



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Estabilidade e Análise Numérica de Sistemas Elásticos Porosos

Manoel Lucival da Silva Oliveira

Belém

2017

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM**

Manoel Lucival da Silva Oliveira

**Estabilidade e Análise Numérica de Sistemas Elásticos
Porosos**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de doutor em matemática.

Área de Concentração: **Análise**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém-PA

Setembro/2017

OLIVEIRA, Manoel Lucival da Silva, 1981.

Estabilidade e Análise Numérica de Sistemas Elásticos Porosos/ Manoel Lucival da Silva Oliveira; Orientador, Prof. Dr. Mauro de Lima Santos. -2017.

137 f. il. 29 cm

Inclui bibliografias

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de pós-Graduação em Matemática, Belém, 2017.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Sistemas elásticos porosos. 3. Estabilidade exponencial e polinomial. 4. Análise numérica. 5. Semigrupos. I. Santos, Mauro de Lima, orient. II. Título.

CDD-22 ed. 515.353

Estabilidade e Análise Numérica de Sistemas Elásticos Porosos

Manoel Lucival da Silva Oliveira


Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de doutor em matemática.

Data de defesa: 21 de setembro de 2017.

Resultado: APROVADO



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (PPGME/PDM/UFPA) – Orientador



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (PPGME/PDM/UFPA) – Membro



Prof. Dr. Huy Hoang Nguyen (IM/UFRJ) – Membro



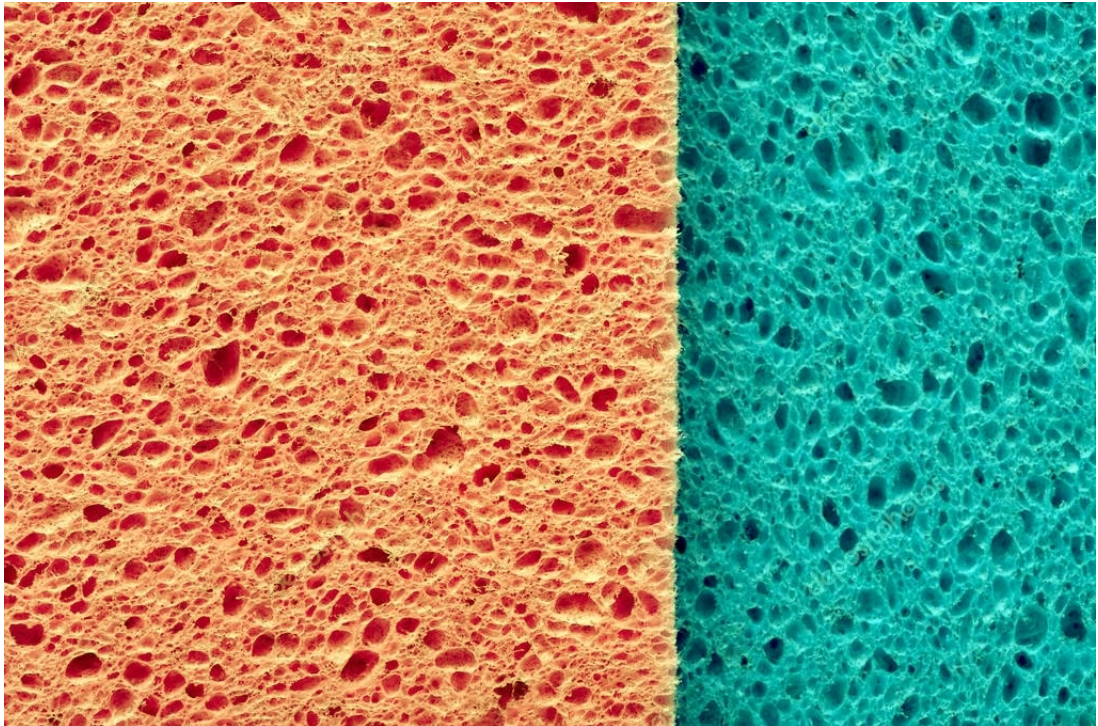
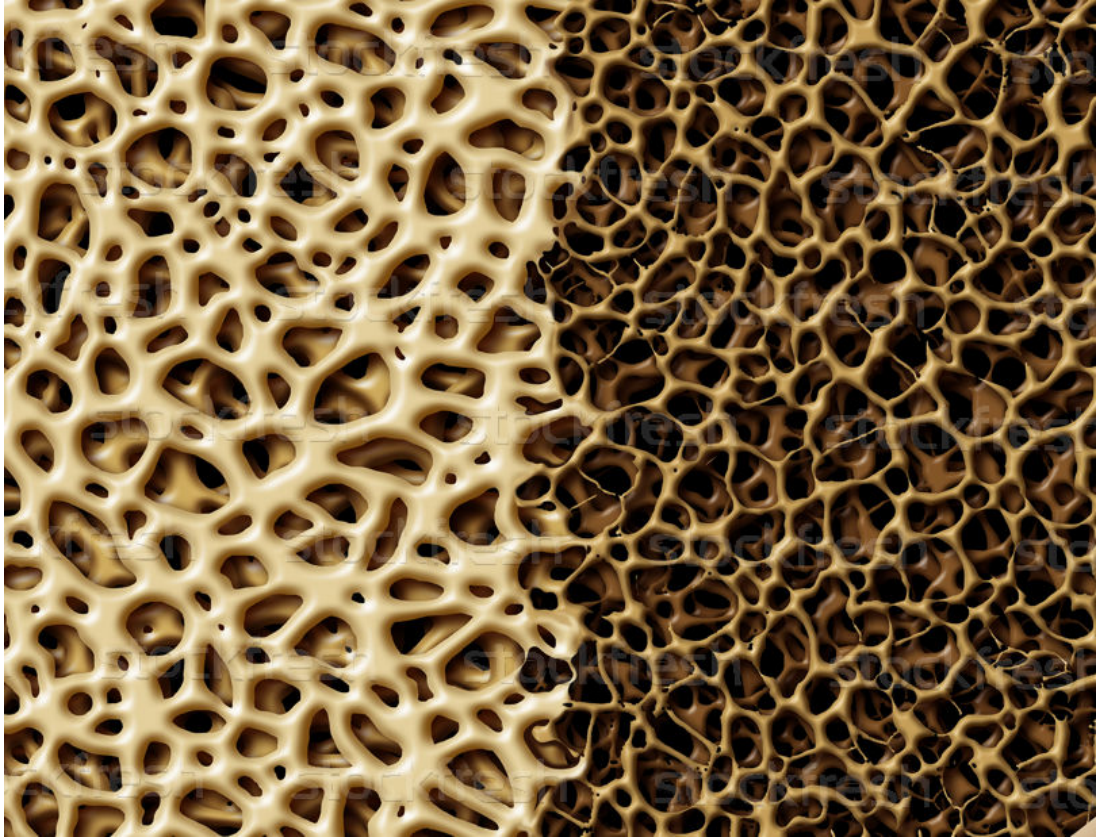
Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha (UFSJ) – Membro



Prof. Dr. Anderson David de Souza Capelo (PPGME/UFPA) – Membro



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (Campus de Salinópolis/UFPA) – Membro



A sabedoria é resplandescete e sempre viçosa. Ela é facilmente contemplada por aqueles que a amam e é encontrada por aqueles que a procuram. Ela até se antecipa aos que a desejam. Quem por ela madruga não se cansará, pois a encontrará sentada à sua porta.
Livro da Sabedoria (6,12-15).

Agradecimentos

- À Deus pai, fonte de vida e sabedoria, que sempre esteve ao meu lado, me dando força necessária para concluir este trabalho.
- À minha mãe santíssima, Nossa Senhora de Nazaré, que sempre olhou por mim, guiando-me sempre nas horas das dificuldades encontradas.
- Ao meu orientador, Dr. Mauro de Lima Santos, que compartilhou comigo seus conhecimentos e seu tempo, me dando atenção nas horas das dificuldades encontradas na condução deste trabalho.
- À minha querida esposa Elizama, pela sua compreensão e incentivo.
- Aos meus filhos, Renan e Ágata, fonte eterna de alegria e motivação em minha vida.
- Aos meus familiares, minha mãe Terezinha, meu pai Josué, minhas irmãs Alessandra, Lucivânia e Marta, que nunca deixaram de acreditar em mim.
- Aos professores Dilberto da S. A. Júnior e em especial Anderson D. S. Campelo, pela colaboração no ensino.
- Aos meus amigos: Elany, Marcos, Jeremias, Gelson, Mirelson, João, Solon, Gutemberg, Misaél, Maurício, Sancho, Elen, Leonardo, Sebastião e outros que me acompanharam no decorrer desta jornada.
- Ao meu orientador do mestrado, professor Ducival, pelo incentivo e força.
- Pelo incentivo que tive de muitos amigos pertencentes ao Corpo de Bombeiros(CBMPA), nobre instituição que jamais esquecerei pelo apoio aos meus estudos.
- Por todos os professores pertencentes ao PDM-UFPA que de modo direto ou indireto contribuíram para a realização deste trabalho.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Estabilidade e Análise Numérica de Sistemas Elásticos Porosos

por Manoel Lucival da Silva Oliveira

Nesta tese, estudamos um sistema elástico poroso com lei de Fourier no caso uni-dimensional, onde mostramos a existência e unicidade de soluções obtida por meio da teoria de semigrupos de operadores lineares. Além disso, provamos que este sistema perde estabilidade exponencial, quando $\mu/\rho \neq \delta/J$. Desse modo, mostramos que o modelo apresenta estabilidade polinomial. Outro resultado importante, versa sobre o decaimento exponencial de soluções do modelo elástico poroso, que é obtido quando acoplamos o efeito térmico e caso $\mu/\rho = \delta/J$.

Outra parte desta tese versa sobre o sistema elástico poroso, onde usamos dois mecanismos dissipativos, um do tipo viscoelástico e outro poroso, que atuam na mesma equação e não são suficientemente fortes para fazer as soluções decair exponencialmente, independentemente de qualquer relação existente entre os coeficientes μ, ρ, δ e J , isto é, mostramos que o operador resolvente não é uniformemente limitado ao longo do eixo imaginário. No entanto, ele decai polinomialmente com taxa ótima. Neste sistema, fazemos um estudo numérico do nosso modelo dissipativo utilizando o método das diferenças finitas, com o objetivo de obter simulações numéricas, que verifiquem os resultados analíticos obtidos.

Palavras-chave: Sistema elástico poroso; falta de estabilidade exponencial; decaimento exponencial e decaimento polinomial, resultados numéricos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática

Stability and Numerical Analysis of Elastic Porous Systems

by Manoel Lucival da Silva Oliveira

In this thesis, we study porous-elastic system with Fourier law in the one-dimensional case, where we show the existence and uniqueness of solutions obtained by means of the semigroups theory of linear operators. In addition, we prove that this system loses exponential stability, when $\mu/\rho \neq \delta/J$. Thus, we show that our model presents polynomial stability. Another important result concerns the exponential decay of solutions of the porous elastic model, that is obtained when coupling the thermal effect and if there is equality $\mu/\rho = \delta/J$.

Another part of this thesis versed on the system elastic porous, where we use two dissipative mechanisms, one of the viscoelastic type and the other porous, which act in the same equation and are not strong enough to make the solutions decay in an exponential way, independently of any relationship between the coefficients μ, ρ, δ e J , that is, we show that the resolvent operator is not limited uniformly along the imaginary axis. However, it decays polynomially with optimal rate. In this system, we do a numerical study of our dissipative model using the finite difference method, aiming to obtain numerical simulations, to verify the analytical results obtained.

Keywords: Porous elastic system; lack of exponential stability; exponential decay and polynomial decay; numerical results.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Considerações Gerais e Motivação	1
1.2	Objetivo do Trabalho	9
1.3	Organização do Trabalho	10
2	Um Modelo Elástico Poroso com Lei de Fourier	12
2.1	Fundamentação Teórica	12
2.2	A Energia do Sistema	13
2.3	O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares.	17
2.4	A Falta de Estabilidade Exponencial	22
2.5	Decaimento Exponencial	27
2.6	Decaimento Polinomial	45
3	Um Modelo Elástico Poroso com Dissipação Viscoelástica	55
3.1	Fundamentação Teórica	55
3.2	A Energia do Sistema	56
3.3	O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares	59
3.4	A Falta de Estabilidade Exponencial	64
3.5	Decaimento Polinomial	68
4	Resultados Numéricos para Modelos Elásticos Porosos	84
4.1	Fundamentação Teórica	84
4.1.1	Convergência do Esquema Numérico	85
4.2	Método Numérico Explícito em Diferenças Finitas	87
4.3	Discretização da Energia	91
4.4	Positividade da Energia E^n	107

<i>Contents</i>	viii
4.5 Simulações Numéricas	113
4.5.1 Decaimento Exponencial	117
5 Conclusão e Trabalhos Futuros	121
Referências Bibliográficas	123

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais e Motivação

Com o passar do tempo, nossa sociedade evoluiu e com as nossas necessidades surgiram inúmeros materiais com diferentes formas e níveis de tecnologia, materiais que foram aprimorados, estudados e desenvolvidos ao longo dos últimos séculos. Se pararmos para observar nossa casa, ambiente de trabalho ou mesmo lazer, iremos notar a presença das paredes, concreto, madeira, papel, vidro, esponja, cerâmica, aço, plástico. Materiais supostamente simples, mas na verdade, frutos da natureza com a intervenção do homem, que de forma gradual, trabalhando e pesquisando, avançaram com auxílio da tecnologia, pois estes materiais apresentam algumas características e propriedades físico-químicas como os poros que são visíveis muitas vezes apenas de forma microscópica.

Para iniciar, iremos definir um material elástico poroso como sendo um material que apresenta meios porosos cuja matriz sólida é elástica. Mas o que seria, a elasticidade de um material, um meio poroso e onde podemos encontrá-los?

A elasticidade é uma propriedade ideal que pode ser encontrada em alguns materiais naturais ou sintéticos, cujo comportamento elástico, ou não, depende de alguns fatores fundamentais, tais como a homogeneidade, isotropia e continuidade.

Dentre vários materiais que vem sendo amplamente estudados na engenharia de estruturas, e outros ramos de pesquisas, citamos os sólidos porosos que são constituídos por uma classe de materiais naturais e artificiais. Estes materiais sólidos podem ser do tipo celular (madeira, polímeros, osso), geológicos (rocha), granular (solos aquíferos, reservatórios de petróleo, areia) e sintetizados (tijolos, blocos perfurados, etc.). Algumas das aplicabilidades destes sólidos porosos, estão inseridas como na fabricação de veículos, grandes aviões, estruturas espaciais, dentre outras.

De acordo com Rocha e Aguiar [24], as propriedades mecânicas dos sólidos porosos dependem de fatores da microestrutura como porosidade, formato, tamanho e distribuição dos poros na matriz sólida. Para estes materiais é conveniente diferenciar dois tipos de anisotropia: local e global. A anisotropia local refere-se a anisotropia do material constituinte da matriz sólida, a qual não depende da presença de poros, enquanto que a anisotropia global refere-se a anisotropia induzida pelo formato, tamanho e distribuição dos poros na matriz sólida.

Um meio poroso é um material contendo poros (espaços vazios do termo em inglês voids). Os poros são tipicamente cheios, ou não, com um fluido tipo líquido ou gás. A porção esquelética do material é muitas vezes chamado de **matriz** ou **frame**, que é normalmente representada por um sólido.

Materiais compostos por meios porosos são muitos utilizados nas áreas das ciência aplicada e engenharia, sendo que estes meios porosos são frequentemente caracterizados pela sua porosidade, ou seja pelas suas propriedades do meio, como por exemplo a permeabilidade, resistência a ruptura, a sua condutividade elétrica e outras. Citamos como exemplo, um material elástico poroso desenvolvido na indústria aeronáutica, conhecido como microlatice (ver Figura 1.1 e 1.2), desenvolvido pela empresa aérea Boeing em parceria com a Universidade da Califórnia, onde afirmam ser o material mais leve do mundo.

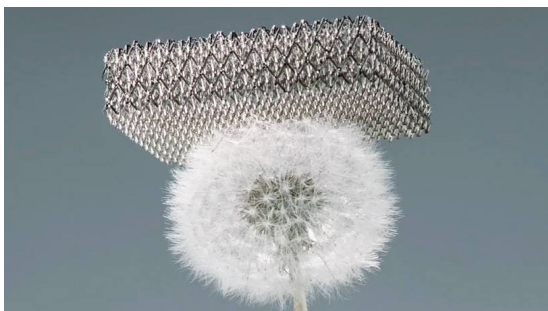


FIGURA 1.1: Microlatice da Boeing.

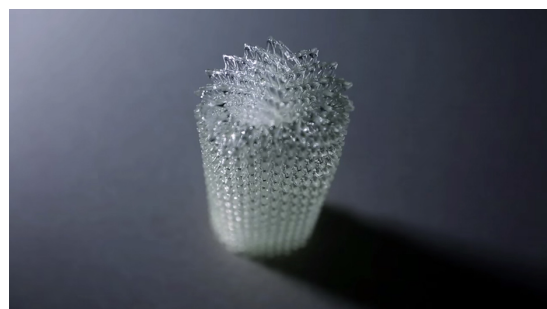


FIGURA 1.2: Microlatice da Boeing.

Os meios porosos podem ser encontrados em substâncias naturais, tais como nas rochas, no solo, zeólitos, tecidos biológicos como ossos (ver Figura 1.3), madeira, cortiça e substâncias artificiais, feitas pelo homem, materiais como o cimento e a cerâmica (ver Figura 1.4), atadura ou bandagem elástica (ver Figura 1.5), também considerados como meios porosos.

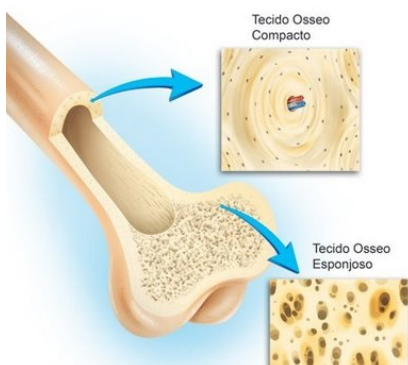


FIGURA 1.3: Tecido ósseo esponjoso.



FIGURA 1.4: Concreto permeável ou poroso.



FIGURA 1.5: Bandagem elástica porosa.

Após essa breve descrição de material elástico, sólido e meio poroso, a nossa atenção estará voltada ao estudo de materiais elásticos com poros, que apresentam boas propriedades físicas e que estão sendo amplamente utilizados nas engenharias e outros ramos do conhecimento. Devido as suas inúmeras aplicações, os problemas de elasticidade desses tipos de materiais tornaram-se questões cada vez mais importante e interessante, atraindo dessa forma a atenção no desenvolvimento de trabalhos científicos de muitos pesquisadores.

Um dos precursores no trabalho de materiais com poros é o professor Stephen C. Cowin (ver Figura 1.6), pertencente ao the City College of New York, onde desenvolve suas pesquisas nos ramos Biomedical, Engenharia mecânica, Biomecânica ortopédica e teorias de remodelação

óssea. Seu interesse atual está no movimento de fluido nos ossos e tecidos moles, biologia do desenvolvimento e anisotropia dos materiais.

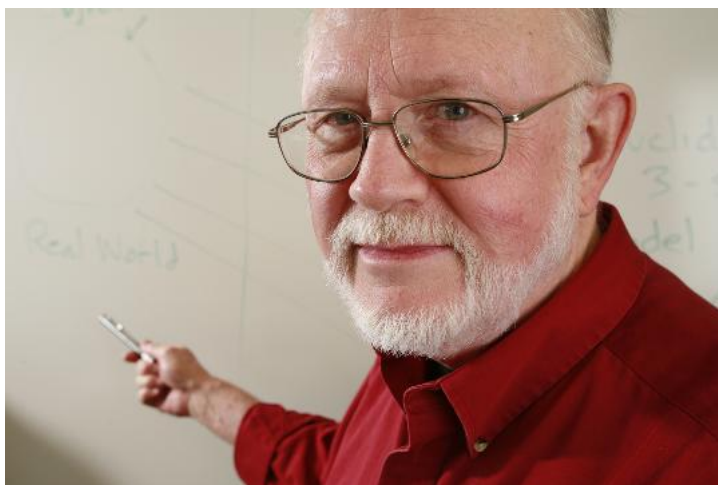


FIGURA 1.6: Professor S. C. Cowin

Há mais de quatro décadas, os pesquisadores Cowin e Goodman [10], desenvolveram um trabalho onde apresentaram uma teoria para materiais granulares formuladas a partir de argumentos formais da mecânica do contínuo. Como premissa básica, adotaram que o conceito de distribuição em massa deve ser estendido para admitir materiais granulares. Em particular, objetivando que a distribuição da massa deva ser relacionada com o volume de distribuição de grânulos, tiveram que introduzir uma cinemática independente da variável, chamada de função de distribuição de volume.

Em outro trabalho, Cowin e Nunziato [16] apresentaram uma teoria para o comportamento dos sólidos porosos em que o material da matriz é elástico e os interstícios são constituídos de materiais com void. A teoria admite ambas as deformações finitas e relações constitutivas não-lineares, e algumas das aplicações previstas desta teoria são para materiais geológicos, tais como o solo e para a fabricação de materiais porosos como a cerâmica.

Cowin em [7], propõe um novo modelo matemático que descreve o comportamento mecânico dos sólidos porosos com elasticidade, apresentando deformações infinitesimais, onde admite que a função resposta mecânica do sólido poroso é uma função isotrópica do tensor de deformação infinitesimal, da fração volumétrica e do tensor textura.

É importante ressaltarmos, que nas últimas décadas, diversos trabalhos matemáticos sobre a investigação de sistemas elásticos porosos têm sido feitos considerando-se vários tipos de mecanismos dissipativos. Para obtermos uma análise do que está sendo desenvolvido nestes tipos de problemas feitos pelos pesquisadores, vamos considerar as equações de evolução para as teorias unidimensionais de materiais porosos com temperatura e microtemperatura. Estas equações, são dadas por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_x, \\ J\phi_{tt} = H_x + G, \\ \rho\eta_t = q_x, \\ \rho E_t = P_x + q - Q, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que T é a tensão, H é a tensão de equilíbrio do corpo, G é a força de equilíbrio, q é o fluxo de calor, η representa a entropia, P é o primeiro momento de fluxo de calor, Q é o baixo fluxo de calor e E é o primeiro momento de energia. Aqui as nossas variáveis u e ϕ denotam, respectivamente, o deslocamento do material elástico sólido e o volume de fração dos poros. As equações constitutivas são dadas por

$$\begin{cases} T = \mu u_x + b\phi - \beta\theta, \\ H = \delta\phi_x - dw + \gamma\phi_{xt}, \\ G = -bu_x - \xi\phi + m\theta - \tau\phi_t, \\ \rho\eta = \beta u_x + c\theta + m\phi, \\ q = \kappa\theta_x + \kappa_1 w, \\ P = -\kappa_2 w_x, \\ Q = \kappa_3 w + \kappa_4\theta_x, \\ \rho E = -\alpha w - d\phi_x. \end{cases} \quad (1.2)$$

Notamos que o valor de θ e w representam temperatura e microtemperatura, respectivamente, e os seus coeficientes constitutivos podemos encontrar em [23].

No caso unidimensional, os coeficientes constitutivos satisfazem as relações

$$\kappa_1 > 0, \kappa_3 > 0, \kappa_4 > 0, \xi > 0, \delta > 0, \mu > 0, \rho > 0, J > 0 \text{ e } \mu\xi \geq b^2. \quad (1.3)$$

Como o acoplamento é considerado, b , m e β devem ser diferentes de zero, mas o sinal não é matéria de análise. Por outro lado, quando efeitos térmicos são considerados, assumimos que a capacidade térmica c e a condutividade térmica κ são estritamente positivas. De maneira análoga, se microtemperaturas estão presentes, os parâmetros α , κ e κ_2 são positivos.

Muitos pesquisadores em matemática têm desenvolvido um interesse crescente para determinar o comportamento assintótico das soluções para os sistemas elásticos porosos. Por exemplo, quando em (1.1) e (1.2) não assumimos microtemperatura, obtemos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\phi_t - m\theta = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \beta u_{tx} + m\phi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \forall t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0), \theta(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x), \theta_0(x)) \text{ em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) \text{ em } (0, L). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Em [5], Casas e Quintanilha estudaram o sistema (1.4), considerando dois mecanismos dissipativos: O tipo viscosidade presente na estrutura porosa e a dissipação térmica. Sabe-se que quando apenas o damping térmico ou o damping poroso é considerado, as soluções apresentam um decaimento lento. Dessa forma, os autores assumem ambos os tipos de mecanismos de dissipação nas equações de evoluções (1.1) e (1.2), obtendo assim a estabilidade exponencial baseada no método desenvolvido por Liu e Zheng [14].

Agora, mencionamos um resultado devido a A. Magaña e R. Quintanilha [15], onde os autores estudaram o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x - \gamma u_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\phi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \forall t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x),) \text{ em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) \text{ em } (0, L), \end{array} \right. \quad (1.5)$$

com γ sendo uma constante positiva. Os autores consideraram o problema elástico poroso com a presença de dissipação elástica e porosa, mas sem a condução de calor. Neste caso, conseguiram obter decaimento exponencial das soluções do sistema acima usando um resultado

devido a Gearhart (Liu e Zheng [14]). Outro resultado importante obtido é quando consideram $\tau = 0$, provando assim que o sistema não é exponencialmente estável.

M. L. Santos e D. S. Almeida Júnior [27] estudaram a equação unidimensional homogênea e isotrópica de sólidos elástico poroso com damping localizado, dado pelo sistema

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \gamma(x)(u_t + \phi_t) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \gamma(x)(u_t + \phi_t) = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)) & \text{em } \Omega, \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde o damping envolve a soma da velocidade de deslocamento de um material elástico sólido e a velocidade de fração do volume. Neste trabalho, os autores consideram $\Omega = (0, L)$ e $\omega = (L_1, L_2)$, com $0 \leq L_1 < L_2 \leq L$ e $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa que satisfaz

$$\exists \gamma_0 > 0; \gamma(x) \geq \gamma_0, \forall x \in \omega.$$

As condições de fronteira são do tipo Dirichlet-Dirichlet

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

ou condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

A principal contribuição dos autores em relação ao sistema (1.6), foi ter encontrado uma condição necessária e suficiente para a estabilidade forte e combinando o método do domínio da frequência com técnicas multiplicativas, conseguiram mostrar o decaimento exponencial do sistema elástico poroso com dissipação localizada.

