuo K_λ , tal que soluções positivas de (5.1) são os zeros de K_λ . Com isso, provaremos que existe um único possível ponto de bifurcação de soluções positivas de (5.1) desde a solução trivial. Mostraremos ainda que o índice de K_λ muda quando λ cruza este ponto de bifurcação, o que irá provar a existência de um contínuo de soluções positivas de (5.1) que bifurcam desde a solução trivial. Na Seção 5.3, vamos aplicar os resultados obtidos para (5.1) a equação logística não-local e, com a ajuda de cotas a priori e resultados de não existência, vamos estudar o comportamento global do contínuo obtido na Seção 5.2. Analogamente, na Seção 5.4, vamos aplicar estes resultados à equação não-local de Holling-Tanner e estudar o comportamento global do contínuo.

5.1 Motivação

A partir do pioneiro trabalho de Furter e Grinfeld [39], termos não-locais foram incluídos em modelos de dinâmica populacional para se levar em conta que a variação da espécie em um ponto depende não só do comportamento dela nesse ponto, mas em todo o habitat. Especificamente, em [38] e [67] um modelo de reação-difusão-quimiotaxia do tipo predador-presa é proposto para modelar a interação de duas populações, uma de amebas e a outra de bactérias virulentas:

$$\begin{cases} u_t = D_1 \Delta u + u(1 - u - v), \\ v_t = D_2 \Delta v - \chi \nabla \cdot (v \nabla u) - \mu v + \delta v \frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} - \frac{\gamma uv}{1 + \tau v}, \end{cases} \quad (5.6)$$

em um habitat Ω , onde Ω é um domínio regular de \mathbb{R}^N , com $N = 1$ ou $N = 2$. Em (5.6), $u(x, t)$ e $v(x, t)$ denotam a concentração de bactérias e amebas, respectivamente, no tempo t e na posição x . Os números D_1 e D_2 representam a taxa de difusão das bactérias e das amebas, respectivamente. O número χ é um coeficiente de quimiotaxia e μ é a taxa de mortalidade intrínseca das amebas. O último termo da segunda equação de (5.6) é devido ao fato de que a população bacteriana sob investigação pertence a uma classe virulenta, isto é, as amebas são infectadas por bactérias e morrem. Os autores levam isto em consideração assumindo que as amebas são atacadas por bactérias seguindo uma função de tipo Holling II, com tempo de manipulação τ e taxa de matança γ . O termo não-local na segunda equação de (5.6) descreve o fato de que, na escassez de alimentos, as amebas se comportam como um único organismo, a fim de redistribuir o alimento entre todas as células; e δ é a taxa de crescimento das amebas.

Vamos estudar um caso estacionário do sistema (5.6) no próximo capítulo desta tese, tal estudo necessita de um bom conhecimento de cada uma das equações. Isto motiva os estudos deste capítulo, uma vez que, no caso estacionário, quando fixamos a população de bactérias u , a população ameboide v satisfaz uma equação da forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - g(x, v) & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

Note que em (5.7) estamos assumindo, por simplicidade, que $\chi = 0$, $\mu = 0$ e $\tau = 1$.

5.2 Teoria de Bifurcação

Nesta seção, vamos usar a teoria de bifurcação para estudar (5.1). No que segue, denotaremos por φ_1 a autofunção principal associada a \mathcal{L} tal que $|\varphi_1|_\infty = 1$ e adotaremos a seguinte notação

$$\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) := \lambda_1(\mathcal{L}) \left(\frac{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx} \right).$$

Dado $c \in L^\infty(\Omega)$, denotaremos

$$c_L := \text{ess inf } c, \quad c_M := \text{ess sup } c.$$

Afim de aplicar a teoria de bifurcação para (5.1), consideremos o espaço $X = C_0(\overline{\Omega})$, munido com a norma usual $\|\cdot\|_\infty$, e o operador $K_\lambda : X \rightarrow X$ definido por

$$K_\lambda(v) = v - L(f_0(\lambda, v)),$$

onde $L = (\mathcal{L} + K)^{-1}$, com condições de fronteira de Dirichlet, $K > 0$ é suficientemente grande e $f_0 : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$f_0(\lambda, v) = \lambda v^+ \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v^+(x) dx}{\int_{\Omega} v^+(x) dx} \right) + K v^+ - g(x, v^+)$$

se $v^+ \neq 0$ e $f_0(\lambda, v) = 0$ se $v \leq 0$. Note que a função f_0 é contínua. Sendo K suficientemente grande, podemos supor que $\lambda_1(\mathcal{L} + K) > 0$. Logo, pelo Lema 1.17, temos que L é um operador fortemente positivo. Das imersões compactas dos espaços de Sobolev, o operador K_λ é uma perturbação compacta da identidade e $v \in X$ é um solução positiva de (5.1) se, e somente se,

$$K_\lambda(v) = 0, \tag{5.8}$$

isto é, soluções positivas de (5.1) são os zeros do operador K_λ .

O próximo lema nos mostra os possíveis pontos de bifurcação de soluções não-triviais de (5.8) desde a solução trivial.

Lema 5.1. *Suponha que g satisfaça (5.2). Sejam $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega})$, $n \geq 1$, com v_n solução não-trivial de (5.8) para $\lambda = \lambda_n$. Se*

$$\lambda_n \rightarrow \lambda^* \quad \text{em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v_n \rightarrow 0 \quad \text{em } C(\overline{\Omega}), \tag{5.9}$$

com $\lambda^* \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda^* = \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) \quad \text{e} \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty} \rightarrow \varphi_1 \quad \text{em } C^1(\overline{\Omega}). \tag{5.10}$$

Prova. Observe primeiro que, pelo Princípio do Máximo Forte do Lemma 1.17, obtemos que $v_n > 0$ em Ω , para todo $n \geq 1$. Assim, dividindo por $\|v_n\|_\infty$ em ambos os membros de (5.8), temos que w_n é solução da seguinte equação:

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + K)w_n = \left[\lambda_n \left(\frac{\int_\Omega A(x)w_n(x) dx}{\int_\Omega w_n(x) dx} \right) + K \right] w_n - \frac{g(x, v_n)}{\|v_n\|_\infty} & \text{em } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.11)$$

Note que

$$\left| \lambda_n \left(\frac{\int_\Omega A(x)w_n(x) dx}{\int_\Omega w_n(x) dx} \right) \right| \leq |\lambda_n|A_M.$$

Por (5.2) e pela regularidade elíptica, para n suficientemente grande, temos que existem constantes C e ε tais que

$$\|w_n\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C(|\lambda_n|A_M + K + \varepsilon)\|w_n\|_\infty, \quad (5.12)$$

para cada $q \geq 1$. Uma vez que $\|w_n\|_\infty = 1$ e (λ_n) é convergente em \mathbb{R} , (5.12) implica que (w_n) é limitada em $W^{2,q}(\Omega)$, para cada $q \geq 1$. Pelas imersões compactas dos espaços de Sobolev, a menos de subsequência, (w_n) converge em $C^1(\bar{\Omega})$ para algum $w \geq 0$. É claro que $\|w\|_\infty = 1$, ou seja, $w \neq 0$ em Ω . Por outro lado, as imersões contínuas dos espaços de Sobolev implicam que $v \in C^{1,1-\frac{N}{q}}(\bar{\Omega})$, para cada $q > N$. Como $g(\cdot, t) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, para cada $t \in \mathbb{R}$, das imersões compactas dos espaços de Schauder (ver [41]), obtemos que $w_n \rightarrow w$ em $C^2(\bar{\Omega})$. Utilizando o limite (5.9) e essas convergências em (5.11), temos que w satisfaz o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = \lambda^* \cdot \left(\frac{\int_\Omega A(x)w(x) dx}{\int_\Omega w(x) dx} \right) w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, w é uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(\mathcal{L})$ com $|w|_\infty = 1$, ou seja, $w = \varphi_1$ em Ω .

Portanto,

$$\lambda^* = \lambda_1(\mathcal{L}) \left(\frac{\int_\Omega \varphi_1(x) dx}{\int_\Omega A(x)\varphi_1(x) dx} \right) = \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1),$$

o que prova (5.10). □

Observação 5.2. O lema acima nos mostra que quando g satisfaz (5.2), então $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$ é o único possível ponto de bifurcação de soluções de (5.8) desde a solução trivial.

Podemos usar o Lema 5.1 para provar um resultado similar no caso em que g satisfaz (5.3). Para isso, denotaremos por $\overline{\varphi}_1$ a autofunção principal associada a $\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))$ tal que $|\overline{\varphi}_1|_\infty = 1$ e adotaremos a seguinte notação:

$$\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1) := \lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x)) \left(\frac{\int_{\Omega} \overline{\varphi}_1(x) dx}{\int_{\Omega} A(x)\overline{\varphi}_1(x) dx} \right),$$

O próximo resultado mostra que, quando g satisfaz (5.3), $\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1)$ é o único possível ponto de bifurcação de soluções de (5.8) desde a solução trivial.

Corolário 5.3. *Suponha que g satisfaça (5.3). Sejam $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega})$, $n \geq 1$, com v_n solução não-trivial de (5.8) para $\lambda = \lambda_n$. Se*

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda^* \quad \text{em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } C(\overline{\Omega}),$$

com $\lambda^* \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda^* = \lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1) \quad \text{e} \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty} \longrightarrow \overline{\varphi}_1 \quad \text{em } C^1(\overline{\Omega}).$$

Prova. Neste caso, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{g(x, t)}{t} - g_0(x) \right] = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega.$$

Escrevendo agora a equação como

$$(\mathcal{L} + g_0(x))v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - (g(x, v) - g_0(x)v),$$

obtemos que $w_n \rightarrow w$ em $C^1(\overline{\Omega})$, onde w é a única autofunção associada a $\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))$ satisfazendo $|w|_\infty = 1$, ou seja, $w = \overline{\varphi}_1$ em Ω . Consequentemente,

$$\lambda^* = \lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x)) \left(\frac{\int_{\Omega} \overline{\varphi}_1(x) dx}{\int_{\Omega} A(x)\overline{\varphi}_1(x) dx} \right) = \lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1).$$

□

Nos próximos resultados, vamos calcular o índice do operador K_λ quando λ cruza $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$ para mostrar que de fato $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$ é um ponto de bifurcação de soluções não-triviais de (5.8) desde a solução trivial. Para tanto, vamos utilizar o grau de Leray-Schauder de K_λ em $B_\rho := \{u \in C(\overline{\Omega}) : \|u\|_\infty < \rho\}$, com respeito a zero.

Lema 5.4. *Suponha que g satisfaça (5.2). Se $\lambda < \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$, então*

$$i(K_\lambda, 0) = 1.$$

Prova. Consideremos a homotopia $H_1 : [0, 1] \times X \rightarrow X$ definida por

$$H_1(t, v) = L(tf_0(\lambda, v)).$$

Vamos mostrar que esta homotopia está bem definida, ou seja, que existe $\delta > 0$ tal que

$$H_1(t, v) \neq v$$

para cada $v \in \overline{B}_\delta$, com $v \neq 0$ e $t \in [0, 1]$. Com efeito, suponha que exista uma sequência $v_n \in X \setminus \{0\}$ com $\|v_n\|_\infty \rightarrow 0$ e $t_n \in [0, 1]$ tais que $H_1(t_n, v_n) = v_n$. Uma vez que K é suficientemente grande, o Princípio do Máximo Forte no Lema 1.17 implica que $v_n > 0$ em Ω . Por outro lado,

$$(\mathcal{L} + K)v_n = t_n \left(\lambda v_n \left(\frac{\int_\Omega A(x)v_n dx}{\int_\Omega v_n dx} \right) + K v_n - g(x, v_n) \right), \quad v_n \in X.$$

Façamos

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty}.$$

Com um argumento similar ao do Lema 5.1, podemos provar que $w_n \rightarrow \varphi_1$ em $C^1(\overline{\Omega})$. Assim, se $t_0 = \lim t_n$ é o limite de uma apropriado subsequência de (t_n) , então (5.2) implica que

$$(\mathcal{L} + K)\varphi_1 = t_0 \left[\lambda \cdot \left(\frac{\int_\Omega A(x)\varphi_1(x) dx}{\int_\Omega \varphi_1(x) dx} \right) + K \right] \varphi_1, \quad \varphi_1 \in X.$$

Portanto,

$$\lambda_1(\mathcal{L} + K) = t_0 [\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(\varphi_1) + K].$$

Novamente por K ser tomado suficientemente grande podemos supor que

$$\lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(\varphi_1) + K > 0.$$

Consequentemente, sendo $t_0 \leq 1$, temos que

$$\lambda_1(\mathcal{L}) + K = \lambda_1(\mathcal{L} + K) \leq \lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(\varphi_1) + K,$$

ou seja,

$$\lambda \geq \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1),$$

o que é uma contradição.

