UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Tese de Doutorado

Existência e multiplicidade de soluções para problemas do tipo anisotrópico.

Júlio Roberto Soares da Silva

Dezembro de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Júlio Roberto Soares da Silva

Existência e multiplicidade de soluções para problemas do tipo anisotrópico.

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação ampla UFPA - UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Dezembro de 2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586e Silva, Júlio Roberto Soares da.
Existência e multiplicidade de soluções para problemas do tipo anisotrópico. / Júlio Roberto Soares da Silva. — 2018.
vii, 70 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

1. Equações elípticas não-lineares anisotrópicas. 2. Método variacional. 3. Crescimento crítico. 4. Localmente Lipschitz. 5. Método de Sub e supersolução. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Júlio Roberto Soares da Silva

Existência e multiplicidade de soluções para problemas do tipo anisotrópico.

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA/UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Universidade de Brasília- UnB

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Universidade Federal do Pará - PPGME/PDM/UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
Universidade Federal do Pará - PPGME/PDM/UFPA

F Corrêa

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Prof. Dr. Gustavo Ferron Madeira
Universidade Federal de São Carlos - UFSCAR

Dedicatória

A minha amada família, Maria de Fátima, Adenilza, Irmãos.

Agradecimentos

Ao meu Deus, pela misericórdia, pela graças alcançadas. Por aliviar meu fardo nos momentos de angústia e incerteza. O Senhor seja louvado.

À minha mãe, Maria de Fátima Soares da Silva, pela boa criação e educação que sempre me deu, por ter sido incansável em apoiar-me em tudo que precisei, e por proporcionar-me consciência e bom senso para fazer as escolhas corretas.

A meu amor, esposa, amiga, companheira, Adenilza Nunes Soares da Silva, que nas horas mais difíceis desta caminhada sempre deu o seu melhor para que os obstáculos fossem superados. Incentivo nos momentos mais difíceis e pela paciência e compreensão na minha ausência do convívio familiar.

A meu orientador, Professor Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, a quem sou eternamente grato por aceitar-me como seu orientando e orientar-me, com muita atenção, dedicação, paciência e eficiência. Na verdade, foi muito mais do que um orientador e graças ao seu imenso conhecimento matemático, proporcionou-me mais esta conquista, sinto-me honrado pela oportunidade e por ter a honra de ser seu aluno e o privilégio de ter obtido mais essa formação acadêmica sob a sua orientação.

A meus irmãos, que sempre se dispuseram a me ajudar em tudo.

À professora Rúbia Gonçalves Nascimento pela ótima orientação, no mestrado .

A meus amigos, mestres e professores, João Pablo Pinheiro da Silva e Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, que através de seus ensinamentos contribuiram em minha formação.

A meu amigo Professor Gelson Conceição Gonçalves dos Santos por sua atenção, ajuda, conselhos e sugestões para o meu trabalho.

Aos profesores da Faculadade de Matemática, do PPGME e do PDM, pelas conversas acadêmicas, disciplinas ministradas e momentos compartilhados, meus agradecimentos ao Professor Dilberto.

Ao Departamento de Matemática da UnB, pela estrutura física que me foi disponibilizada durante a minha estadia, foi de grande importância para meus estudos.

Aos Professores da UFPa-Campus de Cametá, pela aprovação de meu pedido de afastamento para estudos, em especial aos professores Daniele Esteves, Elany Maciel e Rubenvaldo Monteiro, pela amizade e incentivo.

A meus amigos, que de uma forma especial fizeram parte de minha jornada, Andréia, Bruno, Bráulio, Claudionei, Elany, Ítalo, João, Mirelson, Marcos Cardoso, Willian Cintra, Suellem Arruda e Laila Fontinelles.

Ao Jesiel por todos os momentos, quando da nossa chegada à Brasília.

À Carmen e Carol pela imensa ajuda durante o curso e pela grande amizade.

A Capes por disponibilizar o portal com as revistas que são de fundamental importância para quem pesquisa longe das grandes bibliotecas.

A Univesidade Federal do Pará, pela oportunidade de estudos e qualificação profissional.

Aos professores Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa, Gelson Conceição Gonçalves dos Santos, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, Gustavo Ferron Madeira e Rúbia Gonçalves Nascimento, por aceitarem participar da banca examinadora desta Tese e contribuir para a melhoria da mesma.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de problemas anisotrópicos

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = g(x,u)\,\text{em}\,\Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e estudaremos uma classe de sistema anisotrópico, da forma

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) & = & G_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) & = & G_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u,v > 0 \quad \text{em } \Omega, & & \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, & & \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 3$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$. Os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem $p_i > 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1$ e $p^* := N/\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1\right) = N\overline{p}/N - \overline{p}$.

Neste trabalho $\overline{p}$ denota a média harmônica $\overline{p} = N/\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$. As hipóteses sobre as funções g, G_u e G_v serão descrita ao longo do nosso trabalho.

Palavras-chaves: Equações elipticas não-lineares anisotropicas, Método variacional, crescimento crítico, Localmente Lipschitz, Método de Sub e super solução, Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this work, we will study existence and multiplicity of positive solutions for the following class Anisotropic problems

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = g(x,u)\,\text{em}\,\Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

and we will study the following class of system anisotropic problem given by

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = G_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = G_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain smooth, $N \geq 3$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$. The exponents $p_i^{\prime s}$ satisfy $p_i > 1$, $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1$, $p_1 < p_2 < ... < p_N$ and $p^* := N/\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} - 1\right) = N(\overline{p}/(N-\overline{p})$. In this paper $\overline{p}$ denotes the harmonic mean $\overline{p} = N/\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}$. The functions f, F_u e F_v will be described throughout our work.

Key-words: nonlinear anisotropic elliptic equations,Variational methods, Critical exponents, locally lipschitz, Sub-supersolution method, Mountain Pass Theorem.

Conteúdo

Introdução

Os estudos das questões relacionadas com existência, não existência e multiplicidade de soluções para algumas classes de problemas de fronteira, envolvendo equações diferenciais parciais elípticas não-lineares, modelam problemas que interessam às várias áreas das ciências básicas, tais como: Biologia (dinâmica de população), Química (Fenômenos Glaciais), Física (Fluidos não-Newtonianos). Além disso, tais estudos desenvolveram, e ainda desenvolvem, diversas áreas da Matemática, como a Análise e a Geometria. Os problemas que estudaremos nesta tese são temas que têm sido, nos últimos anos, objeto de investigação por diversos pesquisadores, e podem ser caracterizados por:

i) Investigar a existência de soluções (fracas, fortes, clássicas, radiais, etc) para problemas não-lineares e não-homogêneos em domínios limitados e não limitados, via teoremas da Análise Funcional Não-Linear.

ii) Investigar questões de existência e multiplicidade de soluções, via argumentos de sub e supersolução e o Teorema do Passo da Montanha.

Em nosso trabalho, estamos dedicados ao estudo da seguinte classe de problemas elípticos anisotrópicos,

$$(P)\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = g(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

e um sistema associado

$$(S)\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = G_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = G_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 3$. Os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem

$$1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_N, \ \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} > 1 \text{ e } p^* := N/\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} - 1\right) = N\overline{p}/(N - \overline{p}). \tag{1}$$

As hipóteses sobre as funções g, G_u e G_v serão descritas posteriormente. Em nossos argumentos $\overline{p}$ denota a média harmônica $\overline{p} = N/\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$.

Em geral, esses problemas são chamados problemas anisotrópicos, porque apresentam derivadas parciais em diferentes direções.

Em particular, quando $p_i = 2$ temos $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \Delta u$ e $p_i = p$ obtemos $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \Delta_p u$. Ambos os casos são chamados de isotrópicos e estes tipos de problemas foram estudados por muitos autores. Sem esperança de sermos minuciosos, mencionamos alguns artigos sobre o estudo destes problemas: [6], [21] e [27] (veja também as suas referências).

Problemas anisotrópicos têm uma forte motivação física. Eles emergem da descrição matemática da dinâmica de fluidos com diferentes condutividades em diferentes direções, veja [71]. Eles também aparecem na Biologia como um modelo que descreve a disseminação de uma doença epidêmica em ambientes heterogêneos, veja [22]. Também surgem em aplicações em processamento de imagem, veja [72]. Para mais informações, veja [10], [20], [22] e [23].

Tanto do ponto de vista das aplicações quanto do ponto de vista matemático, o estudo dos problemas anisotrópicos tem atraído a atenção de vários pesquisadores nos últimos anos. Em [2], os autores estudaram um problema anisotrópico onde a não-linearidade possui crescimento subcrítico e crítico. Eles mostraram resultados de existência de solução, utilizando várias técnicas como minimização, monotonicidade (sub e supersoluções) e Teorema do Passo da Montanha.

Em [37], foram estudadas as questões de existência, não existência e multiplicidade de soluções positivas para essa classe de problemas elípticos quaselineares anisotrópicos com a não-linearidade do tipo $f(t) = t^{q-1}$ com $p_1 < q < p_N$. Questões de existência e regularidade de soluções para esta classe de problemas, como as tratadas em [37], também foram estudadas em [38] e [39].

Em [44], os autores mostraram resultados de multiplicidade de soluções envolvendo crescimento crítico e Teoria de Gênero e em [43], os autores estudaram uma generalização do conhecido Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [52], no caso anisotrópico. Usando este novo Princípio de Concentração e Compacidade, eles mostraram que para o expoente crítico, a melhor constante de Sobolev é atingida.

Motivados por todos esses trabalhos, nesta tese, estudaremos problemas anisotrópicos do tipo (P) e o sistema associado (S).

Nosso trabalho está organizado do seguinte modo: No Capítulo 1, estudaremos a existência de solução não-negativa para o seguinte problema

$$(P1)\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \;=\; f(x,u)+|u|^{p^*-2}u \text{ em } \Omega, \\ u=0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem (1).

Antes de enunciarmos as hipóteses sobre a função f, vamos recordar a definição de função $N-$mensurável. Recorde que uma função $g:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada $N-$mensurável quando a composição $g(.,v(.)):\Omega\to\mathbb{R}$ é mensurável, para cada função $v:\Omega\to\mathbb{R}$ mensurável, veja [28].

As hipóteses sobre a função $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são as seguintes:

(f_1) Existe $q\in(p_N,p^*)$, tal que, $|f(x,t)|\leq C_1(1+|t|^{q-1})$ em $\Omega\times\mathbb{R}$.

(f_2) Existe $\theta\in(p_N,p^*)$, tal que,

$$0\leq \theta F(x,t)=\theta\int_0^t f(x,s)ds \;\leq t\underline{f}(x,t) \text{ em } \Omega\times(0,+\infty),$$

onde

$$\underline{f}(x,t):=\lim_{\epsilon\downarrow 0} ess \inf_{|t-s|<\epsilon} f(x,s) \text{ e } \overline{f}(x,t):=\lim_{\epsilon\downarrow 0} ess \sup_{|t-s|<\epsilon} f(x,s)$$

são $N-$ mensuráveis.

(f_3) Existe um $\beta>0$ que será fixado posteriormente, tal que,

$$H(t-\beta)\leq f(x,t), \text{ em } \Omega\times(0,+\infty),$$

onde H é a função Heaviside, isto é,

$$H(t)=\begin{cases} 0 \;\; se \;\; t\leq 0 \\ 1 \;\; se \;\; t>0. \end{cases}$$

(f_4) $\displaystyle\limsup_{t\to 0^+}\frac{f(x,t)}{t^{p_N-1}}=0$ uniformemente em Ω e $f(x,t)=0$ se $t\leq 0$.

O Capítulo 1 completa os artigos mencionados anteriormente, no sentido de o problema (P1) apresentar combinações com não-linearidade descontínua e crescimento crítico. Pelo menos ao nosso entendimento, este é o primeiro trabalho nessa direção. O estudo do problema (P1) foi inspirado principalmente por [2], [16], [33], [37], [38], [39], [41] e [44].

Em [16], Badiale utilizou técnicas variacionais para funcionais não-diferenciáveis para obter uma solução não-trivial do problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + |u|^{2^*-2}u \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0 \ , u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Em [33], Figueiredo e Nascimento estudaram existência de soluções positivas para a seguinte classe de problemas do tipo $p\&q$-Laplaciano com expoente crítico e não-linearidade descontínua

$$\begin{cases} -div(a(|\Delta u|)|\Delta u|^{p-2}\Delta u) = f(u) + |u|^{q^*-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sobre} \partial\Omega. \end{cases}$$

Em [41], dos Santos e Figueiredo mostraram a existência de uma solução fraca não trivial para uma classe de problemas do tipo Kirchhoff envolvendo não-linearidade descontínua e o expoente crítico de Caffarelli-Kohn-Nirenberg,

$$\begin{cases} L(u) = |x|^{-\delta} f(x,u) + |x|^{-bp^*}|u|^{p^*-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, \ u \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^{-ap}), \end{cases}$$

onde

$$L(u) := -\Big[M\Big(\int_\Omega |x|^{-ap}|\nabla u|^p \, dx \ \Big)\Big] \operatorname{div}\big(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big).$$

Visto que, estamos considerando o operador anisotrópico, algumas estimativas são totalmente diferentes quando comparados a [16], [33] e [41]. Por exemplo, ver os Lemas 1.2 e 1.3 . Uma vez que, a função f pode ter pontos de descontinuidade, (veja o exemplo (1.1)), precisamos definir solução para $(P1)$, no sentido da teoria dos funcionais localmente Lipschitz, veja [29].

Uma solução fraca para o problema $(P1)$ é uma função $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx = \int_\Omega \rho_0 \phi \, dx + \int_\Omega (u^+)^{p^*-1}\phi \, dx, \ \forall \, \phi \in W_0^{1\overrightarrow{p}}(\Omega)$$

e algum $\rho_0(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))]$ $q.t.p.$ em Ω.

Agora enunciaremos o principal resultado do Capítulo 1:

Teorema 0.1 *Suponha que* $(f_1)-(f_4)$ *ocorrem. Então, o problema* $(P1)$ *tem uma solução não-negativa e não-trivial. Além disso, se* $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *é uma solução do problema* $(P1)$*, então* $|\{x \in \Omega; u(x) > \beta\}| > 0$.

No Capítulo 2, estudaremos existência e multiplicidade de solução positiva para o seguinte problema

$$(P2)\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = a(x)u + h(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem (1).

O estudo de $(P2)$, foi motivado principalmente por [1], [2] e [56] .

Em [1], os autores estudaram estimativas, a priori, para soluções de problemas elípticos anisotrópicos via simetrização e um resultado de comparação para soluções do problema

$$\begin{cases} -div(a(x,u,\nabla u)) = f(x) - div(g(x)) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ é uma função de Caratheodory.

Em [2], os autores estudaram o seguinte problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \lambda f(u) + g(u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

utilizaram o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha para mostrar a existência de solução não-trivial. Além disso, pelo menos para o nosso conhecimento, os autores utilizaram pela primeira vez (veja seção 5 em [2]) o método da sub e supersolução para um problema anisotrópico.

Em [56], os autores estudaram existência e multplicidade de soluções para um problema singular

$$\begin{cases} -\Delta_p u = a(x)u^{-\gamma} + \lambda f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0, \ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

Aplicando uma técnica de truncamento, os autores obtiveram a existência de uma solução pelo método de sub e supersolução e uma segunda solução foi obtida pelo Teorema do Passo da Montanha.

As principais hipóteses sobre as funções $a(x)$ e $h(x,t)$ são:

(a_1) A função $a \in L^\infty(\Omega)$ com $a(x) > 0$.

Assumiremos que a função h é uma função Carathéodory sobre $\Omega \times [0, \infty)$ e satisfaz as hipóteses abaixo:

(h_1) Existe $\delta > 0$, tal que,

$$h(x,t) \geq (1-t)a(x), \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

(h_2) Existe $1 < r < p^*$, tal que,

$$h(x,t) \leq a(x)(t^{r-1} + 1), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Os principais resultados do Capítulo 2 são os seguintes:

Teorema 0.2 *Suponha que* $(a_1), (h_1)$ *e* (h_2) *ocorram. Então, o problema* $(P2)$ *possui uma solução fraca positiva, se* $\|a\|_\infty$ *for pequena.*

Para estabelecermos a existência de duas soluções para o problema $(P2)$, consideramos a hipótese:

(h_3) Existem $t_0 > 0$ e $\theta > p_N$, tais que,

$$0 < \theta H(x,t) = \theta \int_0^t h(x,s)\,ds \leq t\,h(x,t), \text{ para todo } t \geq t_0 \text{ em } \Omega.$$

Teorema 0.3 *Suponha que as condições* (a_1) *e* $(h_1) - (h_3)$ *ocorram. Então, o problema* $(P2)$ *possui duas soluções fracas positivas, se* $\|a\|_\infty$ *for pequena.*

Destacaremos que nossos teoremas podem ser aplicados para a seguinte não-linearidade: Fixado $s_0 > 0$, a função

$$h(x,t) = \begin{cases} a(x)(1-t) \text{ se } t \in [0, s_0], \\ a(x)\big((1-s_0) + (t-s_0)^{r-1}\big) \text{ se } t \in (s_0, \infty), \end{cases}$$

satisfazem (h_1) e (h_2) para $\delta \in (0, s_0]$ e $r > 1$. Também, satisfazem $(h_1), (h_2)$ e (h_3) para $t_0 > 0$ e $r \in (p_N, p^*)$. Note que, para $s_0 > 1$, temos $h(x,t) < 0$ em $(1, s_0)$. As hipóteses (h_1) e (h_2), são satisfeitas por $h(x,t) = a(x)(1 + |t|^{r-1})$ também.

No Capítulo 3, o estudo de $(P3)$ é motivado principalmente por [2], [22] e [56], e com objetivo de completar o estudo feito no Capítulo 2, mostraremos a existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de sistema associado ao problema (P2),

$$(P3)\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = a_1(x)u + F_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = a_2(x)v + F_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem (1).