Soufyane et al. [34], trabalharam com um sistema termoelástico-poroso linear, num domínio limitado, onde o damping tipo memória está agindo em uma parte da fronteira. Os autores conseguiram mostrar um resultado geral de decaimento, em que as taxas de decaimento exponencial e polinomial usuais são apenas um caso especial. Em outros trabalhos, Soufyane [33, 35] mostrou que o sistema elástico poroso com duas dissipações, uma no deslocamento

de um material elástico sólido e a outra na fração de volume é exponencialmente estável, e independe de qualquer relação entre os coeficientes de velocidade de propagação da onda.

Ressaltamos aqui, o sistema elástico poroso

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\phi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)) \text{ em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) \text{ em } (0, L), \end{array} \right. \quad (1.7)$$

que foi estudado por R. Quintanilla em [21]. Neste trabalho, o autor prova a falta de decaimento exponencial, desde que seja satisfeita a relação $\mu\kappa \neq \alpha$.

Em relação ao propósito da primeira parte deste trabalho, analisamos o artigo de J. M. Rivera e R. Quintanilha [23], onde estudaram o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0 \text{ em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta = 0 \text{ em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \beta u_{tx} + m\phi_t = 0 \text{ em } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(\pi, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(\pi, t) = 0, \quad \forall t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0), \theta(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x), \theta_0(x)) \text{ em } (0, \pi), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) \text{ em } (0, \pi). \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Os autores conseguiram mostrar que o sistema (1.8) decai polinomialmente como $\frac{1}{t}$, sempre que

$$m(\beta b - m\mu) > 0.$$

Além disso, eles também provaram que a taxa pode ser melhorada de acordo com a regularidade dos dados iniciais. Para mostrar esse resultado, eles usaram o método da energia e algumas ideias técnicas para mostrar a estabilidade polinomial.

Resumindo, usando dois damping independentes, um em cada equação, temos a estabilidade exponencial do modelo. Uma questão em aberto é saber se um único damping agindo sobre o modelo (1.8) pode gerar a estabilidade exponencial, dependendo da relação existente entre os coeficientes μ, ρ, δ e J . Esta questão é um dos nossos interesses, que será abordado no desenvolvimento desta tese.

Por outro lado, para o desenvolvimento da segunda parte da tese, temos como referência o artigo dos autores M. L. Santos, A. D. S. Campelo e D. S. Almeida Júnior [30], onde estudaram o sistema

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x - \gamma u_{xxt} = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, & \forall t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x),) & \text{em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)) & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (1.9)$$

Os autores provaram que o sistema (1.9) apresenta perda de estabilidade exponencial, independentemente de qualquer relação entre os coeficientes μ, ρ, δ e J . Além disso, mostraram que este sistema possui decaimento polinomial e que sua taxa é ótima, ou seja, provaram que a presença de um damping viscoelástico não é suficientemente forte para obter o decaimento exponencial de soluções.

Neste sentido, desconsiderando a presença do mecanismo dissipativo na equação do deslocamento de um material elástico sólido, no modelo (1.9), uma questão em aberto é saber se ao adicionarmos dois dampings agindo na segunda equação, fração de volume, poderão estes gerar a estabilidade exponencial, dependendo ou não da existência de alguma relação entre os coeficientes μ, ρ, δ e J . Esta questão e outras serão abordadas no desenvolvimento deste trabalho.

1.2 Objetivo do Trabalho

O nosso objetivo está sendo motivado pelos trabalhos expostos anteriormente, e é concernente ao estudo do comportamento da energia para o modelo elástico poroso, onde iremos buscar encontrar alguma relação entre seus coeficientes, visando assim obter a estabilização do sistema. Nessa perspectiva, vamos mostrar um resultado que caracteriza a estabilidade exponencial para um modelo elástico poroso com lei de Fourier, desde que esteja condicionada a uma relação existente entre os coeficientes μ, ρ, δ e J .

Visamos também fazer um estudo do comportamento da energia para um modelo elástico com a presença de dissipação viscoelástica e porosa, onde queremos encontrar alguma relação, ou não, entre seus coeficientes, buscando assim obter a falta de estabilização do sistema. Nesse

intuito, pretendemos mostrar um resultado que caracteriza a estabilidade polinomial para um modelo elástico poroso, independentemente de qualquer relação existente entre os seus coeficientes μ , ρ , δ e J .

Paralelamente, visamos obter numericamente a positividade da energia e mostrarmos, com algumas condições impostas sobre o nosso modelo elástico poroso, simulações numéricas que versam sobre o caso conservativo da energia e quando esta tem um comportamento polinomial ou exponencial.

1.3 Organização do Trabalho

Visando uma melhor organização deste trabalho, em cada capítulo, optamos em inserir os teoremas de análise matemática necessários, objetivando assim, analisar a estabilização do modelo em estudo.

No capítulo 2, apresentamos um modelo elástico poroso com dissipação térmica, onde encontramos a energia do sistema e posteriormente estudamos a existência e unicidade de soluções, via técnicas de semigrupos de operadores lineares, além de usarmos o Teorema de Lummer-Phillips. Dando continuidade, mostraremos a falta de estabilidade exponencial, em que está condicionada a diferença entre os coeficientes $\mu/\rho \neq \delta/J$. Para essa finalidade, usaremos o método baseado no Teorema de Gearhart-Herbst-Pruss-Huang [9, 11, 20], para sistemas dissipativos.

Prosseguindo, mostraremos que o nosso sistema do tipo elástico-poroso com a presença de temperatura, apresenta decaimento exponencial desde que $\mu/\rho = \delta/J$. Para obter esse resultado, iremos usar quatro lemas auxiliares e finalizamos usando, novamente, o Teorema de Gearhart-Herbst-Pruss-Huang [9, 11, 20], para sistemas dissipativos. Prosseguindo, mostramos outro resultado importante, que versa sobre o decaimento polinomial, onde usaremos o Teorema de Borichev e Tomilov [2].

No capítulo 3, apresentamos um modelo elástico poroso que apresenta dois mecanismos dissipativos, onde encontramos a energia do sistema e posteriormente estudamos a sua existência e unicidade de soluções, via técnicas de semigrupos de operadores lineares. Dando continuidade, mostraremos a falta de estabilidade exponencial, em que não está condicionada a qualquer relação existente entre os coeficientes μ , ρ , δ e J . Para essa finalidade, usaremos o método

baseado no Teorema de Gearhart-Herbst-Pruss-Huang [9, 11, 20], para sistemas dissipativos. Prosseguindo, mostramos outro resultado importante, que versa sobre o decaimento polinomial, onde iremos usar quatro lemas auxiliares e finalizamos usando, novamente, o Teorema de Gearhart-Herbst-Pruss-Huang [9, 11, 20] com o Teorema de Borichev e Tomilov [2], além de mostrarmos que a sua taxa é ótima.

No capítulo 4, iremos tratar dos resultados numéricos inerentes ao nosso sistema do tipo elástico-poroso estudado no capítulo 3. Iniciamos discretizando nosso sistema, onde nos apropriamos do método de diferenças finitas. Dando continuidade, obteremos a energia discretizada e a sua positividade. Em seguida mostraremos algumas simulações numéricas, que apresentam o caso conservativo da energia e o seu decaimento polinomial ou exponencial, quando imposta certas condições.

Finalizando, no Capítulo 5 apresentamos nossas conclusões e alguns questionamentos para possíveis trabalhos a serem desenvolvidos.

CAPÍTULO 2

Um Modelo Elástico Poroso com Lei de Fourier

Neste capítulo vamos estudar a existência e unicidade de soluções para um modelo elástico poroso, a falta de estabilidade exponencial, além do seu decaimento exponencial e polinomial.

2.1 Fundamentação Teórica

Para iniciar, vamos considerar as equações de evoluções para o caso unidimensional sobre a teoria de materiais porosos com temperatura e microtemperatura dadas por (1.1) e as suas respectivas equações constitutivas expressas em (1.2). Além disso, os seus coeficientes constitutivos satisfazem a relação fornecida em (1.3).

Para o modelo que iremos trabalhar nesta primeira parte de nossa tese, assumimos $\tau = \gamma = 0$ e microtemperatura ($w = 0$), obtendo assim o problema determinado pelo sistema elástico poroso, apresentando um único mecanismo dissipativo que é a condução de calor dado pela lei

de Fourier. Dessa forma, das equações dadas em (1.1), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

$$J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi - m\theta = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.2)$$

$$c\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \beta u_{tx} + m\phi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.3)$$

apresentando as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \phi_x(0, t) = \phi_0(x), \\ \phi_t(x, 0) &= \phi_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \forall x \in (0, L), \end{aligned} \quad (2.4)$$

e com as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t), \quad \forall t > 0. \quad (2.5)$$

Para procedermos na resolução do nosso problema, vamos nos apropriar de alguns resultados preliminares, que enunciaremos nas próximas seções.

2.2 A Energia do Sistema

A energia de soluções do sistema (2.1)-(2.5) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi_t|^2 + \delta|\phi_x|^2 + \xi|\phi|^2 + 2bu_x\phi + c|\theta|^2] dx. \quad (2.6)$$

O funcional energia $E(t)$, definido acima, é não crescente para todo $t > 0$. De fato, conforme será mostrado na seguinte proposição:

Proposição 2.1. (Energia do modelo) *Seja $(u, u_t, \phi, \phi_t, \theta)$ a solução associada ao problema (2.1)-(2.5), então*

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \kappa|\theta_x|^2 dx, \quad (2.7)$$

isto é,

$$E(t) \leq E(0), \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

Prova. Para obtermos a energia do sistema (2.1)-(2.5), fazemos a multiplicação das equações (2.1), (2.2) e (2.3) por u_t , ϕ_t e θ todas respectivamente nessa ordem, que consiste nos seguintes passos feitos a seguir:

- Multiplicando a equação (2.1) por u_t e o resultado integramos em $(0, L)$, obtemos

$$\int_0^L \rho u_{tt} u_t dx - \int_0^L \mu u_{xx} u_t dx - \int_0^L b \phi_x u_t dx + \int_0^L \beta \theta_x u_t dx = 0.$$

Agora, efetuando integração por partes e usando as suas devidas condições de fronteira, temos que

$$\int_0^L \rho u_{tt} u_t dx + \int_0^L \mu u_x u_{tx} dx + \int_0^L b \phi u_{tx} dx + \int_0^L \beta \theta_x u_t dx = 0. \quad (2.9)$$

- Multiplicando a equação (2.2) por ϕ_t e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\int_0^L J \phi_{tt} \phi_t dx - \int_0^L \delta \phi_{xx} \phi_t dx + \int_0^L b u_x \phi_t dx + \int_0^L \xi \phi \phi_t dx - \int_0^L m \theta \phi_t dx = 0.$$

Usando integral por partes e condições de fronteira, encontramos

$$\int_0^L J \phi_{tt} \phi_t dx + \int_0^L \delta \phi_x \phi_{tx} dx + \int_0^L b u_x \phi_t dx + \int_0^L \xi \phi \phi_t dx - \int_0^L m \theta \phi_t dx = 0. \quad (2.10)$$

- Multiplicamos a equação (2.3) por θ e integramos em $(0, L)$, a fim de obter

$$\int_0^L c \theta_t \theta dx - \int_0^L \kappa \theta_{xx} \theta dx - \int_0^L \beta u_t \theta_x dx + \int_0^L m \phi_t \theta dx = 0.$$

Usando integral por partes e condições de fronteira, verificamos que

$$\int_0^L c\theta_t\theta dx + \int_0^L \kappa|\theta_x|^2 dx + \int_0^L \beta u_{tx}\theta dx + \int_0^L m\phi_t\theta dx = 0. \quad (2.11)$$

Somando as equações (2.9)-(2.11), temos como resultado

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho u_{tt}u_t dx + \int_0^L \mu u_x u_{tx} dx + \int_0^L b\phi u_{tx} dx + \int_0^L \beta \theta_x u_t dx + \int_0^L J\phi_{tt}\phi_t dx \\ & + \int_0^L \delta\phi_x\phi_{tx} dx + \int_0^L bu_x\phi_t dx + \int_0^L \xi\phi\phi_t dx - \int_0^L m\theta\phi_t dx \\ & + \int_0^L c\theta_t\theta dx + \int_0^L \kappa|\theta_x|^2 dx - \int_0^L \beta u_t\theta_x dx + \int_0^L m\phi_t\theta dx = 0. \end{aligned}$$

Simplificando e organizando os termos da equação acima, verificamos que

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho u_{tt}u_t dx + \int_0^L \mu u_x u_{tx} dx + \int_0^L J\phi_{tt}\phi_t dx + \int_0^L \delta\phi_x\phi_{tx} dx + \int_0^L \xi\phi\phi_t dx \\ & + \int_0^L b\phi u_{tx} dx + \int_0^L bu_x\phi_t dx + \int_0^L c\theta_t\theta dx + \int_0^L \kappa|\theta_x|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sabendo que

$$\int_0^L b\phi u_{tx} dx = \int_0^L bu_x\phi_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L bu_x\phi dx; \quad (2.13)$$

$$\int_0^L \rho u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho|u_t|^2 dx; \quad (2.14)$$

$$\int_0^L \mu u_x u_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \mu|u_x|^2 dx; \quad (2.15)$$

$$\int_0^L J\phi_{tt}\phi_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L J|\phi_t|^2 dx; \quad (2.16)$$

$$\int_0^L \delta\phi_x \phi_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \delta|\phi_x|^2 dx; \quad (2.17)$$

$$\int_0^L \xi\phi\phi_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \xi|\phi|^2 dx; \quad (2.18)$$

$$\int_0^L c\theta_t\theta dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L c|\theta|^2 dx. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.13)-(2.13) em (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi_t|^2 + \delta|\phi_x|^2 + \xi|\phi|^2 \\ + bu_x\phi + bu_x\phi + c|\theta|^2] dx = - \int_0^L \kappa|\theta_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dessa maneira, definimos a energia do nosso sistema por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi_t|^2 + \delta|\phi_x|^2 + \xi|\phi|^2 + 2bu_x\phi + c|\theta|^2] dx. \quad (2.21)$$

Logo, substituindo (2.21) em (2.20), concluimos que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \kappa|\theta_x|^2 dx \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (2.22)$$

Integrando a equação (2.22) de 0 até T , temos que

$$E(t) = - \int_0^T \left\{ \int_0^L \kappa|\theta_x|^2 dx \right\} dt + E(0). \quad (2.23)$$

Sendo assim, podemos afirmar que o nosso sistema (2.1)-(2.5) é dissipativo. É claro que ao assumirmos $\kappa = 0$, o nosso modelo passa a obedecer a lei de conservação de energia, ou seja

$$E(t) = E(0), \quad \forall t > 0. \quad (2.24)$$



2.3 O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares.

Nesta seção, iremos estudar a existência e unicidade de soluções para o sistema elástico poroso com lei de Fourier, via Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares (ver A. Pazy [19]). Para iniciar, vamos reescrever o nosso problema (2.1)-(2.5), em um sistema de EDO de primeira ordem para $U = (u, u_t, \phi, \phi_t, \theta)'$. Dessa forma, o vetor U satisfaz a equação

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.25)$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1, \theta_0)'$ é o vetor dos dados iniciais e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o nosso operador diferencial que será representado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2(\cdot) & 0 & \frac{b}{\rho} \partial_x(\cdot) & 0 & -\frac{\beta}{\rho} \partial_x(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\frac{b}{J} \partial_x(\cdot) & 0 & \frac{\delta}{J} \partial_x^2(\cdot) - \frac{\xi}{J} I & 0 & \frac{m}{J} I \\ 0 & -\frac{\beta}{c} \partial_x(\cdot) & 0 & -\frac{m}{c} I & \frac{\kappa}{c} \partial_x^2(\cdot) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Usamos acima, $\partial_x(\cdot)$ e $\partial_x^2(\cdot)$ para indicar os operadores derivadas de primeira e segunda ordens, respectivamente, na variável x , e representamos por I o nosso operador identidade.

Agora, a partir da energia fornecida em (2.21), podemos definir o seguinte espaço de Hilbert \mathcal{H} , expresso por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L_*^2(0, L), \quad (2.27)$$

onde,

$$H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L), \text{ onde } L_*^2(0, L) = \left\{ f \in L^2(0, L) : \int_0^L f(x) dx = 0 \right\}. \quad (2.28)$$

Sendo assim, consideremos o seguinte produto interno em \mathcal{H} , definido por

$$(U, V)_{\mathcal{H}} := \int_0^L \left[\rho \varphi \bar{\Phi} + \mu u_x \bar{v}_x + J \psi \bar{\Psi} + \delta \phi_x \bar{\zeta}_x + \xi \phi \bar{\zeta} + b(u_x \bar{\zeta} + \bar{v}_x \phi) + c \theta \bar{\Theta} \right] dx, \quad (2.29)$$

onde temos $U = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)'$, $V = (v, \Phi, \zeta, \Psi, \Theta)'$ com $U, V \in \mathcal{H}$.

Dessa forma, sua norma é expressa por:

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L \left[\rho |\varphi|^2 + \mu |u_x|^2 + J |\psi|^2 + \delta |\phi_x|^2 + \xi |\phi|^2 + b u_x \bar{\phi} + b \bar{u}_x \phi + c |\theta|^2 \right] dx. \quad (2.30)$$

Usamos em (2.29), (2.30) e posteriormente, a barra para denotar o conjugado de um número complexo. Pela nossa hipótese, temos que $\mu \xi \geq b^2$. Dessa forma, tomamos $\xi_1 \in (0, \xi]$, tal que $\mu \xi_1 - b^2 = 0$. Então obtemos

$$\begin{aligned} (U, U)_{\mathcal{H}} &\geq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + J \int_0^L |\psi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx \\ &+ \int_0^L \left| \mu^{\frac{1}{2}} u_x - \xi_1^{\frac{1}{2}} \phi \right|^2 dx + (\xi - \xi_1) \int_0^L |\phi|^2 dx + c \int_0^L |\theta|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Isto nos permite ver claramente acima que $(U, V)_{\mathcal{H}}$ define um produto interno em \mathcal{H} , e a norma associada $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a norma usual.

Dessa forma, agora podemos definir o domínio do nosso operador \mathcal{A} , que é dado por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &:= \{U = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)' \in \mathcal{H} \mid u, \phi \in H^2(0, L), \varphi \in H_0^1(0, L), \\ &\psi, \theta \in H_*^1(0, L) \text{ e } \phi_x, \theta_x \in H_0^1(0, L)\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} . Dessa maneira, a partir das informações feitas sobre o nosso operador \mathcal{A} e com os espaços escolhidos adequadamente, podemos enunciar o resultado fundamental desta seção, que versa sobre a existência e unicidade de soluções, associado ao nosso sistema (2.1)-(2.5).

Teorema 2.2. *O operador \mathcal{A} em (2.26) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contrações em \mathcal{H} . Assim, para algum $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (2.1)-(2.5) tem uma única solução fraca $U \in C^0([0, \infty), \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então U é uma solução forte de (2.1)-(2.5), isto é, $U \in C^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$.*

Prova. Seja $U = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, usando a definição de produto interno dada em (2.29), temos que

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = - \int_0^L \kappa |\theta_x|^2 dx \leq 0, \quad (2.33)$$

portanto, segue que o operador \mathcal{A} é dissipativo. Sabemos que o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} , ou seja, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Então, visando atingir nosso objetivo, usaremos o Teorema de Lumer-Phillips (ver A. Pazy [19]), para provar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Nosso próximo passo é mostrar que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Para isto, consideramos a equação resolvente

$$U - \mathcal{A}U = F. \quad (2.34)$$

Com este propósito, vamos tomar $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5)' \in \mathcal{H}$ e $U = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)'$. Então, em termos de suas componentes, a equação (2.34) fica escrita da forma

$$u - \varphi = f^1, \quad (2.35)$$

$$\rho\varphi - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = \rho f^2, \quad (2.36)$$

$$\phi - \psi = f^3, \quad (2.37)$$

$$J\psi + bu_x - \delta\phi_{xx} + \xi\phi - m\theta = Jf^4, \quad (2.38)$$

$$c\theta + \beta\varphi_x - \kappa\theta_{xx} + m\psi = cf^5. \quad (2.39)$$

Usando as equações (2.35) e (2.37) em (2.36), (2.38) e (2.39), obtemos o seguinte sistema

$$\rho u - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = \rho(f^1 + f^2), \quad (2.40)$$

$$J\phi + bu_x - \delta\phi_{xx} + \xi\phi - m\theta = J(f^3 + f^4), \quad (2.41)$$

$$c\theta + \beta u_x - \kappa\theta_{xx} + m\phi = \beta f_x^1 + m f^3 + c f^5. \quad (2.42)$$

Agora, multiplicando as equações (2.40) por \bar{u} , (2.41) por $\bar{\phi}$, (2.42) por $\bar{\theta}$, todas respectivamente nessa ordem, e usando integração por partes com as suas devidas condições de limites (2.5), encontramos

$$\rho \int_0^L u\bar{u}dx + \mu \int_0^L u_x\bar{u}_xdx + b \int_0^L \phi\bar{u}_xdx + \beta \int_0^L \theta_x\bar{u}dx = \rho \int_0^L (f^1 + f^2)\bar{u}dx, \quad (2.43)$$

$$J \int_0^L \phi\bar{\phi}dx + b \int_0^L u_x\bar{\phi}dx + \delta \int_0^L \phi_x\bar{\phi}_xdx + \xi \int_0^L \phi\bar{\phi}dx - m \int_0^L \theta\bar{\phi}dx = J \int_0^L (f^3 + f^4)\bar{\phi}dx \quad (2.44)$$

$$c \int_0^L \theta\bar{\theta}dx + \beta \int_0^L u_x\bar{\theta}dx + \kappa \int_0^L \theta_x\bar{\theta}_xdx + m \int_0^L \phi\bar{\theta}dx = \beta \int_0^L f_x^1\bar{\theta}dx + m \int_0^L f^3\bar{\theta}dx + c \int_0^L f^5\bar{\theta}dx. \quad (2.45)$$

Dessa forma, somando as equações de (2.43)-(2.45), segue que

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L u\bar{u}dx + \mu \int_0^L u_x\bar{u}_xdx + J \int_0^L \phi\bar{\phi}dx + \delta \int_0^L \phi_x\bar{\phi}_xdx + \xi \int_0^L \phi\bar{\phi}dx + b \int_0^L u_x\bar{\phi}dx \\ & + b \int_0^L \phi\bar{u}_xdx + c \int_0^L \theta\bar{\theta}dx + \kappa \int_0^L \theta_x\bar{\theta}_xdx + m \int_0^L (\phi\bar{\theta} - \theta\bar{\phi}) dx + \beta \int_0^L (\theta_x\bar{u} + u_x\bar{\theta}) dx \\ & = \rho \int_0^L (f^1 + f^2)\bar{u}dx + J \int_0^L (f^3 + f^4)\bar{\phi}dx + \beta \int_0^L f_x^1\bar{\theta}dx + m \int_0^L f^3\bar{\theta}dx + c \int_0^L f^5\bar{\theta}dx. \quad (2.46) \end{aligned}$$

Portanto, para solucionar o problema (2.40)-(2.42), consideremos a seguinte forma bilinear:

$$\begin{aligned} a : \Gamma \times \Gamma & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (V_1, V_2) & \longmapsto a(V_1, V_2) \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 a(V_1, V_2) &:= \rho \int_0^L u^1 \bar{u}^2 dx + \mu \int_0^L u_x^1 \bar{u}_x^2 dx + J \int_0^L \phi^1 \bar{\phi}^2 dx + \delta \int_0^L \phi_x^1 \bar{\phi}_x^2 dx \\
 &+ \xi \int_0^L \phi^1 \bar{\phi}^2 dx + b \int_0^L \phi^1 \bar{u}_x^2 dx + b \int_0^L u_x^1 \bar{\phi}^2 dx + c \int_0^L \theta^1 \bar{\theta}^2 dx \\
 &+ \kappa \int_0^L \theta_x^1 \bar{\theta}_x^2 dx + m \int_0^L (\phi \bar{\theta} - \theta \bar{\phi}) dx + \beta \int_0^L (\theta_x \bar{u} + u_x \bar{\theta}) dx, \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

com $V_1 = (u^1, \phi^1, \theta^1)$ e $V_2 = (u^2, \phi^2, \theta^2)$. Dessa maneira, a forma bilinear (2.47) é contínua e coerciva sobre o espaço de Hilbert Γ . Além disso, definimos uma aplicação T linear e contínua, dada por

$$\begin{aligned}
 T : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 V_2 &\longmapsto T(V_2)
 \end{aligned}$$

onde,

$$T := \int_0^L \left[\rho(f^1 + f^2) \bar{u}^2 + J(f^3 + f^4) \bar{\phi}^2 + \beta f_x^1 \bar{\theta}^2 + c f^5 \bar{\theta}^2 + m f^3 \bar{\theta}^2 \right] dx. \quad (2.48)$$

Logo, usando o Teorema de Lax-Milgran (ver H. Brézis [3]), segue que existe uma única solução $V_1 \in \Gamma$, que satisfaz o problema variacional

$$a(V_1, V_2) = T(V_2), \quad \forall V_2 \in \Gamma. \quad (2.49)$$

Sendo assim, existe uma única $V_1 = (u^1, \phi^1, \theta^1) \in \Gamma$ que satisfaz o sistema (2.40)-(2.42). Sendo assim, segue que

$$u \in H_0^1(0, L) \text{ e } \phi, \theta \in H_*^1(0, L). \quad (2.50)$$

De (2.50) em (2.35) e (2.37), temos que

$$\varphi \in H_0^1(0, L) \text{ e } \psi \in H_*^1(0, L).$$

Além disso, de (2.36) e (2.38) segue que $u, \phi \in H_0^2(0, L)$. Portanto, $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e sendo assim $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Para finalizar, aplicamos o Teorema de Lumer-Phillips, para concluir que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{-\mathcal{A}t}$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} . ■

2.4 A Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção, vamos mostrar que o sistema elástico poroso (2.1)-(2.5) apresenta perda de estabilidade exponencial quando consideramos

$$\chi = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J} \neq 0. \quad (2.51)$$

Para essa finalidade, usaremos o método baseado no Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang [8,10,18] para sistemas dissipativos.

Teorema 2.3. *Seja $S(t) = e^{-\mathcal{A}t}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições*

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad (2.52)$$

e

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad (2.53)$$

se verificam, onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente do operador diferencial \mathcal{A} .