Logo, H_1 é admissível. De onde concluímos que para cada $\varepsilon \in (0, \delta]$

$$\begin{aligned} i(K_\lambda, 0) &= d(K_\lambda, B_\varepsilon, 0) = d(Id - H_1(1, \cdot), B_\varepsilon, 0) \\ &= d(Id - H_1(0, \cdot), B_\varepsilon, 0) = d(Id, B_\varepsilon, 0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Lema 5.5. *Suponha que g satisfaça (5.2). Se*

$$\lambda > \max \{ \lambda_1(\mathcal{L}), \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) \},$$

então

$$i(K_\lambda, 0) = 0.$$

Prova. Consideremos a homotopia $H_2 : [0, 1] \times X \rightarrow X$ definida por

$$H_2(t, v) = L \left(\lambda v^+ \left[t \left(\frac{\int_\Omega A(x)v^+(x) dx}{\int_\Omega v^+(x) dx} \right) + (1-t) \right] + K v^+ - g(x, v^+) \right).$$

Novamente, devemos mostrar que esta homotopia é admissível. Assim, suponha que exista uma sequência $v_n \in X \setminus \{0\}$ com $\|v_n\|_\infty \rightarrow 0$ e $t_n \in [0, 1]$ tais que $H_2(t_n, v_n) = v_n$. Como anteriormente, o Princípio do Máximo Forte no Lema 1.17 implica que $v_n > 0$ em Ω . Assim, se t_0 é o limite de uma apropriada subsequência de (t_n) , então

$$\lambda_1(\mathcal{L} + K) = \lambda \cdot [t_0 \mathcal{A}^{-1}(\varphi_1) + (1 - t_0)] + K,$$

ou seja,

$$\lambda_1(\mathcal{L}) = \lambda \cdot [t_0 \mathcal{A}^{-1}(\varphi_1) + (1 - t_0)]. \quad (5.13)$$

Agora observe que (5.13) não pode ocorrer, uma vez que

$$\lambda > \max \{ \lambda_1(\mathcal{L}), \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) \}$$

e a curva

$$t \longmapsto \lambda \cdot [t\mathcal{A}^{-1}(\varphi_1) + (1-t)]$$

é um segmento de reta que liga os pontos $(0, \lambda)$ e $(1, y)$, onde

$$y = \lambda \cdot \mathcal{A}^{-1}(\varphi_1).$$

Portanto, H_2 é admissível. De onde concluímos que existe algum $\delta > 0$ tal que, para cada $\varepsilon \in (0, \delta]$, temos

$$\begin{aligned} i(K_\lambda, 0) &= d(K_\lambda, B_\varepsilon, 0) = d(Id - H_2(1, \cdot), B_\varepsilon, 0) \\ &= d(Id - H_2(0, \cdot), B_\varepsilon, 0). \end{aligned}$$

Por fim, de acordo com a teoria desenvolvida em [3], o operador $\tilde{K}_\lambda : X \longrightarrow X$ definido por

$$\tilde{K}_\lambda(v) = L(\lambda v + Kv - g(x, v)),$$

satisfaz $i(\tilde{K}_\lambda, 0) = 0$, para $\lambda > \lambda_1(\mathcal{L})$. Portanto,

$$i(K_\lambda, 0) = d(Id - H_2(0, \cdot), B_\varepsilon, 0) = i(\tilde{K}_\lambda, 0) = 0.$$

□

Lema 5.6. *Suponha que g satisfaça (5.2). Se $\lambda > \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$, então*

$$i(K_\lambda, 0) = 0.$$

Prova. Observemos primeiro que se

$$\max \{ \lambda_1(\mathcal{L}), \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) \} = \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1),$$

o resultado segue pelo Lema 5.5. Assim, suponhamos que

$$\lambda_1(\mathcal{L}) > \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$$

e seja $H_3 : [0, 1] \times X \longrightarrow X$ a homotopia definida por

$$H_3(t, v) = L \left((t\lambda + (1-t)\bar{\lambda}) \left[\left(\frac{\int_\Omega A(x)v^+(x) dx}{\int_\Omega v^+(x) dx} \right) v^+ + Kv^+ - g(x, v^+) \right] \right),$$

onde $\bar{\lambda}$ é um número maior que $\lambda_1(\mathcal{L})$ e λ . Para mostrar que H_3 é admissível, suponha que exista uma sequência $v_n \in X \setminus \{0\}$ com $\|v_n\|_\infty \rightarrow 0$ e $t_n \in [0, 1]$ tais que $H_3(t_n, v_n) = v_n$. Novamente, o Princípio do Máximo Forte no Lema 1.17 implica que $v_n > 0$ em Ω . Assim, se t_0 é o limite de uma apropriada subsequência de (t_n) , temos que

$$(t_0\lambda + (1 - t_0)\bar{\lambda})\mathcal{A}^{-1}(\varphi_1) = \lambda_1(\mathcal{L}),$$

ou seja,

$$(t_0\lambda + (1 - t_0)\bar{\lambda}) = \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1).$$

Mas esta última igualdade é impossível, porque

$$\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) < \lambda < \bar{\lambda}.$$

Portanto, H_3 é admissível. De onde concluímos que existe algum $\delta > 0$ tal que para cada $\varepsilon \in (0, \delta]$ tem-se

$$i(K_\lambda, 0) = d(K_\lambda, B_\varepsilon, 0) = d(Id - H_3(1, \cdot), B_\varepsilon, 0) = d(Id - H_3(0, \cdot), B_\varepsilon, 0).$$

Por fim, observe que $\bar{\lambda} > \max\{\lambda_1(\mathcal{L}), \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)\}$. Logo, pelo Lema 5.5, temos que

$$i(K_\lambda, 0) = d(Id - H_3(0, \cdot), B_\varepsilon, 0) = d(Id - H_2(0, \cdot), B_\varepsilon, 0) = 0.$$

□

Agora estamos em condições de enunciar o resultado principal desta seção.

Teorema 5.7. *Suponha que g satisfaça (5.2). Desde $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ de soluções positivas de (5.1).*

Prova. Primeiro, é importante ressaltar que não podemos aplicar aqui o Teorema 1.27 diretamente, uma vez que a equação (5.8) não está escrita na forma deste teorema, não temos diferenciabilidade em $v = 0$ e nem $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$ é um autovalor de multiplicidade ímpar para a equação linearizada de (5.8) em $v = 0$. Porém, com auxílio dos lemas anteriores, uma simples modificação no Teorema 1.27, como feita em [3], nos diz que desde $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$ bifurca um contínuo de soluções não-triviais de (5.8) que ou bem é ilimitado ou alcança $v = 0$ em outro ponto $(\mu, 0) \neq (\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$. Mas a Observação 5.2 nos diz que esta segunda opção não pode ocorrer. Portanto, este contínuo é ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$. Uma vez que soluções não-triviais de (5.8) são soluções positivas de (5.1), o resultado segue.

□

Para um resultado similar ao Teorema 5.7 no caso em que g satisfaz (5.3), recordemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{g(x, t)}{t} - g_0(x) \right] = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega.$$

Como consequência disso, do teorema anterior e do Corolário 5.3, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.8. *Suponha que g satisfaça (5.3). Desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi_1}), 0)$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluções positivas de (5.1).*

Para entender o comportamento global do contínuo de soluções positivas de (5.1) que bifurca desde $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$ ou desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi_1}), 0)$, precisamos saber o comportamento da função g quando $t \rightarrow +\infty$. Nesse sentido, vamos supor que g satisfaça uma das seguintes hipóteses:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x, t)}{t} = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (5.14)$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x, t)}{t} = g_1(x), \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (5.15)$$

onde $g_1 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, não-negativa e não-identicamente nula. Com essas notações, temos os seguintes resultados que determinam os possíveis pontos de bifurcação do infinito para (5.1):

Proposição 5.9. *Suponha que g satisfaça (5.14). Sejam $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega})$, $n \geq 1$, com v_n solução não-trivial de (5.8) para $\lambda = \lambda_n$. Se*

$$\lambda_n \rightarrow \lambda^* \quad e \quad \|v_n\|_\infty \rightarrow +\infty \quad \text{em } \mathbb{R},$$

com $\lambda^* \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda^* = \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) \quad e \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty} \rightarrow \varphi_1 \quad \text{em } C^1(\overline{\Omega}). \quad (5.16)$$

Prova. A demonstração deste lema é análoga a do Lema 5.1. De fato, basta observar que se $\|v_n\|_\infty \rightarrow +\infty$ em \mathbb{R} , então (5.14) implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega \frac{g(x, v_n)}{\|v_n\|_\infty} \cdot v \, dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}).$$

Assim, repetindo os mesmos argumentos do Lema 5.1 obtemos (5.16).

□

Corolário 5.10. *Suponha que g satisfaça (5.15). Sejam $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega})$, $n \geq 1$, com v_n solução não-trivial de (5.8) para $\lambda = \lambda_n$. Se*

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda^* \quad e \quad \|v_n\|_\infty \longrightarrow +\infty \quad em \quad \mathbb{R},$$

com $\lambda^* \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda^* = \lambda_1(\mathcal{L} + g_1(x))\mathcal{A}(\varphi_1) \quad e \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty} \longrightarrow \tilde{\varphi}_1 \quad em \quad C^1(\overline{\Omega}),$$

onde $\tilde{\varphi}_1$ denota a autofunção principal associada a $\lambda_1(\mathcal{L} + g_1(x))$ satisfazendo $|\tilde{\varphi}_1|_\infty = 1$.

Prova. Como no Corolário 5.3, basta observar que neste caso temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x, t)}{t} - g_1(x) \right] = 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega,$$

e o resultado segue da Proposição 5.9.

□

Observação 5.11. a) *As soluções positivas de (5.1) obtidas nesta seção são soluções clássicas, ou seja, são de classe $C^2(\overline{\Omega})$. De fato, seja $v \in C(\overline{\Omega})$ uma solução positiva de (5.1). Note que*

$$\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}$$

é um número. Pela regularidade elíptica do problema, temos que $v \in W^{2,q}(\Omega)$, para $q > N$. Das imersões contínuas dos espaços de Sobolev, temos que $v \in C^{1,1-\frac{N}{q}}(\overline{\Omega})$, para cada $q > N$. Uma vez que $g(\cdot, t) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, para cada $t \in \mathbb{R}$, das estimativas de Schauder (ver [41]), obtemos que $v \in C^2(\overline{\Omega})$.

b) *É evidente que os resultados anteriores nos dão várias possibilidades para o contínuo de soluções positivas de (5.1), dependendo do comportamento da função g . Nas próximas seções vamos usar esses resultados para encontrar soluções positivas de equações não-locais com formas explícitas para a função g .*

5.3 Equação Logística Singular e Não-Local

Nesta seção vamos estudar o seguinte problema logístico não-local:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - f(x)v^p & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.17)$$

com $p > 1$ e $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ estritamente positiva em $\bar{\Omega}$, onde $\alpha \in (0, 1)$. Com isso, temos $f_L > 0$. Observe que (5.17) é uma equação do tipo (5.1) para

$$g(x, t) = f(x)t^p.$$

Neste caso, g satisfaz a hipótese (5.2). Assim, pelo Teorema 5.7 desde $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ de soluções positivas de (5.17). Nosso objetivo nesta seção é estudar o comportamento global deste contínuo e obter condições sobre o parâmetro λ para que existam soluções positivas para (5.17).

Recordemos que a seguinte equação logística foi estudada em [28]:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \mu v - f(x)v^p & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.18)$$

Nesse artigo os autores mostram o seguinte resultado para (5.18):

Proposição 5.12. (i) (5.18) possui uma única solução regular e positiva $\theta_\mu \in C^2(\bar{\Omega})$ se, e somente se, $\mu > \lambda_1(\mathcal{L})$. Além disso,

$$\|\theta_\mu\|_\infty^{p-1} \leq \frac{\mu - c_L}{f_L}.$$

(ii) A aplicação $\mu \rightarrow \theta_\mu$ é contínua em $C^2(\bar{\Omega})$, crescente e derivável.

(iii) $\theta_\mu \rightarrow 0$ em $C^2(\bar{\Omega})$, quando $\mu \rightarrow \lambda_1(\mathcal{L})$; e $\theta'_\mu := \frac{d\theta_\mu}{d\mu} \rightarrow \varphi_1$ em $C^2(\bar{\Omega})$, quando $\mu \rightarrow \lambda_1(\mathcal{L})$.

Antes de iniciarmos o estudo do comportamento global do contínuo acima, vamos fazer algumas observações quanto a existência de soluções positivas para (5.17) e sobre dois métodos que podemos utilizar para resolvê-la. Os resultados que vamos obter mais adiante utilizando estes métodos foram o que nos motivaram a estudar bifurcação para esta equação.