Em [56], os autores combinaram o método de sub e supersolução com minimização aplicando argumento de truncamento para o caso isotrópico. Em nosso estudo, o método de sub e supersolução combinado com truncamento feito para o caso escalar como no Capítulo 2 e [56] pode ser aplicado a sistema.

Em [22], os autores estudaram a existência de solução renormalizada para um sistema parabólico com difusividade anisotrópica e efeitos de transportes. Pelo menos ao nosso conhecimento, esse é o primeiro trabalho envolvendo uma classe de sistema elípticos com o operador anisotrópico.

As principais hipóteses sobre as funções a e F são:

As funções $a_j(x)$, com $j = 1, 2$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(H) A função $a_j \in L^\infty(\Omega)$ com $a_j(x) > 0$.

A função $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e satisfazendo.

(H_1) Existe $\delta > 0$, tal que,

$$F_s(x,s,t) \geq (1-s)\,a_1(x), \text{ para todo } 0 \leq s \leq \delta, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$F_t(x,s,t) \geq (1-t)\,a_2(x), \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

(H_2) Existe $1 < r < p^*$, tal que,

$$F_s(x,s,t) \leq a_1(x)(s^{r-1} + t^{r-1} + 1),$$

$$F_t(x,s,t) \leq a_2(x)(s^{r-1} + t^{r-1} + 1).$$

onde F_w é sua derivada parcial de F com respeito a w.

O primeiro resultado principal do Capítulo 3 é o seguinte teorema:

Teorema 0.4 *Suponha que $(H),(H_1)$ e (H_2) são satisfeitas. Suponha que $\|a_j\|_\infty$ seja pequena, para $j=1,2$, então, o sistema $(P3)$ possui uma solução fraca.*

Para o segundo resultado deste capítulo, vamos considerar a condição abaixo para provar a existência de duas soluções para o sistema $(P3)$.

(H_3) Existem $s_0, t_0 > 0$ e constantes $\theta_s, \theta_t > 0$, tais que,

$$0 < F(x,s,t) \leq \theta_1\, s\, F_s(x,s,t) + \theta_2\, t\, F_t(x,s,t), \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para todo } t \geq t_0 \text{ e } s \geq s_0$$

onde $\dfrac{1}{p^*} < \theta_1, \theta_2 < \dfrac{1}{p_N}$.

Teorema 0.5 *Suponha que $(H),(H_1)$, (H_2) e (H_3) são satisfeitas. Suponha que $\|a_j\|_\infty$ é pequena, para $j=1,2$, então o sistema (P3) possui duas soluções fracas.*

Finalizaremos nossos estudos com alguns apêndices. No Apêndice A, faremos um resumo da teoria dos funcionais $Lip_{loc}(W_0^{1,\vec{p}}(\Omega),\mathbb{R})$ e sobre o espaço de Sobolev anisotrópico. No Apêndice B, enunciaremos alguns resultados importantes utilizados ao longo deste trabalho e indicaremos suas referências para as consultas das demonstrações.

Objetivando uma melhor organização e facilidade da leitura, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os principais resultados, bem como as hipóteses sobre as funções f, F_u, F_v, h e a.

Notações

$\langle ., . \rangle :=$ par de dualidade.

$|\Omega| :=$ medida de Lebesgue do conjunto Ω.

$Lip_{loc}(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega))$: denota o espaço dos funcionais localmente lipschitzianos.

$suppu :=$ suporte de uma função u.

$u_+ := \max\{u, 0\}$.

$u_- := \min\{u, 0\}$.

$\blacksquare :=$ fim da demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário.

$\|u\|_s :=$ norma de u em $L^s(\Omega)$.

$\rightharpoonup :=$ convergência fraca.

$\|.\|_{1,\overrightarrow{p}} := \|.\|_{W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)}$.

$\int_\Omega f dx = \int_\Omega f(x) dx$.

$u = u(x)$.

$\partial B_\rho(0)$ fronteira da bola

$q.t.p. =$ quase em toda parte

Capítulo 1

Existência de solução positiva para uma classe de problemas elípticos anisotrópicos com crescimento crítico e não-linearidade descontínua

Neste capítulo, mostraremos um resultado de existência de solução fraca não-trivial e não-negativa para a seguinte classe de problemas

$$
(P1)\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(x,u) + |u|^{p^*-2}u \text{ em } \Omega, \\ u \geq 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 3$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$. Os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem $p_i > 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} > 1$ e $p^* := N/\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} - 1\right) = N\overline{p}/(N-\overline{p})$. Em nossos argumentos $\overline{p}$ denota a média harmônica $\overline{p} = N/\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}$.

O estudo desse tipo de problema é importante por vários motivos. Citaremos alguns: muitos problemas de fronteira livre, que surgem na Física Matemática, podem ser reduzidos a problemas de fronteira com não-linearidade descontínua. Tais classes de problemas representam uma variedade de situacões físicas relevantes. Alguns problemas representam modelos de soluções estacionárias para fenômenos químicos e biológicos e é bem conhecido que vários problemas relacionados à Física de Plasma originam equações com não-linearidade descontínua. Tais classes de problemas foram amplamente abordados em diversos artigos, entre os quais podemos citar [3], [4], [7], [8], [15], [16], [17], [18], [35] e suas referências.

Antes de enunciarmos as hipóteses sobre a função f, vamos recordar a definição de função $N-$mensurável. Recorde que uma função $g : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada $N-$mensurável quando a composição $g(.,v(.)) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, para cada função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável, veja [28].

As hipóteses sobre a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

(f_1) Existe $q \in (p_N, p^*)$, tal que, $|f(x,t)| \leq C_1(1 + |t|^{q-1})$ em $\Omega \times \mathbb{R}$.

(f_2) Existe $\theta \in (p_N, p^*)$, tal que,

$$0 \leq \theta F(x,t) = \theta \int_0^t f(x,s)ds \ \leq t\underline{f}(x,t) \text{ em } \Omega \times (0, +\infty),$$

onde

$$\underline{f}(x,t) := \lim_{\epsilon\downarrow 0} ess \inf_{|t-s|<\epsilon} f(x,s) \text{ e } \overline{f}(x,t) := \lim_{\epsilon\downarrow 0} ess \sup_{|t-s|<\epsilon} f(x,s)$$

que são $N-$ mensuráveis.

(f_3) Existe um $\beta > 0$, que será fixado posteriormente, tal que

$$H(t-\beta) \leq f(x,t), \text{ em } \Omega \times (0, +\infty),$$

onde H é a função Heaviside, isto é,

$$H(t) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ t \leq 0 \\ 1 \ \ se \ \ t > 0. \end{cases}$$

(f_4) $\displaystyle\limsup_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t^{p_N - 1}} = 0$ uniformemente em Ω e $f(x,t) = 0$ se $t \leq 0$.

Um exemplo típico de uma função satisfazendo as condições $(f_1) - (f_4)$ é dada por

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ t \in]-\infty, \frac{\beta}{2}[\ \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, \beta] \\ 1 \ \ se \ \ t \in \mathbb{Q} \cap [\frac{\beta}{2}, \beta] \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{l} \frac{|t|^{q_k - 1}}{\beta^{q_k - 1}} \ \ se \ \ t > \beta, \ l \geq 1 \ e \ q_k \in (p_N, p^*), \end{cases} \tag{1.1}$$

essa função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um conjunto não-enumerável de pontos de descontinuidades.

Antes de enunciarmos o resultado principal deste capítulo, precisamos definir solução fraca para $(P1)$ baseada na teoria dos funcionais localmente Lipschitz desenvolvida por

Chang [29], Clarke [31], Grossinho e Tersian [47], pois, f é somente mensurável, veja o exemplo (1.1).

Definição 1.1 *Uma solução fraca para o problema* $(P1)$ *é uma função* $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \rho_0 \phi\, dx + \int_\Omega (u^+)^{p^*-1}\phi\, dx,\ \forall\, \phi \in W_0^{1\overrightarrow{p}}(\Omega) \qquad (1.2)$$

e algum $\rho_0(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))]$ *q.t.p. em* Ω.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Suponha que* $(f_1)-(f_4)$ *ocorram. Então, o problema* $(P1)$ *possui uma solução não-negativa e não-trivial. Além disso, se* $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ *é uma solução do problema* $(P1)$*, então* $|\{x \in \Omega; u(x) > \beta\}| > 0$.

Abaixo listamos o que acreditamos que são os principais contribuições deste capítulo.

(i) Em [2], os autores estudaram um problema crítico com não-linearidade contínua. No nosso caso, a não-linearidade é descontínua, por isso, precisamos da teoria dos funcionais $Lip_{loc}(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \mathbb{R})$.

(ii) Além disso, em [2], usou-se o parâmetro λ para controlar o nível minimax. Como o nosso problema (P1) não possui o parâmetro λ, seguimos os argumentos de [16] e [41].

(iii) Em [16], é o operador isotrópico e em [41] é um operador do tipo Caffarelli-Konh-Nirenberg, em nosso trabalho o operador é anisotrópico, o que requer argumentos diferentes de [16] e [41], por exemplo, o uso da versão do Princípio de concentração e compacidade, veja [43], para operador anisotrópico.

(iv) Ressaltamos que o artigo referente aos resultados deste capítulo foi publicado em [32, Nonlinear Analysis: Real World Applications].

1.1 Resultados preliminares

A demonstração do Teorema 1.1 será baseada em uma versão não suave do Teorema do Passo da Montanha para funcionais Lip_{loc}, veja o Teorema A.1 no (Apêndice A). Para tal, vamos provar alguns lemas técnicos . O próximo lema é essencial em nosso trabalho. Ele é uma versão do Teorema 2.1 de [29].

Lema 1.1 *Seja* $\Psi_\beta(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx$ *, então* $\Psi \in Lip_{loc}(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \mathbb{R})$ *com* $\partial\Psi(u) \subset L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$*, isto é, dado* $\rho \in \partial\Psi(u)$ *existe* $\rho \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$*, tal que*

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \int_\Omega \rho\varphi dx, \ \forall\ \varphi \in L^q(\Omega) \ e \ \rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))], \ q.t.p. \ em \ \Omega.$$

Demonstração:: Veja Lema A.1.

O espaço onde trabalharemos é $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, onde $\overrightarrow{p} = (p_1, .., p_N)$ munido da norma

$$\|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p_i}.$$

Para mais informações sobre os espaços de Sobolev anisotrópico veja o (Apêndice A).

Para provarmos o Teorema 1.1, usaremos técnicas variacionais aplicadas ao funcional não-diferenciável definido por

$$I_\beta(u) = Q(u) - \Psi_\beta(u), \ u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \tag{1.3}$$

onde

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx - \frac{1}{p^*} \int_\Omega (u^+)^{p^*} dx \text{ e } \Psi_\beta(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$$

com

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)\, dt \text{ e } t^+ = \max\{0, t\}.$$

Pelo Lema 1.1, o funcional $I_\beta \in Lip_{loc}(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\partial I_\beta(u) = \{Q'(u)\} - \partial\Psi_\beta(u), \forall\, u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

No seguinte resultado, mostraremos que a condição de Palais-Smale para o funcional I_β, ocorre abaixo de certo nível c_β.

Lema 1.2 *O funcional* I_β *satisfaz a condição* $(PS)_{c_\beta}$ *para*

$$c_\beta < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*} \right) S^{\frac{p^*}{p^* - p_N}}. \tag{1.4}$$

onde

$$0 < S =: \inf_{u \in D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{p^*}=1} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p_i} \right\}, \quad veja\ [43].$$

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência $(PS)_{c_\beta}$ para I_β, então

$$I_\beta(u_n) \to c_\beta \text{ e } m_\beta(u_n) \to 0,$$

onde m_β é definido no Lema A.4, veja (Apêndice A).

Recorde que

$$I_\beta(u) = Q(u) - \Psi_\beta(u),\ u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega),$$

onde

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_i}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i} dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega (u^+)^{p^*} dx \ \text{ e } \ \Psi_\beta(u) = \int_\Omega F(x,u)dx.$$

Seja $\omega_n \subset \partial I_\beta(u_n)$ tal que $\|\omega_n\|_* = m_\beta(u_n) = o_n(1)$ e

$$\langle \omega_n, \varphi\rangle = \langle Q'(u_n), \varphi\rangle - \langle \rho_n, \varphi\rangle, \forall \varphi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \tag{1.5}$$

onde $\rho_n \in \partial \Psi_\beta(u_n)$, veja Lema 1.1.

Então,

$$\begin{aligned} c_\beta + 1 + \|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}} &\geq I_\beta(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle \omega_n, u_n\rangle \geq \left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta}\right)\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i} dx \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}\rho_n u_n - F(x,u_n)\right) dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{p^*} dx. \end{aligned}$$

Por (f_2) encontramos,

$$\frac{1}{\theta}\rho_n u_n(x) \geq \frac{1}{\theta}\underline{f}(x, u_n(x)) \geq F(x, u_n(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{1.6}$$

Dessa forma, obtemos,

$$c_\beta + 1 + \|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}} \geq \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i} dx. \tag{1.7}$$

Suponhamos, por contradição, que $\|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Então, sem perda de generalidades, podemos assumir que

$$\int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i} dx \geq 1,$$

para algum $i \in \{1, \cdots, N\}$, pois caso contrário $\|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}} \leq N$. Consideremos

$$\Big\|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\Big\|_{p_j} = \max\left\{\Big\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big\|_{p_i}; 1 \leq i \leq N\right\}$$

e $1 < p_1 \leq p_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, N\}$. Note que $\|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}} \leq N\left\|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_j}\right\|_{p_j}$, então concluímos que,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \geq \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\|_{p_j}^{p_j} \geq \frac{1}{N^{p_1-1}} \|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1}. \tag{1.8}$$

Assim,

$$c_\beta + 1 + \|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}} \geq \frac{1}{N^{p_1-1}} \left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1}.$$

Uma vez que $p_1 > 1$, concluímos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existe $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, tal que,

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), && (1.9)\\ u_n &\to u \text{ em } L^r(\Omega), && (1.10)\\ u_n(x) &\to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, && (1.11)\\ |u_n(x)| &\leq h(x) \in L^r(\Omega), \end{aligned}$$

onde $1 \leq r < p^*$. Por (f_4) e pela definição de I_β, podemos considerar $u_n(x), u(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω.

Além disso, usando uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (veja [43, corolário do Lema 5]), existem duas famílias $(\mu_i)_{i\in\Lambda}$ e $(\nu_i)_{i\in\Lambda}$ de números reais não-negativos e uma família $(x_i)_{i\in\Lambda}$ de pontos do $\mathbb{R}^N$, onde Λ é um conjunto de índices no máximo enumerável, tais que,

$$\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} \rightharpoonup \sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i} + \mu \tag{1.12}$$

e

$$|u_n|^{p^*} \rightharpoonup |u|^{p^*} + \nu, \tag{1.13}$$

no sentindo fraco* das medidas, onde

$$\mu \geq \sum_{j\in\Lambda} b_j \delta x_j, \ \nu = \sum_{j\in\Lambda} a_j \delta x_j, \ S a_j^{\frac{p_N}{p^*}} \leq b_j, \tag{1.14}$$

para todo $j \in \Lambda$ e δx_j é a massa de Dirac em $x_j \in \overline{\Omega}$.

Afirmamos que o conjunto Λ é vazio. De fato, suponha por contradição, que existe $i \in \Lambda$ e consideremos a aplicação $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$, tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $|\nabla\phi|_\infty \leq 2$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \quad B_1(0) \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \backslash B_2(0). \end{cases}$$

Para cada $\epsilon > 0$, defina

$$\psi_\epsilon = \phi\left(\frac{(x - x_i)}{\epsilon}\right).$$

Assim, $\psi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$ e $|\nabla\psi_\epsilon|_\infty \leq 2/\epsilon$,

$$\psi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \quad B_\epsilon(x_j) \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{2\epsilon}(x_j). \end{cases}$$

Observe que a sequência $(\psi_\epsilon u_n)$ é limitada em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Como (u_n) é uma sequência Palais Smale, obtemos,

$$\langle w_n, u_n\psi_\epsilon\rangle = o_n(1),$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial(u_n\psi_\epsilon)}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega \rho_n u_n\psi_\epsilon\,dx - \int_\Omega |u_n|^{p^*}\psi_\epsilon\,dx = o_n(1).$$

Então,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i}\psi_\epsilon\,dx \;&=\; -\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_n\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\,dx \\ &+\; \int_\Omega |u_n|^{p^*}\psi_\epsilon\,dx + \int_\Omega \rho_n u_n\psi_\epsilon\,dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Notando que $supp(\psi_\epsilon)$ é compacto e está contido em $B_{2\epsilon}(x_i)$, logo concluímos

$$-\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_n\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\,dx \leq \sum_{i=1}^N \int_{B_{2\epsilon}(x_i)} \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-1}\Big|u_n\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\Big|\,dx.$$

Da Desigualdade de Hölder e da limitação de (u_n) em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$

$$-\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_n\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\,dx \leq \sum_{i=1}^N \left(\int_{B_{2\epsilon}(x_i)} \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i}\right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} \left(\int_{B_{2\epsilon}(x_i)} \Big|u_n\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\Big|^{p_i}\,dx\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Por (1.10), usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big[\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_n\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}\,dx\Big] = 0. \tag{1.15}$$

Agora, pelo Lema 1.1 e por (f_1) temos

$$0 \leq \rho_n(x) \leq C_1(1 + |u_n(x)|^{q-1}) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{1.16}$$

Assim,

$$\int_\Omega \rho_n u_n\psi_\epsilon\,dx \leq C_1\int_\Omega |u_n|\psi_\epsilon\,dx + C_1\frac{1}{q}\int_\Omega |u_n|^q\psi_\epsilon\,dx,$$

para alguma constante C_1 positiva.

