Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática
UFPA-UFAM

Sobre existência de solução para problemas do tipo N&p-Laplaceano com crescimento exponencial crítico.

por

Fernando Bruno Martins Nunes

Belém - PA

Agosto/2017

Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática
UFPA-UFAM

Sobre existência de solução para problemas do tipo N&p-Laplaceano com crescimento exponencial crítico

por

Fernando Bruno Martins Nunes

sob orientação do

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Tese apresentada ao Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática - UFPA/UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Belém - PA

Agosto/2017

Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática
UFPA-UFAM

Área de Concentração: Análise

Conceito: Aprovado

Data de defesa : 24/08/2017

Banca Examinadora

Uberlândio Batista Severo

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Universidade Federal da Paraíba - UFPb

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
Secretaria de Educação do Pará - Seduc-Pa

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Universidade de Brasília - UnB

Prof. Dr^a Rúbia Gonçalves Nascimento
Universidade Federal do Pará - UFPa

Tese apresentada ao Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática - UFPA/UFAM, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Agosto/2017

Nunes, Fernando Bruno Martins

Sobre existência de solução para problemas do tipo N&p-Laplaceano com crecimento exponencial crítico/Fernando Bruno Martins Nunes;

orientador, Giovany de Jesus malcher Figueiredo.- 2017.

107 f. :. 29cm

Inclui bibliografias

Tese (Doutorado)- Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática-UFPA/UFAM, Belém, agosto de 2017.

1. Funções elípticas. 2 Soluções nodais. 3 Crescimento exponencial. 4 Desigualdades variacionais. Figueiredo, Giovany de Jesus Malcher, orient. II.Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. III. Título

CDD 22. ed. 515.983

Dedicatória

À minha família.

.

Agradecimentos

Aos meus pais Fernando e Socorro, a quem devo todas as minhas vitórias.

Ao meu irmão Sales.

À minha namorada Tatiane, pelo amor e companheirismo.

Ao professor Giovany, pela excelente orientação, disponibilidade, paciência e amizade.

Aos meus amigos Alex Pantoja, Alex Alcântara, Hilton e Marcelo.

Aos professores da FACMat-UFPA, em especial ao prof. João Pablo, meu orientador de mestrado.

Aos Professores Uberlandio, Gelson e Rúbia por aceitarem compor a banca julgadora deste trabalho e pelas sugestões dadas.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos resultados de existência de solução positiva e de solução nodal para a seguinte classe de problemas elípticos :

$$-div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$ e $1 < p < N$. As hipóteses sobre a função a nos permitem estender o nosso resultado para uma grande classe de problemas e a função f possui crescimento crítico exponencial. As principais ferramentas utilizadas são Métodos Variacionais, Lema de Deformação e Desigualdade de Trundinger-Moser.

Palavras-chave: Crescimento crítico exponencial, Soluções nodais, Métodos Variacionais, Desigualdade de Trudinger-Moser.

Abstract

In this work, we studied results of existence of positive solution and nodal solution for the following class of elliptic problems :

$$-div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \ \text{ in } \ \Omega, \quad u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega,$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$ with $N \geq 3$ and $1 < p < N$. The hypotheses on function a allow us to extend our result to a large class of problems and f is a function that has exponential critical growth. The main tools used are Variational Methods, Deformation Lemma, Inequalitie of Trundinger-Moser.

Keywords: Exponential critical growth, Nodal Solutions, Variable Methods and Trudinger-Moser Inequality.

Conteúdo

Notações

$\Box$: fim de uma demonstração;

$\rightarrow$: convergência forte;

$\rightharpoonup$: convergência fraca;

$|.|_{L^p} = |.|_{L^p(\Omega)}$;

$|A|$ é a medida de Lebesgue de um conjunto A;

$\displaystyle\int_\Omega f$: denota $\displaystyle\int_\Omega f(x)\ dx$;

$\langle .,. \rangle$: par de dualidade.

Introdução

Neste trabalho, vamos estudar resultados de existência de solução positiva e nodal para a seguinte classe de problemas :

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $1 < p < N$. No Capítulo 1, estudaremos existência de solução positiva e no Capítulo 2 estudaremos existência de solução nodal. No Capítulo 1, as hipóteses sobre a função $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ são :

(a_1) A função a é de classe C^1 e existem constantes $k_1, k_3, k_4 \geq 0$ e $k_2 > 0$ tais que

$$k_1 + k_2 t^{\frac{N-p}{p}} \leq a(t) \leq k_3 + k_4 t^{\frac{N-p}{p}}, \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

(a_2) As funções $t \mapsto a(t^p)t^p, \ \dfrac{1}{p}A(t^p) - \dfrac{1}{N}a(t^p)t^p$ são convexas em $(0, \infty)$, onde

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

(a_3) A função $t \mapsto \dfrac{a(t^p)}{t^{(N-p)}}$ é não-crescente para $t > 0$.

Como consequência imediata da hipótese (a_3) [Apêndice A], existe $\gamma \geq \frac{N}{p}$ tal que

$$a'(t)t \leq \frac{(N-p)}{p}a(t) \text{ para todo } t > 0 \tag{1}$$

e

$$A(t) \geq \frac{1}{\gamma} a(t)t \text{ para todo } t \geq 0. \tag{2}$$

Ainda no capítulo 1 a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) Existe $\alpha_0 \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\exp(\alpha |t|^{N/N-1})} = 0 \ \text{ para } \ \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\exp(\alpha |t|^{N/N-1})} = +\infty \ \text{ para } \ \alpha < \alpha_0;$$

(f_2) A função f satisfaz

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = 0;$$

(f_3) Existe $\theta > p\gamma$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t,$$

para todo $t > 0$, onde γ é a constante que aparece em (2);

(f_4) A função $\quad t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^{N-1}} \quad$ é crescente em $\quad (0, +\infty)$.

(f_5) Existem $r > N$, $\tau > \tau^*$ e $\delta > 0$ tais que

$$f(t) \geq \tau t^{r-1}, \forall \ \ t \geq 0;$$

onde

$$\tau^* := \max\left\{1, \left[2^{N-1} \frac{\theta p \gamma c_r N r (r-p)((\alpha_0 + \delta))^{N-1}}{k_2(\theta - p\gamma)(r - N) p r \alpha_N^{N-1}}\right]^{(r-p)/p}\right\},$$

$$c_r = \inf_{N_r} I_r,$$

$$I_r(u) = \frac{k_3}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_4}{N} \int_\Omega |\nabla u|^N dx - \frac{1}{r} \int_\Omega |u|^r dx$$

e

$$N_r = \{u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\} : I_r'(u)u = 0\},$$

$\alpha_N := N w_{N-1}^{1/N-1}$, onde w_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional da $(N-1)$ esfera.

O primeiro resultado estabelece a existência de solução positiva para o caso subcrítico, ou seja, para $\alpha_0 = 0$.

Teorema 0.1 *Considere as hipóteses $(a_1)-(a_3)$, (f_1) com $\alpha_0 = 0$ e $(f_2)-(f_4)$. Então, o problema (P) tem uma solução positiva de energia mínima.*

O próximo resultado é de existência de solução positiva para (P) considerando o caso crítico, ou seja, quando $\alpha_0 > 0$.

Teorema 0.2 *Considere as hipóteses $(a_1)-(a_3)$, (f_1) com $\alpha_0 > 0$ e $(f_2)-(f_5)$. Então, o problema (P) tem uma solução positiva de energia mínima.*

No Capítulo 2, estudamos a existência de solução u de energia mínima para (P), a qual é nodal, isto é, $u^+ \neq 0$, $u^- \neq 0$ em Ω, onde

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \min\{u(x), 0\}$$

e u muda de sinal exatamente uma vez. Além disso, neste capítulo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e a hipótse (f_5) deve ser substituída pela seguinte hipótese:

(f_5') Existem $r > N$, $\tau > \tau^*$ e $\delta > 0$ tais que

$$sgn(t)f(t) \geq \tau |t|^{r-1}, \forall \ t \neq 0;$$

onde

$$\tau^* := \max\left\{1, \left[2^{N-1}\frac{\theta p \gamma c_r^* N r(r-p)((\alpha_0+\delta))^{N-1}}{k_2(\theta - p\gamma)(r-N)pr\alpha_N^{N-1}}\right]^{(r-p)/p}\right\},$$
$$c_r^* = \inf_{\mathcal{M}_r} I_r$$

e

$$\mathcal{M}_r = \{u \in W_0^{1,N}(\Omega), u^\pm \neq 0 : I_r'(u)u^\pm = 0\}.$$

$\alpha_N := N w_{N-1}^{1/N-1}$, onde w_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional da $(N-1)$ esfera.

Agora o resultado de existência é de solução nodal para o problema (P) considerando o caso subcrítico, isto é, $\alpha_0 = 0$.

Teorema 0.3 *Suponha que a satisfaça $(a_1)-(a_3)$ e $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaça (f_1) com $\alpha_0 = 0$ e $(f_2)-(f_4)$. Então, o problema (P) possui pelo menos uma solução nodal, o qual possui exatamente dois domínios nodais.*

O próximo resultado é de existência de solução nodal para o caso crítico, ou seja, considerando $\alpha_0 > 0$.

Teorema 0.4 *Suponha que a função a satisfaça $(a_1)-(a_3)$ e que a função f satisfaça (f_1) com $\alpha_0 > 0$ e $(f_2)-(f_5')$. Então, o problema (P) possui pelo menos uma solução nodal, o qual possui exatamente dois domínios nodais.*

Os teoremas acima podem ser aplicados para o seguinte modelo de não linearidade :

$$f(t) = \tau t^{r-1} exp(\alpha_0 t^{N/N-1}). \tag{3}$$

Daremos alguns exemplos de função a para ilustrar o grau de generalidade da classe de problemas que estamos estudando.

Exemplo 0.1 *Considerando $a(t) = t^{\frac{N-p}{p}}$, temos que a função a satisfaz as hipóteses $(a_1)-(a_3)$ com $k_1 = k_3 = 0$ e $k_2 = k_4 = 1$. Portanto, os teoremas acima são válidos para o problema*

$$(nL) \qquad -\Delta_N u = f(u) \text{ em } \Omega.$$

Exemplo 0.2 *Considerando $a(t) = 1 + t^{\frac{N-p}{p}}$, temos que a função a satisfaz as hipóteses $(a_1)-(a_3)$ com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$. Portanto, os teoremas acima são válidos para o problema*

$$(pnL) \qquad -\Delta_p u - \Delta_N u = f(u) \text{ em } \Omega.$$

Em particular, o problema (pnL) vem de um sistema de reação-difusão do tipo

$$u_t = div[D(u)\nabla u] + c(x,u), \tag{4}$$

onde $D(u) = (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{N-2})$. Este sistema tem uma ampla gama de aplicações em física e ciências relacionadas, tais como biofísica, física de plasma e em química. Em tais aplicações, a função u descreve a concentração, o primeiro termo do lado direito de (4) corresponde a difusão com um coeficiente de difusão $D(u)$; enquanto o segundo é a reação e relaciona processos de ganho e perda. Tipicamente, em aplicações químicas e biológicas, o termo de reação $c(x,u)$ é um polinômio de u com coeficientes variáveis (veja [21], [41], [42], [46], [66]).

Vamos apresentar outros exemplos que também são interessantes do ponto de vista matemático.

Exemplo 0.3 *Considerando* $a(t) = 1 + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, *temos que a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_3)$ *com* $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 2$ *e* $k_4 = 0$. *Portanto, os teoremas acima são válidos para o problema*

$$-div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right) = f(u) \text{ em } \Omega.$$

Exemplo 0.4 *Considerando* $a(t) = 1 + t^{\frac{N-p}{p}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, *temos que a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_3)$ *com* $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, *e* $k_4 = 2$. *Portanto, os teoremas acima são válidos para o problema*

$$-\Delta_p u - \Delta_N u - \ div\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}\right) = f(u) \text{ em } \Omega.$$

Neste primeiro momento vamos comentar sobre alguns trabalhos que estão relacionados com os resultados do Capítulo 1.

Problemas elíticos do tipo (nL) e com não linearidades f como em (3) tem sido estudadas por muitos autores em domínios limitados ou em $\mathbb{R}^N$, veja [3], [4], [6], [18], [28], [37], [40], [54], [57], [61] e suas referências. Para o caso $N = 2$, veja [7], [25], [58] e suas referências.

O Problema (pnL) em domínio limitado foi estudado em [8], [30] e [52]. Em [8] os autores provaram existência e comportamento assintótico de soluções de equações elíticas quasilineares com dependência do gradiente. Em [30] os autores trataram a existência de soluções positivas e um Princípio de Comparação. Em [52] os autores provaram um resultado de multiplicidade de soluções usando um método variacional refinado baseado na Teoria de Pontos Críticos e Teoria de Morse.

O Problema (pnL) tem sido estudado em todo o $\mathbb{R}^N$ somente com não linearidades com crescimento polinomial. Em [5] foi considerado uma não linearidade que pode ser subcrítica no infinito e supercrítica na origem e potenciais que podem se anular no infinito. Os autores em [12] provaram existência e multiplicidade de soluções usando o Teorema do Passo da Montanha. Em [16] foi considerado uma não linearidade que não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Em [17] os autores estudaram a versão crítica de [16]. Em [30] foi provado existência de solução com $N = q$ e não linearidade com crescimento polinomial e dependendo do gradiente da solução.

O caso com uma função geral a e em domínio limitado foi estudado em [10] e [11]. Em [10] foi estudado problemas de autovalores e em [11] foi provado existência de solução nodal. Em [9] foi considerado existência de solução nodal em todo o $\mathbb{R}^N$. Nos três casos, a não linearidade tem crescimento polinomial subcrítico.

Agora vamos listar o que pensamos ser as principais contribuições dos resultados que estão no Capítulo 1.

1) Para o problema (pnL) e para o caso geral de função a, os autores não consideraram a não linearidade com crescimento exponencial.

2) As hipóteses sobre a função a são satisfeitas por uma classe de operadores que incluem mas não se restringem aos casos $\Delta_N u$ e $\Delta_N u + \Delta_p u$.

3) Na prova de alguns lemas, usamos diferentes argumentos daqueles encontrados em [3], [4], [6], [7], [18], [25], [28], [37], [40], [54], [57], [58], [61], uma vez que o operador não é homogêneo e nem linear.

4) A falta de homogeneidade do operador e a falta de regularidade da não linearidade não permitiram o uso do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Então, no Capítulo 1, nós usamos um Lema de Deformação.

Agora vamos comentar sobre alguns trabalhos que estão relacionados com os resultados do Capítulo 2.

Nos últimos anos, muitos autores mostraram resultados de existência ou multiplicidade de soluções nodais para problemas elíticos. Veja por exemplo uma lista de artigos publicados nos últimos dois anos e as referências neles contidas: [9], [11], [19], [20], [22], [23], [24], [26], [27], [31], [33], [34], [39], [43], [47], [48], [49] [53], [55], [56], [59], [60], [63], [64].

Entretanto, quando a equação tem crescimento exponencial, existem poucos trabalhos sobre soluções nodais. Em [2] os autores mostraram existência e concentração de soluções nodais para o problema

$$-\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \ \ em \ \ \Omega, \tag{5}$$

onde Ω é um domínio no $\mathbb{R}^N$ não necessariamente limitado. A versão de (5) com $\epsilon = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^2$ foi estudado em [1]. Em [24] foi estudado a versão de (5) com um termo de Hénon. A versão de (5) com o operador de Kirchhoff foi estudado em [6]. Em todos esses trabalhos as soluções eram do tipo nodal e a não linearidade com crescimento exponencial.

Para esta classe de problemas quasilineares existem poucos resultados de existência de soluções nodais. Em domínio limitado a existência de solução nodal foi estudado em [9] e em $\mathbb{R}^N$ foi estudado em [11] e [45]. Em todos esses trabalhos as não linearidades eram do tipo polinomial.

Agora vamos listar o que pensamos ser as principais contribuições dos resultados que estão no Capítulo 2.

1) Para o caso geral de função a, os autores de [9], [11] e [45] não consideraram a não linearidade com crescimento exponencial

2) Desde que o operador não é homogêneo e nem linear, algumas estimativas delicadas foram necesárias.

3) A falta de regularidade da função $u \to u^+$ não permitiu o uso do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Então, no Capítulo 2, novamente usamos um Lema de Deformação.

Este trabalho, além dos Capítulos 1 e 2, possui dois apêndices. Nestes apêndices, enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo deste trabalho e indicamos as referências para as consultas das demonstrações.

Para uma melhor organização e compreensão para o leitor, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os principais resultados e as hipóteses sobre as funções a e f.

Capítulo

1

Existência de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quasilineares com crescimento exponencial em domínio limitado.

Neste capítulo, estudamos existência de soluções positivas de energia mínima para o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $1 < p < N$. As hipóteses sobre a função a são:

a_1) A função a é de classe C^1 e existem constantes k_1, k_3, $k_4 \geq 0$ e $k_2 > 0$ tais que

$$k_1 + k_2 t^{\frac{N-p}{p}} \leq a(t) \leq k_3 + k_4 t^{\frac{N-p}{p}}, \text{ para todo } t > 0.$$

a_2) As funções $t \mapsto a(t^p)t^p$, $\dfrac{1}{p}A(t^p) - \dfrac{1}{N}a(t^p)t^p$ são convexas em $(0, \infty)$, onde

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

a_3) A função $\quad t \longmapsto \dfrac{a(t^p)}{t^{(N-p)}}$ é não crescente para todo $t > 0$.

Como consequência imediata de (a_3)[Apêndice A] temos que

$$a^{'}(t)t \leq \frac{N-p}{p} a(t),\ \forall\ t > 0$$

e ainda, existe uma constante real $\gamma \geq \frac{N}{p}$ tal que

$$A(t) \geq \frac{1}{\gamma} a(t)t, \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

As hipóteses sobre a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua são:

f_1) Existe $\alpha_0 \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\exp(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}})} = 0 \ \text{ para } \ \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\exp(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}})} = +\infty \ \text{ para } \ \alpha < \alpha_0;$$

f_2) A função f verifica o limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = 0.$$

f_3) Existe $\theta > p\gamma$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t, \ \ \forall \ \ t > 0$$

em que γ é a mesma constante que aparece como consequência de a_3) e $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$.

f_4) A função $\dfrac{f(t)}{t^{(N-1)}}$ é crescente em $(0, \infty)$.

f_5) Existem $r > N$, $\tau > \tau^*$ e $\delta > 0$ tais que

$$f(t) \geq \tau t^{r-1}, \ \ \forall \ \ t \geq 0,$$

onde

$$\tau^* := \max\left\{1, \left[\frac{2^{N-1}\theta p\gamma c_r Nr(r-p)(\alpha_0+\delta)^{N-1}}{k_2(\theta-p\gamma)(r-N)pr\alpha_N^{N-1}}\right]^{\frac{r-p}{p}}\right\},$$

$$c_r = \inf_{\mathcal{N}_r} I_r,$$

$$I_r(u) = \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - \frac{1}{r}\int_\Omega |u|^r dx$$

e

$$\mathcal{N}_r = \left\{u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ \text{ e } \ u \neq 0 : I_r'(u)u = 0\right\}.$$

Os principais resultados deste capítulo são descritos abaixo.