Para o primeiro método, suponhamos que $\lambda \neq 0$ e consideremos $R_0 = \frac{\lambda_1(\mathcal{L})}{\lambda}$. Se $\lambda > 0$, para cada $R > R_0$, denotemos por θ_R a única solução positiva do problema local (5.18) para $\mu = R\lambda$, a qual existe pela Proposição 5.12. Consideremos a função $\tilde{h} : (R_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{h}(R) = R - \frac{\int_{\Omega} A(x)\theta_R(x) dx}{\int_{\Omega} \theta_R(x) dx}.$$

Note que uma forma de resolver (5.17) é encontrar algum $\tilde{R} \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{h}(\tilde{R}) = 0$. Agora, vejamos o seguinte lema:

Lema 5.13. *Seja $\lambda > 0$. Defina as funções $G, H : (R_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$G(R) = \int_{\Omega} A(x)\theta_R(x) dx \quad e \quad H(R) = R \int_{\Omega} \theta_R(x) dx.$$

Então, G e H são contínuas, deriváveis e têm as seguintes propriedades:

(i) $\lim_{R \rightarrow R_0} G(R) = \lim_{R \rightarrow R_0} H(R) = 0.$

(ii) *Para cada $R > R_0$ tem-se $H(R) \geq G(R)$.*

(iii) *Se $\lambda > \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$, então*

$$\lim_{R \rightarrow R_0} G'(R) > \lim_{R \rightarrow R_0} H'(R). \quad (5.19)$$

Consequentemente, existe algum $\tilde{R} \in \mathbb{R}$ tal que $G(\tilde{R}) = H(\tilde{R})$.

Prova. A continuidade, a diferenciabilidade e a propriedade (i) para as funções G e H seguem da Proposição 5.12. O item (ii) é óbvio. Para (iii), note que se $R > R_0$, então

$$\begin{cases} \mathcal{L}\theta'_R = \lambda\theta_R + \lambda R\theta'_R - 2\theta'_R\theta_R & \text{em } \Omega, \\ \theta'_R = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, para cada $R > R_0$, temos

$$G'(R) = \int_{\Omega} A(x)\theta'_R(x) dx \quad e \quad H'(R) = \int_{\Omega} \theta_R(x) dx + R \int_{\Omega} \theta'_R(x) dx.$$

As convergências na Proposição 5.12, mostram que (5.19) ocorre quando $\lambda > \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$. A continuidade das funções G e H finalizam a prova do item (iii).

□

Se $\lambda < 0$ podemos provar um resultado análogo ao Lema 5.13. De fato, neste caso a função \tilde{h} está definida para cada $R < R_0$, ou seja, $\tilde{h} : (-\infty, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, temos a seguinte adaptação do Lema 5.13 para este caso, cuja demonstração é completamente análoga:

Lema 5.14. *Seja $\lambda < 0$. Defina as funções $G, H : (-\infty, R_0) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$G(R) = \int_{\Omega} A(x)\theta_R(x) dx \quad e \quad H(R) = R \int_{\Omega} \theta_R(x) dx.$$

Então, G e H são contínuas, deriváveis e têm as seguintes propriedades:

(i) $\lim_{R \rightarrow R_0} G(R) = \lim_{R \rightarrow R_0} H(R) = 0;$

(ii) *Para cada $R < R_0$ tem-se $H(R) \leq G(R);$*

(iii) *Se $\lambda > \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$, então*

$$\lim_{R \rightarrow R_0} G'(R) < \lim_{R \rightarrow R_0} H'(R).$$

Consequentemente, existe algum $\tilde{R} \in \mathbb{R}$ tal que $G(\tilde{R}) = H(\tilde{R})$.

Note que quando $\lambda = 0$, (5.17) se torna o problema local (5.18) e este possui solução positiva se, e somente se, $\lambda_1(\mathcal{L}) < 0$. Por outro lado, pela Proposição 5.12, a função \tilde{h} é contínua. Como

$$\tilde{h}(R) = \frac{H(R) - G(R)}{\int_{\Omega} \theta_R(x) dx},$$

uma consequência imediata dos Lemas 5.13 e 5.14 é o seguinte resultado:

Corolário 5.15. *Para cada*

$$\lambda > \lambda_1(\mathcal{L}) \left(\frac{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx} \right)$$

o problema (5.17) possui pelo menos uma solução positiva $v \in C(\overline{\Omega})$.

Observemos que existe algum $\tilde{R} \in \mathbb{R}$ tal que a solução $v \in C(\overline{\Omega})$ obtida no corolário anterior é exatamente a solução $\theta_{\tilde{R}}$ do problema local (5.18) para $\mu = \tilde{R}\lambda$. Além disso, a continuidade da aplicação $\mu \rightarrow \theta_{\mu}$ foi essencial para aplicarmos o método acima.

Outra forma de encontrar soluções positivas para (5.17), sem usar a continuidade da aplicação $\mu \rightarrow \theta_{\mu}$, é usar as ideias presentes em [7], que são as seguintes: consideremos a função $h : \mathbb{R} \times C(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(R, v) = R - \frac{\int_{\Omega} A(x)v^+(x) dx}{\int_{\Omega} v^+(x) dx}, \quad \text{para } v^+ \neq 0. \quad (5.20)$$

Observe que uma função positiva $v \in C(\bar{\Omega})$ é solução de (5.17) se, e somente se, o par

$$\left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}, v \right)$$

pertence ao conjunto

$$\Sigma := \overline{\{(R, v) \in [0, \infty) \times C(\bar{\Omega}); v \text{ é solução não-nula de (5.18)}\}},$$

ou seja,

$$h(R, v) = 0, \text{ com } R = \frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}.$$

Agora relembremos o seguinte resultado conhecido como Teorema de Bolzano:

Teorema 5.16. *Sejam X um Espaço de Banach e h uma função contínua em um contínuo $\Sigma_0 \subset [0, \infty) \times X$. Suponha que existam $(\mu_1, u_1), (\mu_2, u_2) \in \Sigma_0$ tais que $h(\mu_1, u_1) \cdot h(\mu_2, u_2) < 0$. Então, existe algum $(\mu, u) \in \Sigma_0$ tal que $h(\mu, u) = 0$.*

Como consequência deste teorema, encontrar soluções de (5.17) é equivalente a encontrar algum contínuo $\Sigma_0 \subset \Sigma$ sobre o qual a função h é contínua e muda de sinal. Relembramos agora que, para $\lambda \neq 0$, desde $(R_0, 0) \in \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$, Σ_0^1 , de soluções positivas de (5.18) (veja [6]). Dessa forma, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.17. *Para cada*

$$\lambda > \lambda_1(\mathcal{L}) \left(\frac{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx} \right)$$

o problema (5.17) possui pelo menos uma solução positiva $v \in C(\bar{\Omega})$.

Prova. Novamente o caso $\lambda = 0$ é trivial. Para $\lambda \neq 0$, seja $\Sigma_0 = \Sigma_0^1$. Note que a função h definida em (5.20) é contínua sobre $\Sigma_0 \setminus \{(R_0, 0)\}$. Além disso, pondo

$$h(R_0, 0) = R_0 - \frac{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx},$$

o Lema 5.1 implica que h é contínua sobre Σ_0 . Por outro lado, pelo Lema 5.13, existem $(R_1, v_{R_1}), (R_2, v_{R_2}) \in \Sigma_0$ tais que $h_{\lambda}(R_1, v_{R_1}) \cdot h_{\lambda}(R_2, v_{R_2}) < 0$. Pelo Teorema de Bolzano, existe $(R, v_R) \in \Sigma_0$ tal que $h_{\lambda}(R, v_R) = 0$, ou seja, $v_R \in C(\bar{\Omega})$ é solução positiva de (5.17).

□

Observe que os resultados acima naturalmente nos levam a pensar que $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$ é um ponto de bifurcação de soluções positivas de (5.17). Isso foi o que nos motivou ao estudo da Seção 5.2 para o caso em que g satisfaz (5.2).

Agora vamos estudar o comportamento global do contínuo de soluções positivas de (5.17) que bifurca desde $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$. Vejamos primeiro o seguinte lema, que será essencial para este estudo.

Lema 5.18. (i) Se $v \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução positiva de (5.17), então

$$\|v\|_\infty^{p-1} \leq \begin{cases} \frac{\lambda A_L - c_L}{f_L} & \text{se } \lambda \leq 0, \\ \frac{\lambda A_M - c_L}{f_L} & \text{se } \lambda > 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

(ii) Existe alguma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que (5.17) não possui solução positiva para $\lambda < C$.

Prova. Para (i), seja $x_M \in \Omega$ tal que $v(x_M) = \|v\|_\infty$. Note que $\mathcal{L}v(x_M) \geq c(x_M)$. Assim,

$$c_L \leq c(x_M) \leq \lambda \left(\frac{\int_\Omega A(x)v(x) dx}{\int_\Omega v(x) dx} \right) - f(x_M)\|v\|_\infty^{p-1}.$$

Além disso,

$$\lambda \left(\frac{\int_\Omega A(x)v(x) dx}{\int_\Omega v(x) dx} \right) - f(x_M)\|v\|_\infty^{p-1} \leq \begin{cases} \lambda A_L - f_L\|v\|_\infty^{p-1}, & \text{se } \lambda \leq 0, \\ \lambda A_M - f_L\|v\|_\infty^{p-1}, & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

Isto prova a primeira parte.

Para (ii), suponhamos que exista uma sequência $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ tal que v_n seja solução positiva de (5.17) para $\lambda = \lambda_n$ e $\lambda_n \rightarrow -\infty$. Note que

$$0 \geq \lambda_n \cdot \left(\frac{\int_\Omega A(x)v_n(x) dx}{\int_\Omega v_n(x) dx} \right) = \lambda_1(\mathcal{L} + f(x)v_n^{p-1}) > \lambda_1(\mathcal{L}), \quad (5.22)$$

Vamos mostrar que $\lambda_n \rightarrow -\infty$ contradiz a equação (5.22). Com efeito, denotando

$$\mu_n = \left(\frac{\int_\Omega A(x)v_n(x) dx}{\int_\Omega v_n(x) dx} \right)$$

temos que

$$\mathcal{L}v_n = \mu_n v_n - f(x)v_n^p.$$

Por (5.22), (μ_n) é limitada. Então, por (5.21) e pela regularidade elíptica, obtemos que $v_n \rightarrow v_*$ em $C^1(\overline{\Omega})$, onde $v_* \geq 0$. Dessa forma, temos somente dois casos:

(a) $v_* \neq 0$ em Ω ; ou

(b) $v_* = 0$ em Ω .

Se o caso (a) ocorresse, então v_* verificaria

$$\mathcal{L}v_* = \mu_*v_* - f(x)v_*^p,$$

e para $M > 0$ suficientemente grande

$$(\mathcal{L} - \mu_* + f(x)v_*^{p-1} + M)v_* = Mv_*.$$

O Princípio do Máximo Forte implicaria que $v_* > 0$ em Ω . Então, teríamos

$$\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \rightarrow \frac{\int_{\Omega} A(x)v_*(x) dx}{\int_{\Omega} v_*(x) dx}.$$

Mas isso implica que

$$\lambda_n \cdot \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \right) \rightarrow -\infty,$$

o que contradiz (5.22). Por outro lado, se o caso (b) ocorresse, pelo Lema 5.1, teríamos que $w_n \rightarrow \varphi_1$ em $C^1(\bar{\Omega})$, onde

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{\infty}}$$

e φ_1 é a autofunção principal associada a $\lambda_1(\mathcal{L})$ tal que $|\varphi_1|_{\infty} = 1$. Portanto,

$$\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \rightarrow \frac{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx}$$

e, conseqüentemente,

$$\lambda_n \cdot \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \right) \rightarrow -\infty,$$

contrariando (5.22) novamente. Isso finaliza a demonstração do lema. □

Agora podemos analisar o comportamento global do contínuo de soluções positivas de (5.17) que bifurca desde $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$.

Teorema 5.19. *Desde o ponto $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0) \in \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ de soluções positivas de (5.17), o qual denotaremos por \mathcal{C}^+ , que satisfaz*

$$(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), +\infty) \subset Proj(\mathcal{C}^+),$$

onde $Proj(\mathcal{C}^+)$ denota a projeção do conjunto \mathcal{C}^+ sobre \mathbb{R} .

Prova. Pelo Teorema 5.7 desde $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), 0)$ bifurca um contínuo de soluções positivas de (5.17), que é ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$. Além disso, o item (ii) do Lema 5.18 nos diz que $Proj(\mathcal{C}^+)$ é limitada inferiormente em \mathbb{R} . Por outro lado, o item (i) do Lema 5.18 nos dá as cotas a priori para as soluções positivas de (5.17) que concluem a prova do resultado.

□

Uma consequência imediata do teorema anterior é o seguinte resultado a respeito de soluções positivas de (5.17):

Corolário 5.20. *Existe pelo menos uma solução positiva $v \in C(\overline{\Omega})$ de (5.17), para cada $\lambda > \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$.*

Note que este corolário já tinha sido obtidos com outros métodos nos Corolários 5.17 e 5.15. A importância do Teorema 5.19 é que ele nos dá, além da existência de solução positiva, a existência de um contínuo de soluções positivas e também o comportamento deste contínuo.