Por (1.10) e (1.12) obtemos

$$\int_\Omega \rho_n u_n \psi_\epsilon \, dx \leq C_1 \int_\Omega |u_n| \psi_\epsilon \, dx + C_3 \int_\Omega |u_n|^q \psi_\epsilon \, dx + o_n(1)$$

Consequentemente,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\lim_{n \to \infty} \int_\Omega \rho_n u_n \psi_\epsilon \, dx \right] = 0. \tag{1.17}$$

Segue de (1.12) e (1.13) que,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_\epsilon \, dx + \int_\Omega \mu \psi_\epsilon \, dx \leq \int_\Omega \rho_n u_n \psi_\epsilon \, dx + \int_\Omega |u|^{p^*} \psi_\epsilon \, dx + \int_\Omega \nu \psi_\epsilon \, dx. \tag{1.18}$$

Substituindo (1.17) em (1.18) resulta,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \psi_\epsilon \, dx + \int_\Omega \mu \psi_\epsilon \, dx \leq \int_\Omega |u|^{p^*} \psi_\epsilon \, dx \quad &+ \quad \int_\Omega \nu \psi_\epsilon \, dx \\ &+ \quad o_\epsilon(1) + o_n(1). \end{aligned}$$

Afirmamos que,

$$\int_\Omega |u|^{p^*} \psi_\epsilon \, dx \quad = \quad o_\epsilon(1), \tag{1.19}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \psi_\epsilon \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \quad = \quad o_\epsilon(1). \tag{1.20}$$

Para isso, basta notar que quando $\epsilon \to 0$,

$$|u(x)|^{p^*} \psi_\epsilon(x) \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \;\text{ e }\; \psi_\epsilon \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim,

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{j \in \Lambda} \nu_j \psi_\epsilon(x_j) - \sum_{j \in \Lambda} \mu_j \psi_\epsilon(x_j) \right)$$

ou seja,

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{B_{2\epsilon}(x_j)} \psi_\epsilon \, d\nu - \int_{B_{2\epsilon}(x_j)} \psi_\epsilon \, d\mu \right).$$

Note que,

$$\int_{B_{2\epsilon}(x_j)} \psi_\epsilon \, d\nu = \int_{\{x_j\}} d\nu + o_\epsilon(1)$$

e

$$\int_{B_\epsilon(x_j)} \psi_\epsilon \, d\mu = \int_{\{x_j\}} d\mu + o_\epsilon(1).$$

Logo,

$$0 \leq \int_{\{x_j\}} d\nu - \int_{\{x_j\}} d\mu.$$

Por outro lado, como

$$\nu(\{x_j\}) = \sum_{j\in\Lambda} a_i \delta_{x_i}(\{x_j\}) = a_j \quad \text{e} \quad \mu(\{x_j\} = \sum_{j\in\Lambda} b_i \delta_{x_i}(\{x_j\}) = b_j,$$

portanto,

$$b_j \leq a_j. \tag{1.21}$$

Então, por (1.14) e (1.21)

$$S a_j^{\frac{p_N}{p^*}} \leq b_j \leq a_j. \tag{1.22}$$

Assim, comparando as desigualdades em (1.21) e (1.22) concluímos que

$$S^{\frac{p^*}{p^*-p_N}} \leq a_j. \tag{1.23}$$

Agora provaremos que a expressão (1.23) não pode ocorrer. Portanto, podemos concluir que o conjunto Λ é vazio, isto é, os números a_j e b_j são todos nulos. De fato, suponhamos por contradição que para algum $j \in \Lambda$ a desigualdade (1.23) ocorre. Uma vez que (u_n) é uma sequência Palais-Smale, temos

$$c_\beta + o_n(1) = I_\beta(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle \omega_n, u_n \rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned} c_\beta + o_n(1) &\geq \Big(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta}\Big)\|u_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1} \\ &+ \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}\rho_n u_n - F(x,u_n)\right) dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{p^*} dx. \end{aligned}$$

Note que, por (1.6) e concluímos que

$$c_\beta + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{p^*} dx.$$

Como $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$, temos

$$c_\beta + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |u_n|^{p^*} dx \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right)\int_{B_{2\epsilon}(x_j)} \psi_\epsilon |u_n|^{p^*} dx.$$

Então, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$c_\beta \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) \int_\Omega \psi_\epsilon \, d\nu.$$

Agora tomando $\epsilon \to 0$ concluímos que

$$c_\beta \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{p^*}\right) S^{\frac{p^*}{p^* - p_N}},$$

mas isto contradiz (1.4). Portanto Λ é vazio, então por (1.13), concluímos que

$$u_n \to u \text{ em } L^{p^*}(\Omega). \tag{1.24}$$

Agora provaremos que $u_n \to u$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Com efeito, desde que $(u_n - u)$ é limitada em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ e $\|\omega_n\|_* = o_n(1)$, obtemos $\langle \omega_n, u_n - u \rangle = o_n(1)$. Então,

$$\langle Q'(u_n), u_n - u \rangle - \int_\Omega \rho_n (u_n - u) dx = o_n(1).$$

Por (1.16)

$$\int_\Omega |\rho_n|^{\frac{q}{q-1}} \, dx \leq (2C)^{\frac{q}{q-1}} \int_\Omega dx + (2C)^{\frac{q}{q-1}} \int_\Omega |u_n|^q \, dx \leq C + C\|u_n\|^q_{1,\overrightarrow{p}},$$

então, concluímos que (ρ_n) é limitada em $L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$.

Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega \rho_n (u_n - u) \, dx \leq |\rho_n|_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} |u_n - u|_{L^q(\Omega)}.$$

Usando a imersão compacta, obtemos

$$\int_\Omega \rho_n (u_n - u) \, dx = o_n(1).$$

Como consequência da convergência fraca, resulta

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i - 2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \, dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx = o_n(1).$$

Usando a seguinte desigualdade, veja [55],

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} C_p |x-y|^p & se \;\; p \geq 2 \\ \frac{C_p |x-y|^2}{(|x| - |y|)^{2-p}} & se \;\; 1 < p < 2. \end{cases} \tag{1.25}$$

Obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
0 &\leq C_p \sum_{i=1}^{N} \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{p_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left(\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i} dx - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx - \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} dx \\
&+ \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i} dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Além disso, por (1.24),

$$\int_\Omega u_n^{p^*} dx \to \int_\Omega u^{p^*} dx,$$

e

$$\int_\Omega u_n^{p^*-1} u \, dx \to \int_\Omega u^{p^*} dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &\leq C_p \sum_{i=1}^{N} \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{p_i}^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i} \\
&- \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \int_\Omega (u_n^+)^{p^*} + \int_\Omega (u_n^+)^{p^*-1} u - \langle \rho_n, u_n \rangle + \langle \rho_n, u \rangle + o_n(1) \\
&= \langle \omega_n, u_n \rangle + \langle \omega_n, u \rangle + o_n(1).
\end{aligned}$$

Assim, $u_n \to u$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Portanto, I_β satisfaz a condição $(PS)_{c_\beta}$. ■

O próximo resultado mostra que o funcional I_β satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha e será importante para mostrarmos que I_β satisfaz a condição $(PS)_{c_\beta}$.

Lema 1.3 *(i) Existem $\varphi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ e $T > 0$, tais que,*

$$\max_{t\in[0,T]} I_\beta(t\varphi) < c_\beta,$$

onde c_β é dado em (1.4).

(ii) Existem, $e \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \setminus B_R(0)$ e $R > 0$, tais que,

$$I_\beta(e) < 0.$$

(iii) Existe $\alpha > 0$, tal que $I_\beta(u) \geq \alpha$, para $\|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = R$, com $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, onde α não depende de β .

Demonstração: Consideremos $v \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\displaystyle\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i} = 1$, $|\gamma = \{x \in \Omega; v(x) > \beta\}| > 0$ e a função $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$j(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{t^{p_i}}{p_i} - \frac{t^{p^*}}{p^*}|v|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

Note que, desde que $p_1 < p_i < p^*$, para todo $i \in \{1, \ldots, N\}$, existe $t_* > 0$ tal que $j(t_*) = \max\limits_{t \geq 0} j(t)$. Além disso, $j(t)$ é crescente em $(0, t^*)$ e decrescente em (t^*, ∞). Portanto, por (f_2), obtemos

$$I_\beta(tv) \leq j(t) - \int_\Omega F(x, tv)dx \leq j(t) \; t \geq 0. \tag{1.26}$$

Observe que t^* é indepenente de β. Assim, podemos escolher $T > 0$, tal que,

(a) $T < t^*$.

(b) $\frac{T^{p_N}}{p_1} - \frac{T^{p^*}}{p^*}|v|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} < c_\beta$.

(c) $\frac{T^{p_N}}{p_1} - \frac{T^{p^*}}{p^*}|v|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} - T\displaystyle\int_\gamma v dx < 0$.

Desse modo, por (1.26) e (a), para cada $t \in [0, T]$, obtemos

$$I_\beta(tv) \leq j(t) \leq j(T),$$

então,

$$I_\beta(tv) \leq j(t) \leq \frac{T^{p_N}}{p_1} - \frac{T^{p^*}}{p^*}|v|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)},$$

pelo item (b), temos

$$I_\beta(tv) \leq j(t) < c_\beta.$$

Assim,

$$\max_{t \in [0,T]} I_\beta(tv) \leq \max_{t \in [0,T]} j(t) \leq j(T) < c_\beta.$$

Logo,

$$\max_{t \in [0,T]} I_\beta(tv) < c_\beta,$$

o que prova $i)$.

Agora para provar $ii)$. Note que, para cada $t \in [0, T]$, o conjunto $\{Tv > \beta\}$ tem medida positiva. Uma vez que, por (f_3) e $F(x, t) > 0$ para todo $t > \beta$, encontramos

$$\int_\Omega F(x, Tv)dx \geq \int_\gamma F(x, Tv)dx \geq \int_\gamma Tv dx > 0.$$

Isso implica que podemos fixar $\beta = \frac{T}{2}$, obtemos $e = Tv$ com $\|e\|_{1,\overrightarrow{p}} = T$ tal que

$$I_\beta(e) = I_\beta(Tv) \leq j(T) - T\int_\gamma v dx.$$

Portanto, pelo item $c)$ e como $p_N > 1$, usando a definição de j, concluímos que

$$I_\beta(e) < 0,$$

o que prova $ii)$.

Finalmente, consideremos $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, tal que $\|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = R < 1$ com R, a ser fixado posteriormente. Então, por (f_1) e (f_4), e das imersões contínuas de $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ e em $L^{p^*}(\Omega)$, obtemos $C_1, C_2, C_3 > 0$ tais que

$$I_\beta(u) \geq C_1\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_N} - C_2\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}^q - C_3\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p^*}.$$

Considerando $R > 0$ suficientemente pequeno, obtemos $\alpha > 0$ tal que

$$I_\beta(u) \geq \alpha, \, \forall \, \|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = R; \, u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

■

1.2 Demonstração do Teorema 1.1

Nesta seção usaremos os lemas técnicos da seção anterior para provar o Teorema 1.1.

Demonstração: Pelos Lemas 1.2 e 1.3 e o Teorema do Passo da Montanha, existe $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ tal que $I_\beta(u) = c_\beta$ e $0 \in \partial I_\beta(u)$, isto é, u é uma solução não trivial do problema (P1), ou seja,

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega \rho_0 \phi \, dx + \int_\Omega (u^+)^{p^*-1}\phi \, dx \; \forall \; \phi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega),$$

para algum $\rho_0(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))]$ $q.t.p.$ em Ω.

Considerando u^- como uma função teste, podemos concluir que $u = u^+ \geq 0$.

Vamos provar que o conjunto $\{x \in \Omega; u(x) > \beta\}$ tem uma medida positiva. De fato, suponhamos por contradição que, $u(x) \leq \beta$ q.t.p. em Ω.

Uma vez que u é ponto crítico de I_β, temos

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx = \int_\Omega \rho_0 u dx + \int_\Omega (u^+)^{p^*} dx.$$

Por (f_1), encontramos

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \leq (k\beta + k\beta^q + \beta^{p^*})|\Omega|,$$

para alguma constante $k > 0$.

Note que, como $I_\beta(u) = c_\beta > 0$, existe uma constante $\widehat{C} > 0$, que não depende de β, tal que,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \geq \widehat{C}.$$

Então, concluímos que para $\beta \in (0,1)$

$$\widehat{C} \leq 3k\beta|\Omega|,$$

mas, esta desigualdade é impossível, se escolhermos $\beta = \min\{1, \frac{T}{2}, \frac{\widehat{C}}{3|\Omega|}\}$, isto conclui a prova do teorema.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos anisotrópicos via método sub supersolução e Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo, mostraremos resultados de existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de problemas

$$(P2)\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = a(x)u + h(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, é um domínio limitado suave, $N \geq 3$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$. Os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem $p_i > 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} > 1$ e $p^* := N/\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} - 1\right) = N\overline{p}/(N-\overline{p})$.

Este capítulo foi motivado principalmente por [1], [2] e [56]. Descreveremos um pouco do conteúdo desses trabalhos.

Em [1], os autores estudaram estimativas a priori para soluções de problemas elipticos anisotrópicos via simetrização e resultado de comparação para as soluções.

Em [2], os autores estudaram uma classe de problemas com crescimento subcrítico e crítico usando técnicas variacionais e o método de subsolução-supersolução.

Em [56], os autores estudaram a existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas singular envolvendo p-laplaciano.

Antes de enunciarmos os resultados desse capítulo, vamos definir solução fraca para $(P2)$ e apresentar as hipóteses sobre as funções $a(x)$ e $h(x,t)$.

Definição 2.1 *Uma solução fraca para (P2) é uma função* $0 < u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, *tal que,*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx = \int_{\Omega} a(x)\, u\, \phi\, dx + \int_{\Omega} h(x,u)\, \phi\; dx \;\forall\, \phi\, \in W_0^{1\overrightarrow{p}}(\Omega). \tag{2.1}$$

A hipótese sobre função a é:

(a_1) A função $a \in L^{\infty}(\Omega)$ com $a(x) > 0$.

Assumimos que a função h é uma função Carathéodory sobre $\Omega \times [0,\infty)$ e, além disso, satisfaz as hipóteses abaixo:

(h_1) Existe $\delta > 0$ tal que

$$h(x,t) \geq (1-t)a(x), \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

(h_2) Existe $1 < r < p^*$ tal que

$$h(x,t) \leq a(x)(t^{r-1}+1), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 2.1 *Suponha que* $(a_1), (h_1)$ *e* (h_2) *ocorrem. Então, o problema* $(P2)$ *possui uma solução fraca, se* $\|a\|_{\infty}$ *for pequena.*

Para estabelecermos a existência de duas soluções positivas para o problema $(P2)$, consideramos a seguinte hipótese

(h_3) Existem $t_0 > 0$ e $\theta > p_N$ tais que

$$0 < \theta H(x,t) = \theta \int_0^t h(x,s)ds \leq t h(x,t), \text{ para todo } t_0 \leq t \text{ em } \Omega.$$

Teorema 2.2 *Suponha que as condições* (a_1) *e* $(h_1)-(h_3)$ *ocorrem. Então, o problema* $(P2)$ *possui duas soluções fracas positivas, se* $\|a\|_{\infty}$ *for pequena.*

Destacamos que nossos teoremas podem ser aplicados para a seguinte não-linearidade: Fixado $s_0 > 0$, a função

$$h(x,t) = \begin{cases} a(x)(1-t) \text{ se } t \in [0, s_0], \\ a(x)\big((1-s_0) + (t-s_0)^{r-1}\big) \text{ se } t \in (s_0, \infty). \end{cases}$$

satisfazem (h_1) e (h_2) para $\delta \in (0, s_0]$ e $r > 1$. Também, satisfazem $(h_1), (h_2)$ e (h_3) para $t_0 > 0$ grande e $r \in (p_N, p^*)$. Note que, para $s_0 > 1$, temos $h(x,t) < 0$ em $(1, s_0)$. Além disso, as hipóteses (h_1) e (h_2), também são satisfeitas por $h(x,t) = a(x)(1 + |t|^{r-1})$.

Abaixo listamos o que acreditamos que são as principais contribuições deste capítulo.

(i) A subsolução e a supersolução em [2] são constantes, aqui, a sub e a supersolução estão em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$.

(ii) Motivado por [56], aplicaremos o método de sub e supersolução combinado com argumentos de truncamento. Além disso, o argumento de [56], pode ser generalizado para um operador não-linear e não homogêneo, como o operador anisotrópico.

(iii) Mostramos a existência e unicidade de solução para o problema linear, um Princípio de Comparação para as soluções e um resultado de regularidade para o operador anisotrópico. Para este último resultado não foi necessário usar o argumento de simetrização como em [1], veja Lema 2.4.

(iv) Nosso argumento de truncamento, veja (2.8), é diferente do usado em [56].

2.1 Resultados preliminares

As demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2 serão baseadas na técnica de sub e supersolução com argumento de minimização, além do uso do Teorema do Passo da Montanha. Para demonstrar tais resultados, iniciamos com a seguinte definição.

Definição 2.2 *Dizemos que um par $(\underline{u}, \overline{u})$ é uma sub e supersolução para o problema $(P2)$, respectivamente, se $\underline{u}, \overline{u} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ com*

a) $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω,

b) Para cada $\phi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ com $\phi \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx \leq \int_\Omega a(x)\underline{u}\phi\, dx + \int_\Omega h(x,\underline{u})\phi\, dx \tag{2.2}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx \geq \int_{\Omega}a(x)\overline{u}\phi\,dx+\int_{\Omega}h(x,\overline{u})\phi\,dx. \tag{2.3}$$

Agora, discorremos alguns lemas técnicos que nos ajudarão na demonstração do Teorema 2.1. Iniciamos provando um resultado de unicidade de solução para o problema linear e o Princípio de Comparação para o operador anisotrópico.

Lema 2.1 *Existe uma* $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$ *a única solução do problema*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=a(x) \text{ em } \Omega,\\ u=0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Demonstração: Considere o operador $T: W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)\to (W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega))'$ dado por

$$\langle Tu,\phi\rangle=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\,dx.$$

Consideremos a seguinte desigualdade, veja [55],

$$C_i\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i}\leq\left\langle\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}-\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle \tag{2.5}$$

onde $C_i>0$ e para todo $i=1,\ldots,N$.