Teorema 1.1 *(Subcrítico) Assumindo as condições* $(a_1)-(a_3)$, (f_1) *com* $\alpha_0 = 0$ *e* $(f_2)-(f_4)$, *o problema* (P_1) *tem solução positiva com energia mínima.*

Teorema 1.2 *(Crítico) Assumindo as condições* $(a_1)-(a_3)$, (f_1) *com* $\alpha_0 > 0$ *e* $(f_2)-(f_5)$, *o problema* (P_1) *tem solução positiva com energia mínima.*

Note que pela hipótese (f_1), para $\alpha > \alpha_0$ e dado $\epsilon > 0$, existe $l > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \epsilon \exp(\alpha t^{\frac{N}{N-1}}),$$

para todo $t \geq l$. Em particular,

$$|f(t)| \leq \frac{\epsilon}{l^{\frac{1}{N-1}}} t^{\frac{1}{N-1}} \exp(\alpha t^{\frac{N}{N-1}}) \tag{1.1}$$

o que implica que

$$|F(t)| \leq \frac{\epsilon}{l^{\frac{N}{N-1}}} \exp(\alpha t^{\frac{N}{N-1}}), \tag{1.2}$$

para todo $t \geq l$.

Além disso de (f_2), existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq \epsilon|t|^{p-1} \tag{1.3}$$

e

$$|F(t)| \leq \frac{1}{p}\epsilon|t|^p \tag{1.4}$$

para todo $0 < t < \delta_0$. Consequentemente, usando (1.1),(1.2), (1.3) e (1.4), existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\int_\Omega f(u)udx \leq \epsilon \int_\Omega |u|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u|^q \exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})dx \tag{1.5}$$

e

$$\int_\Omega F(u)dx \leq \frac{\epsilon}{p} \int_\Omega |u|^p dx + \tilde{C}_\epsilon \int_\Omega |u|^q \exp(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})dx, \tag{1.6}$$

para todo $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e para todo $q \geq 0$, em particular para $q > N$.

Note que, pela hipótese (a_1) segue que $A(t^p) \leq k_3 t^p + k_4 t^N$, para $t > 0$. O funcional $I : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (P_1) é dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \int_\Omega F(u)dx$$

é de classe C^1 e

$$I^{'}(u)\phi = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx - \int_\Omega f(u)\phi dx,$$

para todo $u, \phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Portanto, pontos críticos de I são soluções fracas de (P_1). A variedade de Nehari associado ao funcional I é dada por

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ \text{ e } \ u \neq 0 : J(u) = 0 \right\},$$

onde $J(u) = I'(u)u$ para todo $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Desde que estamos procurando soluções positivas, consideremos $f(t) = 0$ para todo $t \leq 0$.

No que segue, estabeleceremos alguns resultados necessários para demonstrar os dois teoremas deste capítulo. No próximo resultado provamos que $\mathcal{N}$ é não vazia e que I restrito a $\mathcal{N}$ é limitado inferiormente.

Lema 1.1 *Para cada $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $u \neq 0$, existe um único $t > 0$ tal que $tu \in \mathcal{N}$. Além disso, $I(u) > 0$ para cada $u \in \mathcal{N}$.*

Demonstração: Dado $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $u \neq 0$, considere $\gamma_u(t) = I(tu)$ para $t > 0$. Então $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se $\gamma_u'(t) = 0$. Note que da definição de γ_u e usando (a_1) segue que,

$$\begin{aligned}
\gamma_u(t) &= I(tu) \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tu|^p)dx - \int_\Omega F(tu)dx \\
&\geq \frac{k_1}{p}\int_\Omega |\nabla tu|^p dx + \frac{k_2}{N}\int_\Omega |\nabla tu|^N dx - \int_\Omega F(tu)dx.
\end{aligned}$$

Usando (1.6) vem que

$$\begin{aligned}
\gamma_u(t) &\geq \frac{k_1}{p}\int_\Omega |\nabla tu|^p dx + \frac{k_2}{N}\int_\Omega |\nabla tu|^N dx - \int_\Omega F(tu)dx \\
&\geq \frac{k_1}{p}t^p\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_2}{N}t^N\int_\Omega |\nabla u|^N dx - \frac{\epsilon}{p}t^p\int_\Omega |u|^p dx - \tilde{C}_\epsilon t^q\int_\Omega |u|^q \exp(\alpha|tu|^{\frac{N}{N-1}})dx \\
&= \frac{k_1}{p}t^p\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_2}{N}t^N\|u\|^N - \frac{\epsilon}{p}t^p\int_\Omega |u|^p dx - \tilde{C}_\epsilon t^q\int_\Omega |u|^q \exp(\alpha|tu|^{\frac{N}{N-1}})dx.
\end{aligned}$$

Desde que $1 < p < N$ e da Desigualdade de Poincaré existe $C > 0$ tal que

$$\gamma_u(t) \geq \frac{k_2}{N}t^N\|u\|^N + \frac{1}{p}(k_1 - \epsilon C)t^p\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \tilde{C}_\epsilon t^q\int_\Omega |u|^q \exp(\alpha|tu|^{\frac{N}{N-1}})dx.$$

Considerando $\epsilon > 0$ de tal modo que $(k_1 - \epsilon C) > 0$, temos

$$\gamma_u(t) \geq \frac{k_2}{N}t^N\|u\|^N - \tilde{C}_\epsilon t^q\int_\Omega |u|^q \exp(\alpha|tu|^{\frac{N}{N-1}})dx. \tag{1.7}$$

Da desiguladade de Holder para $s, s' > 1$ e s próximo de 1, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^q \exp(\alpha|tu|^{\frac{N}{N-1}})dx &\leq \left(\int_\Omega |u|^{qs'}dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha|tu|^{\frac{N}{N-1}})dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left(\int_\Omega |u|^{qs'}dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha\|tu\|^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{\frac{N}{N-1}})dx\right)^{\frac{1}{s}},\end{aligned}$$

e escolhendo $t_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\alpha s\|t_1 u\|^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N,$$

pelo Teorema A.1 (Apêndice A), encontramos

$$\sup_{\|\frac{|u|}{\|u\|}\|=1} \int_\Omega \exp(s\alpha\|t_1 u\|^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{\frac{N}{N-1}})dx \leq M.$$

Retornando em (1.7) temos

$$\gamma_u(t) \geq \frac{k_2}{N} t_1^N \|u\|^N - \tilde{C}_\epsilon t_1^q \left(\int_\Omega |u|^{qs'}dx\right)^{\frac{1}{s'}} M^{\frac{1}{s}}.$$

Então

$$\gamma_u(t) \geq D_1 t_1^N - D_2 t_1^q,$$

para alguns $D_1, D_2 > 0$. Assim, desde que $q > N$ segue que

$$\gamma_u(t) > 0, \text{ para todo } 0 < t < t_1.$$

Por outro lado, por (f_3), existe $d > 0$ tal que

$$F(t) \geq dt^\theta, \text{ para } t \text{ suficientemente grande.}$$

Da definição de γ_u e por (a_1)

$$\begin{aligned}\gamma_u(t) &= I(tu)\\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tu|^p)dx - \int_\Omega F(tu)dx\\ &\leq \frac{k_3}{p}t^p\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_4}{N}t^N\int_\Omega |\nabla u|^N dx - t^\theta d\int_\Omega |u|^\theta dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\gamma_u(t)}{t^N} \leq \frac{k_3}{pt^{N-p}}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_4}{N}\|u\|^N - t^{\theta-N}d\int_\Omega |u|^\theta dx.$$

Como $1 < p < N$ e $\theta > N$, temos

$$\frac{\gamma_u(t)}{t^N} \to -\infty, \text{ se } t \to +\infty$$

e consequentemente

$$\gamma_u(t) \to -\infty, \text{ se } t \to +\infty.$$

Então, existe $t(u) > 0$ tal que

$$\gamma_u(t(u)) = \max_{t\geq 0}\gamma_u(t).$$

Portanto ${\gamma_u}'(t(u)) = 0$, ou seja, $I'(t(u)u)u = 0$, mostrando que $t(u)u \in \mathcal{N}$.

Agora mostremos a unicidade. Da definição de γ_u, segue que

$$\begin{aligned}{\gamma_u}'(t) &= t^{N-1}\int_\Omega\left(\frac{a(|t\nabla u|^p)}{t^{N-p}}|\nabla u|^p - \frac{f(tu)}{t^{N-1}}u\right)dx\\ &= t^{N-1}\int_\Omega\left(\frac{a(|\nabla tu|^p)}{|\nabla tu|^{N-p}}|\nabla u|^N - \frac{f(tu)}{(tu)^{N-1}}u^N\right)dx.\end{aligned}$$

Por (a_3) temos que $\dfrac{a(|\nabla tu|^p)}{|\nabla tu|^{N-p}}|\nabla u|^N$ é não crescente e por (f_4) temos que $\dfrac{f(tu)}{(tu)^{N-1}}u^N$ é crescente, portanto $\frac{{\gamma_u}'(t)}{t^{N-1}}$ é decrescente. Então não existe outro $t > 0$ tal que $tu \in \mathcal{N}$. Em particular $t(u)$ é um ponto máximo global de γ_u e $\gamma_u(t(u)) > 0$. Note que se $u \in \mathcal{N}$, então $I(u) > 0$. $\square$

O próximo resultado mostra que sequências em $\mathcal{N}$ não convergem para 0.

Lema 1.2 *Existe uma constante $D > 0$ tal que*

$$0 < D \leq \|u\|, \quad \forall u \in \mathcal{N}.$$

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que existe $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$u_n \to 0 \ \text{ em } \ W_0^{1,N}(\Omega).$$

Desde que $u_n \in \mathcal{N}$,

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx = \int_\Omega f(u_n)u_n dx.$$

Por (1.5) segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \leq \epsilon \int_\Omega |u_n|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u_n|^q \exp(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-1}}) dx.$$

Por (a_1) temos que,

$$\begin{aligned} k_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + k_2 \|u_n\|^N &\leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\ &\leq \epsilon \int_\Omega |u_n|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u_n|^q \exp(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-1}}) dx. \end{aligned}$$

Como $1 < p < N$ e da Desigualdade de Poincaré existe $C > 0$ tal que

$$k_1 \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + k_2 \|u_n\|^N \leq \epsilon C \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u_n|^q \exp(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-1}}) dx.$$

Logo,

$$k_2 \|u_n\|^N + (k_1 - \epsilon C) \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \leq C_\epsilon \int_\Omega |u_n|^q \exp(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-1}}) dx.$$

Considerando $\epsilon > 0$, de modo que $(k_1 - \epsilon C) > 0$, segue que

$$k_2 \|u_n\|^N \leq C_\epsilon \int_\Omega |u_n|^q \exp(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-1}}) dx.$$

Da desigualdade de Holder para $s^{'}, s > 1$, para s próximo de 1, temos que

$$\begin{aligned}
k_2\|u_n\|^N &\leq C_\epsilon \int_\Omega |u_n|^q \exp(\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-1}})dx \\
&\leq C_\epsilon \left(\int_\Omega |u_n|^{qs'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha |u_n|^{\frac{N}{N-1}})dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= C_\epsilon \left(\int_\Omega |u_n|^{qs'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha \|u_n\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n|}{\|u_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}})dx\right)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

Como $u_n \to 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\|u_n\| \leq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha s}\right)^{\frac{N-1}{N}}.$$

Sendo assim, usando Teorema A.1 (Apêndice A), segue-se

$$k_2\|u_n\|^N \leq C_\epsilon \left(\int_\Omega |u_n|^{qs'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} M^{\frac{1}{s}}. \tag{1.8}$$

Como $W_0^{1,N}(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^{qs^{'}}(\Omega)$, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$k_2\|u_n\|^N \leq C_\epsilon (M)^{\frac{1}{s}} \tilde{C} \|u_n\|^q,$$

ou seja,

$$\frac{k_2}{C_\epsilon \tilde{C} (M)^{\frac{1}{s}}} \leq \|u_n\|^{q-N}.$$

Como $q > N$, não podemos ter $u_n \to 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, o que conclui a nossa demonstração.

$\square$

Definimos $c = \inf_{\mathcal{N}} I$ e no próximo resultado provaremos que sequências minimizantes são limitadas.

Lema 1.3 *Se $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é uma sequência minimizante para c, então (u_n) é limitada.*

Demonstração: Desde que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n)u_n = 0$, segue que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= I(u_n) - \frac{1}{\theta}I'(u_n)u_n \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u_n|^p)dx - \int_\Omega F(u_n)dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(u_n)u_n dx. \end{aligned}$$

Por (a_3) temos que

$$c+o_n(1) \geq \frac{1}{p\gamma}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx - \int_\Omega F(u_n)dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(u_n)u_n dx.$$

Assim,

$$c + o_n(1) \geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx.$$

Por (f_3), obtemos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx. \end{aligned}$$

Agora, usando (a_1), temos

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)\left[k_1\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + k_2\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx\right] \\ &= \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)k_1\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)k_2\|u_n\|^N. \end{aligned}$$

Desde que $\theta > p\gamma$ vem que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)k_1\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)k_2\|u_n\|^N \\ &\geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)k_2\|u_n\|^N. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|u_n\|^N \leq \frac{c + o_n(1)}{k_2\left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)}, \tag{1.9}$$

o que conclui que (u_n) é limitada. $\square$

Agora mostraremos que se u é ponto crítico de I restrito a $\mathcal{N}$, então u é ponto crítico de I em todo espaço.

Lema 1.4 *Se $u_0 \in \mathcal{N}$ é tal que*

$$I(u_0) = \min_{\mathcal{N}} I$$

Então $I^{'}(u_0) = 0$.

Demonstração: Vamos supor, por contradição, que $I^{'}(u_0) \neq 0$.

Desde que I é de classe C^1, em particular $I^{'}$ é contínuo, então existem $k, \lambda > 0$ tais que

$$\|I^{'}(u)\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} \geq \lambda, \quad \forall u \in B_k(u_0).$$

Vamos denotar $E = \left[1 - \frac{k}{4}, 1 + \frac{k}{4}\right] \subseteq \mathbb{R}$ e definimos $g : E \to W_0^{1,N}(\Omega)$ por $g(t) = tu_0$. Note que, pelo Lema 1.1, segue que

$$\begin{aligned} c &= I(u_0) \\ &= \max_{t \geq 0} I(tu_0) \\ &= \max_{t \geq 0} I(g(t)) \\ &\geq I(g(t)), \quad \forall \ t \geq 0. \end{aligned}$$

Da definição de g, a igualdade ocorre somente para $t = 1$. Então $I(g(t)) < c, \ \forall \ t \neq 1$.

Em particular,

$$\max\left\{I\left(g\left(1 - \frac{k}{4}\right)\right), I\left(g\left(1 + \frac{k}{4}\right)\right)\right\} =: c_0 < c.$$

Fazendo $\epsilon_0 = \dfrac{c-c_0}{2}$, $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ e $\delta = \frac{k}{4}$ usados em [65, Lema 2.3], segue que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \min\left\{\frac{c-c_0}{2}, \frac{\lambda k}{16}\right\}$$

e existe um homeomorfismo, $\eta : W_0^{1,N}(\Omega) \to W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

i) $\eta(u) = u, \forall u \notin I^{-1}\left([c-\epsilon_0, c+\epsilon_0]\right) \cap B_k(u_0)$;

ii) $\eta\left(I_{c+\epsilon} \cap B_{\frac{k}{2}}(u_0)\right) \subset I_{c-\epsilon}$;

iii) $I\left(\eta(u)\right) \leq I(u), \ \ \forall \ \ u \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Vamos definir, agora, $h : E \to W_0^{1,N}(\Omega)$ por,

$$h(t) = \eta(g(t)),$$

e as funções $\psi_0, \psi_1 : E \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{array}{rcl} \psi_0(t) & = & I^{'}(tu_0)u_0 \\ & \text{e} & \\ \psi_1(t) & = & \dfrac{1}{t}I^{'}(h(t))(h(t)). \end{array}$$

Desde que $t \in \left[1-\frac{k}{4}, 1+\frac{k}{4}\right]$ segue da definição que

$$\begin{array}{rcl} I(g(t)) & \leq & c_0 \\ & < & c - \epsilon_0. \end{array}$$

Por (i), temos

$$h(t) = \eta(g(t)) = g(t) = tu_0.$$

Então

$$\begin{aligned}\psi_0(t) &= I'(tu_0)u_0 \\ &= \frac{1}{t}I'(h(t))(h(t)) \\ &= \psi_1(t), \forall\ \ t \in \left\{\left(1-\frac{k}{4}\right), \left(1+\frac{k}{4}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Segue da teoria do grau que $d(\psi_0, E, 0) = 1$ e pela igualdade vista anteriormente, temos que $d(\psi_1, E, 0) = 1$. Então, existe $t \in E$ tal que $h(t) \in \mathcal{N}$ e ainda

$$c = \min_{\mathcal{N}} I \leq I(h(t)).$$

Isto implica

$$I\left(\eta(g(t))\right) = I(h(t)) \geq c.$$

Note que g é contínua em E, ou seja, g é contínua em 1. Na definição de continuidade, tomando $\epsilon_1 = \frac{k}{2}$ segue que $g(t) \in B_{\frac{k}{2}}(u_0)$. Por outro lado, $I(g(t)) < c < c + \epsilon$. Portanto, $g(t) \in I_{c+\epsilon} \cap B_{\frac{k}{2}}(u_0)$ e por (ii) temos $\eta(g(t)) \subset I_{c-\epsilon}$, isto é,

$$I(\eta(g(t))) = I(h(t)) < c - \epsilon,$$

mas

$$c \leq I(h(t)) < c - \epsilon,$$

o que é um absurdo.

$\square$

1.1 Demonstração do Teorema 1.1

Lema 1.5 *Se* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *é uma sequência minimizante para* c*, então*

$$\int_\Omega f(u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(u)u dx$$

e

$$\int_\Omega F(u_n)dx \to \int_\Omega F(u)dx.$$

Demonstração: Vamos mostrar a primeira convergência. Desde que a sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é minimizante para c, segue do Lema 1.3 existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq M_1, \ \ \forall \ \ n \ \ \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

A menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ W_0^{1,N}(\Omega),$$

das imersões compactas temos

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^p(\Omega), \ \ 1 < p < N,$$

então

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Da continuidade de f, segue que

$$f(u_n(x))u_n(x) \to f(u(x))u(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Agora, é suficiente provarmos que existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$|f(u_n)u_n| \leq g(u_n), \forall \ \ n \ \ \in \mathbb{N},$$

onde $(g(u_n))$ é convergente em $L^1(\Omega)$. Pela desigualdade (1.5) temos que

$$f(u_n(x))u_n(x) \leq \epsilon|u_n x|^p + C_\epsilon |u_n(x)|^q \exp(\alpha|u_n(x)|^{N/N-1}), \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Definimos

$$g(u_n(x)) := \epsilon|u_n(x)|^p + C_\epsilon |u_n(x)|^q \exp(\alpha|u_n(x)|^{N/N-1}).$$

Como

$$\int_\Omega |u_n|^p dx \to \int_\Omega |u|^p dx,$$

considerando $s, s^{'} > 1$ tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^{'}} = 1$, com s próximo de 1, segue que

$$|u_n|^q \to |u|^q, \ \text{ em } \ L^{s^{'}}(\Omega). \tag{1.11}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s \frac{\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}}}{\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}}} |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\
&= \int_\Omega \exp\left(\alpha s \|u_n\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.
\end{aligned}$$

Por (1.10), temos

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int_\Omega \exp\left(\alpha s M_1^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Fazendo $0 = \alpha_0 < \alpha = \frac{\alpha_N}{2M_1^{\frac{N}{N-1}}}$, vem que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_N \left(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Usando o Teorema A.1 do Apêndice A, temos

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \leq M.$$

Como

$$\exp\left(\alpha|u_n(x)|^{N/N-1}\right) \to \exp\left(\alpha|u(x)|^{N/N-1}\right) \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega,$$

usando Teorema A.4(Apêndice A) e (1.11) temos que

$$\int_\Omega |u_n|^q \exp\left(\alpha|u_n|^{N/N-1}\right) dx \to \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha|u|^{N/N-1}\right) dx,$$

então

$$\int_\Omega g(u_n)dx \to \epsilon \int_\Omega |u|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha|u|^{N/N-1}\right) dx.$$

Dos Teoremas A.3 e A.4 (Apêndice A) segue que

$$\int_\Omega f(u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(u)u dx.$$

A demonstração de que $\displaystyle\int_\Omega F(u_n)dx \to \int_\Omega F(u)dx$ segue os mesmos passos. $\square$

Lema 1.6 *Existe* $v_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *tal que* $I(v_0) = c$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência minimizante para c. Pelo Lema 1.3, (u_n) é limitada em $\mathcal{N}$ e, a menos de subsequência, temos

$$u_n \rightharpoonup u_0 \ \text{ em } \ W_0^{1,N}(\Omega).$$

Afirmamos que $u_0 \neq 0$. De fato, caso $u_0 = 0$, usando o fato de $(u_n) \subset \mathcal{N}$ temos $I'(u_n)u_n = 0$, ou seja,

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx = \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{1.12}$$

Note que por (a_1), temos

$$\begin{aligned}k_2\|u_n\|^N &\leq k_1\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + k_2\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx\\ &\leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^p dx\end{aligned}$$

e por (1.12)

$$k_2\|u_n\|^N \leq \int_\Omega f(u_n)u_n dx.$$

Pelo Lema 1.5 e usando o fato de supomos $u_0 = 0$ segue que

$$\|u_n\| \to 0 \ \text{ em } \ W_0^{1,N}(\Omega),$$

o que contradiz o Lema 1.2.

