UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Sobre Fluidos Micropolares Não-Newtonianos: Desigualdade Variacional e Forma Estacionária

Michel Melo Arnaud

Belém-PA

Março/2017

Michel Melo Arnaud

Sobre Fluidos Micropolares Não-Newtonianos: Desigualdade Variacional e Forma Estacionária

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo.

Belém-PA

Março/2017

Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)
Biblioteca de Pós-Graduação do ICEN/UFPA

Arnauld, Michel Melo
Sobre fluidos micropolares não-newtonianos: desigualdade variacional e forma estacionária/Michel Melo Arnauld; orientador, Geraldo Mendes de Araújo.-2017.

125 f.: il; 29cm
Inclui bibliografias .

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática em associação UFPA-UFAM, Belém, 2017.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Desigualdades variacionais(matemática). 3. Fluidos não-newtonianos. 4.Galerkin, métodos de. 5. Fluido micropolar. I. Araújo, Geraldo Mendes de, orient. II. Título.

CDD – 22 ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Michel Melo Arnaud

Sobre Fluidos Micropolares Não-Newtonianos: Desigualdade Variacional e Forma Estacionária

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 10 de março de 2017.
Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo (Orientador)
PDM/ICEN/UFPA

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa (Membro Externo)
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda (Membro Externo)
Universidade Estadual de Campina Grande - UECG

João Rodrigues dos S. Junior

Prof. Dr. João Rodriguês dos Santos Junior
PDM/ICEN/UFPA

Este trabalho é dedicado ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo.
"Porque dele e por ele, e para ele, são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém". Rm 11:36 .

AGRADECIMENTOS

Fazer um agradecimento de uma tese nunca será uma tarefa simples, tantas pessoas passam por nossas vidas, contribuindo de forma valorosa, que acabamos precisando de bastante tempo para fazer tal agradecimento e não esquecer ninguém.

Primeiramente quero a agradecer a Deus pela conquista, Ele sempre esteve comigo me dando forças e me guiando pelo caminho do bem, muitas foram as guerras e dificuldades, mas Ele me ensinou a guerrear e superar as dificuldades. Quando Ele está no "barco"sempre as tempestades são acalmadas, quando o mar estiver em nossa frente se, Ele não abrir o mar Ele nos faz andar sobre as águas, Obrigado meu Deus.

Nas próximas linhas desse agradecimento, continuo sendo grato a Deus pelas pessoas que Ele colocou em meu caminho. Quero agradecer a minha mãe Maria da Conceição, muito obrigado por ter sonhado junto comigo pelas noites mal dormidas em que você se preocupava quando eu teria uma prova ou seminário, você realmente viveu junto comigo cada passo dessa trajetória, muito obrigado minha linda, minha rainha, minha intercessora, minha mãe.

Muito obrigado meu pai, José Nélio, você teve um papel fundamental para essa conquista, sempre acreditou em mim, sempre soube que minha insistência nos estudos iria dar certo, lembro de uma frase que você proferiu quando eu ainda tinha 12 ano de idade "meu filho, eu não posso te dar a melhor educação e os melhores estudos do mundo, mas posso te dar o melhor que eu tenho", guardei esse ensinamento por toda a caminhada, você sempre foi meu referencial com seus ensinamentos e reflexões, obrigado meu pai.

Muito obrigado meu amor, minha princesa, minha linda, minha esposa, Irlis Arnaud. Deus me proporcionou conhecer você ao longo dessa caminhada, pois ele sempre soube que eu precisaria de alguém como você para transpor algumas barreiras que só com uma esposa que possui as suas qualidades eu conseguiria, obrigado meu amor.

Quero agradecer ao meu irmão, Dheymeson, que por diversas vezes me ouviu e tentou compreender um pouco dessa jornada de conquista, por muitas vezes me ajudou para que eu chegasse aqui. Aproveitando também para ser grato a minha cunhada, Josiane Arnaud, que também me deu todo apoio e não poderia faltar o agradecimento para pequenina Emilly, minha sobrinha que sempre trouxe alegrias para minha vida e aos meus dois sobrinhos João e Inara que mesmo distante sempre estiveram em meus coração.

Sendo grato as minhas irmãs, Merielly e Merikelly. Vocês sempre foram um incentivo para mim, muito obrigado por terem acreditado que daria tudo certo. Agradeço também a minha madrasta Miriam dos Passos, que sempre me deu total apoio para que eu continuasse a jornada.

Agradeço a minha sogra Joana e meu sogro Antônio que além de darem uma filha linda, passaram a ser peça fundamental para essa conquista.

Também quero deixar meu muito obrigado as minha tias, Márcia, Socorro, Ana e as demais que sempre sonharam comigo por todos esses anos, aos meus primos e toda a família Melo, muito obrigado.

Agradecer alguém que me deu incentivo, oportunidade e persistência, alguém que fez questão me passar muito conhecimento e acreditou em mim por 9 anos, muito obrigado professor, Geraldo Mendes de Araújo, você realmente foi um orientador por todo esse percurso.

Sou grato a todos os professores, Giovany, Augusto César, Antônio Vilhena, José Miguel, Cristina Vaz, Francisco Júlio, Nazaré Bezerra, Cládio Brandenberg e aos demais que colaboram para construção de meu conhecimento.

Agradecer aos professores Francisco Júlio, Manuel Milla Miranda, João Rodrigues por terem aceitado participar da banca examinadora de minha tese.

Agradecer aos parceiros de doutorado Mirelson e Elizardo que juntos aprendemos muito nos seminários e disciplinas que fizemos ao longo desse curso, agradeço também pelo momentos de descontração que contribuíram para a construção de nossa amizade.

Agradeço ao PDM (Programa de Doutorado em Matemática) a Carmem e a toda a equipe de secretaria que por todo esse tempo colaborou com essa conquista, grato sou a CAPES, órgão que fomentou esse projeto, e também a faculdade de Matemática.

Agradeço a turma de licenciatura em matemática de 2006, sempre torceram por meu sucesso, aos amigos da turma de mestrado de 2010 que juntos iniciamos na pesquisa e a todos os amigos do doutorado.

Agradeço a três amigos que fizeram diferença em minha vida, Ahylton, Sidney e Antônio Neto, vocês são amigos que muitas vezes são mais chegados que irmãos.

Agradeço ao meu pastor Edson Marialva, por toda participação nesse processo fazendo questão de se informar como estava indo minha caminhada. Agradeço a toda a Rede Power, vocês moram em meu coração.

Muito obrigado a todos que não entraram nessa lista, mas tiveram papel importantíssimo, quero dizer a todos que não foi uma conquista individual foi coletiva, essa conquista é nossa, muito obrigado a todos, Conseguimos!

Resumo

Neste Trabalho investigamos a desigualdade variacional e a forma estacionária de alguns tipos de fluidos micropolares não-Newtonianos. Os problemas são considerados em um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, com condições de Dirichlet na fronteira. O tensor de estresse é dado por $\tau(e(u)) = M(|e(u)|_E^2)e(u)$. Usamos o método de Faedo-Galerkin e alguns argumentos de compacidade, operadores monótonos e o Lema do ângulo agudo para provar existência e unicidade de soluções fracas.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Fluido Micropolar, Fluido Não-Newtoniano, Método de Galerkin, Desigualdade Variacional .

Abstract

In this work we investigat a variable inequality and a stationary form of some types of Non-Newtonian micropolar fluids. These problems are considered in a smooth and bounded domain of R^d, $d \in \mathbb{N}$, under Dirichlet conditions at the boundery. The stress tensor is given by $\tau(e(u)) = M(|e(u)|_E^2)e(u)$. We use the Faedo-Galerkin and some compactness arguments, monotones operators and the sharp angle Lemma to prove existence and uniqueness of weak solutions.

Key words: Partial Differential Equations, Fluid Micropolar, Non-Newtonian Fluid, Galerkin Method, Variational Inequality.

"A semeadura é opcional, mas a colheita é inevitável."

"Bispa Rachel Castro".

"Se o que vivemos hoje não está nos agradando, temos que mudar a semente para que possamos ter um mundo melhor."

"Pr. Michel Melo Arnaud".

Sumário

Introdução

Faremos nesta seção uma apresentação dos sistemas que serão estudados: sistemas micropolar dilatante, micropolar fortemente dilatante e sistema estacionário, fazendo um pequeno histórico desses a fim facilitar o entendimento do leitor.

Sejam Ω um domínio do $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$ e um número real $T > 0$. Denotamos por Q_T o cilindro espaço-temporal $I \times \Omega$, cuja fronteira lateral é dada por $\Sigma = I \times \partial\Omega$, em que $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo de tempo. O comportamento de um fluido incompressível confinado em Ω pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações

$$\left|\begin{array}{rcl} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot\tau(e(u)) + \rho(u\cdot\nabla)\,u & = & -\nabla p + \rho f \quad \text{em } Q_T, \\ \nabla\cdot\, u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

no qual $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade linear do fluido, p representa a pressão, ρ é uma constante positiva que determina a densidade do fluido, $f = (f_1, f_2, f_3)$ representa a resultante das forças externas e $\tau : \mathbb{R}^{3^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ denota o tensor extra de estresse. A aplicação $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ leva cada vetor $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ na parte simétrica do gradiente da velocidade, ou seja

$$e(u) = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right]. \tag{2}$$

$\mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ representa o conjunto de todas matrizes simétricas de ordem 3×3, ou seja,

$$\mathbb{R}^{3^2}_{sym} = \{D \in \mathbb{R}^{3^2}; D_{ij} = D_{ji},\ i,j = 1,2,3\}.$$

0.1 Classificação dos fluidos

A partir do tensor τ podemos classificar os fluidos que serão estudados nessa tese. De acordo com a *Lei de Stokes*, o tensor τ depende da matriz $e = e(u)$ de modo linear, ou seja,

$$\tau(e) = 2\nu e, \quad \nu > 0, \tag{3}$$

substituindo o tensor (3) no sistema (1), ele se transforma no sistema de Navier-Stokes. Um fluido incompressível, cujo comportamento é caracterizado pela lei de Stokes (3), é chamado *fluido Newtoniano*. Por outro lado, fluidos que não podem ser descritos por (3) são chamados *fluidos não-Newtonianos*. A área da ciência que estuda o comportamento dos fluido não-Newtonianos é uma parte da Mecânica dos Fluidos chamada Reologia.

Vejamos alguns exemplos de fluidos não-newtonianos classificados segundo a Reologia.

(a) *Fluido Pseudo-Plástico.* Nesse caso a viscosidade aparente diminui conforme o aumento da tensão. Por exemplo, temos tintas a base de latex e o Catchup.

(b) *Plástico de Bingham.* Estes fluidos requerem a aplicação de uma tensão τ além de um limiar inicial τ_0, específico do fluido em questão, para que ocorra escoamento. Quando submetidos a tensões menores que τ_0, eles se comportam como sólidos. Um exemplo desse tipo de fluido é o creme dental.

(c) *Dilatante.* Nesse caso a viscosidade aparente aumenta com o aumento da tensão τ. É o caso, por exemplo, de suspensões concentradas de amido. Para o escoamento, usam-se bombas de deslocamento lento.

Para mais informações sobre Reologia veja, por exemplo, *G. K. Batchelor* [7], [1967].

De acordo com *K. R. Rajagopal* [33], [1993], o comportamento de um fluido não-Newtoniano pode ter uma ou mais característica entre as seguintes:

(a) a capacidade do fluido de aumentar a viscosidade ou diminui-la durante o cisalhamento;

(b) a presença de diferença de tensões normais não-nulas durante o cisalhamento;

(c) a capacidade do fluido de possuir um limite de elasticidade aparente;

(d) a capacidade do fluido de apresentar relaxamento de tensão;

(e) a capacidade do fluido de deslizar lentamente ao escorrer ("to creep").

Estudaremos nesse trabalho um fluido que possui a primeira característica, ou seja, um fluido com viscosidade variável.

0.2 Lei Potência

Um modelo bastante estudado para o tensor de estresse é a chamada *Lei Potência* (*Power-Law fluids*). Em uma de suas variantes, a Lei é dada por

$$\tau(e(u)) = 2\nu_0(1 + |e(u)|_E^{p-2})e(u), \tag{4}$$

em que o símbolo $|e(u)|_E$ representa a norma euclidiana usual de matrizes definida por $|e(u)|_E^2 = \sum_{i,j} e_{ij}^2(u)$, com $i, j = 1, ..., d$. Notemos que quando $p = 2$ em (4), temos um fluido newtoniano dado pela lei de Stokes (3). Nesse trabalho vamos considerar um fluido sujeito a Lei Potência. Trabalharemos com uma generalização de (4), dada por

$$\tau(e(u)) = 2(\nu + \nu_r + M\left(|e(u)|_E^2\right))e(u), \tag{5}$$

ou seja, vamos considerar $p = 4$ e $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $M \in C^1(0, +\infty)$ a *função de viscosidade generalizada.* O tensor dado em (5), com $p \neq 2$ é o modelo para os chamados *fluidos Newtonianos generalizados* (apesar de serem fluidos não-Newtonianos). Nessas condições, temos um fluido do tipo dilatante, cuja viscosidade aparente cresce com o aumento da tensão de cisalhamento. Para mais informações, veja *J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta e M. Růžička* [15], [1996].

Fluidos não-Newtonianos são frequentemente usados nas mais diversas áreas de pesquisas científicas e da indústria como por exemplo em Química, Glaciologia, Biologia e Geologia. Algumas aplicações são discutidas em *J. Málek, K. R. Rajagopal, e M. Růžička* [17], [1995].

A primeira investigação matemática do problema (1) foi feita por *O. A. Ladyzhenskaya* [28], [1963], onde ela propôs, entre outras coisas, estudar o sistema (1) com o tensor dado em (4) e $p = 4$. Combinando a teoria dos operadores monótonos e argumentos de compacidade, ela provou existência de soluções fracas para o modelo (1) no caso em que $p \geq 1 + \dfrac{2d}{d+2}$, assim como unicidade quando $p \geq \dfrac{d+2}{2}$. Outros resultados conhecidos a respeito do problema (1) foram obtidos em uma série de artigos, entre os quais citamos *J. Málek, K. R. Rajagopal, e M. Růžička* [17], [1995], *J. Málek, J. Nečas e M. Růžička* [16], [2001] e *Frehse J. e J. Málek* [4], [2003].

0.3 Fluido Micropolar

Apresentaremos aqui o sistema que descreve o movimento de um fluido micropolar e em seguida faremos um comparativo entre o micropolar e a Navier-Stokes. O sistema de equações a seguir descreve o movimento de tal fluido micropolar.

$$\left|\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p & = & 2\nu_r \nabla \times w + f \quad \text{em } Q_T, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - \alpha\Delta w + (u \cdot \nabla)w - \beta\nabla(\nabla \cdot w) + 4\nu_r w & = & 2\nu_r \nabla \times u + g \quad \text{em } Q_T, \\ \nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right. \tag{6}$$

no qual $u(x,t), w(x,t) \in \mathbb{R}^3$ e $p(x,t) \in \mathbb{R}$ denotam, respectivamente, as velocidades linear, microrrotacional e a pressão hidrostática do fluido. Os símbolos α e β são constantes positivas. As constantes positivas ν e ν_r são, respectivamente, a *viscosidade newtoniana* e a *viscosidade microrrotacional.*

A principal diferença entre o modelo (6) e o de Navier-Stokes é que a rotação das partículas é considerada. A abordagem acima foi introduzida por *A. C. Eringen* [1], [1966]. O sistema acoplado (6) pode ser usado para modelar o comportamento de cristal líquido, fluido polimérico e sangue sob certas circunstâncias (veja por exemplo *C. Calmelet-Eluhu e D. R. Majundar* [2], [1998]). Esse sistema foi analizado em detalhes no livro de *G. Lukaszewicz* [8], [1999].

Existem diversos artigos que tratam da análise matemática de fluidos micropolares. Trata-se de um campo de pesquisa relativamente recente e em evidência na Matemática. Podemos citar por exemplo *J. L. Boldrini, M. Durán e M. A. Rojas-Medar* [12], [2010]; *P. Szopa* [29], [2007]; *N. Yamaguchi* [27], [2005]; *N. Kishan e S. Jagadha* [26], [2013]; bem como *R. Ellahi, S. U. Rahman, M. Mudassar Gulzar, S. Nadeem e K. Vafai* [30], [2014].

0.4 Apresentação dos problemas

Neste texto propomos o estudo de inequações e da forma estacionária associadas a alguns fluidos micropolares não-Newtonianos. O problema estudado no segundo capítulo consiste em uma inequação associada ao problema (6) onde o fluido é do tipo (4), com $p = 4$, ou seja, um fluido micropolar com viscosidade variável. A equação deste problema foi estudado por *G.M. de Araújo e E.F.L. Lucena* [5]. Mais precisamente, investigamos o seguinte problema:

Sejam Ω, $\partial\Omega$, $T > 0$, Q_T, Σ e $I = (0, T)$ conforme introduzidas anteriormente. Procuramos por funções $u, w : Q_T \to \mathbb{R}^3$ e $p : Q_T \to \mathbb{R}$ que sejam soluções do seguinte sistema de inequações

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
u' - \nabla \cdot [2(\nu + \nu_r + M\left(|e(u)|_E^2\right))e(u)] & + & (u \cdot \nabla)u + \nabla p \\
& \geq & 2\nu_r \nabla \times w + f \text{ em } Q_T, \\
w' - \nu_1 \nabla \cdot e(w) \;\; + \;\; (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w & \geq & 2\nu_r \nabla \times u + g \quad \text{em } Q_T, \\
\nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\
u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\
w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega,
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

em que $e(u)$ é dado como em (2), ν e ν_r, viscosidades newtoniana e microrotacional ambas constantes positivas, ν_1 constantes positiva, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $\nabla \times u$ é dado por

$$
\nabla \times u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),
$$

de modo análogo definimos $\nabla \times w$,

$$
\nabla \times w = \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right).
$$

A aplicação real $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, deve satisfazer certas hipóteses que serão explicitadas no capítulo das preliminares. Notamos que quando M é uma função constante, o problema (7) se reduz à inequação associada ao problema (6). No estudo do sistema (7) obtivemos existência de soluções fracas no caso $d \leq 3$, unicidade de soluções quando $d = 2$

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo do seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{lcl} u' - \nabla \cdot [2(\nu + \nu_r + M\left(|e(u)|_E^2\right))e(u)] + (u.\nabla)u & + & \nabla p \\ & \geq & 2\nu_r \nabla \times w + f \text{ em } Q_T, \\ w' - \nu_1 \nabla \cdot [M(|e(w)|_E^2)e(w)] + (u.\nabla)w + 4\nu_r w & \geq & 2\nu_r \nabla \times u + g \text{ em } Q_T, \\ \nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right. \tag{8}$$

no qual consideramos uma não-linearidade do tipo $\nabla \cdot [M(|e(w)|_E^2)e(w)]$ na segunda equação, análoga ao tensor de estresse da primeira equação (por esse motivo decidimos chamar esse fluido de *micropolar fortemente dilatante*). Isso nos permite, em certo sentido, melhorar os resultados obtidos para o primeiro sistema. É importante ressaltar que, quando M é uma função constante, retomamos a inequação associada ao sistema micropolar (6). No estudo do sistema (8) obtivemos existência e unicidade de soluções para $d \leq 3$.

No último capítulo estudamos o sistema de equações associado a (7), em sua forma estacionária. Mais precisamente estudamos o seguinte problema:

Seja Ω um conjunto limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$. Procuramos por funções $u, w : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e $p : \Omega \to \mathbb{R}$ soluções do seguinte problema de valor inicial e de contorno

$$
\left|
\begin{array}{l}
-\nabla \cdot [2(\nu + \nu_r + M\,(|e(u)|_E^2))e(u)] + (u.\nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \nabla \times w + f, \quad \text{em } \Omega, \\[2ex]
-\nu_1 \nabla \cdot e(w) + (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w = 2\nu_r \nabla \times u + g, \quad \text{em } \Omega, \\[2ex]
\nabla \cdot u = 0, \quad \text{em } \Omega, \\[2ex]
u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \\[2ex]
w = 0, \quad \text{em } \partial\Omega,
\end{array}
\right. \tag{9}
$$

Lista de Símbolos

$I :=$ $[0, T]$ intervalo da reta para algum número real $T > 0$;

$\Omega :=$ aberto do espaço eulidiano $\mathbb{R}^d$, com ponto arbitrário $x = (x_1, ..., x_d)$;

$|\Omega| :=$ medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^d$;

$\mathcal{D}(\Omega) :=$ espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto sobre Ω munido da topologia indutiva de *L. Schwartz* [22], [1957];

$\mathcal{D}'(\Omega) :=$ dual de $\mathcal{D}(\Omega) =$ espaço das distribuições sobre Ω;

$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mensurável em } \Omega; \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}, \ 1 \leq p < \infty;$

$C^k(\Omega) :=$ funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω, $k \geq 0$;

$W^{m,p}(\Omega),\ W_0^{m,p}(\Omega),\ H^m(\Omega),\ H^{-1}(\Omega) :=$ espaços de Sobolev;

$L^p(I; X) := \left\{ u;\ u : I \to X \text{ é mensurável e } \left(\int_I \|u(t)\|_X^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$, se $1 \leq p < \infty$;

$L^p(I; X) := \left\{ u;\ u : I \to X \text{ é mensurável e } \sup_{t \in (0,T)} ess \|u(t)\|_X < \infty \right\}$, se $p = \infty$;

$\nabla u :=$ gradiente da função u;

$\nabla \cdot u :=$ divergente da função u;

$\nabla \times u :=$ rotacional da função u;

$\Delta u :=$ laplaciano da função u;

$|A|_E :=$ norma euclidiana da matriz real A;

$\int_\Omega u :=$ integral de Lebesgue de uma função u sobre o conjunto Ω;

$\square :=$ fim da demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário;

$\|u\|_X :=$ norma de u em X;

$A \hookrightarrow B :=$ imersão contínua de A em B;

$A \overset{c}{\hookrightarrow} B :=$ imersão compacta de A em B;

$u_n \to u :=$ convergência forte de u_n para u;

$u_n \rightharpoonup u :=$ convergência fraca de u_n para u;

$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u :=$ convergência fraco estrela de u_n para u;

C e $C_\nu :=$ constantes positivas cujo valor exato não é relevante.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo fixaremos os espaços funcionais, algumas notações que serão usadas no texto, definiremos algumas aplicações que serão de suma importância para as soluções das inequações e do sistema estacionário. Também aproveitamos esse espaço para citar alguns dos principais lemas que serão usados nas demonstrações.

1.1 Notações e Resultados

Em todo o texto vamos considerar o seguinte, um domínio Ω contido em $\mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$, com fronteira suave $\partial\Omega$. Dado o número real $T > 0$, denotamos por Q_T o cilindro espaço-temporal $I \times \Omega$, cuja fronteira lateral é dada por $\Sigma = I \times \partial\Omega$, em que $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo de tempo. Nesse contexto, os vetores $u = (u_1, ..., u_d)$ e $w = (w_1, ..., w_d)$ representam, respectivamente, a velocidade linear e a velocidade microrrotacional de um fluido confinado em Ω. A pressão desse fluido será representada por p, ρ é uma constante positiva que determina sua densidade e $f = (f_1, ..., f_d)$ será a resultante das forças externas aplicadas a esse fluido. Denotando

$$\mathbb{R}^{d^2}_{sym} = \{D \in \mathbb{R}^{d^2}; D_{ij} = D_{ji},\ i, j = 1, ..., d\},$$

definimos a aplicação $e : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ que leva cada vetor $u \in \mathbb{R}^d$ na parte simétrica do gradiente da velocidade $e(u)$ definido pela expressão dada em (2). Também consideramos uma aplicação real $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $M \in C^1(0, +\infty)$ satisfazendo as seguintes hipóteses

$$C_1\left(1+t^{1/2}\right)^2 \;\leq\; M(t) \leq C_2\left(1+t^{1/2}\right)^2, \tag{1.1}$$

$$0 \;<\; M'(t) \leq \frac{C_3\left(1+t^{1/2}\right)}{t^{1/2}}. \tag{1.2}$$

em que C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas.

Além disso, usamos as notações usuais para os espaços de sobolev como $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$ e $C^p(\Omega)$, para funções que são definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, bem como $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ e $\mathbf{C}^p(\Omega)$ para funções, definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}^d$. Também consideramos os espaços $L^p(I;X)$ e $L^p(Q_T) = L^p\left(I;L^p(\Omega)\right)$. Para mais informações sobre esses espaços, veja, por exemplo, *J. L. Lions* [13], [1969].

Sejam os espaços X e X', em que X' é o dual topológico de X. Representaremos por $\langle .,. \rangle$ a dualidade entre X e X'. Também definimos os seguintes espaços

$$\mathcal{V} = \left\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \nabla\cdot\varphi = 0\right\},$$

$V_p = V_p(\Omega)$ como o fecho de $\mathcal{V}$ no espaço $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$, com a norma do gradiente em V_p dada por

$$||\nabla u||_p \equiv \left[\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Em particular $V = V_2$. O produto interno e a norma em V são dados respectivamente por

$$((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,dx, \quad ||u||^2 = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx.$$

o espaço $H = H(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, com produto interno e norma definidos, respectivamente, por

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx, \quad |u|^2 = \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega |u_i(x)|^2\,dx.$$

Definição 1.1. *Um operador $T : V \to V'$ é dito hemicontínuo, se a função real*

$$\lambda \mapsto \langle\ T(x+\lambda y), z\ \rangle$$

é contínua $\forall x, y, z \in V$.

Observação 1.1. *Notamos que $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ e $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert. Além disso, as imersões $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \boldsymbol{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ são contínuas, sendo a primeira delas compacta.*

A seguir, elencamos alguns dos principais lemas que serão usados no texto.

Lema 1.1. *(Desigualdade de Korn) Seja $1 < p < \infty$. Então, existe uma constante $K_p = K_p(\Omega)$, tal que a desigualdade*

$$K_p||v||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ||e(v)||_{L^p(\Omega)} \tag{1.3}$$

é válida qualquer que seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto limitado de classe C^1.

Demonstração. Veja o apêndice C.1. Outras demonstrações podem ser encontradas em J. Nečas [18], [1966] e *R. Temam* [31], [1985].

Lema 1.2. *Sejam $p \geq 2$, um tensor $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e uma função potencial para τ, dada por $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ tais que as seguintes assertivas são satisfeitas quaisquer que sejam as matrizes $B, D \in \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e quaisquer que sejam $i, j, k, l = 1, ..., d$*

$$\frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} = \tau_{ij}(D), \tag{1.4}$$

$$\Phi(0) = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} B_{ij} B_{kl} \geq C_3(1 + |D|_E)^{p-2} |B|_E^2, \tag{1.6}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} \right| \leq C_4(1 + |D|_E)^{p-2}. \tag{1.7}$$

Nessas condições existem constantes positivas C_ν, $\nu = 5, 6, 7$ tais que

$$C_5(1+|D|_E^{p-2})|D|_E^2 \leq \Phi(D) \leq C_6(1+|D|_E)^p, \tag{1.8}$$

$$(\tau(B)-\tau(D)).(B-D) \geq C_7|B-D|_E^2. \tag{1.9}$$

Demonstração. Veja o apêndice C.2.

Lema 1.3. *(Teorema da Convergência de Vitali) Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^d$ e $f_m : \Omega \to \mathbb{R}$ integrável qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Supondo que*

1. $\lim_{m\to\infty} f_m(x)$ *existe e é finito quase sempre em Ω;*
2. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_H |f_m(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \forall H \subset \Omega,\ |H| < \delta,\ H \text{ mensurável}$$

então

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega f_m(x)dx = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} f_m(x)dx.$$

Demonstração. Para uma demonstração desse resultado veja *G. Vitali* [9], [1907]; *J. R. Choksi* [20], [2001]; *N. Dunford e J. Schwartz* [25], [1958] ou ainda em *H. W. Alt* [11], [1992] , p. 63.

Lema 1.4. *Supondo $d = 2$, existe uma constante C, tal que*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}$$

$\forall u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Veja o apêndice C.3.

Lema 1.5. *Consideremos $d \geq 3$, $s, r \in \mathbb{R}$, com $s > 2$, $r > d$, verificando $\dfrac{2}{s} + \dfrac{d}{r} = 1$. Seja também a forma trilinear $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$b(u,v,w) = \int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx.$$

Nessas condições, se $u \in \boldsymbol{L}^r(\Omega)$, *então*

$$|b(u,v,w)| \leq c\|u\|_{L^r(\Omega)}\|v\||w|^{2/s}\|w\|^{d/r}$$

$\forall v, w \in V$. *Em que* $c \geq 0$ *é uma constante.*

Demonstração. Veja o apêndice C.4.