Observação 5.21. *Gostaríamos de observar que a região de existência de soluções positivas no Corolário 5.20 pode ser melhorada, dependendo da direção da bifurcação do contínuo \mathcal{C}^+ . Podendo inclusive existir multiplicidade de solução (ver Figura 5.1).*

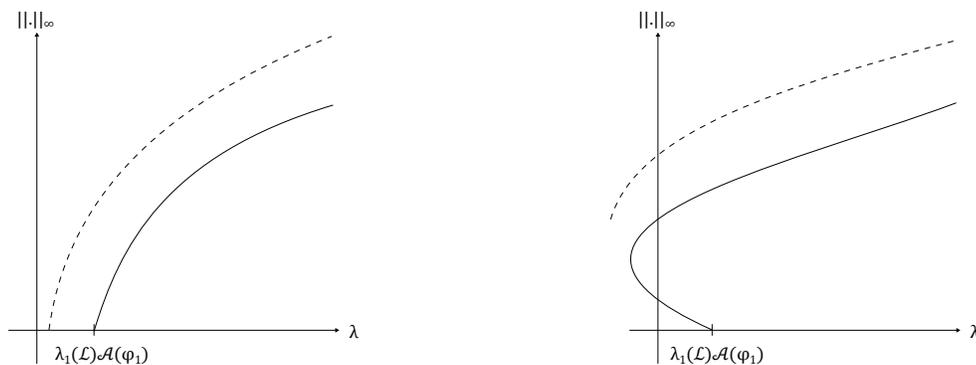


Figura 5.1: Possível diagrama de bifurcação de (5.17): caso supercrítico e subcrítico, respectivamente.

5.4 Equação de Holling-Tanner do Tipo II Singular e Não-Local

Nesta seção, pretendemos estudar o seguinte problema não-local:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda v \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - \frac{\gamma B(x)v}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.23)$$

com $B \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ uma função não-negativa e não-identicamente nula, onde $\alpha \in (0, 1)$. Observe que (5.23) é uma equação do tipo (5.1) para

$$g(x, t) = \frac{\gamma B(x)t}{1+t}.$$

Neste caso, g satisfaz a hipótese (5.3) e (5.14), onde $g_0 \equiv \gamma B(x)$. Assim, pelo Corolário 5.8 desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x)), \mathcal{A}(\bar{\varphi}_1), 0)$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ de soluções positivas de (5.23). Como na seção anterior, nosso objetivo então é estudar o comportamento global deste contínuo e obter condições sobre λ para que existam soluções positivas para (5.23).

Mais informações sobre a equação local de Holling-Tanner do tipo II podem ser encontradas em [15]. Gostaríamos de recordar aqui que a equação:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \mu v - \frac{\gamma B(x)v}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.24)$$

possui pelo menos uma solução positiva se, e somente se,

$$\lambda_1(\mathcal{L}) < \mu < \lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x)).$$

Além disso, desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x)), 0)$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\bar{\Omega})$ de soluções positivas de (5.24) que tende a $(\lambda_1(\mathcal{L}), +\infty)$ (veja o próximo lema, cuja demonstração é similar ao Lema 5.1). Denotaremos este contínuo por Σ_1^1 .

Lema 5.22. (i) *Sejam $(\mu_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\bar{\Omega})$, $n \geq 1$, com v_n solução positiva de (5.24) para $\mu = \mu_n$. Se*

$$\mu_n \longrightarrow \mu^* \quad \text{em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } C(\bar{\Omega}),$$

com $\mu^* \in \mathbb{R}$, então

$$\mu^* = \lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x)) \quad e \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty} \longrightarrow \bar{\varphi}_1 \quad em \quad C^1(\bar{\Omega}).$$

(ii) Sejam $(\mu_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\bar{\Omega})$, $n \geq 1$, com v_n solução positiva de (5.24) para $\mu = \mu_n$. Se

$$\mu_n \longrightarrow \mu^* \quad e \quad \|v_n\|_\infty \longrightarrow +\infty \quad em \quad \mathbb{R},$$

com $\mu^* \in \mathbb{R}$, então

$$\mu^* = \lambda_1(\mathcal{L}) \quad e \quad w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_\infty} \longrightarrow \varphi_1 \quad em \quad C^1(\bar{\Omega}).$$

Como na seção anterior, primeiro vamos fazer algumas observações quanto a existência de soluções positivas de (5.23) e sobre quais métodos podemos utilizar para resolvê-la. Isso que motivou o estudo da Seção 5.2 para o caso em que g satisfaz (5.3) e (5.14).

Observe que agora não temos unicidade de solução positiva para (5.23), logo não podemos usar o primeiro argumento usado na seção anterior para encontrar solução positiva para (5.17), uma vez que não podemos garantir que a função \tilde{h} está bem definida para este caso. Porém, como bifurca um contínuo de soluções positivas de (5.23) desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x)), 0)$, podemos usar o método presente em [7] considerando a função $h : \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(R, v) = R - \frac{\int_{\Omega} A(x)v^+(x) dx}{\int_{\Omega} v^+(x) dx}, \quad \text{com } v^+ \neq 0. \quad (5.25)$$

Neste caso, uma função positiva $v \in C(\bar{\Omega})$ é solução de (5.23) se, e somente se, o par

$$\left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}, v \right)$$

pertence ao conjunto $\Sigma := \overline{\{(R, v) \in [0, \infty) \times C(\bar{\Omega}); v \text{ é solução não-nula de (5.24)}\}}$, ou seja,

$$h(R, v) = 0, \quad \text{com } R = \frac{\int_{\Omega} A(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}.$$

Pelo Teorema 5.16, encontrar soluções de (5.23) é equivalente a encontrar algum contínuo $\Sigma_0 \subset \Sigma$ sobre o qual a função h é contínua e muda de sinal. Para isso, suponhamos que $\lambda \neq 0$ e façamos

$$R_1 = \frac{\lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x))}{\lambda}.$$

Note que dados $(R, v) \in \Sigma_1^1 \setminus \{(R_1, 0)\}$, o Lema 5.22 implica que

$$\lim_{R \rightarrow R_0} h(R, v) = \frac{\lambda_1(\mathcal{L})}{\lambda} - \frac{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx}$$

e

$$\lim_{R \rightarrow R_1} h(R, v) = \frac{\lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x))}{\lambda} - \frac{\int_{\Omega} A(x)\overline{\varphi}_1(x) dx}{\int_{\Omega} \overline{\varphi}_1(x) dx}.$$

Assim, é evidente que se

$$\lambda_1(\mathcal{L}) \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx} \right) < \lambda < \lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x)) \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)\overline{\varphi}_1(x) dx}{\int_{\Omega} \overline{\varphi}_1(x) dx} \right)$$

(ou ao contrário) então h muda de sinal sobre $\Sigma_1^1 \setminus \{(R_1, 0)\}$, uma vez que os limites acima têm sinais opostos nessas condições. Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.23. *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\lambda_1(\mathcal{L}) \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)\varphi_1(x) dx}{\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx} \right) < \lambda < \lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x)) \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)\overline{\varphi}_1(x) dx}{\int_{\Omega} \overline{\varphi}_1(x) dx} \right)$$

(ou ao contrário), o problema (5.23) possui pelo menos uma solução positiva $v \in C(\overline{\Omega})$.

Prova. O caso $\lambda = 0$ é trivial, pois esse caso implica que (5.23) é o problema local (5.24) e este possui solução positiva se, e somente se, $\lambda_1(\mathcal{L}) < 0 < \lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x))$. Para $\lambda \neq 0$, seja $\Sigma_0 = \Sigma_1^1$. Note que a função h definida em (5.25) é contínua sobre $\Sigma_0 \setminus \{(R_1, 0)\}$. Além disso, pondo

$$h(R_1, 0) = R_1 - \frac{\int_{\Omega} A(x)\overline{\varphi}_1(x) dx}{\int_{\Omega} \overline{\varphi}_1(x) dx},$$

o Lema 5.22 implica que h é contínua sobre Σ_0 . Por outro lado, como vimos acima, as condições sobre λ implicam existem $(R_1, v_{R_1}), (R_2, v_{R_2}) \in \Sigma_0$ tais que $h_{\lambda}(R_1, v_{R_1}) \cdot h_{\lambda}(R_2, v_{R_2}) < 0$. Pelo Teorema de Bolzano, existe algum $(R, v_R) \in \Sigma_0$ tal que $h_{\lambda}(R, v_R) = 0$, ou seja, $v_R \in C(\overline{\Omega})$ é solução positiva de (5.17).

□

Agora vamos estudar o comportamento global do contínuo de soluções positivas de (5.23) que bifurca desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1), 0)$. Antes disso, vejamos o seguinte lema, o qual mostra não existência de soluções positivas de (5.23) quando $|\lambda|$ é grande.

Lema 5.24. *Existe alguma constante $C > 0$ tal que (5.23) não possui solução positiva para $|\lambda| > C$.*

Prova. Suponha primeiro que exista uma sequência $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\bar{\Omega})$, com v_n solução positiva de (5.23) para $\lambda = \lambda_n$, tal que $\lambda_n \rightarrow +\infty$. Note que

$$\lambda_1(\mathcal{L}) < \lambda_n \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \right) = \lambda_1 \left(\mathcal{L} + \frac{\gamma B(x)}{1 + v_n} \right) < \lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x)). \quad (5.26)$$

Assim, temos apenas dois casos:

(a) $\|v_n\|_{\infty} \rightarrow +\infty$ em \mathbb{R} ; ou

(b) $\|v_n\|_{\infty} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se o item (a) ocorresse, pelo Lema 5.22, teríamos que

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{\infty}} \rightarrow \varphi_1 \quad \text{em} \quad C^1(\bar{\Omega}).$$

Portanto,

$$\lambda_n \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \right) \rightarrow +\infty,$$

contrariando a limitação em (5.26). Logo o item (a) não pode ocorrer. Suponha que o item (b) ocorra. Pela regularidade elíptica, temos $v_n \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo $q \geq 1$. Assim, existe $v^* \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $v_n \rightarrow v^*$ em $C^1(\bar{\Omega})$. Observe que $v^* \geq 0$. Se $v^* \equiv 0$ em Ω , então o Lema 5.22 implica que

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{\infty}} \rightarrow \bar{\varphi}_1 \quad \text{em} \quad C^1(\bar{\Omega}).$$

Portanto,

$$\lambda_n \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \right) \rightarrow +\infty,$$

contrariando a limitação (5.26) novamente. Vamos supor então que $v^* \neq 0$ em Ω . Note que v^* é solução positiva do problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \mu^*v - \frac{\gamma B(x)v}{1 + v} & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$\mu^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\lambda_n \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \right) \right] < +\infty.$$

Assim,

$$\left(\mathcal{L} + \frac{\gamma B(x)}{1 + v^*} + M \right) v^* = (\mu^* + M)v^* > 0,$$

para M suficientemente grande. Pelo Princípio do Máximo Forte, temos que $v^* > 0$ em Ω . De onde concluímos que

$$\lambda_n \left(\frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} \right) \rightarrow +\infty,$$

contrariando mais uma vez (5.26). Logo, (b) não pode ocorrer. Conseqüentemente, supor que $\lambda_n \rightarrow +\infty$ é uma contradição.

Com um argumento análogo podemos provar que $\lambda_n \rightarrow -\infty$ não pode ocorrer. De fato, basta observar que neste caso teríamos uma contradição com a seguinte limitação:

$$\lambda_n \frac{\int_{\Omega} A(x)v_n(x) dx}{\int_{\Omega} v_n(x) dx} = \lambda_1 \left(\mathcal{L} + \frac{\gamma B(x)}{1 + v_n} \right) > \lambda_1(\mathcal{L}).$$

□

Para o próximo Teorema, faremos as seguintes notações:

$$\underline{\lambda}_1 := \min \{ \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), \lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1) \} \text{ e } \overline{\lambda}_1 = \max \{ \lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), \lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1) \}.$$

Teorema 5.25. *Desde o ponto $(\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1), 0) \in \mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ bifurca um contínuo ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$ de soluções positivas de (5.23), o qual denotaremos por \mathcal{C}^+ , que tende a $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), +\infty)$. Em particular,*

$$(\underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1) \subset Proj(\mathcal{C}^+). \quad (5.27)$$

Prova. Pelo Corolário 5.8 desde $(\lambda_1(\mathcal{L} + g_0(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1), 0)$ bifurca um contínuo de soluções positivas de (5.23), que é ilimitado em $\mathbb{R} \times C(\overline{\Omega})$. O Lema 5.24 prova que $Proj(\mathcal{C}^+)$ é limitada em \mathbb{R} . Por fim, a Proposição 5.9 nos diz que $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1)$ é o único número real que admite uma sequência $(\lambda_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega})$, com v_n solução positiva de (5.23) para $\lambda = \lambda_n$, tal que $\|v_n\|_{\infty} \rightarrow +\infty$ em \mathbb{R} , provando que \mathcal{C}^+ tende a $(\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1), +\infty)$ e, conseqüentemente, (5.27).