Então $u_0 \neq 0$ e pelo Lema 1.1, existe único $t_0 > 0$ tal que

$$v_0 = t_0u_0 \in \mathcal{N}.$$

Note que

$$\begin{aligned}c &= \inf_{\mathcal{N}} I\\ &\leq I(v_0)\\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla v_0|^p)dx - \int_\Omega F(v_0)dx\\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla t_0u_0|^p)dx - \int_\Omega F(t_0u_0)dx.\end{aligned}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ segue que $t_0u_n \rightharpoonup t_0u_0 = v_0$, por (a_2) e Lema 1.5

$$\begin{aligned}c &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla t_0u_0|^p)dx - \int_\Omega F(t_0u_0)dx\\ &\leq \liminf \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla t_0u_n|^p)dx - \lim\int_\Omega F(t_0u_n)dx\\ &= \liminf I(t_0u_n).\end{aligned}$$

Do Lema 1.1, mostramos em particular que se $u \in \mathcal{N}$, então $I(u) = \max_{t \geq 0} I(tu)$. Assim,

$$\begin{aligned} c &\leq I(v_0) \\ &\leq \liminf I(t_0 u_n) \\ &\leq \liminf I(u_n) \\ &= c, \end{aligned}$$

mostrando que $I(v_0) = c$. Agora iremos demonstrar o Teorema 1.1.

Demonstração: Pelo Lema anterior, temos que existe $v_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$c = I(v_0) = \min_{\mathcal{N}} I.$$

Então, pelo Lema 1.4 segue que

$$I^{'}(v_0) = 0,$$

ou seja, v_0 é solução fraca de (P_1) com energia mínima. Por [42], $v_0 \in C^1(\overline{\Omega})$.

Nos resta mostrar que v_0 é positiva. Desde que v_0 é solução fraca de (P_1), segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \nabla u dx = \int_\Omega f(v_0) u dx, \ \ \forall \ \ u \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Fazendo $u = v_0^-$ segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \nabla v_0^- dx = \int_\Omega f(v_0) v_0^- dx.$$

Usando o fato de $\text{supp}(v^+)$ e $\text{supp}(v^-)$serem disjuntos, temos

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0^-|^p dx = \int_\Omega f(v_0^-) v_0^- dx$$

e desde que $f(v_0^-)v_0^- = 0$,

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0^-|^p dx = 0.$$

Por (a_1) e $\mathrm{supp}(v^{\pm})$ serem disjuntos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0^-|^p dx \\ &\geq k_1 \int_\Omega |\nabla v_0^-|^p dx + k_2 \int_\Omega |\nabla v_0^-|^N dx \\ &\geq k_2 \|v_0^-\|^N. \end{aligned}$$

Assim, $v_0^- = 0$. Então

$$v = v_0^+ \geq 0,$$

por [62, Teorema 3.3], segue que $v > 0$. □

1.2 Demonstração do Teorema 1.2

Agora para demonstrarmos o Teorema 1.2. Além dos lemas já demonstrados até aqui, precisaremos de outros resultados. Consideremos o seguinte problema auxiliar :

$$(P_r) \qquad \begin{cases} -k_3\Delta_p u - k_4 \Delta_N u = |u|^{r-2}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u \in W_0^{1,N}(\Omega), \end{cases}$$

onde r é a constante da hipótese (f_5). O funcional associado ao problema (P_r) é dado por

$$I_r(u) = \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - \frac{1}{r}\int_\Omega |u|^r dx$$

e a variedade de Nehari é definida por

$$\mathcal{N}_r = \left\{ u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ \text{ e } \ u \neq 0 : I_r^{'}(u)u = 0 \right\}.$$

Desde que $r > N$, segue $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ e por [32, Corolário 2.1], existe $w_r \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$I_r(w_r) = c_r \ \ , I_r^{'}(w_r) = 0$$

onde

$$c_r \geq \frac{r-N}{rN} \int_\Omega |w_r|^r dx, \tag{1.13}$$

e $c_r = \inf\limits_{\mathcal{N}_r} I_r$. O próximo resultado nos da uma estimativa para $c = \inf\limits_{\mathcal{N}} I$

Lema 1.7 *O valor* $c = \inf\limits_{\mathcal{N}} I$ *satisfaz*

$$c \leq \frac{c_r N r(r-p)}{(r-N)pr\tau^{p/(r-p)}}.$$

Demonstração: Note que por (a_1), temos

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq k_3 \int_\Omega |\nabla w_r|^p dx + k_4 \int_\Omega |\nabla w_r|^N dx.$$

Como $I_r'(w_r)w_r = 0$, obtemos

$$k_3 \int_\Omega |\nabla w_r|^p dx + k_4 \int_\Omega |\nabla w_r|^N dx = \int_\Omega |w_r|^r dx. \tag{1.14}$$

Logo

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq \int_\Omega |w_r|^r dx.$$

De (f_5) temos que

$$\int_\Omega |w_r|^r dx \leq \frac{1}{\tau} \int_\Omega f(w_r) w_r dx.$$

Então,

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq \frac{1}{\tau} \int_\Omega f(w_r) w_r dx.$$

Como $\tau > 1$, segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq \int_\Omega f(w_r) w_r dx. \tag{1.15}$$

Por (1.15) temos que

$$I^{'}(w_r)w_r \leq 0.$$

Então, existe $\beta \in (0,1)$ tal que $\beta w_r \in \mathcal{N}$. Pela definição de c

$$\begin{aligned} c &= \inf_{\mathcal{N}} I \\ &\leq I(\beta w_r) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla \beta w_r|^p)dx - \int_\Omega F(\beta w_r)dx. \end{aligned}$$

Por (a_1) vem que

$$\begin{aligned} c &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla \beta w_r|^p)dx - \int_\Omega F(\beta w_r)dx \\ &\leq \frac{k_3\beta^p}{p}\int_\Omega |\nabla w_r|^p dx + \frac{k_4\beta^N}{N}\int_\Omega |\nabla w_r|^N dx - \int_\Omega F(\beta w_r)dx. \end{aligned}$$

De (f_5) e da definição de F, temos que

$$\int_\Omega F(\beta w_r)dx \geq \frac{\beta^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r|^r dx.$$

Então

$$c \leq \frac{k_3\beta^p}{p}\int_\Omega |\nabla w_r|^p dx + \frac{k_4\beta^N}{N}\int_\Omega |\nabla w_r|^N dx - \frac{\beta^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r|^r dx.$$

Usando o fato de $\beta \in (0,1)$ e $1 < p < N$, segue que

$$c \leq \frac{\beta^p}{p}\left[k_3\int_\Omega |\nabla w_r|^p dx + k_4\int_\Omega |\nabla w_r|^N dx\right] - \frac{\beta^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r|^r dx.$$

Por (1.14) temos

$$\begin{aligned} c &\leq \frac{\beta^p}{p}\int_\Omega |w_r|^r dx - \frac{\beta^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r|^r dx \\ &= \left[\frac{\beta^p}{p} - \frac{\tau\beta^r}{r}\right]\int_\Omega |w_r|^r dx. \end{aligned}$$

Usando (1.13), temos

$$\begin{aligned} c &\leq \left[\frac{\beta^p}{p} - \frac{\tau\beta^r}{r}\right] \int_\Omega |w_r|^r dx \\ &\leq \left[\frac{\beta^p}{p} - \frac{\tau\beta^r}{r}\right] \frac{c_r N r}{r-N} \\ &\leq \max_{s\geq 0} \left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right] \frac{c_r N r}{r-N}. \end{aligned}$$

Calculando o máximo, obtemos

$$\max_{s\geq 0} \left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right] = \frac{r-p}{pr\tau^{p/(r-p)}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c &\leq \max_{s\geq 0} \left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right] \frac{c_r N r}{r-N} \\ &\leq \frac{c_r N r(r-p)}{(r-N)pr\tau^{p/(r-p)}}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.8 *Se* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *sequência minimizante para* c*, então*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\|^{N/N-1} \leq \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0+\delta)}. \tag{1.16}$$

Demonstração: Usando (1.9), temos

$$\|u_n\|^N \leq \frac{c\theta p\gamma}{k_2(\theta - p\gamma)} + o_n(1).$$

Pelo Lema 1.7,

$$\|u_n\|^N \leq \frac{\theta p\gamma}{k_2(\theta - p\gamma)}.\frac{c_r N r(r-p)}{(r-N)pr\tau^{p/(r-p)}} + o_n(1).$$

Como $\tau > \tau^*$ em (f_5), segue que

$$\|u_n\|^N \leq \left[\frac{\alpha_N}{2(\alpha_0 + \delta)}\right]^{N-1} + o_n(1).$$

Portanto

$$\|u_n\|^{N/N-1} \leq \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0 + \delta)} + o_n(1),$$

o que implica

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\|^{N/N-1} \leq \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0 + \delta)}.$$

$\square$

Lema 1.9 *Se $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é sequência minimizante para c, então*

$$\int_\Omega f(u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(u)u dx$$

e

$$\int_\Omega F(u_n)dx \to \int_\Omega F(u)dx.$$

Demonstração: Agora, iremos mostrar que

$$\int_\Omega F(u_n)dx \to \int_\Omega F(u)dx,$$

visto que $\displaystyle\int_\Omega f(u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(u)udx$ segue os mesmos passos. Pelo Lema 1.8 a menos de subsequência temos

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Pela continuidade de F, temos que

$$F(u_n(x)) \to F(u(x)) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

Usando os mesmos argumentos do Lema 1.5, é suficiente provar que existe

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$|F(u_n)| \leq h(u_n),$$

com $(h(u_n))$ convergente em $L^1(\Omega)$. Por (1.6), segue que

$$F(u_n(x)) \leq \frac{\epsilon}{p}|u_n(x)|^p + \tilde{C}_\epsilon |u_n(x)|^q \exp(\alpha |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}).$$

Definimos

$$h(u_n(x)) := \frac{\epsilon}{p}|u_n(x)|^p + \tilde{C}_\epsilon |u_n(x)|^q \exp(\alpha |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}).$$

Note que

$$\int_\Omega |u_n|^p dx \to \int_\Omega |u|^p dx.$$

Considere $s, s^{'} > 1$ tal que $\frac{1}{s} + \frac{1}{s^{'}} = 1$, com s próximo de 1. Segue que

$$|u_n|^q \to |u|^q \quad \text{em} \ \ L^{s^{'}}(\Omega). \tag{1.17}$$

Veja que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \exp\left(\alpha s |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s \frac{\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}}}{\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}}} |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s \|u_n\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \end{aligned}$$

Por (1.16) temos,

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int_\Omega \exp\left(\alpha s \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0 + \delta)} \left(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Fazendo $\alpha = \alpha_0 + \delta$, segue que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_N \left(\frac{|u_n(x)|}{\|u_n\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Usando o Teorema A.1(Apêndice A), então

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M.$$

Como

$$\exp\left(\alpha |u_n(x)|^{N/N-1}\right) \to \exp\left(\alpha |u(x)|^{N/N-1}\right) \quad \text{q.t.p em } \; \Omega,$$

usando o Teorema A.4 (Apêndice A) e (1.17) temos que

$$\int_\Omega |u_n|^q \exp\left(\alpha |u_n|^{N/N-1}\right) dx \to \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha |u|^{N/N-1}\right) dx.$$

Então

$$\int_\Omega h(u_n) dx \to \frac{\epsilon}{p} \int_\Omega |u|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha |u|^{N/N-1}\right) dx,$$

e pelos Teoremas A.3 e A.4 (Apêndice A) segue que

$$\int_\Omega F(u_n) dx \to \int_\Omega F(u) dx.$$

□

Lema 1.10 *Existe* $v_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *tal que* $I(v_0) = c$.

Demonstração: Basta seguir os mesmos passos da demonstração do Lema 1.6, usando agora o Lema 1.9 no lugar do Lema 1.5.

□

Agora iremos demonstrar o Teorema 1.2.

Demonstração: Pelo Lema 1.10, temos que existe $v_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$c = I(v_0) = \min_{\mathcal{N}} I.$$

Então, pelo Lema 1.4 segue que $I^{'}(v_0) = 0$, ou seja, v_0 é solução fraca de (P_1) com energia mínima. Por [42], $v_0 \in C^1(\overline{\Omega})$.

Nos resta mostrar que v_0 é positiva. Desde que v_0 é solução fraca de (P_1), segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \nabla u dx = \int_\Omega f(v_0) u dx, \ \ \forall \ \ u \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Fazendo $u = v_0^-$ segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \nabla v_0^- dx = \int_\Omega f(v_0) v_0^- dx.$$

Usando o fato de supp(v^+) e supp(v^-)serem disjuntos, temos

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0^-|^p dx = \int_\Omega f(v_0^-) v_0^- dx$$

e desde que $f(v_0^-)v_0^- = 0$,

$$\int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0^-|^p dx = 0.$$

Por (a_1) e supp$(v^\pm)$ serem disjuntos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega a(|\nabla v_0|^p)|\nabla v_0^-|^p dx \\ &\geq k_1 \int_\Omega |\nabla v_0^-|^p dx + k_2 \int_\Omega |\nabla v_0^-|^N dx \\ &\geq k_2 \|v_0^-\|^N. \end{aligned}$$

Assim, $v_0^- = 0$. Então

$$v = v_0^+ \geq 0,$$

por [62, Teorema 3.3], segue que $v > 0$. □

Capítulo

2

Existência de soluções nodais para uma classe de problemas elípticos quasilineares com crescimento exponencial em domínio limitado.

Neste capítulo, vamos procurar solução nodal para o problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -div(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $1 < p < N$. Queremos encontrar uma função $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $u^+ \neq 0$, $u^- \neq 0$ em Ω e

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx - \int_\Omega f(u)\phi dx = 0,$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Em particular, queremos determinar $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ que tem exatamente dois domínios nodais. Uma região nodal de u é uma componente conexa de um dos conjuntos $\{x \in \Omega, \ u(x) > 0\}$ ou $\{x \in \Omega, \ u(x) < 0\}$, e assim dizemos que u é uma solução nodal se ela troca de sinal em Ω. Neste caso, temos pelo menos uma região nodal onde u é positiva e pelo menos outra onde u é negativa. Note que $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$.

$\mathcal{M}$ é um conjunto de que contem todas as soluções fracas de (P_2) que mudam de sinal,

$$\mathcal{M} \;:=\; \left\{ w \in W_0^{1,N}(\Omega);\; w^+ \neq 0 \;\; , w^- \neq 0, I^{'}(w^+)w^+ = 0 = I^{'}(w^-)w^- \right\}.$$

Por simplicidade, denotamos

$$I^{'}(w^{\pm})w^{\pm} = \int_\Omega a(|\nabla w^{\pm}|^p)|\nabla w^{\pm}|^p dx - \int_\Omega f(w^{\pm})w^{\pm} dx.$$

As hipóteses sobre a função a são:

$a_1)$ A função a é de classe C^1 e existem constantes k_1, k_3, $k_4 \geq 0$ e $k_2 > 0$ tais que

$$k_1 + k_2 t^{\frac{N-p}{p}} \leq a(t) \leq k_3 + k_4 t^{\frac{N-p}{p}}, \;\text{ para todo }\; t > 0.$$

$a_2)$ As funções $\;t \longmapsto a(t^p)t^p,\;\; \dfrac{1}{p}A(t^p) - \dfrac{1}{N}a(t^p)t^p$ são convexas em $(0, \infty)$, onde

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds.$$

$a_3)$ A função $\;t \longmapsto \dfrac{a(t^p)}{t^{(N-p)}}$ é não crescente para todo $t > 0$.

Como consequência imediata de $a_3)$ temos que

$$a^{'}(t)t \leq \frac{N-p}{p}a(t),\; \forall\, t > 0$$

e ainda, existe uma constante real $\gamma \geq \frac{N}{p}$ tal que

$$A(t) \geq \frac{1}{\gamma}a(t)t, \quad \text{para} \quad t \geq 0.$$

As hipóteses sobre a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 são:

$f_1)$ Existe $\alpha_0 \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}})} = 0 \;\text{ para }\; \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{\exp(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}})}=+\infty \ \text{ para } \ \alpha<\alpha_0.$$

f_2) A função f verifica o limite

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t^{p-1}}=0.$$

f_3) Existe $\theta>p\gamma$ tal que

$$0<\theta F(t)\leq f(t)t,$$

para $t>0$ onde γ é a mesma constante que aparece como consequência de a_3) e

$$F(s)=\int_0^s f(t)dt.$$

f_4) A função $\dfrac{f(t)}{t^{(N-1)}}$ é crescente em $(0,\infty)$.

f_5) Existem $r>N$, $\tau>\tau^*$ e $\delta>0$ tais que

$$sgn(t)f(t)\geq\tau|t|^{r-1}, \ \ \forall \ \ t\neq 0,$$

onde

$$\tau^*:=\max\left\{1,\left[\frac{2^{N-1}\theta p\gamma c_r^* Nr(r-p)(\alpha_0+\delta)^{N-1}}{k_2(\theta-p\gamma)(r-N)pr\alpha_N^{N-1}}\right]^{\frac{r-p}{p}}\right\},$$

$$c_r^*=\inf_{\mathcal{M}_r}I_r,$$

$$I_r(u)=\frac{k_3}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p dx+\frac{k_4}{N}\int_\Omega|\nabla u|^N dx-\frac{1}{r}\int_\Omega|u|^r dx$$

e

$$\mathcal{M}_r = \left\{ u \in W_0^{1,N}(\Omega) \ \ ; \ \ u^{\pm} \neq 0 \text{e} I_r^{'}(u)u^{\pm} = 0 \right\}.$$

Os dois principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 2.1 *Suponha que a satisfaça $(a_1)-(a_3)$ e $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfaça (f_1) com $\alpha_0 = 0$ e $(f_2)-(f_4)$. Então, o problema (P_2) possui pelo menos uma solução nodal, a qual possui exatamente dois domínios nodais.*

Teorema 2.2 *Suponha que a satisfaça $(a_1)-(a_3)$ e $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfaça (f_1) com $\alpha_0 > 0$ e $(f_2)-(f_5)$. Então, o problema (P_2) possui pelo menos uma solução nodal, a qual possui exatamente dois domínios nodais.*

Agora, estabeleceremos alguns resultados. O primeiro resultado afirma que sequencias minimizantes em $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{M}$ não pode convergir pra zero.