O principal resultado desta seção é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Considere $\chi = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J} \neq 0$, então o semigrupo associado ao sistema (2.1)-(2.5) não é exponencialmente estável.*

Prova. Iremos mostrar que existe uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $U_n = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, com \mathcal{A} definido em (2.26), satisfazendo a equação resolvente

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n = F_n, \quad (2.54)$$

para funções $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5)' \in \mathcal{H}$, com $\|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, tal que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} = \|(\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

Ao analisarmos a equação (2.54), podemos dizer que a solução correspondente U_n não é limitada, quando F_n é limitada em \mathcal{H} .

Para simplificar a notação, omitiremos o índice n . Então a nossa equação espectral (2.54) pode ser reescrita em termos de suas componentes, sendo expressa pela forma

$$i\lambda u - \varphi = f^1, \quad (2.56)$$

$$i\lambda\varphi - \frac{\mu}{\rho}u_{xx} - \frac{b}{\rho}\phi_x + \frac{\beta}{\rho}\theta_x = f^2, \quad (2.57)$$

$$i\lambda\phi - \psi = f^3, \quad (2.58)$$

$$i\lambda\psi + \frac{b}{J}u_x - \frac{\delta}{J}\phi_{xx} + \frac{\xi}{J}\phi - \frac{m}{J}\theta = f^4, \quad (2.59)$$

$$i\lambda\theta + \frac{\beta}{c}\varphi_x - \frac{\kappa}{c}\theta_{xx} + \frac{m}{c}\psi = f^5. \quad (2.60)$$

Para o nosso sistema (2.56)-(2.60), tomamos os valores de $f^1 = f^2 = f^3 = f^5 = 0$ e $f^4 = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. De (2.56) e (2.58), é imediato que

$$\varphi = i\lambda u \text{ e } \psi = i\lambda\phi. \quad (2.61)$$

Substituindo (2.61) em (2.57), (2.59) e (2.60), encontramos

$$-\lambda^2 u - \frac{\mu}{\rho}u_{xx} - \frac{b}{\rho}\phi_x + \frac{\beta}{\rho}\theta_x = 0, \quad (2.62)$$

$$-\lambda^2\phi - \frac{\delta}{J}\phi_{xx} + \frac{b}{J}u_x + \frac{\xi}{J}\phi - \frac{m}{J}\theta = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (2.63)$$

$$i\lambda\theta - \frac{\kappa}{c}\theta_{xx} + \frac{\beta}{c}i\lambda u_x + i\lambda\frac{m}{c}\phi = 0. \quad (2.64)$$

Levando em conta as condições de contorno dadas em (2.5), nós tomamos soluções da forma

$$u = A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad \phi = B \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad \text{e} \quad \theta = D \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right). \quad (2.65)$$

Posto isso, façamos a substituição de (2.65) em (2.62)-(2.64). As soluções em A , B , e D dependem de λ e serão determinadas no sistema abaixo, que é equivalente ao sistema (2.62)-(2.64), obtendo assim

$$-\lambda^2 A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) - \frac{\mu}{\rho} \left[- \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] - \frac{b}{\rho} \left[- \frac{n\pi}{L} B \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] + \frac{\beta}{\rho} \left[- \frac{n\pi}{L} D \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] = 0, \quad (2.66)$$

$$-\lambda^2 \left[B \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] + \frac{b}{J} \frac{n\pi}{L} A \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) - \frac{\delta}{J} \left[- \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 B \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right] + \frac{\xi}{J} B \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) - \frac{m}{J} D \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right), \quad (2.67)$$

$$i\lambda D \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + \frac{\kappa}{c} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 D \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + i\lambda \frac{\beta}{c} \frac{n\pi}{L} A \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) + i\lambda \frac{m}{c} B \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = 0. \quad (2.68)$$

Reescrevendo o sistema acima, resulta que

$$p_1(\lambda)A + \frac{b}{\rho} \frac{n\pi}{L} B - \frac{\beta}{\rho} \frac{n\pi}{L} D = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{b}{J} \frac{n\pi}{L} A + p_2(\lambda)B - \frac{m}{J} D = 1, \quad (2.70)$$

$$i\lambda \frac{\beta}{c} \frac{n\pi}{L} A + i\lambda \frac{m}{c} B + p_3(\lambda)D = 0, \quad (2.71)$$

onde,

$$p_1(\lambda) = -\lambda^2 + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad p_2(\lambda) = -\lambda^2 + \frac{\delta}{J} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\xi}{J}, \quad p_3(\lambda) = i\lambda + \frac{\kappa}{c} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2.$$

Resolvendo o sistema (2.69)-(2.71), encontramos os seguintes resultados

$$A := A_n = - \frac{\frac{b}{\rho} \frac{n\pi}{L} p_3 + i\lambda \frac{n\pi}{L} \frac{m\beta}{\rho c}}{p_1 p_2 p_3 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 p_3 + i\lambda \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{\beta^2}{\rho c} p_2 - 2 \frac{b m \beta}{J c} \right) + i\lambda \frac{m^2}{J c} p_1} \quad (2.72)$$

$$B := B_n = \frac{p_1 p_3 + i\lambda \frac{\beta^2}{\rho c} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{p_1 p_2 p_3 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 p_3 + i\lambda \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\beta^2}{\rho c} p_2 - 2\frac{bm\beta}{Jc\rho}\right) + i\lambda \frac{m^2}{Jc} p_1}, \quad (2.73)$$

$$D := D_n = \frac{i\lambda \frac{b\beta}{\rho c} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - i\lambda \frac{m}{c} p_1}{p_1 p_2 p_3 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 p_3 + i\lambda \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\beta^2}{\rho c} p_2 - 2\frac{bm\beta}{Jc\rho}\right) + i\lambda \frac{m^2}{Jc} p_1}. \quad (2.74)$$

Onde verificamos que as soluções A , B e D dependem de λ . Dessa forma, escolhendo λ da forma

$$\lambda = \sqrt{\frac{\delta}{J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\xi}{J} - \frac{b^2}{\chi\rho J}}, \quad (2.75)$$

tal que,

$$p_2(\lambda) = \left(-\lambda^2 + \frac{\delta}{J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\xi}{J}\right) = c_0, \quad (2.76)$$

onde c_0 será escolhido posteriormente. Agora, note que

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 p_3 &= p_3 \left[p_1 c_0 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \\ &= p_3 \left[\left(-\lambda^2 + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) c_0 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

De (2.76), encontramos

$$-\lambda^2 = -\frac{\delta}{J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\xi}{J} + c_0. \quad (2.78)$$

Dessa maneira, substituímos (2.78) em (2.77), a fim de obter

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 p_3 &= p_3 \left[\left(-\frac{\delta}{J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\xi}{J} + c_0 + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) c_0 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \\ &= p_3 \left[\left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c_0 - \frac{\xi}{J} c_0 + c_0^2 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \\ &= p_3 \left[\chi c_0 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\xi}{J} c_0 + c_0^2 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Então, escolhamos c_0 tal que

$$c_0 = \frac{b^2}{\chi\rho J}. \quad (2.80)$$

Dessa forma, substituindo (2.80) em (2.79), encontramos

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 p_3 &= p_3 \left[\chi \frac{b^2}{\chi\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\xi}{J} \frac{b^2}{\chi\rho J} + \left(\frac{b^2}{\chi\rho J}\right)^2 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \\ &= p_3 \left[-\frac{\xi}{J} \frac{b^2}{\chi\rho J} + \left(\frac{b^2}{\chi\rho J}\right)^2 \right] \approx \mathcal{O}(n^2), \end{aligned} \quad (2.81)$$

visto que $\chi \neq 0$. Como consequência, usamos (2.81) para obter

$$p_1 p_2 p_3 - \frac{b^2}{\rho J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 p_3 + i\lambda \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\beta^2}{\rho c} p_2 - 2\frac{bm\beta}{Jc\rho}\right) + i\lambda \frac{m^2}{Jc} p_1 \approx \mathcal{O}(n^3). \quad (2.82)$$

De (2.73), segue que

$$\begin{aligned} p_1 p_3 + i\lambda \frac{\beta^2}{\rho c} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 &= \left(-\lambda^2 + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \left(i\lambda + \frac{\kappa}{c} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) \\ &+ i\lambda \frac{\beta^2}{\rho c} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \approx \mathcal{O}(n^4). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Portanto, usando (2.82) e (2.83) em (2.73), obtemos

$$B := B_n \approx \mathcal{O}(n), \quad (2.84)$$

para n grande.

De (2.31), (2.61), (2.65), (2.75) e (2.84), concluímos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq J \int_0^L |\psi|^2 dx = J \int_0^L |i\lambda\phi|^2 dx = J \int_0^L \left| i\lambda B \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|^2 dx \\ &= J|\lambda|^2 |B|^2 \int_0^L \left| \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right|^2 dx = J \left(\frac{\delta}{J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\xi}{J} - \frac{b^2}{\chi\rho J} \right) \end{aligned}$$

$$|B|^2 \int_0^L \left| \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right|^2 dx \approx \mathcal{O}(n^4). \quad (2.85)$$

Então, como $n \rightarrow \infty$, de (2.85) obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq J \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi\|_{L^2}^2 = \infty. \quad (2.86)$$

Dessa forma aplicando o Teorema 2.3, podemos concluir que o semigrupo $S(t)$ associado ao sistema (2.1)-(2.5) não é exponencialmente estável, ou seja, apresenta falta de estabilidade exponencial. ■

2.5 Decaimento Exponencial

Esta seção é dedicada para provar que o semigrupo $S(t) = e^{At}$ associado ao sistema (2.1)-(2.5) é exponencialmente estável se, e somente se, ocorre a seguinte igualdade, $\mu/\rho = \delta/J$, entre os seus coeficientes. Para este fato, iremos usar o Teorema 2.3, onde mostraremos que o resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Para iniciar nós denotamos por \mathcal{H} o nosso espaço de Hilbert com produto interno dado em (2.29).

Como já foi mostrado, o nosso sistema (2.1)-(2.5) é dissipativo e se possuir a propriedade de decaimento exponencial, isso nos permitirá dizer que a nossa energia das soluções, fornecida em (2.21), pode ser controlada por uma exponencial negativa, ou seja, seu decaimento exponencial tende a zero com a dependência do tempo t , deve acontecer de forma mais rápida.

Para iniciar, consideramos $U = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5)' \in \mathcal{H}$ e $\lambda \neq 0$. Então, a equação resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$ em termos de suas componentes fica escrita da seguinte forma

$$i\lambda u - \varphi = f^1, \quad (2.87)$$

$$i\lambda \rho \varphi - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta \theta_x = \rho f^2, \quad (2.88)$$

$$i\lambda \phi - \psi = f^3, \quad (2.89)$$

$$i\lambda J\psi + bu_x - \delta \phi_{xx} + \xi \phi - m\theta = Jf^4, \quad (2.90)$$

$$i\lambda c\theta + \beta \varphi_x - \kappa \theta_{xx} + m\psi = cf^5. \quad (2.91)$$

Agora fazendo o produto interno em \mathcal{H} , de $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com a equação resolvente de \mathcal{A} , segue que

$$i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}. \quad (2.92)$$

Tomando a parte real da equação (2.92) e usando a desigualdade (2.33), temos que

$$\int_0^L |\theta_x|^2 dx \leq M\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.93)$$

onde M é uma constante positiva. Logo, usando a desigualdade de Poincaré em (2.93), obtemos

$$\int_0^L |\theta|^2 dx \leq M\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.94)$$

Para dar continuidade na prova da estabilidade exponencial do nosso sistema (2.1)-(2.5), iremos enunciar e demonstrar cinco lemas auxiliares que darão o suporte necessário, neste trabalho.

Lema 2.5. *Sob as considerações acima, temos que*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

A prova deste lema pode ser feita usando as mesmas ideias trabalhadas em [5, 31], por esta razão omitimos aqui.

Lema 2.6. *Seja $U = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)'$ a solução do problema (2.1)-(2.5), tal que*

$$\begin{aligned} \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{|m|}{|\lambda|} \|\psi\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

onde $|\lambda|$ deve ser suficientemente grande e sendo C uma constante positiva que não depende de λ .

Prova. Para iniciar, multiplicamos a equação (2.91) por $\overline{u_x}$ e integramos em $(0, L)$, obtendo assim

$$i\lambda c \int_0^L \theta \overline{u_x} dx + \beta \underbrace{\int_0^L \varphi_x \overline{u_x} dx}_{:=I_1} - \kappa \int_0^L \theta_{xx} \overline{u_x} dx + m \int_0^L \psi \overline{u_x} dx = c \int_0^L f^5 \overline{u_x} dx. \quad (2.95)$$

Substituindo a equação (2.87) em I_1 , obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda\beta \int_0^L |u_x|^2 dx &= -i\lambda c \int_0^L \theta \overline{u_x} dx + \kappa \int_0^L \theta_{xx} \overline{u_x} dx \\ &- m \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \beta \int_0^L f_x^1 \overline{u_x} dx + c \int_0^L f^5 \overline{u_x} dx. \end{aligned}$$

Usando integral por partes e suas condições de fronteira (2.5), encontramos

$$\begin{aligned} i\lambda\beta \int_0^L |u_x|^2 dx &= -i\lambda c \int_0^L \theta \overline{u_x} dx + \kappa (\theta_x \overline{u_x}) \Big|_0^L - \kappa \int_0^L \theta_x \overline{u_{xx}} dx \\ &- m \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \beta \int_0^L f_x^1 \overline{u_x} dx + c \int_0^L f^5 \overline{u_x} dx, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} i\lambda\beta \int_0^L |u_x|^2 dx &= -i\lambda c \int_0^L \theta \overline{u_x} dx - \kappa \int_0^L \theta_x \overline{u_{xx}} dx \\ &- m \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \beta \int_0^L f_x^1 \overline{u_x} dx + c \int_0^L f^5 \overline{u_x} dx. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Agora, substituindo $\overline{u_{xx}}$ dado por (2.88) na equação (2.96), temos que

$$\begin{aligned}
i\lambda\beta \int_0^L |u_x|^2 dx &= -i\lambda c \int_0^L \theta \overline{u_x} dx - \kappa \int_0^L \left(-i\lambda \frac{\rho}{\mu} \overline{\varphi} - \frac{b}{\mu} \overline{\phi_x} + \frac{\beta}{\mu} \overline{\theta_x} - \frac{\rho}{\mu} \overline{f^2} \right) \theta_x dx \\
&\quad - m \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \beta \int_0^L f_x^1 \overline{u_x} dx + c \int_0^L f^5 \overline{u_x} dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
i\lambda\beta \int_0^L |u_x|^2 dx &= -i\lambda c \int_0^L \theta \overline{u_x} dx + i\lambda \frac{\kappa\rho}{\mu} \int_0^L \theta_x \overline{\varphi} dx + \frac{\kappa b}{\mu} \int_0^L \theta_x \overline{\phi_x} dx - \frac{\kappa\beta}{\mu} \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\
&\quad + \frac{\kappa\rho}{\mu} \int_0^L \theta_x \overline{f^2} dx - m \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \beta \int_0^L f_x^1 \overline{u_x} dx + c \int_0^L f^5 \overline{u_x} dx.
\end{aligned}$$

Da equação acima, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_0^L |u_x|^2 dx &\leq \underbrace{C \int_0^L |\theta| |u_x| dx + C \int_0^L |\theta_x| |\varphi| dx}_{:=I_2} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x| |\phi_x| dx}_{:=I_3} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x|^2 dx}_{:=I_4} \\
&\quad + \underbrace{\frac{|m|}{|\lambda|} \int_0^L |\psi| |u_x| dx}_{:=I_5} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x| |f^2| dx}_{:=I_6} + \underbrace{\frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |f_x^1| |u_x| dx + \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |f^5| |u_x| dx}_{:=I_7}, \quad (2.97)
\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que não depende de λ .

Agora, vamos desenvolver o termo I_2 , onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtendo assim

$$\begin{aligned}
I_2 &= C \int_0^L |\theta| |u_x| dx + C \int_0^L |\theta_x| |\varphi| dx \\
&\leq C \left(\int_0^L |\theta|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\varphi|^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando (2.93) e (2.94) na desigualdade acima, temos como resultado

$$I_2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.98)$$

Desenvolvendo a soma dos termos I_3 e I_4 , onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, de onde segue que

$$\begin{aligned} I_3 + I_4 &= \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x| |\phi_x| dx + \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando (2.93) na desigualdade anterior, encontramos

$$\begin{aligned} I_3 + I_4 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Desenvolvendo o termo I_5 , temos que

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{|m|}{|\lambda|} \int_0^L |\psi| |u_x| dx \leq \frac{|m|}{|\lambda|} \left(\int_0^L |\psi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{|m|}{|\lambda|} \|\psi\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Agora, usando a desigualdade de Young e (2.93) no termo I_6 , obtemos

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x| |f^2| dx \leq C \left(\frac{1}{|\lambda|} \int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |f^2|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|^2} \int_0^L |\theta_x|^2 dx + C \int_0^L |f^2|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Para finalizar, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz no termo I_7 , encontrando assim

$$I_7 = \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |f_x^1| |u_x| dx + \frac{C}{|\lambda|} \int_0^L |f^5| |u_x| dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.102)$$

Logo, fazendo a substituição de (2.98)-(2.102) em (2.97), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{|m|}{|\lambda|} \|\psi\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{|m|}{|\lambda|} \|\psi\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos a prova do nosso Lema. ■

Lema 2.7. A solução $(u, \varphi, \phi, \psi, \theta)'$ do problema (2.1)-(2.5), satisfaz

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \|\phi_x\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande e sendo C uma constante positiva que não depende de λ .

Prova. Multiplicando a equação (2.88) por \bar{u} e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$i\lambda\rho \int_0^L \varphi \bar{u} dx - \mu \int_0^L u_{xx} \bar{u} dx - b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx = \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx.$$

Usando integração por partes e suas condições de fronteira (2.5) na equação anterior, resulta que

$$\underbrace{i\lambda\rho \int_0^L \varphi \bar{u} dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx - b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx}_{:=I_8} = \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx.$$

Dessa maneira, substituindo (2.87) em I_8 , encontramos

$$\rho \int_0^L \varphi (-\bar{\varphi} - \bar{f}^1) dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx - b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx = \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx,$$

logo,

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &= -b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx + \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &\quad - \rho \int_0^L \varphi \bar{f}^1 dx - \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré, temos que

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C \underbrace{\left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2}}_{:=I_9} + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Usando (2.93) em I_9 , temos como resultado

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \|\phi_x\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \|\phi_x\|_{L^2(0,L)} \|u_x\|_{L^2(0,L)} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos a conclusão do nosso Lema. ■

Lema 2.8. A solução $(u, \varphi, \phi, \psi, \theta)'$ do problema (2.1)-(2.5), satisfaz

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq |\lambda| \frac{J\rho}{\delta|b|} |\chi| \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &\quad + C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande e sendo C uma constante positiva que não depende de λ , onde $\chi = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J}$.

Prova. Multiplicando a equação (2.88) por $\overline{\phi_x}$ e o resultado integramos em $(0, L)$, obtendo assim

$$i\lambda\rho \int_0^L \varphi \overline{\phi_x} dx - \mu \int_0^L u_{xx} \overline{\phi_x} dx - b \int_0^L \phi_x \overline{\phi_x} dx + \beta \int_0^L \theta_x \overline{\phi_x} dx = \rho \int_0^L f^2 \overline{\phi_x} dx.$$

Dividindo a equação anterior por ρ e usando integral por partes, com as suas devidas condições de fronteira (2.5), encontramos

$$i\lambda \int_0^L \varphi \overline{\phi_x} dx + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \int_0^L u_x \overline{\phi_{xx}} dx}_{:=I_{10}} - \frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \overline{\phi_x} dx = \int_0^L f^2 \overline{\phi_x} dx.$$

Substituindo $\overline{\phi_{xx}}$ dado por (2.90) em I_{10} , temos como resultado

$$\begin{aligned} i\lambda \int_0^L \varphi \overline{\phi_x} dx + \frac{\mu}{\rho} \int_0^L u_x \left(-i\lambda \frac{J}{\delta} \overline{\psi} + \frac{b}{\delta} \overline{u_x} + \frac{\xi}{\delta} \overline{\phi} - \frac{m}{\delta} \overline{\theta} - \frac{J}{\delta} \overline{f^4} \right) dx \\ - \frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \overline{\phi_x} dx = \int_0^L f^2 \overline{\phi_x} dx, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &= i\lambda \int_0^L \varphi \overline{\phi_x} dx - \underbrace{i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u_x \overline{\psi} dx}_{:=I_{11}} + \frac{\mu b}{\rho \delta} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\mu \xi}{\rho \delta} \int_0^L u_x \overline{\phi} dx \\ &- \frac{\mu m}{\rho \delta} \int_0^L u_x \overline{\theta} dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u_x \overline{f^4} dx + \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \overline{\phi_x} dx - \int_0^L f^2 \overline{\phi_x} dx. \quad (2.104) \end{aligned}$$

Dessa forma, usando integral por partes em I_{11} , obtemos

$$I_{11} = -i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u_x \overline{\psi} dx = i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u \overline{\psi_x} dx = \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L i\lambda u \overline{\psi_x} dx. \quad (2.105)$$

Dessa maneira, usando (2.87), (2.89) e integração por partes em (2.105), resulta que

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L (\varphi + f^1) \bar{\psi}_x dx = \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{\psi}_x dx + \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L f^1 \bar{\psi}_x dx \\
&= \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \left(-i\lambda \bar{\phi}_x - \bar{f}_x^3 \right) dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L f_x^1 \bar{\psi} dx \\
&= -i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{f}_x^3 dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L f_x^1 \bar{\psi} dx.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Fazendo a substituição de (2.106) na equação (2.104), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\rho} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &= \underbrace{i\lambda \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx - i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{f}_x^3 dx}_{:=I_{12}} \\
&\quad - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L f_x^1 \bar{\psi} dx + \frac{\mu b}{\rho \delta} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\mu \xi}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{\phi} dx - \frac{\mu m}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{\theta} dx \\
&\quad - \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L u_x \bar{f}_x^4 dx + \frac{\beta}{\rho} \int_0^L \theta_x \bar{\phi}_x dx - \int_0^L f^2 \bar{\phi}_x dx.
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Agora vamos trabalhar no desenvolvimento do termo I_{12} .

$$\begin{aligned}
I_{12} &= i\lambda \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx - i\lambda \frac{\mu J}{\rho \delta} \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx = i\lambda \left(1 - \frac{\mu J}{\rho \delta} \right) \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx \\
&= i\lambda \left(\frac{\rho \delta - \mu J}{\rho \delta} \right) \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx = -i\lambda \frac{J}{J} \left(\frac{\mu J - \rho \delta}{\rho \delta} \right) \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx \\
&= -i\lambda \frac{J}{\delta} \left(\frac{\mu J - \rho \delta}{\rho J} \right) \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx = -i\lambda \frac{J}{\delta} \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J} \right) \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma, resulta que

$$I_{12} = -i\lambda \frac{J}{\delta} \chi \int_0^L \varphi \overline{\phi_x} dx. \quad (2.108)$$

Agora, fazendo a multiplicação de (2.107) por $\frac{\rho}{b}$ e substituindo (2.108), a fim de obter

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &= -i\lambda \frac{J\rho}{\delta b} \chi \int_0^L \varphi \overline{\phi_x} dx - \frac{\mu J}{\delta b} \int_0^L \varphi \overline{f_x^3} dx - \frac{\mu J}{\delta b} \int_0^L f_x^1 \overline{\psi} dx \\ &+ \frac{\mu}{\delta} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\mu \xi}{\delta b} \int_0^L u_x \overline{\phi} dx - \frac{\mu m}{\delta b} \int_0^L u_x \overline{\theta} dx \\ &- \frac{\mu J}{\delta b} \int_0^L u_x \overline{f^4} dx + \frac{\beta}{b} \int_0^L \theta_x \overline{\phi_x} dx - \frac{\rho}{b} \int_0^L f^2 \overline{\phi_x} dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq |\lambda| \frac{J\rho}{\delta |b|} |\chi| \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx + \frac{\mu}{\delta} \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &+ \frac{\mu \xi}{\delta |b|} C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ \left| \frac{\beta}{b} \right| \underbrace{\left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{1/2}}_{:=I_{13}} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ \frac{\mu |m|}{\delta |b|} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_0^L |\theta|^2 dx \right)^{1/2}}_{:=I_{14}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Usando (2.93) e (2.94), respectivamente, em I_{13} e I_{14} , temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq |\lambda| \frac{J\rho}{\delta|b|} |\chi| \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &+ C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq |\lambda| \frac{J\rho}{\delta|b|} |\chi| \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx + C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos a prova do nosso Lema. ■

Obervação: Aplicando a desigualdade de Poincaré no Lema 2.8, temos que

$$\begin{aligned} \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq |\lambda| \frac{J\rho}{\delta|b|} |\chi| \xi C_p \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &+ C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.109) \end{aligned}$$

onde C_p é a constante de Poincaré que depende do comprimento do intervalo $(0, L)$.

Lema 2.9. *Seja $U = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)'$ solução do sistema (2.1)-(2.5), então temos que*

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi|^2 dx \right)^{1/2} + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &+ \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Prova. Para iniciar, multiplicamos a equação (2.90) por $\bar{\phi}$ e o resultado integramos em $(0, L)$, encontrando assim

$$i\lambda J \int_0^L \psi \bar{\phi} dx - \delta \int_0^L \phi_{xx} \bar{\phi} dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L \phi \bar{\phi} dx - m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx = J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx.$$

Usando integral por partes e suas condições de fronteira (2.5) na identidade acima, resulta que

$$\underbrace{i\lambda J \int_0^L \psi \bar{\phi} dx}_{:=I_{15}} + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx - m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx = J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx.$$

Logo, aplicando (2.89) em I_{15} , temos que

$$\begin{aligned} & J \int_0^L \psi \left(-\bar{\psi} - \bar{f}^3 \right) dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx \\ & + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx - m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx = J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &= \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &- m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx - J \int_0^L \psi \bar{f}^3 dx - J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx, \end{aligned} \quad (2.110)$$

de onde segue,

$$\begin{aligned}
J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq |b| \int_0^L |u_x| |\phi| dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx \\
&+ \underbrace{|m| \int_0^L |\theta| |\phi| dx}_{:=I_{16}} + J \int_0^L |\psi| |f^3| dx + J \int_0^L |f^4| |\phi| dx. \quad (2.111)
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (2.111) e usando (2.94) em I_{16} , obtemos

$$\begin{aligned}
J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi|^2 dx \right)^{1/2} + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\
&+ \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi|^2 dx \right)^{1/2} + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\
&+ \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

de onde segue a conclusão do nosso Lema. ■

A partir de agora iremos mostrar um dos principais resultados deste capítulo, que versa sobre o decaimento exponencial, através do uso dos lemas auxiliares demonstrados anteriormente.