Por (2.5), T é monótono, ou seja, $\langle Tu-Tv,u-v\rangle>0$ para todo $u,v\in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, com $u\neq v$.

Além disso, T é coercivo. Com efeito, se $\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}\to+\infty$, então sem perda de generalidades, podemos assumir que

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i}dx\geq 1,$$

para algum $i\in\{1,\cdots,N\}$, pois caso contrário $\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}\leq N$. Consideremos

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{p_j}=\max\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{p_i};1\leq i\leq N\right\}$$

e $1<p_1\leq p_i$ para todo $i\in\{1,\cdots,N\}$. Note que $\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}\leq N\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{p_j}$, então concluímos que,

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i}dx\geq\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{p_j}^{p_j}\geq\frac{1}{N^{p_1-1}}\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1}.$$

O que implica,

$$\frac{\langle Tu,u\rangle}{\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}}\geq\frac{1}{N^{p_1-1}}\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1-1},$$

logo,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}} = +\infty$$

Portanto, pelo Teorema de Minty-Browder [25, Teorema 5.16], existe uma única $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ que satisfaz $Tu = a(x)$. ■

Lema 2.2 *Se Ω é um domínio limitado e se $u, v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ satisfaz em*

$$\left\{ -\Big[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\Big] \leq -\Big[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\Big] \text{ em } \Omega, \right.$$

então, $u \leq v$ q.t.p. em Ω .

Demonstração: Consideremos a função teste $\phi = \max\{u - v, 0\}$, $\phi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ com $\phi \geq 0$, obtemos

$$\int_{\Omega\cap[u>v]} \sum_{i=1}^{N} \left\langle \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\rangle \leq 0.$$

Portanto, da desigualdade (2.5), concluímos que $\|(u-v)^+\|_{1,\overrightarrow{p}} \leq 0$, isto implica $u \leq v$ q.t.p. em Ω.

■

Antes de provar a regularidade $L^\infty(\Omega)$ para o operador anisotrópico enunciamos um Lema de iteração de Stampacchia que usaremos nesta seção.

Lema 2.3 *Assumimos que $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função não-crescente tal que se $h > k > k_0$, para algum $\alpha > 0$, $\beta > 1$, $\phi(h) \leq C(\phi(k))^\beta/(h-k)^\alpha$. Então, $\phi(k_0 + d) = 0$, onde $d^\alpha = C2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}\phi(k_0)^{\beta-1}$.*

Demonstração: veja [62]

Lema 2.4 *Seja $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ a solução do problema*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) = f \text{ em } \Omega, \\ v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

tal que, $f \in L^r(\Omega)$ com $r > p^*/(p^* - p_1)$. Então, $v \in L^\infty(\Omega)$. Em particular, se $\|f\|_{L^r}$ é pequena, então $\|v\|_\infty$ é pequena.

Demonstração: Considere $v_k = sign(|u|-k)^+$, então $v_k \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = \dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}$ em $A(k) = \{x \in \Omega; |u(x)| > k\}$. Seja $|A(k)|$ a medida de Lebesgue de $A(k)$.

Usando v_k como função teste e Desigualdade de Hölder, temos

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{A(k)} \left|\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx = \int_{\Omega} f v_k \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |v_k|^{p_*} \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{\Omega} |f|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} |A(k)|^{1-(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r})}.$$

Seja a constante

$$0 < S = \inf_{u \in D^{1,\overrightarrow{p}}(\mathbb{R}^N), \|u\|_{p^*}=1} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p_i} \right\}, \text{ veja [43]}.$$

Uma vez que, $p_i \geq p_1 > 1$, tem-se

$$S\left(\int_{\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p_1}{p^*}} \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx, \; \forall\, u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

Isto implica,

$$S\left(\int_{A(k)} |v_k|^{p^*} dx\right)^{\frac{p_1-1}{p^*}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} |A(k)|^{1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)}.$$

Note que, se $0 < k < h$, $A(h) \subset A(k)$ e

$$|A(h)|^{\frac{1}{p^*}}(h-k) = \left(\int_{A(h)} (h-k)^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_{A(k)} |v_k|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

então,

$$|A(h)| \leq \frac{1}{(h-k)^{p^*}} \frac{1}{S^{\frac{p^*}{p_1-1}}} \|f\|_r^{\frac{p^*}{p_1-1}} |A(k)|^{\frac{p^*}{p_1-1}\left[1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)\right]}.$$

Desde que $r > \frac{p^*}{p^*-p_1}$, obtemos $\beta := \frac{p^*}{p_1-1}\left[1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)\right] > 1$.

Portanto, se definimos

$$\phi(h) = |A(h)|, \alpha = p^*, \beta = \frac{p^*}{p_1-1}\left[1-\left(\frac{1}{p^*}+\frac{1}{r}\right)\right], k_0 = 0,$$

observemos que ϕ é uma função não-decrescente e

$$\phi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^{\alpha}} \phi(k)^{\beta}, \; \forall\; h > k > 0.$$

Assim, pelo Lema 2.3, temos $\phi(d) = 0$ onde $d = \widetilde{C}\|f\|_r^{\frac{1}{p_1-1}} |\Omega|^{\frac{\beta-1}{\alpha}} / S^{\frac{1}{p_1-1}}$.

Portanto,

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{\widetilde{C}\|f\|_r^{\frac{1}{p_1-1}} |\Omega|^{\frac{\beta-1}{\alpha}}}{S^{\frac{1}{p_1-1}}}.$$

■

Lema 2.5 *Suponha que* (a_1), (h_1) *e* (h_2) *ocorrem. Suponha que* $\|a\|_\infty$ *é pequena, então existem* $\underline{v}, \overline{v} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *tais que*

i) $\|\underline{v}\|_\infty \leq \delta$ *onde* δ *é a constante que aparece na hipótese* (h_1),

ii) $0 < \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x)$ *q.t.p. em* Ω,

iii) $\underline{v}$ *é uma subsolução e* $\overline{v}$ *é uma supersoluçao de* $(P2)$.

Demonstração: Seja $\underline{v} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ a única solução do problema (2.4). Pelo Princípio do Máximo, veja [37, Corolário 4.4], $\underline{v} > 0$. Assim, pelo Lema 2.4, $\underline{v} \in L^\infty(\Omega)$, e existe uma constante $C^* > 0$, tal que, $\|\underline{v}\|_\infty \leq C^*\|a\|_\infty$. Agora, fixando $\|a\|_\infty$ suficientemente pequena, temos $\|\underline{v}\|_\infty \leq \delta$.

Agora para provar $ii)$, consideremos $\overline{v} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a única solução do problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Big|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\right) = 1 + a(x) \text{ em } \Omega, \\ \overline{v} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Note que

$$-\Big[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Big|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\right)\Big] = 1 + a(x) \geq a(x) = -\Big[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Big|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\right)\Big].$$

Então, pelo Lema 2.2, concluímos que $0 < \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x)$ q.t.p. em Ω, o que prova a condição $ii)$.

Finalmente vamos provar a condição $iii)$. Considerando a hipótese (h_1), temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Big|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \int_\Omega a(x)\underline{v}\phi\,dx - \int_\Omega h(x,\underline{v})\phi\,dx \\ &\leq \int_\Omega a(x)\phi\,dx - \int_\Omega a(x)\underline{v}\phi\,dx - \int_\Omega a(x)\phi\,dx + \int_\Omega a(x)\underline{v}\phi\,dx = 0. \end{aligned}$$

Desde que $\overline{v}$ é a única solução do problema (2.7), pela hipótese (h_2),

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Big|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \int_\Omega a(x)\overline{v}\phi\,dx - \int_\Omega h(x,\overline{v})\phi\,dx \\ &\geq 1 - \int_\Omega a(x)\overline{v}\phi\,dx - \int_\Omega a(x)\phi\,dx + \int_\Omega a(x)\overline{v}\phi\,dx \\ &\geq (1 - \|a\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty - \|a\|_\infty - \|a\|_\infty\|\overline{v}\|_\infty^{r-1})\int_\Omega \phi\,dx > 0. \end{aligned}$$

Portanto $\overline{v}$ é uma supersolução do problema $(P2)$. ■

2.2 Demonstração do Teorema 2.1

Nesta seção combinaremos os lemas técnicos da seção anterior para provar o Teorema 2.1, usando a técnica de sub e supersolução e argumentos de minimização.

Demonstração do Teorema 2.1 : Consideremos a função

$$g(x,t)=\begin{cases} a(x)\overline{v}(x)+h(x,\overline{v}(x)), & t>\overline{v}(x),\\ a(x)t+h(x,t), & \underline{v}(x)\leq t\leq \overline{v}(x),\\ a(x)\underline{v}(x)+h(x,\underline{v}(x)), & t<\underline{v}(x),\end{cases} \tag{2.8}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = g(x,u) \text{ em } \Omega,\\ u>0 \text{ em } \Omega,\\ u\in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).\end{cases} \tag{2.9}$$

Definamos o funcional $\Phi : W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)\to\mathbb{R}$ por

$$\Phi(v)=\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{1}{p_i}\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i}dx-\int_\Omega G(x,v)\,dx, \tag{2.10}$$

onde $G(x,t)=\displaystyle\int_0^t g(x,s)ds$. Temos $\Phi\in C^1\big(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega),\mathbb{R}\big)$ com

$$\Phi'(v)\varphi=\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx-\int_\Omega g(x,v)\varphi\,dx, \forall\, v,\varphi\in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

Por (h_2) e pela definição de g, obtemos

$$|g(x,t)|\leq K \text{ para algum } K>0, \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.11}$$

Note que, por (2.11), Φ é coercivo. Então, podemos afirmar que sequência (v_n) que satisfaz

$$\Phi(v_n)\to c=\inf_{\mathcal{M}}\Phi,$$

onde

$$\mathcal{M}=\big\{v\in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega);\underline{v}\leq v\leq\overline{v} \text{ q.t.p. em } \Omega\big\},$$

é limitada em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$.

Assim, a menos de subseqüência,

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v && \text{em } W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \\ v_n &\to v && \text{em } L^s(\Omega),\ 1 \le s < p^*, \\ v_n(x) &\to v(x) && \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Agora, observe que $\mathcal{M}$ é fechado e convexo em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Pelo Teorema A.2, veja (Apêndice A), a restrição $\Phi\big|_{\mathcal{M}}$ atinge o ínfimo em um ponto $v \in \mathcal{M}$.

Usaremos argumentos semelhantes aos encontrados na demonstração de [65, Teorema 2.4] e em [2], para mostrar que o mínimo do funcional sobre o conjunto convexo $\mathcal{M}$ é ponto crítico do funcional Φ. De fato, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\epsilon > 0$ consideremos a função $v_\epsilon \in \mathcal{M}$ definida por

$$v_\epsilon(x) = \begin{cases} \overline{v}(x) \text{ se } v(x) + \epsilon\varphi(x) > \overline{v}(x), \\ v(x) + \epsilon\varphi(x) \text{ se } \underline{v}(x) \le v(x) + \epsilon\varphi(x) \le \overline{v}(x), \\ \underline{v}(x) \text{ se } v(x) + \epsilon\varphi(x) < \underline{v}(x), \end{cases}$$

a função v_ϵ pode ser caracterizada por $v_\epsilon = (v + \epsilon\varphi) - (\overline{\varphi}_\epsilon - \underline{\varphi}_\epsilon)$ onde $\overline{\varphi}_\epsilon = \max\{0, v + \epsilon\varphi - \overline{v}\} \ge 0$ e $\underline{\varphi}_\epsilon = -\min\{0, v + \epsilon\varphi - \underline{v}\} \ge 0$.

Note que $\overline{\varphi}_\epsilon, \underline{\varphi}_\epsilon \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Desde que $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ minimiza Φ sobre $\mathcal{M}$ e Φ é diferenciável, então

$$0 \le \Phi'(v)(v_\epsilon - v) = \epsilon\Phi'(v)\varphi - \Phi'(v)\overline{\varphi}_\epsilon + \Phi'(v)\underline{\varphi}_\epsilon.$$

Assim,

$$\Phi'(v)\varphi \ge \frac{1}{\epsilon}(\Phi'(v)\overline{\varphi}_\epsilon - \Phi'(v)\underline{\varphi}_\epsilon). \tag{2.12}$$

Agora, já que $\overline{v}$ é a supersolução para $(P2)$, segue que

$$\begin{aligned}
\Phi'(v)\overline{\varphi}_\epsilon &= \Phi'(\overline{v})\overline{\varphi}_\epsilon + [\Phi'(v) - \Phi'(\overline{v})](\overline{\varphi}_\epsilon) \\
&\geq [\Phi'(v) - \Phi'(\overline{v})](\overline{\varphi}_\epsilon) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_\epsilon} \left(\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \Big|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}(v - \overline{v} + \epsilon\varphi)\, dx - \\
&- \int_{\Omega_\epsilon} [a(x)v - a(x)\overline{v}](v - \overline{v} + \epsilon\varphi)\, dx - \\
&- \int_{\Omega_\epsilon} [h(x,v) - h(x,\overline{v})](v - \overline{v} + \epsilon\varphi)\, dx \\
&\geq \epsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_\epsilon} \left(\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \Big|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \\
&- \epsilon \|a\|_\infty \int_{\Omega_\epsilon} |v - \overline{v}||\varphi|\, dx - \\
&- \epsilon \int_{\Omega_\epsilon} |h(x,v) - h(x,\overline{v})||\varphi|\, dx,
\end{aligned}$$

onde $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega; v(x) + \epsilon\varphi(x) \geq \overline{v}(x)\}$. Note que $|\Omega_\epsilon| \to 0$ quando $\epsilon \to 0$.

Então,

$$\Phi'(v)\overline{\varphi}_\epsilon \geq o(\epsilon)$$

onde $\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ se $\epsilon \to 0$. Analogamente, concluímos que

$$\Phi'(v)\underline{\varphi}_\epsilon \leq o(\epsilon)$$

e consequentemente, por (2.12), obtemos

$$\Phi'(v)\varphi \geq 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Repetindo os argumentos acima para $-\varphi$ obtemos

$$\Phi'(v)\varphi \leq 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, logo $\Phi'(v)\varphi = 0$. Portanto, por um resultado de densidade, obtemos $\Phi'(v) = 0$.

Assim, v é uma solução fraca para (2.9), isto é,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega g(x,v)\varphi\, dx.$$

Desde que, $g(x,t) = a(x)t + h(x,t)$ para $t \in [\underline{v}(x), \overline{v}(x)]$ e $v \in \mathcal{M}$, então v é uma solução fraca positiva de (P2).

■

2.3 Demonstração do Teorema 2.2

Nesta seção demonstraremos o Teorema 2.2. Antes apresentaremos alguns resultados preliminares. Consideremos a função h e $\underline{v} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ a subsolução do Problema (P2) obtida pelo Lema 2.5.

Consideremos a função

$$\widehat{g}(x,t) = \begin{cases} a(x)t + h(x,t), & t > \underline{v}(x), \\ a(x)\underline{v}(x) + h(x,\underline{v}(x)), & t \leq \underline{v}(x), \end{cases} \tag{2.13}$$

e o funcional $\widehat{\Phi} : W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\widehat{\Phi}(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx - \int_\Omega \widehat{G}(x,u)dx, \tag{2.14}$$

onde $\widehat{G}(x,t) = \displaystyle\int_0^t \widehat{g}(x,s)ds$.

Note que por (h_2) e (2.13), temos que

$$\widehat{G}(x,t) \leq C|t| + a(x)|t|^r, \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \tag{2.15}$$

para alguma constante $C > 0$.

Lema 2.6 *O funcional $\widehat{\Phi}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(v_n) \subset W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ uma sequência tal que

$$\widehat{\Phi}(v_n) \to c \;\text{ e }\; \widehat{\Phi}'(v_n) \to 0. \tag{2.16}$$

Como $\theta > p_N$, para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} C + \|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}} &\geq \frac{1}{N^{p_1-1}} \left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta} \right) \|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1} + \int_\Omega \frac{1}{\theta} \widehat{g}(x,v_n)v_n - \widehat{G}(x,v_n)\, dx \\ &\geq \frac{1}{N^{p_1-1}} \left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta} \right) \|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1} + \int_{\{v_n \geq t_0\}} \frac{1}{\theta} \widehat{g}(x,v_n)v_n - \widehat{G}(x,v_n)\, dx \\ &+ \int_{\{v_n < t_0\}} \frac{1}{\theta} \widehat{g}(x,v_n)v_n - \widehat{G}(x,v_n)\, dx \end{aligned}$$

Por (h_3), obtemos

$$C + \|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}} \geq \frac{1}{N^{p_1-1}} \left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta} \right) \|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1} + \int_{\{v_n < t_0\}} \frac{1}{\theta} \widehat{g}(x,v_n)v_n - \widehat{G}(x,v_n)\, dx.$$

Agora, usando a definição de $\widehat{g}$, (h_2) e (2.16) obtemos uma constante $D_1 > 0$, tal que,

$$\begin{aligned} C + \|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}} &\geq \frac{1}{N^{p_1-1}}\left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta}\right)\|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1} - \left|\int_{\{v_n<t_0\}} \frac{1}{\theta}\widehat{g}(x,v_n)v_n - \widehat{G}(x,v_n)\,dx\right| \\ &\geq \frac{1}{N^{p_1-1}}\left(\frac{1}{p_N} - \frac{1}{\theta}\right)\|v_n\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_1} - D_1. \end{aligned}$$

Portanto, (v_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Assim, a menos de subseqüência,

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v \text{ em } W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \\ v_n \to v \text{ em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < p^*, \\ v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Por (2.17) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega \widehat{g}(x,v_n)v_n\,dx \to \int_\Omega \widehat{g}(x,v)v\,dx. \tag{2.18}$$

Como consequência da convergência fraca, resulta

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\,dx - \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx = o_n(1). \tag{2.19}$$

Portanto, por (2.5), (2.18), (2.19) e utilizando argumentos usados na demonstração do Lema 1.2 encontramos,

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i} \leq o_n(1),$$

o que implica $v_n \to v$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. ■

O próximo lema mostra que $\widehat{\Phi}$ satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.7 *Assumimos que (a_1), $(h_1) - (h_3)$ ocorrem. Então, para $\|a\|_\infty$ pequena, $\widehat{\Phi}$ satisfaz:*

i) Existem $R, \beta > 0$ com $\|\underline{v}\|_{1,\overrightarrow{p}} < R$ e $0 < \beta$, tais que,

$$\widehat{\Phi}(\underline{v}) < 0 < \beta \leq \inf_{\partial B_R(0)} \widehat{\Phi}(u).$$

ii) Existem $e \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \setminus B_{2R}(0)$, tal que, $\widehat{\Phi}(e) < \beta$.