Lema 2.1 *i) Para $u \in \mathcal{N}$, se $\|u\| \to +\infty$ então $I(u) \to +\infty$.*
ii) Existe $\rho_1 > 0$ tal que

$$\|u\| \geq \rho_1, \ \ \forall \ \ u \in \mathcal{N}$$

e

$$\|w^{\pm}\| \geq \rho_1, \ \ \forall \ \ w \in \mathcal{M}.$$

Demonstração: Desde que $u \in \mathcal{N}$ segue que $I^{'}(u)u = 0$. Logo

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u) - \frac{1}{\theta} I^{'}(u)u \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)dx - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(u)udx. \end{aligned}$$

Por (a_3), obtemos

$$I(u) \geq \frac{1}{p\gamma}\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(u)dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(u)udx.$$

Assim,

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{p\gamma} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} f(u)u - F(u)\right] dx.$$

Usando (f_3), tem-se

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}f(u)u - F(u)\right]dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx. \end{aligned}$$

De (a_1) temos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)\left[k_1\int_\Omega |\nabla u|^p dx + k_2\int_\Omega |\nabla u|^N dx\right] \\ &= \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)k_1\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)k_2\|u\|^N. \end{aligned}$$

Como $\theta > p\gamma$ vem que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)k_1\int_\Omega |\nabla u|^p dx + \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)k_2\|u\|^N \\ &\geq \left(\frac{1}{p\gamma}-\frac{1}{\theta}\right)k_2\|u\|^N, \end{aligned}$$

portanto fazendo $\|u\| \to +\infty$ temos $I(u) \to +\infty$.

Pelo Lema 1.2, temos que

$$\|u\| \geq \rho_1, \ \ \forall \ \ u \in \mathcal{N}.$$

Agora, se $w \in \mathcal{M}$, segue que

$$I'(w^\pm)w^\pm = 0,$$

ou seja,

$$w^\pm \in \mathcal{N}.$$

Então

$$\|w^\pm\| \geq \rho_1, \ \ \forall \ \ w^\pm \in \mathcal{M}.$$

□

Lema 2.2 *Seja* $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *com* $v^{\pm} \neq 0$. *Então existem* $t_1, t_2 > 0$ *tais que*

$$I^{'}(t_1v^+ + t_2v^-)v^+ = 0 = I^{'}(t_1v^+ + t_2v^-)v^-,$$

ou seja, $t_1v^+ + t_2v^- \in \mathcal{M}$.

Demonstração: Desde que I é de classe C^1, definimos $V : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ contínua dada por

$$V(t,T) = \Big(I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+, I^{'}(tv^+ + Tv^-)Tv^-\Big), \ \ \forall (t,T) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty).$$

Observemos que

$$I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ \ = \ I^{'}(tv^+)tv^+,$$

pois $supp(v^{\pm})$ são disjuntos. Logo

$$\begin{aligned} I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ &= I^{'}(tv^+)tv^+ \\ &= \int_\Omega a(|\nabla tv^+|^p)|\nabla tv^+|^p dx - \int_\Omega f(tv^+)tv^+ dx. \end{aligned}$$

Por (1.5),

$$\begin{aligned} I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ &= \int_\Omega a(|\nabla tv^+|^p)|\nabla tv^+|^p dx - \int_\Omega f(tv^+)tv^+ dx \\ &\geq \int_\Omega a(|\nabla tv^+|^p)|\nabla tv^+|^p dx - \epsilon \int_\Omega |tv^+|^p dx \\ &- C_\epsilon \int_\Omega |tv^+|^q \text{exp}\left(\alpha |tv^+|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \end{aligned}$$

Usando (a_1),

$$\begin{aligned} I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ &\geq k_1 t^p \int_\Omega |\nabla v^+|^p dx + k_2 t^N \|v^+\|^N - \epsilon \int_\Omega |tv^+|^p dx \\ &- C_\epsilon \int_\Omega |tv^+|^q \text{exp}\left(\alpha |tv^+|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \end{aligned}$$

Desde que $1 < p < N$ e da Desigualdade de Poincaré existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |v^\pm|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla v^\pm|^p dx,$$

segue que,

$$\begin{aligned} I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ &\geq k_1 t^p \int_\Omega |\nabla v^+|^p dx + k_2 t^N \|v^+\|^N - \epsilon C t^p \int_\Omega |\nabla v^+|^p dx \\ &- C_\epsilon t^q \int_\Omega |v^+|^q \exp\left(\alpha |tv^+|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \end{aligned}$$

Da desiguladade de Holder para $l, l^{'} > 1$, com l próximo de 1, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v^+|^q \exp(\alpha |tv^+|^{\frac{N}{N-1}}) dx &\leq \left(\int_\Omega |v^+|^{ql^{'}} dx\right)^{\frac{1}{l^{'}}} \left(\int_\Omega \exp(l\alpha |tv^+|^{\frac{N}{N-1}}) dx\right)^{\frac{1}{l}} \\ &= |u_n|^q_{L^{ql^{'}}(\Omega)} \left(\int_\Omega \exp(l\alpha \|tv^+\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|v^+|}{\|v^+\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}) dx\right)^{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha \geq \alpha_0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$\alpha l \|t_0 v^+\|^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N$$

e usando o Teorema A.1 (Apêndice A), temos

$$\sup_{\|\frac{|v^+|}{\|v^+\|}\|=1} \int_\Omega \exp(l\alpha \|t_0 v^+\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|v^+|}{\|v^+\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}) dx \leq M.$$

Então

$$\begin{aligned} I^{'}(t_0 v^+ + Tv^-)t_0 v^+ &\geq k_1 t_0^p \int_\Omega |\nabla v^+|^p dx + k_2 t_0^N \|v^+\|^N - \epsilon C t_0^p \int_\Omega |\nabla v^+|^p dx \\ &- C_\epsilon t_0^q \left(\int_\Omega |v^+|^{ql^{'}} dx\right)^{\frac{1}{l^{'}}} M^{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

Como $W_0^{1,N}(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^{ql'}(\Omega)$ existe $\tilde{C_1} > 0$ tal que

$$|u|^q_{L^{ql'}(\Omega)} \leq \tilde{C}\|u\|^q, \text{ com } \tilde{C} = \tilde{C_1}^q.$$

Logo

$$I^{'}(t_0v^+ + Tv^-)t_0v^+ \;\; \geq \;\; (k_1 - \epsilon C)t_0^p \int_\Omega |\nabla v^+|^p dx + k_2 t_0^N \|v^+\|^N - C_\epsilon t_0^q \tilde{C}\|v^+\|^q M^{\frac{1}{l}}.$$

Considerando $\epsilon > 0$ tal que $k_1 - \epsilon C > 0$ segue que

$$I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ \;\; \geq \;\; k_2 t_0^N \|v^+\|^N - C_\epsilon t_0^q \tilde{C}\|v^+\|^q M^{\frac{1}{l}}.$$

Sendo $1 < p < N < q$, para todo $0 < r < t_0$ temos que

$$I^{'}(rv^+ + Tv^-)rv^+ > 0, \forall \;\; T > 0.$$

De modo análogo temos que

$$I^{'}(tv^+ + rv^-)rv^- > 0, \forall \;\; t > 0.$$

Por outro lado,

$$I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ \;\; = \;\; I^{'}(tv^+)tv^+,$$

pois $supp(v^\pm)$ são disjuntos. Assim,

$$I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ \;\; = \;\; \int_\Omega a(|\nabla tv^+|^p)|\nabla tv^+|^p dx - \int_\Omega f(tv^+)tv^+ dx.$$

Por (f_3) existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$F(t) \geq C_1|t|^\theta - C_2, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por (a_1) e pelo resultado acima, segue que

$$I^{'}(tv^+ + Tv^-)tv^+ \quad \leq \quad k_3 t^p \int_\Omega |\nabla v^+|^p dx + k_4 t^N \|v^+\|^N - C_1 \theta t^\theta \int_\Omega |v^+|^\theta dx + C_2 \theta |\Omega|.$$

Como $\theta > p\gamma$, segue que $\theta > N$ então $1 < p < N < \theta$. Logo para $R > 0$ suficientemente grande temos que

$$I^{'}(Rv^+ + Tv^-)Rv^+ < 0, \forall \ \ T > 0.$$

De modo análogo temos que

$$I^{'}(tv^+ + Rv^-)Rv^- < 0, \forall \ \ t > 0.$$

Então por [50], existem $t_1, t_2 \in [r, R]$ com $0 < r < R$ tal que

$$I^{'}(t_1 v^+ + t_2 v^-)v^+ = 0 = I^{'}(t_1 v^+ + t_2 v^-)v^-,$$

mostrando que $t_1 v^+ + t_2 v^- \in \mathcal{M}$. $\square$

Agora, deduziremos alguns resultados que serão úteis neste capítulo. Por (f_4),

$$t \mapsto \frac{1}{N} f(t)t - F(t), \quad \text{é crescente } \ \forall t > 0. \tag{2.1}$$

Além disso, vamos salientar que quando $w^\pm \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned}
|\nabla w|^p &= |\nabla(w^+ + w^-)|^p \\
&= |\nabla(w^+ + w^-)|^{p-2} |\nabla(w^+ + w^-)|^2 \\
&= |\nabla(w^+ + w^-)|^{p-2} (\nabla(w^+ + w^-)).(\nabla(w^+ + w^-)) \\
&= |\nabla(w^+ + w^-)|^{p-2} (\nabla(w^+ + w^-)).(\nabla(w^+)) \\
&+ |\nabla(w^+ + w^-)|^{p-2} (\nabla(w^+ + w^-)).(\nabla(w^-)) \\
&= |\nabla(w^+)|^{p-2} \nabla(w^+).\nabla(w^+) + |\nabla(w^-)|^{p-2} \nabla(w^-).\nabla(w^-) \\
&= |\nabla w^+|^p + |\nabla w^-|^p.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega A(|\nabla w|^p)dx = \int_\Omega A(|\nabla w^+|^p + |\nabla w^-|^p)dx = \int_\Omega A(|\nabla w^+|^p)dx + \int_\Omega A(|\nabla w^-|^p)dx. \quad (2.2)$$

Agora, seja $v^\pm \neq 0$ e considere $h^v : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$h^v(t,T) = I(tv^+ + Tv^-), \quad \forall (t,T) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$$

e $\phi^v : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \phi^v(t,T) &= (\phi_1^v(t,T), \phi_2^v(t,T)) \\ &= \left(\frac{\partial h^v}{\partial t}(t,T), \frac{\partial h^v}{\partial T}(t,T) \right) \\ &= \left(I^{'}(tv^+ + Tv^-)v^+, I^{'}(tv^+ + Tv^-)v^- \right). \end{aligned}$$

Além disso, considere a matriz Hessiana de h^v ou a matriz Jacobiana de ϕ^v, isto é,

$$(\phi^v)^{'}(t,T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1^v}{\partial t}(t,T) & \frac{\partial \phi_1^v}{\partial T}(t,T) \\ \frac{\partial \phi_2^v}{\partial t}(t,T) & \frac{\partial \phi_2^v}{\partial T}(t,T) \end{pmatrix},$$

para todo $(t,T) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Mostraremos que se $w \in \mathcal{M}$ então a função h^w tem ponto crítico, em particular máximo global em $(t,T) = (1,1)$.

Lema 2.3 *Se $w \in \mathcal{M}$, então*

$$h^w(t,T) < h^w(1,1) = I(w), \quad \forall t,T \geq 0 \ \ \textit{tal que} \ \ (t,T) \neq (1,1)$$

e

$$det(\phi^w)^{'}(1,1) > 0.$$

Demonstração: Desde que $w \in \mathcal{M}$,

$$0 = I^{'}(w)w^\pm = I^{'}(w^+ + w^-)w^\pm.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\phi^w(1,1) &= \left(\frac{\partial h^v}{\partial t}(1,1), \frac{\partial h^v}{\partial T}(1,1)\right)\\
&= \left(I^{'}(w^{'}+w^-)w^+, I^{'}(w^{'}+w^-)w^-\right)\\
&= (0,0).
\end{aligned}$$

Isto nos diz que $(1,1)$ é ponto crítico de h^w. Considere $t, T \geq 0$ e da definição de h^w segue que

$$\begin{aligned}
h^w(t,T) &= I(tw^+ + Tw^-)\\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tw^+ + \nabla Tw^-|^p)dx - \int_\Omega F(tw^+ + Tw^-)dx.
\end{aligned}$$

Por (2.2),

$$\begin{aligned}
h^w(t,T) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tw^+ + \nabla Tw^-|^p)dx - \int_\Omega F(tw^+ + Tw^-)dx\\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tw^+|^p + |\nabla Tw^-|^p)dx - \int_\Omega F(tw^+ + Tw^-)dx.
\end{aligned}$$

Usando (a_1),

$$\begin{aligned}
h^w(t,T) &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla tw^+|^p + |\nabla Tw^-|^p)dx - \int_\Omega F(tw^+ + Tw^-)dx\\
&\leq \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla tw^+|^p dx + \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla tw^+|^N dx + \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla Tw^-|^p dx\\
&+ \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla Tw^-|^N dx - \int_\Omega F(tw^+ + Tw^-)dx.
\end{aligned}$$

Da consequência de (f_3),

$$\begin{aligned}
h^w(t,T) &\leq \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla tw^+|^p dx + \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla tw^+|^N dx + \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla Tw^-|^p dx\\
&+ \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla Tw^-|^N dx - C_1\int_\Omega |tw^+ + Tw^-|^\theta dx + C_2|\Omega|.
\end{aligned}$$

Por uma manipulação algébrica,

$$\begin{aligned} h^w(t,T) &\leq t^p \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla w^+|^p dx + t^N \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla w^+|^N dx + T^p \frac{k_3}{p}\int_\Omega |\nabla w^-|^p dx \\ &+ T^N \frac{k_4}{N}\int_\Omega |\nabla w^-|^N dx - t^\theta C_1 \int_\Omega |w^+|^\theta dx - T^\theta C_1 \int_\Omega |w^-|^\theta dx + C_2|\Omega|. \end{aligned}$$

Como $1 < p < N < \theta$, fazendo $|(t,T)| \to +\infty$ temos

$$\lim_{|(t,T)|\to+\infty} h^w(t,T) = -\infty,$$

e h^w tem ponto de máximo global para algum ponto $(\bar{t},\overline{T}) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$. Queremos provar que $\bar{t},\overline{T} > 0$. Afirmamos que $\bar{t},\overline{T} > 0$. Vamos supor, por contradição que $\overline{T} = 0$. Então, temos

$$I^{'}(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)|\nabla \bar{t}w^+|^p dx - \int_\Omega f(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ dx = 0,$$

que equivale a,

$$\int_\Omega a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)|\nabla \bar{t}w^+|^p dx \;=\; \int_\Omega f(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ dx.$$

Então

$$\int_\Omega \frac{a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)}{|\nabla \bar{t}w^+|^{N-p}}|\nabla w^+|^N dx \;=\; \int_\Omega \frac{f(\bar{t}w^+)}{(\bar{t}w^+)^{N-1}}(w^+)^N dx. \tag{2.3}$$

Por outro lado, como $I^{'}(w)w^+ = 0 = I^{'}(w^+)w^+$ segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx = \int_\Omega f(w^+)w^+ dx,$$

e, portanto,

$$\int_\Omega \frac{a(|\nabla w^+|^p)}{|\nabla w^+|^{N-p}}|\nabla w^+|^N dx \;=\; \int_\Omega \frac{f(w^+)}{(w^+)^{N-1}}(w^+)^N dx. \tag{2.4}$$

Subtraindo (2.4) de (2.3) segue que

$$\int_\Omega \left[\frac{a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)}{|\nabla \bar{t}w^+|^{N-p}} - \frac{a(|\nabla w^+|^p)}{|\nabla w^+|^{N-p}}\right]|\nabla w^+|^N dx = \int_\Omega \left[\frac{f(\bar{t}w^+)}{(\bar{t}w^+)^{N-1}} - \frac{f(w^+)}{(w^+)^{N-1}}\right](w^+)^N dx. \tag{2.5}$$

Por (a_3), (f_4) e (2.5) devemos ter

$$\bar{t} \leq 1. \tag{2.6}$$

Note que

$$\begin{aligned}
h^w(\bar{t},0) &= I(\bar{t}w^+)\\
&= I(\bar{t}w^+) - \frac{1}{N}I'(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+\\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla \bar{t}w^+|^p)dx - \int_\Omega F(\bar{t}w^+)dx - \frac{1}{N}\int_\Omega a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)|\nabla \bar{t}w^+|^p dx\\
&+ \frac{1}{N}\int_\Omega f(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ dx\\
&= \int_\Omega \left[\frac{1}{p}A(|\nabla \bar{t}w^+|^p) - \frac{1}{N}a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)|\nabla \bar{t}w^+|^p\right]dx\\
&+ \int_\Omega \left[\frac{1}{N}f(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ - F(\bar{t}w^+)\right]dx.
\end{aligned}$$

Por (a_3) e (f_4) temos que as funções

$$\frac{1}{p}A(t^p) - \frac{1}{N}a(t^p)t^p$$

e

$$\frac{1}{N}f(t)t - F(t)$$

são crescentes para $t > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
h^w(\bar{t},0) &= \int_\Omega \left[\frac{1}{p}A(|\nabla \bar{t}w^+|^p) - \frac{1}{N}a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)|\nabla \bar{t}w^+|^p\right]dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{N}f(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ - F(\bar{t}w^+)\right]dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\frac{1}{p}A(|\nabla w^+|^p) - \frac{1}{N}a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p\right]dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{N}f(w^+)w^+ - F(w^+)\right]dx \\
&= I(w^+) - \frac{1}{\theta}I'(w^+)w^+ \\
&= I(w^+) \\
&= h^w(1,0).
\end{aligned}$$

Então,

$$h^w(\bar{t},0) \leq h^w(1,0). \tag{2.7}$$

Desde que $w^- \in \mathcal{N}$, pelo Lema 2.1 segue que $I(w^-) > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
I(w^+) &< I(w^+) + I(w^-) \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla w^+|^p)dx - \int_\Omega F(w^+)dx + \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla w^-|^p)dx - \int_\Omega F(w^-)dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla (w^+ + w^-)|^p)dx - \int_\Omega F(w^+ + w^-)dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla w|^p)dx - \int_\Omega F(w)dx \\
&= I(w) \\
&= h^w(1,1).
\end{aligned}$$

Usando (2.7), concluímos que

$$h^w(1,1) > I(w^+) = h^w(1,0) \geq h^w(\bar{t},0),$$

o que é um absurdo, visto que $(\bar{t},0)$ é máximo global. De modo análogo prova-se que $\bar{t} > 0$.