Lema 1.6. *Quando* $n \leq 4$ *a forma trilinear* $b(u,v,w,)$ *é contínua em* $V \times V \times V$, *isto é,*

$$|b(u,v,w,)| \leq c||u|||v||||w||$$

Demonstração. A prova desse Lema pode ser encontrada em [32], p.p. 162.

Lema 1.7. *(Lema do ângulo agudo) Seja* $P : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *uma aplicação contínua tal que para um* $\rho > 0$ *conveniente se tenha* $\langle P(\xi), \xi \rangle \leq 0$, *para* $||\xi|| = \rho$. *Então existe um* $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ *com* $||\xi|| \leq \rho$ *tal que* $P(\xi) = 0$

Demonstração. Veja o apêndice C.5.

Lema 1.8. *(Lema de Du Bois Raymond) Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω

Demonstração. Podemos encontrar em M.M. Calvalcante e V.N.D. Cavalcante [23], p.p. 21

Teorema 1.1. *(Banach-Steinhaus) Sejam* E *e* F *espaços de Banach e* $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, *uma família de aplicações lineares e contínuas de* E *em* F *satisfazendo a condição*

$$Sup_{\lambda \in \Lambda}|||T_\lambda x|||_F < +\infty, \text{ para todo } x \in E,$$

então

$$Sup_{\lambda \in \Lambda}|||T_\lambda|||_{L(E,F)} < +\infty,$$

$$\text{isto é, existe } C > 0 \text{ tal que } |||T_\lambda x|||_F \leq C|||x|||_E, \ \forall x \in E \text{ e } \forall \lambda \in I.$$

Demonstração. *Encontramos a demonstração desse teorema em, M.M. Calvalcante e V.N.D. Cavalcante [24] p.p. 67*

Observação 1.2. *Sejam K e $\widetilde{K}$ conjuntos fechados e convexos de V e $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, respectivamente, com $0 \in K$ e $0 \in \widetilde{K}$. Escrevemos,*
$\mathbb{V} = L^4(I; V \cap V_4)$, $\mathbb{V}' = L^{4/3}(I; (V \cap V_4)')$, $\mathbb{H} = L^2(I, H)$,
$\mathbb{K} = \{u; u \in \mathbb{V}, u(t) \in K\, q.s., u(0) = 0\}$ *e* $D\left(\dfrac{d}{dt}, \mathbb{V}'\right) = \{u; u \in V, u' \in V'\}$

Observação 1.3. *Inicialmente vamos considerar os operadores de penalização $\beta : V \to V'$ e $\widetilde{\beta} : \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \to \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$, associado aos conjuntos convexos fechados K e $\widetilde{K}$, respectivamente cf. Lions [13], pp. 370. Os operadores β e $\widetilde{\beta}$ são monótonos, hemicontínua, que levam conjuntos limitados de V e $H_0^1(\Omega)$ em conjuntos limitadas de V' e $H^{-1}(\Omega)$ respectivamente, seus núcleos são K e $\widetilde{K}$. Vamos considerar também $\beta : L^4(I; V \cap V_4) \to L^{4/3}(I; (V \cap V_4)')$ e $\widetilde{\beta} : L^2(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \to L^2(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ são igualmente monótonos e hemicontínuos*

Observação 1.4. *$\mathbb{V}$ é um espaço de Banach reflexivo, $\mathbb{H}$ é um espaço de Hilbert, $\mathbb{K}$ é um conjunto fechado e convexo de $\mathbb{V}$*

Consideremos a "hipótese de compatibilidade"(ver Lions [13], p.269)
Para toda $v \in \mathbb{K}$, existe uma sucessão regularizante v_j verificando

$$\left| \begin{array}{ll} i) & v_j \in \mathbb{K} \cap D\left(\frac{d}{dt}; \mathbb{V}'\right) \\ ii) & v_j \to v \ \ em \ \ \mathbb{V}, j \to \infty \\ iii) & \limsup_{j\to\infty} \left(\frac{dv_j}{dt}, v_j - v\right) \leq 0 \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Para finalizar essa seção, definiremos o tensor de estresse $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e seu correspondente potencial $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ que serão utilizados no texto. Definimos esses objetos pondo

$$\tau(D) = M\left(|D|_E^2\right) D, \tag{1.11}$$

$$\Phi(D) = \frac{1}{2} \int_0^{|D|_E^2} M(s) ds. \tag{1.12}$$

No apêndice A, mostramos que o tensor τ e o potencial Φ satisfazem as hipóteses (1.4)-(1.7) do Lema 1.2 para $p = 4$.

Capítulo 2

Sobre um Fluido Micropolar Dilatante

Neste capítulo vamos estudar a seguinte desigualdade

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
u' - \nabla \cdot [2(\nu + \nu_r + M(|e(u)|_E^2))e(u)] & + & (u \cdot \nabla)u + \nabla p \\
& \geq & 2\nu_r \nabla \times w + f \text{ em } Q_T, \\
w' - \nu_1 \nabla \cdot e(w) \ + \ (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w & \geq & 2\nu_r \nabla \times u + g \quad \text{em } Q_T, \\
\nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\
u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\
w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega,
\end{array}
\right. \tag{2.1}
$$

No qual os símbolos, ν ν_1 e ν_r são constantes positivas. Nosso objetivo é estabelecer existência e unicidade de solução do sistema (2.1)

2.1 Definições e Resultados

A fim de simplificar algumas notações introduzimos as seguinte formas bilinear e trilinear: $a : V \times V \to \mathbb{R}$ e $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$, respectivamente, dadas por

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,dx, \tag{2.2}$$

$$b(u,v,w) = \int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Chamamos a atenção do leitor para o uso da convenção de somatório de Einstein segundo a qual $\alpha_i\beta_j$ substitui $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_i\beta_j$. Essa notação será usada quase sempre no texto. Notamos que (veja *Lions* [13], [1969])

$$a(u,v) = ((u,v)), \tag{2.4}$$

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v), \quad \forall u \in V \text{ e } \forall v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \tag{2.5}$$

Também usaremos as seguintes notações

$$Au = -\Delta u, \tag{2.6}$$

$$B_u v = (u\cdot\nabla)v = u_i\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \forall u,v \in V \tag{2.7}$$

outra notação que também será bastante utilizada é a seguinte

$$\mathcal{K}_u v = -\nabla\cdot M(|e(u)|_E^2)e(v), \quad \forall u,v \in V\cap V_4 \tag{2.8}$$

Assim, podemos escrever

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) \qquad \forall u,v \in V, \tag{2.9}$$

$$\langle B_u v, w\rangle = b(u,v,w) \quad \forall u \in V \text{ e } \forall v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.10}$$

$$\langle \mathcal{K}_u v, w\rangle = \int_\Omega M(|e(u)|_E^2)e_{ij}(v)e_{ij}(w)dx \quad \forall u,v,w \in V\cap V_4. \tag{2.11}$$

Observação 2.1. *Observamos que devido a desigualdade (1.9) do Lema 1.2, temos que*

$$\langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u_1 - u_2\rangle \geq 0,$$

quaisquer $u_1, u_2 \in V$. Logo $\mathcal{K} : V\cap V_4 \to (V\cap V_4)'$ é um operador monótono. Demonstração. Veja o apêndice B.1

Observação 2.2. *O operador* $\mathcal{K} : V \cap V_4 \to (V \cap V_4)'$ *é hemicontínuo, ou seja,*

$$\lambda \mapsto \langle\ \mathcal{K}(u + \lambda v), w\ \rangle$$

é contínua $\forall u, v, w \in V$, *com* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver apêndice B.2

Teorema 2.1. *Consideremos* $n \leq 3$, $f \in L^{4/3}(I; (V \cap V_4)')$, $g \in L^2(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ *e a hipotese de compatibilidade, então existe um par de funções* (u, w) *tal que*

$$u \in L^4(I; V \cap V_4) \cap L^\infty(I; H),\ w \in L^\infty(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \cap L^2(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$$
$$u(t) \in K, q.s.\ e\ w(t) \in \widetilde{K}, q.s., \text{ satisfazendo}$$

$$\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^T (\varphi', \varphi - u)dt + (\nu + \nu_r)\int_0^T a(u, \varphi - u)dt + \int_0^T b(u, u, \varphi - u)dt + \\
\displaystyle\int_0^T M(|e(u)|^2)e_{ij}(u)e_{ij}(\varphi - u)dt \geq 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times w, \varphi - u)dt + \int_0^T (f, \varphi - u)dt \\
\forall \varphi \in L^4(I; V \cap V_4), \varphi' \in L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'), \varphi(0) = 0, \varphi(t) \in K \quad q.s. \\
\displaystyle\int_0^T (\phi', \phi - w)dt + \nu_1 \int_0^T a(w, \phi - w)dt + \nu_1 \int_0^T (\nabla(\nabla \cdot w), \phi - w)dt \\
\displaystyle\int_0^T b(u, u, \varphi - u)dt + 4\nu_r \int_0^T (w, \phi - w)dt \geq 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times u, \varphi - w)dt + \\
\displaystyle\int_0^T (g, \phi - w)dt \\
\forall \phi \in L^2(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), \phi' \in L^2(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)), \phi(0) = 0, \phi(t) \in \widetilde{K} \quad q.s. \\
u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0
\end{array}\right. \tag{2.12}$$

Teorema 2.2. *Assumindo a hipótese de compatibilidade, supondo n=2 e*

$$f, f', g, g' \in L^2(I; \boldsymbol{H}(\Omega))$$

$$u_0 \in K, w_0 \in \widetilde{K},$$

Supondo também que

$$(f(0),v)+2\nu_r(\nabla\times w_0,v)-(\nu+\nu_r)a(u_0,v)-b(u_0,u_0,v)-(K_{u_0}u_0,v)=(u_1,v) \\ \forall\ v\in V\, e\ para\ algum\ \ u_1\in H \tag{2.13}$$

$$(g(0),\widetilde{v})+2\nu_r(\nabla\times u_0,\widetilde{v})-\nu_1 a(w_0,\widetilde{v})-b(u_0,w_0,\widetilde{v})-\nu_1(\nabla\cdot w_0,\nabla\cdot\widetilde{v}) \\ -4\nu_r(w_0,\widetilde{v})=(w_1,\widetilde{v})\ \forall\ \widetilde{v}\in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\ \ e\ para\ algum\ \ w_1\in \boldsymbol{L}^2(\Omega). \tag{2.14}$$

Então existe um único par de funções (u,w) tal que

$$u\in L^2(I;V),u'\in L^2(I;V)\cap L^\infty(I;H)$$

$$w\in L^2(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)),w'\in L^2(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))\cap L^\infty(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$$

$$u(t)\in K,w(t)\in\widetilde{K},\forall t\in[0,T],\ satisfazendo$$

$$\left|\begin{array}{l}
(u'(t),v-u(t))+(\nu+\nu_r)a(u(t),v-u(t))+(K_{u(t)}u(t),v-u(t))+ \\
b(u(t),u(t),v-u(t))\geq 2\nu_r(\nabla\times w(t),v-u(t))+(f(t),v-u(t)) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v\in K.q.s, em\ \ t \\
\\
(w'(t),\widetilde{v}-w(t))+\nu_1 a(w(t),\widetilde{v}-w(t))+b(u(t),w(t),\widetilde{v}-w(t))+ \\
\nu_1(\nabla(\nabla\cdot w(t)),\widetilde{v}-w(t))+4\nu_r(w(t),\widetilde{v}-w(t))\geq 2\nu_r(\nabla\times u(t),\widetilde{v}-w(t)) \\
+(g(t),\widetilde{v}-w(t)) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\widetilde{v}\in\widetilde{K},q.s,em\ \ t \\
\qquad\qquad\qquad\qquad u(0)=u_0,\ \ w(0)=w_0
\end{array}\right. \tag{2.15}$$

As provas dos teoremas (2.1) e (2.2) serão dados pelo método da penalização, que consiste em adicionar um termo singular chamado penalização ao problema (2.1), dependendo dos parâmetros $\epsilon,\varepsilon>0$. Resolvemos o problema misto em Q para o operador penalização e as estimativas obtidas para a solução local da equação penalizada, permite-nos passar o limite, quando ϵ,ε tenderem para zero, de modo a obter um par de funções (u,w) que será a solução do nosso problema.

O problema penalizado associado ao sistema (2.1) é dado por

$$
\left|\begin{array}{lll}
u'_\epsilon-\nabla\cdot[2(\nu+\nu_r+M(|e(u_\epsilon)|^2))e(u_\epsilon)]+(u_\epsilon.\nabla)u_\epsilon & + & \dfrac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon+\nabla p \\
 & & =2\nu_r\nabla\times w_\varepsilon+f \text{ em } Q_T \\
w'_\varepsilon-\nu_1\nabla\cdot e(w_\varepsilon) \;+\; (u_\epsilon.\nabla)w_\varepsilon+4\nu_r w_\varepsilon+\dfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta}w_\varepsilon & & =2\nu_r\nabla\times u_\epsilon+g \text{ em } Q_T \\
\qquad\qquad \operatorname{div} u_\epsilon & = & 0 \quad \text{em } Q_T \\
\qquad\qquad u_\epsilon & = & 0 \quad \text{em } \Sigma_T \\
\qquad\qquad w_\varepsilon & = & 0 \quad \text{em } \Sigma_T \\
\qquad\qquad u_\epsilon(x,0) & = & 0 \quad \text{em } \Omega \\
\qquad\qquad w_\varepsilon(x,0) & = & 0 \quad \text{em } \Omega
\end{array}\right. \tag{2.16}
$$

Definição 2.1. *Sejam $u_{\epsilon 0}\in V, w_{\varepsilon 0}\in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, bem como $f\in L^{4/3}(I,V')$ e $g\in \boldsymbol{L}^2(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. Uma solução fraca para (2.16) consiste de um par de funções $\{u_\epsilon,w_\varepsilon\}$, tal que $u_\epsilon\in L^4(I;V_4)\cap L^2(I;V)\cap L^\infty(I;H)$, $w_\varepsilon\in L^\infty(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega))\cap L^2(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))$, satisfazendo*

$$
\left|\begin{array}{l}
(u'_\epsilon,\varphi)+(\nu+\nu_r)a(u_\epsilon,\varphi)+b(u_\epsilon,u_\epsilon,\varphi)+\langle K_{u_\epsilon}u_\epsilon,\varphi\rangle+\dfrac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon,\varphi) \\
=2\nu_r(\nabla\times w_\epsilon,\varphi)+(f,\varphi),\forall\varphi\;\in\mathcal{D}(0,T;V) \\
\\
(w'_\epsilon,\phi)+\nu_1 a(w_\epsilon,\phi)+\nu_1(\nabla(\nabla\cdot w_\varepsilon),\phi)+b(u_\epsilon,w_\varepsilon,\phi) \\
+4\nu_r(w_\varepsilon,\phi)+\dfrac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta}w_\varepsilon,\phi)=2\nu_r(\nabla\times u_\epsilon,\phi)+(g,\phi),\forall\phi\;\in\mathcal{D}(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)) \\
\\
u_\epsilon(0)=0,\quad w_\varepsilon(0)=0
\end{array}\right. \tag{2.17}
$$

Teorema 2.3. *Se $f\in L^{4/3}(I;V')$, $g\in L^2(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, $u_{\epsilon 0}\in V$ e $w_{\varepsilon 0}\in H_0^1(\Omega)$, então para cada $0<\epsilon,\varepsilon<1$, existe um par de funções $(u_\epsilon,w_\varepsilon)$ definidas em Q_T, solução para o problema (2.16) no sentido da definição (2.1).*

Teorema 2.4. *Assumindo que $n=2$, $f\in L^2(I;V), f'\in L^2(I;V'), g\in L^2(I;H_0^1(\Omega))$, e $g'\in L^2(I;H^{-1}(\Omega))$. Então para cada $0<\epsilon,\varepsilon<1$, $u_{\epsilon 0}\in V$ e $w_{\varepsilon 0}\in H_0^1$, existe um par de funções $(u_\epsilon,w_\varepsilon)$ definidas em Q_T, solução para o problema (2.16) no sentido da definição (2.1), tal que $u_\epsilon\in L^2(I,V')$ e $w_\varepsilon\in L^2(I,H^{-1}(\Omega))$ aqui, obtemos as soluções mais regulares.*

2.2 Existência de Soluções

2.2.1 Prova do Teorema 2.1

Para demonstar o Teorema 2.1 primeiro provaremos o Teorema 2.3. A fim de demonstrar a existência de solução fraca para o sistema (2.1), vamos nos deter a principio na demonstração de existência de solução fraca para o sistema (2.16), para isso usaremos aproximações de Galerkin. Consideremos uma base de autovetores do operador de Stokes $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$, assim como uma base hilbertiana de autovetores do $-\Delta$, $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Representamos por $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m]$ o subespaço de V gerado pelos vetores φ_1, ..., φ_m e por $W_m = [\phi_1, ..., \phi_m]$ o subespaço de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ gerado pelos vetores ϕ_1, ..., ϕ_m.

Vamos considerar,

$$u_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} g_{rm}(t)\varphi_r(x) \quad \text{e} \quad w_{\varepsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{rm}(t)\phi_r(x), \tag{2.18}$$

soluções para o problema aproximado

$$\left|\begin{array}{l}
(u'_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\nu + \nu_r)a(u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) \\
\\
+\dfrac{1}{\epsilon}(\beta u_{\epsilon m}, \varphi_r) = 2\nu_r(\nabla \times w_{\varepsilon m}, \varphi_r) + (f(t), \varphi_r) \qquad r = 1, ..., 3 \\
\\
(w'_{\varepsilon m}, \phi_r) + \nu_1 a(w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \nu_1(\nabla(\nabla \cdot w_{\varepsilon m}), \phi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \\
\\
4\nu_r(w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m}, \phi_r) = 2\nu_r(\nabla \times u_{\epsilon m}, \phi_r) + (g(t), \phi_r) \;\; r = 1, ..., 3 \\
\\
u_{\epsilon m}(x,0) \to u_\epsilon(x,0), \quad \text{em} \quad V \\
w_{\varepsilon m}(x,0) \to w_\varepsilon(x,0), \quad \text{em} \;\; \mathbf{H}_0^1(\Omega)
\end{array}\right. \tag{2.19}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (2.19) possui uma única solução definida em um certo intervalo $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$. A seguir, vamos obter a primeira estimativa que nos permite estender essa solução a todo intervalo $[0, T]$.

2.2.2 Primeira Estimativa

Fixando $\epsilon > 0$, $\varepsilon > 0$, multiplicando ambos os membros de $(2.19)_1$ por g_{r_m} e somando de $r = 1$ até $r = m$ e multiplicando $(2.19)_2$ por h_{r_m} e somamos de $r = 1$ até $r = m$, concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2 \;&+\; (\nu+\nu_r)\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + \int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|)^2|e_{ij}(u_{\epsilon m})|^2dx \\ &\leq\; 2\nu_r|w_{\varepsilon m}|\|u_{\epsilon m}\| + |f(t)||u_{\epsilon m}(t)|, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_{\varepsilon m}(t)|^2 \;&+\; \nu_1||w_{\varepsilon m}|| + \nu_1|\nabla\cdot w_{\varepsilon m}|^2 + 4\nu_r|w_{\varepsilon m}|^2 \\ &\leq\; 2\nu_r\|u_{\epsilon m}\||w_{\varepsilon m}| + |g(t)||w_{\varepsilon m}|, \end{aligned} \tag{2.21}$$

pois $b(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}) = b(u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w_{\varepsilon m}) = 0$ (veja Lions [13]), $|\nabla\times u_{\epsilon m}| = |\nabla u_{\epsilon m}|$, $(\nabla\times w_{\varepsilon m}, u_{\epsilon m}) = (w_{\varepsilon m}, \nabla\times u_{\epsilon m})$ (veja Lukaszewicz [8]), $(\beta u_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t)) \geq 0$, pois β é monotono e $0\in K$, e $(\nabla(\nabla\cdot w_{\varepsilon m}), w_{\varepsilon m}) = (\nabla\cdot w_{\varepsilon m}, \nabla\cdot w_{\varepsilon m})$ (veja Lukaszewicz [8])

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2 + (\nu+\nu_r)\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + \frac{c_1K}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^4_{V_4} + \nu_2\|u_{\epsilon m}(t)\|^4 \\ &\leq \frac{\nu_r}{4}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + c_{\nu_r}|w_{\varepsilon m}(t)|^2 + \frac{\nu_2}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^4 + c_{\nu_2}\|f(t)\|^{4/3}_{V'}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_{\varepsilon m}(t)|^2 + \nu_1\|w_{\varepsilon m}(t)\|^2 \leq \frac{\nu_r}{4}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + c_{\nu_r}|w_{\varepsilon m}(t)|^2 \\ &+\frac{\nu_1}{2}\|w_{\varepsilon m}(t)\|^2 + c_{\nu_1}\|g(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Isso ocorre, devido ao lema (1.3) (Lema de Korn) e as propriedades (1.1) e (1.2) da função M. Temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2)|e_{ij}(u_{\epsilon m})|^2dx \;\geq\; \frac{c_1}{2}\|e(u_{\epsilon m})\|^4_{L^4(\Omega)} \geq \frac{c_1K}{2}\|u_{\epsilon m}\|^4_{V_4},$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2)|e_{ij}(u_{\epsilon m})|^2dx \;\geq\; \frac{c_1}{2}\|e(u_{\epsilon m})\|^4_{L^4(\Omega)} \geq \nu_2\|u_{\epsilon m}\|^4.$$

Somando as inequações (2.22) e (2.23), adicionando no segundo membro $|u_{\epsilon m}(t)|^2$, integrando de 0 a t, com $0 \leq t \leq T$ e usando as condições iniciais concluímos que

$$
\begin{aligned}
&(|u_{\epsilon m}(t)|^2 + |w_{\varepsilon m}(t)|^2) + c_1 K \int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|_{V_4}^4 ds + \nu_2 \int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^4 ds \\
&+\nu_1 \int_0^t \|w_{\varepsilon m}(s)\|^2 ds \leq C + C \int_0^t \left(|u_{\epsilon m}(s)|^2 + |w_{\varepsilon m}(s)|^2\right) ds.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Finalmente, a desigualdade de Gronwall nos permite concluir que

$$
|u_{\epsilon m}(t)|^2 + |w_{\varepsilon m}(t)|^2 \leq C. \tag{2.25}
$$

Portanto, seguem de (2.24) as seguintes estimativas

$$(u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I; H), \tag{2.26}$$

$$(u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I; V_4), \tag{2.27}$$

$$(u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I; V), \tag{2.28}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I; \mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{2.29}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)). \tag{2.30}$$

2.2.3 Segunda Estimativa

Consideremos agora a projeção ortogonal $P_m : V \to V_m$ dada por

$$
P_m u = \sum_{j=1}^{m} (u, \varphi_j)\varphi_j,
$$

assim como sua adjunta $P_m^* : V' \to V'$. Notamos que $P_m^* u_m' = u_m'$. Além disso, devido a escolha da base especial (φ_ν), temos que

$$
\|P_m\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq 1 \quad \text{ e } \quad \|P_m^*\|_{\mathcal{L}(V',V')} \leq 1. \tag{2.31}
$$

Desse modo, obtemos de $(2.19)_1$, (2.9), (2.10) e (2.11) a seguinte igualdade

$$
u_{\epsilon m}' = -\frac{1}{\epsilon} P_m^* \beta u_{\epsilon m} - (\nu + \nu_r) P_m^* A u_{\epsilon m} - P_m^* \mathcal{K} u_{\epsilon m} - P_m^* B u_{\epsilon m} + 2\nu_r P_m^* \nabla \times w_{\varepsilon m} + P_m^* f. \tag{2.32}
$$

A seguir vamos obter limitações para os termos do segundo membro de (2.32). Primeiramente notamos que $|\langle Au_{\epsilon m}, v\rangle| \leq \|u_{\epsilon m}\|\|v\|$, $\forall u_{\epsilon m}(t), v(t) \in V$. Portanto, (2.28) implica que

$$(Au_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I;V') \hookrightarrow L^{4/3}(I;(V \cap V_4)'). \tag{2.33}$$

Tomando $u_{\epsilon m}(t), v(t) \in V$, obtemos de (2.11), da desigualdade de Hölder e de (1.1) que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{K}u_{\epsilon m}, v\rangle| &\leq C\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon m}|_E^3 |\nabla v|_E dx \\
&\leq C\|\nabla u_{\epsilon m}\|^3_{L^4(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C\|u_{\epsilon m}\|^3_{V_4}\|v\|_{V_4} \\
&\leq C\|u_{\epsilon m}\|^3_{V_4}\|v\|_{V\cap V_4}
\end{aligned}$$

Portanto, a limitação (2.28) assegura que

$$(\mathcal{K}u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}(I;(V \cap V_4)'). \tag{2.34}$$

Sabemos que $d \leq 3$ implica em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo usando (2.10) e a desigualdade de Hölder podemos concluir

$$|\langle B_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, v\rangle| \overset{(2.10)}{=} |b(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)| \leq \|u_{\epsilon m}\|_{L^4(\Omega)}\|u_{\epsilon m}\|\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u_{\epsilon m}\|^2\|v\|$$

$\forall u_{\epsilon m(t)}, v(t) \in V$. Portanto, devido a (2.28) obtemos

$$(B_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I;V') \hookrightarrow L^{4/3}(I;(V \cap V_4)'). \tag{2.35}$$

Temos que

$$|\langle \nabla \times w_{\varepsilon m}, v\rangle| = |\langle w_{\varepsilon m}, \nabla \times v\rangle| \leq |w_{\varepsilon m}|\|v\| \leq c\|w_{\varepsilon m}\|\|v\|$$

$\forall w_{\varepsilon m}(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, e $\forall v(t) \in V$ (veja *G. Lukaszewicz* [8], [1999] p.116). Portanto, segue de (2.30) que

$$(\nabla \times w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I;V') \hookrightarrow L^{4/3}(I;(V \cap V_4)'). \tag{2.36}$$

Da hipótese de β temos que

$$(\beta u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'). \tag{2.37}$$

Portanto

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'). \tag{2.38}$$

De um modo análogo, consideremos a projeção ortogonal $R_m : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to W_m$ definida por

$$R_m w = \sum_{j=1}^{m} (w, \phi_j)\phi_j$$

e sua adjunta $R_m^* : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Temos $R_m^* w'_m = w'_m$,

$$\|R_m\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))} \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \|R_m^*\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H^{-1}(\Omega))} \leq 1, \tag{2.39}$$

devido a escolha da base especial (ϕ_ν). Notamos que $(2.19)_2$, (2.9), (2.10) e (2.11) implicam que

$$w'_{\varepsilon m} = -\nu_1 R_m^* \nabla \cdot e(w_{\varepsilon m}) - R_m^* B w_{\varepsilon m} - 4\nu_r R_m^* w_{\varepsilon m} - \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m} + 2\nu_r R_m^* \nabla \times u_{\epsilon m} + R_m^* g. \tag{2.40}$$

A fim de limitar o segundo membro de (2.40), observamos inicialmente que

$$|\langle \nabla \cdot e(w_{\varepsilon m}), v\rangle| = |\langle e(w_{\varepsilon m}), \nabla v\rangle| \leq |\nabla w_{\varepsilon m}||\nabla v| \leq \|w_{\varepsilon m}\|\|v\|$$

$\forall w_{\varepsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Desse modo, (2.30) implica que

$$(\nabla \cdot e(w_{\varepsilon m})) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.41}$$

Por outro lado, considerando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos de (2.30) a seguinte limitação

$$(w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.42}$$

Em seguida, notamos que

$$|\langle \nabla \times u_{\epsilon m}, v\rangle| \leq \|u_{\varepsilon m}\|\|v\|,$$

$\forall u_{\varepsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Desse modo, usando (2.28) obtemos

$$(\nabla \times u_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.43}$$

Da hipótese de $\widetilde{\beta}$, temos que

$$(\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right) \tag{2.44}$$

Com a finalidade de obter uma limitação para $(B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m})$, vamos considerar dois casos: $d = 2$ e $d = 3$. Primeiramente, supondo $d = 2$, obtemos da propriedade (2.5), de (2.10) e da Desigualdade de Hölder o seguinte

$$|\langle B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}, v\rangle| \overset{(2.10)}{=} |b(u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, v)| \overset{(2.5)}{=} |b(u_{\epsilon m}, v, w_{\varepsilon m})| \leq c\|u_{\epsilon m}\|_{L^4(\Omega)}\|v\|\|w_{\varepsilon m}\|_{L^4(\Omega)}$$

$\forall u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m} \in V$ e $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Logo devido ao Lema 1.4 podemos escrever

$$\|B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq c|u_{\epsilon m}|\|u_{\epsilon m}\||w_{\varepsilon m}|\|w_{\varepsilon m}\|.$$

Agora aplicamos a desigualdade de Young para obter

$$\|B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq c|u_{\epsilon m}|^2\|u_{\epsilon m}\|^2 + c|w_{\varepsilon m}|^2\|w_{\varepsilon m}\|^2$$

Portanto, (2.26) e (2.28)-(2.30) nos permitem obter que

$$(B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right), \qquad \text{no caso } d = 2.$$

Usando um raciocínio análogo e supondo $d = 3$ obtemos do Lema 1.5 a seguinte inequação

$$\|B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u_{\epsilon m}\|_{L^6(\Omega)}|w_{\varepsilon m}|^{1/2}\|w_{\varepsilon m}\|^{1/2}.$$

A seguir notamos que no caso $d = 3$ vale a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Segue-se da desigualdade de Young que a inequação anterior pode ser reescrita do seguinte modo

$$|B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\|u_{\epsilon m}\|^2 |w_{\varepsilon m}| \|w_{\varepsilon m}\| \leq c\|u_{\epsilon m}\|^4 + c|w_{\varepsilon m}|^2 \|w_{\varepsilon m}\|^2.$$

Portanto, (2.28)-(2.30) nos fornecem

$$(B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right), \qquad \text{no caso } d = 3. \tag{2.45}$$

Desse modo, obtemos de (2.40)-(2.45) e das hipóteses sobre g que

$$(w'_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.46}$$

Devido as limitações (2.26)-(2.30), (2.38), (2.46) e ao Lema de compacidade de Aubin-Lions, temos que existem subsequências de $(u_{\epsilon m})$ e $(w_{\varepsilon m})$, as quais ainda denotamos por $(u_{\epsilon m})$ e $(w_{\varepsilon m})$, tais que

$$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon \quad \text{forte em } L^2(I; H) \text{ e q. s. em } Q_T, \tag{2.47}$$

$$u_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\epsilon \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(I; H), \tag{2.48}$$

$$u_{\epsilon m} \rightharpoonup u_\epsilon \quad \text{fraco em } L^4(I; V), \tag{2.49}$$

$$u'_{\epsilon m} \rightharpoonup u'_\epsilon \quad \text{fraco em } L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'), \tag{2.50}$$

$$w_{\varepsilon m} \to w_\varepsilon \quad \text{forte em } L^2(I; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ e q. s. em } Q_T, \tag{2.51}$$

$$w_{\varepsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} w_\varepsilon \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(I; \mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{2.52}$$

$$w_{\varepsilon m} \rightharpoonup w_\varepsilon \quad \text{fraco em } L^2(I; \mathbf{H}^1_0(\Omega)), \tag{2.53}$$

$$w'_{\varepsilon m} \rightharpoonup w'_\varepsilon \quad \text{fraco em } L^2(I; H^{-1}(\Omega)), \tag{2.54}$$

$$\mathcal{K}u_{\epsilon m} \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em } L^{4/3}(I; (V \cap V_4)') \tag{2.55}$$

$$\beta u_{\epsilon m} \rightharpoonup \psi \quad \text{fraco em } L^{4/3}(I; (V \cap V)') \tag{2.56}$$

$$\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m} \rightharpoonup \Psi \quad \text{fraco em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \tag{2.57}$$

Além disso, notamos que (2.28) e (2.38) implicam em $u_\epsilon \in C^0(I; \mathbf{H})$. De modo similar, (2.30) e (2.46) implicam em $w_\varepsilon \in C^0(I; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Portanto, faz sentido considerar $u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}$ e $w_\varepsilon(0) = w_{\varepsilon 0}$.