Demonstração: Desde que $\underline{v}$ é uma subsolução do problema (P2), $\widehat{G}(x,\underline{v}) = \big(a(x)\underline{v} + h(x,\underline{v})\big)\underline{v}$ e $p_i > 1$, para $i = 1, 2, ...N$, temos

$$\widehat{\Phi}(\underline{v}) < \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx - \int_\Omega (a(x)\underline{v} + h(x,\underline{v}))\underline{v}\ dx \leq 0.$$

Agora, seja $\|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = R > 1$, sem perda de generalidades, podemos assumir que

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \geq 1, \text{ para algum } i = 1, 2, ..., N.$$

Consideremos esta desigualdade e (2.15) com a imersão contínua de Sobolev, obtemos constantes positivas, $c_1, c_2, c_3 > 0$, tais que,

$$\widehat{\Phi}(u) \geq c_1\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}^{p_N} - c_2\|u\|_{1,\overrightarrow{p}} - c_3\|a\|_\infty\|u\|_{1,\overrightarrow{p}}^r,\ \forall\ \|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = R,\ u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

Fixando $R > 0$ tal que $c_1R^{p_N} - c_2R \geq c_1R^{p_N}/2$ e $R > \|\underline{v}\|_{1,\overrightarrow{p}}$, escolhemos $\|a\|_\infty$ suficientemente pequena, de maneira que $c_1R^{p_N}/2 > c_3\|a\|_\infty R^r$. Portanto, a condição (i) é satisfeita para $\beta = c_1R^{p_N}/2 - c_3\|a\|_\infty R^r$.

Note que, pela hipótese (h_3), encontramos

$$H(x,t) \geq H(x,t_0)Ct^\theta - C, \quad \text{em } \Omega \times (0,+\infty).$$

Então, para cada $t > 1$, obtemos

$$\widehat{\Phi}(t\underline{v}) \leq t^{p_N} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_i}\left|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx - t^\theta C \int_\Omega H(x,t_0)\underline{v}^\theta\ dx + C,$$

para alguma constante $C > 0$. Desde que $H(x,t_0)\underline{v}^\theta > 0$ e $\theta > p_N$, concluímos que a condição (ii) ocorre. ■

Observação 2.1 *Note que $\underline{v}$ e e satisfazem as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha (veja[9]),*

$$\|e - \underline{v}\| > R \quad e \quad \max\big\{\widehat{\Phi}(\underline{v}), \widehat{\Phi}(e)\big\} < \inf\big\{\widehat{\Phi}(u) : \|u - \underline{v}\| = R\big\}.$$

Demonstração do Teorema 2.2: Sejam $\underline{v}, \overline{v}$ a sub e a supersolução do problema (P2) obtidas no Lema 2.5 e v_1 a solução do problema (P2) encontrada no Teorema 2.1.

Usando o Lema 2.6 e Lema 2.7, concluímos, do Teorema do Passo da Montanha [9], que

$$\widehat{c} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \widehat{\Phi}(\gamma(t)) \text{ onde } \Gamma = \{\gamma \in C\big([0,1], W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)\big) \colon \gamma(0) = \underline{v},\ \gamma(1) = e\},$$

é o valor crítico de $\widehat{\Phi}$, isto é, existe $v_2 \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, tal que $\widehat{\Phi}'(v_2) = 0$ e $\widehat{\Phi}(v_2) = c$. Então,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} \widehat{g}(x, v_2) \varphi \, dx \ \forall \ \varphi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega). \tag{2.20}$$

Por (2.2) e (2.13), $g(x,t) = \widehat{g}(x,t)$ para $t \in [0, \overline{v}]$, dessa maneira $\Phi(v) = \widehat{\Phi}(v)$ para $v \in [0, \overline{v}] = \{v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega); 0 \leq v(x) \leq \overline{v}(x)\}$, onde Φ e $\widehat{\Phi}$ são dados por (2.10) e (2.14), respectivamente. Então,

$$\widehat{\Phi}(v_1) = \inf_{\mathcal{M}} \Phi(u),$$

onde $\mathcal{M} = [\underline{v}, \overline{v}]$ foi definido na demonstração Teorema 2.1.

Portanto, se $v_2 \geq \underline{v}$, então por (2.13) e (2.20) o problema (P2) têm duas soluções fracas $v_1, v_2 \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, tais que

$$\widehat{\Phi}(v_1) \leq \widehat{\Phi}(\underline{v}) < 0 < \beta \leq \widehat{c} = \widehat{\Phi}(v_2).$$

Relembramos que $v_1 \in [\underline{v}, \overline{v}]$. Agora, mostraremos que $v_2 \geq \underline{v} > 0$.

Consideremos $(\underline{v} - v_2)^+$, como uma função teste e definindo o conjunto $\{v_2 < \underline{v}\} := \{x \in \Omega : v_2(x) < \underline{v}(x)\}$, temos

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{v} - v_2)^+ \ dx = \int_{\{v_2 < \underline{v}\}} a(x)\underline{v} + h(x, \underline{v})(\underline{v} - v_2)^+ dx. \tag{2.21}$$

Desde que $\underline{v}$ é uma subsolução do problema (P2), usando (2.21) obtemos

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{v} - v_2)^+ \ dx - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{v} - v_2)^+ \ dx \leq 0.$$

Pela desigualdade (2.5), encontramos que $\|(\underline{v} - v_2)^+\|_{1,\overrightarrow{p}} \leq 0$, logo $(\underline{v} - v_2)^+ = 0$, então $0 < \underline{v} \leq v_2$ q.t.p. em Ω. ■

Capítulo 3

Multiplicidade de soluções positivas para uma classe de sistemas elípticos anisotrópicos via método sub super solução e Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo, estudaremos um resultado de existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de sistema elípticos anisotrópicos associado ao problema

$$
(P3)\begin{cases}
-\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = a_1(x)u + F_u(x,u,v) \text{ em } \Omega,\\
-\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = a_2(x)v + F_v(x,u,v) \text{ em } \Omega,\\
u, v > 0 \quad \text{em } \Omega,\\
u = v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,
\end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $N \geq 3$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_N$ e F_w é a derivada parcial de F com respeito a w. Os expoentes $p_i^{'s}$ satisfazem $p_i > 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} > 1$ e $p^* := N/\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i} - 1\right) = N\overline{p}/(N-\overline{p})$.

Mais precisamente, vamos supor que as funções $a_j(x)$, com $j = 1, 2$ satisfazem as seguintes hipóteses.

(H) A função $a_j \in L^\infty(\Omega)$ com $a_j(x) > 0$.

A função $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e satisfazendo.

(H_1) Existe $\delta > 0$, tal que,

$$F_s(x,s,t) \geq (1-s)\, a_1(x), \text{ para todo } 0 \leq s \leq \delta, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$F_t(x,s,t) \geq (1-t)\, a_2(x), \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

(H_2) Existe $1 < r < p^*$, tal que,

$$|F_s(x,s,t)| \leq a_1(x)(s^{r-1} + t^{r-1} + 1),$$

$$|F_t(x,s,t)| \leq a_2(x)(s^{r-1} + t^{r-1} + 1).$$

Para enunciarmos os principais resultados deste capítulo, precisamos definir solução fraca positiva para o sistema $(P3)$.

Definição 3.1 *Diremos que um par de funções (u,v) é uma solução fraca positiva para o sistema $(P3)$, quando $u, v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com $u, v > 0$ em Ω e*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega a_1(x) u\, \phi\, dx + \int_\Omega F_u(x,u,v)\, \phi\, dx \;\forall\; \phi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega),$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega a_2(x) v\, \varphi\, dx + \int_\Omega F_v(x,u,v)\, \varphi\, dx \,\forall\; \varphi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

O primeiro resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Suponha que $(H), (H_1)$ e (H_2) são satisfeitas. Suponha que $\|a_j\|_\infty$ é pequena, para $j = 1, 2$, então, o sistema $(P3)$ possui uma solução fraca.*

Para o segundo resultado deste capítulo, vamos considerar a condição abaixo para provar a existência de duas soluções para o sistema $(P3)$.

(H_3) Existem $s_0, t_0 > 0$ e constantes $\theta_1, \theta_2 > 0$, tais que,

$$0 < F(x,s,t) \leq \theta_1\, s\, F_s(x,s,t) + \theta_2\, t\, F_t(x,s,t), \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para todo } t \geq t_0 \text{ e } s \geq s_0$$

onde $\dfrac{1}{p^*} < \theta_1, \theta_2 < \dfrac{1}{p_N}$.

Teorema 3.2 *Suponha que $(H), (H_1)$, (H_2) e (H_3) são satisfeitas. Suponha que $\|a_j\|_\infty$ é pequena, para $j = 1, 2$, então, o sistema (P3) possui duas soluções fracas.*

Abaixo listamos o que acreditamos que são os principais contribuições deste capítulo.

Os resultados principais encontrados, neste capítulo, completam o estudo iniciado em [2] e em [22], no seguinte sentido:

(i) Em [2], é estudado o caso escalar relacionado ao operador anisotrópico, aqui, consideremos um sistema.

(ii) Em [22], a classe de não-linearidade é diferente da considerada em nosso estudo.

(iii) Este é o primeiro trabalho que trata do operador anisotrópico relacionado a equações elípticas.

3.1 Resultados preliminares

Nesta seção, vamos demonstrar alguns lemas técnicos que serão utilizados na demonstração dos Teoremas 3.1 e 3.2. Para demonstrar tais resultados, iniciaremos com a seguinte definição.

Definição 3.2 *Dizemos que $[(\underline{u}, \underline{v}), (\overline{u}, \overline{v})]$ é um par de sub supersolução para o sistema $(P3)$, respectivamente, quando $\underline{u}, \underline{v}$ e $\overline{u}, \overline{v} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazem*

a) $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$ em Ω,

b) Dados φ, ψ, com $\varphi, \psi \geq 0$, temos

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \leq \int_\Omega a_1(x)\underline{u}\varphi\, dx + \int_\Omega F_u(x, \underline{u}, w)\, \varphi\, dx \ \forall\, w \in [\underline{v}, \overline{v}] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx \leq \int_\Omega a_2(x)\underline{v}\psi\, dx + \int_\Omega F_v(x, w, \underline{v})\, \psi\, dx \ \forall\, w \in [\underline{u}, \overline{u}] \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \geq \int_\Omega a_1(x)\overline{u}\, \varphi\, dx + \int_\Omega F_u(x, \overline{u}, w)\, \varphi\, dx \ \forall\, w \in [\underline{v}, \overline{v}] \\ \displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx \geq \int_\Omega a_2(x)\overline{v}\, \psi\, dx + \int_\Omega F_v(x, w, \overline{v})\, \psi\, dx \ \forall\, w \in [\underline{u}, \overline{u}] \end{cases} \tag{3.2}$$

Neste capítulo, trabalharemos com o espaço $E = W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \times W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, munido com a norma

$$\|(u,v)\| = \|u\|_{1,\overrightarrow{p}} + \|v\|_{1,\overrightarrow{p}},$$

onde,

$$\|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p_i}, \; u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

Lema 3.1 *Suponha que* (H),(H_1) *e* (H_2) *ocorrem. Então, existem* $(\underline{u},\underline{v}), (\overline{u},\overline{v}) \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *tais que*

i) $\|\underline{u}\|_{\infty} \leq \delta$ *e* $\|\underline{v}\|_{\infty} \leq \delta$ *onde* δ *é a constante que aparece da hipótese* (H_1)*,*

ii) $0 < \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ *e* $0 < \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x)$ *q.t.p. em* Ω*,*

iii) $(\underline{u},\underline{v})$ *é uma subsolução e* $(\overline{u},\overline{v})$ *é uma supersolução para o sistema* $(P3)$*.*

Demonstração: Pelo Lema 2.1, existe uma única solução $\underline{u} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \right) = a_1(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Analogamente, existe uma única solução $\underline{v} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \displaystyle -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} \right) = a_2(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{v} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Usando os mesmo argumentos da prova do Lema 2.4, $\underline{u},\underline{v} \in L^{\infty}(\Omega)$, além disso, obtemos constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $\|\underline{u}\|_{\infty} \leq C_1\|a_1\|_{\infty}$ e $\|\underline{v}\|_{\infty} \leq C_2\|a_2\|_{\infty}$. Agora escolhemos $\|a_j\|_{L^{\infty}}$ suficientemente pequena, com $j = 1,2$ encontramos

$$\|\underline{u}\|_{\infty} \leq \frac{\delta}{2} \text{ e } \|\underline{v}\|_{\infty} \leq \frac{\delta}{2},$$

o que prova condição (i).

Para provar o item (ii), consideremos, novamente o Lema 2.1 para afirmar que existe uma única solução $\overline{u} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} \displaystyle -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} \right) = 1 + a_1(x) \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

De modo análogo, existe uma única solução $\overline{v} \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\right) = 1 + a_2(x) \text{ em } \Omega, \\ \overline{v} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Note que, para $0 \leq \varphi, \psi \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx &= \int_\Omega [a_1(x)+1]\varphi\,dx \\ &\geq \int_\Omega a_1(x)\,\varphi\,dx = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx &= \int_\Omega [a_2(x)+1]\psi\,dx \\ &\geq \int_\Omega a_2(x)\,\psi\,dx = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 2.2, encontramos $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ q.t.p. em Ω e $\underline{v}(x) \leq \overline{v}(x)$ q.t.p. em Ω, o que prova a condição (ii).

Nossa tarefa final é verificar se a condição (iii) é válida. Primeiramente, usando o Princípio do Máximo em [37, corolário 4.4], concluímos que $\underline{u}(x), \underline{v}(x) > 0$.

Agora, usando a definição de $(\underline{u}, \underline{v})$ e a hipótese (H_1), obtemos para cada $\varphi, \psi \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx &- \int_\Omega a_1(x)\underline{u}\,\varphi dx - \int_\Omega F_u(x,\underline{u},v)\,\varphi\,dx \\ &\leq \int_\Omega a_1(x)\varphi dx - \int_\Omega a_1(x)\,\underline{u}\,\varphi dx - \int_\Omega (1-\underline{u})a_1(x)\varphi\,dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx &- \int_\Omega a_2(x)\underline{v}\,\psi dx - \int_\Omega F_v(x,u,\underline{v})\,\psi\,dx \\ &\leq \int_\Omega a_2(x)\psi dx - \int_\Omega a_2(x)\,\underline{v}\,\psi dx - \int_\Omega (1-\underline{v})a_2(x)\psi\,dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Portanto, $(\underline{u}, \underline{v})$ é uma subsolução para o sistema $(P3)$.

Agora, usamos (H_2), (3.5) e (3.6) , temos para $\|a_j\|_\infty$, com $j = 1, 2$, suficientemente pequena tal que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega a_1(x)\overline{u}\, \varphi\, dx - \int_\Omega F_u(x, \overline{u}, v)\, \varphi\, dx \\
\geq \; & \big(1 - \|a_1\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty - \|a_1\|_\infty - \|a_1\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty^{r-1} - \|a_1\|_\infty \|v\|_\infty^{r-1}\big) \int_\Omega \varphi\, dx > 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega a_2(x)\overline{v}\, \psi\, dx - \int_\Omega F_v(x, u, \overline{v})\, \psi\, dx \\
\geq \; & \big(1 - \|a_2\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty - \|a_2\|_\infty - \|a_2\|_\infty \|u\|_\infty^{r-1} - \|a_2\|_\infty \|\overline{v}\|_\infty^{r-1}\big) \int_\Omega \psi\, dx > 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\overline{u}, \overline{v})$ é uma supersolução para o problema (P3). ■

3.2 Demonstração do Teorema 3.1 :

Nesta seção combinaremos os lemas técnicos da seção anterior para provar o Teorema 3.1, usando a técnica de sub e supersolução e argumentos de minimização.

Consideremos as funções

$$
G_s(x, s, t) = \begin{cases} a_1(x)\overline{u}(x) + F_s(x, \overline{u}(x), t), & s > \overline{u}(x), \\ a_1(x)s + F_s(x, s, t), & \underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x), \\ a_1(x)\underline{u}(x) + F_s(x, \underline{u}(x), t), & s < \underline{u}(x), \end{cases} \tag{3.7}
$$

e

$$
G_t(x, s, t) = \begin{cases} a_2(x)\overline{v}(x) + F_t(x, s, \overline{v}(x)), & t > \overline{v}(x), \\ a_2(x)t + F_t(x, s, t), & \underline{v}(x) \leq t \leq \overline{v}(x), \\ a_2(x)\underline{v}(x) + F_t(x, s, \underline{v}(x)), & t < \underline{v}(x), \end{cases} \tag{3.8}
$$

e o problema auxiliar

$$
\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = G_u(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) = G_v(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u, v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega). \end{cases} \tag{3.9}
$$

Definamos o funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}\Phi(u,v) &= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{1}{p_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{1}{p_i}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \\ &- \int_\Omega G(x,u,v)\,dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Note que $\Phi \in C^1\big(E,\mathbb{R}\big)$ com

$$\begin{aligned}\Phi'(u,v)(\varphi,\psi) &= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx \\ &- \int_\Omega G_u(x,u,v)\,\psi\,dx - \int_\Omega G_v(x,u,v)\,\varphi\,dx, \forall\ u,v,\psi,\varphi \in E.\end{aligned}$$

Seja

$$\mathcal{M} = \big\{(u,v) \in E : \underline{u} \le u \le \overline{u} \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } \underline{v} \le v \le \overline{v} \text{ q.t.p. em } \Omega\big\}.$$

Por (H_2) e pela definição de G_u e G_v, obtemos

$$|G_u(x,u,v)| \le K_1 \text{ para algum } K_1 > 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.11}$$

e

$$|G_v(x,u,v)| \le K_2 \text{ para algum } K_2 > 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.12}$$

para todo $u, v \in \mathcal{M}$

Por (3.11) e (3.12), temos que Φ é coercivo sobre $\mathcal{M}$. Então, podemos afirmar que a sequência (u_n, v_n) que satisfaz

$$\Phi(u_n,v_n) \to c = \inf_{\mathcal{M}} \Phi,$$

(u_n, v_n) é limitada em E.