Agora, desde que $(\bar{t},\overline{T})$ e $(1,1)$ são pontos críticos de h^w segue que

$$I'(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ = 0 = I'(\overline{T}w^-)\overline{T}w^- \ \text{ e } \ I'(w^+)w^+ = 0 = I'(w^-)w^-.$$

Desde que

$$I'(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ = 0 = I'(w^+)w^+,$$

repetindo os mesmos passos feitos para obtermos (2.6), segue que

$$0 < \bar{t} \leq 1,$$

e de modo análogo também temos $0 < \overline{T} \leq 1$. Mostremos que h^w não assume ponto de máximo global em $[0,1] \times [0,1] \setminus \{(1,1)\}$. De fato,

$$\begin{aligned}
h^w(\bar{t}, \overline{T}) &= I(\bar{t}w^+ + \overline{T}w^-) \\
&= I(\bar{t}w^+ + \overline{T}w^-) - \frac{1}{N} I'(\bar{t}w^+ + \overline{T}w^-)(\bar{t}w^+ + \overline{T}w^-) \\
&= \int_\Omega \left[\frac{1}{p} A(|\nabla \bar{t}w^+|^p) - \frac{1}{N} a(|\nabla \bar{t}w^+|^p)|\nabla \bar{t}w^+|^p \right] dx \\
&+ \int_\Omega \left[\frac{1}{N} f(\bar{t}w^+)\bar{t}w^+ - F(\bar{t}w^+) \right] dx \\
&+ \int_\Omega \left[\frac{1}{p} A(|\nabla \overline{T}w^-|^p) - \frac{1}{N} a(|\nabla \overline{T}w^-|^p)|\nabla \overline{T}w^-|^p \right] dx \\
&+ \int_\Omega \left[\frac{1}{N} f(\overline{T}w^-)\overline{T}w^- - F(\overline{T}w^-) \right] dx.
\end{aligned}$$

Usando o fato das funções

$$\frac{1}{p} A(t^p) - \frac{1}{N} a(t^p) t^p$$

e

$$\frac{1}{N} f(t)t - F(t)$$

serem crescentes para $t > 0$, temos

$$\begin{aligned}
h^w(\overline{t}, \overline{T}) &\leq \int_\Omega \left[\frac{1}{p}A(|\nabla w^+|^p) - \frac{1}{N}a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p\right] dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{N}f(w^+)w^+ - F(w^+)\right] dx \\
&+ \int_\Omega \left[\frac{1}{p}A(|\nabla w^-|^p) - \frac{1}{N}a(|\nabla w^-|^p)|\nabla w^-|^p\right] dx + \int_\Omega \left[\frac{1}{N}f(w^-)w^- - F(w^-)\right] dx \\
&= \left[I(w^+) - \frac{1}{N}I^{'}(w^+)w^+\right] + \left[I(w^-) - \frac{1}{N}I^{'}(w^-)w^-\right] \\
&= I(w^+) + I(w^-) \\
&= I(w) \\
&= h^w(1,1),
\end{aligned}$$

o que prova a primeira parte. Provemos a segunda parte. Da definição de $(\phi^w)^{'}$ denotamos por

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \phi_1^w(t,T) \\
&= I^{'}(tw^+ + Tw^-)w^+ \\
&= I^{'}(tw^+)w^+ \\
&= t^{p-1}\int_\Omega a(|\nabla tw^+|^p)|\nabla w^+|^p dx - \int_\Omega f(tw^+)w^+ dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g_2(T) &= \phi_2^w(t,T) \\
&= I^{'}(tw^+ + Tw^-)w^- \\
&= I^{'}(Tw^-)w^- \\
&= T^{p-1}\int_\Omega a(|\nabla Tw^-|^p)|\nabla w^-|^p dx - \int_\Omega f(Tw^-)w^- dx.
\end{aligned}$$

Então,

$$(\phi^w)^{'}(t,T) = \begin{pmatrix} g_1^{'}(t) & 0 \\ 0 & g_2^{'}(T) \end{pmatrix},$$

onde $\dfrac{\partial \phi_1^w}{\partial T}(t,T) = \dfrac{\partial \phi_2^w}{\partial t}(t,T) = 0$. Pelas definições de g_1 e g_2 segue que

$$
\begin{aligned}
g_1^{'}(t) &= \frac{\partial \phi_1^w}{\partial t}(t,T) \\
&= (p-1)t^{(p-2)}\int_\Omega a(|\nabla t w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx + pt^{(p-1)}\int_\Omega a^{'}(|\nabla t w^+|^p)t^{(p-1)}|\nabla w^+|^{2p}dx \\
&- \int_\Omega f^{'}(tw^+)(w^+)^2 dx,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g_2^{'}(T) &= \frac{\partial \phi_2^w}{\partial T}(t,T) \\
&= (p-1)T^{(p-2)}\int_\Omega a(|\nabla T w^-|^p)|\nabla w^-|^p dx + pT^{(p-1)}\int_\Omega a^{'}(|\nabla T w^-|^p)T^{(p-1)}|\nabla w^-|^{2p}dx \\
&- \int_\Omega f^{'}(Tw^-)(w^-)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
g_1^{'}(1) &= (p-1)\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx + p\int_\Omega a^{'}(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^{2p}dx \\
&- \int_\Omega f^{'}(w^+)(w^+)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Por (f_4),

$$
\begin{aligned}
g_1^{'}(1) &= (p-1)\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx + p\int_\Omega a^{'}(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^{2p}dx \\
&- \int_\Omega f^{'}(w^+)(w^+)^2 dx \\
&\leq (p-1)\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx + (N-p)\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx \\
&- \int_\Omega f^{'}(w^+)(w^+)^2 dx \\
&= (N-1)\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx - \int_\Omega f^{'}(w^+)(w^+)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Por uma manipulação algébrica,

$$\begin{aligned}
g_1'(1) &\leq (N-1)\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx - \int_\Omega f'(w^+)(w^+)^2 dx \\
&= (N-1)\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx - \int_\Omega f'(w^+)(w^+)^2 dx \\
&+ (N-1)\int_\Omega f(w^+)(w^+)dx - (N-1)\int_\Omega f(w^+)(w^+)dx \\
&= (N-1)\left[\int_\Omega a(|\nabla w^+|^p)|\nabla w^+|^p dx - \int_\Omega f(w^+)(w^+)dx\right] \\
&+ \int_\Omega \left[(N-1)f(w^+)(w^+) - f'(w^+)(w^+)^2\right] dx \\
&= (N-1)I'(w^+)w^+ + \int_\Omega \left[(N-1)f(w^+)(w^+) - f'(w^+)(w^+)^2\right] dx.
\end{aligned}$$

Desde que $(1,1)$ é ponto crítico de h^w, segue que $I'(w^+)w^+ = 0$. Logo,

$$g_1'(1) \leq \int_\Omega \left[(N-1)f(w^+)(w^+) - f'(w^+)(w^+)^2\right] dx. \tag{2.8}$$

Desde que $\dfrac{f(t)}{t^{(N-1)}}$ é crescente para $t > 0$, temos

$$\left[\frac{f(t)}{t^{(N-1)}}\right]' > 0,$$

isto é,

$$\frac{f'(t)t^{(N-1)} - (N-1)f(t)t^{(N-2)}}{(t^{(N-1)})^2} > 0.$$

Portanto,

$$t^{(N-3)}\frac{f'(t)t^2 - (N-1)f(t)t}{(t^{(N-1)})^2} > 0,$$

ou seja,

$$f'(t)t^2 - (N-1)f(t)t > 0.$$

Voltando em (2.8) segue que

$$g_1'(1) < 0.$$

De modo análogo prova-se que $g_2^{'}(1) < 0$. Portanto

$$det(\phi^w)^{'}(1,1) = g_1^{'}(1).g_2^{'}(1) > 0,$$

o que prova a segunda parte. $\square$

2.1 Demonstração do Teorema 2.1

Lema 2.4 *Se $(u_n) \subset \mathcal{M}$ é uma sequência minimizante para c^*, então*

$$\int_\Omega f(u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(u)udx$$

e

$$\int_\Omega F(u_n)dx \to \int_\Omega F(u)dx.$$

Demonstração: Basta seguir os mesmos passos do Lema 1.5. $\square$

Lema 2.5 *Se (u_n) uma sequência limitada em $\mathcal{M}$, então existe $s^{'} > 1$ tal que*

$$\lim \inf_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs^{'}} dx > 0.$$

Demonstração: Como (u_n) é uma sequência em $\mathcal{M}$, segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n{}^{\pm}|^p)|\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx = \int_\Omega f(u_n{}^{\pm})u_n{}^{\pm} dx.$$

Por (a_1) e (1.5),

$$k_1 \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx + k_2 \|u_n{}^{\pm}\|^N \leq \epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \text{exp}\left(\alpha |u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Da Desigualdade de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx,$$

segue que

$$k_1 \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx + k_2 \|u_n{}^{\pm}\|^N \leq \epsilon C \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp\left(\alpha |u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $k_1 - \epsilon C > 0$, temos

$$k_2 \|u_n{}^{\pm}\|^N \leq C_\epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp\left(\alpha |u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Da desiguladade de Holder para $s, s^{'} > 1$, com s próximo de 1, segue que

$$\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp(\alpha |u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}) dx \quad \leq \quad \left(\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs^{'}} dx\right)^{\frac{1}{s^{'}}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha |u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}) dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Por um cálculo simples, temos que

$$\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp(\alpha |u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}) dx \quad \leq \quad \left(\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs^{'}} dx\right)^{\frac{1}{s^{'}}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha \|u_n{}^{\pm}\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n{}^{\pm}|}{\|u_n{}^{\pm}\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}) dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Desde que $(u_n^{\pm})$ é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que

$$\|u_n^{\pm}\| \leq K.$$

Uma vez que $\alpha_0 = 0$, tomamos $\alpha > 0$ tal que $\alpha s K^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N$. Usando o Teorema A.1 (Apêndice A), temos

$$\sup_{\|\frac{|u_n{}^{\pm}|}{\|u_n{}^{\pm}\|}\|=1} \int_\Omega \exp(s\alpha \|u_n{}^{\pm}\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n{}^{\pm}|}{\|u_n{}^{\pm}\|}\right)^{\frac{N}{N-1}}) dx \leq M.$$

Então

$$k_2 \|u_n{}^{\pm}\|^N \leq C_\epsilon \left(\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs^{'}}\right)^{\frac{1}{s^{'}}} M^{\frac{1}{s}},$$

pelo Lema 2.1,

$$k_2\rho_1^N \leq C_\epsilon \left(\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs'} \right)^{\frac{1}{s'}} M^{\frac{1}{s}},$$

de onde segue que

$$0 < \left(\frac{k_2\rho_1{}^N}{C_\epsilon M^{\frac{1}{s}}} \right)^{s'} \leq \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs'}.$$

Portanto,

$$\lim \inf_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs'} dx > 0.$$

$\square$

Agora, iremos demonstrar o Teorema 2.1

Demonstração: Pelo Lema 2.1, existe $c_0 > 0$ tal que

$$c_0 = \inf_{u\in\mathcal{M}} I(u),$$

então existe uma sequência minimizante limitada (w_n) em $\mathcal{M}$, pois I é coercivo. Assim, a menos de subsequência, temos que existem $w, w_1, w_2 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

$$w_n \rightharpoonup w, w_n^+ \rightharpoonup w_1 \text{ e } w_n^- \rightharpoonup w_2 \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega).$$

Das imersões compactas, a menos de subsequências,

$$w_n \to w, w_n^+ \to w_1 \text{ e } w_n^- \to w_2 \text{ em } L^m(\Omega) \text{ , com } m > N.$$

Fazendo as devidas adaptações de [15, Lema 2.3], as transformações

$$w \to w^+ \text{ e } w \to w^-,$$

são contínuas de $L^m(\Omega)$ em $L^m(\Omega)$. Assim, temos que $w^+ = w_1 \geq 0$ e $w^- = w_2 \leq 0$. Como

$$w_n^+ \to w^+, w_n^- \to w^- \text{ em } L^{qs'}(\Omega),$$

pelo Lema 2.5 segue que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |w_n{}^{\pm}|^{qs'} dx = \int_\Omega |w^{\pm}|^{qs'} dx > 0,$$

o que nos da $w^{\pm} \neq 0$ e consequentemente $w = w^+ + w^-$. Pelo Lema 2.2 existem $t_1, t_2 > 0$ tais que

$$I'(t_1 w^+ + t_2 w^-)w^+ = I'(t_1 w^+)w^+ = I'(t_1 w^+)t_1 w^+ = 0 \tag{2.9}$$

e

$$I'(t_1 w^+ + t_2 w^-)w^- = I'(t_2 w^-)w^- = I'(t_2 w^-)t_2 w^- = 0, \tag{2.10}$$

$t_1 w^+ + t_2 w^- \in \mathcal{M}$. Provemos que $t_1, t_2 \leq 1$. Por (a_2) temos que,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{p} A(|\nabla w^{\pm}|^p) - \frac{1}{N} a(|\nabla w^{\pm}|^p)|\nabla w^{\pm}|^p\right) \leq \liminf \int_\Omega \left(\frac{1}{p} A(|\nabla w_n^{\pm}|^p) - \frac{1}{N} a(|\nabla w_n^{\pm}|^p)|\nabla w_n^{\pm}|^p\right)$$

e

$$\int_\Omega a(|\nabla w^{\pm}|^p)|\nabla w^{\pm}|^p dx \leq \liminf \int_\Omega a(|\nabla w_n^{\pm}|^p)|\nabla w_n^{\pm}|^p dx.$$

Pelo Lema 2.4,

$$\int_\Omega f(w_n^{\pm}) w_n^{\pm} dx \to \int_\Omega f(w^{\pm}) w^{\pm} dx$$

e

$$\int_\Omega F(w_n^{\pm}) dx \to \int_\Omega F(w^{\pm}) dx.$$

Então,

$$\begin{aligned}
I^{'}(w^{\pm})w^{\pm} &= \int_{\Omega} a(|\nabla w^{\pm}|^{p})|\nabla w^{\pm}|^{p}dx - \int_{\Omega} f(w^{\pm})w^{\pm}dx \\
&\leq \liminf \int_{\Omega} a(|\nabla w_n^{\pm}|^{p})|\nabla w_n^{\pm}|^{p}dx - \lim \int_{\Omega} f(w_n^{\pm})w_n^{\pm}dx \\
&= \liminf \int_{\Omega} a(|\nabla w_n^{\pm}|^{p})|\nabla w_n^{\pm}|^{p}dx - \liminf \int_{\Omega} f(w_n^{\pm})w_n^{\pm}dx \\
&= \liminf I^{'}(w_n^{\pm})w_n^{\pm} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I^{'}(w^{\pm})w^{\pm} \leq 0. \tag{2.11}$$

Por (2.9), (2.10), (2.11) e argumentos similares feitos na demonstração do Lema 2.3, obtemos $0 < t_1, t_2 \leq 1$. Note que,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \inf_{v \in \mathcal{M}} I(v) \\
&\leq I(t_1 w^{+} + t_2 w^{-}) \\
&= I(t_1 w^{+} + t_2 w^{-}) - \frac{1}{N} I^{'}(t_1 w^{+} + t_2 w^{-})(t_1 w^{+} + t_2 w^{-}).
\end{aligned}$$

Usando o fato de $0 < t_1, t_2 \leq 1$ e repetindo os argumentos do Lema 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
c_0 &\leq I(t_1 w^{+} + t_2 w^{-}) - \frac{1}{N} I^{'}(t_1 w^{+} + t_2 w^{-})(t_1 w^{+} + t_2 w^{-}) \\
&\leq I(w^{+} + w^{-}) - \frac{1}{N} I^{'}(w^{+} + w^{-})(w^{+} + w^{-}).
\end{aligned}$$

Como consequência de (a_2) segue que

$$\begin{aligned}
c_0 &\leq I(w^+ + w^-) - \frac{1}{N}I'(w^+ + w^-)(w^+ + w^-)\\
&\leq \liminf \left[I(w_n^+ + w_n^-) - \frac{1}{N}I'(w_n^+ + w_n^-)(w_n^+ + w_n^-)\right]\\
&= \liminf \left[I(w_n) - \frac{1}{N}I'(w_n)(w_n)\right]\\
&= \liminf I(w_n)\\
&= c_0.
\end{aligned}$$

Portanto $I(t_1 w^+ + t_2 w^-) = c_0$, isto é, existem $0 < t_1, t_2 \leq 1$ tais que

$$t_1 w^+ + t_2 w^- \in \mathcal{M} \ \text{ e } \ I(t_1 w^+ + t_2 w^-) = c_0.$$

Afirmação : $t_1 = t_2 = 1$.

Logo,

$$w = w^+ + w^- \in \mathcal{M} \ \text{ e } \ I(w^+ + w^-) = I(w) = c_0.$$

Provaremos a afirmação. Vamos supor, por contradição que t_1 ou t_2 são menores que 1, sem perda de generalidade supomos $t_1 < 1$ e $t_2 = 1$, ou seja, $t_1 w^+ + w^- \in \mathcal{M}$ e

$$I(t_1 w^+ + w^-) \ = \ I(t_1 w^+ + w^-) - \frac{1}{N}I'(t_1 w^+ + w^-)(t_1 w^+ + w^-).$$

Como $t_1 w^+ + w^- < w^+ + w^-$ e repetindo os mesmos argumentos do Lema 2.3, segue que

$$I(t_1 w^+ + w^-) \ < \ I(w^+ + w^-) - \frac{1}{N}I'(w^+ + w^-)(w^+ + w^-).$$

Por (a_2),

$$\begin{aligned} I(t_1w^+ + w^-) &< I(w^+ + w^-) - \frac{1}{N}I^{'}(w^+ + w^-)(w^+ + w^-) \\ &\leq \liminf \left[I(w_n^+ + w_n^-) - \frac{1}{N}I^{'}(w_n^+ + w_n^-)(w_n^+ + w_n^-) \right] \\ &= \liminf \left[I(w_n) - \frac{1}{N}I^{'}(w_n)(w_n) \right] \\ &= \liminf I(w_n) \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Mostrando que $I(t_1w^+ + w^-) < c_0$, o que é um absurdo. Portanto $t_1 = t_2 = 1$.

Mostraremos que $I^{'}(w) = 0$. Vamos supor, por contradição que $I^{'}(w) \neq 0$, isto é, existe constante $\alpha > 0$ e $v_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|v_0\| = 1$ tal que

$$I^{'}(w)v_0 = 2\alpha > 0.$$

Como I é de classe C^1, segue que existe $r > 0$ tal que

$$I^{'}(v)v_0 = \alpha,\ \forall v \in B_r(w),\ \ v^{\pm} \neq 0.$$

Defina $D = (\xi, \chi) \times (\xi, \chi) \subset \mathbb{R}^2$, com $0 < \xi < 1 < \chi$ tais que:

(i) $(1,1) \in D$ e $\phi^w(t,T) = (0,0)$ em $\overline{D}$ se, e somente se $(t,T) = (1,1)$;

(ii) $c_0 \notin h^w(\partial D)$;

(iii) $\left\{ tw^+ + Tw^- : (t,T) \in \overline{D} \right\} \subset B_r(w)$,

onde h^w e ϕ^w já foram definidas no Lema 2.2, e tomamos um raio $r^{'} > 0$ suficientemente pequeno para que

$$\mathcal{B} = \overline{B_{r'}(w)} \subset B_r(w) \text{ e } \mathcal{B} \cap \left\{ tw^+ + Tw^- : (t,T) \in \partial D \right\} = \emptyset. \tag{2.12}$$

Definimos uma função contínua $\rho : W_0^{1,N}(\Omega) \to [0, +\infty)$, dada por

$$\rho(u) = \text{dist}(u, \mathcal{B}^C),\ \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Denote $\eta(\tau) = \eta(\tau, u)$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta^{'}(\tau) = -\rho(\eta(\tau))v_0, \ \forall \tau > 0 \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

Agora, observe que existe uma deformação contínua $\eta(\tau, u)$ e $\tau_0 > 0$ tal que para todo $\tau \in [0, \tau_0]$ satisfaz as seguintes propriedades :

(a) $\eta(\tau, u) = u, \ \forall \ u \notin \mathcal{B}$;

(b) $\tau \to I(\eta(\tau, u))$ é decrescente $\forall \ \eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$;

(c) $I(\eta(\tau, w)) \leq I(w) - \dfrac{r^{'}\alpha}{2}\tau$.