□

Uma consequência imediata do teorema anterior é o seguinte resultado a respeito de soluções positivas de (5.23):

Corolário 5.26. *Existe pelo menos uma solução positiva $v \in C(\overline{\Omega})$ de (5.23), para cada $\lambda \in (\underline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_1)$.*

Observação 5.27. *Como na Seção anterior, a região de existência de soluções positivas no Corolário 5.26 pode ser melhorada, dependendo da direção da bifurcação do contínuo \mathcal{C}^+ . Neste caso também podemos ter multiplicidade de solução para (5.23) (ver Figuras 5.2 e 5.3).*

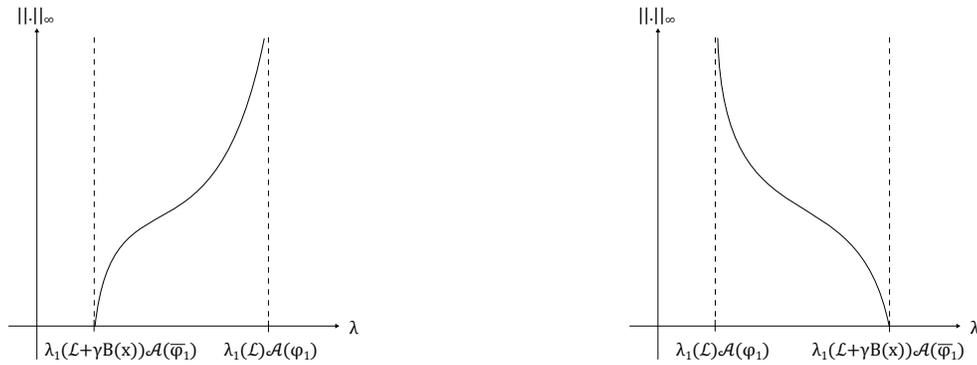


Figura 5.2: Possíveis diagramas de bifurcação de (5.23).

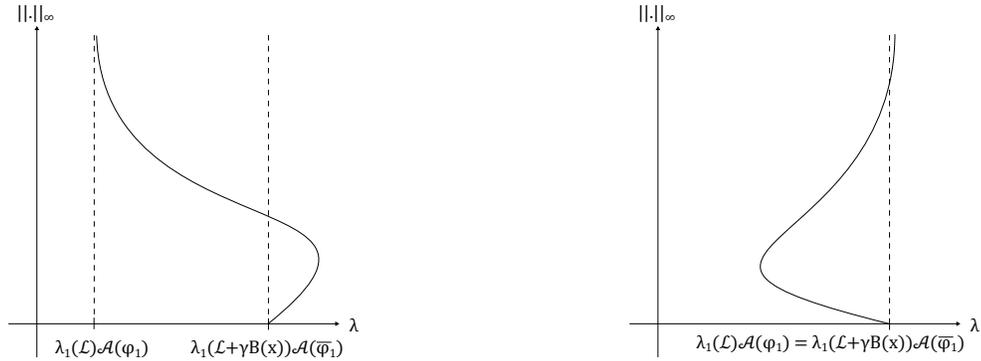


Figura 5.3: Possíveis diagramas de bifurcação de (5.23): caso supercrítico e subcrítico, respectivamente. Na figura do lado direito temos que $\lambda_1(\mathcal{L})\mathcal{A}(\varphi_1) = \lambda_1(\mathcal{L} + \gamma B(x))\mathcal{A}(\overline{\varphi}_1)$.

Capítulo 6

Sistema Elíptico Não-Local Decorrente da Dinâmica Populacional Entre Amebas e Bactérias

Como já mencionamos na Introdução, estudaremos neste capítulo o seguinte sistema elíptico não-local

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^2 - buv & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta v \left(\frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - \frac{\gamma uv}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $\lambda, \delta, \gamma, b > 0$ e Ω é um domínio limitado e regular do \mathbb{R}^N . Note que, fazendo

$$R = \frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}, \text{ para } \int_{\Omega} v(x) dx \neq 0,$$

então o sistema (6.1) fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^2 - buv & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta Rv - \frac{\gamma uv}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.2)$$

O problema (6.2) é um sistema elíptico local, o qual podemos aplicar a teoria de bifurcação bi-paramétrica da Seção 1.5 estudada em [55] e [57] para sistemas similares.

Afim de encontrar estados de coexistência para (6.1), vamos estudar o sistema (6.2) e usar novamente os argumentos de ponto fixo presentes em [7]. Mais precisamente, vamos considerar a $h : \mathbb{R} \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(R, u, v) = R - \frac{\int_{\Omega} u^+(x)v^+(x) dx}{\int_{\Omega} v^+(x) dx}, \quad \text{com } v^+ \neq 0.$$

Observe que fixados $\lambda > 0$ e $\delta > 0$, pela regularidade elíptica do sistema (6.1), um par de funções positivas $(u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ é um estado de coexistência de (6.1) se, e somente se, a tripla

$$\left(\frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}, u, v \right)$$

pertence ao conjunto

$$\Sigma := \overline{\{(R, u, v) \in [0, \infty) \times C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}); (u, v) \neq (0, 0) \text{ é solução (6.2)}\}},$$

ou seja,

$$h(R, u, v) = 0, \quad \text{com } R = \frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx}.$$

Como consequência do Teorema de Bolzano (Teorema 5.16), encontrar estados de coexistência para (6.1) é equivalente a encontrar algum contínuo $\Sigma_0 \subset \Sigma$ sobre o qual a função h é contínua e muda de sinal.

Dessa forma, resolveremos primeiro o sistema local (6.2) com as ideias presentes em [55] e [57] para encontrar um contínuo sobre o qual a função h muda de sinal. Depois disso, usaremos os argumentos acima para obter existência de solução para o sistema não-local (6.1).

Este capítulo está dividido da seguinte forma: Na Seção 6.1 vamos motivar o estudo do sistema (6.1), falando sobre a dinâmica populacional entre amebas e bactérias virulentas. Na Seção 6.2 estudaremos os estados de coexistência para o sistema local (6.2). Uma vez que vamos usar a teoria de bifurcação bi-paramétrica para este sistema, ainda na Seção 6.2, vamos estudar as soluções semi-triviais, resultados de não existência e cotas a priori para (6.2). Na Seção 6.3 vamos fazer um estudo da função h , sobre um determinado contínuo, a fim de encontrar estados de coexistência para o sistema não-local (6.1). Na Seção 6.4 estudaremos a região de coexistência de (6.1) e interpretaremos os resultados obtidos no capítulo para este sistema.

Finalmente, ao longo deste capítulo vamos denotar por X o espaço $C_0^1(\bar{\Omega})$ e por P o seu cone positivo. Além disso, para $u \in X$, $\|u\|_X$ denotará a norma usual de X .

6.1 Motivação

Em sua tese [38], Laura Fumanelli propõe o seguinte sistema para modelar a dinâmica populacional entre amebas e bactérias virulentas:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = d_1 u_{xx} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - auv \\ v_t = d_2 v_{xx} - c(vu_x)_x - mv + fv \frac{\int_{\Omega} uv dx}{\int_{\Omega} v dx} - \frac{buv}{1 + bTv} \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x, t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \text{e} \quad \forall t \geq 0. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

em um habitat Ω , onde Ω é um domínio limitado e regular de \mathbb{R}^N , com $N = 1$ ou $N = 2$. O sistema acima tem as seguintes características:

- (i) A variável $u(x, t)$ denota a densidade populacional de bactérias, *Pseudomonas aeruginosa*, uma bactéria oportunista (raramente afeta pessoas saudáveis), porém muito perigosa para pessoas imunocomprometidas (câncer ou HIV) e com doenças graves (como fibrose cística), uma vez que é muito resistente a antibióticos, tornando o seu estudo muito importante.
- (ii) A variável $v(x, t)$ denota a densidade populacional de amebas, *Dictyostelium discoideum*, as quais se alimentam das bactérias.
- (iii) As constantes d_1 e d_2 são as taxas de difusão das bactérias e amebas, respectivamente.
- (iv) O segundo termo do lado direito da primeira equação de (6.3) é devido ao fato de que, na ausência das amebas, as bactérias possuem um crescimento limitado, descrito pelo termo logístico

$$ru(1 - u/K),$$

onde r é a taxa de crescimento e K é a capacidade das bactérias.

- (v) O terceiro termo do lado direito da primeira equação de (6.3) é devido ao fato de que, na presença das amebas, as bactérias sofrem predação com taxa proporcional à quantidade de amebas, onde a é a constante de proporcionalidade.

- (vi) O segundo termo do lado direito da segunda equação de (6.3) é um termo de quimiotaxia, o qual é suposto ser uma função linear da concentração de amebas, com coeficiente c .
- (vii) O terceiro termo do lado direito da segunda equação de (6.3) é por conta do fato de que, na ausência de bactérias, não existe outra fonte de alimentação para as amebas, que conseqüentemente decaem, com decaimento mv , onde m é a taxa de mortalidade.
- (viii) O termo não-local em (6.3) modela um comportamento específico das população ameboide estudada pois, na falta de alimento, ela se comporta como um único organismo, de modo que o suprimento alimentar é redistribuído entre todas as células. Este comportamento é não-local e exatamente o que aparece em (6.3). De fato, que cada célula ameboide se alimenta de uma quantidade u de bactérias, ou seja, a quantidade total de bactérias que sofrem predação em todo o domínio Ω é proporcional a

$$\int_{\Omega} uv \, dx.$$

Uma vez que as bactérias ingeridas são distribuídas por toda população de amebas, precisamos dividir por

$$\int_{\Omega} v \, dx.$$

Portanto, a quantidade recebida por cada células ameboides, após a redistribuição, é proporcional a

$$\frac{\int_{\Omega} uv \, dx}{\int_{\Omega} v \, dx}.$$

A constante f é a taxa de crescimento das amebas.

- (ix) Finalmente, o último termo da segunda equação de (6.3) é devido ao fato de que as amebas podem ser infectadas pelas bactérias e morrer, uma vez que essas pertencem à uma classe virulenta. Essa característica é modelada pelo termo de Holling-Tanner do tipo II, dado por

$$\frac{buv}{1 + bTv},$$

onde T é o tempo de manipulação do primeiro ataque e b é a taxa dos ataques com os quais as bactérias matam as amebas.

Em [38], com algumas mudanças de parâmetros no sistema (6.3) os autores chegam no seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = D_1 \Delta u + u(1 - u - v), \\ v_t = D_2 \Delta v - \chi \nabla \cdot (v \nabla u) - \mu v + \delta v \frac{\int_{\Omega} uv dx}{\int_{\Omega} v dx} - \frac{\gamma uv}{1 + \tau v}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x, t) = 0, \quad \forall x \in \partial \Omega \quad y \quad \forall t \geq 0, \end{array} \right. \quad (6.4)$$

que é o sistema (0.8) explicado na Introdução, o qual possui como caso estacionário o sistema (6.1), que estudaremos neste capítulo. Observe que em (6.1) as condições de fronteira são de Dirichlet e estamos assumindo que $\chi = 0$. Conforme esclarecemos na Introdução, estas suposições não fazem com que (6.1) perca as características do modelo.

6.2 Sistema Local

Nesta seção, vamos estudar o sistema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u - u^2 - buv & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta Rv - \frac{\gamma uv}{1 + v} & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Gostaríamos de aplicar os resultados de [55] e [57] ao sistema (6.5). Para isso, vamos considerar a seguinte equação logística clássica

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u - u^2 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (6.6)$$

Pela Proposição 5.12, a equação logística (6.6) possui uma solução positiva $\theta_\lambda \in X$ se, e somente se, $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$. Além disso,

$$\theta_\lambda \leq \lambda \quad \text{em } \Omega.$$

Na próxima proposição, vamos mostrar que θ_λ é uma solução não-degenerada de (6.6) e que $\theta_\lambda \in \text{int}(P)$. Esses dois fatos são necessários para aplicar os resultados de [55] e [57].

Proposição 6.1. *Para cada $\lambda > \lambda(-\Delta)$, temos $(\lambda, \theta_\lambda) \in \mathbb{R} \times \text{int}(P)$. Além disso, θ_λ é uma solução não-degenerada de (6.6).*

Prova. Pelo Princípio do Máximo Forte, temos que $(\lambda, \theta_\lambda) \in \mathbb{R} \times \text{int}(P)$. Para provar que θ_λ é uma solução não-degenerada, devemos mostrar que o problema (6.6) linearizado em θ_λ admite somente a trivial como solução forte (ver Observação 1.31(a)). Note que (6.6) linearizado em θ_λ é dado pela equação

$$\begin{cases} -\Delta\xi = \lambda\xi - 2\theta_\lambda\xi & \text{em } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.7)$$

Se existisse um $\xi \in X$ solução forte e não-trivial de (6.7), teríamos

$$\lambda = \lambda_1(-\Delta + 2\theta_\lambda(x)) > \lambda_1(-\Delta + \theta_\lambda(x)) = \lambda,$$

o que é um absurdo. Portanto, θ_λ é uma solução não-degenerada de (6.6).