Teorema 2.10. *Seja A o operador dado em (2.26) e $S(t) = e^{-At}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\chi = 0$.*

Prova. Como por hipótese $\chi = 0$, então usando esse fato no Lema 2.8, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young acima, encontramos

$$\int_0^L |\phi_x|^2 dx \leq C \underbrace{\int_0^L |u_x|^2 dx}_{:=I_{17}} + \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Substituindo o Lema 2.6 em I_{17} , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{C}{\lambda} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

de onde segue,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Usando a desigualdade de Poincaré em (2.112), obtemos

$$\begin{aligned} \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young no Lema 2.7, temos

$$\begin{aligned}
\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \underbrace{C \int_0^L |u_x|^2 dx}_{:=I_{18}} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^L |\phi_x|^2 dx}_{:=I_{19}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, usando o Lema 2.6 e (2.112), respectivamente em I_{18} e I_{19} , segue que

$$\begin{aligned}
\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.114}
\end{aligned}$$

Do Lema 2.9, temos

$$\begin{aligned}
J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \underbrace{\int_0^L |u_x|^2 dx}_{:=I_{20}} + \delta \underbrace{\int_0^L |\phi_x|^2 dx}_{:=I_{21}} \\
&+ \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \xi \right) \int_0^L |\phi|^2 dx}_{:=I_{22}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, usando o Lema 2.6, (2.112) e (2.113), respectivamente em I_{20} , I_{21} e I_{22} , segue que

$$\begin{aligned}
J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.115}
\end{aligned}$$

Agora, usando integral por partes em (2.103), encontramos

$$\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \phi \bar{u}_x dx = \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx - \beta \int_0^L \theta_x \bar{u} dx + \rho \int_0^L \varphi \bar{f}^1 dx + \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx. \quad (2.116)$$

Por outro lado, de (2.110) obtemos

$$\begin{aligned} \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &= J \int_0^L |\psi|^2 dx \\ + m \int_0^L \theta \bar{\phi} dx + J \int_0^L \psi \bar{f}^3 dx + J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Somando a equação (2.116) com (2.117) e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &\leq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + J \int_0^L |\psi|^2 dx + |\beta| \underbrace{\left(\int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{1/2}}_{:=I_{23}} \left(\int_0^L |u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ |m| \underbrace{\left(\int_0^L |\theta|^2 dx \right)^{1/2}}_{:=I_{24}} \left(\int_0^L |\phi|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Dessa forma, aplicando a desigualdade de Young e Poincaré acima, além de usar (2.93) e (2.94), respectivamente em I_{23} e I_{24} , encontramos

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L (\bar{u}_x \phi + u_x \bar{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \leq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \\ &+ J \int_0^L |\psi|^2 dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Logo, usando (2.114), (2.115) e o Lema 2.6 em (2.119), temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
& \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L (\overline{u_x} \phi + u_x \overline{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\
& \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
& \quad + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.120}
\end{aligned}$$

Para finalizar, combinamos as desigualdades (2.94), (2.114), (2.115) e (2.120), encontrando assim

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \underbrace{\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx}_{(2.114)} + \underbrace{J \int_0^L |\psi|^2 dx}_{(2.115)} + \underbrace{\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx}_{(2.120)} \\
& \quad + \underbrace{b \int_0^L (\overline{u_x} \phi + u_x \overline{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx}_{(2.120)} + \underbrace{c \int_0^L |\theta|^2 dx}_{(2.94)} \\
& \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \quad + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.121}
\end{aligned}$$

Dessa forma, escolhemos $|\lambda|$ sendo suficientemente grande para atingir nosso objetivo. Sendo assim, de (2.121) segue que existe uma constante positiva M , independente de λ , tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.122}$$

Usando o resultado devido a Prüss [20], obtemos a conclusão do nosso Teorema. ■

2.6 Decaimento Polinomial

Nesta seção, iremos mostrar que em geral o semigrupo $S(t) = e^{At}$ gerado por \mathcal{A} , associado ao sistema (2.1)-(2.5) tende a zero polinomialmente ao longo do tempo, para qualquer condição inicial U_0 sobre o $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Em outras palavras, mostraremos que a energia $E(t)$ de soluções do Sistema Elástico Poroso, dada por (2.21), é controlada por um polinômio, a saber

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq f(t)\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

onde $f(t)$ é uma função polinomial positiva, tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Portanto, fica evidente que o decaimento polinomial da energia será um processo de estabilização lenta, visto que a energia das soluções é controlada por um polinômio.

Partiremos da equação resolvente em termos de suas componentes, dada por (2.87)-(2.91), onde iremos combinar o método do domínio da frequência com técnicas multiplicativas para conduzir uma análise especial da equação resolvente, além de aplicarmos o Teorema devido à Borichev e Tomilov [2].

Teorema 2.11. *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo limitado sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} , com gerador infinitesimal \mathcal{A} , tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Então, para qualquer $\alpha > 0$ e $x \in \mathcal{H}$, nós temos*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| = \mathcal{O}(|\lambda|^{-\alpha}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \Leftrightarrow \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(t^{-1/\alpha}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.123)$$

além disso, sua taxa é ótima.

O principal resultado desta seção é dado pelo seguinte Teorema.

Teorema 2.12. *Seja $\chi \neq 0$ e $\delta|b||\beta| - 2\rho|m||\chi|(1 + 4\delta + 4\xi C_p) > 0$, então o C_0 -semigrupo associado ao sistema (2.1)-(2.5) é polinomialmente estável, ou seja*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (2.124)$$

Prova. Para iniciar, multiplicamos a equação (2.91) por $\bar{\psi}$ e integramos em $(0, L)$, obtendo assim

$$i\lambda c \int_0^L \theta \bar{\psi} dx + \beta \int_0^L \varphi_x \bar{\psi} dx - \kappa \int_0^L \theta_{xx} \bar{\psi} dx + m \int_0^L \psi \bar{\psi} dx = c \int_0^L f^5 \bar{\psi} dx.$$

Usando as condições de fronteira (2.5), obtemos

$$\underbrace{\beta \int_0^L \varphi_x \bar{\psi} dx}_{:=I_{25}} = -i\lambda c \int_0^L \theta \bar{\psi} dx - \underbrace{\kappa \int_0^L \theta_x \bar{\psi}_x dx}_{:=I_{26}} - m \int_0^L |\psi|^2 dx + c \int_0^L f^5 \bar{\psi} dx.$$

Agora, usando (2.89) em I_{25} e I_{26} , encontramos

$$\begin{aligned} \beta \int_0^L \varphi_x \left(-i\lambda \bar{\phi} - \bar{f}^3 \right) dx &= -i\lambda c \int_0^L \theta \bar{\psi} dx - \kappa \int_0^L \theta_x \left(-i\lambda \bar{\phi}_x - \bar{f}_x^3 \right) dx \\ &\quad - m \int_0^L |\psi|^2 dx + c \int_0^L f^5 \bar{\psi} dx, \end{aligned}$$

e usando integral por partes, segue que

$$\begin{aligned} i\lambda\beta \int_0^L \varphi \bar{\phi}_x dx &= -i\lambda c \int_0^L \theta \bar{\psi} dx + i\lambda\kappa \int_0^L \theta_x \bar{\phi}_x dx + \kappa \int_0^L \theta_x \bar{f}_x^3 dx \\ &\quad - m \int_0^L |\psi|^2 dx + c \int_0^L f^5 \bar{\psi} dx - \beta \int_0^L \varphi \bar{f}_x^3 dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Young, temos que

$$\begin{aligned} |\lambda| \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx &\leq \frac{1}{|\beta|} \left(\frac{c^2}{2|m|} \int_0^L |\theta|^2 dx \right)^{1/2} \left(2|m| \int_0^L |\psi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\frac{|\lambda^2| \kappa^2}{2|\beta|} \int_0^L |\theta_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(2 \int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{|m|}{|\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 |\lambda| \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx &\leq \frac{1}{2} \frac{c^2}{2|m||\beta|} \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{2|m|}{|\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{|\lambda^2|\kappa^2}{2|\beta|} \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\
 &+ \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{|m|}{|\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned}
 |\lambda| \int_0^L |\varphi| |\phi_x| dx &\leq C \int_0^L |\theta|^2 dx + 2 \frac{|m|}{|\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\
 &+ \varepsilon \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{2.125}
 \end{aligned}$$

onde ε é uma constante positiva.

Agora, combinando o Lema 2.8 com (2.125), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{J\rho}{\delta|b|} |\chi| \left[C \int_0^L |\theta|^2 dx + 2 \frac{|m|}{|\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \int_0^L |\theta_x|^2 dx \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] + C \int_0^L |u_x|^2 dx \\
 &+ C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos como resultado

$$\begin{aligned}
 \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{2J\rho|m||\chi|}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + \underbrace{C_\varepsilon |\lambda|^2 \int_0^L |\theta_x|^2 dx}_{:=I_{27}} + \underbrace{C \int_0^L |\theta|^2 dx}_{:=I_{28}} \\
 &+ \frac{J\rho|\chi|}{\delta|b|} \varepsilon \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx
 \end{aligned}$$

$$+ C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Dessa forma, usando (2.93) e (2.94) em I_{27} e I_{28} , respectivamente, encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{2J\rho|m||\chi|}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + \frac{J\rho|\chi|}{\delta|b|} \varepsilon \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{J\rho|\chi|}{\delta|b|} \varepsilon\right) \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{2J\rho|m||\chi|}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Agora, escolhemos $\varepsilon = \frac{\delta|b|}{4J\rho|\chi|}$ e substituimos em (2.126), obtendo assim

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{J\rho|\chi|}{\delta|b|} \frac{\delta|b|}{4J\rho|\chi|}\right) \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{2J\rho|m||\chi|}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{8J\rho|m||\chi|}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré, temos como resultado

$$\begin{aligned} \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq \frac{8J\rho|m||\chi|\xi C_p}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^L |u_x|^2 dx \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Por outro lado, do Lema 2.6 encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{|m|}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Aplicando a desigualdade de Young e Poincaré no Lema 2.9, obtemos o resultado

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &+ \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

de onde obtemos,

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &+ \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \int_0^L |u_x|^2 dx + \left(\frac{1}{4} + \delta \right) \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Usando (2.127) e (2.128) em (2.130), segue que

$$\begin{aligned}
J \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \int_0^L |u_x|^2 dx + \left(\frac{1}{4} + \delta \right) \left[\frac{8J\rho|m||\chi|}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right. \\
&+ C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \left. \right] \\
&+ \left[\frac{8J\rho|m||\chi|\xi C_p}{\delta|b||\beta|} \int_0^L |\psi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right] + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{J}{\delta|b||\beta|} [\delta|b||\beta| - 2\rho|m||\chi| (1 + 4\delta + 4\xi C_p)] \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq C \int_0^L |u_x|^2 dx \\
&+ C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Substituindo (2.129), segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{J}{\delta|b||\beta|} [\delta|b||\beta| - 2\rho|m||\chi| (1 + 4\delta + 4\xi C_p)] \int_0^L |\psi|^2 dx \\
&\leq C \left[\frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{|m|}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\
&+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \left. \right] \\
&+ C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\frac{J}{\delta|b||\beta|} [\delta|b||\beta| - 2\rho|m||\chi| (1 + 4\delta + 4\xi C_p)] \int_0^L |\psi|^2 dx \\
&\leq C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

$$+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^L |\psi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Usando (2.129) e (2.131) em (2.127) e (2.128), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Agora usando a desigualdade de Young no Lema 2.7, encontramos

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq \left(4\delta C^2 \int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\frac{\delta}{4} \int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq \frac{\delta}{4} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\frac{3}{2}\mathcal{H}} \|F\|_{\frac{1}{2}\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando (2.129) e (2.132) na desigualdade anterior, encontramos o resultado

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Por outro lado, fazendo a substituição de (2.129), (2.131), (2.133) e (2.134) em (2.118), obtemos

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L (\bar{u}_x \phi + u_x \bar{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &\leq \underbrace{\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx}_{(2.134)} + \underbrace{J \int_0^L |\psi|^2 dx}_{(2.131)} + \underbrace{C \int_0^L |u_x|^2 dx}_{(2.129)} + \underbrace{C \int_0^L |\phi|^2 dx}_{(2.133)} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L (\bar{u}_x \phi + u_x \bar{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Dessa forma, combinando as desigualdades (2.30), (2.94), (2.131), (2.134) e (2.135), temos que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L \left[\underbrace{\rho |\varphi|^2}_{(2.134)} + \underbrace{J |\psi|^2}_{(2.131)} + \underbrace{\mu |u_x|^2 + \delta |\phi_x|^2 + \xi |\phi|^2 + b u_x \bar{\phi} + b \bar{u}_x \phi}_{(2.135)} + \underbrace{c |\theta|^2}_{(2.94)} \right] dx \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Sendo assim, usando a desigualdade de Young e escolhendo $|\lambda|$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que existe uma constante positiva M , que não depende de λ , tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M|\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

de onde segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Usando a equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, temos como resultado

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \mathcal{O}(|\lambda|^{-2}), \quad \text{com } |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Então, usando o Teorema 2.11, obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(t^{-1/2}),$$

ou seja, existe uma constante positiva M , que satisfaz

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{M}{\sqrt{t}}.$$

Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então temos que o nosso operador \mathcal{A} é sobrejetivo, portanto a equação $-\mathcal{A}U = F$, possui uma única solução $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Sendo assim,

$$\|F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} = \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}.$$

Portanto,

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|F\|_{\mathcal{H}} \Rightarrow \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

provando assim que o sistema é polinomialmente estável.

Para provarmos que a taxa de decaimento é ótima, iremos usar argumentos de contradição. Desse modo, vamos supor que a taxa $t^{-\frac{1}{2}}$ pode ser melhorada para uma taxa da forma $t^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}$

com $0 < \varepsilon < 2$. Dessa forma, isto significa dizer que existe uma constante $M > 0$, tal que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{M}{t^{1/(2-\varepsilon)}}. \quad (2.137)$$

Agora, aplicando o Teorema 2.3, temos que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\varepsilon}} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M, \text{ quando } |\lambda| \rightarrow \infty,$$

na qual implica, que para todo $F \in \mathcal{H}$ e usando a equação resolvente, resulta que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\varepsilon}} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq M \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R}, \lambda \neq 0. \quad (2.138)$$

Por outro lado, suponhamos que exista uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, para $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, tal que

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n.$$

Então, podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = (0, 0, 0, \cos(\frac{n\pi}{L}x), 0)'$ e $U_n = (u, \varphi, \phi, \psi, \theta)'$, e devido as condições de contorno dadas para U_n , temos a seguinte forma para $u = A \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L}x)$, $\phi = B \cos(\frac{n\pi}{L}x)$ e $\theta = D \cos(\frac{n\pi}{L}x)$. Sendo assim, escolhendo

$$\lambda = \sqrt{\frac{\delta}{J} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\xi}{J} - \frac{b^2}{\chi \rho J}} = \mathcal{O}(n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e seguindo os mesmos passos feitos na demonstração do Teorema 2.4, podemos concluir que

$$|\lambda|^{-2+\varepsilon} \|U_n\|_{\mathcal{H}} \geq \mathcal{O}(n^\varepsilon) \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

o que contradiz (3.80). Portanto, a taxa não pode ser melhorada, e assim concluímos a prova do nosso Teorema. ■

Um Modelo Elástico Poroso com Dissipação Viscoelástica

Neste capítulo vamos estudar a existência e unicidade de soluções para um modelo elástico poroso, a falta de estabilidade exponencial e o seu decaimento polinomial.

3.1 Fundamentação Teórica

Para iniciar, vamos considerar as equações de evolução para o caso unidimensional sobre a teoria de materiais porosos com temperatura e microtemperatura dadas por (1.1) e as suas respectivas equações constitutivas expressas em (1.2). Além disso, os seus coeficientes constitutivos satisfazem a relação fornecida em (1.3).

Agora, para o modelo que iremos trabalhar, não consideramos os efeitos de temperatura e microtemperatura na equação constitutiva (1.2). Desse modo, a partir de (1.1) e (1.2) obtemos o nosso problema representado pelo sistema elástico poroso com dissipação porosa e viscoelástica, dado pelo seguinte sistema de equações

$$\rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

$$J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\phi_t - \gamma\phi_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.2)$$

apresentando as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \\ \phi_x(x, 0) &= \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad \forall x \in (0, L), \end{aligned} \quad (3.3)$$

e com as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann, dadas por

$$u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.4)$$

Para procedermos na resolução do nosso problema, vamos nos apropriar de alguns resultados preliminares, que enunciaremos nas próximas seções.

3.2 A Energia do Sistema

A energia de soluções do sistema elástico poroso (3.1)-(3.4) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi_t|^2 + \delta|\phi_x|^2 + \xi|\phi|^2 + 2bu_x\phi] dx. \quad (3.5)$$

O funcional energia $E(t)$, definido acima, é não crescente para todo $t > 0$. De fato, conforme será mostrado na proposição abaixo.

Proposição 3.1. (Energia do modelo) *Se $E(t)$ é a energia associada ao problema (3.1)-(3.4), então*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\tau \int_0^L |\phi_t|^2 dx - \gamma \int_0^L |\phi_{xt}|^2 dx, \quad (3.6)$$

isto é,

$$E(t) \leq E(0), \forall t \geq 0. \quad (3.7)$$

Prova. Para obtermos a energia do sistema elástico poroso (3.1)-(3.4), faremos uso de alguns multiplicadores, que consiste nos seguintes passos feitos a seguir:

- Multiplicando a equação (3.1) por u_t e o resultado integramos em $(0, L)$, obtendo assim

$$\rho \int_0^L u_{tt} u_t dx - \mu \int_0^L u_{xx} u_t dx - b \int_0^L \phi_x u_t dx = 0.$$

Agora, efetuando integração por partes e usando as condições de fronteira dadas em (3.4), temos que

$$\rho \int_0^L u_{tt} u_t dx + \mu \int_0^L u_x u_{tx} dx + b \int_0^L \phi u_{tx} dx = 0. \quad (3.8)$$

- Multiplicando a equação (3.2) por ϕ_t e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned} & J \int_0^L \phi_{tt} \phi_t dx - \delta \int_0^L \phi_{xx} \phi_t dx + b \int_0^L u_x \phi_t dx \\ & + \xi \int_0^L \phi \phi_t dx + \tau \int_0^L \phi_t \phi_t dx - \gamma \int_0^L \phi_{xt} \phi_t dx = 0. \end{aligned}$$

Usando integral por partes e condições de fronteira (3.4), encontramos

$$\begin{aligned} & J \int_0^L \phi_{tt} \phi_t dx + \delta \int_0^L \phi_x \phi_{tx} dx + b \int_0^L u_x \phi_t dx + \xi \int_0^L \phi \phi_t dx \\ & + \tau \int_0^L |\phi_t|^2 dx + \gamma \int_0^L |\phi_{xt}|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Somando as equações (3.8)-(3.9), temos que

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L u_{tt}u_t dx + \mu \int_0^L u_x u_{tx} dx + b \int_0^L \phi u_{tx} dx + J \int_0^L \phi_{tt} \phi_t dx + \delta \int_0^L \phi_x \phi_{tx} dx \\ & + b \int_0^L u_x \phi_t dx + \xi \int_0^L \phi \phi_t dx + \tau \int_0^L |\phi_t|^2 dx + \gamma \int_0^L |\phi_{xt}|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo (2.13)-(2.18) em (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho |u_t|^2 + \mu |u_x|^2 + J |\phi_t|^2 + \delta |\phi_x|^2 + \xi |\phi|^2 \\ & + b u_x \phi + b u_x \phi] dx = -\tau \int_0^L |\phi_t|^2 dx - \gamma \int_0^L |\phi_{xt}|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Logo, substituindo (3.5) em (3.11), concluímos que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\tau \int_0^L |\phi_t|^2 dx - \gamma \int_0^L |\phi_{xt}|^2 dx \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.12)$$

Integrando a equação (3.12) de 0 até T , temos que

$$E(t) = - \int_0^T \left\{ \int_0^L [\tau |\phi_t|^2 + \gamma |\phi_{xt}|^2] dx \right\} dt + E(0).$$

Sendo assim, podemos afirmar que o nosso sistema (3.1)-(3.4) é dissipativo. É claro que ao assumirmos $\tau = \gamma = 0$, o nosso modelo passa a obedecer a lei de conservação de energia, ou seja

$$E(t) = E(0), \quad \forall t > 0,$$

concluindo assim a prova da nossa proposição. ■

3.3 O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares

Nesta seção, iremos estudar a existência e unicidade de soluções para o sistema elástico poroso, via Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares (ver A. Pazy [19]).

Agora, a partir da energia fornecida em (3.5), podemos definir o seguinte espaço de Hilbert \mathcal{H} , expresso por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L), \quad (3.13)$$

onde,

$$H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L), \text{ onde } L_*^2(0, L) = \left\{ f \in L^2(0, L) : \int_0^L f(x)dx = 0 \right\}. \quad (3.14)$$

Sendo assim, consideremos o seguinte produto interno em \mathcal{H} , definido por

$$(U, V)_{\mathcal{H}} := \int_0^L \left[\rho\varphi\bar{\Phi} + \mu u_x \bar{v}_x + J\psi\bar{\Psi} + \delta\phi_x \bar{\zeta}_x + \xi\phi\bar{\zeta} + b(u_x \bar{\zeta} + \bar{v}_x \phi) \right] dx, \quad (3.15)$$

onde temos $U = (u, \varphi, \phi, \psi)'$, $V = (v, \Phi, \zeta, \Psi)'$ onde ' denota a transposta do vetor U , com $U, V \in \mathcal{H}$.

Dessa forma, sua norma é expressa por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L \left[\rho|\varphi|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\psi|^2 + \delta|\phi_x|^2 + \xi|\phi|^2 + bu_x \bar{\phi} + b\bar{u}_x \phi \right] dx. \quad (3.16)$$

Pela nossa hipótese, temos que $\mu\xi \geq b^2$. Dessa forma, tomamos o valor de $\xi_2 \in (0, \xi]$, tal que $\mu\xi_2 - b^2 = 0$. Então, obtemos

$$\begin{aligned}
(U, U)_{\mathcal{H}} &\geq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + J \int_0^L |\psi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx \\
&+ \int_0^L \left| \mu^{\frac{1}{2}} u_x - \xi_2^{\frac{1}{2}} \phi \right|^2 dx + (\xi - \xi_2) \int_0^L |\phi|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Isto nos permite ver claramente acima que $(U, V)_{\mathcal{H}}$ define um produto interno em \mathcal{H} , e a norma associada $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente a norma usual.

Agora, vamos reescrever o nosso problema (3.1)-(3.4), em um sistema de EDO de primeira ordem, para $U = (u, u_t, \phi, \phi_t)'$. Dessa forma, o vetor U satisfaz a equação

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.18}$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1)'$ é o vetor dos dados iniciais e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o nosso operador diferencial que será representado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2(\cdot) & 0 & \frac{b}{\rho} \partial_x(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{b}{J} \partial_x(\cdot) & 0 & \frac{\delta}{J} \partial_x^2(\cdot) - \frac{\xi}{J} I & \frac{\gamma}{J} \partial_x^2(\cdot) - \frac{\tau}{J} I \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, agora podemos definir o domínio do nosso operador \mathcal{A} , que é dado por

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{A}) = \{ &U = (u, \varphi, \phi, \psi)' \in \mathcal{H} \mid u, \phi \in H^2, \varphi \in H_0^1(0, L), \\ &\psi \in H_*^1(0, L) \text{ e } \psi_x, \phi_x \in H_0^1(0, L)\},
\end{aligned}$$

onde $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} . Dessa maneira, a partir das informações feitas sobre o nosso operador \mathcal{A} e com os espaços escolhidos adequadamente, podemos enunciar o resultado fundamental desta seção, que versa sobre a existência e unicidade de soluções, associado ao nosso sistema (3.1)-(3.4).