Mostramos que ocorre (a).

Seja $u \notin \mathcal{B}$, da definição ρ temos $\rho(u) = 0$, é a única solução que satisfaz o problema de Cauchy é a constante com valor u, então temos $\eta(\tau, u) = u$.

Provamos (b).

Desde que $\eta(\tau) \in \mathcal{B} \subset B_r(w)$ temos que

$$I^{'}(\eta(\tau))v_0 = \alpha > 0.$$

Pela definição de ρ temos que

$$\rho(\eta(\tau)) > 0.$$

Vamos derivar I em relação a τ, $\forall \ \eta(\tau) \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(I(\eta(\tau))) &= I^{'}(\eta(\tau))\eta^{'}(\tau) \\ &= I^{'}(\eta(\tau))(-\rho(\eta(\tau))v_0) \\ &= -\rho(\eta(\tau))I^{'}(\eta(\tau))v_0 \\ &= -\rho(\eta(\tau))\alpha \\ &< 0, \end{aligned}$$

o que prova (b).

Provamos (c).

Dado $\tau_0 > 0$ tal que $\eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$ para cada $0 \leq \tau \leq \tau_0$, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\|\eta(\tau, w) - w\| \leq \frac{r^{'}}{2} \Leftrightarrow \eta(\tau, w) \in \overline{B_{\frac{r^{'}}{2}}(w)}, \text{ para cada } 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Assim, desde que

$$\rho(\eta(\tau, w)) = \operatorname{dist}(\eta(\tau, w), \mathcal{B}^C) \geq \frac{r^{'}}{2},$$

e

$$\frac{d}{d\tau}(I(\eta(\tau, w))) = -\rho(\eta(\tau, w))\alpha \leq -\frac{r^{'}\alpha}{2}.$$

Se integrarmos em $[0, \tau_0]$ então

$$I(\eta(\tau_0, w)) - I(w) \leq -\frac{r^{'}\alpha}{2}\tau_0,$$

e fazendo $\tau = \tau_0$, obtemos

$$I(\eta(\tau, w)) \leq I(w) - \frac{r^{'}\alpha}{2}\tau,$$

o que mostra (c). Considere a deformação $\overline{\eta_0} : \overline{D} \to W_0^{1,N}(\Omega)$ dada por

$$\overline{\eta_{\tau_0}}(t, T) := \eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-), \ \forall (t, T) \in \overline{D},$$

e mostremos que

$$\max_{(t,T)\in\overline{D}} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t, T)) < c_0.$$

De fato, por (b) e usando o fato de η satisfazer $\eta(0, u) = u$, para todo $(t, T) \in \overline{D} \setminus \{(1, 1)\}$ segue que,

$$I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t, T)) \ = \ I(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-)).$$

Por (b),

$$I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) \quad < \quad I(\eta(0,tw^+ + Tw^-)).$$

Da condição inicial, obtemos

$$\begin{aligned} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) &< I(\eta(0,tw^+ + Tw^-)) \\ &= I(tw^+ + Tw^-) \\ &= h^w(t,T). \end{aligned}$$

Desde que $w \in \mathcal{M}$ e $(t,T) \neq (1,1)$ pelo Lema 2.3

$$\begin{aligned} h^w(t,T) &< h^w(1,1) \\ &= I(w) \\ &= c_0, \end{aligned}$$

e daí

$$I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) \quad < \quad c_0.$$

Agora, analisemos o caso $(t,T) = (1,1)$. Por definição,

$$\begin{aligned} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(1,1)) &= I(\eta(\tau_0, w^+ + w^-) \\ &= I(\eta(\tau_0, w)). \end{aligned}$$

Por (c),

$$\begin{aligned} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(1,1)) &= I(\eta(\tau_0, w)) \\ &\leq I(w) - \frac{r^{'}\alpha}{2}\tau_0 \\ &< I(w) \\ &= c_0 \end{aligned}$$

Então,

$$\max_{(t,T)\in\overline{D}} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) < c_0. \tag{2.13}$$

Mostraremos que $\overline{\eta_{\tau_0}}(\overline{D}) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$, ou seja, contradizendo (2.13).

Defina $\psi_{\tau_0} : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\psi_{\tau_0} := \left(\frac{I^{'}(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))^+}{t}, \frac{I^{'}(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))^-}{T} \right).$$

Pela definição $\overline{\eta}$ e fazendo $\tau = \tau_0$, segue que

$$\psi_{\tau_0}(t,T) = \left(\frac{I^{'}(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))^+}{t}, \frac{I^{'}(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))^-}{T} \right),$$

para todo $(t,T) \in \partial D$.

Por (2.12), segue que $(t,T) \notin \mathcal{B}$ e por (a),

$$\begin{aligned}
\psi_{\tau_0}(t,T) &= \left(\frac{I^{'}(tw^+ + Tw^-)(tw^+ + Tw^-)^+}{t}, \frac{I^{'}(tw^+ + Tw^-)(tw^+ + Tw^-)^-}{T} \right) \\
&= \left(I^{'}(tw^+ + Tw^-)w^+, I^{'}(tw^+ + Tw^-)w^- \right) \\
&= \phi^w(t,T).
\end{aligned}$$

Pelo grau topológico de Brower,

$$\deg\left(\psi_{\tau_0}, D, (0,0)\right) = \deg\left(\phi^w, D, (0,0)\right) = \operatorname{sgn}\left(\det(\phi^w)^{'}(1,1)\right) = 1.$$

Assim, segue que ψ_{τ_0} tem um zero em D, o qual denotamos por $(\bar{t}, \overline{T})$, ou seja, $\psi_{\tau_0}(\bar{t}, \overline{T}) = (0,0)$. Pela definição de ψ_{τ_0} temos

$$I^{'}(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \overline{T}))(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \overline{T}))^{\pm} = 0.$$

Então, existe $(\bar{t}, \overline{T}) \in D$ tal que $\overline{\eta_{\tau_0}}(\bar{t}, \overline{T}) \in \mathcal{M}$, o que contradiz (2.13). Portanto $I^{'}(w) = 0$, mostrando que w é ponto crítico de I.

Por fim, vamos provar que w tem exatamente dois domínios nodais, ou seja, w muda de sinal exatamente uma vez. Por (a_1), (f_1) e (f_2) segue que w é contínua. Logo

$$\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : w(x) \neq 0\}$$

é aberto.

Vamos supor, por contradição que $\tilde{\Omega}$ tem mais de duas componentes conexas ou w tem mais de dois domínios nodais, uma vez que w muda de sinal, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$w = w_1 + w_2 + w_3,$$

com $w_1 \geq 0$, $w_2 \leq 0$, $w_3 \neq 0$ e

$$\operatorname{supp}(w_i) \cap \operatorname{supp}(w_j) = \emptyset,\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3.$$

Note que

$$w_i = 0 \ \text{ em } \ \Omega \setminus \operatorname{supp}(w_i),\ i = 1, 2, 3.$$

Como $I^{'}(w) = 0$ e pelos suportes disjuntos, implica que

$$I^{'}(w_1 + w_2)w_1 = 0 = I^{'}(w_1 + w_2)w_2.$$

Desde que, $0 \neq w_1 = (w_1 + w_2)^+$ e $0 \neq w_2 = (w_1 + w_2)^-$, por argumentos já usados esistem $t_1, t_2 \in (0, 1]$ tal que

$$t_1(w_1 + w_2)^+ + t_2(w_1 + w_2)^- \in \mathcal{M},$$

isto é,

$$t_1 w_1 + t_2 w_2 \in \mathcal{M}$$

e ainda

$$I(t_1 w_1 + t_2 w_2) \geq c_0. \tag{2.14}$$

Como $w_3 \neq 0$ e $w_3 \in \mathcal{N}$, pelo Lema 2.1 e por argumentos similares feito no Lema 2.3 segue que,

$$\begin{aligned} I(t_1 w_1 + t_2 w_2) &\leq I(w_1 + w_2) \\ &< I(w_1 + w_2) + I(w_3) \\ &= I(w_1 + w_2 + w_3) \\ &= I(w) \\ &= c_0, \end{aligned}$$

o que contradiz (2.14). Portanto $w_3 = 0$, e isto conclui a demonstração do nosso teorema. $\square$

2.2 Demonstração do Teorema 2.2

Agora, para demonstrarmos o Teorema 2.2, além dos Lemas já demonstrados até o momento, precisaremos de outros resultados. Consideremos o seguinte problema auxiliar

$$(P_r) \qquad \begin{cases} -k_3 \Delta_p u - k_4 \Delta_N u = |u|^{r-2} u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u \in W_0^{1,N}(\Omega), \end{cases}$$

onde r é a constante da hipótese (f_5), o funcional associado ao problema (P_r) é dado por

$$I_r(u) = \frac{k_3}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{k_4}{N} \int_\Omega |\nabla u|^N dx - \frac{1}{r} \int_\Omega |u|^r dx,$$

e a variedade de Nehari

$$\mathcal{N}_r = \left\{ u \in W_0^{1,N}(\Omega) : u \neq 0 : I_r'(u) u = 0 \right\} \tag{2.15}$$

e

$$\mathcal{M}_r = \left\{ u \in \mathcal{N}_r : u^{\pm} \neq 0 : I_r'(u)u^{\pm} = 0 \right\}. \tag{2.16}$$

Desde que $r > N$, segue $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, por [9, Teorema 1], existe $w_r \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$w_r^{\pm} \neq 0, \quad I_r(w_r) = c_r^*, \quad I_r'(w_r) = 0$$

e

$$c_r^* \geq \frac{r-N}{rN} \int_\Omega |w_r|^r dx,$$

onde $c_r^* = \inf\limits_{\mathcal{M}_r} I_r$.

Lema 2.6 *O valor* $c^* = \inf\limits_{\mathcal{M}} I$ *satisfaz*

$$c^* \leq \frac{c_r^* N r(r-p)}{(r-N)pr\tau^{p/(r-p)}}$$

Demonstração: Note que por (a_1), temos

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq k_3 \int_\Omega |\nabla w_r|^p dx + k_4 \int_\Omega |\nabla w_r|^N dx.$$

Como $I_r'(w_r)w_r = 0$, tem-se

$$k_3 \int_\Omega |\nabla w_r|^p dx + k_4 \int_\Omega |\nabla w_r|^N dx = \int_\Omega |w_r|^r dx. \tag{2.17}$$

Logo,

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq \int_\Omega |w_r|^r dx.$$

De (f_5) temos que

$$\int_\Omega |w_r|^r dx \leq \frac{1}{\tau} \int_\Omega f(w_r) w_r dx.$$

Então

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq \frac{1}{\tau}\int_\Omega f(w_r)w_r dx,$$

como $\tau > 1$, segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla w_r|^p)|\nabla w_r|^p dx \leq \int_\Omega f(w_r)w_r dx. \tag{2.18}$$

Por (2.18), temos

$$I^{'}(w_r^{\pm})w_r^{\pm} \leq 0.$$

Então, existem $\beta_1, \beta_2 \in (0,1)$ tal que $\beta_1 w_r^+ + \beta_2 w_r^- \in \mathcal{M}$. Pela definição de c^*

$$\begin{aligned} c^* &= \inf_{\mathcal{M}} I \\ &\leq I(\beta_1 w_r^+ + \beta_2 w_r^-) \\ &= \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla(\beta_1 w_r^+ + \beta_2 w_r^-)|^p)dx - \int_\Omega F(\beta_1 w_r^+ + \beta_2 w_r^-)dx. \end{aligned}$$

Por (a_1) e (2.2) vem que

$$\begin{aligned} c^* &\leq \frac{k_3 {\beta_1}^p}{p}\int_\Omega |\nabla w_r^+|^p dx + \frac{k_4 {\beta_1}^N}{N}\int_\Omega |\nabla w_r^+|^N dx \\ &+ \frac{k_3 {\beta_2}^p}{p}\int_\Omega |\nabla w_r^-|^p dx + \frac{k_4 {\beta_2}^N}{N}\int_\Omega |\nabla w_r^-|^N dx - \int_\Omega F(\beta_1 w_r^+ + \beta_2 w_r^-)dx. \end{aligned}$$

De (f_5) e da definição de F, temos que

$$\int_\Omega F(\beta_1 w_r^+ + \beta_2 w_r^-)dx \geq \frac{\beta_1^r \tau}{r}\int_\Omega |w_r^+|^r dx + \frac{\beta_2^r \tau}{r}\int_\Omega |w_r^-|^r dx.$$

Então

$$\begin{aligned} c^* &\leq \frac{k_3 {\beta_1}^p}{p}\int_\Omega |\nabla w_r^+|^p dx + \frac{k_4 {\beta_1}^N}{N}\int_\Omega |\nabla w_r^+|^N dx - \frac{\beta_1^r \tau}{r}\int_\Omega |w_r^+|^r dx \\ &+ \frac{k_3 {\beta_2}^p}{p}\int_\Omega |\nabla w_r^-|^p dx + \frac{k_4 {\beta_2}^N}{N}\int_\Omega |\nabla w_r^-|^N dx - \frac{\beta_2^r \tau}{r}\int_\Omega |w_r^-|^r dx. \end{aligned}$$

Usando o fato de $\beta_1, \beta_2 \in (0,1)$ e $1 < p < N$ segue que,

$$\begin{aligned}
c^* &\leq \frac{\beta_1^p}{p}\left[k_3\int_\Omega |\nabla w_r^+|^p dx + k_4\int_\Omega |\nabla w_r^+|^N dx\right] - \frac{\beta_1^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r^+|^r dx \\
&+ \frac{\beta_2^p}{p}\left[k_3\int_\Omega |\nabla w_r^-|^p dx + k_4\int_\Omega |\nabla w_r^-|^N dx\right] - \frac{\beta_1^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r^-|^r dx.
\end{aligned}$$

Como $I_r'(w_r) = 0$, segue que $I_r'(w_r^\pm)w_r^\pm = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
c^* &\leq \frac{\beta_1^p}{p}\int_\Omega |w_r^+|^r dx - \frac{\beta_1^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r^+|^r dx \\
&+ \frac{\beta_2^p}{p}\int_\Omega |w_r^-|^r dx - \frac{\beta_1^r\tau}{r}\int_\Omega |w_r^-|^r dx \\
&= \left[\frac{{\beta_1}^p}{p} - \frac{\tau{\beta_1}^r}{r}\right]\int_\Omega |w_r^+|^r dx + \left[\frac{{\beta_2}^p}{p} - \frac{\tau{\beta_2}^r}{r}\right]\int_\Omega |w_r^-|^r dx.
\end{aligned}$$

Então,

$$c^* \leq \max_{s\geq 0}\left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right]\int_\Omega |w_r|^r dx$$

e ainda

$$\begin{aligned}
c^* &\leq \max_{s\geq 0}\left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right]\int_\Omega |w_r|^r dx \\
&\leq \max_{s\geq 0}\left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right]\frac{c_r^* N r}{r-N}.
\end{aligned}$$

Por uma manipulação algébrica, segue que

$$\max_{s\geq 0}\left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right] = \frac{r-p}{pr\tau^{p/(r-p)}}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
c^* &\leq \max_{s\geq 0}\left[\frac{s^p}{p} - \frac{\tau s^r}{r}\right]\frac{c_r^* N r}{r-N} \\
&\leq \frac{c_r^* N r(r-p)}{(r-N)pr\tau^{p/(r-p)}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.7 *Se* $(u_n) \subset \mathcal{N}$ *sequência minimizante para* c^*, *então*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\|^{N/N-1} \leq \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0+\delta)}.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.1 temos que,

$$\|u_n\|^N \quad \leq \quad \frac{c^*\theta p\gamma}{k_2(\theta - p\gamma)} + o_n(1).$$

Pelo Lema 2.6,

$$\|u_n\|^N \quad \leq \quad \frac{\theta p\gamma}{k_2(\theta - p\gamma)}.\frac{c_r^* N r(r-p)}{(r-N)pr\tau^{p/(r-p)}} + o_n(1).$$

Como $\tau > \tau^*$ em (f_5), segue que

$$\|u_n\|^N \leq \left[\frac{\alpha_N}{2(\alpha_0+\delta)}\right]^{N-1} + o_n(1).$$

Portanto

$$\|u_n\|^{N/N-1} \leq \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0+\delta)} + o_n(1),$$

o que implica

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\|^{N/N-1} \leq \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0+\delta)}.$$

$\square$

Lema 2.8 *Se* $(u_n) \subset \mathcal{M}$ *sequência minimizante para* c^*, *então*

$$\int_\Omega f(u_n)u_n dx \to \int_\Omega f(u)u dx$$

e

$$\int_\Omega F(u_n)dx \to \int_\Omega F(u)dx.$$

Demonstração: Basta seguir os mesmos passos do Lema 1.9. $\square$

Lema 2.9 *Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}$ uma sequência minimizante para c^*, então existe $s^{'} > 1$ tal que*

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs^{'}} dx > 0.$$

Demonstração: Como (u_n) uma sequência em $\mathcal{M}$, segue que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_n{}^{\pm}|^p)|\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx = \int_\Omega f(u_n{}^{\pm})u_n{}^{\pm}dx.$$

Por (a_1) e (1.5),

$$k_1 \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx + k_2\|u_n{}^{\pm}\|^N \leq \epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp\left(\alpha|u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Das Desigualdade de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^p dx \leq C \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx,$$

segue que,

$$k_1 \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx + k_2\|u_n{}^{\pm}\|^N \leq \epsilon C \int_\Omega |\nabla u_n{}^{\pm}|^p dx + C_\epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp\left(\alpha|u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $k_1 - \epsilon C > 0$ temos,

$$k_2\|u_n{}^{\pm}\|^N \leq C_\epsilon \int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp\left(\alpha|u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Da desiguladade de Holder para $s, s^{'} > 1$, com s próximo de 1, segue que

$$\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^q \exp(\alpha|u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}})dx \quad \leq \quad \left(\int_\Omega |u_n{}^{\pm}|^{qs^{'}} dx\right)^{\frac{1}{s^{'}}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha|u_n{}^{\pm}|^{\frac{N}{N-1}})dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Por um cálculo simples temos que,

$$\int_\Omega |u_n{}^\pm|^q \exp(\alpha |u_n{}^\pm|^{\frac{N}{N-1}})dx \;\; \leq \;\; \left(\int_\Omega |u_n{}^\pm|^{qs'}dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp(s\alpha \|u_n{}^\pm\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n{}^\pm|}{\|u_n{}^\pm\|}\right)^{\frac{N}{N-1}})dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Desde que (u_n) é uma sequência minimizante, segue do Lema 2.8

$$\lim_{n\to+\infty}\sup \|u_n\|^{N/N-1} \leq \frac{\alpha_N}{2(\alpha_0+\delta)},$$

tomamos $\alpha = \alpha_0 + \delta$.

Usando o Teorema A.1 (Apêndice A), temos

$$\sup_{\|\frac{|u_n{}^\pm|}{\|u_n{}^\pm\|}\|=1} \int_\Omega \exp(s\alpha \|u_n{}^\pm\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u_n{}^\pm|}{\|u_n{}^\pm\|}\right)^{\frac{N}{N-1}})dx \leq M.$$

Então

$$k_2\|u_n{}^\pm\|^N \leq C_\epsilon \left(\int_\Omega |u_n{}^\pm|^{qs'}\right)^{\frac{1}{s'}} M^{\frac{1}{s}},$$

pelo Lema 2.1,

$$k_2\rho_1^N \leq C_\epsilon \left(\int_\Omega |u_n{}^\pm|^{qs'}\right)^{\frac{1}{s'}} M^{\frac{1}{s}},$$

por um cálculo simples segue que,

$$0 < \left(\frac{k_2{\rho_1}^N}{C_\epsilon M^{\frac{1}{s}}}\right)^{s'} \leq \int_\Omega |u_n{}^\pm|^{qs'}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to+\infty}\inf \int_\Omega |u_n{}^\pm|^{qs'}dx > 0.$$

$\square$

Agora vamos demonstrar o Teorema 2.2

Demonstração: Pelo Lema 2.1, existe $c_0 > 0$ tal que

$$c_0 = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u).$$

Então existe uma sequência minimizante limitada (w_n) em $\mathcal{M}$, pois I é coercivo. A menos de subsequência, temos que existem $w, w_1, w_2 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

$$w_n \rightharpoonup w, w_n^+ \rightharpoonup w_1 \text{ e } w_n^- \rightharpoonup w_2$$

em $W_0^{1,N}(\Omega)$, das imersões compactas

$$w_n \to w, w_n^+ \to w_1 \text{ e } w_n^- \to w_2$$

em $L^m(\Omega)$, com $m > N$.