2.2.4 Convergência dos termos não-lineares

Agora vamos obter (2.17). A fim de provar que

$$\int_0^T b(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, \varphi) \longrightarrow \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{V}), \tag{2.58}$$

consideremos $\varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{V})$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} (u_{\epsilon mi} u_{\epsilon mj} - u_{\epsilon i} u_{\epsilon j}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dxdt &= \int_{Q_T} (u_{\epsilon mi} - u_{\epsilon i}) u_{\epsilon mj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dxdt \\
&+ \int_{Q_T} u_{\epsilon i} (u_{\epsilon mj} - u_{\epsilon j}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dxdt \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{V})$. Além disso, notamos que devido a estimativa (2.26), temos que

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq C \int_0^T |u_{\epsilon m} - u_\epsilon| |u_{\epsilon m}| dt \\
&\overset{(2.26)}{\leq} C \int_0^T |u_{\epsilon m} - u_\epsilon| dt.
\end{aligned}$$

Agora notando que temos uma convergência forte (2.47), resulta que $|I_1| \to 0$, quando $m \to \infty$. Por outro lado, novamente devido a (2.47), temos $|I_2| \to 0$, quando $m \to \infty$. Portanto,

$$\int_{Q_T} u_{\epsilon mi} u_{\epsilon mj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dxdt \to \int_{Q_T} u_{\epsilon i} u_{\epsilon j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dxdt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{V}). \tag{2.59}$$

Por fim, usando a propriedade (2.5) e a convergência (2.59) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T b(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, \varphi) dt &\overset{(2.5)}{=} -\int_0^T b(u_{\epsilon m}, \varphi, u_{\epsilon m}) dt \\
&\overset{(2.59)}{\to} -\int_0^T b(u_\epsilon, \varphi, u_\epsilon) dt \\
&\overset{(2.5)}{=} \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi) dt,
\end{aligned}$$

qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Isso assegura a convergência (2.58). Para provar que

$$\int_0^T b(u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, \phi) \longrightarrow \int_0^T b(u_\epsilon, w_\varepsilon, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}\left(I; \mathcal{D}(\Omega)\right), \tag{2.60}$$

procedemos de modo análogo usando a convergência (2.51) e as estimativas (2.29) e (2.30). Por outro lado, notamos que

$$\int_{Q_T} e_{ij}(w_{\varepsilon m}) e_{ij}(\phi) dx dt \longrightarrow \int_{Q_T} e_{ij}(w_\varepsilon) e_{ij}(\phi) dx dt, \tag{2.61}$$

ou de modo equivalente,

$$\int_0^T \langle \nabla \cdot e(w_{\varepsilon m}), \phi \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \nabla \cdot e(w_\varepsilon), \phi \rangle dt, \tag{2.62}$$

resulta de (2.53). Para provar que

$$\int_{Q_T} M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) dx dt \longrightarrow \int_{Q_T} M(|e(u_\epsilon)|_E^2) e_{ij}(u_\epsilon) e_{ij}(\varphi) dx dt, \tag{2.63}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$, usaremos o Lema 1.3. Primeiramente usamos o fato $\nabla u_{\epsilon m} \to \nabla u_\epsilon$ q. s. em Q_T, (veja *Frehse J. e J. Málek* [4], [2003] p. 565-566). Logo

$$|\nabla u_{\epsilon m}|_E^2 \longrightarrow |\nabla u_\epsilon|_E^2 \text{ q. s. em } Q_T.$$

Ou ainda,

$$|e(u_{\epsilon m})|_E^2 \longrightarrow |e(u_\epsilon)|_E^2 \text{ q. s. em } Q_T. \tag{2.64}$$

Além disso, como $M \in C^1(0, +\infty)$ segue de (2.64) que

$$M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2) \longrightarrow M(|e(u_\epsilon)|_E^2) \text{ q. s. em } \; Q_T, \tag{2.65}$$

Portanto,

$$M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) \longrightarrow M(|e(u_\epsilon)|_E^2) e_{ij}(u_\epsilon) e_{ij}(\varphi) \tag{2.66}$$

q. s. em Q_T, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Por outro lado, usando a estimativa (2.27) e (1.1) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_T} M\left(|e(u_{\epsilon m})|_E^2\right) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi)dxdt &\overset{(1.1)}{\leq} C\int_{Q_T} |e(u_{\epsilon m})|_E^3 |e_{ij}(\varphi)|dxdt \\
&\leq C\int_{Q_T} |e(u_{\epsilon m})|_E^3 dxdt \\
&\leq C\int_{Q_T} |\nabla u_{\epsilon m}|_E^3 dxdt \\
&\overset{(2.27)}{\leq} C.
\end{aligned}
$$

Segue-se que

$$
M\left(|e(u_{\epsilon m})|_E^2\right) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) \in L^1(Q_T), \tag{2.67}
$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Agora se $H \subset Q_T$ é um conjunto mensurável, obtemos de (1.1), (2.27) e da desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
\int_H M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi)dxdt &\overset{(1.1)}{\leq} c\int_H |e(u_{\epsilon m})|_E^3 |e(\varphi)|_E dxdt \\
&\leq c\left(\int_{Q_T} |e(u_{\epsilon m})|_E^4 dxdt\right)^{3/4} \left(\int_H |e(\varphi)|_E^4 dxdt\right)^{1/4} \\
&\leq c\left(\int_{Q_T} |\nabla u_{\epsilon m}|_E^4 dxdt\right)^{3/4} |H|^{1/4} \\
&\overset{(2.27)}{\leq} c|H|^{1/4}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_H M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi)dxdt \leq c|H|^{1/4}.
$$

Supondo que $|H|$ é suficientemente pequeno, obtemos

$$
\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_H M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi)dxdt \leq \varepsilon', \tag{2.68}
$$

$\forall \varepsilon' > 0$. Por fim, usando (2.66)-(2.68) e o Teorema da Convergência de Vitali (Lema 1.3), obtemos (2.63). Portanto, $\chi = \mathcal{K}u_\epsilon$ em $L^{4/3}(I;(V\cap V_4)')$.

2.2.5 Convergência de β

Mostremos agora que

$$\beta u_{\epsilon m} \rightharpoonup \beta u_\epsilon \quad \text{fraco em } L^{4/3}(I;(V\cap V_4)') \tag{2.69}$$

Como β é monotona temos

$$X_m = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\beta u_{\epsilon m} - \beta v, u_{\epsilon m} - v)dt \geq 0 \quad \forall\ v \in L^4(I,(V\cap V_4)') \tag{2.70}$$

Da equação aproximada e tomando o lim sup em (2.70), segue que

$$0 \leq \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\psi, u_\epsilon - v)dt - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\beta v, u_\epsilon - v)dt \tag{2.71}$$

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\psi - \beta v, u_\epsilon - v)dt \geq 0 \ \ \forall v \in L^4(I,V) \tag{2.72}$$

Fazendo $v = u_\epsilon - \lambda w$, $w \in L^4(I,V)$

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\psi - \beta(u_\epsilon - \lambda w), w)dt \geq 0 \ \ \forall w \in L^4(I,V) \tag{2.73}$$

Fazendo $\lambda \to 0$, segue que

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\psi - \beta u_\epsilon, w)dt \geq 0 \ \ \forall w \in L^4(I,V) \tag{2.74}$$

logo,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\psi - \beta u_\epsilon, w)dt = 0 \ \ \forall w \in L^4(I,V) \tag{2.75}$$

Fazendo $w = \theta\bar{v}$, $\bar{v} \in L^4(I,V)$ e $\theta \in C_0^\infty(I)$

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\psi - \beta u_\epsilon, \theta\bar{v})dt = 0 \tag{2.76}$$

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (\psi - \beta u_\epsilon, \bar{v})\theta dt = 0 \tag{2.77}$$

Aplicando o Lema de Du Bois Raymond, podemos concluir que

$$(\psi - \beta u_\epsilon, \bar{v}) = 0 \text{ q.s. em I }, \forall \;\bar{v} \in V \tag{2.78}$$

Portanto

$$\psi = \beta u_\epsilon \tag{2.79}$$

O raciocínio é análogo para

$$\Psi = \widetilde{\beta} w_\varepsilon \tag{2.80}$$

O sistema (2.17) e as limitações obtidas anteriormente em (2.33)-(2.38) e (2.41)-(2.46) implicam que

$$\left| \begin{array}{l} u_\epsilon' + (\nu + \nu_r)Au_\epsilon + \mathcal{K}u_\epsilon + B_{u_\epsilon}u_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon = 2\nu_r \nabla \times w_\varepsilon + f \text{ em } \; L^{4/3}(I; (V \cap V_4)') \\ w_\varepsilon' + \nu_1 \nabla \cdot e(w_\varepsilon) + B_{u_\epsilon} w_\varepsilon + 4\nu_r w_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta} w_\varepsilon = 2\nu_r \nabla \times u_\epsilon + g \text{ em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right) \end{array} \right. \tag{2.81}$$

Concluímos assim a prova do Teorema 2.3. □

Provaremos agora o teorema 2.1

Para isso usaremos o Teorema de Banach-Steinhaus

Das limitacões e do Teorema de Banach-Steinhaus, existem subsequências $(u_\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ e $(w_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$, tais que convergem para u e w, com $\epsilon, \varepsilon \to 0$

Mostremos que $\epsilon u_\epsilon' \to 0$ em $\mathcal{D}'(I; (V \cap V_4)')$, para isso tomemos $\varphi \in \mathcal{D}(I; V \cap V_4)$, logo

$$\langle \epsilon u_\epsilon', \varphi \rangle = -\epsilon \langle u_\epsilon, \varphi' \rangle \le \epsilon |u_\epsilon||\varphi| \le \epsilon c, \tag{2.82}$$

ou seja,

$$\langle \epsilon u_\epsilon', \varphi \rangle \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0. \tag{2.83}$$

portanto,

$$\epsilon u_\epsilon^{'} \to 0 \text{ em } \mathcal{D}^{'}(I;(V \cap V_4)') \tag{2.84}$$

De (2.81), temos que

$$\beta u_\epsilon = \epsilon[2\nu_r \nabla \times w_\varepsilon + f - u_\epsilon^{'} - (\nu+\nu_r)Au_\epsilon - \mathcal{K}u_\epsilon - B_{u_\epsilon}u_\epsilon] \tag{2.85}$$

logo

$$\beta u_\epsilon \to 0 \quad em \quad \mathcal{D}^{'}(I;(V \cap V_4)') \quad quando \quad \epsilon \to 0 \tag{2.86}$$

resulta de (2.85) que

$$\beta u_\epsilon \quad limitada \quad L^{4/3}(V \cap V_4)', portanto \tag{2.87}$$

$$\beta u_\epsilon \to 0 \qquad fraco \;\; em \quad L^{4/3}(V \cap V_4)' \tag{2.88}$$

De (2.81) deduzimos que

$$0 \leq \int_0^T < \beta u_\epsilon, u_\epsilon > dt \leq \epsilon \cdot C \tag{2.89}$$

$$\int_0^T < \beta u_\epsilon, u_\epsilon > dt \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0 \tag{2.90}$$

Como β é um operador monotono

$$\int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, u_\epsilon - \varphi > dt \geq 0 \qquad \forall \varphi \in L^4(0,T;V) \tag{2.91}$$

$$\int_0^T < \beta u_\epsilon, u_\epsilon > dt - \int_0^T < \beta u_\epsilon, \varphi > dt - \int_0^T < \beta\varphi, u_\epsilon - \varphi > dt \geq 0 \tag{2.92}$$

De (2.88), (2.90), (2.92) e fazendo $\epsilon \to 0$, segue que

$$\int_0^T < \beta\varphi, u(t) - \varphi > dt \leq 0 \tag{2.93}$$

Fazendo $\varphi = u - \lambda v$, com $v \in L^4(0,T;V)$ e $\lambda > 0$, fica:

$$\int_0^T < \beta(u - \lambda v), u - (u - \lambda v) > dt \leq 0 \tag{2.94}$$

$$\int_0^T < \beta(u - \lambda v), \lambda v > dt \leq 0 \tag{2.95}$$

$$\int_0^T < \beta(u - \lambda v), v > dt \leq 0 \tag{2.96}$$

Fazendo $\lambda \to 0$ e usando a hemicontinuidade de β segue que

$$\int_0^T < \beta u, v > dt \leq 0 \tag{2.97}$$

Pelo Lema de Du Bois Raymond,

$$\beta u(t) = 0 \qquad q.s \quad em \quad t \in [0,T] \tag{2.98}$$

Isso implica que $u(t) \in K$ q.s., de modo análogo temos que $w(t) \in \widetilde{K}$.

Mostremos agora que $\limsup\limits_{\epsilon \to 0} \int_0^T < \mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - u > dt \leq 0$

.

De fato, temos que $\forall v \in K \cap D(\frac{d}{dt}; V')$

$\int_0^T < v' + (\nu + \nu_r)Au + \mathcal{K}u_\epsilon + B_{u_\epsilon}u_\epsilon - 2\nu_r \nabla \times w_\varepsilon - f, v - u_\epsilon > dt=$

$\int_0^T < v' + u_\epsilon' - u_\epsilon' + (\nu + \nu_r)Au_\epsilon + \mathcal{K}u_\epsilon + B_{u_\epsilon}u_\epsilon - 2\nu_r \nabla \times w_\varepsilon - f, v - u_\epsilon > dt =$

$\int_0^T < u_\epsilon' + (\nu + \nu_r)Au_\epsilon + \mathcal{K}u_\epsilon + B_{u_\epsilon}u_\epsilon - 2\nu_r \nabla \times w_\varepsilon - f, v - u_\epsilon > dt+$

$$\int_0^T < v'-u'_\epsilon, v-u_\epsilon > dt = \frac{1}{\epsilon}\int_0^T < \beta v-\beta u_\epsilon, v-u_\epsilon > dt + \int_0^T < v'-u'_\epsilon, v-u_\epsilon > dt \geq 0$$

Logo

$$\int_0^T < \mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - v > dt \leq (\nu+\nu_r)\int_0^T < Au_\epsilon, v > dt - (\nu+\nu_r)\int_0^T < Au_\epsilon, u_\epsilon >$$
$$+\int_0^T < B_{u_\epsilon}u_\epsilon, v > - \int_0^T < B_{u_\epsilon}u_\epsilon, u_\epsilon > + \int_0^T < v' - 2\nu_r \nabla \times w_\varepsilon - f, v-u_\epsilon >$$

Tomando o lim sup em ambos os lados, das convergências (2.47) e (2.53) e levando em consideração o seguinte resultado

$$\liminf \int_0^T |||u_\epsilon(t)|||^2 dt \geq \int_0^T |||u(t)|||^2$$
$$-\liminf \int_0^T |||u_\epsilon(t)|||^2 \leq -\int_0^T |||u(t)|||^2$$
$$\limsup \left(-\int_0^T |||u_\epsilon|||^2\right) \leq -\int_0^T |||u(t)|||^2$$

Temos que

$$\limsup \int_0^T < \mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon > dt \leq \int_0^T < \chi, v > dt + (\nu+\nu_r)\int_0^T < Au, v > dt$$
$$-(\nu+\nu_r)\int_0^T |||u(t)|||^2 dt + \int_0^T < B_u u, v > dt + \int_0^T < v' - 2\nu_r \nabla \times w - f, v-u >$$

Temos de (1.10) que, podemos tomar $u_j \in K \cap D\left(\frac{d}{dt}, V'\right)$ tal que, $u_j \to u \in V$ e $\limsup_{j\to\infty}(u'_j, u_j - u) \leq 0$
Tomando $v = u_j$, e em seguida fazendo $j \to \infty$, temos que

$$\limsup \int_0^T < \mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon > dt - \int_0^T < \chi, u > \leq 0$$

logo

$$\limsup \int_0^T < \mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - u > \leq 0$$

Consideremos agora,

$$\begin{aligned} X_\epsilon = & \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + (\nu + \nu_r) \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T (\mathcal{K} u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \\ & \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt - 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot} w_\varepsilon, \varphi - u_\epsilon) dt - \int_0^T < f, \varphi - u_\epsilon >, \end{aligned} \tag{2.99}$$

com $\varphi \in L^4(0, T, V)$, $\varphi' \in L^{4/3}(0, T, V')$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \in K q.s.$

Multiplicando (2.81) por $\varphi - u_\epsilon$ e integrando de $[0, T]$, em seguida somando com (2.99) e sabendo que $\beta\varphi = 0$, temos que

$$\begin{aligned} X_\epsilon = & \int_0^T < \varphi', \varphi > dt - \int_0^T < \varphi', u_\epsilon > dt - \int_0^T < u'_\epsilon, \varphi > dt + \\ & \int_0^T < u'_\epsilon, u_\epsilon > dt - \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, \varphi - u_\epsilon > dt \end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned} X_\epsilon = & \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + \int_0^T < u'_\epsilon, -\varphi + u_\epsilon > dt \\ & - \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, -(u_\epsilon - \varphi) > dt \end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned} X_\epsilon = & \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + \int_0^T < u'_\epsilon, -(\varphi - u_\epsilon) > dt \\ & + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, u_\epsilon - \varphi > dt \end{aligned} \tag{2.102}$$

$$X_\epsilon = \int_0^T < \varphi' - u'_\epsilon, \varphi - u_\epsilon > dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, u_\epsilon - \varphi > dt \geq 0 \tag{2.103}$$

Pois β é monotono e $\displaystyle\int_0^T < \varphi' - u'_\epsilon, \varphi - u_\epsilon > = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} ||\varphi - u_\epsilon||^2 dt$
$= \dfrac{1}{2}(||\varphi(T) - u_\epsilon(T)||^2 - ||\varphi(0) - u_\epsilon(0)||^2) \geq 0.$

Pelo fato de que $\varphi(0) = 0$, hipótese de X_ϵ, e $u_\epsilon(0) = 0$, hipótese do problema.

De (2.91) e (2.103), segue que $X_\epsilon \geq 0$, logo

$$\begin{aligned} & \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + (\nu + \nu_r) \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T (\mathcal{K} u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \\ & \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt \geq 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times w_\varepsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T < f, \varphi - u_\epsilon >, \end{aligned} \tag{2.104}$$

Tomando o lim sup em ambos os lados, temos que

$$\limsup \int_0^T <\varphi', \varphi - u_\epsilon > dt = \int_0^T <\varphi', \varphi - u>, \text{ por (2.49)}.$$

Temos que $\limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt = \limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi)dt + \limsup - \int_0^T a(u_\epsilon, u_\epsilon)dt =$ $\limsup \int_0^T (\nabla u_\epsilon, \nabla\varphi) + \limsup \int_0^T -||u_\epsilon(t)||^2$, decorre de (2.49) que,
$\limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt \leq \int_0^T (\nabla u, \nabla\varphi) - \int_0^T ||u(t)||^2 = \int_0^T a(u,\varphi)dt - \int_0^T a(u,u)$

logo

$$\limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt \leq \int_0^T a(u, \varphi - u)dt.$$

Temos também que

$$\limsup \int_0^T (\mathcal{K}u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt = \limsup \int_0^T -(\mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - \varphi) = -\liminf \int_0^T (\mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - \varphi) \leq$$
$$-\int_0^T (\mathcal{K}u, u - \varphi) = \int_0^T (\mathcal{K}u, \varphi - u),$$

logo

$$\limsup \int_0^T (\mathcal{K}u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt = \int_0^T (\mathcal{K}u, \varphi - u).$$

Temos que,
$$\limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) = \limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi) + \limsup - \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon)$$
das propriedades da forma trilinear e das convergências anteriores, segue que
$$\limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) = \int_0^T b(u,u,\varphi)dt + 0 = \int_0^T b(u,u,\varphi)dt - \int_0^T b(u,u,u)dt$$

logo

$$\limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) = \int_0^T b(u, u, \varphi - u)$$

Temos também,

$$\limsup \int_0^T <\operatorname{rot} w_\varepsilon, \varphi - u_\epsilon) = \int_0^T <\operatorname{rot} w, \varphi - u>, \quad \text{decorrente de (2.47) e (2.53).}$$

Por fim temos, $\limsup \displaystyle\int_0^T < f, \varphi - u_\epsilon > dt = \int_0^T < f, \varphi - u > dt$, decorrente de (2.49).

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^T < \varphi', \varphi - u > dt + (\nu + \nu_r) \int_0^T a(u, \varphi - u) dt + \int_0^T (\mathcal{K}u, \varphi - u) dt + \\ \int_0^T b(u, u, \varphi - u) dt \geq 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot} w, \varphi - u) dt + \int_0^T < f, \varphi - u >, \end{aligned} \tag{2.105}$$

provando assim a primeira parte do teorema (2.1)

Façamos agora a segunda parte,

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon = \int_0^T < \phi', \phi - w_\varepsilon > dt + \nu_1 \int_0^T (\nabla \cdot e(w_\varepsilon), \phi - w_\varepsilon) dt + \int_0^T b(u_\epsilon, w_\varepsilon, \phi - w_\varepsilon) dt + \\ 4\nu_r \int_0^T (w_\varepsilon, \phi - w_\varepsilon) dt - 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times u_\epsilon, \phi - w_\varepsilon) - \int_0^T < g, \phi - w_\epsilon >, \end{aligned} \tag{2.106}$$

$\forall \phi \in L^2(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \phi' \in L^2(I, \mathbf{H}^{-1}(\Omega)), \phi(0) = 0; \phi(t) \in \widetilde{K} q.s.$

Multiplicando (2.81) por $\phi - w_\epsilon$ e integrando de $[0, T]$, em seguida somando com (2.106) e sabendo que $\widetilde{\beta}\phi = 0$, temos que

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon = \int_0^T < \phi', \phi > dt - \int_0^T < \phi', w_\varepsilon > dt - \int_0^T < w_\varepsilon', \phi > dt + \\ \int_0^T < w_\varepsilon', w_\varepsilon > dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T < \widetilde{\beta} w_\varepsilon - \widetilde{\beta}\phi, \phi - w_\varepsilon > dt \end{aligned} \tag{2.107}$$

Seguindo o mesmo processo feito para X_ϵ, concluimos que

$$Y_\varepsilon \geq 0 \tag{2.108}$$

Tomando o lim sup em (2.108) e levando em consideração as convergências obtidas, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_0^T < \phi', \phi - w > dt + \nu_1 \int_0^T \nabla \cdot e(w), \phi - w) dt + \int_0^T b(u, w, \phi - w) dt + \\ 4\nu_r \int_0^T (w, \phi - w) \geq 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times u, \phi - w) dt + \int_0^T < g, \phi - w >, \end{aligned} \tag{2.109}$$

Concluindo assim a demonstração do teorema 2.1

2.3 Prova do teorema 2.2

Para demonstar o teorema 2.2 primeiro provaremos o teorema 2.4. A fim de demonstrar a existência de solução fraca para o sistema (2.1) usaremos aproximações de Galerkin. Para esse propósito, consideremos uma base de autovetores do operador de Stokes $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$, assim como uma base hilbertiana de autovetores do $-\Delta$ $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Representamos por $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m]$ o subespaço de V gerado pelos vetores φ_1, ..., φ_m e por $W_m = [\phi_1, ..., \phi_m]$ o subespaço de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ gerado pelos vetores ϕ_1, ..., ϕ_m. Seja também o problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} (u'_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\nu+\nu_r)a(u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) \\ \\ +(\frac{1}{\epsilon}\beta u_{\epsilon m}, \varphi_r) = 2\nu_r(\nabla \times w_{\varepsilon m}, \varphi_r) + (f(t), \varphi_r) \qquad r = 1, ..., 3 \\ \\ (w'_{\varepsilon m}, \phi_r) + \nu_1 a(w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \nu_1(\nabla(\nabla \cdot w_{\varepsilon m}), \phi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \\ \\ 4\nu_r(w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m}, \phi_r) = 2\nu_r(\nabla \times u_{\epsilon m}, \phi_r) + (g(t), \phi_r)\; r = 1, ..., 3 \\ \\ u_{\epsilon m}(x,0) \to u_\epsilon(x,0), \quad \text{em} \quad V \\ w_{\varepsilon m}(x,0) \to w_\varepsilon(x,0), \quad \text{em} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.110}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (2.110) possui uma única solução $(u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m})$ tal que

$$u_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} g_{rm}(t)\varphi_r(x) \qquad\qquad w_{\varepsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{rm}(t)\phi_r(x) \tag{2.111}$$

estão definidas em um certo intervalo $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$. A primeira estimativa nos permite estender essa solução a todo intervalo $[0, T]$.