Teorema 3.2. *O operador \mathcal{A} dado em (3.3) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contrações em \mathcal{H} . Assim, para algum $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (3.1)-(3.4) tem uma única solução fraca $U \in C^0([0, \infty), \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então U é uma solução forte de (3.1)-(3.4), isto é, $U \in C^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$.*

Prova. Seja $U = (u, \varphi, \phi, \psi)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, usando a definição de produto interno dada em (3.15), temos que

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\tau \int_0^L |\psi|^2 dx - \gamma \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq 0, \quad (3.19)$$

portanto, segue que o operador \mathcal{A} é dissipativo. Sabendo que o domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} , ou seja, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Então, usamos o teorema de Lumer-Phillips (ver A. Pazy [22]), para provar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Nosso próximo passo é mostrar que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Para isto, consideramos a equação resolvente

$$U - \mathcal{A}U = F. \quad (3.20)$$

Com este propósito, vamos tomar $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)' \in \mathcal{H}$ e $U = (u, \varphi, \phi, \psi)'$. Então, a equação (3.20) em termos de suas componentes, fica escrita da forma

$$u - \varphi = f^1, \quad (3.21)$$

$$\rho\varphi - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho f^2, \quad (3.22)$$

$$\phi - \psi = f^3, \quad (3.23)$$

$$J\psi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\psi - \gamma\psi_{xx} = Jf^4. \quad (3.24)$$

De (3.21) e (3.23), temos respectivamente que

$$\varphi = u - f^1, \quad (3.25)$$

$$\psi = \phi - f^3. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.25) em (3.22), temos que

$$\begin{aligned}\rho(u - f^1) - \mu u_{xx} - b\phi_x &= \rho f^2, \\ \rho u - \mu u_{xx} - b\phi_x &= \rho(f^1 + f^2).\end{aligned}\quad (3.27)$$

Substituindo (3.26) em (3.24), encontramos

$$\begin{aligned}J(\phi - f^3) + bu_x - \delta\phi_{xx} + \xi\phi + \tau(\phi - f^3) - \gamma(\phi - f^3)_{xx} &= Jf^4, \\ J\phi + bu_x - \delta\phi_{xx} + \xi\phi + \tau\phi - \gamma\phi_{xx} &= J(f^3 + f^4) + \tau f^3 - \gamma f^3_{xx}.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Dessa maneira, de (3.27)-(3.28), obtemos o seguinte sistema

$$\rho u - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho(f^1 + f^2), \quad (3.29)$$

$$J\phi + bu_x - \delta\phi_{xx} + \xi\phi + \tau\phi - \gamma\phi_{xx} = J(f^3 + f^4) + \tau f^3 - \gamma f^3_{xx}. \quad (3.30)$$

Agora, multiplicando as equações (3.29) por \bar{u} e (3.30) por $\bar{\phi}$ e integrando em $(0, L)$, todas respectivamente nessa ordem, e usando integração por partes com as suas devidas condições de limites, encontramos

$$\rho \int_0^L u\bar{u}dx + \mu \int_0^L u_x\bar{u}_x dx + b \int_0^L \phi\bar{u}_x dx = \rho \int_0^L (f^1 + f^2)\bar{u}dx, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}J \int_0^L \phi\bar{\phi}dx + b \int_0^L u_x\bar{\phi}dx + \delta \int_0^L \phi_x\bar{\phi}_x dx + \xi \int_0^L \phi\bar{\phi}dx + \tau \int_0^L \phi\bar{\phi}dx \\ + \gamma \int_0^L \phi_x\bar{\phi}_x dx = J \int_0^L (f^3 + f^4)\bar{\phi}dx + \tau \int_0^L f^3\bar{\phi}dx + \gamma \int_0^L f^3_x\bar{\phi}_x dx.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Dessa forma, somando as equações de (3.31)-(3.32), segue que

$$\rho \int_0^L u\bar{u}dx + \mu \int_0^L u_x\bar{u}_x dx + J \int_0^L \phi\bar{\phi}dx + \delta \int_0^L \phi_x\bar{\phi}_x dx + \xi \int_0^L \phi\bar{\phi}dx$$

$$\begin{aligned}
 & +b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + b \int_0^L \phi \bar{u}_x dx + \tau \int_0^L \phi \bar{\phi} dx + \gamma \int_0^L \phi_x \bar{\phi}_x dx = \rho \int_0^L (f^1 + f^2) \bar{u} dx \\
 & + J \int_0^L (f^3 + f^4) \bar{\phi} dx + \tau \int_0^L f^3 \bar{\phi} dx + \gamma \int_0^L f_x^3 \bar{\phi}_x dx.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Portanto, para solucionar o problema (3.29)-(3.30), consideremos a seguinte forma bilinear:

$$\begin{aligned}
 a : \Gamma \times \Gamma & \longrightarrow \mathbb{R}, \\
 (V_1, V_2) & \longmapsto a(V_1, V_2),
 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 a(V_1, V_2) & := \rho \int_0^L u^1 \bar{u}^2 dx + \mu \int_0^L u_x^1 \bar{u}_x^2 dx + J \int_0^L \phi^1 \bar{\phi}^2 dx + \delta \int_0^L \phi_x^1 \bar{\phi}_x^2 dx \\
 & + \xi \int_0^L \phi^1 \bar{\phi}^2 dx + b \int_0^L \phi^1 \bar{u}_x^2 dx + b \int_0^L u_x^1 \bar{\phi}^2 dx + \tau \int_0^L \phi^1 \bar{\phi}^2 dx + \gamma \int_0^L \phi_x^1 \bar{\phi}_x^2 dx,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

com $V_1 = (u^1, \phi^1)$ e $V_2 = (u^2, \phi^2)$. Dessa maneira, a forma bilinear (3.34) é contínua e coerciva sobre o espaço de Hilbert Γ . Além disso, definimos uma aplicação T linear e contínua, dada por

$$\begin{aligned}
 T : \Gamma & \longrightarrow \mathbb{R}, \\
 V_2 & \longmapsto T(V_2),
 \end{aligned}$$

onde,

$$T := \int_0^L \left[\rho(f^1 + f^2) \bar{u}^2 + J(f^3 + f^4) \bar{\phi}^2 + \tau f^3 \bar{\phi}^2 + \gamma f_x^3 \bar{\phi}_x^2 \right] dx.$$

Logo, usando o teorema de Lax-Milgran (H. Brézis [3]), segue que existe uma única solução $V_1 \in \Gamma$, que satisfaz o problema variacional

$$a(V_1, V_2) = T(V_2), \quad \forall V_2 \in \Gamma.$$

Sendo assim, existe uma única $V_1 = (u^1, \phi^1) \in \Gamma$ que satisfaz o sistema (3.29)-(3.30). Sendo assim, segue que

$$u \in H_0^1(0, L) \text{ e } \phi \in H_*^1(0, L). \quad (3.35)$$

De (3.35) em (3.21) e (3.23), segue que

$$\varphi \in H_0^1(0, L) \text{ e } \psi \in H_*^1(0, L).$$

Além disso, de (3.22) e (3.24) segue que $u, \phi \in H^2(0, L)$. Portanto, $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e sendo assim $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Para finalizar, aplicamos o teorema de Lumer-Phillips, concluindo assim, que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} . ■

3.4 A Falta de Estabilidade Exponencial

Nesta seção, iremos mostrar que o sistema elástico poroso dado por (3.1)-(3.4), apresenta perda de estabilidade exponencial. Para essa finalidade, usaremos o Teorema 2.3, para sistemas dissipativos.

O principal resultado desta seção é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.3. *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} associado ao sistema (3.1)-(3.4). Então, $S(t)$ não é exponencialmente estável, independentemente de qualquer relação existente entre ou seus coeficientes μ , ρ , δ e J .*

Prova. Para provar a falta de estabilidade exponencial do sistema (3.1)-(3.4), utilizaremos o Teorema 2.3. Dessa forma, usando argumentos de contradição, iremos provar que existe uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $U_n = (u, \varphi, \phi, \psi)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, com \mathcal{A} dado em (3.3), satisfazendo a equação resolvente

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n = F_n, \quad (3.36)$$

para funções $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4)' \in \mathcal{H}$, com $\|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, tal que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} = \|(\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (3.37)$$

Ao analisarmos a equação (3.36), podemos dizer que a solução correspondente U_n não é limitada, quando F_n é limitada em \mathcal{H} .

Para simplificar a notação, omitiremos o índice n . Então a nossa equação espectral (3.36) pode ser reescrita em termos de suas componentes, sendo expressa pela forma

$$i\lambda u - \varphi = f^1, \quad (3.38)$$

$$i\lambda\rho\varphi - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho f^2, \quad (3.39)$$

$$i\lambda\phi - \psi = f^3, \quad (3.40)$$

$$i\lambda J\psi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\psi - \gamma\psi_{xx} = Jf^4. \quad (3.41)$$

Para o nosso sistema (3.38)-(3.41), tomamos os valores de $f^1 = f^3 = f^4 = 0$ e $f^2 = \frac{1}{\rho} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. De (3.38) e (3.40), é imediato que

$$\varphi = i\lambda u \text{ e } \psi = i\lambda\phi. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) em (3.39) e (3.41), encontramos

$$-\lambda^2\rho u - \mu u_{xx} - b\phi_x = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (3.43)$$

$$-\lambda^2 J\phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + i\lambda\tau\phi - i\lambda\gamma\phi_{xx} = 0. \quad (3.44)$$

Levando em conta as condições de contorno dadas em (2.5), tomamos soluções da forma

$$u = A \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \phi = B \text{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (3.45)$$

Posto isso, façamos a substituição de (3.45) em (3.43)-(3.44), com o objetivo de encontrar a sua solução, que é equivalente a encontrar as soluções em A e B para o sistema

$$\begin{aligned} \left[-\rho\lambda^2 + \mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b\frac{n\pi}{L}B \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ b\frac{n\pi}{L}A \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \left[-\lambda^2 J + \delta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \xi + i\lambda\tau + i\lambda\gamma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] B \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) &= 0. \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema acima, resulta que

$$\left(-\rho\lambda^2 + \mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right) A + b\left(\frac{n\pi}{L}\right) B = 1, \quad (3.46)$$

$$b\left(\frac{n\pi}{L}\right) A + \left(-\lambda^2 J + \delta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \xi + i\lambda\tau + i\lambda\gamma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right) B = 0. \quad (3.47)$$

Dessa forma, tomando

$$\lambda = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}, \quad (3.48)$$

e substituindo em (3.46), obtemos

$$\underbrace{\left(-\rho\left(\sqrt{\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\right)^2 + \mu\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right)}_{=0} A + b\left(\frac{n\pi}{L}\right) B = 1,$$

obtendo assim como resultado

$$B = \frac{1}{b\left(\frac{n\pi}{L}\right)}. \quad (3.49)$$

Substituindo (3.49) em (3.47), temos

$$b\left(\frac{n\pi}{L}\right) A + \left(-\lambda^2 J + \delta\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \xi + i\lambda\tau + i\lambda\gamma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right) \frac{1}{b\left(\frac{n\pi}{L}\right)} = 0,$$

logo,

$$b^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A = - \left(-\lambda^2 J + \delta \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \xi + i\lambda\tau + i\lambda\gamma \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right).$$

Sendo assim, usando (3.48) na equação acima, temos que

$$A = \frac{- \left(- \left(\sqrt{\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} \right)^2 J + \delta \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \xi + i\lambda\tau + i\lambda\gamma \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right)}{b^2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2},$$

de onde segue que

$$A = \frac{- \left[\left(\delta - \frac{\mu J}{\rho} \right) + i\lambda\gamma \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - \xi - i\lambda\tau}{\left(b \frac{n\pi}{L} \right)^2}.$$

Sendo assim, concluímos que

$$A = \frac{- \left[-J \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J} \right) + i\lambda\gamma \right] \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - \xi - i\lambda\tau}{\left(b \frac{n\pi}{L} \right)^2}, \quad (3.50)$$

ou seja,

$$A := A_n \approx \mathcal{O}(n) \quad \text{e} \quad B := B_n \longrightarrow 0, \quad (3.51)$$

para n grande.

Dessa forma, escolhendo $L = \pi$ e usando a definição da norma em (3.16), (3.42) e (3.45), segue que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx = \rho |\lambda|^2 |A|^2 \int_0^\pi \left| \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \right|^2 dx, \quad (3.52)$$

Logo, usando (3.48) e (3.51) em (3.52), concluímos que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \approx \mathcal{O}(n^4). \quad (3.53)$$

Então, como $n \rightarrow \infty$, de (3.52) e (3.53), encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi\|_{L^2}^2 = \infty,$$

equivalentemente,

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} \geq \sqrt{\frac{\mu\pi}{2}} n A_n \approx \mathcal{O}(n^2). \quad (3.54)$$

Dessa forma, aplicando o Teorema 2.3 podemos concluir que o semigrupo $S(t)$ associado ao sistema (3.1)-(3.4) não é exponencialmente estável, ou seja, apresenta perda de estabilidade exponencial. ■

3.5 Decaimento Polinomial

Nesta seção, nossa atenção estará voltada para provar que o semigrupo $S(t) = e^{At}$ gerado por \mathcal{A} , associado ao sistema (3.1)-(3.4) é polinomialmente estável, e isto ocorrerá independentemente de qualquer relação existente entre os coeficientes μ, ρ, δ e J .

Partiremos da equação resolvente em termos de suas componentes, onde iremos combinar o método do domínio da frequência com técnicas multiplicativas para conduzir uma análise especial da equação resolvente, além de aplicarmos o teorema devido a Borichev e Tomilov (ver [2]). Também iremos mostrar que a sua taxa de decaimento é ótima, ou seja, neste caso a taxa $1/\sqrt{t}$ obtida no decaimento polinomial não pode ser melhorada.

Para iniciar, consideramos $U = (u, \varphi, \phi, \psi)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)' \in \mathcal{H}$. Então a equação resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$ em termos de suas componentes fica escrita da seguinte

forma

$$i\lambda u - \varphi = f^1, \quad (3.55)$$

$$i\lambda\rho\varphi - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho f^2, \quad (3.56)$$

$$i\lambda\phi - \psi = f^3, \quad (3.57)$$

$$i\lambda J\psi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\psi - \gamma\psi_{xx} = Jf^4. \quad (3.58)$$

Agora fazendo o produto interno em \mathcal{H} , de $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com a equação resolvente de \mathcal{A} , segue que

$$i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}. \quad (3.59)$$

Tomando a parte real da equação (3.59) e usando a desigualdade (3.19), temos que

$$\tau \int_0^L |\psi|^2 dx + \gamma \int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.60)$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que o resolvente do operador \mathcal{A} , dado em (3.3), é uniformemente limitado ao longo do eixo imaginário. Dessa forma, podemos estabelecer o seguinte Lema.

Lema 3.4. *Sob as considerações acima, temos que*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

Prova. Desde que o operador resolvente de \mathcal{A} é compacto, temos que o seu espectro é discreto. Desse modo, para provar nosso lema é suficiente mostrarmos que o operador \mathcal{A} não possui autovalor imaginário puro. Primeiramente, podemos observar que zero não é um autovalor de \mathcal{A} . Dessa forma, podemos supor que existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tal que $i\lambda$ seja um autovalor e $U = (u, \varphi, \phi, \psi)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ seja um autovetor normalizado, ou seja, $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$, de modo que

$$\mathcal{A}U - i\lambda U = 0.$$

Nosso objetivo será provar que $U = (0, 0, 0, 0)'$, o que contraria $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$. De fato, tomando o produto interno em \mathcal{H} da equação acima com U , obtemos

$$i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Sendo assim, de (3.60) com $F = 0$, podemos concluir que $\psi = 0$. Agora de (3.57) com $f^3 = 0$, obtemos $\phi = 0$. Além disso, de (3.58) com $f^4 = 0$, segue que $u_x = 0$ e usando a desigualdade de Poincaré, temos como resultado $u = 0$. Para finalizar, de (3.55) com $f^1 = 0$, encontramos $\varphi = 0$. Dessa forma, obtemos que $U = 0$, mas isso é uma contradição, o que nos permite concluir que não existem autovalores imaginários puro e logo o nosso resultado está provado. ■

Para prosseguir na prova do decaimento polinomial do sistema (3.1)-(3.4), iremos enunciar e demonstrar três lemas auxiliares que darão o suporte necessário no desenvolvimento deste trabalho.

Lema 3.5. *Seja $U = (u, \varphi, \phi, \psi)'$ a solução do sistema (3.1)-(3.4), então*

$$\left(1 - \frac{1}{|\lambda|}\right) \int_0^L |\phi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.61)$$

e

$$\delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.62)$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande e sendo C uma constante positiva que não depende de λ .

Prova. Iniciando, derivamos em x a equação (3.57) e o resultado obtido multiplicamos por $\bar{\phi}_x$ sendo que integramos no intervalo $(0, L)$, obtendo assim

$$\begin{aligned} i\lambda \int_0^L |\phi_x|^2 dx &= \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx + \int_0^L f_x^3 \bar{\phi}_x dx, \\ \left| i\lambda \int_0^L |\phi_x|^2 dx \right| &\leq \int_0^L |\psi_x| |\phi_x| dx + \int_0^L |f_x^3| |\phi_x| dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Young, encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\phi_x|^2 dx &\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(\int_0^L \frac{1}{2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L 2 |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{1}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{1}{4|\lambda|} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{1}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Usando (3.60) na desigualdade acima, temos como resultado

$$\left(1 - \frac{1}{|\lambda|}\right) \int_0^L |\phi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

provando assim, a primeira desigualdade do Lema 3.5.

Agora, para mostrar o resultado (3.62), multiplicamos a equação (3.58) por $\bar{\phi}$ e integramos em $(0, L)$, a fim de obter

$$\begin{aligned} i\lambda J \int_0^L \psi \bar{\phi} dx - \delta \int_0^L \phi_{xx} \bar{\phi} dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L \phi \bar{\phi} dx \\ + \tau \int_0^L \psi \bar{\phi} dx - \gamma \int_0^L \psi_{xx} \bar{\phi} dx = J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Substituindo (3.57) em (3.63) e usando integração por partes, encontramos

$$\begin{aligned} J \int_0^L \psi (-\bar{\psi} - \bar{f}^3) dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ + \tau \int_0^L \psi \bar{\phi} dx + \gamma \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx = J \int_0^L f^4 \bar{\phi} dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &= J \int_0^L |\psi|^2 dx \\ -\tau \int_0^L \psi \bar{\phi} dx - \gamma \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx + J \int_0^L (\psi \bar{f}^3 + f^4 \bar{\phi}) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq J \int_0^L |\psi|^2 dx \\ + |\tau| \int_0^L |\psi| |\phi| dx + |\gamma| \int_0^L |\psi_x| |\phi_x| dx + J \int_0^L (|\psi| |f^3| + |f^4| |\phi|) dx. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ \leq J \int_0^L |\psi|^2 dx + |\tau| \left(\int_0^L |\psi|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ + |\gamma| \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx &\leq J \int_0^L |\psi|^2 dx + \frac{1}{2} |\tau| \int_0^L |\psi|^2 dx \\ + \frac{1}{2} |\tau| \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{1}{2} |\gamma| \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{1}{2} |\gamma| \int_0^L |\phi_x|^2 dx &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \leq \left(J + \frac{|\tau|}{2} \right) \int_0^L |\psi|^2 dx \\ & + \frac{|\gamma|}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \left(\frac{|\tau|}{2} + \frac{|\gamma|}{2} \right) \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Sendo assim, usando (3.60) e (3.61) na desigualdade acima, podemos concluir que

$$\delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \leq \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

o que prova a segunda parte do Lema 3.5. ■

Lema 3.6. *Seja $U = (u, \varphi, \phi, \psi)'$ a solução do sistema (3.1)-(3.4), então para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx \leq \varepsilon \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + C |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ & + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande e sendo C uma constante positiva que não depende de λ .

Prova. Para iniciar, multiplicamos a equação (3.58) por $\frac{\mu}{b} \bar{u}_x$ e integramos em $(0, L)$, a fim de obter

$$\begin{aligned} & i\lambda \frac{J\mu}{b} \int_0^L \psi \bar{u}_x dx - \frac{\delta\mu}{b} \int_0^L \phi_{xx} \bar{u}_x dx + \mu \int_0^L u_x \bar{u}_x dx + \frac{\xi\mu}{b} \int_0^L \phi \bar{u}_x dx \\ & + \frac{\tau\mu}{b} \int_0^L \psi \bar{u}_x dx - \frac{\gamma\mu}{b} \int_0^L \psi_{xx} \bar{u}_x dx = \frac{J\mu}{b} \int_0^L f^4 \bar{u}_x dx. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Usando integral por partes e condições de fronteira dada em (3.4) na equação (3.65), encontramos

$$\begin{aligned} & i\lambda \frac{J\mu}{b} \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \frac{\delta\mu}{b} \int_0^L \phi_x \overline{u_{xx}} dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\xi\mu}{b} \int_0^L \phi \overline{u_x} dx \\ & + \frac{\tau\mu}{b} \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \frac{\gamma\mu}{b} \int_0^L \psi_x \overline{u_{xx}} dx = \frac{J\mu}{b} \int_0^L f^4 \overline{u_x} dx, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L |u_x|^2 dx &= -i\lambda \frac{J\mu}{b} \int_0^L \psi \overline{u_x} dx - \int_0^L \left(\frac{\delta\mu}{b} \phi_x + \frac{\gamma\mu}{b} \psi_x \right) \overline{u_{xx}} dx \\ &\quad - \frac{\xi\mu}{b} \int_0^L \phi \overline{u_x} dx - \frac{\tau\mu}{b} \int_0^L \psi \overline{u_x} dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^L f^4 \overline{u_x} dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq \int_0^L \left| \lambda \frac{J\mu}{b} \psi \right| |u_x| dx - \int_0^L \left(\frac{\delta}{b} \phi_x + \frac{\gamma}{b} \psi_x \right) \mu \overline{u_{xx}} dx \\ &\quad + \int_0^L \left| \frac{\xi\mu}{b} \phi \right| |u_x| dx + \int_0^L \left| \frac{\tau\mu}{b} \psi \right| |u_x| dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^L |f^4| |u_x| dx. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Fazendo uso (3.56) em (3.66), encontramos

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq \underbrace{\int_0^L \left(\frac{\delta}{b} \phi_x + \frac{\gamma}{b} \psi_x \right) \left(i\lambda \rho \overline{\varphi} + b \overline{\phi_x} + \rho \overline{f^2} \right) dx}_{:=J_1} + \underbrace{\mu \int_0^L \left| \lambda \frac{J}{b} \psi \right| |u_x| dx}_{:=J_2} \\ &\quad + \underbrace{\mu \int_0^L \left| \frac{\xi}{b} \phi \right| |u_x| dx + \mu \int_0^L \left| \frac{\tau}{b} \psi \right| |u_x| dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^L |f^4| |u_x| dx}_{:=J_3}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Desenvolvendo o termo J_1 , obtemos

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^L \left(\frac{\delta}{b} \phi_x + \frac{\gamma}{b} \psi_x \right) \left(i\lambda \rho \bar{\varphi} + b \bar{\phi}_x + \rho \bar{f}^2 \right) dx = i\lambda \frac{\rho \delta}{b} \int_0^L \phi_x \bar{\varphi} dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx \\ &+ \frac{\rho \delta}{b} \int_0^L \phi_x \bar{f}^2 dx + i\lambda \frac{\rho \gamma}{b} \int_0^L \psi_x \bar{\varphi} dx + \gamma \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx + \frac{\rho \gamma}{b} \int_0^L \psi_x \bar{f}^2 dx. \end{aligned}$$

Substituindo (3.57) na equação acima, temos

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\rho \delta}{b} \int_0^L (\psi_x + f_x^3) \bar{\varphi} dx + i\lambda \frac{\rho \gamma}{b} \int_0^L \psi_x \bar{\varphi} dx + \gamma \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\rho \delta}{b} \int_0^L \phi_x \bar{f}^2 dx \\ &+ \frac{\rho \gamma}{b} \int_0^L \psi_x \bar{f}^2 dx \leq \rho \int_0^L \left| \frac{\delta}{b} \psi_x \right| |\varphi| dx + \rho \int_0^L \left| \frac{\lambda \gamma}{b} \psi_x \right| |\varphi| dx + \gamma \int_0^L |\psi_x| |\phi_x| dx \\ &+ \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\rho \delta}{|b|} \int_0^L |\phi_x| |f^2| dx + \frac{\rho \gamma}{|b|} \int_0^L |\psi_x| |f^2| dx + \frac{\rho \delta}{|b|} \int_0^L |f_x^3| |\varphi| dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \rho \left(\int_0^L \left| \frac{\delta}{b} \psi_x \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} + \rho \left(\int_0^L \left| \frac{\lambda \gamma}{b} \psi_x \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\varphi|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ \gamma \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \rho \frac{\delta^2}{|b|^2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \rho \frac{|\lambda|^2 \gamma^2}{|b|^2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \gamma \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{1}{2} \gamma \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Dessa maneira, fazendo uso do Lema 3.5 e de (3.60) em (3.68), encontramos

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq C_\varepsilon \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + C_\varepsilon |\lambda|^2 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
&+ C \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \leq C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \\
&+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Agora iremos desenvolver o termo J_2 . Para isso, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Young, obtendo assim

$$\begin{aligned}
J_2 &= \mu \int_0^L \left| \lambda \frac{J}{b} \psi \right| |u_x| dx \leq \mu \left(\int_0^L 2 \left| \frac{\lambda J}{b} \psi \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L \frac{1}{2} |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{2} \mu \frac{2|\lambda|^2 J^2}{|b|^2} \int_0^L |\psi|^2 dx + \frac{\mu}{4} \int_0^L |u_x|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Aplicando (3.60) em (3.70), encontramos o seguinte resultado

$$J_2 \leq C |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{\mu}{4} \int_0^L |u_x|^2 dx. \tag{3.71}$$

Agora, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e Young em J_3 , obtemos

$$\begin{aligned}
J_3 &= \mu \int_0^L \left| \frac{\xi}{b} \phi \right| |u_x| dx + \mu \int_0^L \left| \frac{\tau}{b} \psi \right| |u_x| dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^L |f^4| |u_x| dx \\
&\leq 2\mu \frac{\xi^2}{|b|^2} \int_0^L |\phi|^2 dx + \frac{\mu}{4} \int_0^L |u_x|^2 dx + 2\mu \frac{\tau^2}{|b|^2} \int_0^L |\psi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Então, usando (3.60) e o Lema 3.5, obtemos

$$J_3 \leq \frac{\mu}{4} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.72)$$

Substituindo (3.69), (3.71) e (3.72) em (3.67), temos

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \left(\frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{4}\right) \int_0^L |u_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx &\leq \varepsilon \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + C |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

concluindo assim, a prova do nosso Lema. ■

Lema 3.7. *Seja $U = (u, \varphi, \phi, \psi)'$ a solução do sistema (3.1)-(3.4), então para qualquer $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$, tal que*

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq C |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

para $|\lambda|$ suficientemente grande e sendo C uma constante positiva que não depende de λ .

Prova. Iniciando, multiplicamos a equação (3.56) por \bar{u} , e integramos em $(0, L)$, obtendo assim

$$i\lambda\rho \int_0^L \varphi \bar{u} dx - \mu \int_0^L u_{xx} \bar{u} dx - b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx = \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx.$$

Usando (3.55), integral por partes e condições de fronteira na igualdade anterior, temos que

$$\rho \int_0^L \varphi \left(-\bar{\varphi} - \bar{f}^1 \right) dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx - b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx = \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx,$$

logo,

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx = \mu \int_0^L |u_x|^2 dx - \underbrace{b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx}_{:=J_4} - \rho \int_0^L \varphi \bar{f}^1 dx - \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx. \quad (3.73)$$

Para o desenvolvimento do termo J_4 , aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, Poincaré e Young, a fim de obter

$$\begin{aligned} J_4 &= -b \int_0^L \phi_x \bar{u} dx \leq |b| \int_0^L |\phi_x| |u| dx \leq C \left(\int_0^L |\phi_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Substituindo (3.74) em (3.73), obtemos

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + C \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx - \rho \int_0^L \varphi \bar{f}^1 dx - \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx.$$

Fazendo o uso dos Lemas 3.5 e 3.6, encontramos

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq \frac{3\mu}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx + C \int_0^L |\phi_x|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

ou seja,

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq 3\varepsilon \rho \int_0^L |u_x|^2 dx + C |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$$

$$+C_\varepsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Desse modo, obtemos que

$$(1 - 3\varepsilon)\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto, temos o seguinte resultado

$$\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq C|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon|\lambda|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

o que nos permite concluir a prova do nosso Lema. ■

Diante dos lemas demonstrados anteriormente, agora já estamos em condições de enunciar e provar o principal resultado desta seção, que é dado pelo seguinte Teorema.