Por devidas adaptações de [15, Lema 2.3], as transformações

$$w \to w^+ \text{ e } w \to w^-,$$

são contínuas de $L^m(\Omega)$ em $L^m(\Omega)$, temos que $w^+ = w_1 \geq 0$ e $w^- = w_2 \leq 0$.

Como

$$w_n^+ \to w^+, w_n^- \to w^- \text{ em } L^{qs'}(\Omega),$$

pelo Lema 2.9 segue que

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega |w_n{}^\pm|^{qs'} dx = \int_\Omega |w^\pm|^{qs'} dx > 0,$$

o que nos da $w^\pm \neq 0$ e consequentemente $w = w^+ + w^-$.

Pelo Lema 2.2 existem $t_1, t_2 > 0$ tal que

$$I'(t_1 w^+ + t_2 w^-)w^+ = I'(t_1 w^+)w^+ = I'(t_1 w^+)t_1 w^+ = 0 \tag{2.19}$$

e

$$I^{'}(t_1w^+ + t_2w^-)w^- = I^{'}(t_2w^-)w^- = I^{'}(t_2w^-)t_2w^- = 0, \tag{2.20}$$

com $t_1w^+ + t_2w^- \in \mathcal{M}$. Provemos que $t_1, t_2 \leq 1$.

Por (a_2) temos que,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{p}A(|\nabla w^\pm|^p) - \frac{1}{N}a(|\nabla w^\pm|^p)|\nabla w^\pm|^p\right) \leq \liminf \int_\Omega \left(\frac{1}{p}A(|\nabla w_n^\pm|^p) - \frac{1}{N}a(|\nabla w_n^\pm|^p)|\nabla w_n^\pm|^p\right)$$

e

$$\int_\Omega a(|\nabla w^\pm|^p)|\nabla w^\pm|^p dx \leq \liminf \int_\Omega a(|\nabla w_n^\pm|^p)|\nabla w_n^\pm|^p dx.$$

Pelo Lema 2.8,

$$\int_\Omega f(w_n^\pm)w_n^\pm dx \to \int_\Omega f(w^\pm)w^\pm dx$$

e

$$\int_\Omega F(w_n^\pm)dx \to \int_\Omega F(w^\pm)dx.$$

Então

$$\begin{aligned}
I^{'}(w^\pm)w^\pm &= \int_\Omega a(|\nabla w^\pm|^p)|\nabla w^\pm|^p dx - \int_\Omega f(w^\pm)w^\pm dx \\
&\leq \liminf \int_\Omega a(|\nabla w_n^\pm|^p)|\nabla w_n^\pm|^p dx - \lim \int_\Omega f(w_n^\pm)w_n^\pm dx \\
&= \liminf \int_\Omega a(|\nabla w_n^\pm|^p)|\nabla w_n^\pm|^p dx - \liminf \int_\Omega f(w_n^\pm)w_n^\pm dx \\
&= \liminf I^{'}(w_n^\pm)w_n^\pm \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I^{'}(w^\pm)w^\pm \leq 0. \tag{2.21}$$

Por (2.19), (2.20), (2.21) e argumentos similares feitos na demonstração do Lema 2.3 obtemos $0 < t_1, t_2 \leq 1$. Note que,

$$\begin{aligned} c_0 &= \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u) \\ &\leq I(t_1 w^+ + t_2 w^-) \\ &= I(t_1 w^+ + t_2 w^-) - \frac{1}{N} I'(t_1 w^+ + t_2 w^-)(t_1 w^+ + t_2 w^-). \end{aligned}$$

Usando o fato de $0 < t_1, t_2 \leq 1$ e repetindo os mesmos argumentos do Lema 2.3 obtemos,

$$\begin{aligned} c_0 &\leq I(t_1 w^+ + t_2 w^-) - \frac{1}{N} I'(t_1 w^+ + t_2 w^-)(t_1 w^+ + t_2 w^-) \\ &\leq I(w^+ + w^-) - \frac{1}{N} I'(w^+ + w^-)(w^+ + w^-). \end{aligned}$$

Como consequência de (a_2) segue que,

$$\begin{aligned} c_0 &\leq I(w^+ + w^-) - \frac{1}{N} I'(w^+ + w^-)(w^+ + w^-) \\ &\leq \liminf \left[I(w_n^+ + w_n^-) - \frac{1}{N} I'(w_n^+ + w_n^-)(w_n^+ + w_n^-) \right] \\ &= \liminf \left[I(w_n) - \frac{1}{N} I'(w_n)(w_n) \right] \\ &= \liminf I(w_n) \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Portanto $I(t_1 w^+ + t_2 w^-) = c_0$, isto é, existem $0 < t_1, t_2 \leq 1$ tais que,

$$t_1 w^+ + t_2 w^- \in \mathcal{M} \ \text{ e } \ I(t_1 w^+ + t_2 w^-) = c_0.$$

Afirmação : $t_1 = t_2 = 1$.

Logo

$$w = w^+ + w^- \in \mathcal{M} \ \text{ e } \ I(w^+ + w^-) = I(w) = c_0.$$

Provaremos a afirmação. Vamos supor, por contradição que t_1 ou t_2 são menores que 1, sem perda de generalidade supomos $t_1 < 1$ e $t_2 = 1$, ou seja, $t_1 w^+ + w^- \in \mathcal{M}$ e

$$I(t_1 w^+ + w^-) \;\; = \;\; I(t_1 w^+ + w^-) - \frac{1}{N} I^{'}(t_1 w^+ + w^-)(t_1 w^+ + w^-).$$

Como $t_1 w^+ + w^- < w^+ + w^-$ e repetindo os mesmos argumentos do Lema 2.3 segue que

$$I(t_1 w^+ + w^-) \;\; < \;\; I(w^+ + w^-) - \frac{1}{N} I^{'}(w^+ + w^-)(w^+ + w^-).$$

Por (a_2) segue que,

$$\begin{aligned} I(t_1 w^+ + w^-) \;\; &< \;\; I(w^+ + w^-) - \frac{1}{N} I^{'}(w^+ + w^-)(w^+ + w^-) \\ &\leq \;\; \liminf \left[I(w_n^+ + w_n^-) - \frac{1}{N} I^{'}(w_n^+ + w_n^-)(w_n^+ + w_n^-) \right] \\ &= \;\; \liminf \left[I(w_n) - \frac{1}{N} I^{'}(w_n)(w_n) \right] \\ &= \;\; \liminf I(w_n) \\ &= \;\; c_0. \end{aligned}$$

Mostrando que $I(t_1 w^+ + w^-) < c_0$, o que é um absurdo. Portanto $t_1 = t_2 = 1$.

Mostraremos que $I^{'}(w) = 0$. Vamos supor, por contradição que $I^{'}(w) \neq 0$, isto é, existe constante $\alpha > 0$ e $v_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|v_0\| = 1$ tal que

$$I^{'}(w) v_0 = 2\alpha > 0.$$

Como I é de classe C^1, segue que existe $r > 0$ tal que

$$I^{'}(v) v_0 = \alpha, \; \forall v \in B_r(w), \;\; v^{\pm} \neq 0.$$

Defina $D = (\xi, \chi) \times (\xi, \chi) \subset \mathbb{R}^2$, com $0 < \xi < 1 < \chi$ tais que:

(i) $(1,1) \in D$ e $\phi^w(t,s) = (0,0)$ em $\overline{D}$ se $(t,s) = (1,1)$;

(ii) $c_0 \notin h^w(\partial D)$;

(iii) $\left\{ t w^+ + T w^- : (t,T) \in \overline{D} \right\} \subset B_r(w)$,

onde h^w e ϕ^w já foram definidas no Lema 2.3, e tomamos um raio $r^{'} > 0$ suficientemente pequeno para que

$$\mathcal{B} = \overline{B_{r'}(w)} \subset B_r(w) \text{ e } \mathcal{B} \cap \left\{ tw^+ + Tw^- : (t,T) \in \partial D \right\} = \emptyset. \tag{2.22}$$

Definimos uma função contínua $\rho : W_0^{1,N}(\Omega) \to [0, +\infty)$, dada por

$$\rho(u) = \text{dist}(u, \mathcal{B}^C), \ \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Denote $\eta(\tau) = \eta(\tau, u)$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta^{'}(\tau) = -\rho(\eta(\tau))v_0, \ \forall \tau > 0 \\ \eta(0) = u. \end{cases}$$

Agora, observe que existe uma deformação contínua $\eta(\tau, u)$ e $\tau_0 > 0$ tal que para todo $\tau \in [0, \tau_0]$ satisfaz as seguintes propriedades :

(a) $\eta(\tau, u) = u, \ \forall \ u \notin \mathcal{B}$;

(b) $\tau \to I(\eta(\tau, u))$ é decrescente $\forall \ \eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$;

(c) $I(\eta(\tau, w)) \leq I(w) - \dfrac{r^{'}\alpha}{2}\tau$.

Mostramos que ocorre (a).

Seja $u \notin \mathcal{B}$, da definição ρ temos $\rho(u) = 0$, é a única solução que satisfaz o problema de Cauchy é a constante com valor u, então temos $\eta(\tau, u) = u$.

Provamos (b).

Desde que $\eta(\tau) \in \mathcal{B} \subset B_r(w)$ temos que

$$I^{'}(\eta(\tau))v_0 = \alpha > 0.$$

Pela definição de ρ temos que

$$\rho(\eta(\tau)) > 0.$$

Vamos derivar I em relação aτ, $\forall\ \eta(\tau) \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(I(\eta(\tau))) &= I^{'}(\eta(\tau))\eta^{'}(\tau) \\
&= I^{'}(\eta(\tau))(-\rho(\eta(\tau))v_0) \\
&= -\rho(\eta(\tau))I^{'}(\eta(\tau))v_0 \\
&= -\rho(\eta(\tau))\alpha \\
&< 0,
\end{aligned}$$

o que prova (b).

Provamos (c).

Dado $\tau_0 > 0$ tal que $\eta(\tau, u) \in \mathcal{B}$ para cada $0 \leq \tau \leq \tau_0$, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\|\eta(\tau, w) - w\| \leq \frac{r^{'}}{2} \Leftrightarrow\ \eta(\tau, w) \in \overline{B_{\frac{r'}{2}}(w)},\ \text{para cada } 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Assim, desde

$$\rho(\eta(\tau, w)) = \mathrm{dist}(\eta(\tau, w), \mathcal{B}^C) \geq \frac{r^{'}}{2},$$

e

$$\frac{d}{d\tau}(I(\eta(\tau, w))) = -\rho(\eta(\tau, w))\alpha \leq -\frac{r^{'}\alpha}{2}.$$

Se integrarmos em $[0, \tau_0]$ então

$$I(\eta(\tau_0, w)) - I(w) \leq -\frac{r^{'}\alpha}{2}\tau_0,$$

fazendo $\tau = \tau_0$,

$$I(\eta(\tau, w)) \leq I(w) - \frac{r^{'}\alpha}{2}\tau,$$

o que mostra (c). Considere a deformação $\overline{\eta_0} : \overline{D} \to W_0^{1,N}(\Omega)$ dada por

$$\overline{\eta_{\tau_0}}(t, s) := \eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-),\ \forall (t, T) \in \overline{D},$$

e

$$\max_{(t,T)\in\overline{D}} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) < c_0.$$

De fato, por (b) e usando o fato de η satisfazer $\eta(0,u) = u$, para todo $(t,T) \in \overline{D} \setminus \{(1,1)\}$ segue que,

$$I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) = I(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-)).$$

Por (b),

$$I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) < I(\eta(0, tw^+ + Tw^-)).$$

Da condição inicial, obtemos

$$\begin{aligned} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,s)) &< I(\eta(0, tw^+ + Tw^-)) \\ &= I(tw^+ + Tw^-) \\ &= h^w(t,T). \end{aligned}$$

Desde que $w \in \mathcal{M}$ e $(t,T) \neq (1,1)$ pelo Lema 2.3,

$$\begin{aligned} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) &< h^w(t,T) \\ &< h^w(1,1) \\ &= I(w) \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Agora para o caso $(t,T) = (1,1)$. Por definição,

$$\begin{aligned} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(1,1)) &= I(\eta(\tau_0, w^+ + w^-) \\ &= I(\eta(\tau_0, w)). \end{aligned}$$

Por (c),

$$\begin{aligned} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(1,1)) &= I(\eta(\tau_0, w)) \\ &\leq I(w) - \frac{r' \alpha}{2}\tau_0 \\ &< I(w) \\ &= c_0, \end{aligned}$$

e daí

$$\max_{(t,T)\in\overline{D}} I(\overline{\eta_{\tau_0}}(t,T)) < c_0. \tag{2.23}$$

Mostraremos que $\overline{\eta_{\tau_0}}(\overline{D}) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset$, ou seja, contradizendo (2.23).

Defina $\psi_{\tau_0} : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\psi_{\tau_0} := \left(\frac{I'(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))^+}{t}, \frac{I'(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))(\overline{\eta}_{\tau_0}(t,T))^-}{T} \right).$$

Pela definição $\overline{\eta}$ e fazendo $\tau = \tau_0$ segue que

$$\psi_{\tau_0}(t,T) = \left(\frac{I'(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))^+}{t}, \frac{I'(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))(\eta(\tau_0, tw^+ + Tw^-))^-}{T} \right),$$

para todo $(t,T) \in \partial D$.

Por (2.22), segue que $(t,T) \notin \mathcal{B}$ e por (a),

$$\begin{aligned} \psi_{\tau_0}(t,T) &= \left(\frac{I'(tw^+ + Tw^-)(tw^+ + Tw^-)^+}{t}, \frac{I'(tw^+ + Tw^-)(tw^+ + Tw^-)^-}{T} \right) \\ &= \left(I'(tw^+ + Tw^-)w^+, I'(tw^+ + Tw^-)w^- \right) \\ &= \phi^w(t,T). \end{aligned}$$

Pelo grau topológico de Brower,

$$\deg(\psi_{\tau_0}, D, (0,0)) = \deg(\phi^w, D, (0,0)) = \operatorname{sgn}\left(\det(\phi^w)'(1,1)\right) = 1.$$

Assim, segue que ψ_{τ_0} tem um zero em D, o qual denotamos por $(\bar{t}, \overline{T})$, ou seja, $\psi_{\tau_0}(\bar{t}, \overline{T}) = (0,0)$, pela definição de ψ_{τ_0}, temos

$$I^{'}(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \overline{T}))(\overline{\eta}_{\tau_0}(\bar{t}, \overline{T}))^{\pm} = 0.$$

Então, existe $(\bar{t}, \overline{T}) \in D$ tal que $\overline{\eta_{\tau_0}}(\bar{t}, \overline{T}) \in \mathcal{M}$, o que contradiz (2.23). Portanto $I^{'}(w) = 0$, mostrando que w é ponto crítico de I. Por fim, vamos provar que w tem exatamente dois domínios nodais, ou seja, w muda de sinal exatamente uma vez. Por (a_1), (f_1) e (f_2) segue que w é contínua. Logo,

$$\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega : w(x) \neq 0\}$$

é aberto.

Vamos supor, por contradição que $\tilde{\Omega}$ tem mais de duas componentes conexas ou w tem mais de dois domínios nodais, uma vez que w muda de sinal, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$w = w_1 + w_2 + w_3,$$

com $w_1 \geq 0$, $w_2 \leq 0$, $w_3 \neq 0$ e

$$\text{supp}(w_i) \cap \text{supp}(w_j) = \emptyset,\ i \neq j;\ i,j = 1,2,3.$$

Note que

$$w_i = 0 \ \text{ em } \ \Omega \setminus \text{supp}(w_i),\ i = 1,2,3.$$

Como $I^{'}(w) = 0$ e pelos suportes disjuntos, implica que

$$I^{'}(w_1 + w_2)w_1 = 0 = I^{'}(w_1 + w_2)w_2.$$

Desde que, $0 \neq w_1 = (w_1 + w_2)^+$ e $0 \neq w_2 = (w_1 + w_2)^-$, por argumentos já usados esistem $t_1, t_2 \in (0,1]$ tal que

$$t_1(w_1+w_2)^+ + t_2(w_1+w_2)^- \in \mathcal{M},$$

isto é,

$$t_1w_1 + t_2w_2 \in \mathcal{M}$$

e ainda

$$I(t_1w_1 + t_2w_2) \geq c_0. \tag{2.24}$$

Como $w_3 \neq 0$ e $w_3 \in \mathcal{N}$, pelo Lema 2.1 e por argumentos similares feito no Lema 2.3, segue que

$$\begin{aligned}
I(t_1w_1 + t_2w_2) &\leq I(w_1+w_2) \\
&< I(w_1+w_2) + I(w_3) \\
&= I(w_1+w_2+w_3) \\
&= I(w) \\
&= c_0,
\end{aligned}$$

o que contradiz (2.24). Portanto $w_3 = 0$, e isto conclui a demonstração do nosso teorema. $\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

APÊNDICE

Neste Apêndice vamos definir o espaço em que estamos trabalhando e enunciaremos alguns reultados usados.

Definimos $W^{1,N}(\Omega)$ por

$$W^{1,N}(\Omega) := \left\{ u \in L^N(\Omega); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^N(\Omega); \quad i = 1, 2, ..., N \right\}$$

com a seguinte norma

$$\|u\|_{1,N} = \left(\int_\Omega |u|^N + \int_\Omega |\nabla u|^N \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Definição. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. O espaço $W_0^{1,N}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\|.\|_{1,N}$, isto é,

$$W_0^{1,N}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{1,N}}$$

onde a norma de $W_0^{1,N}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Teorema A.1 *(Desigualdade de Trundinger-Moser). Para cada $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\alpha > 0$*

$$exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}} \right) \in L^1(\Omega)$$

e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M,$$

para cada $\alpha \leq \alpha_N := N w_{N-1}^{1/N-1}$, onde w_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional da $(N-1)$esfera.

Demonstração: Ver [51]. □

Teorema A.2 *(Teorema da convergência dominada de Lebesgue). Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

a) $f_n(x) \to f(x)$ q.s.Ω.

b) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, q.s.Ω, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\displaystyle\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$.

Demonstração: Ver [14]. □

Teorema A.3 *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_n - f|_p \to 0$. Então existem uma subsequência (f_{n_k}) e $h \in L^p(\Omega)$ tal que,*

a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.s.Ω.

b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, q.s.Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [14]. □

Teorema A.4 *(Brezis e Lieb) Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω e que existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int_\Omega f_n \varphi \to \int_\Omega f \varphi, \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

onde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: Ver [14]. □

Teorema A.5 *(Imersão de $W^{1,N}(\Omega)$). Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1, então vale a imersão*

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

qualquer que seja $q \geq 1$.

Demonstração: Ver [14] $\square$

Teorema A.6 *(Rellich-Kondrachov). Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1, então a seguinte imersão é compacta*

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

qualquer que seja $q \geq 1$.