2.3.1 Primeira Estimativa

Procedendo de modo análogo ao da demostração do teorema 2.3, obtemos as mesmas estimativas

$$(u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I;H), \tag{2.112}$$

$$(u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I;V_4), \tag{2.113}$$

$$(u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I;V), \tag{2.114}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{2.115}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)). \tag{2.116}$$

2.3.2 Segunda Estimativa

Derivando a primeira equação do problema (2.110) em relação a t e depois multiplicando por $g_{rm}'(t)$ e em seguida somando de 1 até m em r, fazendo na segunda equação o mesmo processo da primeira, sendo que ao invés de multiplicarmos por $g_{rm}'(t)$ multiplicamos por $h_{rm}'(t)$, temos que:

$$\left|\begin{array}{l}
(u''_{\epsilon m},\varphi_r)+(\nu+\nu_r)a(u'_{\epsilon m},\varphi_r)+(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},\varphi_r)'+(B_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},\varphi_r)' \\[2ex]
+(\dfrac{1}{\epsilon}\beta u_{\epsilon m},\varphi_r)'=2\nu_r(\nabla\times w_{\varepsilon m},\varphi_r)'+(f'(t),\varphi_r) \qquad r=1,...,3 \\[4ex]
(w''_{\varepsilon m},\phi_r)+\nu_1 a(w'_{\varepsilon m},\phi_r)+\nu_1(\nabla(\nabla\cdot w_{\varepsilon m}),\phi_r)'+(B_{u_{\epsilon m}}w_{\varepsilon m},\phi_r)'+ \\[2ex]
4\nu_r(w'_{\varepsilon m},\phi_r)+\dfrac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta}w_{\varepsilon m},\phi_r)'=2\nu_r(\nabla\times u_{\epsilon m},\phi_r)'+(g'(t),\phi_r) \\
r=1,...,3 \\[4ex]
u_{\epsilon m}(x,0)\to u_\epsilon(x,0), \quad \text{em} \quad V \\
w_{\varepsilon m}(x,0)\to w_\varepsilon(x,0), \quad \text{em} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\[2ex]
u'_{\epsilon m}(0)\to u_1 \\
w'_{\epsilon m}(0)\to w_1
\end{array}\right. \tag{2.117}$$

$$
\begin{aligned}
&(u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (\nu + \nu_r)a(u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})\\
&+b(u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) \leq 2\nu_r(\nabla \times w'_{\varepsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (f'(t), u'_{\epsilon m})\\
&(w''_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m}) + \nu_1 a(w'_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m}) + \nu_1(\nabla(\nabla \cdot w'_{\varepsilon m}), w'_{\varepsilon m}) + b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})+\\
&b(u_{\epsilon m}, w'_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m}) + 4\nu_r(w'_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m}) \leq 2\nu_r(\nabla \times u'_{\epsilon m}, w'_{\varepsilon m}) + (g'(t), w'_{\varepsilon m})
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$

Pois, $((\beta u_{\epsilon m})', u'_{\epsilon m}) \geq 0$; $((\beta w_{\epsilon m})', w'_{\epsilon m}) \geq 0$ (ver Lions [13]

e

$$(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi)' = \left(\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) dx\right)' =$$

$$\int_\Omega M'(|e(u_{\epsilon m})|^2) 2.e_{ij}(u_{\epsilon m}) e'_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) + \int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2) e'_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi)$$

ou seja,

$$(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})' = 2\int_\Omega M'(|e(u_{\epsilon m})|^2)(e_{ij}(u_{\epsilon m}))^2 (e_{ij}(u'_{\epsilon m}))^2 + \int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2)(e_{ij}(u'_{\epsilon m}))^2 \geq 0$$

como $M' \geq 0$ (ver 1.1), segue que

$$(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) \geq 0$$

De (2.118) segue que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2 + (\nu + \nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2 \leq |b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})| + 2\nu_r(w'_{\varepsilon m}, \nabla \times u'_{\epsilon m}) + (f', u'_{\epsilon m})\\
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2 + \nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 + \nu_1|\nabla \cdot w'_{\varepsilon m}|^2 + 4\nu_r||w'_{\varepsilon m}||^2\\
&\leq |b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})| + 2\nu_r(\nabla \cdot u'_{\epsilon m}, w'_{\varepsilon m}) + (g', w'_{\varepsilon m})
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2 \leq |b(u'_{\epsilon m},u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})|+2\nu_r|w'_{\varepsilon m}|||u'_{\epsilon m}||+|f'||u'_{\epsilon m}|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2+\nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2+\nu_1|\nabla\cdot w'_{\varepsilon m}|^2+4\nu_r||w'_{\varepsilon m}||^2 \tag{2.120}$$

$$\leq |b(u'_{\epsilon m},w_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})|+2\nu_r||u'_{\epsilon m}|||w'_{\varepsilon m}|+|g'||w'_{\varepsilon m}|$$

Utilizando a desigualdade de Holder e o Lema (1.4) que é válido para $n=2$, temos que

$$|b(u'_{\epsilon m},u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})| \leq C||u'_{\epsilon m}||||u'_{\epsilon m}||||u_{\epsilon m}|| \tag{2.121}$$

$$|b(u'_{\epsilon m},w_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})| \leq C||u'_{\epsilon m}||^{1/2}|u'_{\epsilon m}|^{1/2}||w'_{\varepsilon m}||^{1/2}|w'_{\varepsilon m}|^{1/2}||w_{\varepsilon m}|| \tag{2.122}$$

De (2.120), (2.121) e (2.122), temos as seguintes inequações

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2 \leq C\,||u'_{\epsilon m}||\,|u'_{\epsilon m}|\,||u_{\epsilon m}||+2\nu_r|w'_{\varepsilon m}|||u'_{\epsilon m}||+|f'||u'_{\epsilon m}|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2+\nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq C||u'_{\epsilon m}||^{1/2}|u'_{\epsilon m}|^{1/2}||w'_{\varepsilon m}||^{1/2}|w'_{\varepsilon m}|^{1/2}||w_{\varepsilon m}|| \tag{2.123}$$

$$+2\nu_r||u'_{\epsilon m}|||w'_{\varepsilon m}|+|g'||w'_{\varepsilon m}|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2 \leq \sqrt{\frac{\nu}{4}}||u'_{\epsilon m}||C_\nu\,|u'_{\epsilon m}|\,||u_{\epsilon m}||+$$

$$C_{\nu_r}|w'_{\varepsilon m}|\sqrt{\frac{\nu_r}{4}}||u'_{\epsilon m}||+|f'||u'_{\epsilon m}|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2+\nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq \sqrt{\frac{\nu_r}{2}}||u'_{\epsilon m}||C_{\nu_r}|w'_{\varepsilon m}|++C_{\nu_1}|g'|\sqrt{\frac{\nu_1}{2}}|w'_{\varepsilon m}| \tag{2.124}$$

$$+\sqrt[4]{\nu}\sqrt[4]{\nu_1}||u'_{\epsilon m}||^{1/2}||w'_{\varepsilon m}||^{1/2}C_{(\nu,\nu_1)}|u'_{\epsilon m}|^{1/2}|w'_{\varepsilon m}|^{1/2}||w_{\varepsilon m}||$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2 + (\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2 \leq \frac{\nu}{8}||u'_{\epsilon m}||^2 + C_\nu\,|u'_{\epsilon m}|^2\,||u_{\epsilon m}||^2 +$$
$$C_\nu|w'_{\varepsilon m}|^2 + \frac{\nu_r}{8}||u'_{\epsilon m}||^2 + \frac{1}{2}|f'|^2 + \frac{1}{2}|u'_{\epsilon m}|^2$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2 + \nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq \frac{\nu_r}{4}||u'_{\epsilon m}|| + C_{(\nu_r)}|w'_{\varepsilon m}|^2 +$$
$$+C_{\nu_1}|g'|^2 + \frac{\nu_1}{4}|w'_{\varepsilon m}|^2 + \frac{\sqrt{\nu}}{2}\frac{\sqrt{\nu_1}}{2}||u'_{\epsilon m}||||w'_{\varepsilon m}|| + C_{(\nu,\nu_1)}|u'_{\epsilon m}||w'_{\varepsilon m}|||w_{\varepsilon m}||^2 \tag{2.125}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2 + \frac{7(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2 \leq +C + C_\nu\,|u'_{\epsilon m}|^2\,||u_{\epsilon m}||^2 + C_\nu|w'_{\varepsilon m}|^2 + \frac{1}{2}|u'_{\epsilon m}|^2$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2 + \nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq \frac{\nu_r}{4}||u'_{\epsilon m}|| + C_{(\nu_r)}|w'_{\varepsilon m}|^2 + C_{\nu_1}|g'|^2 + \frac{\nu_1}{4}|w'_{\varepsilon m}| + \tag{2.126}$$
$$\frac{\nu}{4}||u'_{\epsilon m}|| + \frac{\nu_1}{4}||w'_{\varepsilon m}|| + C_{(\nu,\nu_1)}(|u'_{\epsilon m}|^2 + |w'_{\varepsilon m}|^2)||w_{\varepsilon m}||^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2 + \frac{7(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2 \leq +C + C_\nu|u'_{\epsilon m}|^2\,||u_{\epsilon m}||^2 + C_\nu|w'_{\varepsilon m}|^2 + \frac{1}{2}|u'_{\epsilon m}|^2$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2 + \nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq C + \frac{2(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}|| + C_{(\nu_r,\nu_1)}|w'_{\varepsilon m}|^2 + \frac{\nu_1}{4}||w'_{\varepsilon m}|| \tag{2.127}$$
$$C_{(\nu,\nu_1)}(|u'_{\epsilon m}|^2 + |w'_{\varepsilon m}|^2)||w_{\varepsilon m}||^2$$

Somando $(2.127)_1$ e $(2.127)_2$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) + \frac{5(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2 + \nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq C + C(|u'_{\epsilon m}|^2 + |w'_{\varepsilon m}|^2)$$
$$C||w_{\varepsilon m}||^2(|u'_{\epsilon m}|^2 + |w'_{\varepsilon m}|^2) + C|u'_{\epsilon m}|^2||u_{\epsilon m}||^2 + |w'_{\epsilon m}|^2||u_{\epsilon m}||^2 \tag{2.128}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) + \frac{5(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2 + \nu_1||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq C +$$
$$(C + C||w_{\varepsilon m}||^2 + C||u_{\varepsilon m}||^2)(|u'_{\varepsilon m}|^2 + |w'_{\varepsilon m}|^2) \tag{2.129}$$

Integrando de 0 a t, utilizando a imersão $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ e as hipóteses (2.13) e (2.14) do teorema 2.3

$$\frac{1}{2}(||u'_{\epsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) + \frac{5(\nu+\nu_r)}{8}\int_0^t ||u'_{\epsilon m}||^2 + \nu_1 \int_0^t ||w'_{\varepsilon m}||^2 \leq C+$$
$$C\int_0^t (1 + ||w_{\varepsilon m}||^2 + ||u_{\varepsilon m}||^2)(||u'_{\varepsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) \tag{2.130}$$

$$\frac{1}{2}(||u'_{\epsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) \leq C + \int_0^t (1 + ||w_{\varepsilon m}||^2 + ||u_{\varepsilon m}||^2)(||u'_{\varepsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) \tag{2.131}$$

Utilizando a desigualdade de Gronwall, segue que

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I;H), \tag{2.132}$$

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I;V), \tag{2.133}$$

$$(w'_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{2.134}$$

$$(w'_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em} L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)). \tag{2.135}$$

Utilizando as convergências obtidas e seguindo os mesmos passos da demonstração do teorema 2.3, segue que

$$u'_\epsilon + (\nu+\nu_r)Au_\epsilon + \mathcal{K}u_\epsilon + B_{u_\epsilon}u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon = 2\nu_r \nabla \times w_\varepsilon + f \text{ em } L^2(I;V), \tag{2.136}$$

$$w'_\varepsilon + \nu_1 \nabla \cdot e(w_\varepsilon) + B_{u_\epsilon}w_\varepsilon + 4\nu_r w_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta u_\varepsilon = 2\nu_r \nabla \times u_\epsilon + g \text{ em } L^2\big(I;(\mathbf{H}_0^1(\Omega)^2\big)\,. \tag{2.137}$$

Concluimos assim a prova do Teorema 2.4

Provemos agora o Teorema 2.2

Das estimativas obtidas anteriormente, do Teorema de Banach-Steinhaus e usando os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.1, existem subsequências $(u_\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ e $(w_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$, tais que convergem para u e w, com $\epsilon, \varepsilon \to 0$, concluimos também que $u(t) \in K$ q.s. e $w(t) \in \widetilde{K}$ q.s.

utilizando o fato que $\limsup_{\epsilon \to 0} \int_0^T < \mathcal{K} u_\epsilon, u_\epsilon - u > dt \leq 0$,

mostremos que u é solução do Teorema 2.2, temos que

$$\left| \begin{array}{l} (u'_\epsilon, \hat{v}) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, \hat{v}) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, \hat{v}) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, \hat{v}) + \frac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon, \hat{v}) \\ = 2\nu_r(\nabla \times w_\epsilon, \hat{v}) + (f, \hat{v}) \qquad\qquad \forall \hat{v} \in V' \\ u_\epsilon(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{2.138}$$

Fazendo, $\hat{v} = v - u_\epsilon, \quad v \in K$, temos que

$$\begin{aligned} &(u'_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v - u_\epsilon) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, v - u_\epsilon) + \\ &\frac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon - \beta v, v - u_\epsilon) = 2\nu_r(\nabla \times w_\epsilon, v - u_\epsilon) + (f, v - u_\epsilon) \end{aligned} \tag{2.139}$$

Como β é monotono,

$$\begin{aligned} &(u'_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, v) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v - u_\epsilon) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, v) \\ &-2\nu_r(\nabla \times w_\epsilon, v - u_\epsilon) - (f, v - u_\epsilon) \geq (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, u_\epsilon) \end{aligned} \tag{2.140}$$

$$X_\epsilon^v \geq (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, u_\epsilon), \ \forall v \in K$$

portanto,

$$\begin{aligned} X_\epsilon^v = &(u'_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, v) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v - u_\epsilon) \\ &+ b(u_\epsilon, u_\epsilon, v) - 2\nu_r(\nabla \times w_\epsilon, v - u_\epsilon) - (f, v - u_\epsilon). \end{aligned} \tag{2.141}$$

Seja $\psi \in C^0(0.T)$, com $\psi \geq 0$. Então $v\varphi \in C^0([0,T]; V')$ $\forall v \in V'$.

Segue que

$$\int_0^T \psi(u_\epsilon', v-u_\epsilon) + (\nu+\nu_r)\int_0^T \psi a(u_\epsilon, v) + \int_0^T \psi(\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v-u_\epsilon) +$$
$$\int_0^T \psi\ b(u_\epsilon, u_\epsilon, v) - 2\nu_r \int_0^T \psi(\operatorname{rot} w_\epsilon, v-u_\epsilon) - \int_0^T \psi(f, v-u_\epsilon) \geq (\nu+\nu_r)\int_0^T \psi a(u_\epsilon, u_\epsilon) \tag{2.142}$$

Tomando o lim sup em ambos os lados, levando em consideração as estimativas obtidas e utilizando a monotonicidade de $\mathcal{K}$, temos que

$$\begin{aligned} &(u', v-u) + (\nu+\nu_r)a(u, v-u) + (\mathcal{K}_u u, v-u) + b(u,u,v-u) \geq \\ &2\nu_r(\nabla \times w, v-u) + (f, v-u) \quad \forall v \in K \text{q.s. em t.} \end{aligned} \tag{2.143}$$

Seguimos os mesmo passos para

$$\begin{aligned} &(w_\varepsilon', \bar{v}) + \nu_1(\nabla \cdot e(w_\varepsilon), \bar{v}) + b(u_\epsilon, w_\varepsilon, \bar{v}) + 4\nu_r(w_\varepsilon, \bar{v}) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta w_\varepsilon, \bar{v}) = \\ &2\nu_r(\nabla \times u_\epsilon, \bar{v}) + (g, \bar{v}) \quad \forall \ \bar{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.144}$$

Fazendo $\bar{v} = \widetilde{v} - w_\varepsilon$, $\widetilde{v} \in \widetilde{K}$, utilizando a monotonicidade de β e tomando o lim sup em ambos os lados, segue-se que

$$\begin{aligned} &(w', \widetilde{v} - w) + \nu_1(\nabla \cdot e(w), \widetilde{v} - w) + b(u, w, \widetilde{v} - w) + 4\nu_r(w, \widetilde{v} - w) \geq \\ &2\nu_r(\nabla \times u, \widetilde{v} - w) + (g, \widetilde{v} - w) \quad \forall \ \widetilde{v} \in \widetilde{K} \text{ q.s. em t.} \end{aligned} \tag{2.145}$$

2.3.3 Unicidade

Sejam $\{u_1, w_1\}$ e $\{u_2, w_2\}$ duas soluções de (2.143) e (2.145). Definamos $u = u_2 - u_1$, $w = w_2 - w_1$ em $t \in (0, T)$.
Fazendo $u = u_1$, $v = u_2$ e $w = w_2$ em (2.143) segue que

$$(u_1', u) + (\nu+\nu_r)a(u_1, u) + (\mathcal{K}_{u_1} u_1, u) + b(u_1, u_1, u) \geq 2\nu_r(\operatorname{rot} w_2, u) + (f, u) \tag{2.146}$$

Fazendo agora em (2.143) $u = u_2$, $v = u_1$ e $w = w_1$ segue que

$$-(u_2', u) - (\nu+\nu_r)a(u_2, u) - (\mathcal{K}_{u_2}u_2, u) - b(u_2, u_2, u) \geq -2\nu_r(\operatorname{rot} w_1, u) - (f, u) \quad (2.147)$$

Somando (2.146) e (2.147) temos que

$$\begin{aligned} &-(u', u) - (\nu + \nu_r)a(u, u) - (\mathcal{K}_{u_2}u_2 - \mathcal{K}_{u_1}u_1, u_2 - u_1) - b(u_2, u_2, u) \\ &+b(u_1, u_1, u) \geq -2\nu_r(\operatorname{rot} w, u), \end{aligned} \quad (2.148)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &(u', u) + (\nu + \nu_r)a(u, u) + (\mathcal{K}_{u_2}u_2 - \mathcal{K}_{u_1}u_1, u_2 - u_1) + b(u_2, u_2, u) \\ &-b(u_1, u_1, u) \leq 2\nu_r(\operatorname{rot} w, u) \end{aligned} \quad (2.149)$$

Como $\mathcal{K}$ é monótono e $b(u_2, u_2, u) - b(u_1, u_1, u) = b(u, u_2, u)$ temos que

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 dt + (\nu + \nu_r)\int_0^t ||u||^2 dt \leq \int_0^t |b(u, u_2, u)| dt + \int_o^t 2\nu_r(\operatorname{rot} w, u) \quad (2.150)$$

Agora, fazendo em (2.145) $w = w_1$, $\widetilde{v} = w_2$ e $u = u_2$, segue que

$$(w_1', w) + \nu_1(\nabla \cdot e(w_1), w) + b(u_2, w_1, w) + 4\nu_r(w_1, w) \geq 2\nu_r(\nabla \times u_2, w) + (g, w). \quad (2.151)$$

Fazendo também em (2.145) $w = w_2$, $\widetilde{v} = w_1$ e $u = u_1$ segue que

$$-(w_2', w) - \nu_1(\nabla \cdot e(w_2), w) - b(u_1, w_2, w) - 4\nu_r(w_2, w) \geq 2\nu_r(\nabla \times u_1, w) - (g, w). \quad (2.152)$$

Somando (2.151) e (2.152) e sabendo que $-b(u_1, w_2, w) + b(u_2, w_1, w) = -b(u, w_2, w)$, temos que

$$-(w', w) - \nu_1(\nabla \cdot e(w), w) - b(u, w_2, w) - 4\nu_r(w, w) \geq -2\nu_r a(\nabla \times u, w), \quad (2.153)$$

ou seja,

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|dt + \nu_1 \int_0^t ||w||^2 dt + \nu_1 \int_0^t |\nabla \cdot w|^2 + 4\nu_r \int_0^t |w|^2 \leq \tag{2.154}$$
$$\int_0^t |b(u, w_2, w)| + 2\nu_r \int_0^t (\nabla \times u, w).$$

Somando (2.150) e (2.154), aplicando o teorema fundamental do cálculo no primeiro termo de ambas as equações e sabendo que $u(0) = 0$, $w(0) = 0$, pois $u \in K$ e $w \in \widetilde{K}$, temos que

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{2}|w(t)|^2 + (\nu + \nu_r) \int_0^t ||u(t)||^2 dt + \nu_1 \int_0^t ||w(t)||^2 dt + \leq \tag{2.155}$$
$$\int_0^t |b(u, u_2, u)|dt + \int_0^t |w|||u||dt + \int_0^t |b(u, w_2, w)|dt + 2\nu_r \int_0^t ||u|||w|dt$$

Da desigualdade (2.122), temos que

$$|b(u, u_2, u)| \leq C||u|||u|||u_2|| \tag{2.156}$$

$$|b(u, u_2, u)| \leq C||u||^{1/2}|u|^{1/2}||w||^{1/2}|w|^{1/2}||w_2|| \tag{2.157}$$

Decorre de (2.155), (2.156) e (2.157) que

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{2}|w(t)|^2| + (\nu + \nu_r) \int_0^t ||u(t)||^2 dt + \nu_1 \int_0^t ||w(t)||^2 dt \leq \int_0^t C||u|||u|||u_2||dt \tag{2.158}$$
$$+ \int_0^t |w|||u||dt + \int_0^t C||u||^{1/2}|u|^{1/2}||w||^{1/2}|w|^{1/2}||w_2||dt + 2\nu_r \int_0^t ||u|||w|dt.$$

Aplicando a desigualdade de young em (2.158), segue que

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{2}|w(t)|^2 + (\nu + \nu_r) \int_0^t ||u(t)||^2 dt + \nu_1 \int_0^t ||w(t)||^2 dt \leq \tag{2.159}$$
$$C \int_0^t (||u_2(t)||^2 + ||w_2(t)||^2)(|u(t)|^2 + |w(t)|^2)dt.$$

Aplicando em (2.159) a desigualdade de gronwall, temos que

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq 0 \exp c \int_0^t (||u_2||^2 + ||w_2||^2), \tag{2.160}$$

ou seja,

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq 0. \tag{2.161}$$

Logo,

$$|u(t)| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2$$
$$|w(t)| = 0 \Leftrightarrow w(t) = 0 \Leftrightarrow w_1 = w_2$$

Provando assim o teorema 2.2 $\square$

Capítulo 3

Sobre um Fluido Micropolar Fortemente Dilatante

Motivados pelos resultados obtidos com o sistema (2.1), consideraremos neste capítulo a análise da seguinte inequação:

$$\left|\begin{array}{rcl} u' - \nabla \cdot [2(\nu + \nu_r + M(|e(u)|_E^2))e(u)] + (u.\nabla)u & + & \nabla p \\ & \geq & 2\nu_r \nabla \times w + f \ \text{ em } Q_T, \\ w' - \nu_1 \nabla \cdot [M(|e(w)|_E^2)e(w)] + (u.\nabla)w + 4\nu_r w & \geq & 2\nu_r \nabla \times u + g \ \text{ em } Q_T, \\ \nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

em que ν, ν_1 e ν_r são constantes positivas. Notamos que nesse sistema, consideramos uma não-linearidade na segunda inequação, análoga ao tensor de estresse da primeira.

3.1 Definições e Resultados

Neste capítulo vamos considerar as mesmas formas $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e $b : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas no capítulo anterior em (2.2) e (2.3), respectivamente. Chamamos a atenção do leitor para as propriedades dessas formas dadas em (2.4) e (2.5). Também consideraremos

$$Au = -\Delta u, \quad B_u v = (u \cdot \nabla)v \quad \forall u, v \in V. \quad \text{Assim como,}$$

$$\mathcal{K}u = -\nabla \cdot M(|e(u)|_E^2)e(u) \quad \forall u \in V \cap V_4,$$

definido em (2.8). Notamos a validade de (2.9)-(2.11), bem como a monotonia de $\mathcal{K}$ conforme a observação 2.1. A seguir, elencaremos os teoremas referentes ao sistema de inequações 3.1

Teorema 3.1. *Supondo que $n \leq 3$, $f \in L^{4/3}(I; V')$, $g \in L^{4/3}(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ e que a "hipotese de compatibilidade"seja válida, então existe um par de funções (u, w) tal que*

$$u \in L^4(I; V \cap V_4) \cap L^\infty(I; H),\ w \in L^2(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \cap L^4(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,4}(\Omega))$$
$$u(t) \in K, q.s. \text{ e } w(t) \in \widetilde{K}, q.s.,$$

satisfazendo

$$
\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\int_0^T(\varphi',\varphi-u)dt+(\nu+\nu_r)\int_0^T a(u,\varphi-u)dt+\int_0^T b(u,u,\varphi-u)dt+ \\
\displaystyle\int_0^T M(|e(u)|^2)e_{ij}(u)e_{ij}(\varphi-u)dt\geq 2\nu_r\int_0^T(\nabla\times w,\varphi-u)dt+ \\
\displaystyle\int_0^T(f,\varphi-u)dt, \\
\forall\varphi\in L^4(I;V\cap V_4),\varphi'\in L^{4/3}(I;(V\cap V_4)'),\varphi(0)=0,\varphi(t)\in K\quad q.s. \\
\displaystyle\int_0^T(\phi',\phi-w)dt+\nu_1\int_0^T(\mathcal{K}_{w(t)}w(t),\phi-w)dt\int_0^T b(u,u,\varphi-u)dt \\
+4\nu_r\int_0^T(w,\phi-w)dt\geq 2\nu_r\int_0^T(\nabla\times u,\varphi-w)dt+ \\
\displaystyle\int_0^T(g,\phi-w)dt, \\
\forall\phi\in L^4(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)),\phi'\in L^{4/3}(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)),\phi(0)=0,\phi(t)\in\widetilde{K}\quad q.s. \\
u(0)=u_0,\quad w(0)=w_0
\end{array}\right. \tag{3.2}
$$

Teorema 3.2. *Assumindo a hipótese de compatibilidade, supondo n=2, n=3 e*

$$f\in L^4(I;V),f'\in L^{4/3}(I;V'),g\in L^2(I;H_0^1(\Omega)),g'\in L^2(I;H^{-1}(\Omega))$$

$$u_0\in K,w_0\in\widetilde{K},$$

supondo também que

$$
\begin{gathered}
(f(0),v)+2\nu_r(\nabla\times w_0,v)-(\nu+\nu_r)a(u_0,v)-b(u_0,u_0,v)-(K_{u_0}u_0,v)=(u_1,v) \\
\forall\ v\in V\,e\ para\ algum\ \ u_1\in H
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

$$
\begin{gathered}
(g(0),\widetilde{v})+2\nu_r(\nabla\times u_0,\widetilde{v})-\nu_1(K_{w(t)}w(t),\widetilde{v})-b(u_0,w_0,\widetilde{v})-4\nu_r(w_0,\widetilde{v}) \\
-4\nu_r(w_0,\widetilde{v})=(w_1,\widetilde{v})\ \forall\ v\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\ \ e\ para\ algum\ \ w_1\in\boldsymbol{L}^2(\Omega).
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Então existe um único par de funções (u,w) tal que

$$u \in L^4(I; V \cap V_4) \cap L^\infty(I; H), u' \in L^2(I; V) \cap L^\infty(I; H)$$

$$w \in L^4(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,4}(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^2(\Omega)), w' \in L^2(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$$

$$u(t) \in K, w(t) \in \widetilde{K}, \forall t \in [0,T],$$

satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} (u'(t), v-u(t)) + (\nu+\nu_r)a(u(t), v-u(t)) + (\mathcal{K}_{u(t)}u(t), v-u(t)) + \\ b(u(t), u(t), v-u(t)) \geq 2\nu_r(\nabla \times w(t), v-u(t)) + (f(t), v-u(t)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall v \in K.q.s, em\ \ t \\ \\ (w'(t), \widetilde{v}-w(t)) + \nu_1\mathcal{K}_{w(t)}w(t), \widetilde{v}-w(t)) + b(u(t), w(t), \widetilde{v}-w(t)) + \\ +4\nu_r(w(t), \widetilde{v}-w(t)) \geq 2\nu_r(\nabla \times u(t), \widetilde{v}-w(t)) + (g(t), \widetilde{v}-w(t)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall \widetilde{v} \in \widetilde{K}, q.s, em\ \ t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u(0) = u_0,\ \ w(0) = w_0 \end{array}\right. \tag{3.5}$$

As provas dos teoremas (3.1) e (3.2) serão dados pelo método da penalização, que consiste em adicionar um termo singular chamado penalização ao problema (3.1), dependendo de um parâmetro $\epsilon, \varepsilon > 0$, Resolvemos o problema misto em Q para o operador penalização e as estimativas obtidas para a solução local da equação penalizada, permite-nos passar o limite, quando ϵ, ε tenderem para zero, de modo a obter um par de funções (u, w) que será a solução do problema.