□

Além da equação logística (6.6), também vamos considerar o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} -\Delta v = \delta R v & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.8)$$

Observe que (6.8) possui uma solução positiva $v \in X$ se, e somente se, $\delta R = \lambda_1(-\Delta)$. Neste caso, existe alguma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $v = K\varphi$, onde φ é uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-\Delta)$.

A seguinte proposição diz respeito à existência de soluções semi-triviais para (6.5).

Proposição 6.2. *(i) (6.5) possui solução semi-trivial da forma $(0, v)$, com $v > 0$ em Ω , se, e somente se, $\delta R = \lambda_1(-\Delta)$. Neste caso, $v \equiv K\varphi_1$, para algum $K \in \mathbb{R}$, onde φ_1 é a autofunção positiva associada a $\lambda_1(-\Delta)$ tal que $\|\varphi_1\|_\infty = 1$.*

(ii) (6.5) possui solução semi-trivial da forma $(u, 0)$, com $u > 0$ em Ω , se, e somente se, $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$. Neste caso, $u \equiv \theta_\lambda$, onde θ_λ é a única solução do problema logístico (6.6).

Prova. Basta observar que se fizermos $u \equiv 0$, (6.5) terá a forma de (6.8). Analogamente, se fizermos $v \equiv 0$, (6.5) terá a forma de (6.6). E o resultado segue das condições de existência de solução positiva para estes problemas.

□

O próximo resultado nos dá cotas a priori para estados de coexistência de (6.5). Tais cotas serão usadas para mostrar quando (6.5) não possui estados de coexistência.

Proposição 6.3. *Suponha que $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$. Se (6.5) possui um estado de coexistência (u, v) em $X \times X$, então*

$$u \leq \theta_\lambda \quad \text{em } \Omega. \quad (6.9)$$

Prova. Para cada $v \in X$ fixado, o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w - w^2 - bwv & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.10)$$

possui uma única solução positiva $w \in X$. Vamos mostrar que $w \leq \theta_\lambda$ em Ω . Com efeito, note que $\underline{u} = w$ e $\bar{u} = \lambda$ formam um par de sub-super solução para o problema (6.6). Portanto, a unicidade de solução positiva de (6.6) implica que $w \leq \theta_\lambda \leq \lambda$ em Ω . Agora, basta observar que $u = w$ e (6.9) segue imediatamente.

□

Agora vejamos as condições sobre os parâmetros λ e R para os quais (6.5) possui estados de coexistência.

Proposição 6.4. *Suponha que (6.5) possua um estado de coexistência. Então, $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$ e*

$$\frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta} < R < \frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))}{\delta}. \quad (6.11)$$

Prova. Observe que se (6.5) possui um estado de coexistência $(u, v) \in X \times X$, então a primeira equação deste sistema implica que

$$\lambda = \lambda_1(-\Delta + u(x)(1 + bv(x))) > \lambda_1(-\Delta).$$

Logo, $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$. Por outro lado, da segunda equação de (6.5) temos que

$$\delta R = \lambda_1\left(-\Delta + \frac{\gamma u(x)}{1 + v(x)}\right) > \lambda_1(-\Delta),$$

ou seja, $\delta R > \lambda_1(-\Delta)$. Para a segunda desigualdade de (6.11), note que a Proposição 6.4 nos dá que $u \leq \theta_\lambda$ em Ω . Sendo v positiva em Ω , temos que

$$\frac{\gamma u}{1 + v} < \gamma \theta_\lambda \quad \text{em } \Omega. \quad (6.12)$$

Portanto, (6.12) junto com a segunda equação de (6.5) implicam que

$$\delta R = \lambda_1\left(-\Delta + \frac{\gamma u(x)}{1 + v(x)}\right) < \lambda_1(-\Delta + \gamma \theta_\lambda(x)),$$

isto é,

$$R < \frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma \theta_\lambda(x))}{\delta}.$$

□

Finalmente estamos em condições de aplicar os resultados de [55] e [57] para o sistema (6.5). Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 6.5. *Para cada $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$, desde*

$$(R_\lambda, u_\lambda, v_\lambda) = \left(\frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma \theta_\lambda(x))}{\delta}, \theta_\lambda, 0\right), \quad (6.13)$$

bifurca um contínuo $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times \text{int}(P) \times \text{int}(P)$ de estados de coexistência de (6.5). Além disso, existe $R_\infty \in \mathbb{R}$ e v_{R_∞} solução de (6.8) para $R = R_\infty$ tais que $\lambda = \lambda_1(-\Delta + bv_{R_\infty}(x))$ e

$$(R_\infty, 0, v_{R_\infty}) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+),$$

onde $\text{cl}(\mathcal{C}^+)$ denota o fecho de \mathcal{C}^+ sobre $\mathbb{R} \times X \times X$. Em particular, $\delta R_\infty = \lambda_1(-\Delta)$ e existe algum $K \in \mathbb{R}$ tal que $v_{R_\infty} \equiv K\varphi_1$. Consequentemente, o sistema (6.5) possui pelo menos um estado de coexistência para quaisquer que sejam

$$\lambda > \lambda_1(-\Delta) \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta} < R < \frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma \theta_\lambda(x))}{\delta}.$$

Observação 6.6. Para cada $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$ fixo, denotemos por G_λ o autovalor $\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))$. As figuras 6.1 e 6.2 expressam melhor o diagrama de bifurcação do sistema local (6.5) e a sua região de coexistência, dados pelo Teorema 6.5.

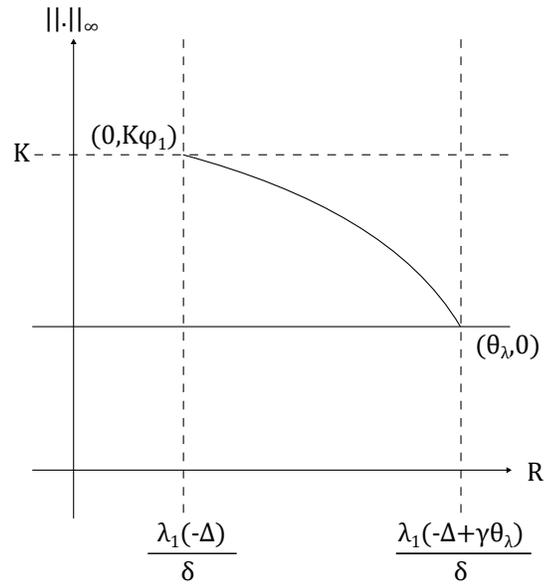


Figura 6.1: Diagrama de Bifurcação de (6.5).

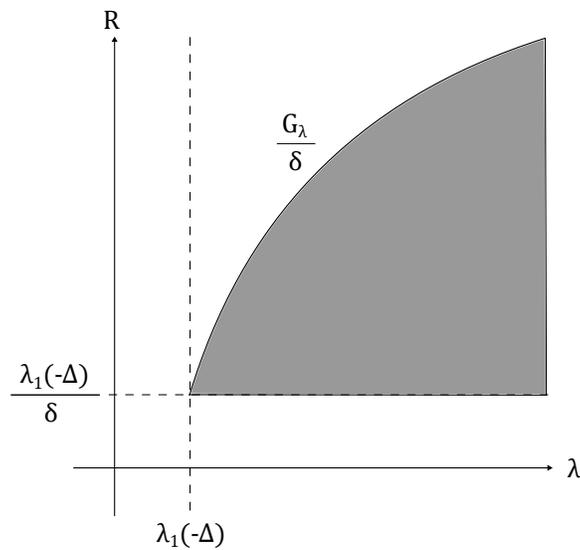


Figura 6.2: Região de Coexistência de (6.5).

Prova (do Teorema 6.5). Pela Proposição 6.1, para cada $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$, temos que $\theta_\lambda \in \text{int}(P)$ é uma solução não-degenerada de (6.6). Do Teorema 4.1 de [55] e do Teorema 7.22 de [57], desde $(R_\lambda, u_\lambda, v_\lambda)$ bifurca um contínuo $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R} \times \text{int}(P) \times \text{int}(P)$ de estados de coexistência de (6.5) que ou bem

(i) \mathcal{C}^+ é ilimitado em $\mathbb{R} \times X \times X$; ou

(ii) existe um $R_\infty \in \mathbb{R}$ e v_{R_∞} solução de (6.8) para $R = R_\infty$ tais que $\lambda = \lambda_1(-\Delta + bv_{R_\infty}(x))$ e $(R_\infty, 0, v_{R_\infty}) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$; ou

(iii) existe θ_λ^1 solução positiva de (6.6), com $\theta_\lambda^1 \neq \theta_\lambda$, tal que

$$\left(\frac{1}{\delta} \lambda_1(-\Delta + \gamma \theta_\lambda^1(x)), \theta_\lambda^1, 0 \right) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+); \text{ ou}$$

(iv) $\lambda = \lambda_1(-\Delta)$ e $\left(\frac{1}{\delta} \lambda_1(-\Delta), 0, 0 \right) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$.

Vamos analisar agora cada um dos itens acima e provar que o item (ii) é o verdadeiro.

Como o problema (6.6) tem unicidade de solução positiva e $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$, então os itens (iii) e (iv) não podem ocorrer. Vamos mostrar que o item (i) também não pode ocorrer. Para tanto, suponhamos que exista uma sequência $(R_n, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times X \times X$ de estados de coexistência de (6.5) com norma em $\mathbb{R} \times X \times X$ explodindo em \mathbb{R} . Pela Proposição 6.3(iii) temos que (R_n) é limitada em \mathbb{R} . Assim, a menos de subsequência, $R_n \rightarrow R_* < +\infty$ em \mathbb{R} e

$$\|(u_n, v_n)\|_{X \times X} \rightarrow +\infty. \tag{6.14}$$

Dessa forma, temos somente dois casos:

(a) Existe uma constante $C > 0$ tal que $|v_n|_\infty < C$.

Neste caso, a Proposição 6.3 implica que o segundo membro da primeira equação de (6.5) é limitado por uma constante que independe de n . Pela regularidade elíptica, $\|u_n\|_{W^{2,q}(\Omega)}$ é limitada para cada $q \geq 1$. Logo, das imersões contínuas dos espaços de Sobolev, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $\|u_n\|_X < C_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Aplicando o mesmo argumento na segunda equação de (6.5) temos que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $\|v_n\|_X < C_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isto contradiz (6.14).

(b) $|v_n|_\infty \rightarrow +\infty$.

Neste caso, fazendo $w_n = \frac{v_n}{|v_n|_\infty}$, temos que

$$-\Delta w_n = R_n \delta w_n - \frac{\gamma u_n w_n}{1 + v_n} \quad \text{em } \Omega. \quad (6.15)$$

Afirmamos que

$$w_n \rightarrow \varphi_1 \quad \text{em } X, \quad (6.16)$$

onde φ_1 é dada na Proposição 6.2. Note que para provar (6.16) é suficiente mostrar que

$$\int_{\Omega} u_n w_n \frac{1}{1 + v_n} \varphi \, dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Para provar isso, observe primeiro que novamente a Proposição 6.3 implica que existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u_n\|_{W^{2,q}(\Omega)} < C$, para cada $q \geq 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, das imersões compactas dos espaços de Sobolev, a menos de subsequência, temos que $w_n \rightarrow w_*$ em X , com $w_* \geq 0$ e $w_* \neq 0$. Consideremos os conjuntos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : w_*(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_0 = \{x \in \Omega : w_*(x) = 0\}.$$

Pela Proposição 6.3, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |u_n| |w_n| \frac{1}{|1 + v_n|} |\varphi| \, dx &\leq \lambda \int_{\Omega_0} |w_n| |\varphi| \, dx \\ &\leq \lambda \|w_n\|_{L^2(\Omega_0)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_0} u_n w_n \frac{1}{1 + v_n} \varphi \, dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (6.17)$$

Por outro lado, como $|v_n|_\infty \rightarrow +\infty$, o Teorema da Convergência Dominada implica que

$$\frac{1}{1 + v_n} \rightarrow 0 \quad \text{em } L^p(\Omega_+), \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

para todo $p \geq 1$. Como

$$\int_{\Omega_+} |u_n| |w_n| \frac{1}{|1 + v_n|} |\varphi| \, dx \leq \lambda \int_{\Omega_+} |w_n| \frac{1}{1 + v_n} |\varphi| \, dx,$$

então,

$$\int_{\Omega_+} u_n w_n \frac{1}{1 + v_n} \varphi \, dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty. \quad (6.18)$$

Os limites (6.17) e (6.18) provam (6.16). Agora, note que (6.16) implica que existe uma função $\tilde{\varphi} \in \text{int } P$ tal que, menos de subsequência,

$$w_n \geq \tilde{\varphi} \quad \text{em } \Omega. \quad (6.19)$$

De fato, note que pelo Princípio do Máximo Forte, temos que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} < 0, \quad \text{sobre } \partial \Omega.$$

Logo, (6.16) implica que existe uma contante $c > 0$, independente de n , tal que

$$\frac{\partial w_n}{\partial \eta} \leq -c < 0, \quad \text{sobre } \partial \Omega.$$

Isso garante a existência da função $\tilde{\varphi} \in \text{int } P$ (ver [53]). De (6.19), obtemos que

$$v_n \geq \tilde{\varphi}|v_n|_\infty \quad \text{em } \Omega.$$

Portanto, pela primeira equação de (6.5), obtemos que

$$\lambda = \lambda_1(-\Delta + u_n(x) + bv_n(x)) > \lambda_1(-\Delta + b\tilde{\varphi}(x)|v_n|_\infty).$$

Como $|v_n|_\infty \rightarrow +\infty$, chegamos a um absurdo, pois λ está fixado.