Teorema 3.8. *Seja $S(t) = e^{At}$, um C_0 -semigrupo limitado sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} , com gerador infinitesimal A , dado em (3.3), tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então o C_0 -semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.4) é polinomialmente estável, ou seja*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(A)}, \forall U_0 \in \mathcal{D}(A), \quad (3.75)$$

além disso, esta taxa de decaimento é ótima.

Prova. Para iniciar, usamos integral por partes na equação (3.73), obtendo como resultado

$$\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \phi \bar{u}_x dx = \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + \rho \int_0^L \varphi \bar{f}^1 dx + \rho \int_0^L f^2 \bar{u} dx,$$

logo,

$$\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L \phi \bar{u}_x dx \leq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.76)$$

Somando-se (3.62) e (3.76), encontramos

$$\begin{aligned} & \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L (\bar{u}_x \phi + u_x \bar{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx \\ & \leq \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Usando o Lema 3.7 em (3.77), obtemos

$$\begin{aligned} & \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L (\bar{u}_x \phi + u_x \bar{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx \\ & \leq C |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

De (3.60), (3.78) e do Lema 3.7, concluímos que

$$\begin{aligned}
 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \underbrace{\rho \int_0^L |\varphi|^2 dx}_{\text{(Lema 3.7)}} + \underbrace{J \int_0^L |\psi|^2 dx}_{\text{(3.60)}} + \underbrace{\mu \int_0^L |u_x|^2 dx}_{\text{(3.78)}} \\
 &+ \underbrace{b \int_0^L (\bar{u}_x \phi + u_x \bar{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx}_{\text{(3.78)}} \\
 &\leq C|\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
 &+ C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, usando a desigualdade de Young e escolhendo $|\lambda|$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que existe uma constante positiva M , que não depende de λ , tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M|\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

de onde segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Usando a equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, temos como resultado

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \mathcal{O}(|\lambda|^{-2}), \quad \text{com } |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Então, usando o Teorema 2.11, obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \mathcal{O}(t^{-1/2}),$$

ou seja, existe uma constante positiva M , que satisfaz

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{M}{\sqrt{t}}.$$

Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então temos que o nosso operador \mathcal{A} é sobrejetivo, portanto a equação $-\mathcal{A}U = F$, possui uma única solução $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Sendo assim,

$$\|F\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} = \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}.$$

Portanto,

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}}\|F\|_{\mathcal{H}} \Rightarrow \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

provando assim que o sistema é polinomialmente estável.

Para provarmos que a taxa de decaimento é ótima, iremos usar argumentos de contradição. Desse modo, vamos supor que a taxa $t^{-\frac{1}{2}}$ pode ser melhorada para uma taxa da forma $t^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}$ com $0 < \varepsilon < 2$. Dessa forma, isto significa dizer que existe uma constante $M > 0$, tal que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{M}{t^{1/(2-\varepsilon)}}. \quad (3.79)$$

Agora, aplicando o Teorema 2.3, temos que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\varepsilon}}\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M, \text{ quando } |\lambda| \rightarrow \infty,$$

na qual implica, que para todo $F \in \mathcal{H}$ e usando a equação resolvente, resulta que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\varepsilon}}\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R}, \lambda \neq 0. \quad (3.80)$$

Por outro lado, suponhamos que exista uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, para $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, tal que

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n,$$

Então, podemos considerar para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = (0, \text{sen}(\frac{n\pi}{L}x), 0, 0)'$ e $U_n = (u, \varphi, \phi, \psi)'$, e devido as condições de contorno dadas para U_n , temos a seguinte forma para $u = A \text{sen}(\frac{n\pi}{L}x)$,

$\phi = B \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Sendo assim, escolhendo

$$\lambda = \lambda_n := \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} = \mathcal{O}(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

e seguindo os mesmos passos feitos na demonstração do Teorema 3.3, podemos concluir que

$$|\lambda|^{-2+\varepsilon} \|U_n\|_{\mathcal{H}} \geq \mathcal{O}(n^\varepsilon) \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

o que contradiz (3.80). Portanto, a taxa não pode ser melhorada, e assim concluímos a prova do nosso Teorema. ■

Resultados Numéricos para Modelos Elásticos Porosos

Neste capítulo vamos estudar os aspectos numéricos-computacionais para modelos elásticos porosos dissipativos no caso unidimensional.

4.1 Fundamentação Teórica

O ser humano, em seu processo de evolução, sempre esteve dedicado na busca de analisar e compreender os problemas da natureza, gerando assim a busca por respostas, ou mesmo soluções, dos diversos problemas existentes nas mais variadas formas da ciência, tais como, física, química, matemática e engenharia, dentre outras. A maioria desses problemas podem ser reduzidos, representados ou mesmo manipulados por uma equação diferencial, seja ela ordinária ou parcial. Para tais problemas, existem vários métodos numéricos computacionais que visam obter um resultado mais próximo, ou mesmo satisfatório, quando comparados ao desenvolvimento do problema feito analiticamente. A ideia básica dos métodos numéricos é o processo de semi-discretização (ou discretização), que reduz o problema contínuo, com dimensão infinita, em um problema semi-discreto (ou discreto) de dimensão finita, podendo assim ser resolvido computacionalmente.

Com o desenvolvimento dos recursos computacionais nas últimas décadas, a abordagem numérica de problemas envolvendo equações diferenciais tem recebido cada vez mais atenção dos pesquisadores. Podemos elencar o método das diferenças finitas (MDF), método dos elementos finitos (MEF) e o método dos volumes finitos (MVF), dentre os métodos numéricos geralmente usados para resolver equações diferenciais. O MDF que iremos abordar em nosso trabalho, apresenta uma formulação mais simples e intuitiva, utiliza malhas regulares (uniformes), enquanto que o MEF e o MVF são mais gerais e flexíveis à geometrias complexas.

Desde a década de 1940, matemáticos e engenheiros tentam de alguma forma desenvolver métodos numéricos para resolução de problemas cuja modelagem é feita por equações diferenciais. Vários métodos de diferenças já foram desenvolvidos, o mais antigo deles é o método de diferenças finitas (MDF) que desenvolveu-se a partir dos estudos de Courant, Lewis e Friedrichs, em 1928. Este método se baseia na aplicação local da expansão de uma função através da série de Taylor para aproximar as equações diferenciais, usando uma rede quadrada de linhas, necessárias para construir a discretização da equação diferencial. Este é o grande potencial do método ao manusear geometrias complexas em várias dimensões.

Com essa necessidade de resolver e analisar numericamente nosso problema, iremos nos apropriar do método de diferenças finitas, onde o domínio do problema apresentado no contínuo será substituído por uma série de pontos discretos, gerando uma malha uniforme, isto é, uma malha onde o espaçamento entre os nós são igualmente espaçados, o que nos permite calcular as incógnitas do nosso problema. Essa substituição no problema contínuo das nossas incógnitas, ou funções pela sua forma discreta, denomina-se discretização.

4.1.1 Convergência do Esquema Numérico

Uma questão importante que geralmente é abordada num esquema numérico, versa sobre o estudo da convergência numérica do método entre as soluções exatas e discretas, e as suas respectivas taxas de convergência.

Para uma melhor compreensão sobre a definição de convergência, denotamos por $\mathcal{F}u = 0$ sendo um operador diferencial parcial, cuja solução é dada por $u(x, t)$, e sendo u_j^n sua solução numérica.

Definição 4.1. Seja um esquema numérico em diferenças finitas expresso por $\mathcal{F}_{(\Delta x, \Delta t)}u(\Delta x, \Delta t) = 0$ e que aproxima uma equação diferencial parcial $\mathcal{F}u(x, t) = 0$, dizemos que este esquema

é convergente em cada ponto (x_j, t_n) , se para $(x_j, t_n) \rightarrow (x, t)$ temos que $u_j^n \rightarrow u$, quando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

Quando resolvemos numericamente uma equação diferencial parcial usando o método de diferenças finitas é importante que façamos um estudo sobre a sua convergência numérica, e neste sentido citamos o seguinte resultado:

Teorema 4.2. (Teorema da Equivalência de Lax) *Um esquema numérico de diferenças finitas é convergente se, e somente se, ele é consistente e estável.*

A seguir relacionamos os conceitos básicos inerentes a consistência e estabilidade na solução de uma EDP.

A consistência de um esquema numérico pode ser vista como uma noção local, que verifica a ordem, ou qualidade, da aproximação local. De modo particular, podemos dizer que o conceito de consistência relacionado a solução exata de um problema de valor inicial e de contorno deve satisfazer as equações de diferenças do método numérico usado, mas com uma certa margem de erro, que são decorrentes do uso das aproximações via série de Taylor.

Para uma melhor compreensão, seguem as seguintes definições (ver [12]):

Definição 4.3. Seja um esquema numérico em diferenças finitas expresso por $\mathcal{F}_{(\Delta x, \Delta t)}u(\Delta x, \Delta t) = 0$ e que aproxima uma equação diferencial parcial $\mathcal{F}u(x, t) = 0$, dizemos que este esquema é consistente se para qualquer função $u = u(x, t)$, suficientemente regular temos que

$$\mathcal{F}_{(\Delta x, \Delta t)}u(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0, \text{ quando } (\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0.$$

Outro fator importante na convergência de um método numérico versa sobre a estabilidade de um esquema que garante a limitação para acumulação sucessiva de erros ou perturbações na solução, ou seja, visa evitar o crescimento exponencial dos erros.

Para prosseguir, consideramos $e_j^n := u(x_j, t_n) - u_j^n$ o erro cometido em (x_j, t_n) , segue então:

Definição 4.4. Um esquema de diferenças finitas é estável se existe uma constante $M > 0$, tal que $|e_j^n| < M$, para todo j, n .

O uso do método de diferenças finitas que será abordado em nosso trabalho, nos apresentará uma certa restrição numérica em relação ao passo de tempo Δt , conforme será mostrado no Teorema 4.6. Desse modo, podemos dizer que nosso modelo elástico poroso deverá exigir alguma condição para determinarmos o seu critério de estabilidade e nesse sentido temos que estudar o desenvolvimento de propagação das ondas harmônicas, visando encontrar as suas frequências naturais associadas ao sistema em estudo, conforme [4, 36].

Ressaltamos aqui, no momento, que não iremos, trabalhar estas questões sobre convergência numérica, consistência e critério de estabilidade.

4.2 Método Numérico Explícito em Diferenças Finitas

Neste trabalho, consideramos o esquema numérico usando diferenças finitas com a finalidade de verificar numericamente os resultados analíticos estabelecidos anteriormente.

Para o problema posto em (3.1)-(3.4), iremos usar o método de diferenças finitas, sob a forma totalmente discreta, onde discretizamos simultaneamente a variável espacial x e a temporal t , e para as derivadas que aparecem, fazemos a substituição (ou aproximações) por fórmulas discretas de diferenças finitas, tornando assim, o nosso modelo totalmente discreto a partir da nossa equação diferencial parcial.

Para iniciar, definimos a seguinte malha computacional

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_J = J\Delta x < x_{J+1} = (J+1)\Delta x = L, \quad (4.1)$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_N = N\Delta t < t_{N+1} = (N+1)\Delta t = T, \quad (4.2)$$

onde $\Delta x = \frac{L}{J+1}$ e $\Delta t = \frac{T}{N+1}$ com $J, N \in \mathbb{N}$. Dessa forma, temos que $x_j = J\Delta x$ e $t_n = N\Delta t$, tais que $j = 0, 1, \dots, J+1$ e $n = 0, 1, \dots, N+1$. Iremos usar os seguintes operadores de diferenças finitas definidos no espaço e no tempo:

- **Esquema Progressivo (primeira ordem):**

$$\partial_x u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \quad \partial_t u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

- **Esquema Atrasado (primeira ordem):**

$$\bar{\partial}_x u_j^n := \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \quad \bar{\partial}_t u_j^n := \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

- **Esquema de Diferença Central (primeira ordem):**

$$\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (4.5)$$

- **Esquema de Diferença Centrada (segunda ordem):**

$$\bar{\partial}_x \partial_x u_j^n := \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \quad \bar{\partial}_t \partial_t u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (4.6)$$

De forma análoga a (4.3)-(4.6), obtemos as aproximações para a função ϕ na malha. Aqui denotamos por u_j^n e ϕ_j^n as suas aproximações numéricas para as soluções exatas u e ϕ , que trabalhamos na malha, respectivamente. De forma mais precisa, temos que $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ e $\phi_j^n \approx \phi(x_j, t_n)$. Ressaltamos aqui, que a construção desses operadores são baseados no uso da série de Taylor.

Para escrevermos o nosso sistema (3.1)-(3.4) num esquema de diferenças finitas, iremos primeiramente trabalhar na obtenção da discretização do termo ϕ_{xxt} , presente na equação (3.2), para isso usamos (4.6) e a derivada temporal atrasada de primeira ordem dada em (4.4), obtendo assim

$$\begin{aligned} \phi_{xxt} &\approx \bar{\partial}_t (\bar{\partial}_x \partial_x \phi_j^n) = \bar{\partial}_t \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\ &= \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} - 2 \frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} + \frac{\phi_{j-1}^n - \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \\ &= \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} - \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - 2\phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agora, mencionamos uma discretização não usual adotada para o termo ϕ presente na equação (3.2), onde usamos a seguinte aproximação

$$\phi(x_j, t_n) \approx \frac{\phi_{j+1}^n + 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{4}. \quad (4.8)$$

A discretização numérica dada em (4.8) tem sido usada a fim de evitar a presença de anomalia numérica (trancamento no cortante), conhecida como fenômeno de bloqueio na força de cisalhamento. Como consequência, a energia numérica associada ao sistema (3.1)-(3.4) será livre de sobreestimação. Este fenômeno acontece principalmente em estruturas elásticas tais com a viga de Timoshenko e Placas de Reissner-Mindlin-Timoshenko (ver [4]).

Consideremos o seguinte procedimento explícito de discretização total em diferenças finitas, obtido pela substituição dos operadores descritos em (4.3)-(4.8) no sistema (3.1)-(3.4), tais que

$$\rho \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + b \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad (4.9)$$

$$J \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \delta \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - b \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \xi \frac{\phi_{j+1}^n + 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{4} - \tau \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} - \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - 2\phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t}, \quad (4.10)$$

para todo $j = 1, \dots, J$ e $n = 1, \dots, N$. Visando simplificar nossos cálculos numéricos, nós consideramos condições de contorno homogêneas dadas por

$$u_0^n = u_{J+1}^n = 0, \quad \phi_0^n = \phi_{J+1}^n = 0, \quad \forall n = 1, \dots, N, \quad (4.11)$$

e apresentando condições iniciais discretizadas dadas por

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u(x_j, 0), \quad u_j^1 = u_j^0 + \Delta t u_t(x_j, 0), \quad \forall j = 1, \dots, J, \\ \phi_j^0 &= \phi(x_j, 0), \quad \phi_j^1 = \phi_j^0 + \Delta t \phi_t(x_j, 0), \quad \forall j = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Agora nosso objetivo é determinar os valores que explicitam u_j^{n+1} e ϕ_j^{n+1} . Dessa forma, começamos multiplicando a equação (4.9) por $\frac{\Delta t^2}{\rho}$, obtendo assim

$$\frac{\Delta t^2}{\rho} \rho \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\Delta t^2}{\rho} \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t^2}{\rho} b \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x}.$$

Isolando o termo u_j^{n+1} , segue que

$$u_j^{n+1} = \left(2 - \frac{2\mu\Delta t^2}{\rho\Delta x^2}\right) u_j^n + \frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - u_j^{n-1} + \frac{b}{2\rho} \frac{\Delta t^2}{\Delta x} (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n). \quad (4.13)$$

Agora, multiplicando a equação (4.10) por Δt^2 , temos

$$\begin{aligned} \Delta t^2 J \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} &= \Delta t^2 \delta \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \Delta t^2 b \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ &- \Delta t^2 \xi \frac{\phi_{j+1}^n + 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{4} - \Delta t^2 \tau \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \\ &+ \Delta t^2 \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} - \Delta t^2 \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - 2\phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t}. \end{aligned}$$

Organizando a equação acima, encontramos como resultado

$$\begin{aligned} J\phi_j^{n+1} &= 2J\phi_j^n - J\phi_j^{n-1} - 2\frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2}\phi_j^n + \frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2}(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) - \frac{b\Delta t^2}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &- 2\frac{\xi\Delta t^2}{4}\phi_j^n - \frac{\xi\Delta t^2}{4}(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) - \frac{\tau\Delta t}{2}\phi_j^{n+1} + \frac{\tau\Delta t}{2}\phi_j^{n-1} - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\phi_j^n \\ &+ \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) + 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\phi_j^{n-1} - \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}). \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= \left(\frac{2}{2J + \tau\Delta t}\right) \left[\left(2J - 2\frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2} - 2\frac{\xi\Delta t^2}{4} - 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\right) \phi_j^n + \left(-J + \frac{\tau\Delta t}{2} + 2\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\right) \phi_j^{n-1} \right. \\ &\left. + \left(\frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\xi\Delta t^2}{4} + \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}\right) (\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) - \frac{b\Delta t^2}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}) \right]. \end{aligned}$$

Dessa forma, a equação acima nos permite concluir

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= \frac{1}{2J + \tau\Delta t} \left[4 \left(J - \frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\xi\Delta t^2}{4} - \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \right) \phi_j^n + \left(-2J + \tau\Delta t + 4\frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \right) \phi_j^{n-1} \right. \\ &+ \left(2\frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\xi\Delta t^2}{2} + \frac{2\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \right) (\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) - \frac{b\Delta t^2}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \\ &\left. - \frac{2\gamma\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Usando (4.13) e (4.14), obtemos o seguinte sistema escrito explicitamente, que serve como procedimento recursivo de resolução, para todo $n > 0$.

$$u_j^{n+1} = A_1 u_j^n + B_1 (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - u_j^{n-1} + C_1 (\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} = & \frac{1}{\kappa} \left[A_2 \phi_j^n + B_2 \phi_j^{n-1} + C_2 (\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) + D_2 (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right. \\ & \left. + E_2 (\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}) \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde temos,

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 - \frac{2\mu\Delta t^2}{\rho\Delta x^2}, & B_1 &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}, & C_1 &= \frac{b}{2\rho} \frac{\Delta t^2}{\Delta x}, \\ A_2 &= 4 \left(J - \frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\xi\Delta t^2}{4} - \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2} \right), & B_2 &= -2J + \tau\Delta t + 4 \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}, \\ C_2 &= 2 \frac{\delta\Delta t^2}{\Delta x^2} - \frac{\xi\Delta t^2}{2} + 2 \frac{\gamma\Delta t}{\Delta x^2}, & D_2 &= \frac{-b\Delta t^2}{\Delta x}, & E_2 &= \frac{-2\gamma\Delta t}{\Delta x^2}, & \kappa &= 2J + \tau\Delta t. \end{aligned}$$

4.3 Discretização da Energia

A energia de soluções, totalmente discretizada, do sistema (4.9)-(4.12) é definida por

$$\begin{aligned} E^n := & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \mu \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right. \\ & + \delta \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) + \xi \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \\ & \left. + b \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) + b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

para todo $n = 1, \dots, N$. Com o propósito de mostrar o comportamento da energia E^n , temos a seguinte proposição:

Proposição 4.5. (Energia do modelo discretizada) Se $E(t)$ é a energia associada ao problema (4.9)-(4.12), então

$$\begin{aligned} \frac{E^n - E^{n-1}}{\Delta t} &= -\tau \Delta x \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\ &\quad - \gamma \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

para todo $n = 1, \dots, N$.

Prova. Para obtermos a energia (4.17) do sistema elástico poroso, procederemos em analogia como foi feito nos cálculos da energia do caso contínuo, ou seja, faremos o uso de alguns multiplicadores. Para iniciar, multiplicamos a equação (4.9) por $u_t \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$, e somamos o seu resultado no domínio discreto, para $j = 1, 2, \dots, J$. Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{j=1}^J \left[\rho \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right. \\ \left. - b \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right] = 0. \end{aligned}$$

Organizando a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1})}_{:=K_1} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1})}_{:=K_2} \\ &\quad - \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1})}_{:=K_3} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Agora, iremos trabalhar separadamente com cada termo K_i , para $i = 1, 2, 3$. Vejamos o desenvolvimento do termo K_1 .

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{u_j^{n+1} - u_j^n - u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \left[\frac{(u_j^{n+1} - u_j^n) - (u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} \right] (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^n + u_j^n - u_j^{n-1}) \\
 &\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^n + u_j^n - u_j^{n-1}) \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \left[\frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta t^2} (u_j^n - u_j^{n-1}) \right] \\
 &\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \left[\frac{(u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{(u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} (u_j^n - u_j^{n-1}) \right] \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2}{\Delta t^2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^n - u_j^{n-1})^2}{\Delta t^2} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \left[\frac{(u_j^n - u_j^{n-1})}{\Delta t^2} (u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)}{\Delta t^2} (u_j^n - u_j^{n-1}) \right]}_{=0}.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^{n+1} - u_j^n)^2}{\Delta t^2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \rho \frac{(u_j^n - u_j^{n-1})^2}{\Delta t^2} \\
 &\quad + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \rho \left[\frac{(u_0^{n+1} - u_0^n)^2}{\Delta t^2} - \frac{(u_0^{n+1} - u_0^n)^2}{\Delta t^2} + \frac{(u_0^n - u_0^{n-1})^2}{\Delta t^2} - \frac{(u_0^n - u_0^{n-1})^2}{\Delta t^2} \right].
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} \rho \left[\left(\frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\Delta t} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Desenvolvendo o termo K_2 :

$$\begin{aligned}
K_2 &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
&= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
&= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \left[\frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} - \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} \right] (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
&= \underbrace{-\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1}}_{:=K_4} \\
&+ \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1}}_{:=K_5}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Visando facilitar a compreensão do nosso problema, analisaremos os termos K_4 e K_5 , separadamente.

$$\begin{aligned}
K_4 &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} \\
&= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \left[\frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1} - \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1} \right] \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$K_4 = -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1},$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} K_4 &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_{j+1-1}^n)}{\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} \\ &\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1} \\ &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} \\ &\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1}, \end{aligned}$$

logo, podemos concluir que

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

De maneira análoga, mostramos para o nosso termo K_5 . Vejamos:

$$\begin{aligned} K_5 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1} \\ &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \left[\frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n-1} - \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n-1} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1}, \end{aligned}$$

de onde segue que,

$$K_5 = \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \mu \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} u_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n-1}.$$

Portanto, concluímos que

$$K_5 = -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n-1}. \quad (4.23)$$

Dessa forma, substituindo (4.22) e (4.23) em (4.21), encontramos

$$K_2 = \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n-1}. \quad (4.24)$$

Desenvolvendo o termo K_3 , temos que

$$\begin{aligned} K_3 &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2\Delta x} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\ &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(\phi_{j+1}^n + \phi_j^n - \phi_j^n - \phi_{j-1}^n)}{2\Delta x} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\ &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \left[\frac{(\phi_{j+1}^n + \phi_j^n) - (\phi_j^n + \phi_{j-1}^n)}{2\Delta x} \right] (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{-\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(\phi_{j+1}^n + \phi_j^n)}{2\Delta x} u_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(\phi_j^n + \phi_{j-1}^n)}{2\Delta x} u_j^{n+1}}_{:=K_6} \\
 &+ \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(\phi_{j+1}^n + \phi_j^n)}{2\Delta x} u_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(\phi_j^n + \phi_{j-1}^n)}{2\Delta x} u_j^{n-1}}_{:=K_7}. \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Para desenvolver os termos K_6 e K_7 , procedemos de forma análoga como feito em K_4 e K_5 , respectivamente. Sendo assim, encontramos os seguintes resultados

$$\begin{aligned}
 K_6 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
 &+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n+1}. \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_7 &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
 &- \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n-1}. \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Substituindo (4.26) e (4.27) em (4.25), obtemos

$$\begin{aligned}
 K_3 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
 &- \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
 &- \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n-1} \\
 &+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n+1}. \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

Agora, fazendo a substituição de (4.20), (4.24) e (4.28) em (4.19), encontramos

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \rho \left[\left(\frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\Delta t} \right)^2 \right] \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_{j+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1} \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{\Delta x^2} u_{j+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n-1} \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n-1} \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira (4.11) na equação acima, segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right)
\end{aligned}$$

$$-\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) + S_j^1 = 0, \quad (4.29)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} S_j^1 = & \frac{\Delta x}{2\Delta t} \rho \left[\left(\frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\Delta t} \right)^2 \right] \\ & - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n+1} \\ & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{\Delta x^2} u_{J+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \mu \frac{(u_1^n - u_0^n)}{\Delta x^2} u_0^{n-1} \\ & - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n-1} \\ & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{2\Delta x} u_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{2\Delta x} u_{J+1}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nossa próxima etapa, consiste em fazer a multiplicação da equação (4.10) por $\phi_t \approx \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t}$, e somamos o seu resultado no domínio discreto, para $j = 1, 2, \dots, J$. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} \Delta x \sum_{j=1}^J \left[J \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} - \delta \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right. \\ + b \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + \xi \frac{\phi_{j+1}^n + 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{4} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \\ + \tau \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} - \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \\ \left. + \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - 2\phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right] = 0. \end{aligned}$$

A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J J \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}_{:=K_8} \\ & - \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \delta \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}_{:=K_9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}_{:=K_{10}} \\
& + \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \xi \frac{\phi_{j+1}^n + 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{4} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}_{:=K_{11}} \\
& + \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \tau \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}_{:=K_{12}} \\
& - \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}_{:=K_{13}} \\
& + \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - 2\phi_j^{n-1} + \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1})}_{:=K_{14}} = 0. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Para desenvolver cada termo acima, usamos os mesmos procedimentos feitos anteriormente em K_1 , K_2 e K_3 . Para alguns termos, basta trocarmos as funções para obtermos os resultados desejados.