O problema penalizado associado ao sistema (3.1) é dado por

$$\left|\begin{array}{l} u'_\epsilon - \nabla\cdot[2(\nu+\nu_r+M(|e(u_\epsilon)|^2))e(u_\epsilon)] + (u_\epsilon.\nabla)u_\epsilon + \dfrac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon + \nabla p \geq 2\nu_r\nabla\times w_\varepsilon + f \text{ em} Q_T \\ w'_\varepsilon - \nu_1\nabla\cdot[M(|e(w_\varepsilon)|^2)e(w_\varepsilon)] + (u_\epsilon.\nabla)w_\varepsilon + 4\nu_r w_\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta}w_\varepsilon \geq 2\nu_r\nabla\times u_\epsilon + g \text{ em } Q_T \\ \qquad\qquad\qquad \operatorname{div} u_\epsilon = 0 \qquad \text{em } Q_T \\ \qquad\qquad\qquad u_\epsilon = 0 \qquad \text{em } \Sigma_T \\ \qquad\qquad\qquad w_\varepsilon = 0 \qquad \text{em } \Sigma_T \\ \qquad\qquad\qquad u_\epsilon(x,0) = 0 \quad \text{em } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad w_\varepsilon(x,0) = 0 \quad \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Definição 3.1. *Sejam* $u_{\epsilon 0} \in V, w_{\varepsilon 0} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$*, bem como* $f \in L^{4/3}(I,(V \cap V_4)')$ *e* $g \in \boldsymbol{L}^{4/3}(I;(\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,4}(\Omega))')$*. Uma solução fraca para (3.6) consiste de um par de funções* $\{u_\epsilon, w_\varepsilon\}$*, tal que* $u_\epsilon \in L^4(I;V \cap V_4) \cap L^\infty(I;H)$*,* $w_\varepsilon \in L^\infty(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega)) \cap L^2(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,4}(\Omega))$*, satisfazendo*

$$\left|\begin{array}{l} (u'_\epsilon, \varphi) + (\nu+\nu_r)a(u_\epsilon,\varphi) + b(u_\epsilon,u_\epsilon,\varphi) + \langle K_{u_\epsilon}u_\epsilon,\varphi\rangle + \dfrac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon,\varphi) \\ = 2\nu_r(\operatorname{rot} w_\epsilon,\varphi) + (f,\varphi), \forall \varphi \ \in \mathcal{D}(0,T;V\cap V_4) \\ \\ (w'_\varepsilon,\phi) + \nu_1 a(w_\epsilon,\phi) + \nu_1(K_{w_\varepsilon}w_\varepsilon,\phi) + b(u_\epsilon,w_\varepsilon,\phi) \\ +4\nu_r(w_\varepsilon,\phi) + \frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta} w_\varepsilon,\phi) = 2\nu_r(\operatorname{rot} u_\epsilon,\phi) + (g,\phi), \forall\phi \ \in \mathcal{D}(0,T;\mathcal{D}(\Omega)) \\ \\ u_\epsilon(0)=0, \quad w_\varepsilon(0)=0 \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Teorema 3.3. *Se* $f \in L^{4/3}(I;V')$*,* $g \in L^{4/3}(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$*,* $u_{\epsilon 0} \in V$ *e* $w_{\varepsilon 0} \in H_0^1(\Omega)$*, então para cada* $0 < \epsilon, \varepsilon < 1$ *existe um par de funções* $(u_\epsilon, w_\varepsilon)$ *definidas em* $(x,t) \in Q_T$*, solução para o problema (3.6) no sentido da definição (3.1).*

Teorema 3.4. *Assumindo que* $n = 3$ *e* $f \in L^4(I;V), f' \in L^{4/3}(I;V'), g \in L^2(I;H_0^1(\Omega))$*,* $g' \in L^2(I;H^{-1}(\Omega))$ *. Então para cada* $0 < \epsilon, \varepsilon < 1$*,* $u_{\epsilon 0} \in V$ *e* $w_{\varepsilon 0} \in H_0^1$*, existe um par de funções* $(u_\epsilon, w_\varepsilon)$ *definidas para* $(x,t) \in Q_T$*, solução para o problema (3.6) no sentido da definição (3.1).*

3.2 Existência de Solução

3.2.1 Prova do Teorema 3.1

Para demonstrar o Teorema (3.1) primeiramente provaremos o teorema (3.3). A fim de demonstrar a existência de solução fraca para o sistema (3.1), vamos nos deter a princípio na demonstração de existência de solução para o sistema (3.6), para isso usaremos aproximações de Galerkin. Consideremos uma base de autovetores do operador de Stokes dada por $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset V$, bem como uma base hilbertiana de autovetores dada por $(\phi_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Sejam $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m] \subset V$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ e $W_m = [\phi_1, ..., \phi_m] \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{\phi_1, ..., \phi_m\}$. Consideremos agora o sistema aproximado, com $r = 1, ..., m$

$$\left|\begin{array}{l} (u'_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\nu + \nu_r)a(u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) + \\ \\ (\frac{1}{\epsilon}\beta u_{\epsilon m}, \varphi_r) = 2\nu_r(\operatorname{rot} w_{\varepsilon m}, \varphi_r) + (f(t), \varphi_r) \qquad r = 1, ..., 3 \\ \\ (w'_{\varepsilon m}, \phi_r) + \nu_1(\mathcal{K}_{w_{\varepsilon m}} w_{\varepsilon m}(t), \varphi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}, \phi_r) + 4\nu_r(w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \\ \\ \frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m}, \phi_r) = 2\nu_r(\operatorname{rot} u_{\epsilon m}, \phi_r) + (g(t), \phi_r) \qquad r = 1, ..., 3 \\ \\ u_{\epsilon m}(x, 0) \to u_\epsilon(x, 0), \quad \text{forte em} \quad V \cap V_4 \\ w_{\varepsilon m}(x, 0) \to w_\varepsilon(x, 0), \quad \text{forte em} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.8}$$

Sabemos que (3.8) possui uma solução local (u_m, w_m), definida no intervalo $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$, em que

$$u_m(x,t) = \sum_{r=1}^{m} g_{r_m}(t)\varphi_r(x) \quad \text{e} \quad w_m(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{r_m}(t)\phi_r(x). \tag{3.9}$$

A primeira estimativa, feita a seguir, nos permite estender essa solução a todo intervalo $[0, T]$

3.2.2 Primeira Estimativa

Multiplicamos ambos os membros da equação $(3.8)_1$ por g_{r_m} e de $(3.8)_2$ por h_{r_m}. Em seguida somamos de $r = 1$ até $r = m$ para obter

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2 + (\nu + \nu_r)\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + \int_\Omega M\left(|e(u_{\epsilon m}(t))|_E^2\right)|e_{ij}(u_{\epsilon m}(t))|^2\,dx \\ &\leq 2\nu_r|w_{\varepsilon m}(t)|\|u_{\epsilon m}(t)\| + \|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\|, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_{\varepsilon m}(t)|^2+\nu_1\int_\Omega M\left(|e(w_{\varepsilon m}(t))|_E^2\right)|e_{ij}(w_{\varepsilon m}(t))|^2dx+4\nu_r|w_{\varepsilon m}(t)|^2\\&\leq 2\nu_r\|u_{\epsilon m}(t)\||w_{\varepsilon m}(t)|+\|g(t)\|_{H^{-1}}\|w_{\varepsilon m}(t)\|,\end{aligned}\tag{3.11}$$

visto que $b(u_{\epsilon m},u_{\epsilon m},u_{\epsilon m})=b(u_{\epsilon m},w_{\varepsilon m},w_{\varepsilon m})=0$, $\forall u(t)\in V$ e $\forall w(t)\in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (veja *J. L. Lions* [13], [1969]). Além disso, $|\nabla\times u_{\epsilon m}|=|\nabla u_{\epsilon m}|=\|u_{\epsilon m}\|$ e $(\nabla\times w_{\varepsilon m},u_{\epsilon m})=(w_{\varepsilon m},\nabla\times u_{\epsilon m})$ (veja *G. Lukaszewicz* [8], [1999] p.116) e $(\beta u_{\epsilon m}(t),u_{\varepsilon m})\geq 0$, pois β é monotono e $0\in K$(ver *J. L. Lions* [13], [1969]). Agora usamos a desigualdade de Young e obtemos de (3.10) e (3.11), respectivamente

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2+(\nu+\nu_r)\|u_{\epsilon m}(t)\|^2+\nu_2\|u_{\epsilon m}(t)\|^4+\nu_3\|u_{\epsilon m}\|_{V_4}^4\\&\leq\frac{\nu_r}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2+2\nu_r|w_{\varepsilon m}(t)|^2+\frac{\nu_2}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^4+c_{\nu_2}\|f(t)\|_{V'}^{4/3},\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_{\epsilon m}(t)|^2+\nu_4\|w_{\varepsilon m}(t)\|^4+\nu_5\|w_{\varepsilon m}\|_{W_0^{1,4}(\Omega)}^4+4\nu_r|w_{\varepsilon m}(t)|^2\\&\leq\frac{\nu_r}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2+2\nu_r|w_{\varepsilon m}(t)|^2+\frac{\nu_4}{2}\|w_{\varepsilon m}(t)\|^4+c_{\nu_4}\|g(t)\|_{H^{-1}}^{4/3}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

De fato, devido a desigualdade de Korn (1.3), a imersão $L^4(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a hipótese (1.1) sobre M, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(|e(u_{\epsilon m}(t))|^2\right)|e_{ij}(u_{\epsilon m}(t))|^2dx &\overset{(1.1)}{\geq} \frac{C_1}{2}\|e(u_{\epsilon m})\|_{L^4(\Omega)}^4\\&\overset{(1.3)}{\geq} C|e(u_{\epsilon m})|^4\\&\geq \nu_2\|u_{\epsilon m}\|^4,\end{aligned}$$

ou seja, $\displaystyle\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(|e(u_{\epsilon m}(t))\,|^2\right)|e_{ij}(u_{\epsilon m}(t))|^2\,dx \overset{(1.1)}{\geq} \nu_3\|u_{\epsilon m}\|_{V_4}^4.$

De modo análogo obtemos

$$\frac{\nu_1}{2}\int_\Omega M\left(|e(w_{\varepsilon m}(t))|^2\right)|e_{ij}(w_{\varepsilon m}(t))|^2 dx \geq \nu_4\|w_{\varepsilon m}\|^4,$$

$$\frac{\nu_1}{2}\int_\Omega M\left(|e(w_{\varepsilon m}(t))\,|^2\right)|e_{ij}(w_{\varepsilon m}(t))|^2\,dx \geq \nu_5\|u_{\epsilon m}\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)}.$$

Somamos as inequações (3.12) e (3.13) e integramos de 0 a t, com $0 \leq t \leq T$, para obter

$$\begin{aligned}&\left(|u_{\epsilon m}(t)|^2 + |w_{\varepsilon m}(t)|^2\right) + \nu_2\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^4 ds + 2\nu_3\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^4_{V_4} ds\\ &+\nu_4\int_0^t \|w_{\varepsilon m}(s)\|^4 ds + 2\nu_5\int_0^t \|w_{\varepsilon m}(s)\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)} ds \leq C.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, seguem da inequação (3.14) as seguintes limitações

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;H), \tag{3.15}$$

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^4(I;V), \tag{3.16}$$

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^4\left(I;V_4\right), \tag{3.17}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^\infty\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.18}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^4\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right). \tag{3.19}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^4\left(I;\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right). \tag{3.20}$$

3.2.3 Segunda Estimativa

Sejam $P_m : V \to V_m$ a projeção ortogonal de V em V_m, dada por

$$P_m u = \sum_{j=1}^m (u,\varphi_j)\varphi_j,$$

assim como sua adjunta $P_m^* : V' \to V'$. Notamos que $P_m^* u_m' = u_m'$. Além disso, devido a escolha da base especial (φ_ν), temos que

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|P_m^*\|_{\mathcal{L}(V',V')} \leq 1. \tag{3.21}$$

No que segue, omitiremos o parâmetro t em alguns momentos. Segue de $(3.8)_1$, e das propriedades (2.9), (2.10) e (2.11)

$$u'_{\epsilon m}=-\frac{1}{\epsilon}P_m^*\beta u_{\epsilon m}-(\nu+\nu_r)P_m^*Au_{\epsilon m}-P_m^*\mathcal{K}u_{\epsilon m}-P_m^*B_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m}+2\nu_r P_m^*\nabla\times w_{\varepsilon m}+P_m^*f. \quad (3.22)$$

Agora vamos limitar cada termo do segundo membro de (3.22). Primeiramente, da estimativa (3.16) obtemos

$$(Au_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I;V') \hookrightarrow L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right). \quad (3.23)$$

Agora tomemos $u_{\epsilon m}(t), v(t) \in V$. Devido a (2.11), a desigualdade de Hölder e a (3.17), obtemos do mesmo modo feito no capítulo anterior a seguinte estimativa

$$(\mathcal{K}u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right). \quad (3.24)$$

Supondo $d \leq 4$, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Consequentemente, tomando $u_{\epsilon m}(t), v(t) \in V$, obtemos a partir da propriedade (2.10) e da desigualdade de Hölder

$$|\langle B_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m}, v\rangle| \overset{(2.10)}{\leq} |b(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)| \leq \|u_{\epsilon m}\|_{L^4(\Omega)}\|u_{\epsilon m}\|\|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u_{\epsilon m}\|^2\|v\|$$

portanto, a estimativa (3.16) nos permite escrever

$$(B_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I;V'\right) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right). \quad (3.25)$$

Por outro lado, sejam $w_{\varepsilon m}(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, e $v(t) \in V$. Temos que

$$|\langle \nabla\times w_{\varepsilon m}, v\rangle| = |\langle w_{\varepsilon m}, \nabla\times v\rangle| \leq |w_{\varepsilon m}|\|v\| \leq c\|w_{\varepsilon m}\|\|v\|$$

(veja *G. Lukaszewicz* [8], [1999] p.116), segue da limitação (3.19) que

$$(\nabla\times w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I;V') \hookrightarrow L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right). \quad (3.26)$$

Da hipótese de β, segue que

$$(\beta w_\varepsilon m) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right). \quad (3.27)$$

As estimativas (3.23)-(3.27), (3.21), (3.22) e as hipóteses sobre f nos permitem concluir que

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I; (V \cap V_4)'\right). \tag{3.28}$$

A seguir, vamos considerar a projeção ortogonal $R_m : H_0^1(\Omega) \to W_m$ dada por

$$R_m w = \sum_{j=1}^{m} (w, \varphi_j)\varphi_j,$$

bem como sua adjunta $R_m^* : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Novamente temos que $R_m^* w'_m = w'_m$. Também notamos que a escolha da base especial (ϕ_ν), nos permite escrever

$$\|R_m\|_{\mathcal{L}\left(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega)\right)} \leq 1 \quad \|R_m^*\|_{\mathcal{L}(H^{-1}, H^{-1})} \leq 1. \tag{3.29}$$

Segue da equação $(3.8)_2$, bem como das propriedades (2.9), (2.10) e (2.11) que

$$w'_m = -\frac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m} - \nu_1 R_m^* \mathcal{K} w_{\varepsilon m} - R_m^* B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m} - 4\nu_r R_m^* w_{\varepsilon m} + 2\nu_r R_m^* \nabla \times u_{\epsilon m} + R_m^* g. \tag{3.30}$$

Para obter uma limitação de $w'_{\varepsilon m}$, primeiro notamos que tomando $w_{\varepsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, obtemos da desigualdade de Hölder e da propriedade (2.11) que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{K} w_{\varepsilon m}, v\rangle| &\leq C \int_\Omega (1 + |\nabla w_{\varepsilon m}|_E)^3 \, |\nabla v|_E dx \\
&\leq \left(C + \|\nabla w_{\varepsilon m}\|^3_{L^4(\Omega)}\right) \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \left(C + \|w_{\varepsilon m}\|^3_{W_0^{1,4}(\Omega)}\right) \|v\|_{W_0^{1,4}(\Omega)} \\
&\leq \left(C + \|w_{\varepsilon m}\|^3_{W_0^{1,4}(\Omega)}\right) \|v\|_{H_0^1(\Omega) \cap W_0^{1,4}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Segue de (3.20) que

$$(\mathcal{K} w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{3.31}$$

Agora supondo $d \leq 4$, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo da propriedade (2.10) e da desigualdade de Hölder concluímos que

$$|\langle B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}, v\rangle| \overset{(2.10)}{\leq} |b(u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, v)| \leq \|u_{\epsilon m}\|_{L^4(\Omega)} \|w_{\varepsilon m}\| \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u_{\epsilon m}\| \|w_{\varepsilon m}\| \|v\|,$$

$\forall u_{\epsilon m}(t) \in V, \ \ \forall w_{\varepsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, de (3.16) e (3.19) obtemos

$$(B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (3.32)$$

Temos também, devido a (3.19) que

$$(w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^4\left(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \quad (3.33)$$

ou seja,

$$(w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (3.34)$$

Da hipótese de $\widetilde{\beta}$, segue que

$$(\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right) \quad (3.35)$$

Finalmente, de (3.16) concluímos que

$$(\nabla \times u_m) \text{ é limitada em } L^4\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (3.36)$$

Portanto, segue de (3.29)-(3.36), e das hipóteses sobre g que

$$(w_m') \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (3.37)$$

As limitações (3.15)-(3.20), (3.28), (3.37) e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions implicam que existem subsequências de (u_m) e (w_m), as quais ainda denotamos por (u_m) e (w_m), tais que

$$
\begin{aligned}
u_{\epsilon m} &\to u_\epsilon && \text{forte em } L^2(I;H) \text{ e q. s. em } Q_T, && (3.38)\\
u_{\epsilon m} &\overset{*}{\rightharpoonup} u_\epsilon && \text{fraco estrela em } L^\infty(I;H), && (3.39)\\
u_{\epsilon m} &\rightharpoonup u_\epsilon && \text{fraco em } L^4(I;V), && (3.40)\\
u'_{\epsilon m} &\rightharpoonup u'_\epsilon && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right), && (3.41)\\
w_{\varepsilon m} &\to w_\varepsilon && \text{forte em } L^2\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \text{ e q. s. em } Q_T, && (3.42)\\
w_{\varepsilon m} &\overset{*}{\rightharpoonup} w_\varepsilon && \text{fraco estrela em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), && (3.43)\\
w_{\varepsilon m} &\rightharpoonup w_\varepsilon && \text{fraco em } L^4\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right), && (3.44)\\
w'_{\varepsilon m} &\rightharpoonup w'_\varepsilon && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right), && (3.45)\\
\mathcal{K}u_{\epsilon m} &\rightharpoonup \chi && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right), && (3.46)\\
\mathcal{K}w_{\varepsilon m} &\rightharpoonup \xi && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). && (3.47)\\
\beta u_{\varepsilon m} &\rightharpoonup \psi && \text{fraco em } L^{4/3}(I;(V\cap V_4)'). && (3.48)\\
\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m} &\rightharpoonup \widetilde{\psi} && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). && (3.49)
\end{aligned}
$$

3.2.4 Passagem ao Limite

Finalmente, notamos que faz sentido considerar $u(0) = u_0$ e $w(0) = w_0$, pois, (3.16), (3.28) implicam que $u \in C^0(I;\mathbf{H})$. Analogamente, (3.19) e (3.37) implicam que $w \in C^0\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. A seguir usaremos as convergências obtidas acima para obter (3.7).

Para provar que

$$\int_0^T b(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, \varphi) \longrightarrow \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V}), \tag{3.50}$$

$$\int_0^T b(u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, \phi) \longrightarrow \int_0^T b(u_\epsilon, w_\epsilon, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}\left(I;\mathcal{D}(\Omega)\right), \tag{3.51}$$

usamos (3.38) e (3.42) (de modo análogo ao que foi feito no capítulo anterior). De modo análogo ao que foi feito na seção (2.2.5) segue que $\beta u_\epsilon = \psi$ e $\widetilde{\beta} w_\epsilon = \widetilde{\psi}$. A fim de mostrar que

$$\int_{Q_T} M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2)e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} M(|e(u_\epsilon)|_E^2)e_{ij}(u_\epsilon)e_{ij}(\varphi)dxdt, \quad (3.52)$$

usamos o Teorema da Convergência de Vitali (Lema 1.3) analogamente ao que foi feito no capítulo anterior. Assim obtemos $\chi = \mathcal{K}u$ em $L^{4/3}(I;(V\cap V_4)')$. De modo inteiramente análogo, e considerando (3.19) obtemos

$$\int_{Q_T} M(|e(w_{\varepsilon m})|_E^2)e_{ij}(w_{\varepsilon m})e_{ij}(\phi)dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} M(|e(w_\epsilon)|_E^2)e_{ij}(w_\epsilon)e_{ij}(\phi)dxdt. \quad (3.53)$$

Dito de outro modo, $\xi = \mathcal{K}w$ em $L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right)$. As convergências (3.38)-(3.53) nos permitem obter

$$u'_\epsilon+(\nu+\nu_r)Au_\epsilon+\mathcal{K}_{u_\epsilon}u_\epsilon+B_{u_\epsilon}u_\epsilon+\frac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon = 2\nu_r\nabla\times w_\varepsilon+f \text{ em } L^{4/3}(I;(V\cap V_4)'), \quad (3.54)$$

$$w'_\varepsilon+\nu_1\mathcal{K}_{w_\varepsilon}w_\varepsilon+B_{u_\epsilon}w_\varepsilon+4\nu_r w_\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\widetilde{\beta}w_\varepsilon = 2\nu_r\nabla\times u_\epsilon+g \text{ em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (3.55)$$

Isso conclui a demonstração do teorema 3.3. □

Provaremos agora o teorema (3.1), para isso usaremos o teorema de Banach-Steinhaus, como visto no capítulo anterior.
Das limitações encontradas anteriormente e do torema de Banach-Steinhaus, podemos concluir que existem subsequências $(u_\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ e $(w_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$, tais que convergem para u e w, com $\epsilon,\varepsilon\to 0$.
Seguindo os mesmos passos do capítulo anterior podemos concluir que, $\beta u(t) = 0$ q.s em $t\in[0,T]$, ou seja, $u(t)\in K$ q.s, e de modo análogo $w(t)\in\widetilde{K}$. Também temos que,

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\int_0^T <\mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - u> dt \le 0 \quad (3.56)$$

Consideremos a seguinte equação

$$X_\epsilon = \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + (\nu + \nu_r) \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T (\mathcal{K} u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt - 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot} w_\varepsilon, \varphi - u_\epsilon) dt - \int_0^T < f, \varphi - u_\epsilon >, \tag{3.57}$$

com $\varphi \in L^4(0, T, V \cap V_4)$, $\varphi' \in L^{4/3}(0, T, (V \cap V_4)')$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \in K q.s.$

Multiplicando (3.54) por $\varphi - u_\epsilon$ e integrando de $[0, T]$, em seguida somando com (3.57) e sabendo que $\beta\varphi = 0$, temos que

$$X_\epsilon = \int_0^T < \varphi', \varphi > dt - \int_0^T < \varphi', u_\epsilon > dt - \int_0^T < u'_\epsilon, \varphi > dt + \int_0^T < u'_\epsilon, u_\epsilon > dt - \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, \varphi - u_\epsilon > dt \tag{3.58}$$

$$X_\epsilon = \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + \int_0^T < u'_\epsilon, -\varphi + u_\epsilon > dt - \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, -(u_\epsilon - \varphi) > dt \tag{3.59}$$

$$X_\epsilon = \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + \int_0^T < u'_\epsilon, -(\varphi - u_\epsilon) > dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, u_\epsilon - \varphi > dt \tag{3.60}$$

$$X_\epsilon = \int_0^T < \varphi' - u'_\epsilon, \varphi - u_\epsilon > dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T < \beta u_\epsilon - \beta\varphi, u_\epsilon - \varphi > dt \geq 0, \tag{3.61}$$

pois β é monotono e, $\int_0^T < \varphi' - u'_\epsilon, \varphi - u_\epsilon > = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} ||\varphi - u_\epsilon||^2 dt$ $= \frac{1}{2}(||\varphi(T) - u_\epsilon(T)||^2 - ||\varphi(0) - u_\epsilon(0)||^2) \geq 0$, pelo fato de que $\varphi(0) = 0$, hipótese de X_ϵ, e $u_\epsilon(0) = 0$, hipótese do problema.

Logo,

$$\int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt + (\nu + \nu_r) \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T (\mathcal{K} u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) dt \geq 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot} w_\varepsilon, \varphi - u_\epsilon) dt + \int_0^T < f, \varphi - u_\epsilon >, \tag{3.62}$$

Tomando o $\limsup$ em ambos os lados de (3.62), temos que

$$\limsup \int_0^T < \varphi', \varphi - u_\epsilon > dt = \int_0^T < \varphi', \varphi - u >, \text{ decorrente de (3.16).}$$

$$\limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt = \limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi)dt + \limsup - \int_0^T a(u_\epsilon, u_\epsilon)dt =$$
$$\limsup \int_0^T (\nabla u_\epsilon, \nabla \varphi) + \limsup \int_0^T -||u_\epsilon(t)||^2, \text{ decorre de 3.16 que,}$$
$$\limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt \leq \int_0^T (\nabla u, \nabla \varphi) - \int_0^T ||u(t)||^2 = \int_0^T a(u, \varphi)dt - \int_0^T a(u, u)$$

logo

$$\limsup \int_0^T a(u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt \leq \int_0^T a(u, \varphi - u)dt.$$

Temos também que

$$\limsup \int_0^T (\mathcal{K}u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt = \limsup \int_0^T -(\mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - \varphi) = -\liminf \int_0^T (\mathcal{K}u_\epsilon, u_\epsilon - \varphi) \leq$$
$$- \int_0^T (\mathcal{K}u, u - \varphi) = \int_0^T (\mathcal{K}u, \varphi - u),$$

logo

$$\limsup \int_0^T (\mathcal{K}u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon)dt = \int_0^T (\mathcal{K}u, \varphi - u)$$

Temos que,
$$\limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) = \limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi) + \limsup - \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon)$$
das propriedades da forma trilinear e das convergências anteriores, segue que

$$\limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) = \int_0^T b(u, u, \varphi)dt + 0 = \int_0^T b(u, u, \varphi)dt - \int_0^T b(u, u, u)dt$$

logo

$$\limsup \int_0^T b(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi - u_\epsilon) = \int_0^T b(u, u, \varphi - u)$$

Temos também,

$$\limsup \int_0^T < \operatorname{rot} w_\varepsilon, \varphi - u_\epsilon) = \int_0^T < \operatorname{rot} w, \varphi - u >, \quad \text{decorrente de (3.38) e (3.44)}$$

Por fim temos, $\limsup \int_0^T < f, \varphi - u_\epsilon > dt = \int_0^T < f, \varphi - u > dt$, decorrente de (3.16)

Portanto,

$$\begin{gathered}\int_0^T < \varphi', \varphi - u > dt + (\nu + \nu_r)\int_0^T a(u, \varphi - u)dt + \int_0^T (\mathcal{K}u, \varphi - u)dt + \\ \int_0^T b(u, u, \varphi - u)dt \geq 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot} w, \varphi - u)dt + \int_0^T < f, \varphi - u >,\end{gathered} \tag{3.63}$$

provando assim a primeira parte do teorema (3.1)

Façamos agora a segunda parte, consideremos a equação abaixo

$$\begin{gathered}Y_\varepsilon = \int_0^T < \phi', \phi - w_\varepsilon > dt + \nu_1 \int_0^T (\mathcal{K}_{w_\varepsilon} w_\varepsilon, \phi - w_\varepsilon)dt + \int_0^T b(u_\epsilon, w_\varepsilon, \phi - w_\varepsilon)dt + \\ 4\nu_r \int_0^T (w_\varepsilon, \phi - w_\varepsilon)dt - 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot} u_\epsilon, \phi - w_\varepsilon) - \int_0^T < g, \phi - w_\epsilon >,\end{gathered} \tag{3.64}$$

$\forall \phi \in L^4(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)),\ \phi \in L^{4/3}(I, \mathbf{H}^{-1}(\Omega)),\ \phi(0) = 0;\ \phi(t) \in \widetilde{K} q.s.$

Multiplicando (3.55) por $\phi - w_\epsilon$ e integrando de $[0, T]$, em seguida somando com (3.64) e sabendo que $\widetilde{\beta}\phi = 0$, fica

$$\begin{gathered}Y_\varepsilon = \int_0^T < \phi', \phi > dt - \int_0^T < \phi', w_\varepsilon > dt - \int_0^T < w_\varepsilon', \phi > dt + \\ \int_0^T < w_\varepsilon', w_\varepsilon > dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T < \widetilde{\beta} w_\varepsilon - \widetilde{\beta}\phi, \phi - w_\varepsilon > dt\end{gathered} \tag{3.65}$$

Seguindo o mesmo processo feito para X_ϵ, concluimos que

$$Y_\varepsilon \geq 0 \tag{3.66}$$

Tomando o $\limsup$ em (3.64) e levando em consideração as estimativas obtidas obtidas, segue-se que

$$\begin{gathered}\int_0^T < \phi', \phi - w > dt + \nu_1 \int_0^T (\mathcal{K}_w w, \phi - w)dt + \int_0^T b(u, w, \phi - w)dt + \\ 4\nu_r \int_0^T (w, \phi - w) \geq 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot} u, \phi - w)dt + \int_0^T < g, \phi - w >,\end{gathered} \tag{3.67}$$

Concluindo assim a demonstração do teorema 3.1

3.2.5 Prova do teorema 3.2

Para demonstar o Teorema 3.2 primeiro provaremos o Teorema 3.4, utilizaremos aproximações de Galerkin. Para esse propósito, consideremos uma base de autovetores do operador de Stokes $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$, assim como uma base hilbertiana de autovetores $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Representamos por $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m]$ o subespaço de V gerado pelos vetores φ_1, ..., φ_m e por $W_m = [\phi_1, ..., \phi_m]$ o subespaço de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ gerado pelos vetores ϕ_1, ..., ϕ_m. Seja também o problema aproximado

$$\left|\begin{array}{l}(u'_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\nu+\nu_r)a(u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, \varphi_r) \\ \\ +\dfrac{1}{\epsilon}(\beta u_{\epsilon m}, \varphi_r) = 2\nu_r(\operatorname{rot} w_{\varepsilon m}, \varphi_r) + (f(t), \varphi_r) \qquad r = 1, ..., 3 \\ \\ (w'_{\varepsilon m}, \phi_r) + \nu_1(\mathcal{K}_{w_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}, \phi_r) + (B_{u_{\epsilon m}} w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \\ \\ 4\nu_r(w_{\varepsilon m}, \phi_r) + \dfrac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta} w_{\varepsilon m}, \phi_r) = 2\nu_r(\operatorname{rot} u_{\epsilon m}, \phi_r) + (g(t), \phi_r) \quad r = 1, ..., 3 \\ \\ u_{\epsilon m}(x,0) \to u_\epsilon(x,0), \quad \text{em} \quad V \cap V_4 \\ w_{\varepsilon m}(x,0) \to w_\varepsilon(x,0), \quad \text{em} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega)\end{array}\right. \tag{3.68}$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (3.68) possui uma única solução $(u_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m})$ tal que

$$u_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} g_{rm}(t)\varphi_r(x) \qquad\qquad w_{\varepsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{rm}(t)\phi_r(x) \tag{3.69}$$

estão definidas em um certo intervalo $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$. A primeira estimativa nos permite estender essa solução a todo intervalo $[0, T]$.