Demonstração: Ver [14] $\square$

Lema A.1 *Se $t \mapsto \dfrac{a(t^p)}{t^{(N-p)}}$ é não-crescente para $t > 0$. Então*

$$a'(t)t \leq \frac{(N-p)}{p}a(t) \quad \textit{para todo} \quad t > 0$$

e existe $\gamma \geq \frac{N}{p}$ tal que

$$A(t) \geq \frac{1}{\gamma}a(t)t \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Demonstração: Note que,

$$\left(\frac{a(t^p)}{t^{(N-p)}}\right)' = \frac{a'(t^p)pt^{p-1}t^{N-p} - a(t^p)(N-p)t^{N-p-1}}{t^{(N-p)2}} \leq 0,$$

logo

$$a'(t^p)pt^{p-1}t^{N-p} - a(t^p)(N-p)t^{N-p-1} \leq 0,$$

o que implica

$$a'(t)t \leq \frac{(N-p)}{p}a(t) \quad \text{para todo} \quad t \geq 0.$$

Por outro lado,

$$\int_0^t a^{'}(s)sds \leq \int_0^t \frac{(N-p)}{p}a(s)ds = \frac{N-p}{p}A(t),$$

usando integração por partes,

$$ta(t) - A(t) = \int_0^t a^{'}(s)sds \leq \frac{N-p}{p}A(t),$$

logo

$$ta(t) \leq \frac{N-p}{p}A(t) + A(t),$$

o que implica

$$A(t) \geq \frac{1}{\gamma}a(t)t \ \text{ para todo } \ t > 0.$$

$\square$

Apêndice

$\mathcal{B}$

APÊNDICE

2.1 Grau topológico de Brouwer

Nosso objetivo neste apêndice é definir o grau topológico de Brouwer e enunciar as propriedades utilizadas em nosso trabalho.

2.1.1 Caso regular

Seja $\Phi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado e $N \geq 1$, e $b \notin \Phi(\partial\Omega) \cup \Phi(S_\Phi)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação de Φ em relação a Ω no ponto b, como sendo o número inteiro

$$d(\Phi, \Omega, b) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\xi_i \in \Phi^{-1}(\{b\})} sgn\,(J_\Phi(\xi_i)) \quad \text{se} \;\; b \in \Phi(\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \;\; \text{se} \;\; b \notin \Phi(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, \text{se} \;\; t > 0 \\ -1, \text{se} \;\; t < 0, \end{cases}$$

onde $S_\Phi = \{x \in \Omega; \;\; J_\Phi(x) = 0\}$, onde J_Φ representa a matriz Jacobiana de Φ.

Queremos dar uma definição de grau para funções menos regulares, sendo assim os próximos resultados são fundamentais.

Proposição B.1 *Sejam* $\Phi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \Phi(\partial\Omega) \cup \Phi(S_\Phi)$. *Então existe uma vizinhança* U *de* α *na topologia* $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *tal que se* $\psi \in U \cup C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, *temos que*
i) $b \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(S_\psi)$.
ii) $d(\alpha, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Ver [13] □

Proposição B.2 *Sejam* $\Phi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* $b_1, b_2 \notin \Phi(\partial\Omega) \cup \Phi(S_\Phi)$. *Se* b_1 *e* b_2 *estão na mesma componente conexa de* $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$, *então*

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Ver [13] □

2.1.2 Caso singular

Sejam $\Phi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. Neste caso, temos

$$\rho := dist(b, \Phi(\partial\Omega)) > 0.$$

Escolhendo $0 < \gamma < \rho$, segue do Teorema de Sard que existe $b_1 \in B_\gamma(b)$ tal que $b_1 \notin \Phi(S_\Phi)$. Logo, $b \notin \Phi(\partial\Omega) \cap \Phi(S_\Phi)$.
Definimos então

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b_1).$$

Proposição B.3 *Para* $\Phi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \Phi(\partial\Omega)$, *existe uma vizinhança* U *de* Φ *na topologia* $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *tal que se* $\psi \in U \cap C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, *temos que*
i) $b \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(S_\psi)$
ii) $d(\Phi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$.

Demonstração: Ver [13] □

Proposição B.4 *Sejam* $\Phi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b_1, b_2 \notin \Phi(\partial\Omega)$. *Se* b_1 *e* b_2 *estão na mesma componente conexa de* $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$, *então*

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Ver [13] □

Proposição B.5 *Dados* $\alpha \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* $\epsilon > 0$, *existe* $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *tal que*

$$\|\alpha - \psi\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \epsilon.$$

Demonstração: Ver [13] □

2.1.3 Caso geral

Sejam $\alpha \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \alpha(\partial\Omega)$. Assim

$$\rho := dist(b, \alpha(\partial\Omega)) > 0.$$

Pela proposição anterior, existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\alpha - \psi\|_{C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} < \frac{\rho}{2},$$

daí $B_{\frac{\rho}{2}} \subset \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$, logo podemos falar de $d(\psi, \Omega, b)$.

Definimos,

$$d(\alpha, \Omega, b) := d(\psi, \Omega, b).$$

2.1.4 Propriedades do Grau topológico de Brouwer

Teorema B.1 *Sejam* $\alpha \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* $b \notin \alpha(\partial\Omega)$.

(i) (Normalização)

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, se \;\; b \in \Omega \\ 0, se \;\; b \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

(ii) (Continuidade em relação a α)

Existe uma vizinhança U de α em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que se $f \in U$ então

a) $b \notin f(\partial\Omega)$

b) $d(f, \Omega, b) = d(\alpha, \Omega, b)$.

(iii) (Invariância por homotopia)

Se $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então

$$d(H(.,t), \Omega, b) = cte, \quad \forall t \in [0,1].$$

(iv) (Continuidade em relação ao ponto b)

Se b_1 e b estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus \alpha(\partial\Omega)$, então

$$d(\alpha, \Omega, b_1) = d(\alpha, \Omega, b).$$

(v)

$$d(\alpha, \Omega, b) = d(\alpha - b, \Omega, 0).$$

(vi) (Aditividade)

Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 e Ω_2 aberto e disjuntos e $b \notin \alpha(\partial\Omega_1) \cup \alpha(\partial\Omega_2)$, então $b \notin \alpha(\partial\Omega)$ e

$$d(\alpha, \Omega, b) = d(\alpha, \Omega_1, b) + d(\alpha, \Omega_2, b).$$

(vii) (Excisão)

Se $K \subset \overline{\Omega}$ é fechado e $b \notin \alpha(K) \cup \alpha(\partial\Omega)$, então

$$d(\alpha, \Omega, b) = d(\alpha, \Omega \setminus K, b).$$

(viii) (Produto cartesiano de funções)

Seja $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ abertos limitados, $b_1 \notin \alpha_1(\partial\Omega_1), b_2 \notin \alpha_2(\partial\Omega_2)$ então

$$d((\alpha_1, \alpha_2), \Omega_1 \times \Omega_2, (b_1, b_2)) = d(\alpha_1, \Omega_1, b_1).d(\alpha_2, \Omega_2, b_2)$$

(ix) (Existência)

Se $d(\alpha, \Omega, b) \neq 0$ *então* $b \in \alpha(\Omega)$.

(x) (Dependência da fronteira)

Se $\psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *com* $\psi(x) = \alpha(x)$ *para todo* $x \in \partial\Omega$ *então,*

$$d(\alpha, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Demonstração: Ver [13] $\square$

Bibliografia

[1] C. O Alves and D. S. Pereira, *Existence and nonexistence of least energy nodal solutions for a class of elliptic equation in* $\mathbb{R}^2$, T. M. Nonlinear Anal., 46(2015), 867-892.

[2] C.O. Alves; S. H. M. Soares; *Nodal solutions for singularly perturbed equations with critical exponential growth.* J. Diferential Equations 234 (2007), 464-484.

[3] C. O. Alves and G. M. Figueiredo, *On multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems with critical exponential growth in* $\mathbb{R}^N$*,* J. Diferential Equations 246 (2009), 1288-1311. 3, 4.

[4] C. O. Alves, L. R. Freitas and S. H. M. Soares, *Indefinite quasilinear elliptic equations in exterior domains with exponential critical growth,* Dif. Integral Equ. 24 (2011), no. 11-12, 1047-1062. 3, 4.

[5] M. J. Alves, R. B. Assunção and O. H. Miyagaki, *Existence result for a class of quasilinear elliptic equations with p&q-Laplacian and vanishing potentials,* Illinois J. Math. 59 (2015), no. 3, 545575. 3.

[6] S. Aouaoui, *Three nontrivial solutions for some elliptic equation involving the N-Laplacian,* Electron. J. Qual. Theory Difer. Equ. 2015, No. 2, 12 pp. 3, 4.

[7] A. L. Araujo and M. Montenegro, *Existence of solution for a general class of elliptic equations with exponential growth,* Annali di Matematica (2016) 195, 1737-1748. 3, 4.

[8] D. Averna, D. Montreanu and E. Tornatore, *Existence and asymptotic properties for quasilinear elliptic equations with gradient dependence,* Appl. Math. Letters, 61(2016), 102-107. 3.

[9] S. Barile and G. M. Figueiredo, *Existence of a least energy nodal solution for a class of p&q-quasilinear elliptic equations,* Adv. Nonlinear Stud., 14(2014), 511-530. 3.

[10] S. Barile and G. M. Figueiredo, *Some Classes of Eigenvalues Problems for Generalized p&q-Laplacian type Operators on Bounded Domains,* Nonlinear Anal., 119(2015), 457-468. 3.

[11] S. Barile and G. M. Figueiredo, *Existence of least energy positive, negative and nodal solutions for a class of p&q-problems with potentials vanishing at infinity,* J. Math. Appl. Anal., 427(2015), 1205-1233. 3.

[12] R. Bartolo, A. M. Candela and A. Salvatore, *On a class of superlinear p&q-Laplacian type equations on* $\mathbb{R}^N$*,* J. Math. Anal. Appl., 438(2016), 29-41. 3.

[13] Berestycki. H,*Methodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires. There présentée pour l'obtention du diplome de docteur de 3eme cycle, Université de Paris* VI.

[14] *H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris,* 1983.

[15] A. Castro, J. Cossio and J. Neuberger, *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem,* Rocky Mountain J. Math. 27 (1997), no. 4, 1041-1053.

[16] M. F. Chaves, G. Ercole and O. H. Miyagaki, *Existence of a nontrivial solution for the p&q-Laplacian with p-critical exponent.,* Bound, Value Probl., (2014), 236, 15 pp. 3.

[17] M. F. Chaves, G. Ercole and O. H. Miyagaki, *Existence of a nontrivial solution for the (p,q)-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$ *without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.* , Nonlinear Anal. 114 (2015), 133-141. 3.

[18] L. Chen, C. Chen and Z. Xiu, *Positive solution for a quasilinear equation with critical growth in* $\mathbb{R}^N$*,* Ann. Polon. Math. 116 (2016), no. 3, 251262. 3, 4.

[19] S. Chen and X.Tang, *Ground state sign-changing solutions for a class of Schrödinger-Poisson type problems in* $\mathbb{R}^3$, Z. Angew. Math. Phys. 67(2016) 4, 18pp.

[20] Z. Chen, C. Lin and W. Zhou, *Infinitely many sign-changing and semi-nodal solutions for a nonlinear Schrödinger system*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 15 (2016), 859–897.

[21] L. Cherfils L. and Y. Il'yasov, *On the stacionary solutions of generalized reaction difusion equations with p&q-Laplacian,* CPAA vol 1, n. 4(2004). 3.

[22] M. Clapp, *Entire nodal solutions to the pure critical exponent problem arising from concentration*, J. Differential Equations, 261 (2016), 3042-3060.

[23] M. Clapp and P. Srikanth, *Entire nodal solutions of a semilinear elliptic equation and their effect on concentration phenomena*, J. Math. Anal. Appl., 437 (2016), 485-497.

[24] T. D'Aprile, *Sign-changing blow-up solutions for Hénon type elliptic equations with exponential nonlinearity*, J. Funct. Anal., 268 (2015), 2067-2101.

[25] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with nonlinearities in the critical growth range,* Calc. Var. 3 (1995) 139-153. 3, 4.

[26] Y. Deng, Y. Li and X. Yan, *Nodal solutions for a quasilinear Schrödinger equation with critical nonlinearity and non-square diffusion*, Commun. Pure Appl. Anal., 14 (2015), 2487-2508.

[27] Y. Deng, S. Peng and W. Shuai, *Existence and asymptotic behavior of nodal solutions for the Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^3$*, J. Funct. Anal., 269 (2015), 3500-3027.

[28] M. de Souza, *Existence of solutions to equations of N-Laplacian type with Trudinger-Moser nonlinearities,* Appl. Anal. 93 (2014), no. 10, 2111-2125. 3, 4.

[29] L. F. O. Faria, O. H. Miyagaki and D. Motreanu, *Comparison and positive solutions for problems with p&q-Laplacian and convection term,* Proc. Edinb. Math. Soc, (2) 57 (2014) 687-698. 3.

[30] L. F. O. Faria, O. H. Miyagaki and M. Tanaka, *Existence of a positive solution for problems with p&q-Laplacian and convection term in $\mathbb{R}^N$,* Bound. Value Prob. (2016) 2016:158. 3.

[31] M. Fei and H. Yin, *Nodal solutions of 2-D critical nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 35 (2015), 2921-2948.

[32] G. M. Figueiredo and H. Ramos Quoirin, *Ground state of elliptic problems involving nonhomogeneous operators,* Indiana Univ. Math. J. 65(3), 2016, pg 779-795. 9.

[33] G. M. Figueiredo and J. R. Santos Junior, *Existence of a least energy nodal solution for a Schrödinger-Kirchhoff equation with potential vanishing at infinity*, J. Math. Phys., 215 (2015), 18 pp.

[34] G. M. Figueiredo and R. G. Nascimento, *Existence of a nodal solution with minimal energy for a Kirchhoff equation*, Math. Nachr., 288 (2015), 48-60.

[35] R. Frank and E. Lenzmann, *Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in* $\mathbb{R}$, Acta Math., 210 (2013), 261-318.

[36] R.L. Frank, E.H. Lieb and R. Seiringer, *Hardy-Lieb-Thirring inequalities for fractional Schrdinger operators*, J. Amer. Math. Soc. 21(2008) 925-950.

[37] L. R. Freitas, *Mutiplicity of solutions for a class of quasilinear equations with exponential critical growth,* Nonlinear Anal. 95 (2014), 607-624. 3, 4.

[38] L. Gasinski and N.S. Papageorgiou, *Asymetric* $(p,2)-$*equations with double resonance,* Calc. Var (2017),

[39] M. Ghimenti and J. Van Schaftingen, *Nodal solutions for the Choquard equation*, J. Funct. Anal. 271 (2016), 107-135.

[40] S. Goyal and Sreenadh, *The Nehari manifold approach for N-Laplace equation with singular and exponential nonlinearities in* $\mathbb{R}^N$*,* Commun. Contemp. Math. 17, 1450011 (2015), 22 pg. 3, 4.

[41] C. He and G. Li, *The existence of a nontrivial solution to the p&q-Laplacian problem with nonlinearity asymptotic to* u^{p-1} *at infinity in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis (2007),doi:10.1016/j.na.2006.12.2008.

[42] C. He and G. Li, *The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations p&q-Laplacians*, Annales Acad. Sci. Fennicae, Mathematica Volumen 33 (2008), 337-371.

[43] A. Iacopetti, *Asymptotic analysis for radial sign-changing solutions of the Brezis-Nirenberg problem*, Ann. Mat. Pura Appl., 195 (2015), 1649-1682.

[44] G. Li, X. Liang, *The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of p&q-Laplacians type on* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. 71 (2009) 2316-2334.

[45] R. Li and Z. Liang, *Sign-changing solution and ground-state solution for a class of* $(p-q)$*-Lapalcian with nonlocal terms on* $\mathbb{R}^N$, BVP (2016) 2016:118.

[46] E.H. Lieb and M. Loss, *Analysis, Graduate studies in Mathematics*, Vol. 14, Amer. Math. Soc., 1997. 2.

[47] J. Liu, X. Liu and Zhi-Qiang Wang, *Multiple mixed states of nodal solutions for nonlinear Schrödinger systems*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 52 (2015), 565-586.

[48] S. Lu, *Signed and sign-changing solutions for a Kirchhoff-type equation in bounded domains*, J. Math. Anal. Appl., 432 (2015), 965-982.

[49] L. Maia, , O. H. Miyagaki and S. H. M. Soares, *A sign-changing solution for an asymptotically linear Schrödinger equation*, Proc. Edinb. Math. Soc., 58 (2015), 697-716.

[50] C. Miranda, *Un' osservazione su un teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital.* 3 (1940), no. 2, 5-7.

[51] J. Moser, *A Sharp form of an inequality by N. Trundiger, Indiana Univ. math. J.*20 (1985) 185-201. 3.

[52] D. Mugnai and N. Papageorgiou, *Wang's multiplicity result superlinear p&q-equations without Ambrosetti-Rabinowitz condition,* Trans. Amer. Math. Soc, 366 (2014), 4919-4937. 3.

[53] M. Musso and J. Wei, *Sign-changing blowing-up solutions for supercritical Bahri-Coron's problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 55 (2016), 39 pp.

[54] L. Nguyen and L. Guozhen, *N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with subcritical and critical growth without the Ambrosetti-Rabinowitz condition,* Adv. Nonlinear Stud. 13 (2013), no. 2, 289-308. 3, 4.

[55] N. Papageorgiou and V. Radulescu, *Nonlinear elliptic problems with superlinear reaction and parametric concave boundary condition*, Israel J. Math. 212 (2016), 791-824.

[56] N. Papageorgiou and V. Radulescu, *Robin problems with indefinite, unbounded potential and reaction of arbitrary growth*, Rev. Mat. Complut. 29 (2016), 91-126.

[57] R. Pei and , J. Zhang, *Nontrivial solutions for a class of quasilinear elliptic equations,* J. Math. Research with Appl., 36 (2016), pp. 8796. 3, 4.

[58] D. S. Pereira, *Existence of infinitely many sign-changing solutions for elliptic problems with critical exponential growth,* Eletron. J. dif. Equ., 119 (2015), 1-16. 3, 4.

[59] W. Shuai, *Sign-changing solutions for a class of Kirchhoff-type problem in bounded domains*, J. Differential Equations, 259 (2015), 1256-1274.

[60] X. Tang and B. Cheng, *Ground state sign-changing solutions for Kirchhoff type problems in bounded domains.*, J. Differential Equations, 261 (2016), 2384-2402.

[61] S. Tiwari, *N-Laplacian critical problem with discontinuous nonlinearities,* Adv. Nonlinear Anal. 2015; 4 (2):109-121. 3, 4.

[62] O. Toivanen, *Harnack's Inequality for general solutions with nonstandard growth*, Ann. Acad. Sci. Fen. Math., vol 37, 2012, 571-577.

[63] H. Ye, *The existence of least energy nodal solutions for some class of Kirchhoff equations and Choquard equations in $\mathbb{R}^N$*, J. Math. Anal. Appl., 431 (2015), 935-954.

[64] C. Wang and J. Yang, *A note on the sign-changing solutions for a double critical Hardy-Sobolev-Maz'ya problem,* Adv. Nonlinear Stud. 16 (2016), 519-528.

[65] Willem, M., *Minimax methods,* Handbook of non convex and applications, Int. Press., Somerville, (2010) 597-632. 6.

[66] M. Wu and Z. Yang, *A class of p&q-Laplacian type equation with potentials eigenvalue problem in* $\mathbb{R}^N$, BVP (2009), ID 185319 2.