Assim, a menos de subseqüência

$$\begin{aligned}(u_n,v_n) &\rightharpoonup (u,v) && \text{em } E,\\ (u_n,v_n) &\to (u,v) && \text{em } L^s(\Omega)\times L^s(\Omega),\ 1 \le s < p^*,\\ (u_n(x),v_n(x)) &\to (u(x),v(x)) && \text{q.t.p. em } \Omega,\end{aligned}$$

onde $L^s(\Omega) \times L^s(\Omega)$ está munido da norma $\|(u,v)\| = \|u\|_{L^s(\Omega)} + \|v\|_{L^s(\Omega)}$.

Agora, note que $\mathcal{M}$ é um conjunto fechado e convexo em E. Pelo Teorema A.2, veja (Apêndice A), a restrição $\Phi\big|_{\mathcal{M}}$ atinge o ínfimo em um ponto (u,v) em $\mathcal{M}$. Usando o mesmo argumento como da prova do Teorema 2.1, observemos que (u, v) é uma solução fraca para (3.9). Desde que, $G_s(x,s,t) = a_1(x)s + F_s(x,s,t)$ para $s \in [\underline{u}, \overline{u}]$ e $G_t(x,s,t) = a_2(x)t + F_t(x,s,t)$ para $t \in [\underline{v}, \overline{v}]$, então (u, v) é uma solução fraca positiva do sistema (P3). ■

3.3 Demonstração do Teorema 3.2

Nesta seção demonstraremos o Teorema 3.2. Iniciaremos com alguns lemas técnicos que serão utilizados em sua demonstração.

Seja $(\underline{u}, \underline{v}) \in E \cap L^\infty(\Omega)$ a subsolução do problema $(P3)$. Em nosso próximo resultado provaremos que o funcional satisfaz as duas hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha [9].

Consideremos as funções

$$\widehat{G}_s(x,s,t) = \begin{cases} a_1(x)s + F_s(x,s,t), & s > \underline{u}(x) \\ a_1(x)\underline{u}(x) + F_s(x,\underline{u}(x),t), & s \leq \underline{u}(x), \end{cases} \tag{3.13}$$

e

$$\widehat{G}_t(x,s,t) = \begin{cases} a_2(x)t + F_t(x,s,t), & t > \underline{v}(x) \\ a_2(x)\underline{v}(x) + F_t(x,s,\underline{v}(x)), & t \leq \underline{v}(x). \end{cases} \tag{3.14}$$

Definamos o funcional $\widehat{\Phi} : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(u,v) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_i} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \\ &- \quad \int_\Omega \widehat{G}(x,u,v)\, dx, \end{aligned} \tag{3.15}$$

Note que por (H_2), (3.13) e (3.14), temos

$$\widehat{G}_s(x,s,t) \leq \widetilde{C}_1|s| + a_1(x)|s|^r + a_1(x)s|t|^r, \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \tag{3.16}$$

e

$$\widehat{G}_t(x,s,t) \leq \widetilde{C}_2|t| + a_2(x)|t|^r + a_2(x)t|s|^r, \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \tag{3.17}$$

para algumas constantes $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2 > 0$.

Lema 3.2 *O funcional $\widehat{\Phi}$ satisfaz a condição Palais Samale $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(u_n, v_n) \subset E$ uma sequência tal que

$$\widehat{\Phi}(u_n, v_n) \to c \;\text{ e }\; \widehat{\Phi}'(u_n, v_n) \to 0. \tag{3.18}$$

Escolhendo $\theta_1, \theta_2 \in \left(\frac{1}{p_*}, \frac{1}{p_N}\right)$, para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
C + \|(u_n, v_n)\| &\geq \widehat{\Phi}(u_n, v_n) - \theta_1 \widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(u_n, 0) - \theta_2 \widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(0, v_n) \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_N} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_N} \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \\
-\int_\Omega \widehat{G}(x, u_n, v_n) dx &- \theta_1 \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx - \theta_2 \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \\
&+ \theta_1 \int_\Omega \widehat{G}_{u_n}(x, u_n, v_n) u_n \, dx + \theta_2 \int_\Omega \widehat{G}_{v_n}(x, u_n, v_n) v_n \, dx.
\end{aligned}$$

Usando (H_3), obtemos

$$\begin{aligned}
C + \|(u_n, v_n)\| &\geq \widehat{\Phi}(u_n, v_n) - \Big[\theta_1 \widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(u_n, 0) + \theta_2 \widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(0, v_n)\Big] \\
&\geq \overline{K} \left(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \right) \\
&+ \int_{\{u_n < s_0\} \cup \{v_n < t_0\}} \theta_1 (a_1(x) u_n + F_{u_n}(x, u_n, v_n)) u_n \\
&+ \int_{\{u_n < s_0\} \cup \{v_n < t_0\}} \theta_2 (a_2(x) F_{v_n}(x, u_n, v_n)) v_n dx \\
&- \int_{\{u_n < s_0\} \cup \{v_n < t_0\}} (a_1(x) u_n^2 + F(x, u_n, v_n)) dx
\end{aligned}$$

onde $\overline{K} = \min\left\{ \left(\frac{1}{p_N} - \theta_1\right), \left(\frac{1}{p_N} - \theta_2\right) \right\}$.

Observemos que $\overline{\Omega} \times [0, s_0] \times [0, t_0]$ é compacto e a função $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, então existe uma constante $D_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
C + \|(u_n, v_n)\| &\geq \widehat{\Phi}(u_n, v_n) - \Big[\theta_1 \widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(u_n, 0) + \theta_2 \widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(0, v_n)\Big] \\
&\geq \overline{K} \left(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \right) + D_2
\end{aligned}$$

Note que, por (2.1) encontramos

$$C + \|(u_n, v_n)\| \geq \frac{\overline{K}}{N^{p_1 - 1}} \|(u_n, v_n)\|^{p_1} + D_2.$$

Portanto, (u_n, v_n) é uma sequência limitada em E, assim, a menos de subseqüência , temos

$$\begin{cases} (u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ em } E, \\ (u_n, v_n) \to (u, v) \text{ em } L^s(\Omega) \times L^s(\Omega),\ 1 \leq s < p^*, \\ (u_n(x), v_n(x)) \to (u(x), v(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

Usando (3.19) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_\Omega \widehat{G}_{u_n}(x, u_n, v_n)(u_n - u)\, dx \to 0. \tag{3.20}$$

Desde que, (u_n, v_n) é uma sequência limitada em E, temos

$$\Phi'(u_n, v_n)(u_n - u, 0) \to 0.$$

Assim, por (2.19), (3.20) e (2.5), encontramos

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} \leq o_n(1).$$

Segue do Lema 2.6 que $u_n \to u$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Pelos mesmos argumentos, obtemos $v_n \to v$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Assim, concluímos que, $(u_n, v_n) \to (u, v)$ em E. ■

Lema 3.3 *Assumimos que (H) e $(H_1) - (H_3)$ ocorrem. Então, para $\|a_j\|_\infty$ pequeno, com $j = 1, 2$, $\widehat{\Phi}$ satisfaz:*

i) Existem $0 < R, \beta$ com $\|(\underline{u}, \underline{v})\| < R$ tal que

$$\widehat{\Phi}(\underline{u}, \underline{v}) < 0 < \beta \leq \inf_{\partial B_R(0)} \widehat{\Phi}(u, v).$$

ii) Existe $e \in E \setminus B_{2R}(0)$ tal que $\widehat{\Phi}(e) < \beta$.

Demonstração: Desde que, $(\underline{u}, \underline{v})$ é uma subsolução do problema $(P3)$, $\widehat{G}_s(x, \underline{u}, t) = (a_1(x)\underline{u} + F_s(x, \underline{u}, t))\underline{u}$ e $\widehat{G}_t(x, s, \underline{v}) = (a_2(x)\underline{v} + F_t(x, s, \underline{v}))\underline{v}$, com $p_i > 1$, para $i = 1, ..., N$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(\underline{u}, \underline{v}) &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \\ &- \int_\Omega (a_1(x)\underline{u} + F_s(x, \underline{u}, t))\underline{u}\, dx - \int_\Omega (a_2(x)\underline{v} + F_s(x, s, \underline{v}))\underline{v}\, dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora, consideremos $\|(u, v)\| = R > 1$, sem perda de generalidades, podemos assumir que

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i} dx \geq 1, \text{ para algum } i = 1, 2, ..., N.$$

e

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i} dx \geq 1, \text{ para algum } i = 1, 2, ..., N.$$

Além disso, aplicando, (3.13), (3.14) e (H_2) temos

$$\widehat{G}_s(x,s,t) \leq \|a_1\|_\infty \underline{u} + \|a_1\|_\infty (1 + |s|^{r-1} + |t|^{r-1}) \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall\ s \in \mathbb{R}$$

e

$$\widehat{G}_t(x,s,t) \leq \|a_2\|_\infty \underline{v} + \|a_2\|_\infty (1 + |s|^{r-1} + |t|^{r-1}) \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente, pelo Lema 3.1 do item (i), existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\widehat{G}_s(x,s,t) \leq \|a_1\|_\infty \|\underline{u}\|_\infty s + \|a_1\|_\infty (s + c_1|s|^r + s|t|^{r-1}) \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3.22}$$

e

$$\widehat{G}_t(x,s,t) \leq \|a_2\|_\infty \|\underline{v}\|_\infty t + \|a_2\|_\infty (t + t|s|^{r-1} + c_2|t|^r) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.23}$$

Consideremos, (3.22), (3.23) em (3.15) e usando a imersão contínua de Sobolev, existem constantes positivas tais que

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(u,v) \ &\geq \ K\|(u,v)\| - c_3\|a_1\|_\infty \|\underline{u}\|_\infty \|(u,v)\| - c_4\|a_1\|_\infty \|(u,v)\| - \\ &- \ c_5\|a_1\|_\infty \|(u,v)\|^r - c_6\|a_2\|_\infty \|\underline{v}\|_\infty \|(u,v)\| - \\ &- \ c_7\|a_2\|_\infty \|(u,v)\| - c_8\|a_2\|_\infty \|(u,v)\|^r - c_9\|a_1\|_\infty \|(u,v)\|^r - \\ &- \ c_{10}\|a_1\|_\infty \|(u,v)\|^r - c_{11}\|a_2\|_\infty \|(u,v)\|^r - c_{12}\|a_2\|_\infty \|(u,v)\|^r, \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde $K = \min\left\{\frac{k_1}{p_N}, \frac{k_2}{p_N}\right\}$.

Note que, se $(u,v) \in \partial B_R(0)$ com $R > 1$ e para $\|a_j\|_\infty$ suficientemente pequeno, com $j = 1, 2$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{\Phi}(u,v) \geq \beta, \ \forall\ (u,v) \in \partial B_R(0).$$

Assim, podemos escolher β, R e $\|a_j\|_\infty$, combinando com as desigualdades (3.21) e (3.24) encontramos

$$\widehat{\Phi}(\underline{u}, \underline{v}) < 0 < \beta \leq \inf_{(u,v) \in \partial B_R(0)} \widehat{\Phi}(u,v).$$

O que mostra a condição (i).

Observe que, pela definição de $\widehat{G}_s$ temos

$$\widehat{G}_{s\underline{u}}(x, s\underline{u}, 0) \geq F(x, s\underline{u}, 0) \text{ para todo } s \geq 1, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por (H_1) e (3.15) encontramos

$$\widehat{\Phi}(s\underline{u},0) \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{s^{p_N}}{p_1} \int_\Omega \Big|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\Big|^{p_N} dx - \int_\Omega F(x, s\underline{u}, 0)\, dx.$$

Consideremos a hipótese (H_3), existe uma constante positiva $\widetilde{K}_1$ tal que

$$F(x,s,0) \geq \widetilde{K}_1 s^{\frac{1}{\theta_1}}, \text{ para todo } s \geq \max\{1, s_0\},$$

onde s_0 é a constante que aparece em (H_3).

Assim,

$$\widehat{\Phi}(s\underline{u},0) \leq s^{p_N} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{1}{p_1}\Big|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\Big|^{p_i} dx - \widetilde{K}_1 s^{\frac{1}{\theta_1}} \int_\Omega |\underline{u}|^{\frac{1}{\theta_1}}\, dx.$$

Uma vez que, $\frac{1}{p^*} < \theta_1 < \frac{1}{p_N}$, podemos concluir $\widehat{\Phi}(s\underline{u},0) \to -\infty$ quando $s \to +\infty$.

Portanto, escolhemos $e = s_0(\underline{u},0) \in E$ tal que $\|e\| > R$ e $\widehat{\Phi}(e) < \beta$, o que satisfaz a condição (ii). ■

Demonstração do teorema 3.2 Sejam $(\underline{u},\underline{v}), (\overline{u},\overline{v})$ a subsolução e supersolução de (P3), dadas no Lema 3.1 e (u_1,v_1) a solução do sistema $(P3)$, encontrada no Teorema 3.1.

Pelo Lema 3.2 e o Teorema do Passo da Montanha (ver [9]), concluímos que

$$\widehat{c} = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \widehat{\Phi}(\gamma(t)) \text{ onde } \Gamma = \{\gamma \in C\big([0,1],E\big) \colon \gamma(0) = (\underline{u},\underline{v}),\ \gamma(1) = e\},$$

é o valor crítico de $\widehat{\Phi}$.

Por (3.7), (3.8), (3.13) e (3.14) temos $G_s(x,s,t) = \widehat{G}_s(x,s,t)$ para $s \in [0,\overline{u}]$ e $G_t(x,s,t) = \widehat{G}_t(x,s,t)$ para $t \in [0,\overline{v}]$, dessa forma $\Phi(u,v) = \widehat{\Phi}(u,v)$ com $u \in [0,\overline{u}]$ e $v \in [0,\overline{v}]$, onde Φ e $\widehat{\Phi}$ são definidos por (3.10) e (3.15), respectivamente.

Então, $\widehat{\Phi}(u_1,v_1) = \inf_{\mathcal{M}} \Phi(u,v)$, onde

$$\mathcal{M} = \Big\{(u,v) \in E : \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } \underline{v} \leq v \leq \overline{v} \text{ q.t.p. em } \Omega\Big\},$$

é dado na demonstração do Teorema 3.1.

Portanto, $(P3)$ possui duas soluções fracas (u_1,v_1) e $(u_2,v_2) \in E$, tais que

$$\Phi(u_1,v_1) \leq \Phi(\underline{u},\underline{v}) < 0 < \beta \leq \widehat{c} = \widehat{\Phi}(u_2,v_2).$$

Relembramos que $\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq v_1 \leq \overline{v}$, logo $(u_1,v_1) > 0$. Agora mostraremos $u_2, v_2 > 0$.

De fato, consideremos $((\underline{u}-u_2)^+,(\underline{v}-v_2)^+)$ como funções testes, definindo o conjunto $\{(u_2,v_2)<(\underline{u},\underline{v})\}:=\{x\in E; u_2(x)<\underline{u}(x) \text{ e } v_2(x)<\underline{v}(x)\}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\Big|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial(\underline{u}-u_2)^+}{\partial x_i}dx \quad &+ \quad \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\Big|\frac{\partial v_2}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial v_2}{\partial x_i}\frac{\partial(\underline{v}-v_2)^+}{\partial x_i}dx \\ &= \int_{\{u_2<\underline{u}\}}(a_1\underline{u}+F_s(x,\underline{u},t))(\underline{u}-u_2)^+\,dx \\ &+ \int_{\{v_2<\underline{v}\}}(a_2\underline{v}+F_t(x,s,\underline{v}))(\underline{v}-v_2)^+\,dx.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Uma vez que, $(\underline{u},\underline{v})$ é uma subsolução para o sistema (3.1) e por (3.25) teremos

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\Big|\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\frac{\partial(\underline{u}-u_2)^+}{\partial x_i}dx-\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\Big|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial(\underline{u}-u_2)^+}{\partial x_i}dx\le 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\Big|\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\frac{\partial(\underline{v}-v_2)^+}{\partial x_i}dx-\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\Big|\frac{\partial v_2}{\partial x_i}\Big|^{p_i-2}\frac{\partial v_2}{\partial x_i}\frac{\partial(\underline{v}-v_2)^+}{\partial x_i}dx\le 0.$$

Portanto, pela desigualdade (2.5), encontramos $\|(\underline{u}-u_2)^+\|_{1,\overrightarrow{p}}\le 0$ e $\|(\underline{v}-v_2)^+\|_{1,\overrightarrow{p}}\le 0$, isto implica $0<\underline{u}<u_2$ q.t.p. em Ω e $0<\underline{v}<v_2$ q.t.p. em Ω . Concluímos que $u_2,v_2>0$. ■

Apêndice A

Resultados Básicos

Neste Apêndice, faremos resumo sobre os espaços Sobolev anisotrópicos. Para mais informações consulte [59], [60] e [67].