3.2.6 Primeira Estimativa

Procedendo de modo análogo ao da demostração do teorema (3.1), obtemos as mesmas estimativas

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^{\infty}(I;H), \tag{3.70}$$

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^{4}(I;V), \tag{3.71}$$

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^{4}\left(I;V_4\right), \tag{3.72}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^{\infty}\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.73}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^{4}\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right). \tag{3.74}$$

$$(w_{\varepsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^{4}\left(I;\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right). \tag{3.75}$$

3.2.7 Segunda Estimativa

Derivando a primeira equação do problema (3.68) em relação a t e depois multiplicando por $g'_{rm}(t)$ e em seguida somando de 1 até m em r, fazendo na segunda equação o mesmo processo da primeira, sendo que ao invés de multiplicarmos por $g'_{rm}(t)$ multiplicamos por $h'_{rm}(t)$, temos que:

$$\left|\begin{array}{l}
(u''_{\epsilon m},\varphi_r)+(\nu+\nu_r)a(u'_{\epsilon m},\varphi_r)+(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},\varphi_r)'+(B_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},\varphi_r)'+(\frac{1}{\epsilon}\beta u_{\epsilon m},\varphi_r)' = \\
2\nu_r(\operatorname{rot} w_{\varepsilon m},\varphi_r)' + (f'(t),\varphi_r) \qquad r=1,...,3 \\
\\
(w''_{\varepsilon m},\phi_r)+\nu_1(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},\varphi_r)'+(B_{u_{\epsilon m}}w_{\varepsilon m},\phi_r)'+4\nu_r(w'_{\varepsilon m},\phi_r)+\frac{1}{\varepsilon}(\widetilde{\beta}w_{\varepsilon m},\phi_r)' = \\
2\nu_r(\operatorname{rot} u_{\epsilon m},\phi_r)' + (g'(t),\phi_r) \qquad r=1,...,3 \\
\\
u_{\epsilon m}(x,0)\to u_\epsilon(x,0), \quad \text{em} \quad V\cap V_4 \\
w_{\varepsilon m}(x,0)\to w_\varepsilon(x,0), \quad \text{em} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\
u'_{\epsilon m}(0)\to u_1 \\
w'_{\epsilon m}(0)\to w_1
\end{array}\right. \tag{3.76}$$

$$
\begin{aligned}
&(u''_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})+(\nu+\nu_r)a(u'_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})+b(u'_{\epsilon m},u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})+b(u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})\leq\\
&2\nu_r(\operatorname{rot} w'_{\varepsilon m},u'_{\epsilon m})+(f'(t),u'_{\epsilon m})\\
&(w''_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})+b(u'_{\epsilon m},w_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})+b(u_{\epsilon m},w'_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})+4\nu_r(w'_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})\leq\\
&2\nu_r(\operatorname{rot} u'_{\epsilon m},w'_{\varepsilon m})+(g'(t),w'_{\varepsilon m})
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

Pois, $((\beta u_{\epsilon m})',u'_{\epsilon m})\geq 0$; $((\beta w_{\epsilon m})',w'_{\epsilon m})\geq 0$ (ver Lions [8]) e

$$
(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},\varphi)'=\left(\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2)e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)dx\right)'=
$$

$$
\int_\Omega M'(|e(u_{\epsilon m})|^2)2.e_{ij}(u_{\epsilon m})e'_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)+\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2)e'_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)
$$

ou seja,

$$
(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})'=2\int_\Omega M'(|e(u_{\epsilon m})|^2)(e_{ij}(u_{\epsilon m}))^2(e_{ij}(u'_{\epsilon m}))^2+\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|^2)(e_{ij}(u'_{\epsilon m}))^2\geq 0
$$

logo

$$
(\mathcal{K}_{u_{\epsilon m}}u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})'\geq 0
$$

De (3.77) segue que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2\leq|b(u'_{\epsilon m},u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})|+2\nu_r(w'_{\varepsilon m},\nabla\times u'_{\epsilon m})+(f',u'_{\epsilon m})\\
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2+4\nu_r||w'_{\varepsilon m}||^2\leq|b(u'_{\epsilon m},w_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})|+2\nu_r(\nabla\cdot u'_{\epsilon m},w'_{\varepsilon m})+(g',w'_{\varepsilon m})
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_{\epsilon m}||^2+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2\leq|b(u'_{\epsilon m},u_{\epsilon m},u'_{\epsilon m})|+2\nu_r|w'_{\varepsilon m}|||u'_{\epsilon m}||+|f'||u'_{\epsilon m}|\\
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'_{\varepsilon m}||^2+4\nu_r||w'_{\varepsilon m}||^2\leq|b(u'_{\epsilon m},w_{\varepsilon m},w'_{\varepsilon m})|+2\nu_r||u'_{\epsilon m}|||w'_{\varepsilon m}|+|g'||w'_{\varepsilon m}|
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

Agora faremos uma breve pausa nas equações $(3.79)_1$ e $(3.79)_2$ para limitarmos os termos,

$$|b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})| + |b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})| \tag{3.80}$$

Se pusermos $n = 2$ recairemos no sistema do capítulo anterior que já foi feito, então vamos nos deter no caso $n = 3$. Para isso vamos utilizar a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ no Lema 1.5, ou seja, faremos $d = 3$, $s = 4$ e $r = 6$

$$\begin{aligned} |b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})| + |b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})| &\leq c||u'_{\epsilon m}||_{L^6(\Omega)}||u_{\epsilon m}|||u'_{\epsilon m}|^{2/4}||u'_{\epsilon m}||^{3/6} \\ &+c||u'_{\epsilon m}||_{L^6(\Omega)}||w_{\varepsilon m}|||w'_{\varepsilon m}|^{2/4}||w'_{\varepsilon m}||^{3/6} \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned} |b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})| + |b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})| &\leq c||u'_{\epsilon m}||.||u_{\epsilon m}|||u'_{\epsilon m}|^{1/2}||u'_{\epsilon m}||^{1/2} \\ &+c||u'_{\epsilon m}||||w_{\varepsilon m}|||w'_{\varepsilon m}|^{1/2}||w'_{\varepsilon m}||^{1/2} \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned} |b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})| + |b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})| &\leq c||u'_{\epsilon m}||^{3/2}.||u_{\epsilon m}|||u'_{\epsilon m}|^{1/2} \\ &+c||u'_{\epsilon m}||||w_{\varepsilon m}|||w'_{\varepsilon m}|^{1/2}||w'_{\varepsilon m}||^{1/2} \end{aligned} \tag{3.83}$$

Aplicando agora a desigualdade de young, para $p = 4/3$ e $q = 4$, e para $p = 1/2$ e $q = 1/2$ segue que,

$$\begin{aligned} |b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})| + |b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})| &\leq \frac{(\nu + \nu_r)}{4}||u'_{\epsilon m}||^2 + c_{(\nu,\nu_r)}||u_{\epsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}|^2 \\ &+\frac{(\nu + \nu_r)}{4}||u'_{\epsilon m}||^2 + c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^2|w'_{\varepsilon m}|||w'_{\varepsilon m}||, \end{aligned} \tag{3.84}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |b(u'_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})| + |b(u'_{\epsilon m}, w_{\varepsilon m}, w'_{\varepsilon m})| &\leq \frac{(\nu + \nu_r)}{4}||u'_{\epsilon m}||^2 + c_{(\nu,\nu_r)}||u_{\epsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}|^2 \\ &+\frac{(\nu + \nu_r)}{4}||u'_{\epsilon m}||^2 + c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|w'_{\varepsilon m}|^2 + \frac{\nu_r}{4}||w'_{\varepsilon m}||^2 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Voltando para a equação (3.79), ou melhor dizendo, somando as equações $(3.79)_1$ e $(3.79)_2$ e levando em consideração a equação (3.85) temos o seguinte,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2+||w'_{\varepsilon m}||^2)+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2+4\nu_r||w'_{\varepsilon m}||^2 \le \frac{(\nu+\nu_r)}{4}||u'_{\epsilon m}||^2$$

$$+c_{(\nu,\nu_r)}||u_{\epsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}|^2+\frac{(\nu+\nu_r)}{4}||u'_{\epsilon m}||^2+c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|w'_{\varepsilon m}|^2+\frac{\nu_r}{4}||w'_{\varepsilon m}||^2 \quad (3.86)$$

$$+|w'_{\varepsilon m}|||u'_{\epsilon m}||+|f'||u'_{\epsilon m}|+||u'_{\epsilon m}|||w'_{\varepsilon m}|+|g'||w_{\varepsilon m}|$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2+||w'_{\varepsilon m}||^2)+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2+4\nu_r||w'_{\varepsilon m}||^2 \le \frac{(\nu+\nu_r)}{2}||u'_{\epsilon m}||^2$$

$$+c_{(\nu,\nu_r)}||u_{\epsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}|^2+c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|w'_{\varepsilon m}|^2+\frac{\nu_r}{4}||w'_{\varepsilon m}||^2+c_\nu|w'_{\varepsilon m}|^2 \quad (3.87)$$

$$+\frac{(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2+\frac{(\nu+\nu_r)}{8}|u'_{\varepsilon m}|^2+c_\nu|w_{\varepsilon m}|^2+c$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2+||w'_{\varepsilon m}||^2)+(\nu+\nu_r)||u'_{\epsilon m}||^2+4\nu_r||w'_{\varepsilon m}||^2 \le \frac{(\nu+\nu_r)}{2}||u'_{\epsilon m}||^2$$

$$+c_{(\nu,\nu_r)}||u_{\epsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}|^2+c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|w'_{\varepsilon m}|^2+\frac{\nu_r}{4}||w'_{\varepsilon m}||^2+\frac{(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2 \quad (3.88)$$

$$+c_{(\nu,\nu_r)}(|u'_{\varepsilon m}|^2+c_\nu|w_{\varepsilon m}|^2)+c$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2+||w'_{\varepsilon m}||^2)+\frac{3(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2+\frac{15\nu_r}{4}||w'_{\varepsilon m}||^2 \le +c_{(\nu,\nu_r)}||u_{\epsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}|^2$$

$$+c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|w'_{\varepsilon m}|^2+c_{(\nu,\nu_r)}(|u'_{\varepsilon m}|^2+c_\nu|w_{\varepsilon m}|^2)+c \quad (3.89)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2+||w'_{\varepsilon m}||^2)+\frac{3(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2+\frac{15\nu_r}{4}||w'_{\varepsilon m}||^2 \le +c_{(\nu,\nu_r)}||u_{\epsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}|^2$$

$$+c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|w'_{\varepsilon m}|^2+c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|w'_{\varepsilon m}|^2+c_{(\nu,\nu_r)}||w_{\varepsilon m}||^4|u'_{\epsilon m}| \quad (3.90)$$

$$+c_{(\nu,\nu_r)}(|u'_{\varepsilon m}|^2+|w_{\varepsilon m}|^2)+c$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2+||w'_{\varepsilon m}||^2)+\frac{3(\nu+\nu_r)}{8}||u'_{\epsilon m}||^2+\frac{15\nu_r}{4}||w'_{\varepsilon m}||^2 \le$$

$$c_{(\nu,\nu_r)}(||u_{\epsilon m}||^4+||w_{\varepsilon m}||^4)(|u'_{\epsilon m}|^2+|w'_{\varepsilon m}|^2)+c_{(\nu,\nu_r)}(|u'_{\epsilon m}|^2+|w'_{\varepsilon m}|^2)+c \quad (3.91)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(||u'_{\epsilon m}||^2+||w'_{\varepsilon m}||^2) \leq c+c_{(\nu,\nu_r)}(||u_{\epsilon m}||^4+||w_{\varepsilon m}||^4+c_{(\nu,\nu_r)})(|u'_{\epsilon m}|^2+|w'_{\varepsilon m}|^2) \quad (3.92)$$

Integrando de 0 a T e utilizando a desigualdade de Gronwall temos o seguinte

$$(||u'_{\epsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) \leq c\left(\exp\int_0^T(||u_{\epsilon m}||^4 + ||w_{\varepsilon m}||^4 + c_{(\nu,\nu_r)})\right) \quad (3.93)$$

Das estimativas anteriores podemos concluir que

$$(||u'_{\epsilon m}||^2 + ||w'_{\varepsilon m}||^2) \leq c \quad (3.94)$$

Portanto,

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I;H), \quad (3.95)$$

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I;V), \quad (3.96)$$

$$(w'_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad (3.97)$$

$$(w'_{\varepsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)). \quad (3.98)$$

3.2.8 Passagem ao Limite

Utilizando as convergências obtidas e seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema (2.3)

$$\left|\begin{array}{l} u'_\epsilon + (\nu+\nu_r)Au_\epsilon + \mathcal{K}u_\epsilon + B_{u_\epsilon}u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}\beta u_\epsilon = 2\nu_r\nabla\times w_\varepsilon + f \text{ em } L^2(I;V), \\ \\ w'_\varepsilon + \nu_1\nabla\cdot[M(e(w_\varepsilon))(e(w_\varepsilon))] + B_{u_\epsilon}w_\varepsilon + 4\nu_r w_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta u_\varepsilon = \\ \\ 2\nu_r\,\nabla\times u_\epsilon + g \quad \text{ em } \quad L^2\left(I;(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right). \end{array}\right. \quad (3.99)$$

Concluímos assim, a prova do Teorema (3.4)

Agora provaremos o teorema (3.2), mas antes disso podemos verificar que das limitações obtidas e do teorema de Banach-Steinhaus, existem subsequencias $(u_\epsilon)_{0<\epsilon<1}$ e $(w_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$, tais que convergem para u e w, com $\epsilon, \varepsilon \to 0$. Também é possível concluir que $u(t) \in K$ q.s. e $w(t) \in \widetilde{K}$ q.s..

Para a prova do teorema também utilizaremos o seguinte resultado já conhecido,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \int_0^T < \mathcal{K} u_\epsilon, u_\epsilon - u > dt \leq 0. \tag{3.100}$$

Mostremos agora que u é solução do Teorema (3.2). De (3.99) podemos escrever

$$\left| \begin{array}{l} (u'_\epsilon, \hat{v}) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, \hat{v}) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, \hat{v}) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, \hat{v}) + \dfrac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon, \hat{v}) \\ = 2\nu_r (\operatorname{rot} w_\epsilon, \hat{v}) + (f, \hat{v}) \qquad\qquad \forall\ \hat{v}\ \in\ V' \\ u_\epsilon(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{3.101}$$

Fazendo, $\hat{v} = v - u_\epsilon, \quad v \in K$, temos que

$$\begin{aligned} &(u'_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v - u_\epsilon) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, v - u_\epsilon) + \\ &\frac{1}{\epsilon}(\beta u_\epsilon - \beta v, v - u_\epsilon) = 2\nu_r (\operatorname{rot} w_\epsilon, v - u_\epsilon) + (f, v - u_\epsilon). \end{aligned} \tag{3.102}$$

Como β é monotono,

$$\begin{aligned} &(u'_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, v) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v - u_\epsilon) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, v) \\ &-2\nu_r (\operatorname{rot} w_\epsilon, v - u_\epsilon) - (f, v - u_\epsilon) \geq (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, u_\epsilon) \end{aligned} \tag{3.103}$$

$$X_\epsilon^v \geq (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, u_\epsilon),\ \forall v \in K.$$

Portanto,

$X_\epsilon^v = (u'_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\nu + \nu_r) a(u_\epsilon, v) + (\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v - u_\epsilon) + b(u_\epsilon, u_\epsilon, v)$

$$- 2\nu_r(\operatorname{rot} w_\epsilon, v - u_\epsilon) - (f, v - u_\epsilon)$$

Seja $\psi \in C^0(0.T)$ com $\psi \geq 0$, então $v\varphi \in C^0([0,T];V')$ $\forall v \in V'$.

Logo temos o seguinte:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \psi(u'_\epsilon, v - u_\epsilon) + (\nu+\nu_r)\int_0^T \psi a(u_\epsilon, v) + \int_0^T \psi(\mathcal{K}_{u_\epsilon} u_\epsilon, v - u_\epsilon) + \int_0^T \psi\ b(u_\epsilon, u_\epsilon, v) \\ &-2\nu_r \int_0^T \psi(\operatorname{rot} w_\epsilon, v - u_\epsilon) - \int_0^T \psi(f, v - u_\epsilon) \geq (\nu + \nu_r) \int_0^T \psi a(u_\epsilon, u_\epsilon) \end{aligned} \tag{3.104}$$

Tomando o $\limsup$ em ambos os lados, levando em consideração as limitações obtidas e utilizando a monotonicidade de $\mathcal{K}$, temos que

$$\begin{aligned} &(u', v - u) + (\nu + \nu_r)a(u, v - u) + (\mathcal{K}_u u, v - u) + b(u, u, v - u) \geq \\ &2\nu_r(\operatorname{rot} w, v - u) + (f, v - u) \ \ \forall v \in K \text{q.s. em t.} \end{aligned} \tag{3.105}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} &(w'_\varepsilon, \bar{v}) + \nu_1(\mathcal{K}_{w_\varepsilon} w_\varepsilon, \bar{v}) + b(u_\epsilon, w_\varepsilon, \bar{v}) + 4\nu_r(w_\varepsilon, \bar{v}) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta w_\varepsilon, \bar{v}) = \\ &2\nu_r(\nabla \times u_\epsilon, \bar{v}) + (g, \bar{v}) \ \ \forall \ \bar{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{3.106}$$

Fazendo $\bar{v} = \widetilde{v} - w_\varepsilon$, $\widetilde{v} \in \widetilde{K}$, utilizando a monotonicidade de β e tomando o $\limsup$ em ambos os lados, segue-se que

$$\begin{aligned} &(w', \widetilde{v} - w) + \nu_1(\mathcal{K}_w w, \widetilde{v} - w) + b(u, w, \widetilde{v} - w) + 4\nu_r(w, \widetilde{v} - w) \geq \\ &2\nu_r(\nabla \times u, \widetilde{v} - w) + (g, \widetilde{v} - w) \ \ \forall \ \widetilde{v} \in \widetilde{K} \text{ q.s. em t.} \end{aligned} \tag{3.107}$$

Provando assim, a primeira parte do teorema 3.2.

3.2.9 Unicidade

Sejam $\{u_1, w_1\}$ e $\{u_2, w_2\}$ duas soluções de (3.105) e (3.107), definindo $u = u_2 - u_1$, $w = w_2 - w_1$ em $t \in (0, T)$.

Fazendo $u = u_1$, $v = u_2$ e $w = w_2$ em (3.105) segue que,

$$(u_1', u) + (\nu + \nu_r)a(u_1, u) + (\mathcal{K}_{u_1} u_1, u) + b(u_1, u_1, u) \geq 2\nu_r(\operatorname{rot} w_2, u) + (f, u) \tag{3.108}$$

Fazendo também em (3.105) $u = u_2$, $v = u_1$ e $w = w_1$ segue que,

$$-(u_2', u) - (\nu + \nu_r)a(u_2, u) - (\mathcal{K}_{u_2} u_2, u) - b(u_2, u_2, u) \geq -2\nu_r(\operatorname{rot} w_1, u) - (f, u) \tag{3.109}$$

Somando (3.108) e (3.109) temos que,

$$\begin{aligned} &-(u', u) - (\nu + \nu_r)a(u, u) - (\mathcal{K}_{u_2} u_2 - \mathcal{K}_{u_1} u_1, u_2 - u_1) - b(u_2, u_2, u) \\ &+b(u_1, u_1, u) \geq -2\nu_r(\operatorname{rot} w, u) \end{aligned} \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned} &(u', u) + (\nu + \nu_r)a(u, u) + (\mathcal{K}_{u_2} u_2 - \mathcal{K}_{u_1} u_1, u_2 - u_1) + b(u_2, u_2, u) \\ &-b(u_1, u_1, u) \leq 2\nu_r(\operatorname{rot} w, u), \end{aligned} \tag{3.111}$$

como $\mathcal{K}$ é monótono e $b(u_2, u_2, u) - b(u_1, u_1, u) = b(u, u_2, u)$, temos que

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 dt + (\nu + \nu_r)\int_0^t ||u||^2 dt \leq \int_0^t |b(u, u_2, u)| dt + \int_o^t 2\nu_r(\operatorname{rot} w, u). \tag{3.112}$$

Agora fazendo em (3.107) $w = w_1$, $\widetilde{v} = w_2$ e $u = u_2$ segue que,

$$(w_1', w) + \nu_1(\mathcal{K}_{w_1} w_1, w) + b(u_2, w_1, w) + 4\nu_r(w_1, w) \geq 2\nu_r(\nabla \times u_2, w) + (g, w). \tag{3.113}$$

Fazendo também em (3.107) $w = w_2$, $\widetilde{v} = w_1$ e $u = u_1$ segue que,

$$-(w_2', w) - \nu_1(\mathcal{K}_{w_2} w_2, w) - b(u_1, w_2, w) - 4\nu_r(w_2, w) \geq 2\nu_r(\nabla \times u_1, w) - (g, w). \quad (3.114)$$

Somando (3.113) e (3.114), sabendo que $-b(u_1, w_2, w) + b(u_2, w_1, w) = -b(u, w_2, w)$ e que $\mathcal{K}$ é monótono temos que

$$-(w', w) - b(u, w_2, w) - 4\nu_r(w, w) \geq -2\nu_r(\nabla \times u, w) \quad (3.115)$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|dt + 4\nu_r \int_0^t |w|^2 \leq \int_0^t |b(u, w_2, w)| + 2\nu_r \int_0^t (\nabla \times u, w) \quad (3.116)$$

Somando (3.112) e (3.116), aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo no primeiro termo de ambas as equações e sabendo que $u(0) = 0$, $w(0) = 0$, pois $u \in K$ e $w \in \widetilde{K}$, temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{2}|w(t)|^2 + (\nu + \nu_r)\int_0^t ||u(t)||^2 dt + 4\nu_r \int_0^t |w(t)|^2 dt + \leq \\ &\int_0^t |b(u, u_2, u)|dt + \int_0^t |w|||u||dt + \int_0^t |b(u, w_2, w)|dt + 2\nu_r \int_0^t ||u|||w|dt \end{aligned} \quad (3.117)$$

Utilizando a desigualdade de Young em (3.117) concluímos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \frac{1}{2}|w(t)|^2 + (\nu + \nu_r)\int_0^t ||u(t)||^2 dt + 4\nu_r \int_0^t |w(t)|^2 dt + \leq \\ &\int_0^t |b(u, u_2, u)|dt + \int_0^t |b(u, w_2, w)|dt \end{aligned} \quad (3.118)$$

Supondo $d = 2$, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Usando o Lema 1.4, a propriedade (2.3) e as Desigualdades de Hölder e de Young obtemos

$$\begin{aligned} |b(u, u_1, u)| + |b(u, w_1, w)| &\leq \|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|u_1\| + \|u\|_{L^4(\Omega)}\|w_1\|\|w\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq c\|u_1\||u|\|u\| + c\|w_1\||u|^{1/2}\|u\|^{1/2}|w|^{1/2}\|w\|^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|u_1\|^2|u|^2 \\ &+ \sqrt{\nu}\|u\|\sqrt{2C}\|w\| + c|u||w|\|w_1\|^2 \\ &\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|u_1\|^2|u|^2 + \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + C\|w\|^2 \\ &+ c\|w_1\|^2|u|^2 + c\|w_1\|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos de (3.118) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right) \leq c\left(\|u_1\|^2+\|w_1\|^2\right)\left(|u|^2+|w|^2\right).$$

Integrando de 0 a t temos

$$|u(t)|^2+|w(t)|^2 \leq c\int_0^t (\|u_1(s)\|^2+\|w_1(s)\|^2)(|u(s)|^2+|w(s)|^2)ds. \tag{3.119}$$

Por fim, aplicamos a desigualdade de Gronwall em (3.119), para concluir, considerando (3.74) e (3.75), que

$$u_1(t)=u_2(t) \quad \text{e} \quad w_1(t)=w_2(t) \quad \forall t\in[0,T], \quad \text{no caso } d=2.$$

Supondo agora $d=3$ temos que $H_0^1 \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Usando o Lema (1.5) com $s=4$ e $r=6$, bem como a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
|b(u,u_1,u)|+|b(u,w_1,w)| &\leq c\|u\|_{L^6(\Omega)}\|u_1\||u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\\
&+ c\|u\|_{L^6(\Omega)}\|w_1\||w|^{1/2}\|w\|^{1/2}\\
&\leq c\|u_1\||u|^{1/2}\|u\|^{3/2}+c\|w_1\||w|^{1/2}\|u\|\|w\|^{1/2}\\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2+c_\nu\|u_1\|^4|u|^2+\frac{\nu}{2}\|u\|^2+c_\nu\|w_1\|^2|w|\|w\|\\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2+c_\nu\|u_1\|^4|u|^2+\frac{\nu}{2}\|u\|^2+C\|w\|^2+c\|w_1\|^4|w|^2.
\end{aligned}$$

Segue de (3.118) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right) \leq c\left(\|u_1\|^4+\|w_1\|^4\right)\left(|u|^2+|w|^2\right).$$

Integrando de 0 a t obtemos

$$|u(t)|^2+|w(t)|^2 \leq c\int_0^t (\|u_1(s)\|^4+\|w_1(s)\|^4)(|u(s)|^2+|w(s)|^2)ds. \tag{3.120}$$

Agora aplicamos a desigualdade de Gronwall em (3.120), para deduzir, considerando as estimativas (3.71) e (3.74), que

$$u_1(t)=u_2(t) \quad \text{e} \quad w_1(t)=w_2(t) \quad \forall t\in[0,T], \quad \text{no caso } d=3.$$

Desse modo, o Teorema 3.2 fica demonstrado. $\square$

Capítulo 4

Sobre um Fluido Micropolar Não-Newtoniano em sua forma Estacionária

Diferentemente dos capítulos anteriores, nesse capítulo nós não iremos estudar uma desigualdade, mas sim um fluido micropolar não-newtoniano em sua forma estacionária. Mais precisamente vamos estudar na forma estacionária o sistema estudado por G.M. Araújo e E.F.L. Lucena [5].