Esses dois casos mostram que o item (i) também não pode ocorrer, ou seja, \mathcal{C}^+ não pode ser ilimitado em $\mathbb{R} \times X \times X$.

Portanto, o item (ii) acima é o verdadeiro, ou seja existe um $R_\infty \in \mathbb{R}$ e v_{R_∞} solução de (6.8) para $R = R_\infty$ tais que $\lambda = \lambda_1(-\Delta + bv_{R_\infty}(x))$ e $(R_\infty, 0, v_{R_\infty}) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$. Uma vez que v_{R_∞} é solução de (6.8), então $\delta R_\infty = \lambda_1(-\Delta)$ e existe algum $K \in \mathbb{R}$ tal que $v_{R_\infty} \equiv K\varphi_1$.

Por outro lado, como estamos supondo $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$, bifurcando desde

$$(R_\lambda, u_\lambda, v_\lambda) = \left(\frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))}{\delta}, \theta_\lambda, 0 \right)$$

e mostrando que o contínuo é um conjunto limitado tal que $(R_\infty, 0, v_{R_\infty}) \in \text{cl}(\mathcal{C}^+)$, então (6.5) possui pelo menos um estado de coexistência para quaisquer que sejam

$$\lambda > \lambda_1(-\Delta) \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta} < R < \frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))}{\delta}.$$

□

6.3 Sistema Não-Local

Nesta seção, vamos usar o Teorema 6.5 e os argumentos de [7] para estudar o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^2 - buv & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \delta v \left(\frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) - \frac{\gamma uv}{1+v} & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.20)$$

Mais precisamente, vamos procurar em quais condições a função h está bem definida, é contínua e muda de sinal sobre o contínuo \mathcal{C}^+ . Note que isso é imediato para o conjunto

$$\mathcal{C}^+ \setminus \{(R_\lambda, \theta_\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

O próximo lema servirá para definir h sobre todo o contínuo \mathcal{C}^+ . Para enunciá-lo, consideremos Ψ_λ a única autofunção associada a R_λ tal que $|\Psi_\lambda|_\infty = 1$. Note que Ψ_λ é solução da equação

$$\begin{cases} -\Delta w + \gamma\theta_\lambda(x)w = R_\lambda w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 6.7. *Sejam $(R_n, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega}) \times C_0(\overline{\Omega})$, $n \geq 1$, com (u_n, v_n) estados de coexistência de (6.5) para $R = R_n$. Se*

$$R_n \longrightarrow R^* \quad \text{em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (u_n, v_n) \longrightarrow (\theta_\lambda, 0) \quad \text{em } C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}), \quad (6.21)$$

com $R^* \in \mathbb{R}$, então

$$R^* = R_\lambda \quad \text{e} \quad w_n = \frac{v_n}{|v_n|_\infty} \longrightarrow \Psi_\lambda \quad \text{em } C^1(\overline{\Omega}), \quad (6.22)$$

Prova. Observe que dividindo $|v_n|_\infty$ em ambos os membros de (6.5), obtemos que w_n é solução da seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \delta R_n w_n - \frac{\gamma u_n}{1+v_n} w_n & \text{em } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela Proposição 6.3 e pela regularidade elíptica, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|w_n\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C(\delta R_n + \gamma\lambda)|w_n|_\infty, \quad (6.23)$$

para cada $q \geq 1$. Uma vez que $|w_n|_\infty = 1$ e (R_n) é convergente em \mathbb{R} , (6.23) implica que (w_n) é limitada em $W^{2,q}(\Omega)$, para cada $q \geq 1$. Pelas imersões compactas dos espaços de Sobolev, a menos de subsequência, (w_n) converge em $C^1(\bar{\Omega})$ para algum $w \geq 0$. É claro que $|w|_\infty = 1$, ou seja, $w \neq 0$ em Ω . Por outro lado,

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \nabla v \, dx = \delta R_n \left(\int_{\Omega} w_n v \, dx \right) - \int_{\Omega} \frac{\gamma u_n}{1 + v_n} w_n v \, dx,$$

para toda $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Então, (6.21) implica que w satisfaz o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} -\Delta w + \gamma \theta_\lambda(x) w = \delta R^* w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, w é uma autofunção positiva associada a R_λ com $|w|_\infty = 1$, ou seja, $w = \Psi_\lambda$ em Ω . Portanto, $R^* = R_\lambda$, o que prova (6.22).

□

O Lema 6.7 nos permite definir h sobre todo o contínuo \mathcal{C}^+ . De fato, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, façamos

$$h(R_\lambda, \theta_\lambda, 0) = R_\lambda - \frac{\int_{\Omega} \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) \, dx}{\int_{\Omega} \Psi_\lambda(x) \, dx}.$$

Dessa forma, h está bem definida sobre \mathcal{C}^+ . Além disso, (6.22) implica que a função h é contínua. O próximo lema servirá para encontrar condições com as quais a função h muda de sinal sobre este contínuo.

Lema 6.8. *Sejam $(R_n, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times C_0(\bar{\Omega}) \times C_0(\bar{\Omega})$, $n \geq 1$, com (u_n, v_n) estados de coexistência de (6.5) para $R = R_n$. Se*

$$R_n \longrightarrow R^* \quad \text{em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad (u_n, v_n) \longrightarrow (0, \varphi_1) \quad \text{em } C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}), \quad (6.24)$$

com $R^* \in \mathbb{R}$ e φ_1 autofunção associada a $\lambda_1(-\Delta)$ tal que $|\varphi_1|_\infty = 1$, então

$$R^* = \frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta} \quad \text{e} \quad w_n = \frac{v_n}{|v_n|_\infty} \longrightarrow \varphi_1 \quad \text{em } C^1(\bar{\Omega}). \quad (6.25)$$

Prova. Com o mesmo argumento do Lema 6.7 obtemos que $w_n \rightarrow w$ em $C^1(\overline{\Omega})$, onde w satisfaz o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta w = \delta R^* w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, w é uma autofunção positiva associada a $\lambda_1(-\Delta)$ com $|w|_\infty = 1$, ou seja, $w = \varphi_1$ em Ω . Portanto, $\delta R^* = \lambda_1(-\Delta)$.

□

Como consequência dos lemas anteriores, temos o seguinte resultado:

Lema 6.9. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $(R_n, u_n, v_n) \in \mathcal{C}^+$ são estados de coexistência de (6.5) tais que

$$(R_n, u_n, v_n) \rightarrow (R_\lambda, \theta_\lambda, 0) \quad \text{em } \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega}) \times C_0(\overline{\Omega}), \quad (6.26)$$

então

$$h(R_n, u_n, v_n) \rightarrow R_\lambda - \frac{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx} \quad \text{em } \mathbb{R}. \quad (6.27)$$

(ii) Se $(R_n, u_n, v_n) \in \mathcal{C}^+$ são estados de coexistência de (6.5) tais que

$$(R_n, u_n, v_n) \rightarrow \left(\frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta}, 0, \varphi_1 \right) \quad \text{em } \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega}) \times C_0(\overline{\Omega}), \quad (6.28)$$

então

$$h(R_n, u_n, v_n) \rightarrow \frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta} \quad \text{em } \mathbb{R}. \quad (6.29)$$

Prova. Para o item (i), basta observar que (6.26) implica que

$$\frac{\int_\Omega u_n(x) v_n(x) dx}{\int_\Omega v_n(x) dx} \longrightarrow \frac{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx} \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

De onde (6.27) segue. Analogamente, o item (ii) segue do fato de que (6.28) implica em

$$\frac{\int_\Omega u_n(x) v_n(x) dx}{\int_\Omega v_n(x) dx} \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

□

Finalmente, podemos encontrar condições sobre λ e δ para os quais (6.20) possua estados de coexistência.

Teorema 6.10. *Para cada*

$$\lambda > \lambda_1(-\Delta) \quad e \quad \delta > \lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x)) \left(\frac{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx} \right), \quad (6.30)$$

o sistema (6.20) possui pelo menos um estado de coexistência.

Prova. Seja $\Sigma_0 = \mathcal{C}^+$. O Lema 6.7 nos diz que, definido

$$h(R_\lambda, \theta_\lambda, 0) = R_\lambda - \frac{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx},$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a função h está bem definida e é contínua sobre Σ_0 . Por outro lado, (6.30) junto com o Lema 6.10 implicam que h muda de sinal sobre o contínuo Σ_0 . De fato, note $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$ e o Lema 6.10 implicam que

$$h\left(\frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta}, 0, \varphi_1\right) = \frac{\lambda_1(-\Delta)}{\delta} > 0.$$

Por outro lado, (6.30) implica que

$$\delta \left(\frac{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx} \right) > \lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x)),$$

ou seja,

$$\frac{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx} > \frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))}{\delta}.$$

Logo,

$$R_\lambda = \frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))}{\delta} < \frac{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx}.$$

Pelo Lema 6.10, temos que

$$h(R_\lambda, \theta_\lambda, 0) = R_\lambda - \frac{\int_\Omega \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx}{\int_\Omega \Psi_\lambda(x) dx} < 0.$$

Portanto, o Teorema de Bolzano garante que h possui pelo menos um zero em Σ_0 , ou seja, (6.20) possui pelo menos um estado de coexistência em Σ_0 .

□

6.4 Região de Coexistência e Interpretações

Nesta seção, vamos estudar a região de coexistência de (6.20) para interpretarmos os resultados obtidos na Seção 6.3. Para isso, consideremos a função $F : (\lambda_1(-\Delta), +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(\lambda) = \lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x)) \left(\frac{\int_{\Omega} \Psi_\lambda(x) dx}{\int_{\Omega} \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx} \right). \quad (6.31)$$

Vejamos as propriedades da função F no próximo resultado.

Proposição 6.11. *As seguintes afirmações sobre F são verdadeiras:*

- (i) *A função F é contínua.*
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1(-\Delta)} F(\lambda) = +\infty.$
- (iii) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) \geq \gamma.$

Prova. Para o item (i), recordemos que da Proposição 5.12 temos que a aplicação $\lambda \mapsto \theta_\lambda$ é contínua em $C^2(\overline{\Omega})$. Por outro lado, a continuidade das aplicações $\lambda \mapsto \Psi_\lambda$ (em $C(\overline{\Omega})$) e $\lambda \mapsto \lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))$ (em \mathbb{R}) é garantida por [58]. Logo, F é contínua. Para o item (ii), note que pela Proposição 5.12 temos que $\theta_\lambda \rightarrow 0$ em $C^2(\overline{\Omega})$, quando $\lambda \rightarrow \lambda_1(-\Delta)$. Por outro lado, $\Psi_\lambda \rightarrow \varphi_1$ em $C^1(\overline{\Omega})$, quando $\lambda \rightarrow \lambda_1(-\Delta)$. Logo,

$$\frac{\int_{\Omega} \Psi_\lambda(x) dx}{\int_{\Omega} \theta_\lambda(x) \Psi_\lambda(x) dx} \rightarrow +\infty, \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \lambda_1(-\Delta).$$

Como $\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x)) \rightarrow \lambda_1(-\Delta)$, quando $\lambda \rightarrow \lambda_1(-\Delta)$, o item (ii) segue. Para (iii), observe que pela Proposição 5.12,

$$F(\lambda) \geq \frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))}{\lambda},$$

pois $\theta_\lambda \leq \lambda$ em Ω . Além disso, em [56] mostra-se que

$$\frac{\lambda_1(-\Delta + \gamma\theta_\lambda(x))}{\lambda} \rightarrow \gamma, \quad \text{quando } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Isto finaliza a prova. □

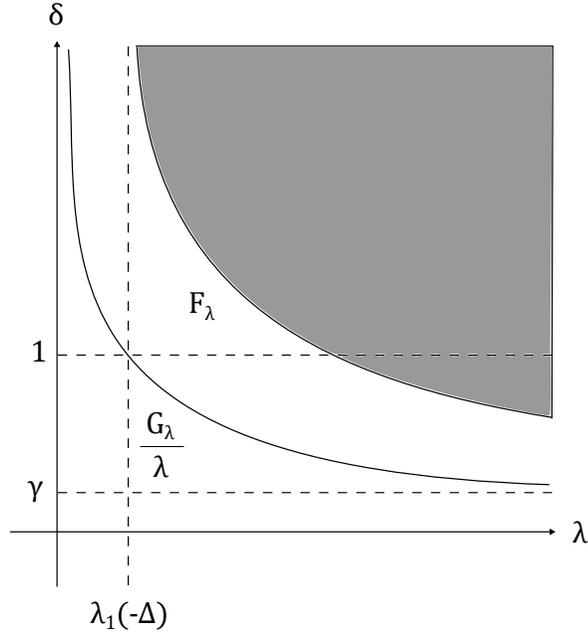


Figura 6.3: Região de Coexistência de (6.20).