O espaço $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, é definido como completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ em relação a norma

$$\|u\|_{1,\overrightarrow{p}} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p_i}.$$

Além disso, este espaço é um espaço de Banach reflexivo, onde $\left\|.\right\|_{p_i}$ denota a norma do espaço de Lebesgue $L^{p_i}(\Omega)$.

Desde que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, por [45, Teorema 1] a imersão contínua $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, p^*]$ depende da Desigualdade de Poincaré. Mais precisamente denotando por $e_1, \ldots, e_n$ a base canônica do $\mathbb{R}^N$, assumimos que Ω tem diâmetro $b > 0$ na direção de e_i, isto é ,$\sup(x - y, e_i) = b$. Assim, para todo $q \geq 1$, temos

$$|u|_q \leq \frac{bq}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_q \tag{A.1}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

O seguinte resultado é essencial para o nosso trabalho, por isso apresentamos sua demonstração.

Lema A.1 *Assuma que f satisfaz* (f_1). *Seja* $\Psi_\beta(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$, *então* $\Psi_\beta \in Lip_{loc}(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \mathbb{R})$ *com* $\partial\Psi_\beta(u) \subset L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$, *isto é, dado* $\rho \in \partial\Psi_\beta(u)$ *existe* $\rho \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \int_\Omega \rho\,\varphi dx,\ \forall\ \varphi \in L^q(\Omega)\ e\ \rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))],\ q.t.p.\ em\ \Omega.$$

Demonstração: Por (f_2), obtemos

$$\left|\widehat{\Psi}_\beta(u)\right| \leq C \int_\Omega |u|\, dx + C \int_\Omega |u|^q\, dx \tag{A.2}$$

para alguma constante $C > 0$. Para cada $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ da imersão contínua de Sobolev e pela desigualdade de Hölder segue que Ψ_β está bem definido.

Dada $w \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, fixemos $r > 0$. Dados $u, v \in B_r(w) = \{z \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega); \|w\|_{1,\overrightarrow{p}} \leq r\}$, temos

$$\begin{aligned}\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| &= \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(x,s)\,ds\,dx - \int_\Omega \int_0^{v(x)} f(x,s)\,ds\,dx \\ &\leq \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |f(x,s)|\,ds\,dx,\end{aligned}$$

onde $\theta(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $\eta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$.

Por (A.2)

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq C \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} ds\,dx + C \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |s|^{q-1}\,ds\,dx.$$

Para cada $q > 1$, a função $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\frac{s|s|^{q-2}}{q-1}$ é de classe C^1 com $L'(s) = |s|^{q-1}$. Como

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq C \int_\Omega |\eta(x) - \theta(x)|dx + C \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\theta(x)} L'(s)\,ds\,dx.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq C \int_\Omega |\eta(x) - \theta(x)|dx + C \int_\Omega L(\eta(x)) - L(\theta(x))\,dx$$

agora pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi(x) \in (\eta(x), \theta(x))$, tal que

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq C \int_\Omega |\eta(x) - \theta(x)|dx + C \int_\Omega L'(\xi)(\theta - \eta)\,dx.$$

Como $\theta(x) - \eta(x) = |u(x) - v(x)|$, temos

$$\begin{aligned}\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| &\leq C \int_\Omega |\eta(x) - \theta(x)|dx + C \int_\Omega L'(\xi)(\theta - \eta)\,dx \\ &\leq C \int_\Omega |u - v|dx + C \int_\Omega L'(\xi)\,|u - v|dx \\ &\leq C \int_\Omega |u - v|dx + C \int_\Omega (|u| + |v|)^{q-1}\,|u - v|dx \\ &\leq C \int_\Omega |u - v|dx + C \int_\Omega (|u|^{q-1} + |v|^{q-1})\,|u - v|dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq C \int_\Omega |u - v|dx + C \int_\Omega |u|^{q-1}\,|u - v|dx + C \int_\Omega |v|^{q-1}\,|u - v|dx.$$

Desde que, por imersão contínua de Sobolev temos $u \in L^q(\Omega)$, $|u|^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$. Aplicando a desigualdade de Hölder

Assim, por (f_2) temos

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq C\int_\Omega |u-v|\,dx + C\int_\Omega (|u|^{q-1} + |v|^{q-1})|u-v|\,dx.$$

Agora aplicando a desigualdade de Hölder e (A.2), temos

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq C\|u-v\|_{1,\overrightarrow{p}} + C(\|u\|^{q-1}_{1,\overrightarrow{p}} + \|v\|^{q-1}_{1,\overrightarrow{p}})\|u-v\|_{1,\overrightarrow{p}}\,.$$

Desde que $u, v \in B_r(w)$, pela desigualdade triangular

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq 2C(r + \|w\|_{1,\overrightarrow{p}})^{q-1}\|u-v\|_{1,\overrightarrow{p}}\,.$$

Definindo a constante $K_w = 2C(r + \|w\|_{1,\overrightarrow{p}})^{q-1}$

$$\Big|\Psi_\beta(u) - \Psi_\beta(v)\Big| \leq K_w\|u-v\|_{1,\overrightarrow{p}}\,dx,$$

o que mostra que $\Psi_\beta \in Lip_{loc}(W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega), \mathbb{R})$.

Relembramos que o gradiente generalizado de Ψ em u é dado por

$$\partial\Psi_\beta(u) = \{\gamma \in (W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega))^*; \Psi_\beta^\circ(u,v) \geq \langle\gamma, v\rangle \text{ para todo } v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)\}$$

veja as definições (A.2) e (A.3),

Note também que,

$$0 \leq \underline{f}(u(x)) \leq \overline{f}(u(x)) \leq C(1 + (u(x)^+)^{q-1}) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Seja $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mu_n \to 0$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ e $\delta_n \to 0^+$, tais que, então

$$\Psi_\beta^\circ(u,v) = \lim_{\mu_n \to 0}\sup_{\delta \to 0^+} \frac{\Psi_\beta(u + \mu_n + \delta_n v) - \Psi_\beta(u + \mu_n)}{\delta}, \text{ para todo } v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \quad \text{(A.3)}$$

ou seja,

$$\Psi_\beta^\circ(u,v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Psi_\beta(u + \mu_n + \delta_n v) - \Psi_\beta(u + \mu_n)}{\delta_n}. \quad \text{(A.4)}$$

Pela definição de Ψ e (A.4), temos

$$\Psi_\beta^\circ(u,v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\int_\Omega F(u + \mu_n + \delta_n v) - \int_\Omega F(u + \mu_n)}{\delta_n}, \quad \text{(A.5)}$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Além disso, temos

$$\Psi_{\beta}^{\circ}(u,v) = \lim_{n\to\infty} \sup \left[\int_{\Omega} G_n(v(x))dx \right], \tag{A.6}$$

para todo $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$, onde

$$G_n(v(x)) = \frac{1}{\delta_n} \left(F(u+\mu_n+\delta_n v) - F(u+\mu_n) \right).$$

Desde que, $\mu_n \to 0$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, da imersão contínua de Sobolev, a menos de subsequência

$$\mu_n \to 0 \text{ em } L^r(\Omega) \text{ para todo } r \in [1, \overline{p}^*].$$

Além disso,

$$\mu_n(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \mid G_n(v(x)) \mid &= \left| \frac{1}{\delta_n} \left(F(u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)) - F(u(x)+\mu_n(x)) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_{u(x)+\mu_n(x)}^{u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)} C(1+|s|^{q-1})ds \right| \end{aligned}$$

Logo

$$\mid G_n(v(x)) \mid \leq C|v| + \frac{C}{q-1} \frac{|u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)|^{q-1} - |u(x)+\mu_n(x)|^{q-1}}{\delta_n} \tag{A.7}$$

Agora vamos considerar a seguinte função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = |u(x)+\mu_n(x)+t\delta_n v(x)|^{q-1}.$$

Desde que g é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, segue-se pelo Teorema do Valor Médio dado $0 < |\delta_n| < 1$, existe $\theta_n \in (0,1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\theta_n)(1-0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(1) &= |u(x)+\mu_n+\delta_n v(x)|^{q-1} \\ g(0) &= |u(x)+\mu_n|^{q-1} \\ g'(\theta_n) &= q-1|u(x)+\mu_n+\theta_n\delta_n v(x)|^{q-2}|\delta_n||v(x)| \end{aligned}$$

Por um instante adotaremos a seguinte notação $u(x) = u$ e $v(x) = v$ então

$$\frac{1}{q-1}\frac{|u+\mu_n+\delta_n v|^{q-1}-|u+\mu_n|^{q-1}}{\delta_n} = |u+\mu_n+\delta_n\theta_n v|^{q-2}|v|. \tag{A.8}$$

Substituindo (A.8) em (A.7)

$$| G_n(v(x)) | \leq C|v| + C|u+\mu_n+\delta_n\theta_n v|^{q-2}|v|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u+\mu_n+\delta_n\theta_n v|^{q-2} &\leq (3\max\{u,\mu_n,\delta_n\theta_n v\})^{q-2} \\ &\leq 3^{q-2}\max\{u^{q-1},\mu_n^{q-2},(\delta_n\theta_n v)^{q-2}\} \\ &\leq 3^{q-2}u^{q-2}+3^{q-2}\mu_n^{q-2}+3^{q-2}(\delta_n\theta_n v)^{q-2} \\ &\leq 3^{q-2}(|u|^{q-2}+|\mu_n|^{q-2}+|\delta_n\theta_n v|^{q-2}) \\ &\leq 3^{q-2}(|u|^{q-2}+|\mu_n|^{q-2}+|\delta_n|^{q-2}|\theta_n|^{q-2}|v|^{q-2}). \end{aligned}$$

Como $\theta_n \in (0,1)$ e $0 < |\delta_n| < 1$ então, $0 < |\theta_n||\delta_n| < 1$ implicando $0 < |\delta_n|^{q-2}|\theta_n|^{q-2} < 1$.

$$\begin{aligned} | G_n(v(x)) | &\leq C|v| + 3^{q-2}(|u(x)|^{q-2}+|\mu_n|^{q-2}+|v(x)|^{q-2})|v| \\ &= C|v| + 3^{q-2}(|u(x)|^{q-2}|v|+|\mu_n|^{q-2}|v|+|v|^{q-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$| G_n(v(x)) | \leq C|v| + C(|u|^{q-2}|v|+|\mu_n|^{q-2}|v|+|v|^{q-1}),$$

para alguma constante $C > 0$.

Desde que $\mu_n \to 0$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, então a menos de subseqüência temos

$$\mu_n \to 0 \text{ em } L^r(\Omega) \text{ e } \mu_n(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Então, existe $\Theta(x) \in L^r(\Omega)$, tal que,

$$|\mu_n| \leq \Theta(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto,

$$C|v| + C(|u|^{q-2}|v|+|\Theta|^{q-2}|v|+|v|^{q-1}) \in L^1(\Omega).$$

Como

$$\limsup_{n\to\infty} G_n(v(x)) \leq \overline{f}(u(x))v(x).$$

Segue do Lema de Fatou e do fato $\limsup_{n\to\infty} G_n(v) = F^\circ(u,v)$

$$\Psi_\beta^\circ(u,v) = \limsup \int_\Omega G_n(v(x))dx \leq \int_\Omega F^\circ(u,v)dx. \tag{A.9}$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Por [29] veja (pág.107), temos

$$F^\circ(u;v) = \begin{cases} \overline{f}(x,u)v \;\; se \;\; v > 0 \\ \underline{f}(x,u)v \;\; se \;\; v < 0. \end{cases} \tag{A.10}$$

Combinando (A.9) e (A.10),

$$\Psi_\beta^\circ(u,v) \leq \left[\int_{\{v>0\}} \overline{f}(u(x))v(x)dx + \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u(x))v(x)dx \right]$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Além disso, como $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, para todo $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ existe $v_n \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que, $v_n \to v$ em $W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$.

Note que,

$$\Psi_\beta^\circ(u,v_n) \to \Psi_\beta^\circ(u,v) \text{ para todo } v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega).$$

De fato, sabemos que $\Psi_\beta^\circ(u,.) : W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana com K. Daí

$$|\Psi_\beta^\circ(u,v_n) - \Psi_\beta^\circ(u,v)| \leq K\|v_n - v\| \to 0.$$

quando $n \to \infty$.

Por densidade, obtemos

$$\Psi_\beta^\circ(u,v) \leq \left[\int_{\{v>0\}} \overline{f}(u(x))v(x)dx + \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u(x))v(x)dx \right] \tag{A.11}$$

para todo $v \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$.

Seja $\rho \in \partial\Psi_\beta(u) \subset (L^q(\Omega))^*$ e suponhamos por contradição que existe um conjunto $A \subset \Omega$ com $med(A) > 0$, tal que,

$$\rho(x) < \underline{f}(u(x)) \text{ em } A.$$

Então,

$$\int_A \rho(x)dx < \int_A \underline{f}(u(x))dx. \tag{A.12}$$

Note que

$$\int_\Omega \rho(x)(-\chi_A)dx = -\int_A \rho(x)dx \tag{A.13}$$

onde χ_A é a função característica do conjunto A e $(-\chi_A) \in L^q(\Omega)$. Por outro lado como $\rho(x) \in (L^q(\Omega))^*$, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u \in L^q(\Omega)$ tal que

$$\langle \rho, v \rangle = \int_\Omega uv\, dx \text{ para todo } v \in L^q(\Omega).$$

Em particular tomando $v = -\chi_A$ e usando o fato de que $\rho \in \partial\Psi_\beta(u)$, temos

$$\langle \rho, (-\chi_A) \rangle = \int_\Omega u(-\chi_A)\, dx \text{ para todo } v \in L^q(\Omega).$$

Por identificação obtemos

$$\langle \rho, (-\chi_A) \rangle = \int_\Omega u(-\chi_A)dx. \tag{A.14}$$

Pela definição de $\partial\Psi_\beta(u)$ temos

$$\langle \rho, (-\chi_A) \rangle \leq \Psi_\beta^\circ(u(-\chi_A)). \tag{A.15}$$

De (A.11),(A.12),(A.13),(A.14) e (A.15) obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_A \rho(x)dx &= \int_\Omega \rho(x)(-\chi_A)dx \\
&= \langle \rho(x), (-\chi_A) \rangle \\
&\leq \Psi_\beta^\circ(u, -\chi_A) \\
&\leq \left[\int_{\{(-\chi_A)>0\}} \overline{f}(u(x))(-\chi_A)(x)dx + \int_{\{(-\chi_A)<0\}} \underline{f}(u(x))(-\chi_A)(x)dx \right] \\
&\leq \left[\int_{\{(-\chi_A)<0\}} \underline{f}(u(x))(-\chi_A)(x)dx \right] \\
&= -\int_A \underline{f}(u(x))dx
\end{aligned}$$

logo

$$-\int_A \rho(x)dx \leq -\int_A \underline{f}(u(x))dx$$

isto é,

$$\int_A \underline{f}(u(x))dx \leq \int_A \rho(x)dx$$

o que contradiz (A.12). Portanto

$$\underline{f}(u(x)) \leq \rho(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Usando o raciocínio análogo teremos

$$\rho(x) \leq \overline{f}(u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim, dado $u \in W_0^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ e $\rho \in \partial\Psi_\beta(u)$ concluímos que

$$\rho(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Provando assim o resultado. ■

A.1 Funcional localmente lipschitziano e gradiente generalizado

Definição A.1 *Seja X um espaço de Banach e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que I é um funcional localmente lipschitziano ($Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) se dado $u \in X$, existir uma vizinhança $V = V_u \subset X$ de u e uma constante $K = K_v \geq 0$ tal que*

$$|I(v_1) - I(v_2)| \leq K\|v_1 - v_2\|, \ \forall\ v_1, v_2 \in V. \tag{A.16}$$

Definição A.2 *A Derivada Direcional Generalizada de um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $u \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $I^\circ(u, v)$ é definida por*

$$I^\circ(u, v) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}, \ \forall\, v \in X.$$

Consideremos as seguintes propriedades:

(i) A função $I^\circ(u, .) : X \to \mathbb{R}$ é sub-aditiva e homogênea positiva,isto é,

$$I^\circ(u, v_1 + v_2) \leq I^\circ(u, v_1) + I^\circ(u, v_2), \ \forall\, v_1, v_2 \in X,$$

e

$$I^\circ(u, \lambda v) = \lambda I^\circ(u, v), \ \forall\, v \in X \text{ e } \lambda \geq 0.$$

(ii) $I^\circ(u, v)$ é um funcional convexo.

(iii) $|I^\circ(u, v)| \leq K(u)\|v\|$, onde $K(u) \geq 0$ satisfaz (A.16) e depende do conjunto aberto $V = V_u$, para cada $u \in X$.

(iv) $I^\circ(u, v)$ é uma função semi-contínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{(u_j, v_j) \to (u, v)} I^\circ(u_j, v_j) \leq I^\circ(u, v),$$

onde $(u_j, v_j) \in X \times X$.

(v) $|I^\circ(u,v) - I^\circ(u,t)| \leq K\|v-t\|$, $\forall$ u, v, e $t \in X$, isto é, $I^\circ(u;.) : X \to \mathbb{R}$ é uma função lipschitz, com constante K.

(vi) $(I+H)^\circ(u,v) \leq I^\circ(u,v) + H^\circ(u,v)$ e $I^\circ(u,-v) = (-I)^\circ(u,v)$ $\forall$ $u, v \in X$.

Agora, definiremos o Gradiente generalizado de um funcional localmente Lipschitz.

Definição A.3 *Seja $I \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$. Definimos o Gradiente generalizado de I no ponto $u \in X$, e denotamos por $\partial I(u)$, o subconjunto de X^* dado por*

$$\partial I(u) = \Big\{ f \in X^*; \langle f, v \rangle \leq I^\circ(u,v), \forall v \in X \Big\}.$$

Desde que $I^\circ(u,0) = 0$, segue-se que $\partial I(u) = \partial I^\circ(u,0)$.