Dessa forma, para os termos K_8 e K_9 , temos respectivamente,

$$\begin{aligned}
K_8 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J J \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J J \left(\frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} J \left[\left(\frac{\phi_0^n - \phi_0^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \left(\frac{\phi_0^{n+1} - \phi_0^n}{\Delta t} \right)^2 \right]. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_9 &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \delta \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \delta \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \delta \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) \\
 & -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_{J+1}^n - \phi_J^n)}{\Delta x^2} \phi_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_1^n - \phi_0^n)}{\Delta x^2} \phi_0^{n+1} \\
 & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_{J+1}^n - \phi_J^n)}{\Delta x^2} \phi_{J+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_1^n - \phi_0^n)}{\Delta x^2} \phi_0^{n-1}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Desenvolvendo o termo K_{10} , segue que

$$\begin{aligned}
 K_{10} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_j^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\
 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n) + (u_j^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\
 &= \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{2\Delta x} \phi_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} \phi_j^{n+1}}_{:=K_{15}} \\
 & \quad - \underbrace{\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{2\Delta x} \phi_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J b \frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{2\Delta x} \phi_j^{n-1}}_{:=K_{16}}.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Realizando o desenvolvimento dos termos K_{15} e K_{16} , encontramos como resultado

$$\begin{aligned}
 K_{15} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \\
 & \quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_1^n - u_0^n)}{2\Delta x} \phi_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{2\Delta x} \phi_{J+1}^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
 K_{16} &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) \\
 & \quad + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_1^n - u_0^n)}{2\Delta x} \phi_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{2\Delta x} \phi_{J+1}^{n-1}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Fazendo a substituição das equações (4.35) e (4.36) em (4.34), temos que

$$\begin{aligned}
K_{10} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_1^n - u_0^n)}{2\Delta x} \phi_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{2\Delta x} \phi_{J+1}^{n+1} \\
&\quad + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_1^{n-1} - u_0^{n-1})}{2\Delta x} \phi_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_{J+1}^{n-1} - u_J^{n-1})}{2\Delta x} \phi_{J+1}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Para o desenvolvimento do termo K_{11} , seguimos os mesmos passos feitos em K_2 , obtendo assim

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \xi \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \xi \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{4} \phi_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{4} \phi_{J+1}^{n+1} \\
&\quad + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_1^{n-1} + \phi_0^{n-1})}{4} \phi_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_{J+1}^{n-1} + \phi_J^{n-1})}{4} \phi_{J+1}^{n-1}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Analisando o termo K_{12} , temos que

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \tau \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \tau \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \tau \frac{\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}}{2\Delta t} (\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}) \\
&= \Delta x \sum_{j=0}^J \tau \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \tau \frac{\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}}{2\Delta t} (\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}).
\end{aligned}$$

Sendo assim, a equação acima nos permite concluir que

$$K_{12} = \Delta x \sum_{j=0}^J \tau \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \tau \frac{\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}}{2\Delta t} (\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}). \quad (4.39)$$

Agora, iremos trabalhar no desenvolvimento do termo K_{13} .

$$\begin{aligned} K_{13} &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\ &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n - \phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\ &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} (\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}) \\ &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n+1} \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \gamma \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n-1}. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} K_{13} &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^n - \phi_0^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n+1} \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^n - \phi_J^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n+1} \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^n - \phi_0^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n-1} \\ &\quad - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^n - \phi_J^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n-1}. \quad (4.40) \end{aligned}$$

De forma análoga, procedemos para a obtenção do termo K_{14} , encontrando assim

$$K_{14} = \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^{n-1} - \phi_0^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^{n-1} - \phi_J^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n+1} \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^0 \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^{n-1} - \phi_0^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n-1} \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^{n-1} - \phi_J^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n-1}. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Somando as equações (4.40) e (4.41), temos que

$$\begin{aligned}
K_{13} + K_{14} &= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n+1} \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n-1} \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n+1} \\
&- \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^0 \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_j^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{j+1}^{n-1} + S_j^2 \tag{4.42}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
S_j^2 &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^n - \phi_0^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^n - \phi_J^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n+1} \\
&- \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^n - \phi_0^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^n - \phi_J^n}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n-1} \\
&- \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^{n-1} - \phi_0^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^{n-1} - \phi_J^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n+1} \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_1^{n-1} - \phi_0^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_0^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \gamma \frac{\phi_{J+1}^{n-1} - \phi_J^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \phi_{J+1}^{n-1}. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

De (4.42), obtemos

$$\begin{aligned}
K_{13} + K_{14} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \left[\frac{-\phi_{j+1}^n \phi_j^{n+1} + \phi_j^n \phi_{j+1}^{n+1} + \phi_{j+1}^n \phi_j^{n+1} - \phi_j^n \phi_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2 \Delta t} \right. \\
&\quad \left. \frac{-\phi_j^n \phi_j^{n-1} + \phi_{j+1}^n \phi_j^{n-1} - \phi_{j+1}^n \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^n \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_{j+1}^{n-1} \phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1} \phi_j^{n+1}}{\Delta x^2 \Delta t} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{-\phi_{j+1}^{n-1}\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n-1}\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1}\phi_j^{n-1} + \phi_j^{n-1}\phi_j^{n-1} + \phi_{j+1}^{n-1}\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}\phi_{j+1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta t} \right] + S_j^2 \\
 & = \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \left[\frac{(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] + S_j^2. \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo (4.32), (4.33), (4.37), (4.38), (4.39) e (4.44) na equação (4.31), encontramos

$$\begin{aligned}
 & \Delta x \sum_{j=0}^J \tau \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J J \left(\frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
 & \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \delta \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \delta \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) \\
 & \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_{j+1}^n}{2} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) \\
 & \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \xi \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \xi \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \\
 & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \left[\frac{(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right] + S_j^3 = 0, \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

onde denotamos

$$\begin{aligned}
 S_j^3 & = S_j^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_1^n - u_0^n)}{2\Delta x} \phi_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{2\Delta x} \phi_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} J \left(\frac{\phi_0^n - \phi_0^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
 & - \frac{\Delta x}{2\Delta t} J \left(\frac{\phi_0^{n+1} - \phi_0^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_{J+1}^n - \phi_J^n)}{\Delta x^2} \phi_{J+1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_1^n - \phi_0^n)}{\Delta x^2} \phi_0^{n+1} \\
 & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_{J+1}^n - \phi_J^n)}{\Delta x^2} \phi_{J+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \delta \frac{(\phi_1^n - \phi_0^n)}{\Delta x^2} \phi_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_1^n - u_0^n)}{2\Delta x} \phi_0^{n-1} \\
 & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} b \frac{(u_{J+1}^n - u_J^n)}{2\Delta x} \phi_{J+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{4} \phi_0^{n+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{4} \phi_{J+1}^{n+1} \\
 & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_1^n + \phi_0^n)}{4} \phi_0^{n-1} + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \xi \frac{(\phi_{J+1}^n + \phi_J^n)}{4} \phi_{J+1}^{n-1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \tau \frac{\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}}{2\Delta t} (\phi_0^{n+1} - \phi_0^{n-1}). \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

Agora, somando (4.45) com (4.29) e usando as condições de fronteira (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \delta \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \xi \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right) \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \rho \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J J \left(\frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \mu \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \delta \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} - \phi_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \xi \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1}}{2} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J b \left(\frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& = -\Delta x \sum_{j=0}^J \tau \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\
& - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \gamma \left[\frac{(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right].
\end{aligned}$$

Substituindo (4.17) na equação acima, obtemos a seguinte lei de dissipação no contexto numérico, obtido em analogia feita no caso contínuo.

$$\begin{aligned}
\frac{E^n - E^{n-1}}{\Delta t} &= -\tau \Delta x \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\
&- \gamma \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\frac{(\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n - \phi_{j+1}^{n-1} + \phi_j^{n-1})}{\Delta x^2 \Delta t} \right], \quad (4.47)
\end{aligned}$$

para todo $n = 1, \dots, N, N + 1$. Portanto, concluímos a prova da nossa proposição. \blacksquare

4.4 Positividade da Energia E^n

Nesta seção, vamos mostrar que o sistema elástico poroso (4.9)-(4.12) apresenta a sua energia de forma positiva, desde que o intervalo de tempo obdeça certas condições, como será mostrado no teorema a seguir.

Teorema 4.6. *Se $\Delta t \leq \min \left\{ \Delta x \sqrt{\frac{J}{\delta}}, \sqrt{\frac{J}{\xi}}, \Delta x \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \right\}$, então para toda solução não trivial do sistema discreto (4.9)-(4.10), com $\gamma = 0$ e $\tau = 0$, mais as condições de fronteira homogênea (4.11), temos que*

$$E^n \geq \left(\frac{\rho}{2\Delta t^2} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{J}{\Delta t^2} - \xi \right) \Delta x \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 + \left(\frac{\delta}{4\Delta x^2} \right) \Delta x \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n)^2 + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n)^2 \right] \geq 0, \forall n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.48)$$

Prova. Para atingir nosso objetivo, usaremos as seguintes identidades para as condições de fronteira do tipo Dirichlet.

$$\sum_{j=0}^J u_{j+1}^{n+1} u_{j+1}^n = \sum_{j=0}^J u_j^{n+1} u_j^n, \quad \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1})^2 = \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^{n+1})^2, \quad \sum_{j=0}^J (u_j^n)^2 = \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n)^2, \quad (4.49)$$

$$\sum_{j=0}^J \phi_{j+1}^{n+1} \phi_{j+1}^n = \sum_{j=0}^J \phi_j^{n+1} \phi_j^n, \quad \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1})^2 = \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^{n+1})^2, \quad \sum_{j=0}^J (\phi_j^n)^2 = \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^n)^2. \quad (4.50)$$

Da energia E^n , representada pela equação (4.17), obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{E^n}{\Delta x} &= \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{J}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \\ &+ \frac{\delta}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \\ &+ \frac{b}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} + \frac{b}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Da equação acima, temos que

$$\begin{aligned} \frac{E^n}{\Delta x} &= \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{J}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\ &+ \frac{\delta}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} + K_j^n, \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde definimos,

$$\begin{aligned} K_j^n &= \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \\ &+ \frac{b}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} + \frac{b}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Para prosseguir, usamos a seguinte desigualdade na equação acima

$$xy \geq -\frac{x^2}{2\varepsilon} - \varepsilon \frac{y^2}{2},$$

válida para todo x, y e $\varepsilon > 0$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} K_j^n &= \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J b \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} b \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \\ &\geq \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\sum_{j=0}^J b \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right)^2 \\ &- \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\sum_{j=0}^J b \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 K_j^n &\geq \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \\
 &\quad - \frac{b^2}{4\varepsilon} \left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 - \frac{b^2}{4\varepsilon} \left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon = \xi$ e sabendo que $\mu\xi \geq b^2$, fazemos a substituição na desigualdade anterior, obtendo assim

$$\begin{aligned}
 K_j^n &\geq \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \\
 &\quad - \frac{\mu\xi}{4\xi} \left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 - \frac{\mu\xi}{4\xi} \left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\xi}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right)^2 - \frac{\xi}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Organizando a equação acima, temos que

$$\begin{aligned}
 K_j^n &\geq -\frac{\mu}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{\mu}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\xi}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right)^2 + \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} - \frac{\xi}{4} \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right)^2 \\
 &= -\frac{\mu}{4} \left[\left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right)^2 - 2 \sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \left(\sum_{j=0}^J \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 \right] \\
 &\quad - \frac{\xi}{4} \left[\left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right)^2 - 2 \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} + \left(\sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} \right)^2 \right] \\
 &= -\frac{\mu}{4} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \frac{\xi}{4} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} + \phi_j^{n+1}}{2} - \frac{\phi_{j+1}^n + \phi_j^n}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu}{4} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta x} - \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \frac{\xi}{4} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^n}{2} + \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{2} \right)^2,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} K_j^n &\geq -\frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta x} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^n}{2} \right)^2 - \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Das identidades fornecidas em (4.49) e (4.50), temos que

$$\sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta x} \right)^2 = \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \right)^2, \quad \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^n}{2} \right)^2 = \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{2} \right)^2.$$

Substituindo as identidades acima em (4.52), encontramos

$$\begin{aligned} K_j^n &\geq -\frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{2} \right)^2 - \frac{\xi}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K_j^n \geq -\mu \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \xi \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{2} \right)^2. \quad (4.53)$$

Agora, fazendo a substituição (4.53) em (4.51), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{E^n}{\Delta x} &\geq \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{J}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\delta}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \\ &\quad + \left[-\mu \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \xi \sum_{j=0}^J \left(\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Dessa maneira, organizando a desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} \frac{E^n}{\Delta x} &\geq \left(\frac{\rho}{2\Delta t^2} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{J}{4\Delta t^2} \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 \\ &\quad + \frac{J}{4\Delta t^2} \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 - \frac{\xi}{4} \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}), \end{aligned}$$

encontrando assim,

$$\begin{aligned} \frac{E^n}{\Delta x} &\geq \left(\frac{\rho}{2\Delta t^2} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{J}{\Delta t^2} - \xi \right) \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 \\ &\quad + \underbrace{\frac{J}{4\Delta t^2} \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 + \frac{\delta}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1})}_{:=K_{17}}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Analisando o termo K_{17} , temos que

$$\begin{aligned} K_{17} &= \frac{J}{4\Delta t^2} \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 + \frac{\delta}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}) \\ &= \frac{J}{4\Delta t^2} \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 + \frac{2\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Desde que $\Delta t^2 \leq \frac{J}{2\delta} \Delta x^2$, então temos que $\frac{J}{4\Delta t^2} \geq \frac{2\delta}{4\Delta x^2}$ e usando este fato em (4.55), obtemos

$$\begin{aligned} K_{17} &\geq \frac{2\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 + \frac{2\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}) \\ &= \frac{2\delta}{4\Delta x^2} \left[\sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 + \sum_{j=0}^J (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}) \right] \\ &= \frac{\delta}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1})^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_j^n + (\phi_j^n)^2 + \phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + \phi_j^{n+1}\phi_j^n \right]. \end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira dada em (4.50), temos que

$$\begin{aligned}
K_{17} &\geq \frac{\delta}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1})^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_j^n + (\phi_j^n)^2 + \phi_j^{n+1}\phi_j^n - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + \phi_j^{n+1}\phi_j^n \right] \\
&= \frac{\delta}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1})^2 + (\phi_j^n)^2 - \phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - \phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n \right] \\
&= \frac{\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[2(\phi_j^{n+1})^2 + 2(\phi_j^n)^2 - 2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - 2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n \right] \\
&= \frac{\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1})^2 + (\phi_j^{n+1})^2 + (\phi_j^n)^2 + (\phi_j^n)^2 - 2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n - 2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n \right] \\
&= \frac{\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1})^2 - 2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n + (\phi_{j+1}^n)^2 + (\phi_{j+1}^n)^2 - 2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n + (\phi_j^n)^2 \right].
\end{aligned}$$

Sendo assim, da desigualdade anterior, encontramos

$$K_{17} \geq \frac{\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n)^2 + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n)^2 \right] \geq 0. \quad (4.56)$$

Diante deste resultado, façamos a substituição de (4.56) em (4.54), obtendo assim

$$\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} &\geq \left(\frac{\rho}{2\Delta t^2} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{J}{\Delta t^2} - \xi \right) \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 \\
&\quad + \frac{\delta}{4\Delta x^2} \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n)^2 + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n)^2 \right].
\end{aligned}$$

Dessa forma, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
E^n &\geq \left(\frac{\rho}{2\Delta t^2} - \frac{\mu}{\Delta x^2} \right) \Delta x \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{J}{\Delta t^2} - \xi \right) \Delta x \sum_{j=0}^J (\phi_j^{n+1} - \phi_j^n)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\delta}{4\Delta x^2} \right) \Delta x \sum_{j=0}^J \left[(\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n)^2 + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n)^2 \right], \quad (4.57)
\end{aligned}$$

finalizando assim a prova do nosso teorema. ■

4.5 Simulações Numéricas

Nesta seção, nossa atenção estará voltada em ilustrar graficamente por meio de simulações numéricas, os resultados analíticos obtidos anteriormente. Nosso estudo será feito sobre o esquema numérico (4.9)-(4.12) e sua energia E^n dada em (4.17).

Para realizar as simulações numéricas, nos apropriamos do recurso computacional conhecido como MATLAB. Este software nos propiciou criar e implementar uma rotina numérica a partir das equações (4.13) e (4.14), que foram escritas explicitamente através do uso do método numérico das diferenças finitas. Dessa forma, desenvolvemos um procedimento recursivo de resolução do nosso sistema, para todo $n > 0$, possibilitando assim mostrar graficamente o comportamento da energia (4.17).

Para os nossos experimentos numéricos iniciais, consideramos:

$$\begin{aligned} L = 1, T = 2, \mu = 20.1933, \rho = 15.7, \delta = 8.75 \times 10^{-2}, \\ J = 6.8 \times 10^{-2}, \xi = 135.658 \text{ e } b = 32.3393. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Para as condições iniciais assumimos que

$$\begin{aligned} u(x_j, 0) = \phi(x_j, 0) = 0, \\ u_t(x_j, 0) = \text{sen} \left(\nu \frac{\pi x_j}{L} \right), \phi_t(x_j, 0) = \text{sen} \left(\nu \frac{\pi x_j}{L} \right), \forall \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

A precisão do nosso sistema numérico (4.9)-(4.12), pode ser facilmente encontrada, através da lei da conservação da energia, quando assumimos os valores $\tau = \gamma = 0$ em (4.18), obtendo assim $E^n = E^0$, para $n = 1, 2, \dots, N + 1$, como podemos ver nas figuras (4.1) e (4.2).

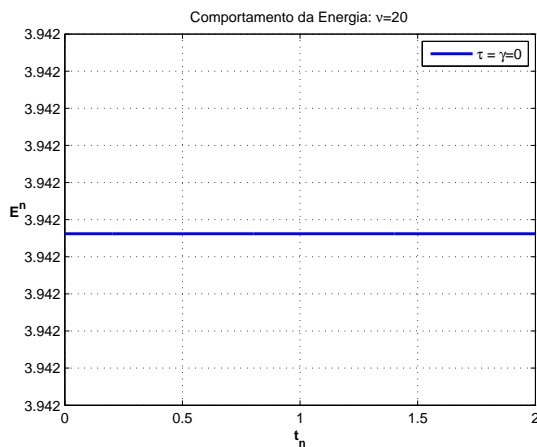


FIGURA 4.1

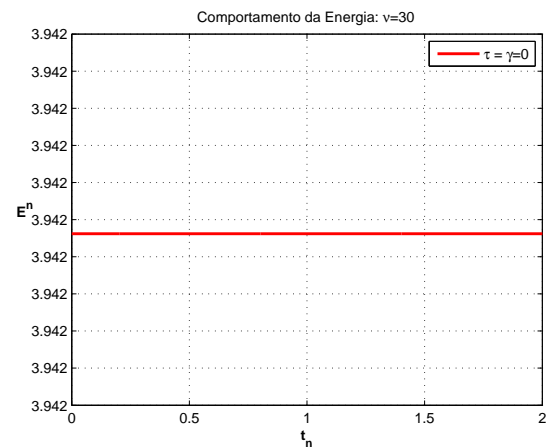


FIGURA 4.2

Agora fazemos uma análise gráfica do comportamento da energia (4.17) quando variamos a partição da malha, para os respectivos valores de $\Delta x = 1/20, 1/40, 1/60, 1/80, 1/100$ e $1/120$, onde assumimos (4.58), $\gamma = 0,0056$ e $\tau = 24$, sendo que os gráficos apresentados representam o decaimento polinomial, onde o lado esquerdo mostra o caso em que existe a seguinte relação entre os coeficientes, $\frac{\mu}{\rho} = \frac{\delta}{J}$, enquanto o lado direito representa o caso quando são diferentes, $\frac{\mu}{\rho} \neq \frac{\delta}{J}$.

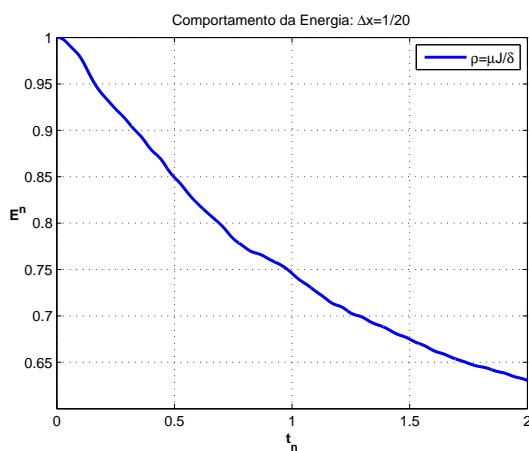


FIGURA 4.3

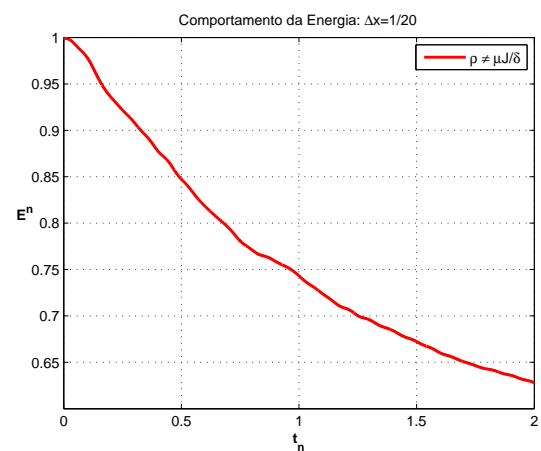


FIGURA 4.4

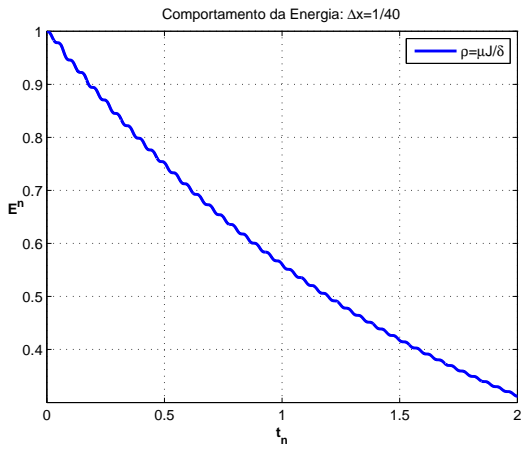


FIGURA 4.5

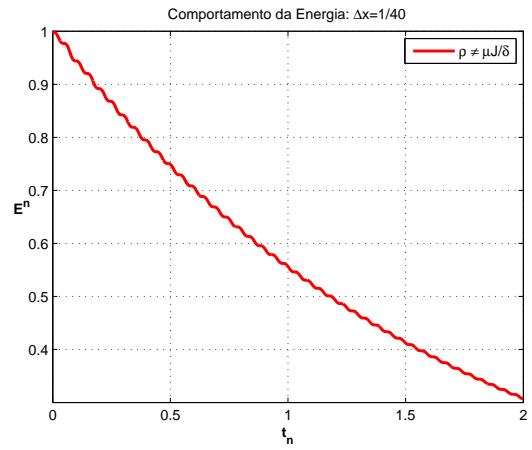


FIGURA 4.6

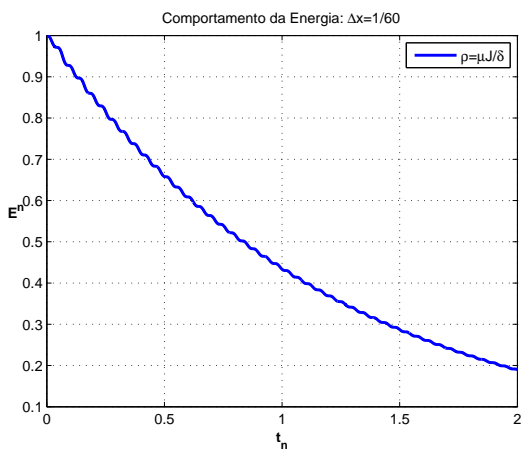


FIGURA 4.7

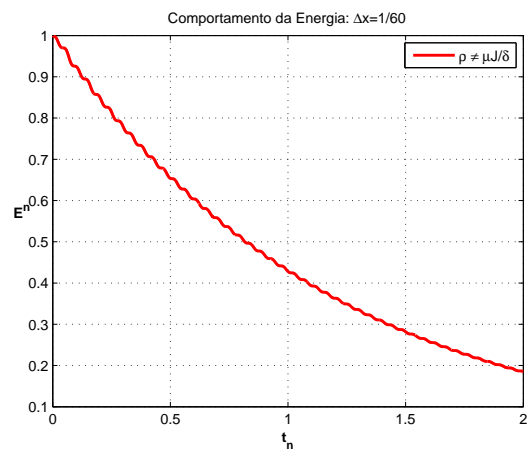


FIGURA 4.8

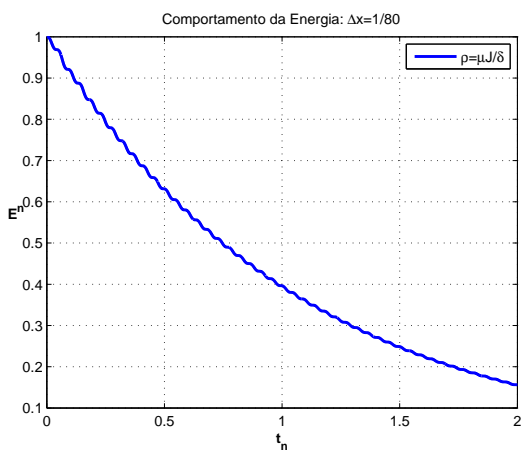


FIGURA 4.9

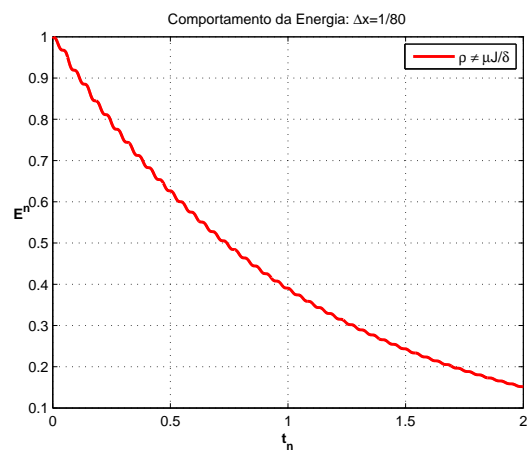


FIGURA 4.10

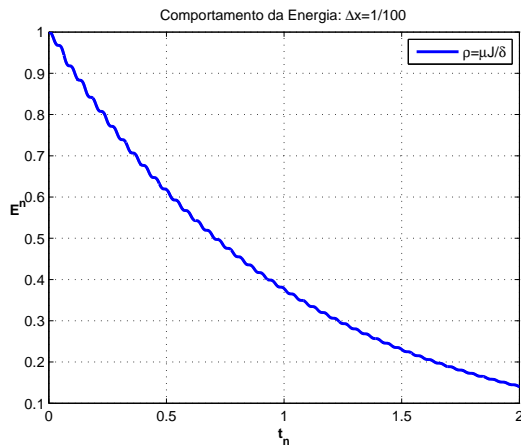


FIGURA 4.11

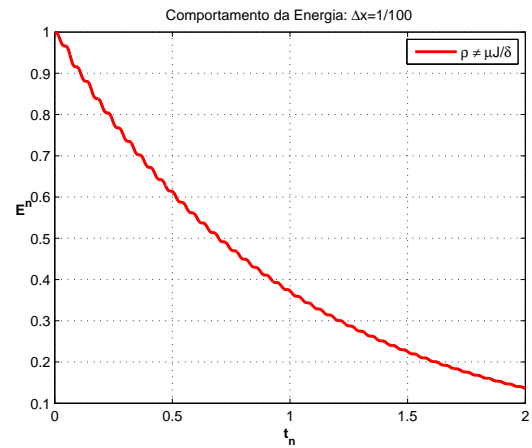


FIGURA 4.12

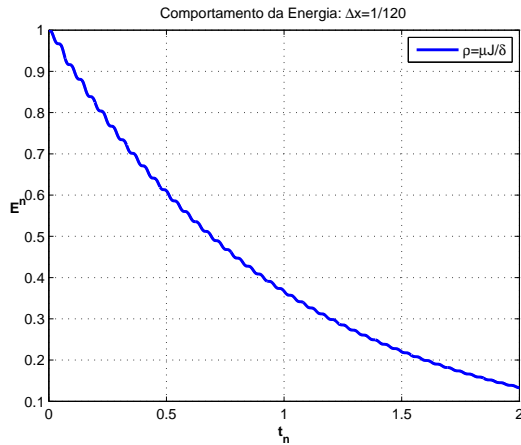


FIGURA 4.13

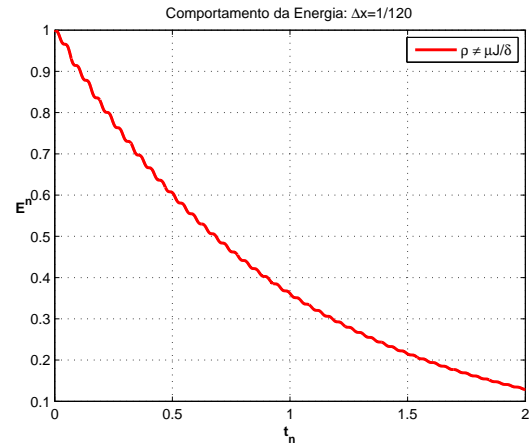


FIGURA 4.14

Para uma melhor compreensão dos gráficos expostos nas figuras (4.3)-(4.14), dispomos a tabela-1 abaixo, na qual fornece os valores das taxas para o decaimento polinomial quando variamos os valores de Δx , nos casos em que $\rho = \mu J/\delta$ e $\rho \neq \mu J/\delta$.