Observação 6.12. *Vamos finalizar este capítulo interpretando os resultados obtidos nas seções anteriores. Primeiro observemos que a Proposição 6.11 não é suficiente para entendermos o comportamento completo da região de coexistência de (6.20), uma vez que precisamos saber exatamente o que acontece com o limite de F_λ quando $\lambda \rightarrow +\infty$ (a Figura 6.3 representa uma possível região de coexistência para (6.20)). Porém, podemos concluir algumas características de ambas as espécies para o caso estacionário. Note que a respeito das soluções semi-triviais de (6.20) temos o seguinte:*

- (a) *A semi-trivial $(0, v)$, com $v \in X$ e $v > 0$, não existe.*
- (b) *A semi-trivial $(u, 0)$, com $u \in X$ e $u > 0$, existe para $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$ e neste caso $u = \theta_\lambda$.*

Por outro lado, o conjunto

$$E = \left\{ (\lambda, \delta) \in \mathbb{R}_+^2 : \lambda \leq \lambda_1(-\Delta) \quad e \quad \delta \leq \frac{\lambda_1(-\Delta)}{\lambda} \right\}$$

é um conjunto extinção para as espécies. De fato, se $(u, v) \in X \times X$ é um estado de coexistência para (6.20), então:

- $\lambda = \lambda_1(-\Delta + u(x) + bv(x)) > \lambda_1(-\Delta)$.

- Pela Proposição 6.3, $u \leq \lambda$ em Ω . Logo,

$$\lambda\delta \geq \delta \left(\frac{\int_{\Omega} u(x)v(x) dx}{\int_{\Omega} v(x) dx} \right) = \lambda_1 \left(-\Delta + \frac{\gamma u(x)}{1 + v(x)} \right) > \lambda_1(-\Delta).$$

Além disso, Pelo Teorema 6.10, um conjunto de coexistência para as espécies é dado por

$$C = \{(\lambda, \delta) \in \mathbb{R}^2 : \lambda > \lambda_1(-\Delta) \text{ e } \delta > F(\lambda)\}.$$

Observamos ainda que o parâmetro $\lambda > 0$ representa a taxa de natalidade das bactérias. Isso nos permite concluir as seguintes interpretações:

- (i) Para valores pequenos de λ a única solução de (6.20), com ambas as componentes não-negativas, é a trivial. Isso significa que quando a taxa de natalidade das bactérias é muito pequena, ambas as populações não existem. O que faz sentido, pois não existe outra fonte de alimentação para as amebas que não sejam as bactérias.
- (ii) Quando $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$, as bactérias sempre existem. Note que neste caso a taxa de natalidade das bactérias é positiva. Observe que a população bacteriana nunca se extingue devido ao fato de que sua virulência é um mecanismo de defesa que mata as amebas, mantendo as bactérias vivas.
- (iii) Quando $\lambda > \lambda_1(-\Delta)$ e $\delta > F(\lambda)$, ambas as populações coexistem. Isso faz sentido, pois δ é a taxa de crescimento das amebas, a qual precisa assumir um determinado valor para que a população ameboide não seja extinta pelas bactérias.

Bibliografia

- [1] W. Allegretto and A. Barabanova, Positivity of solutions of elliptic equations with nonlocal terms, *Proc. Royal Soc. of Edin. Section A.* **126** (1996), 643–663.
- [2] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Rev.* **18** (1976), 620–709.
- [3] A. Ambrosetti and P. Hess, Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems, *J. Math. Anal. Appl.* **73** (1980), 411–422.
- [4] A. Ambrosetti and G. Prodi, A Primer of Nonlinear Analysis, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [5] D. Arcoya, J. Carmona and B. Pellacci, Bifurcation for some quasi-linear operators, *Proc. Royal Soc. of Edin. Section A.* **131** (2001), 733–766.
- [6] D. Arcoya and J. L. Gámez, Bifurcation theory and related problems: anti-maximum principle and resonance, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), 1879–1911.
- [7] D. Arcoya, T. Leonori and A. Primo, Existence of solutions for semilinear nonlocal elliptic problems via a Bolzano Theorem, *Acta. Appl. Math.* **127** (1) (2013), 87–104.
- [8] C. O. Alves, M. Delgado, M. A. S. Souto and A. Suárez, Existence of positive solution of a nonlocal logistic population model, *Z. Angew. Math. Phys.* **66** (2015), 943–953.
- [9] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa and T. F. Ma, Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, *Comput. Math. Appl.* **49** (2005), 85–93.

- [10] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S. R. S. Varadhan, The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains, *Comm. Pure Appl. Math.* **XLVII** (1994), 47–92.
- [11] J. Blat and K. J. Brown, Bifurcation of steady-state solutions in predator-prey and competition systems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **97A** (1984), 21–34.
- [12] J. M. Bony, Principe du maximum dans les espaces de Sobolev, *C. R. Acad. Sc. Paris* **265** (1967), 333–336.
- [13] H. Brézis, *Análisis Funcional, Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial S. A. Madrid, 1984.
- [14] I. Borsi, A. Fasano, M. Primicerio and T. Hillen, A non-local model for cancer stem cells and the tumor growth paradox, *Math. Med. Biol.* **34** (1) (2015), 59–75.
- [15] R. S. Cantrell, C. Cosner and V. Hutson, Ecological models, permanence and spatial heterogeneity, *Rocky Mountain J. Math.* **26** (1996), 1–35.
- [16] J. A. Carrillo, On a nonlocal elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction, *Nonlinear Anal.* **32** (1998), 97–115.
- [17] F. J. S. A. Corrêa, M. Delgado and A. Suárez, Some non-local problems with non-linear diffusion, *Math. Comput. Modelling* **54** (2011), 2293–2305.
- [18] F. J. S. A. Corrêa, M. Delgado and A. Suárez, Some nonlinear heterogeneous problems with nonlocal reaction term, *Adv. Differential Equations* **16** (2011), 623–641.
- [19] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **8** (1971), 321–340.
- [20] J. M. Cushing, Two species competition in a periodic environment, *J. Math. Biol.* **10** (1980), 385–390.
- [21] F. A. Davidson and N. Dodds, Existence of positive solutions due to nonlocal interactions in a class of nonlinear boundary value problems, *Methods Appl. Anal.* **14** (2007), 15–27.

- [22] E. N. Dancer, On the indices of fixed points of mappings in cones and applications, *J. Math. Anal. Appl.* **91** (1983), 131–151.
- [23] D. Daners and P.K. Medina, Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications, Pitman Res. Notes in Math. Ser. 279, Longman, New York, 1992.
- [24] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [25] M. Delgado, I. B. M. Duarte and A. Suárez, Nonlocal elliptic system arising from the growth of cancer stem cells, preprint.
- [26] M. Delgado, I. B. M. Duarte and A. Suárez, Nonlocal problem arising from the birth-jump processes, *Proc. Royal Soc. of Edin. Section A.*, in production.
- [27] M. Delgado, I. B. M. Duarte and A. Suárez, Study of a nonlocal singular equation by means a non-standard bifurcation theory, preprint.
- [28] M. Delgado, J. López-Gómez and A. Suárez, On the symbiotic Lotka-Volterra model with diffusion and transport effects, *J. Differential Equations* **160** (2000), 175–262.
- [29] M. Delgado and A. Suárez, Study of an elliptic system arising from angiogenesis with chemotaxis and flux at the boundary, *J. Differential Equations* **244** (2008), 3119–3150.
- [30] H. Enderling, A. R. A. Anderson, M. A. J. Chaplain, A. Beheshti, L. Hlatky and P. Hahnfeldt, Paradoxical dependencies of tumor dormancy and progression on basic cell kinetics, *Cancer Res.* **69** (22) (2009), 8814–8821.
- [31] H. Enderling, P. Hahnfeldt and T. Hillen, The tumor growth paradox and immune system-mediated selection for cancer stem cells, *Bull. Math. Biology* **75** (2013), 161–184.
- [32] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Providence, Rhode Land: American Mathematical Society, 1998.
- [33] A. Fasano, A. Mancini and M. Primicerio, Tumours with cancer stem cells: A PDE model, *Mathematical Biosciences* **272** (2016), 76–80.

- [34] G. M. Figueiredo, Existence of positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument, *J. Math. Anal. Appl.* **401** (2013), 706–713.
- [35] G. M. Figueiredo, C. Morales-Rodrigo, J. R. Santos Junior and A. Suárez, Study of a nonlinear Kirchhoff equation with non-homogeneous material, *J. Math. Anal. Appl.* **416** (2014), 597–608.
- [36] P. Freitas and G. Sweers, Positivity results for a nonlocal elliptic equation, *Proc. Royal Soc. of Edin. Section A.* **128** (1998), 697–715.
- [37] P. Freitas and M. Grinfeld, Stationary solutions of an equation modelling Ohmic heating, *Appl. Math. Lett.* **7** (1994), 1–6.
- [38] L. Fumanelli, Mathematical modeling of amoeba-bacteria population dynamics, Doctoral Thesis, 2009.
- [39] J. Furter and M. Grinfeld, Local vs. nonlocal interactions in population dynamics, *J. Math. Biol.* **27** (1989), 65–80.
- [40] J. Furter and J. López-Gómez, Diffusion-mediated permanence problem for a heterogeneous Lotka-Volterra competition model, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **127A** (1997), 281–336.
- [41] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [42] B. Greese, T. Hillen, J. Martin and de G. Vries, Birth-jump processes and application to forest fire spotting, *J. of Biological Dynamics* **9** (sup1) (2015), 104–127.
- [43] P. Hess, Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity, Longman Scientific & Technical, 1991.
- [44] V. Hutson, S. Martínez, K. Mischaikow and G.T. Vickers, The evolution of dispersal, *J. Math. Biol.* **47** (2003), 483–517.
- [45] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

- [46] M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, New York, 1964.
- [47] M. G. Krein and M. A. Rutman, Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space, *Amer. Math. Soc. Transl.* **10** (1962), 199–325.
- [48] A. A. Lacey, Thermal runaway in a non-local problem modeling Ohmic heating: Part I, *Euro. J. Appl. Math.* **6** (1995), 127–144.
- [49] J. Leray and J. Schauder, Topologie et equations fonctionelles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **51** (1934), 45–78.
- [50] L. Li, Coexistence theorems of steady states for predator-prey interacting systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **305** (1988), 143–166.
- [51] P. L. Lions, A remark on Bony maximum principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** (1982) 503–508.
- [52] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [53] J. López-Gómez, Classifying smooth supersolutions for a general class of elliptic boundary value problems, *Adv. Differential Equations* **8** (2003), 1025–1042.
- [54] J. López-Gómez, *Linear Second Order Elliptic Operators*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, New Jersey, 2013.
- [55] J. López-Gómez, Nonlinear eigenvalues and global bifurcation: Application to the search of positive solutions for general Lotka-Volterra reaction-diffusion systems with two species, *Differential Integral Equations* **7** (1994), 1427–1452.
- [56] J. López-Gómez, On the structure of the permanence region for competing species models with general diffusivities and transport effects, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **2** (1996), 525–542.
- [57] J. López-Gómez, *Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis*, Research Notes in Mathematics 426, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2001.

- [58] J. López-Gómez, The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems, *J. Differential Equations* **127** (1996), 263–294.
- [59] J. López-Gómez, The strong maximum principle, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B15** (2009), 113–123.
- [60] J. López-Gómez and J. Sabina de Lis, Coexistence states and global attractivity for some convective diffusive competing species models, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3797–3833.
- [61] L. Maddalena, Analysis of an integro-differential system modeling tumor growth, *Appl. Math. Comput.* **245** (2014), 152–157.
- [62] B. De Pagter, Irreducible compact operators. *Math. Z.* **192** (1986), 149–153.
- [63] C. V. Pao, Blowing-up of solutions for a nonlocal reaction-diffusion problem in combustion theory, *J. Math. Anal. Appl.* **166** (1992), 591–600.
- [64] C. V. Pao, *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, Plenum Press, New York, 1992.
- [65] C. V. Pao, On nonlinear reaction-diffusion systems, *J. Math. Anal. Appl.* **87** (1982), 165–198.
- [66] M. Protter and H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, PrenticeHall, 1967.
- [67] F. Punzo and T. Savitska, Local versus nonlocal interactions in a reaction-diffusion system of population dynamics, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* **25** (2014), no. 2, 191–216.
- [68] P. H. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.* **7** (1971), 487–513.
- [69] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer, Berlin, 1974.

- [70] Y. Yamada, On logistic diffusion equations with nonlocal interaction terms, *Nonlinear Analysis* **118** (2015), 51–62.