Exemplo Seja $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $I(x) = |x|$. Temos que $I \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ e o gradiente generalizado de I é

$$\partial I(u) = \begin{cases} \{\text{-1}\}, & se \quad u < 0 \\ [\text{-1,1}], & se \quad u = 0 \\ \{1\}, & se \quad u > 0. \end{cases}$$

Lema A.2 (*veja*[*63*]) *O Gradiente generalizado de um funcional $(I \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R}))$ é sempre não vazio, isto é, $\partial I(u) \neq \emptyset$.*

Lema A.3 (*veja*[*63*]) *Dados $u, v \in X$ tem-se, $I^\circ(u,v) = \max\{\langle f, v\rangle; f \in \partial I(u)\}$.*

Proposição A.1 *(veja[29], [31]) Seja $f \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ então:*

(P1) *Para todo $x \in X$ o conjunto $\partial f(x) \subset X^*$ é convexo e compacto na topologia fraca$*$. Além disso, para $\xi \in \partial f(x)$ temos $\|\xi\|_{X^*} \leq K(x)$.*

(P2) *Para cada $f, g \in Lip_{loc}(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se que*

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x) \ e \ \partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x).$$

(P3) *A função*

$$\partial f \to \mathcal{P}(X^*)$$
$$x \to \partial f(x).$$

é semi-contínua superiormente, isto é, para cada $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$ dados, existe $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$, tal que se $\|x - x_0\| < \delta$ e $\xi \in \partial f(x)$, existe $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ verificando

$$\|\xi - \xi_0\|_{X^*} < \epsilon,$$

ou equivalentemente,

$$|\langle \xi - \xi_0, v\rangle|_{X^*} < \epsilon, \ \forall \ v \in X, \ com \ \|v\| \leq 1.$$

(P4) *Seja*

$$\partial f \to \mathcal{P}(X^*)$$
$$x \to \partial f(x).$$

A função ∂f é fechada fraco*, isto é, se $(x_j, \xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X \times X^*$ é uma sequência tal que $\xi \in \partial f(x)$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x \in X$ e $\lim\limits_{j\to\infty}\langle \xi_j - \xi_0, v\rangle = 0$, $\forall \ v \in X$, então $\xi_0 \in \partial f(x)$.

(P5) *O funcional $x \to f(x)$ é semi-contínua inferiormente, isto é,*

$$\lim_{x\to x_0} \inf f(x) \geq f(x_0).$$

(P6) *Sejam $\phi \in C^1([0,1], X)$ e $f \in Lip_{Loc}(X, \mathbb{R})$. Então, a função $h = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ é diferenciável q.t.p. em $[0,1]$ e*

$$h^{'}(t) \leq \max\{\langle \xi, \phi^{'}\rangle; \xi \in \partial f(\phi(t))\}, \ q.t.p. \ em \ [0,1].$$

(P7) *Se f é continuamente diferenciável a Fréchet numa vizinhança aberta de $x \in X$, temos*

$$\partial f(x) = \{f^{'}(x)\}.$$

(P8) *Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então,*

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

(P9) *Se f for convexa e contínua, então $\partial f(u) = \partial(f^{\circ}(u;.))(0)$;*

Lema A.4 *Para cada $u \in X$ existe $w \in \partial I(u)$ tal que*

$$m(u) = \min\{\|w\|_{X^*}, w \in \partial I(u)\}.$$

Demonstração: (veja [29], [63])

Definição A.4 *Uma sequência $(u_n) \subset X$ é uma sequência Palais-Smale no nível c $(P.S)_c$ quando*

$$I(u_n) \to c \ e \ m(u_n) \to 0.$$

Definição A.5 *Um funcional* $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *satisfaz a condição Palais-Smale no nível* c, *se toda sequência* $(P.S)_c$ *possui uma subsequência fortemente convergente.*

Teorema A.1 *Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *verificando a condição* (PS) *com* $I(0) = 0$. *Suponhamos que:*

(i) *Existem* $\alpha, r > 0$ *tais que* $I(u) \geq \alpha > 0$ *para todo* $u \in X$ *tal que* $\|u\| = r$.

(ii) *Existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\| > r$ *e* $I(e) < 0$.

Para

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

defina

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

Então $c \geq \alpha$ *e* c *é valor crítico de* I.

Demonstração:(veja [47])

Teorema A.2 *Sejam* V *um espaço de Banach reflexivo com* $\|.\|$, *e* $M \subset V$ *um subconjunto fracamente fechado de* V. *Suponha* $E : M \to \overline{\mathbb{R}}$ *coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente em* M *com respeito a* V. *Então,* E *é limitado inferiormente, e atinge seu infímo em* M.

Demonstração:veja [65].

Apêndice B

Resultados importantes

Neste apêndice enunciaremos os principais resultados utilizados nas demonstrações desta tese.

No que segue-se temos as seguintes notações. X é um conjunto mensurável; μ é uma medida em X; M^+ é o conjunto das funções mensuráveis não-negativas em X.

Definição B.1 (Veja [46]) *Definimos a parte positiva e negativa de uma função u por*

$$u_+ = \max\{u, 0\} \text{ e } u_- = \max\{-u, 0\}.$$

Temos $u = u_+ - u_-$ *e* $|u| = u_+ + u_-$.

Lema B.1[Veja [46]] Seja $u \in W^1(\Omega)$, então $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}, & se\, u > 0 \\ 0, & se\, u \leq 0. \end{cases} \quad \frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0, & se\, u \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}, & se\, u < 0. \end{cases} \quad \frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}, & se\, u > 0 \\ 0, & se\, u = 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i}, & se\, u < 0. \end{cases}$$

Teorema B.1 *(Lema de Fatou) (veja[19]) Se f_n pertence a M^+, então*

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Teorema B.2 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) (veja[19]) Seja f_n uma sequência de funções integráveis que convergem quase em todo ponto para uma função mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que*

$$|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema B.3 *(Desigualdade de Hölder) (veja[19]) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \, e \, \|fg\| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema B.4 *(Desigualdade de Minkowski) (veja[19]) Se f e h pertencem a $L^p(\Omega)$ $p \geq 1$, então $f + h$ pertencem a $L^p(\Omega)$ e*

$$\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|h\|_q$$

Teorema B.5 *(Teorema da Representação de Riesz) (veja[19]) Seja $G : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado, $1 < p < +\infty$. Então, existe uma função $g \in L^q(\Omega)$, onde $q = \frac{p}{p-1}$, tal que,*

$$\langle G, f \rangle = \int_\Omega fg d\mu \, \forall \, f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $\|G\|_{(L^p)'} = \|g\|_q$.

Teorema B.6 *(Teorema de Vainberg)(veja[19]) Sejam f_n uma sequência de $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então existe uma subsequência f_{n_j} de f_n tal que

- $f_{n_j} \to f(x)$ *q.t.p em* Ω
- $|f_{n_j}| \leq h(x)$ *q.t.p em* Ω, $\forall n_j \in \mathbb{N}$, *onde* $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema B.7 *(veja[49]) Sejam $1 < p < +\infty$ e f_n uma sequência limitada $L^p(\Omega)$ que converge pontualmente para f, q.t.p em Ω. Então*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Lema B.1 *(veja[49]) Sejam $1 < p < +\infty$ e (f_n) uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$e*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n \to +\infty} (\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p).$$

Bibliografia

[1] A. Alberico , G. di Blasio & F. Feo, *A priori estimates for solutions to anisotropic elliptic problems via symmetrization. Math. Nachr. 290, No. 7, 986-1003.*

[2] C. O. Alves & A. El Hamidi, *Existence of solution for a anisotropic equation with critical exponent. Differential Integral Equations, 21, (2008), No. 1-2, 25-40.*

[3] C. O. Alves & A. M. Bertone, *A discontinuous problem involving the p-laplacian operator and critical exponent in* $\mathbb{R}^N$ *. Electronic J. Differential Equations, 42(2003)1-10.*

[4] C. O. Alves, A. M. Bertone & J. V. Goncalves, *A variational approach to discontinuous problems with Critical Sobolev exponents J. Math. Anal. App., 265(2002) 103-127.*

[5] R. A. Adams, *Sobolev spaces. Academic press 1975.*

[6] A. Ambrosetti, H. Brezis & G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. J. Funct. Anal. 122 (1994), No. 2, 519-543.*

[7] A. Ambrosetti, M. Calahorrano & F.Dobarro, *Global branching for discontinuous problems. Comm. Math., 31 (1990)213-222.*

[8] A. Ambrosetti & R. Turner, *Some discontinuous variational problems. Diferential Integral Equations, 1, No 3(1988)341-349.*

[9] A. Ambrosetti & P. H.Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and aplications. J.Functional Analysis, 14(1973)349-381.*

[10] S. N. Antontsev, J. I Diaz & S. Shmarev, *Energy methods for free boundary problems: applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 48. BirkhŽauser, Boston (2002).*

[11] H. Ayadi & F. Mokhtari, *Nonlinear anisotropic elliptic equations with variable exponents and degenerate coercivity. EJDE, (2018), No. 45, pp. 1-23.*

[12] A. Arcoya & M. Calahorrano, *Some discontinuous variational problems with a quasilinear operador. J. Math. Anal. 187 (1994)1059-1072.*

[13] J. G. Azorero & I. P. Alonso., *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. Trans. Amer. Math. Soc. , vol 323 n. 2(1991)877-895.*

[14] P. Baroni. A. Di Castro & G. Palatucci, *Intrinsic geometry and De Giorgi classes for certain anisotropic problems. Discrete Continuous Dynamical Systems - S , 2017, 10 (4) : 647-659. doi: 10.3934/dcdss.2017032.*

[15] M. Badiale, *Critical exponent and discontinuous nonlinearities. Diferential Integral Equations 6 (1993) 1173-1185.*

[16] M. Badiale, *Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 51 (1993)331-342.*

[17] M. Badiale, *Some existence results for sublinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Funkcialaj Ekvacioj, 39 (1996) 183-202.*

[18] M. Badiale & G. Tarantello, *Existence and multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinuous nonlinearities. Nonlinear Analysis, 26 (1997)639-677.*

[19] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley Classics Library 1995.*

[20] J. Bear, *Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier, New York 1972.*

[21] L. Boccardo, M. Escobedo & I. Peral, *A Dirichlet problem involving critical exponents. Nonlinear Anal. 24(1995)1639-1648.*

[22] M. Bendahmane & K. H. Karlsen, *Renormalized solutions of an anisotropic reaction-diffusion-advection system with* L^1 *data. Commun. Pure Appl. Anal. 5(4),(2006)733-762 .*

[23] M. Bendahmane., M. Langlais & M. Saad, *On some anisotropic reaction-diffusion systems with L1-data modeling the propagation of an epidemic disease. Nonlinear Anal. 54(4), (2003)617-636 .*

[24] H. Brezis, *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones. Version española de Juan Ramón Esteban. Alianza Editorial.S. A. Madrid, 1984.*

[25] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer,New York, 2011.*

[26] H. Brezis, L. Niremberg & G. Stampacchia, *A remark on Ky Fan's minimax theorem. Boll. U. M. I.,6(4): (1972)293-300.*

[27] H. Brezis & H. L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure Appl. Math., 36 (1983)437-477.*

[28] K. C. Chang, *The obstacle problem and partial diferential equations with discontinuous non linearities. Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980) 117-146.*

[29] K. C. Chang, *Variational methods for nondiferentiable functionals and their applications to partial diferential equations. J. Math. Anal. 80 (1981)102-129.*

[30] F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications. Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975 2)47-262.*

[31] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis. Jonh Wiley & Sons, N. Y, 1983.*

[32] G. M. Figueiredo & J. R.S. Silva, *A critical anisotropic problem with discontinuous nonlinearities. Nonlinear Analysis-Real World Applications, v. 47, p. 364-372, (2019).*

[33] G. M. Figueiredo & R. G. Nascimento, *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problem with critical exponent and discontinuous nonlinearity. Monatshefte Fur Mathematik, v. -, p. —, (2018).*

[34] F. J. S. A. Corrêa & G. M. Figueiredo, *On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff type via Moser iteration Method. Bound. Value Probl.;v. 2006, No. 00, p. ID 79679-10, (2006).*

[35] F. J. S. A. Corrêa & J. V. Gonçalves, *Sublinear elliptic systems with discontinuous nonlinearities. Appl. Anal., Vol. 44(1990)37-50.*

[36] A. Di Castro, *Elliptic problems for some anisotropic. Rome, Ph.D Thesis, Italy. 2009.*

[37] A. Di Castro & E. Montefusco, *Nonlinear eigenvalues for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations. Nonlinear Anal. 70 (2009)4093-4105.*

[38] A. Di Castro, *Existence and Regularity Results for Anisotropic Elliptic Problems. Advanced Nonlinear Studies 9 (2009)367-393.*

[39] A. Di Castro, *Anisotropic elliptic problems with natural growth terms. Manuscripta math. 135(2011)521-543 .*

[40] G. C. G. dos Santos, *Sobre existência de solução positiva para uma classe de problemas não-locais e para uma classe de problemas locais com não linearidade descontínua. Belém, tese de doutorado, Pa.2016.*

[41] G. C. G. dos Santos & G. M. Figueiredo, *Solutions for a Kirchhoff equation with critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg growth and discontinuos nonlinearity. Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik. n. 17, (2018) 00349.*

[42] B. Ellahyani & A. El Hachimi, *Existence and multiplicity of solutions for anisotropic elliptic problems with variable exponent and nonlinear Robin boundary conditions. EJDE, (2017), No. 188, pp. 1-17.*

[43] A. El Hamidi & J.M. Rakotoson, *Extremal for the anisotropic Sobolev inequalities . Ann. I. H. Poincare, 24, (2007)741-756.*

[44] G. M. Figueiredo, J. R. dos Santos Junior & A. Suárez, *Multiplicity results for an anisotropic equation with subcritical or critical growth. Advanced Nonlinear Studies, V15. Issue 2, Pages 377Ũ394, ISSN 2169-0375, ISSN (Print) (2013)1536-1365.*

[45] I. Fragala, F. Gazzola & B. Kawoll, *Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. NonLinéaire, Analysis,21,(2004)715-734.*

[46] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag, Berlin 1983.*

[47] M. R. Grossinho & S. A. Tersian, *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Diferential Equations 2001.*

[48] G. Hongya. L. Shuang and C. Yi, *Regularity for anisotropic solutions to some nonlinear elliptic system. Front. Math. China (2016), 11(1).*

[49] O. Kavian, *I ntroduction à la théorie des points critiques et applicatons auxproblemes elliptiques. Springer, Heidelberg 1983.*

[50] S. Khademloo, G. A. Afrouzi & T. Norouzi Ghara, *Infinitely many solutions for anisotropic variable exponent problems. Complex Var. Elliptic Eq., 63, (2017)135-1369.*

[51] A. R. Leggat and S. E. Miri, *Anisotropic problem with singular nonlinearity. Complex Var. Elliptic Eq. 61(2016)484-495.*

[52] J. L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case . Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985)145-201 e 2 (1985)145-121.*

[53] F. Mokhtari, *Regularity of the solution to nonlinear anisotropic elliptic equations with variable exponents and irregular data. Mediterr. J. Math. (2017) 14: 141.*

[54] C. B. Morrey, *Multiple integrals in calculus of variations . Springer Verlag, Berim, 1966.*

[55] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian. Second School of Nonlinear Functional Analysis and Aplications to Differential Equations, ICTP-Trieste, 1997.*

[56] K. Perera & E. A. B. Silva, *Existence and multiple of positive solutions for singular quasilinear problems. J. Math. Anal. Appl. 323 (2006)1238-1252.*

[57] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 65, published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.*

[58] V. Radulescu & I. L. Stancu, *Combined concav e convex effects in anisotropic elliptic equations with variable exponent. NoDea, 22, (2015)391-410.*

[59] J. Rákosnik, *Some remarks to anisotropic Sobolev space I. Beiträgezur, Analysis,13(1979)55-68.*

[60] J. Rákosnik, *Some remarks to anisotropic Sobolev space II. Beiträgezur, Analysis,13(1979)55-68.*

[61] D. Repovs, *Infinitely many symmetric solutions for anisotropic problems driven by nonhomogeneous operators. Discrete Continuos Dynamical System-S,(2019),12 (2): 401-411. doi: 103934/dcdss.2019026.*

[62] G. Stampacchia, *Equations Elliptiques du Second Ordre a Coefficients Discontinus. Les Presses de LUniversite de Montreal, 1966.*

[63] J. A. Santos, *Teorema minimax para funcionais localmente lipschitz e aplicações, dissertaçao de mestrado. CCT-UFCG, 2007.*

[64] J. A. Santos & G. M. Figueiredo, *On a Phi-Kirchhoff multivalued problem with critical in an Orlicz-Sobolev space. Assymptotic Analysis 89, (2014)151-172 .*

[65] M. Struwe, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlag, 1996.*

[66] N. Thanh Chung & H. Quoc Toan, *On a class of anisotropic elliptic equations without Ambrosetti Rabinowitz type conditions Nonlinear Anal. R. W. A., 16, (2014)132-145.*

[67] M. Troisi, *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi. Ricerche,Mat.,18(1969)3-24.*

[68] N. Thanh Chung & H. Quoc Toan, *On a class of anisotropic elliptic equations without Ambrosetti Rabinowitz type conditions. Nonlinear Anal. R. W. A., 16, (2014)132-145.*

[69] J. Vétois, *Strong Maximum Principles for Anisotropic Elliptic and Parabolic Equations. Advanced Nonlinear Studies 12 (2012)101-114.*

[70] J. Vétois, *Decay estimates and a vanishing phenomenon for the solutions of critical anisotropic equations. Advances in Math. 284 (2015)122-158.*

[71] J. Vétois, *The blow-up of critical anisotropic equations with critical directions. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 18 (2011)173-197.*

[72] J. Weickert, *Anisotropic diffusion in image processing European Consortium for Mathematics in Industry B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.*

[73] H. Yang & Y. Zhang, *Bubbling solutions for an anisotropic planar elliptic problem with exponential nonlinearity. Nonlinear Anal., 174 (2018)141-168.*