Δx	1/20	1/40	1/60	1/80	1/100	1/120
Taxa: caso $\rho = \mu J/\delta$	-0.12515	-0.29138	-0.41475	-0.46729	-0.49133	-0.50470
Taxa: caso $\rho \neq \mu J/\delta$	-0.12620	-0.29539	-0.42383	-0.47469	-0.49923	-0.51288

Sendo assim, a partir de uma análise comparativa dos gráficos e da tabela-1, podemos concluir que para o nosso esquema numérico (4.9)-(4.12) existe o decaimento polinomial, independentemente de qualquer relação existente entre os coeficientes μ , ρ , δ e J . Além disso, conseguimos verificar numericamente o resultado obtido no Teorema 3.8, ou seja, a comprovação de

que a sua taxa $t^{-1/2}$ é ótima.

4.5.1 Decaimento Exponencial

Durante o desenvolvimento deste trabalho, não conseguimos obter analiticamente o decaimento exponencial do sistema (3.1)-(3.4). Mas, ressaltamos agora, a possibilidade de mostrar graficamente a existência do decaimento exponencial do esquema numérico (4.9)-(4.12), desde que obedeça a condição $\rho = \mu J/\delta$, e que $\gamma \leq 10^{-n}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$.

Para realizar nossos experimentos numéricos, usamos:

$$\begin{aligned} L = 1, T = 2, \mu = 20.1933, \rho = 6.28, \delta = 5.6 \times 10^{-3}, \\ J = 1.7 \times 10^{-3}, \xi = 54.2636, b = 13.102 \text{ e } \tau = 3,841. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Agora façamos uma análise gráfica do comportamento da energia (4.17) quando variamos $\gamma = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-7}, 10^{-8}$ e assumimos (4.60).

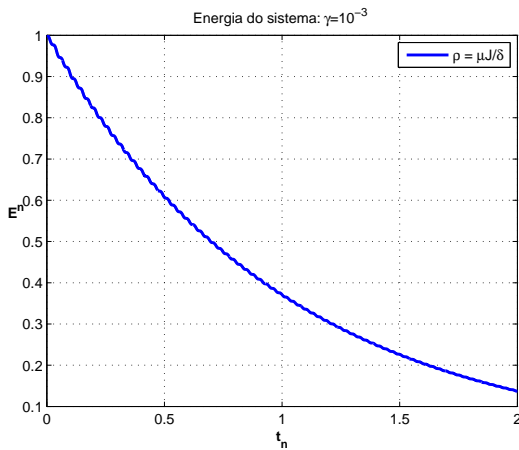


FIGURA 4.15

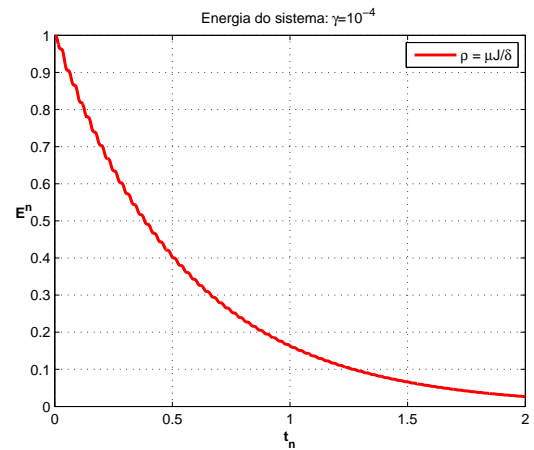


FIGURA 4.16

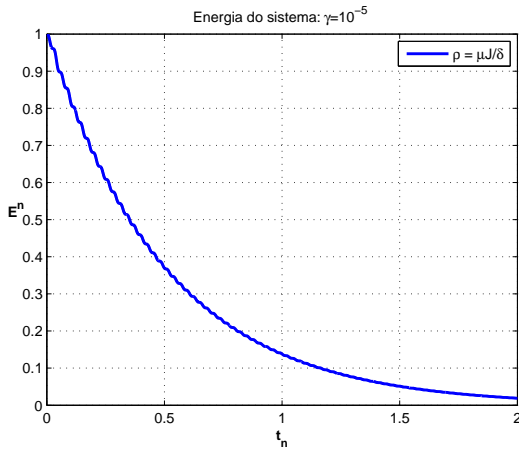


FIGURA 4.17

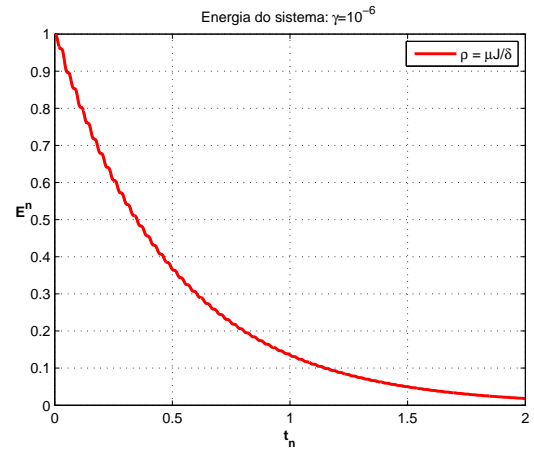


FIGURA 4.18

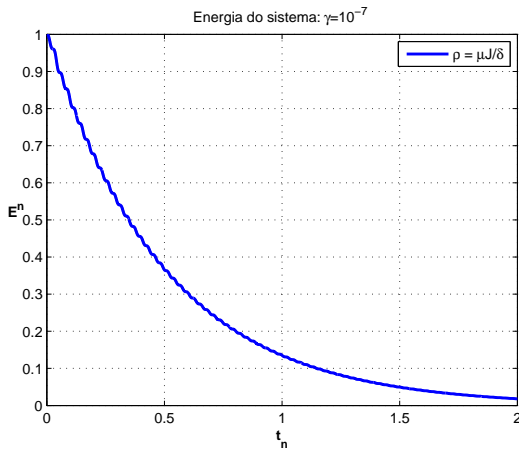


FIGURA 4.19

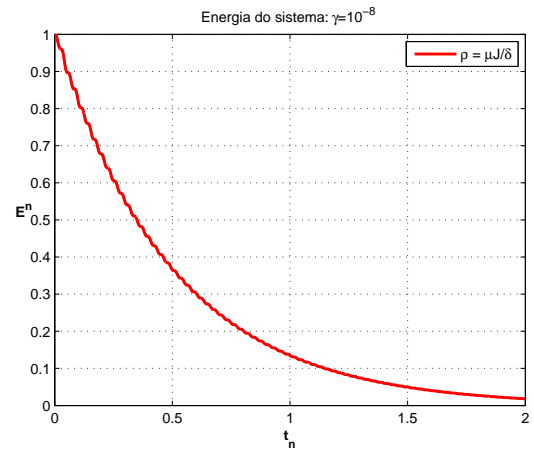


FIGURA 4.20

Diante dos gráficos expostos nas figuras (4.15)-(4.20), construímos a tabela-2, onde assumimos os valores de $\nu = 20$, $\Delta x = 1/120$, $\tau = 3,841$ e $\rho = \mu J/\delta$. Desse modo, fornecemos alguns valores obtidos, inerentes as taxas de decaimento exponencial, quando variamos os valores de γ .

γ	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
Taxa	-0.9936824	-1.817180	-1.987959	-2.007047	-2.0089787	-2.009172

Sendo assim, a partir de uma análise dos gráficos (4.15)-(4.20) e da tabela-2, observamos que a energia de soluções (4.17) com os dados (4.60) associado ao esquema numérico (4.9)-(4.12), apresenta um tipo de decaimento exponencial, quando $\rho = \mu J/\delta$ e fazemos $n \rightarrow \infty$.

Nosso objetivo agora é mostrar graficamente o comportamento assintótico da energia, considerando a condição (4.60) e assumindo o caso em que os coeficientes $\nu = 20$, e $\rho = \mu J/\delta$, mas agora fixamos $\gamma = 0,0001$ e variamos a partição da malha, para os valores de $\Delta x = 1/20, 1/40, 1/60, 1/80, 1/120$ e $1/200$.

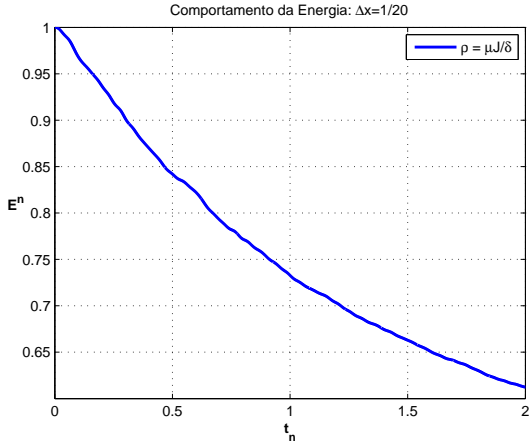


FIGURA 4.21

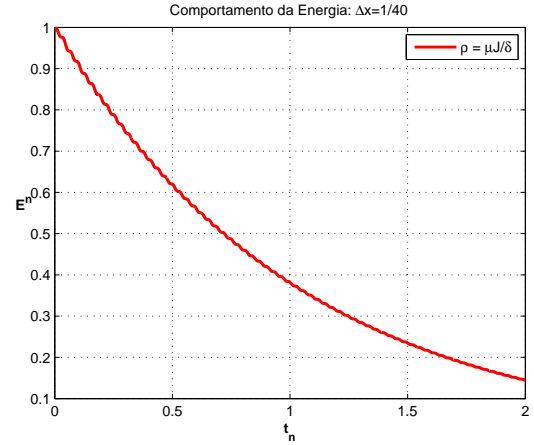


FIGURA 4.22

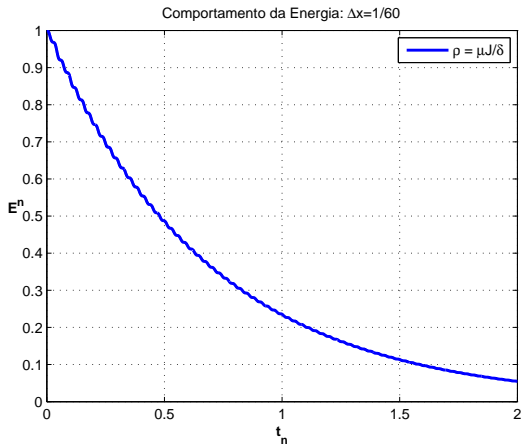


FIGURA 4.23

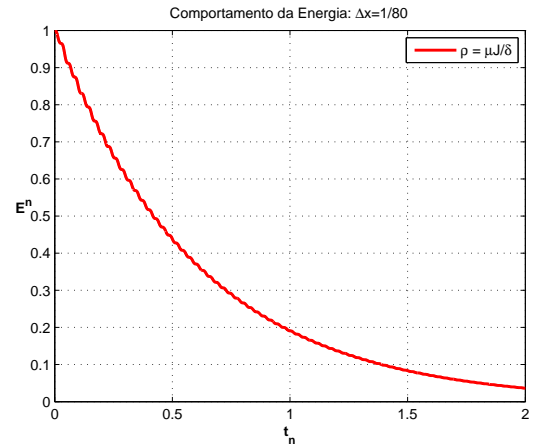


FIGURA 4.24

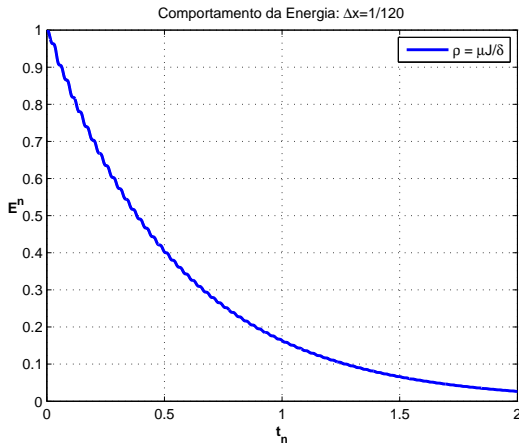


FIGURA 4.25

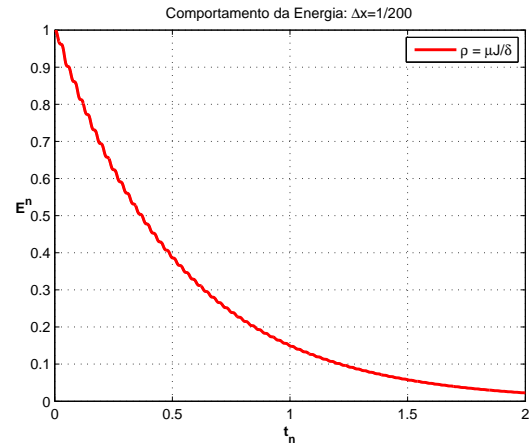


FIGURA 4.26

A partir dos gráficos expostos nas figuras (4.21)-(4.26), exibimos a tabela-3 a seguir, onde tomamos os valores de $\nu = 20$, $\gamma = 0,0001$, $\tau = 3,85$ e $\rho = \mu J/\delta$. Dessa maneira, fornecemos alguns valores obtidos para as taxas de decaimento exponencial, quando variamos os valores de Δx .

Δx	1/20	1/40	1/60	1/80	1/120	1/200
Taxa	-0.246	-0.9681	-1.4558	-1.6596	-1.8171	-1.9022

Dessa forma, analisando os gráficos (4.21)-(4.26) e comparando com a tabela-3, observamos que a energia de soluções (4.17) com a condição (4.60) associado ao esquema numérico (4.9)-(4.12), apresenta decaimento exponencial, quando $\rho = \mu J/\delta$, mas notamos que o valor de γ que assumimos é muito pequeno. Desse modo, provavelmente, deixa o sistema sobre a dependência do outro mecanismo dissipativo, ou seja, na dependência de τ .

Observação: Sabendo que $\gamma \leq 10^{-n}$, podemos notar, que fazendo com que $n \rightarrow \infty$, teremos que $\gamma = 0$ e neste caso, podemos obter o decaimento exponencial das soluções do sistema (4.9)-(4.12) usando um resultado devido a Gearhart, conforme foi mostrado no trabalho dos autores M. L. Santos, A. D. S. Campelo e D. S. Almeida Júnior [29].

Conclusão e Trabalhos Futuros

Iniciamos nossas pesquisas estimulados pelos trabalhos realizados na área de análise matemática, em especial, com ênfase no estudo do modelo conhecido como sistema elástico poroso. Primeiramente, mostramos que o sistema (2.1)-(2.5), apresentando a temperatura como único mecanismo dissipativo, possui perda de estabilidade exponencial e decaimento polinomial, como foi mostrado nas Seções 2.4 e 2.6, respectivamente, desde que esteja condicionado a relação $\mu/\rho \neq \delta/J$, caso contrário, se $\mu/\rho = \delta/J$ mostramos que este sistema apresenta decaimento exponencial, visto na Seção 2.5.

Outra conclusão que chegamos, foi sobre o estudo do sistema elástico poroso (3.1)-(3.4), onde este apresentava dois mecanismos dissipativos, um sob a forma de dissipação porosa e a outra viscoelástica. Mostramos que este sistema dissipativo apresentou uma perda de estabilidade exponencial, e este fato não está condicionado a nenhuma relação existente entre os coeficientes μ , ρ , δ e J do sistema, tal resultado encontra-se na Seção 3.4.

Outro resultado importante deste trabalho, foi ter conseguido mostrar que o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.4) possui decaimento polinomial, independentemente de qualquer relação existente entre os coeficientes μ , ρ , δ e J e ainda mais, mostramos que sua taxa é ótima, tal resultado foi mostrado na Seção 3.5.

Já no Capítulo 4, mostramos os resultados numéricos para o nosso modelo elástico poroso, onde conseguimos obter simulações numéricas que mostram graficamente o decaimento polinomial do nosso modelo estudado na Seção 3.5, e ainda, mostramos numericamente que o decaimento exponencial, quando condicionado a relação $\mu/\rho = \delta/J$ só ocorre para o nosso modelo quando $\gamma \leq 10^{-4}$, sendo um valor muito pequeno. Dessa forma, podemos inferir numericamente, que para ocorrer o decaimento exponencial do sistema (4.9)-(4.12), este deve estar sob a dependência, ou mesmo controle do outro mecanismo dissipativo.

Alguns questionamentos durante o estudo deste trabalho foram surgindo naturalmente, e aqui são citados, para possíveis desenvolvimento no futuro.

- A falta de decaimento exponencial continua sendo válida para o sistema elástico poroso (2.1)-(2.5) e (3.1)-(3.4), usando condições de fronteira dadas por outras formas, tais como:

$$1) u_x(0, t) = u(L, t) = \phi(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0,$$

$$2) u(0, t) = u_x(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

- Para obter o critério de estabilidade do sistema (4.9)-(4.12), quais condições para Δt devemos impor, de modo que este exista.
- No sistema (3.1)-(3.4) se tivermos a presença de dois mecanismos dissipativos, dados por τu_t e γu_{xxt} , agindo na primeira equação, do deslocamento do material elástico sólido, como se comportará este sistema?

Estas dúvidas mencionadas acima, além de outras, serão apenas uma parte dos temas que pretendo estudar e ao mesmo tempo me motivar nessa longa jornada que pretendo seguir, o caminho da pesquisa.

Referências Bibliográficas

- [1] ABDALLAH, F.; GHADER, M.; WEHBE, A. *Stability results of a distributed problem involving Bresse system with history and/or Cattaneo law under fully dirichlet or mixed boundary conditions*. <http://arxiv.org/abs/1601.00166v1>.
- [2] BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*. *Math. Ann.* (2010) 347:455-478, DOI 10.1007/s00208-009-0439-0.
- [3] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Dunod, Paris, 2005.
- [4] CAMPELO, A. D. S.; JÚNIOR, D. S. A.; SANTOS, M. L.; RIVERA, J. E. M. *Stability to the dissipative Reissner-Mindlin-Timoshenko acting on displacement equation*, *European Journal of Applied Mathematics*, v. 27, p. 57-193, 2016.
- [5] CASAS, P. S.; QUINTANILHA, R. *Exponential decay in one-dimensional porous-thermoelasticity*. *Mechanics Research Communications*. 32, 652-658, 2005.
- [6] CATTANEO, C. *Sulla conduzione del calore*. *Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*. 3, 83-101, 1948.
- [7] COWIN, S. C. *The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids*, *J. Elasticity*. 15, 185-191, 1985.
- [8] FATORI, L. H.; MONTEIRO, R. N.; SARE, H. D. F. *The Timoshenko system with history and Cattaneo law*. *Applied Mathematics and Computation* 228, 128-140, 2014.

-
- [9] GEARHART, L. M. *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert Space. Transactions of the American Mathematical Society.* 236, 385-394, 1978.
- [10] GOODMAN, M. A.; COWIN, S. C. *A Continuum Theory for Granular Materials. Arch. Ration. Mech. Anal.* 44, 249-266, 1972.
- [11] HUANG, F. L. *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems Hilbert spaces. Annals of Differential Equations.* 1, 43-56, 1985.
- [12] JÚNIOR, D. S. A. *Estabilidade Assintótica e Numérica de sistemas dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2009.*
- [13] JÚNIOR, D. S. A.; SANTOS, M. L.; RIVERA, J. E. M. *Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force. Z. Angew. Math. Phys.* 65, 1233-1249, 2014.
- [14] LIU, Z.; ZHENG, S. *Semigroups Associated with Dissipative Systems. In CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, 1999.*
- [15] MAGAÑA, A.; R. QUINTANILHA. *On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials. International Journal of Solids and Structures.* 43, 3414-3427, 2006.
- [16] NUNZIATO, J. W.; COWIN, S. C. *A Nonlinear Theory of Elastic Materials with Voids. Arch. Ration. Mech. Anal.* 72, 175-201, 1979.
- [17] PAMPLONA, P. X.; RIVERA, J. E. M.; QUINTANILHA, R. *Analyticity in porous-thermoelasticity with microtemperatures. J. Math. Anal. Appl.* 394, 645-655, 2012.
- [18] PAMPLONA, P. X.; RIVERA, J. E. M.; QUINTANILHA, R. *Stabilization in elastic solids with voids. J. Math. Anal. Appl.* 350, 37-49, 2009.
- [19] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New-York, 1983.*
- [20] PRÜSS, J. *On the spectrum of C_0 -semigroups. Transactions of the American Mathematical Society.* 284, 847-857, 1984.
- [21] QUINTANILLA R. *Slow Decay for One-Dimensional Porous Dissipation Elasticity. Applied Mathematics Letters* 16, 487-491, 2003

- [22] RIVERA, J. E. M. *Introdução a Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*, LNCC, Petrópolis, 2005.
- [23] RIVERA, J. E. M.; QUINTANILHA, R. *On the time polynomial decay in elastic solids with voids*. *J. Math. Anal. Appl.* 338, 1296-1309, 2008.
- [24] ROCHA, G. L.; AGUIAR, A. R. *Modelo Elástico-Linear de sólido poroso transversalmente isotrópico*. *ISSN 1809-5860*.
- [25] SAID-HOUARI, B.; HAMADOUCHE, T. *The asymptotic behavior of the Bresse-Cattaneo system*. *World Scientific Publishing Company. Communications in Contemporary Mathematics*, 2015.
- [26] SAID-HOUARI, B.; KASIMOV, A. *Damping by heat conduction in the Timoshenko system: Fourier and Cattaneo are the same*. *J. Differential Equations*. 255, 611-632, 2013.
- [27] SANTOS, M. L.; JÚNIOR, D. S. A. *On porous-elastic system with localized damping*. *Accepted for publication in Z. Angew. Math. Phys.*
- [28] SANTOS, M. L.; JÚNIOR, D. S. A.; RIVERA, J. E. M. *The stability number of the Timoshenko system with second*. *J. Differential Equations*. 253, 2715-2733, 2012.
- [29] SANTOS, M. L.; A. D. S. CAMPELO; JÚNIOR, D. S. A. *Asymptotic behaviour for porous-elastic system weakly dissipative*.
- [30] SANTOS, M. L.; A. D. S. CAMPELO; JÚNIOR, D. S. A. *On the decay rates of porous elastic systems*.
- [31] SANTOS, M. L.; A. SOUFYANE; JÚNIOR, D. S. A. *Asymptotic behavior to Bresse system with past history*. *Quart. Appl. Math.* 2015; 73:23-54.
- [32] SARE, H.D. F.; RACKE, R. *On the stability of damped Timoshenko systems: Cattaneo versus Fourier law*, *Arch. Rational Mech. Anal.* 194, 221-251, 2009.
- [33] SOUFYANE, A. *Energy decay for porous-thermo-elasticity systems of memory type*. *Appl. Anal.* 87, 451-464, 2008.
- [34] SOUFYANE, A.; AFILAL, M.; AOUAM, T.; CHACHA, M. *General decay of solutions of a linear one-dimensional porous-thermoelasticity system with a boundary control of memory type*. *Nonlinear Analysis*. 72, 3903-3910, 2010.

-
- [35] SOUFYANE, A.; AFILAL, M.; CHACHA, M. *Boundary Stabilization of Memory Type for the Porous-Thermo-Elasticity System. Abstract and Applied Analysis Volume 2009, Article ID 280790. doi.org/10.1155/2009/280790.*
- [36] WRIGHT, J. P. *Numerical stability of a variable time step explicit method for Timoshenko and Mindlin type structures, Commun. Numer. Methods Eng. 14,81-86 (1998).*