O problema estudado é o seguinte: Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$. Encontraremos $u, w : \Omega \to \mathbb{R}^3$ e $p : \Omega \to \mathbb{R}$ soluções do seguinte sistema de equações.

$$\left| \begin{array}{l} -\nabla \cdot \tau(e(u)) + (u.\nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \nabla \times w + f, \quad \text{em } \Omega, \\ -\nu_1 \nabla \cdot e(w) + (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w = 2\nu_r \nabla \times u + g, \quad \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \\ w = 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Onde, o tensor de estresse é o mesmo já visto nos capítulos anteriores

$$\tau(e(u)) = 2(\nu + \nu_r + M(|e(u)|^2))e(u),$$

Definição 4.1. *Seja* $f \in (V \cap V)'$ *e* $g \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$. *Uma solução fraca para* (4.1) *é um par de funções* (u, w), *tal que*

$$u \in V \cap V_4,$$

$$w \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega),$$

satisfazendo a seguinte equação

$$\left|\begin{array}{l} (\nu+\nu_r)a(u,\varphi)+b(u,u,\varphi)+\displaystyle\int_\Omega M(|e(u)|^2)e_{ij}(u)e_{ij}(\varphi)dx \\ \\ =2\nu_r(\nabla\times w,\varphi)+(f,\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{V}, \\ \\ \nu_1 a(w,\phi)+\nu_1(\nabla\cdot w,\nabla\cdot\phi)+b(u,w,\phi)+4\nu_r(w,\phi) \\ \\ =2\nu_r(\nabla\times u,\phi)+(g,\phi), \quad \forall\phi\in\mathcal{D}(\Omega). \\ \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Teorema 4.1. *Se* $d \leq 3$, $f \in (V \cap V')$ *e* $g \in H^{-1}(\Omega)$, *então existe uma solução fraca para o problema* (4.1).

Teorema 4.2. *Assumindo as condições do teorema 4.1 com* $d \leq 3$, *e* $(\nu + \nu_r)$ *suficientemente grande, o problema (4.1) possui uma única solução fraca.*

4.1 Prova dos Resultados

4.1.1 Prova do Teorema 4.1

Vamos mostrar a existência de solução para o sistema (4.1) empregando as aproximações de Galerkin. Para isso vamos considerar $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset (V \cap V_4)$, uma base de autovetores do operador de Stokes e $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ uma base de auvetores do $-\Delta$. Representaremos por $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m] \subset (V \cap V_4)$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ e $W_m = [\phi_1, ..., \phi_m] \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{\phi_1, ..., \phi_m\}$.

Consideremos o problema aproximado: para determinar $u_m \in V_m$ e $w_m \in W_m$ verificando

$$
\left|
\begin{array}{l}
(\nu + \nu_r)(Au_m, \varphi) + (\mathcal{K}u_m, \varphi) + \langle B_{u_m} u_m, \varphi \rangle = \\
\\
2\nu_r(\nabla \times w_m, \varphi) + (f, \varphi), \qquad \forall \varphi \in V_m, \\
\\
-\nu_1(\nabla \cdot e(w), \phi) + \langle B_{u_m} w_m, \phi \rangle + 4\nu_r(w_m, \phi) = \\
\\
2\nu_r(\nabla \times u_m, \phi) + (g, \phi), \qquad \forall \phi \in W_m.
\end{array}
\right. \tag{4.3}
$$

Precisamos provar que (4.3) tem uma solução $u_m \in V_m$. Para isso, nós vamos utilizar o Lema do Ângulo Agudo, cf. Lions [13] ou Temam [32]. De fato, consideremos o vetor $\eta = ((\eta_1^i), (\eta_2^i))_{1 \leq i \leq m}$ of $\mathbb{R}^{2m}$ definido por

$$
\begin{array}{l}
\eta_1^i = (\nu + \nu_r)(Au_m, \varphi_i) + (\mathcal{K}u_m, \varphi) + \langle B_{u_m} u_m, \varphi_i \rangle \\
\\
-2\nu_r(\nabla \times w_m, \varphi_i) - (f, \varphi_i), \\
\\
\eta_2^i = \nu_1(\nabla \cdot e(w), \phi_i) + \langle B_{u_m} w_m, \phi_i \rangle + 4\nu_r(w_m, \phi_i) \\
\\
-2\nu_r(\nabla \times u_m, \phi_i) - (g, \phi_i).
\end{array} \tag{4.4}
$$

Seja $\xi = ((\xi_1^i), (\xi_2^i))_{1 \leq i \leq m}$ as componentes do vetor u_m de V_m e do vetor w_m de W_m. A aplicação $P : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ definida por $P\xi = \eta$ é contínua. Se nós provarmos que $(P\xi, \xi) \geq 0$ para $\|\xi\|_{\mathbb{R}^{2m}} = \rho$, com $\rho > 0$ apropriado, então seguirá pelo Lema do Ângulo Agudo que existe um ξ na bola $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^{2m}$ tal que $P\xi = 0$. Isto implica na existência de uma solução para (4.3). De fato, temos que

$$
\begin{aligned}
(P\xi,\xi) &= \sum_{i=1}^{m}\xi_1^i\eta_1^i+\sum_{i=1}^{m}\xi_2^i\eta_2^i\\
&= (\nu+\nu_r)\|u_m\|^2+(\mathcal{K}u_m,u_m)-2\nu_r(\nabla\times w_m,u_m)-\langle f,u_m\rangle\\
&+ \nu_1\|w_m\|^2+\nu_1|\nabla\cdot w_m|^2+4\nu_r|w_m|^2-2\nu_r(\nabla\times u_m,w_m)-(g,w_m)\\
&\geq (\nu+\nu_r)\|u_m\|^2-2\nu_r|w_m|^2-\frac{\nu_r}{2}||u_m||^2-||f||||u_m||\\
&+ \nu_1||w_m||^2+4\nu_r|w_m|^2-2\nu_r|w_m|^2-\frac{\nu_r}{2}||u_m||^2+||g||||w_m||\\
&= \nu||u_m||^2+\nu_1||w_m||^2-||f||||u_m||-||g||||w_m||\\
&\geq \alpha_1(||u_m||^2+||w_m||^2)-\alpha_2(||u_m||+||w_m||),
\end{aligned}
$$

Onde $\alpha_1=\min(\nu,\nu_1)$ e $\alpha_2=\max(||f||,||g||)$, portanto

$$(P\xi,\xi)\geq\alpha_1(||u_m||^2+||w_m||^2)-\alpha_2(||u_m||+||w_m||). \tag{4.5}$$

Logo existe um $\beta_1>0$ tal que

$$(P\xi,\xi)\geq\beta_1(||u_m||+||w_m||)^2-\alpha_2(||u_m||+||w_m||). \tag{4.6}$$

Pelo Lema da Combinação Linear, segue que

$$||u_m||\geq C_1||\xi_1||,\quad ||w_m||\geq C_2||\xi_2||,$$

e assim,

$$||u_m||+||w_m||\geq C(||\xi_1||+||\xi_2||)\geq C||\xi||. \tag{4.7}$$

Escolhendo

$$||\xi||=\rho,\quad ||\xi||\geq\frac{\alpha_2}{C\beta_1}. \tag{4.8}$$

Por (4.7) e (4.8), obtemos que

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1}\leq C||\xi||\leq||u_m||+||w_m||. \tag{4.9}$$

Portanto

$$\beta_1(||u_m||+||w_m||)^2-\alpha_2(||u_m||+||w_m||)\geq 0. \tag{4.10}$$

De (4.6) e (4.10) segue que

$$(P\xi, \xi) \geq 0, \quad \text{for} \quad \|\xi\| = \rho. \tag{4.11}$$

Pelo Lema do Ângulo Agudo (1.7) existe $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$, com $||\xi|| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$. Então o sistema aproximado (4.3) possui solução $u_m \in V_m$ e $w_m \in W_m$.

4.1.2 Primeira Estimativa

Fazendo $\varphi = u_m$ em $(4.3)_1$ e $\phi = w_m$ em $(4.3)_2$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} (\nu + \nu_r)(Au_m, u_m) + (\mathcal{K}u_m, u_m) + \langle B_{u_m} u_m, u_m \rangle = \\ \\ 2\nu_r(\nabla \times w_m, u_m) + (f, u_m) \\ \\ -\nu_1(\nabla \cdot e(w_m), w_m) + \langle B_{u_m} w_m, w_m \rangle + 4\nu_r(w_m, w_m) = \\ \\ 2\nu_r(\nabla \times u_m, w_m) + (g, w_m) \end{array} \right. \tag{4.12}$$

portanto

$$\begin{aligned} (\nu + \nu_r)||u_m||^2 \quad &+ \quad \int_\Omega M(|e(u_m(t))|^2)|e_{ij}(u_m(t))|^2 dx \\ &\leq \quad 2\nu_r|w_m(t)|\|u_m(t)\| + \|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\|, \end{aligned} \tag{4.13}$$

e

$$\begin{aligned} \nu_1\|w_m(t)\|^2 \quad &+ \quad \nu_1|\nabla \cdot w_m(t)|^2 + 4\nu_r|w_m(t)|^2 \\ &\leq \quad 2\nu_r\|u_m(t)\||w_m(t)| + \|g(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_m(t)\|, \end{aligned} \tag{4.14}$$

pois $b(u,u,u) = b(u,w,w) = 0$, $\forall u \in V$, $\forall w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (ver Lions [13]), $|\nabla \times u_m| = |\nabla u_m| = \|u_m\|$ e $(\nabla \times w_m, u_m) = (w_m, \nabla \times u_m)$ (ver Lukaszewicz [8]). Agora usando a desigualdade de Young obtemos de (4.13) e (4.14), respectivamente

$$\begin{aligned} &(\nu + \nu_r)\|u_m(t)\|^2 + \frac{c_1 K}{2}\|u_m(t)\|_{V_4}^4 + \nu_2\|u_m(t)\|^4 \\ &\leq \frac{\nu}{4}\|u_m(t)\|^2 + c_\nu|w_m(t)|^2 + \frac{\nu_2}{2}\|u_m(t)\|^4 + c_{\nu_2}\|f(t)\|_{V'}^{4/3}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\nu_1||w_m||^2 + 4\nu_r|w_m|^2 \leq \frac{\nu_r}{2}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu_r|w_m(t)|^2 + \frac{\nu_1}{2}\|w_m(t)\|^2$$
$$+2c_{\nu_1}\|g(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{4.16}$$

Pela desigualdade de Korn (1.3) e pela propriedade (1.1) de M segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(|e(u_m)|^2)|e_{ij}(u_m)|^2dx \geq \frac{c_1}{2}\|e(u_m)\|^4_{L^4(\Omega)} \geq \frac{c_1K}{2}\|u_m\|^4_{V_4}, \tag{4.17}$$

e

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(|e(u_m)|^2)|e_{ij}(u_m)|^2dx \geq \frac{c_1}{2}\|e(u_m)\|^4_{L^4(\Omega)} \geq \nu_2\|u_m\|^4. \tag{4.18}$$

Somando as inequações (4.15) e (4.16) vem que,

$$\nu||u_m||^2 + \frac{c_1K}{2}||u_m||^4_{V_4} + \frac{\nu_2}{2}||u_m||^4 + \frac{\nu_1}{2}||w_m|| \leq C. \tag{4.19}$$

Isto implica nas seguintes limitações abaixo

$$(u_m) \text{ é limitada em } V \cap V_4, \tag{4.20}$$

$$(w_m) \text{ é limitada em } H^1_0(\Omega). \tag{4.21}$$

4.1.3 Convergência da forma trilinear

Tendo a seguinte imersão compacta $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, podemos extrair uma subsequência de (u_m), tal que

$$u_{mi} \to u_i \text{ forte em } L^2(\Omega) \tag{4.22}$$

ou seja,

$$u_{m_i} \to u_i \text{ a.e. em } \Omega. \tag{4.23}$$

Sabendo que (w_m) é limitado em $H_0^1(\Omega)$, podemos escrever

$$w_{m_j} \to w_j \text{ a.e. em } \Omega. \tag{4.24}$$

de (4.23) e (4.24) podemos concluir a seguinte convergência

$$u_{mi} w_{m_j} \to u_i w_j \text{ a.e. em } \Omega. \tag{4.25}$$

Para $n \leq 4$, temos que

$$u_{m_i} w_{mj} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega),$$

portanto

$$\begin{aligned} |u_{m_i} w_{m_j}|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |u_{m_i}(x) w_{m_j}(x)|^2 \, dx = \int_\Omega |u_{m_i}(x)|^2 |w_{m_j}(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{m_i}(x)|^4 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |w_{m_j}(x)|^4 dx = \\ &= \frac{1}{2}\|u_{m_i}\|^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}\|w_{m_j}\|^4_{L^4(\Omega)} \leq c. \end{aligned} \tag{4.26}$$

segue de (4.23), (4.26) e do lema de Lions que

$$u_{m_i} w_{m_j} \to u_i w_j \text{ fraco em } L^2(\Omega) \tag{4.27}$$

Notemos também que,

$$\frac{\partial w_{j_k}}{\partial x_k} \in L^2(\Omega) \tag{4.28}$$

pois $w_{j_k} \in H_0^1(\Omega)$. Logo, segue de (4.27) e (4.28) que

$$\lim_{m\to\infty} b(u_m, w_m, w_j) = -\lim_{m\to\infty} b(u_m, w_j, u_m) =$$

$$= -\lim_{m\to\infty} \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_{m_i}(x) \frac{\partial w_{j_k}}{\partial x_k}(x) w_{m_k}(x)\, dx \to \tag{4.29}$$

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_i(x) \frac{\partial w_{j_k}}{\partial x_k}(x) w_k(x)\, dx = b(u, w, w_j).$$

4.1.4 Limitação de $\mathcal{K}u_m$

Tomando $v \in V \cap V_4$. De (2.8), da Desigualdade Hölder e de (1.1) podemos escrever que

$$
\begin{aligned}
|\langle \mathcal{K}u_m, v\rangle| = & \left| \int_\Omega M(|e(u_m)|^2) e_{ij}(u_m) e_{ij}(v) dx \right| \\
\leq & \; c \int_\Omega |e(u_m)|_E^3 |e_{ij}(v)| dx \\
\leq & \; c \int_\Omega |\nabla u_m|_E^3 |\nabla v|_E dx \\
= & \; c \|\nabla u_m\|_{L^4(\Omega)}^3 \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \\
= & \; c||u_m||_{V_4}^3 ||v||_{V_4} \\
\leq & \; c||u_m||_{V_4}^3 ||v||_{V \cap V_4}
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Portanto, de (4.20) obtemos

$$
(\mathcal{K}u_m) \text{ é limitada em } (V \cap V_4)'. \tag{4.31}
$$

Notemos que (4.20), (4.21), (4.29) e (4.31) implicam que existem subsequências de (u_m) e (w_m) que também serão denotadas por (u_m) e (w_m), tal que

$$
u_m \longrightarrow u \qquad \text{fraco em} \qquad V \cap V_4 \tag{4.32}
$$

$$
w_m \longrightarrow w \qquad \text{fraco em} \qquad H_0^1(\Omega) \tag{4.33}
$$

$$
\mathcal{K}u_m \longrightarrow \chi \qquad \text{fraco em} \qquad V \cap V_4. \tag{4.34}
$$

Usando as convergências obtidas e a densidade de V_m e W_m, segue que

$$
\left|
\begin{aligned}
& (\nu + \nu_r) a(u, v) + \langle \chi, v\rangle + b(u, u, v) = \\
& 2\nu_r (\nabla \times w, v) + \langle f, v\rangle, \;\; \forall \;\; v \in V \cap V_4 \\
& -\nu(\nabla \cdot e(w), \tilde{v}) + b(u, w, \tilde{v}) + 4\nu_r (w, \tilde{v}) = \\
& 2\nu_r (\nabla \times u, \tilde{v}) + (g, \tilde{v}), \;\; \forall \;\; \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
\right.
\tag{4.35}
$$

Nosso próximo objetivo é provar que $\chi = \mathcal{K}u$

4.1.5 Convergência de $\mathcal{K}u_m$

Sendo $\mathcal{K}$ monótono, temos que

$$\langle \mathcal{K}u_m - \mathcal{K}v, u_m - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \cap V_4, \tag{4.36}$$

ou seja,

$$\langle \mathcal{K}u_m, u_m \rangle - \langle \mathcal{K}u_m, v \rangle - \langle \mathcal{K}v, u_m - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \cap V_4 \tag{4.37}$$

Do sistema (4.12),podemos escrver

$$\langle \mathcal{K}u_m, u_m \rangle = -(\nu + \nu_r)||u_m||^2 + 2\nu_r(\nabla \times w_m, u_m) + (f, u_m) \tag{4.38}$$

da desigualdade (4.37) e da equação (4.38)

$$\begin{aligned} -(\nu + \nu_r)||u_m||^2 \; &+ 2\nu_r(\nabla \times w_m, u_m) + (f, u_m) \\ -\langle \mathcal{K}u_m, v \rangle \; &- \langle \mathcal{K}v, u_m - v \rangle \geq 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

da limitação (4.20) temos que

$$u_m \to u \quad \text{fraco em } V \tag{4.40}$$

logo

$$(\nu + \nu_r)||u||^2 \leq \liminf (\nu + \nu_r)||u_m||^2 \tag{4.41}$$

$$-(\nu + \nu_r)||u||^2 \geq -\liminf (\nu + \nu_r)||u_m||^2 \tag{4.42}$$

$$-(\nu + \nu_r)||u||^2 \geq \limsup -(\nu + \nu_r)||u_m||^2 \tag{4.43}$$

tomando o $\limsup$ em (4.39) e usando as convergências anteriores

$$
\begin{aligned}
&-(\nu+\nu_r)||u||^2 \; + 2\nu_r(\nabla\times w,u)+(f,u)\\
&-\langle\chi,v\rangle \quad -\langle\mathcal{K}v,u-v\rangle\geq 0
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

Fazendo $v=u$ em $(4.35)_1$ segue que

$$(\nu+\nu_r)||u||^2+\langle\chi,u\rangle=2\nu_r(\nabla\times w,u)+\langle f,u\rangle \tag{4.45}$$

$$\langle f,u\rangle=(\nu+\nu_r)||u||^2+\langle\chi,u\rangle-2\nu_r(\nabla\times w,u) \tag{4.46}$$

da desigualdade (4.44) e da equção (4.46) obtemos que

$$\langle\chi,u-v\rangle-\langle\mathcal{K}v,u-v\rangle\geq 0 \quad \forall \;\; v\in V\cap V_4. \tag{4.47}$$

Considerando $v=u-\lambda\theta$, $\lambda\geq 0$ e $\theta\in V\cap V_4$ arbitrário vem que

$$\langle\chi-\mathcal{K}(u-\lambda\theta),\theta\rangle\geq 0 \quad \forall \;\; \theta\in V\cap V_4 \tag{4.48}$$

mas o operador $\mathcal{K}$ é hemicontínuo, então

$$\langle\chi-\mathcal{K}(u-\lambda\theta),\theta\rangle \xrightarrow{\lambda\to 0} \langle\chi-\mathcal{K}u,\theta\rangle \quad \forall \;\; \theta\in V\cap V_4 \tag{4.49}$$

$$\langle\chi-\mathcal{K}u,\theta\rangle\geq 0 \quad \forall \;\; \theta\in V\cap V_4 \tag{4.50}$$

logo para $\theta\neq 0$

$$\langle\chi-\mathcal{K}u,-\theta\rangle\geq 0\Rightarrow-\langle\chi-\mathcal{K}u,\theta\rangle\geq 0\Rightarrow\langle\chi-\mathcal{K}u,\theta\rangle\leq 0 \tag{4.51}$$

$$\langle\chi-\mathcal{K}u,\theta\rangle=0 \quad \forall \;\; \theta\in V\cap V_4 \tag{4.52}$$

ou seja, para $\theta\neq 0$

$$\mathcal{K}u=\chi \;\; \text{em} \;\; V\cap V_4 \tag{4.53}$$

Portanto, para (4.35) e (4.53)

$$(\nu+\nu_r)\mathcal{A}u+\mathcal{K}u+B_u u=2\nu_r\nabla\times w+f \quad \text{em} \quad (V\cap V_4)' \tag{4.54}$$

$$-\nu\nabla\cdot e(w)+B_u w+4\nu_r w=2\nu_r\nabla\times u+g \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega) \tag{4.55}$$

4.1.6 Prova do Teorema 4.2

Sejam (u_1,w_1) e (u_2,w_2) soluções do problema (4.1). Então,

$$u_1,u_2\in V\cap V_4 \qquad w_1,w_2\in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{4.56}$$

Consideremos $\widetilde{u}=u_1-u_2$ e $\widetilde{w}=w_1-w_2$. Logo, $(\widetilde{u},\widetilde{w})$ satisfazem

$$\left|\begin{array}{l}(\nu+\nu_r)A\widetilde{u}+(\mathcal{K}u_1-\mathcal{K}u_2)+(B_{u_1}u_1-B_{u_2}u_2)=2\nu_r\nabla\times\widetilde{w},\\[2ex] \nu_1A\widetilde{w}+\nu_1\nabla(\nabla\cdot\widetilde{w})+(B_{u_1}w_1-B_{u_2}w_2)+4\nu_r\widetilde{w}=2\nu_r\nabla\times\widetilde{u},\end{array}\right. \tag{4.57}$$

onde a primeira equação é considerada em $(V\cap V_4)'$, e a segunda em $H^{-1}(\Omega)$. Tomando a dualidade nas equações $(4.57)_1$ e $(4.57)_2$ com $\widetilde{u}$ e $\widetilde{w}$, respectivamente, obtemos

$$\left|\begin{array}{l}(\nu+\nu_r)\|\widetilde{u}\|^2+<\mathcal{K}u_1-\mathcal{K}u_2,\widetilde{u}>+<B_{u_1}u_1-B_{u_2}u_2,\widetilde{u}>\\[2ex] =2\nu_r\ <\nabla\times\widetilde{w},\widetilde{u}>,\\[2ex] \nu_1\|\widetilde{w}\|^2+\nu_1|\nabla\cdot\widetilde{w}|^2+<B_{u_1}w_1-B_{u_2}w_2,\widetilde{w}>+4\nu_r|\widetilde{w}|^2\\[2ex] =2\nu_r<\nabla\times\widetilde{u},\widetilde{w}>,\end{array}\right. \tag{4.58}$$

Notemos que

$$\begin{array}{rcl}\langle B_{u_1}u_1-B_{u_2}u_2,\widetilde{u}\rangle &=& b(\widetilde{u},u_2,\widetilde{u}),\\[1ex] \langle B_{u_1}w_1-B_{u_2}w_2,\widetilde{w}\rangle &=& b(\widetilde{u},w_2,\widetilde{w}).\end{array} \tag{4.59}$$

pela monotonicidade de $\mathcal{K}$ temos que $\langle\mathcal{K}u_1-\mathcal{K}u_2,\widetilde{u}\rangle\ \geq 0$. Da equação $(4.58)_1$

podemos escrever

$$(\nu+\nu_r)\|u_1-u_2\|^2+b(u_1-u_2,u_2,u_1-u_2)\leq 2\nu_r\|u\|\|w\| \tag{4.60}$$

vem do Lema 1.5, que

$$(\nu+\nu_r)\|u_1-u_2\|^2 \leq \|u_1-u_2\|^2\|u_2\| + 2\nu_r\|u_1-u_2\|\|w_1-w_2\| \tag{4.61}$$

$$(\nu+\nu_r)\|u_1-u_2\| \leq \|u_1-u_2\|\|u_2\| + 2\nu_r\|w_1-w_2\| \tag{4.62}$$

usando $(4.58)_2$, $(4.59)_2$ e a Desigualdade de Yong

$$\nu_1\|\widetilde{w}\|^2 + \nu_1|\nabla\cdot\widetilde{w}|^2 + 4\nu_r|\widetilde{w}|^2 \leq |b(\widetilde{u}, w_2, \widetilde{w})| + 2\nu_r\|\widetilde{u}\|\|\widetilde{w}\| \tag{4.63}$$

pela desigualdade de Hölder's

$$\nu_1\|\widetilde{w}\|^2 \leq c|u_1-u_2|_{L^4(\Omega)}|w_2|_{L^2(\Omega)}|w_1-w_2|_{L^4(\Omega)} + 2\nu_r\|\widetilde{u}\|\|\widetilde{w}\| \tag{4.64}$$

da desigualdade de Poincaré, do Teorema de Rellich e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ para $n \leq 4$ temos que

$$\begin{aligned} \nu_1\|w_1-w_2\|^2 &\leq c\|u_1-u_2\|\|w_2\|\|w_1-w_2\| \\ &+ 2\nu_r\|u_1-u_2\|\|w_1-w_2\| \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\nu_1\|w_1-w_2\| \leq c\|u_1-u_2\|\|w_2\| + 2\nu_r\|u_1-u_2\|, \tag{4.66}$$

vem de (4.62) e (4.66) que

$$(\nu+\nu_r)\|u_1-u_2\| \leq \{c\|u_2\| + 2\nu_r\nu^{-1}[2c\|w_2\| + 2\nu_r]\}\|u_1-u_2\| \tag{4.67}$$

agora usando (4.20) e (4.21) podemos escrever,

$$(\nu+\nu_r)\|u_1-u_2\| \leq c\|u_1-u_2\| \tag{4.68}$$

Portanto para $(\nu+\nu_r)$ suficientemente grande, segue que $u_1 = u_2$, o que também implica que $w_1 = w_2$

Provando assim o teorema 4.2 $\square$

Apêndice A

Sobre o Tensor de Estresse

Nesse apêndice vamos mostrar que o tensor $\tau : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}^{d^2}$ e seu potencial $\Phi : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}$ definidos no capítulo de preliminares em (1.11) e (1.12) satisfazem as hipóteses do Lema 1.2 para $p = 4$.

Lema A.1. *Seja $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma aplicação real de classe C^1 sobre $(0, +\infty)$ satisfazendo as seguintes hipóteses*

$$C_1 \left(1 + t^{1/2}\right)^2 \leq M(t) \quad \leq \quad C_1 \left(1 + t^{1/2}\right)^2, \tag{A.1}$$

$$0 < M'(t) \quad \leq \quad \frac{C_3 \left(1 + t^{1/2}\right)}{t^{1/2}}, \tag{A.2}$$

em que C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas. Nessas condições, o tensor $\tau : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}^{d^2}$ e o potencial $\Phi : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}$ dados respectivamente por

$$\tau(D) \quad = \quad M\left(|D|_E^2\right) D, \tag{A.3}$$

$$\Phi(D) \quad = \quad \frac{1}{2} \int_0^{|D|_E^2} M(s) ds, \tag{A.4}$$

Satisfazem as seguintes condições para $p = 4$

$$\frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} \quad = \quad \tau_{ij}(D), \tag{A.5}$$

$$\Phi(0) \quad = \quad \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = 0, \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} B_{ij} B_{kl} \quad \geq \quad C(1 + |D|_E)^{p-2} |B|_E^2, \tag{A.7}$$

$$\left|\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{ij}\partial D_{kl}}\right| \;\leq\; C(1+|D|_E)^{p-2}. \tag{A.8}$$

Demonstração. Primeiro derivamos diretamente o potencial Φ e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi(D)}{\partial D_{ij}} &= \frac{1}{2}M(|D|_E^2)\frac{\partial}{\partial D_{ij}}\left(\sum_{k,l} D_{kl}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}M\left(|D|_E^2\right)2D_{ij} \\
&= M\left(|D|_E^2\right)D_{ij} \\
&= \tau_{ij}(D)
\end{aligned}$$

Isso prova a validade de (A.5). Em vista de (A.5), temos imediatamente a validade de (A.6). Para estabelecer (A.7) usamos (A.5) para escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}} &\overset{(A.5)}{=} \frac{\partial}{\partial D_{kl}}\tau_{ij}(D) \\
&= \frac{\partial}{\partial D_{kl}}\left(M(|D|_E^2)D_{ij}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial D_{kl}}\left[M(|D|_E^2)\right]D_{ij} + M(|D|_E^2)\frac{\partial(D_{ij})}{\partial D_{kl}} \\
&= 2M'(|D|_E^2)D_{kl}D_{ij} + M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}.
\end{aligned}$$

Agora usando a hipótese (A.1) sobre M, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}}B_{kl}B_{ij} &= \left[2M'(|D|_E^2)D_{kl}D_{ij} + M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}\right]B_{kl}B_{ij} \\
&\geq 2M'(|D|_E^2)\left(D\cdot B\right)^2 + M(|D|_E^2)B_{ij}B_{ij} \\
&\overset{(A.1)}{\geq} C\left(1+|D|_E\right)^2|B|^2.
\end{aligned}$$

Logo vale (A.7). Por fim, para verificar (A.8), tomamos o módulo da expressão obtida acima para a segunda derivada de Φ e concluímos que

$$\left|\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}}\right| \leq 2|M'(|D|_E^2)D_{kl}D_{ij}| + |M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}|.$$

Supondo $i=k$ e $j=l$, usamos as hipóteses (A.1) e (A.2) sobre M para obter

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}}\right| &\leq 2|M'(|D|_E^2)D_{ij}^2| + |M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}| \\
&\overset{(A.1)}{\leq} 2M'\left(|D|_E^2\right)|D|_E^2 + C\left(1+|D|_E^2\right) \\
&\overset{(A.2)}{\leq} \frac{C\left(1+|D|_E\right)|D|_E^2}{|D|_E} + C\left(1+|D|_E\right)^2 \\
&\leq C\left(1+|D|_E\right)^2.
\end{aligned}
$$

Isso conclui essa demonstração. $\square$

Apêndice B

Hemicontinuidade e Monotonicidade de $\mathcal{K}$

B.1 Monotonicidade de $\mathcal{K}$

Nesta seção vamos demonstrar a monotonicidade da forma $\mathcal{K}$, ou seja, a demonstração da observação 2.1

Observação B.1. *Observamos que devido a desigualdade (1.9) do Lema 1.2, temos que*

$$\langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0,$$

quaisquer $u_1, u_2 \in V$. Logo $\mathcal{K} : V \cap V_4 \to (V \cap V_4)'$ é um operador monótono.

Demonstração. Primeiro de tudo, definamos o tensor $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$, da seguinte forma:

$$\tau_{ij}(\eta) = M(|\eta|^2)\eta_{ij},$$

definamos agora $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ que é a função potencial para τ,

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^{|\eta|^2} M(t)dt.$$

Pela definição de $\mathcal{K}$, podemos afirmar que:

$$\langle \mathcal{K}u - \mathcal{K}v \rangle = \int_\Omega [M(|e(u)|^2)e_{ij}(u) - M(|e(v)|^2)e_{ij}(v)][e_{ij}(u) - e_{ij}(v)]dx \tag{B.1}$$

$$\langle \mathcal{K}u - \mathcal{K}v \rangle = \int_\Omega [\tau_{ij}(e(u)) - \tau_{ij}(e(v))][e_{ij}(u) - e_{ij}(v)]dx. \tag{B.2}$$

Agora temos ,

$$\frac{\partial \Phi(\eta)}{\partial \eta_{ij}} = \tau_{ij}(\eta), \quad \Phi(0) = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial \eta_{ij}} = 0$$

derivando mais uma vez, podemos escrever

$$\frac{\partial^2 \Phi(\eta)}{\partial \eta_{kl}\partial \eta_{ij}} = 2M'(|\eta|^2)\eta_{ij}\eta_{kl} + M(|\eta|^2)\frac{\partial \eta_{ij}}{\partial \eta_{kl}}$$

multiplicando agora ambos os lados por $\xi_{kl}\xi_{ij}$, temos o seguinte

$$\frac{\partial^2 \Phi(\eta)}{\partial \eta_{kl}\partial \eta_{ij}}\xi_{kl}\xi_{ij} = 2M'(|\eta|^2)(\eta\xi)^2 + M(|\eta|^2)\delta_{kl}\delta_{ij}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq M(|\eta|^2)|\xi|^2$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\eta)}{\partial \eta_{kl}\partial \eta_{ij}}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq C(1+|\eta|)^2|\xi|^2.$$

Estimando agora, $\left|\frac{\partial^2 \Phi(\eta)}{\partial \eta_{kl}\partial \eta_{ij}}\right|$

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi(\eta)}{\partial \eta_{kl}\partial \eta_{ij}}\right| \leq 2M'(|\eta|^2)|\eta_{ij}\eta_{kl}| + M(|\eta|^2)|\delta_{ij}||\delta_{kl}|$$

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi(\eta)}{\partial \eta_{kl}\partial \eta_{ij}}\right| \leq C_3\frac{(1+|\eta|)}{|\eta|}|\eta|^2 + C_2(1+|\eta|)^2$$

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi(\eta)}{\partial \eta_{kl}\partial \eta_{ij}}\right| \leq C_3(1+|\eta|)|\eta| + C_2(1+|\eta|)^2 \leq C(1+|\eta|)^2.$$

Portanto pelo lema 1.2, temos que

$$(\tau_{ij}(e(u)) - \tau_{ij}(e(v)))(e_{ij}(u) - e_{ij}(v)) \geq 0, \tag{B.3}$$

combinando (B.2) e (B.3), obtemos o seguinte

$$\langle \mathcal{K}u - \mathcal{K}v, u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in V \cap V_4,$$

concluindo assim a demonstração da observação 2.1. $\square$

B.2 Hemicontinuidade de $\mathcal{K}$

Mostremos agora que $\mathcal{K}$ é hemicontínuo, mais precisamente vamos mostrar a seguinte observação:

Observação B.2. *O operador $\mathcal{K} : V \cap V_4 \to (V \cap V_4)'$ é hemicontínuo, ou seja,*

$$\lambda \mapsto \langle\ \mathcal{K}(u + \lambda v), w\ \rangle$$

é contínua $\forall u, v, w \in V,$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ em $\mathbb{R}$, como $M \in C^1$, temos que

$$M(|e(u + \lambda_n v)|^2) \longrightarrow M(|e(u + \lambda v)|^2) \text{ q.s. em } \Omega, \tag{B.4}$$

além disso

$$e_{ij}(u + \lambda_n v) \longrightarrow e_{ij}(u + \lambda v) \text{ q.s. em } \Omega. \tag{B.5}$$

Agora, combinando (B.4) e (B.5)

$$M(|e(u+\lambda_n v)|^2)e_{ij}(u+\lambda_n v)e_{ij}(w) \to M(|e(u+\lambda v)|^2)e_{ij}(u+\lambda v)e_{ij}(w) \text{ q.s. em } \Omega, \tag{B.6}$$

usando as propriedades de M e o fato de que (λ_n) é limitada em $\mathbb{R}$, temos

$$|M(|e(u + \lambda_n v)|^2)e_{ij}(u + \lambda_n v)e_{ij}(w)| \leq C(1 + |e(u + \lambda_n v)|)^2|e_{ij}(u + \lambda_n v)||e_{ij}(w)|$$

$$|M(|e(u+\lambda_n v)|^2)e_{ij}(u+\lambda_n v)e_{ij}(w)| \leq C(1+|e(u+\lambda_n v)|^2)(|e_{ij}(u)|+|\lambda_n|e_{ij}(v)|)|e_{ij}(w)|$$

$$|M(|e(u + \lambda_n v)|^2)e_{ij}(u + \lambda_n v)e_{ij}(w)| \leq$$
$$C(1 + 2(|e(u)|^2 + |\lambda_n|^2|v|^2))(|e_{ij}(u)| + |\lambda_n|e_{ij}(v)|)|e_{ij}(w)|$$

temos o seguinte,

$$C(1 + 2(|e(u)|^2 + |\lambda_n|^2|v|^2)) \in L^2 \tag{B.7}$$

$$(|e_{ij}(u)| + |\lambda_n|e_{ij}(v)|) \in L^4 \tag{B.8}$$

$$|e_{ij}(w)| \in L^4 \tag{B.9}$$

logo

$$C(1 + 2(|e(u)|^2 + |\lambda_n|^2|v|^2))(|e_{ij}(u)| + |\lambda_n|e_{ij}(v)|)|e_{ij}(w)| \in L^1. \tag{B.10}$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\langle \mathcal{K}(u + \lambda_n v), w\rangle = \int_\Omega M(|e(u + \lambda_n v)|^2)e_{ij}(u + \lambda_n v)e_{ij}(w)dx \tag{B.11}$$

$$\longrightarrow \int_\Omega M(|e(u + \lambda v)|^2)e_{ij}(u + \lambda v)e_{ij}(w)dx = \langle \mathcal{K}(u + \lambda v), w\rangle, \tag{B.12}$$

portanto

$$\langle \mathcal{K}(u + \lambda_n v), w\rangle \longrightarrow \langle \mathcal{K}(u + \lambda v), w\rangle.$$

Provando assim, a hemicontinuidade de $\mathcal{K}$ $\square$

Apêndice C

Sobre algumas Estimativas Importantes

Neste apêndice vamos apresentar as demonstrações dos Lemas 1.1, 1.2, 1.4, 1.5 e 1.7. Os enunciados desses Lemas serão repetidos por conveniência.

C.1 Desigualdade de Korn

Lema C.1. *(Desigualdade de Korn) Seja $1 < p < \infty$. Então, existe uma constante $K_p = K_p(\Omega)$, tal que a desigualdade*

$$K_p||v||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ||e(v)||_{L^p(\Omega)}$$

é válida qualquer que seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto limitado de classe C^1.

Demonstração do Lema C.1. A demonstração feita a seguir foi adaptada de *J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta e M. Růžička* [15], [1996], p. 196. Sejam Ω conforme o enunciado e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Afirmamos que se

$$T, \frac{\partial T}{\partial x_i} \in \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)' \text{ (dual topológico de } W_0^{1,q}(\Omega)),$$

para algum $q \in (1, \infty)$ e para todo $i = 1, ..., d$, então existe uma função $u \in L^{q'}(\Omega)$, com $q' = \dfrac{q}{q-1}$, tal que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mais ainda, existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{q'}^{q'} \leq C \left(\|T\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}^{q'} + \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}^{q'} \right) \tag{C.1}$$

De fato, supondo que $m \in \mathbb{Z}$, $T \in W^{m-1,q'}(\Omega)$ e $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in W^{m-1,q'}(\Omega)$, então $T \in W^{m,q'}(\Omega)$. Disso segue (C.1). A seguir passamos a demonstração da Desigualdade de Korn. Seja o espaço

$$E(\Omega)^d := \left\{ u \in L^p(\Omega);\ e(u) \in L^p(\Omega)^{d^2} \right\},$$

com $\|u\|_{E(\Omega)^d} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|e(u)\|_{L^p(\Omega)}$. Nesses termos, $E(\Omega)^d$ é um espaço de Banach. Seja agora

$$\mathcal{I} : W^{1,p}(\Omega)^d \to E(\Omega)^d$$

definida pela aplicação identidade. É claro que $\mathcal{I}$ é uma aplicação contínua. Queremos mostrar que $\mathcal{I}$ é injetiva. Para esse propósito, tomemos $v \in E(\Omega)^d$. Assim obtemos, no sentido das distribuições e para quaisquer $i, j, k = 1, ..., d$ a seguinte igualdade

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}(v)}{\partial x_j} + \frac{\partial e_{ij}(v)}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{jk}(v)}{\partial x_i}. \tag{C.2}$$

Como $e(v) \in L^p(\Omega)^{d^2}$, a igualdade (C.2) implica que

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \in \left(W_0^{1,p'}(\Omega) \right)',$$

em que p' é tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Portanto, segue de $v \in L^p(\Omega)^d$ que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in \left(W_0^{1,p'}(\Omega) \right)'.$$

Logo desigualdade (C.1) obtida acima nos garante que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), \quad \forall i, j = 1, ...d.$$

Segue-se que $v \in W^{1,p}(\Omega)^d$ e $\mathcal{I}$ é injetiva. Isso nos diz que $W^{1,p}(\Omega)^d$ e $E(\Omega)^d$ coincidem (em certo sentido). Usando o Teorema da Aplicação Aberta (veja por exemplo *H. Brézis* [10], [1983]) obtemos

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(p,\Omega)\left(\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|e(v)\|_{L^p(\Omega)}\right). \tag{C.3}$$

Resta mostrar que $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1(p,\Omega)\|e(v)\|_{L^p(\Omega)}$, qualquer que seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)^d$. Faremos isso por contradição. Suponhamos que exista uma sequência $(v_m) \subset W_0^{1,p}(\Omega)^d$, tal que $\|v_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $m\|e(v_m)\|_{L^p(\Omega)} < 1$. Teremos

$$e(v_m) \to 0 \quad \text{forte em } L^p(\Omega)^{d^2}.$$

Usando (C.3), construímos uma subsequência de (v_m), ainda denotada por (v_m), tal que as seguintes convergências são asseguradas

$$v_m \rightharpoonup v \quad \text{fraco em } W^{1,p}(\Omega)^d,$$

$$v_m \to v \quad \text{fraco em } L^p(\Omega)^d.$$

Segue-se que $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $v|_{\partial\Omega} = 0$ e $e(v) = 0$. É possível demonstrar que um campo de vetores v, tais que $e(v) = 0$ tem a forma $v = a + b \times x$ (veja em *J. Nečas e Hlaváček* [19], [1981]). Devido às condições de contorno sobre v, devemos ter $v \equiv 0$. Contradição com $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$. □

C.2 Lema Algébrico

Lema C.2. *Sejam $p \geq 2$, $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ tais que as seguintes assertivas são satisfeitas $\forall B, D \in \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e $i,j,k,l = 1,...,d$*

$$\frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} = \tau_{ij}(D), \tag{C.4}$$

$$\Phi(0) = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = 0, \tag{C.5}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij}\partial D_{kl}} B_{ij}B_{kl} \geq C_3(1+|D|)^{p-2}|B|^2, \tag{C.6}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij}\partial D_{kl}}\right| \leq C_4(1+|D|)^{p-2}. \tag{C.7}$$

Nessas condições existem constantes positivas C_ν, $\nu = 5, 6, 7$ tais que

$$C_5(1+|D|^{p-2})|D|^2 \leq \Phi(D) \leq C_6(1+|D|)^p, \tag{C.8}$$

$$(\tau(B)-\tau(D)).(B-D) \geq C_7|B-D|^2. \tag{C.9}$$

Demonstração do Lema C.2. Essa demonstração foi feita seguindo as ideias apresentadas em *J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta e M. Rủžička* [15], [1996], p. 198-202. Primeiro vamos estabelecer a validade de (C.9). Devido a (C.4), temos

$$(\tau_{ij}(B)-\tau_{ij}(D))(B_{ij}-D_{ij}) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi(D+s(B-D))}{\partial B_{ij}}\right) ds(B_{ij}-D_{ij})$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial^2\Phi(D+s(B-D))}{\partial B_{ij}\partial B_{kl}}(B_{ij}-D_{ij})(B_{kl}-D_{kl})ds$$

Usando agora (C.6), temos que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2\Phi(D+s(B-D))}{\partial B_{ij}\partial B_{kl}}(B_{ij}-D_{ij})(B_{kl}-D_{kl})ds$$

$$\geq C_3|B-D|^2\int_0^1(1+|D+s(B-D)|)^{p-2}ds$$

Desse modo obtemos

$$(\tau_{ij}(B)-\tau_{ij}(D))(B_{ij}-D_{ij}) \geq C_3|B-D|^2\int_0^1(1+|D+s(B-D)|)^{p-2}ds \tag{C.10}$$

Por outro lado, notamos que

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{1+x^\alpha}{(1+x)^\alpha} < 2, \tag{C.11}$$

qualquer que seja o número real $\alpha > 0$. Como estamos supondo $p \geq 2$, podemos escrever

$$(1+x)^{p-2} \geq \frac{1}{2}(1+x^{p-2}). \tag{C.12}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Segue-se que

$$\int_0^1 (1+|D+s(B-D)|)^{p-2}\, ds \geq \frac{1}{2}\left(1+\int_0^1 |D+s(B-D)|^{p-2}ds\right).$$

Portanto, resta apenas mostrar que

$$\int_0^1 |D + s(B-D)|^{p-2} ds \geq C|B-D|^{p-2}. \tag{C.13}$$

A fim de provar a validade de (C.13) vamos considerar dois casos: $|D| \geq |B-D|$ e $|D| < |B-D|$. Supondo $|D| \geq |B-D|$, temos $|D+s(B-D)| \geq ||D| - s|B-D|| \geq (1-s)|B-D|$. Logo vale (C.13). No caso em que $|D| < |B-D|$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |D + s(B-D)|^{p-2} ds &= \int_0^1 \frac{(|D+s(B-D)|^2)^{p/2}}{|D+s(B-D)|^2} ds \\
&\geq \frac{1}{2|B-D|^2} \left(\int_0^1 |sB + (1-s)D|^2 ds \right)^{p/2} \\
&= \frac{1}{2|B-D|^2} \frac{1}{3^{p/2}} \left(|B|^2 + \langle B, D \rangle + |D|^2 \right)^{p/2} \\
&\geq \frac{1}{2|B-D|^2} \frac{1}{6^{p/2}} (|B|^2 + |D|^2)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Entretanto, $|B-D|^2 \leq 2(|B|^2 - |D|^2)$. Logo obtemos (C.13). A seguir vamos demonstrar (C.8).

Inicialmente notamos que devido a hipótese (C.5) temos que

$$\Phi(D) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\Phi(sD) ds = \int_0^1 \frac{\partial \Phi(sD)}{\partial D_{ij}} D_{ij} ds = \int_0^1 \frac{1}{s} \tau_{ij}(sD) s D_{ij} ds. \tag{C.14}$$

Agora considerando as hipóteses (C.4) e (C.5) podemos escrever

$$\tau_{ij}(B) = \frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} - \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = \int_0^1 \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi(sD)}{\partial D_{ij}} ds = \int_0^1 \frac{\partial^2 \partial \Phi(sD)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} D_{kl} ds. \tag{C.15}$$

Em seguida, considerando (C.15) e (C.6), temos que

$$\tau_{ij}(D) D_{ij} \geq C_3 \int_0^1 (1 + s|D|)^{p-2} ds |D|^2. \tag{C.16}$$

Por fim, usando (C.12) e (C.16), temos que

$$\tau_{ij}(D) D_{ij} \geq \frac{C_3}{2} \int_0^1 \left[1 + (s|D|)^{p-2} \right] ds |D|^2 \geq \frac{C_3}{2(p-1)} (1 + |D|^{p-2}) |D|^2.$$

Essa última desigualdade, juntamente com (C.14) nos assegura a validade de uma parte de (1.8). Para a desigualdade à direita em (C.8) usamos a hipótese (C.7), juntamente com (C.15) para obtermos

$$|\tau_{ij}(D)| \leq C_4 d^2 \int_0^1 (1+s|D|)^{p-2}|D|ds = \frac{C_4 d^2}{p-1}\left[(1+s|D|)^{p-1}\right]_0^1 \leq \frac{C_4 d^2}{p-1}(1+|D|)^{p-1}.$$

Usando essa última desigualdade em (C.14) obtemos o resultado esperado. □

C.3 Estimativa em $L^4(\Omega)$

Lema C.3. *Supondo $d = 2$, existe uma constante C, tal que*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}$$

$\forall u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Demonstração. No que segue apresentamos um esboço das ideias discutidas em *J. L. Lions* [13], [1969], p. 70. Vamos considerar $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Começamos prolongando φ por zero fora de Ω. Daí obtemos

$$\varphi^2(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s}\left[\varphi^2(s,x_2)\right] ds = 2\int_{-\infty}^{x_1} \varphi(s,x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)ds.$$

Segue-se que

$$|\varphi(x_1,x_2)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s,x_2)| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)\right| ds. \tag{C.17}$$

De modo análogo obtemos

$$|\varphi(x_1,x_2)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1,s)| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(x_1,s)\right| ds. \tag{C.18}$$

Multiplicando membro a membro as desigualdades (C.17) e (C.18) ficamos com

$$|\varphi(x)|^4 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\right| dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)\right| dx_2\right),$$

em que denotamos $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. Integrando em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 \, dx \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right| dx \right).$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 \, dx \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 \, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right|^2 dx \right).$$

Ou ainda,

$$\|\varphi\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2 \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\varphi\|^2_{H^1_0(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Por fim usando a densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ obtemos o resultado procurado. □

C.4 Estimativa Para a Forma Trilinear $b(u, v, w)$

Lema C.4. *Consideremos $d \geq 3$ e $s, r \in \mathbb{R}$, com $s > 2$, $r > d$, verificando $\frac{2}{s} + \frac{d}{r} = 1$. Seja também a forma trilinear $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$b(u, v, w) = \int_\Omega u_i(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) w_j(x) \, dx.$$

Nessas condições, se $u \in \boldsymbol{L}^r(\Omega)$, então

$$|b(u, v, w)| \leq c \|u\|_{L^r(\Omega)} \|v\| |w|^{2/s} \|w\|^{d/r}$$

$\forall v, w \in V$. Em que $c \geq 0$ é uma constante.

Demonstração. A prova dada a seguir é uma adaptação do que consta em *J. L. Lions* [13], [1969], p. 84. Seja $\rho > 0$, tal que $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. Devido a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|b(u, v, w)| \leq \|u\|_{L^r(\Omega)} \|v\| \|w\|_{L^\rho(\Omega)}. \tag{C.19}$$

Por outro lado, devido as hipóteses do enunciado, temos $\frac{1}{s} + \frac{d}{2r} = \frac{1}{2}$. Segue da escolha de ρ que

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{d}{2r}.$$

Após algumas manipulações algébricas obtemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{2}{s}}{2} + \frac{\frac{d}{r}}{\frac{2d}{d-2}}.$$

Além disso, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$, resulta que $w_i \in L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$. Logo, devido a Desigualdade de Interpolação, temos

$$\|w_i\|_{L^\rho(\Omega)} \leq |w_i|^{2/s} \|w_i\|^{d/r}_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}.$$

Desse modo,

$$\|w_i\|^2_{L^\rho(\omega)} \leq C|w_i|^{4/s} \|w_i\|^{\frac{2d}{r}}.$$

A seguir somamos de $i = 1$ até $i = d$ e aplicamos a desigualdade de Hölder para obter

$$\|w\|_{L^\rho(\Omega)} \leq C|w|^{2/s} \|w\|^{d/r}.$$

Substituindo essa desigualdade em (C.19) obtemos o resultado do lema. □

C.5 Lema do Ângulo Agudo

Lema C.5. *(Lema do ângulo agudo 1) Seja $P : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ uma aplicação contínua tal que para um $\rho > 0$ conveniente se tenha $\langle P(\xi), (\xi) \rangle \leq 0$, para $||\xi|| = \rho$. Então existe um $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ com $||\xi|| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$ (ver J.L.Lions, [13] Lema 4.3 p.53)*

Demonstração. O lema diz que se o ângulo entre ξ e $P(\xi)$ é agudo $\forall \ \xi \in \mathbb{R}^n$ com $||\xi|| = \rho$, então a equação $P(\xi) = 0$ tem uma solução na bola $||\xi|| \leq \rho$.

Suponhamos por contradição que $P(\xi) \neq 0, \ \forall \ ||\xi|| \leq \rho$.

Seja,

$$\begin{aligned} f : \overline{B(0,\rho)} &\to \overline{B(0,\rho)} \\ \xi &\mapsto -\rho.\frac{P(\xi)}{||P(\xi)||}, \end{aligned} \tag{C.20}$$

notemos que f é contínua.

Considere também,

$$\begin{aligned} g : \overline{B(0,1)} &\rightarrow \overline{B(0,1)} \\ \xi &\mapsto -\frac{P(\rho\xi)}{||P(\rho\xi)||}, \end{aligned} \tag{C.21}$$

notemos que g também é contínua.

Logo pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, existe $\xi_0 \in \overline{B(0,1)}$ tal que,

$$\xi_0 = g(\xi_0). \quad \text{Logo} \;\; \xi_0 = -\frac{P(\rho\xi_0)}{||P(\rho\xi_0)||}$$

Desse modo, $\xi_1 = \rho\xi_0$ é ponto fixo de f.

De fato,

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= -\rho\frac{P(\xi_1)}{||P(\xi_1)||} = -\rho.\frac{P(\rho\xi_0)}{||P(\rho\xi_0)||} \\ &= \rho.\xi_0 = \xi_1 \end{aligned}$$

Temos $||\xi_1|| = \rho$

$$\langle P(\xi_1), \xi_1 \rangle = \left\langle P(\xi_1), \;\; -\rho\frac{P(\xi_1)}{||P(\xi_1)||} \right\rangle = \frac{-\rho}{||P(\xi_1)||} \langle P(\xi_1), P(\xi_1) \rangle \tag{C.22}$$

$$= \frac{-\rho}{||P\xi_1||}||P(\xi_1)||^2 = -\rho||P(\xi_1)||. \tag{C.23}$$

Absurdo, pois por hipótese,

$$\langle P(\xi), \xi \rangle \geq 0 \;\; \forall \;\; \xi \text{ com } ||\xi|| = \rho. \tag{C.24}$$

Apêndice D

Lemas de Compacidade

D.1 Teorema de Compacidade de Aubin-Lions

Nessa seção vamos apresentar uma demonstração Teorema de Aubin-Lions enunciado a seguir. A demonstração apresentada é baseada nas ideias apresentadas em *L. A. Medeiros* [21], [2001], p. 36-40. Vamos começar com um Lema auxiliar.

Lema D.1. *Seja $B_0 \overset{*}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ nas condições do enunciado. Para cada $\epsilon > 0$ existe $c(\epsilon)$, tal que*

$$\|u\|_B \leq \epsilon \|u\|_{B_0} + c(\epsilon)\|u\|_{B_1},$$

qualquer que seja $u \in B_0$.

Demonstração do Lema D.1: Suponhamos que para algum $\epsilon > 0$ existe $u_n \in B$, satisfazendo

$$\|u\|_B > \epsilon \|u\|_{B_0} + c(\epsilon)\|u\|_{B_1}. \tag{D.1}$$

Tomando $u_n \neq 0$, definimos

$$w_n = \frac{1}{\|u_n\|_{B_0}} u_n. \tag{D.2}$$

Em vista de (D.1), obtemos de (D.2) a seguinte desigualdade

$$\|w_n\|_B = \frac{\|u_n\|_B}{\|u_n\|_{B_0}} > \epsilon + n\frac{\|u_n\|_{B_1}}{\|u_n\|_{B_0}}.$$

Segue-se que

$$\|w_n\|_B > \epsilon + n\|w_n\|_{B_1} \tag{D.3}$$

Por outro lado, devido a imersão $B_0 \hookrightarrow B$, temos que

$$\|w_n\|_B = \frac{\|u_n\|_B}{\|u_n\|_{B_0}} \leq C \tag{D.4}$$

Agora devido a (D.3) e (D.4), temos que

$$\frac{\epsilon}{n} + \|w_n\|_{B_1} < \frac{\|w_n\|_B}{n} < \frac{C}{n}.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{B_1} = 0 \tag{D.5}$$

Notamos agora que B é reflexivo. Além disso, concluímos de (D.2) que $\|w_n\|_{B_0} = 1$. Logo existe uma subsequência de (w_n) que converge fracamente em B_0. Além disso, como a imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta, existe uma subsequência de (w_n), ainda denotada por (w_ν), que converge forte para w em B. No entanto, devido a imersão $B \hookrightarrow B_1$ e (D.5), concluímos que (w_ν) converge fortemente para zero em B. Portanto, $w = 0$. Contradição com (D.3). Isso conclui a demonstração do Lema auxiliar. Passamos agora ao principal objetivo desta seção.

Lema D.2. *(Compacidade de Aubin-Lions) Sejam* $1 < p_0, p_1 < \infty$*, bem como os espaços de Banach* B_0*,* B*,* B_1*, tais que* B_0 *e* B_1 *são reflexivos. Além disso, as imersões* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ *são contínuas, sendo a primeira delas compacta. Dado o número real* $T > 0$*, consideremos o espaço*

$$W = \{u; u \in L^{p_0}(I; B_0) \ e \ u' \in L^{p_1}(I; B_1)\},$$

com a norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + \|u\|_{L^{p_1}(I;B_1)}$*. Nessas condições,* W *é um espaço de Banach. Além disso,* $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(I; B)$*.*

Demonstração. Mostraremos que dada uma sequência (v_n) limitada em W, podemos obter uma subsequência de (v_n) que converge forte para v em $L^{p_0}(I, B)$. Sem perda de generalidade, vamos provar o caso $v = 0$.

Seja $(v_n) \subset W$ uma sequência limitada. Devido ao Lema auxiliar, dado $\epsilon > 0$, existe $c(\epsilon)$, tal que

$$\|v_n\|_B \leq \epsilon \|v_n\|_{B_0} + c(\epsilon)\|v_n\|_{B_1}.$$

Desse modo, para cada $\eta > 0$, existe $d(\eta)$, tal que

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B)} \leq \eta \|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_0)} + d(\eta)\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_1)}. \tag{D.6}$$

Sabemos que (v_n) é limitada em W, logo

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_0)} \leq \|v_n\|_W < C.$$

Levando essa desigualdade em (D.6), obtemos

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B)} \leq C\eta + d(\eta)\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_1)}. \tag{D.7}$$

Notamos que W é reflexivo, pois B_0 e B_1 o são. Logo podemos obter uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n), tal que $v_n \rightharpoonup 0$ em W. Para concluir a demonstração, afirmamos que é suficiente mostrar que (v_n) converge fortemente para zero em $L^{p_0}(I, B_1)$. De fato, sabemos que W tem imersão contínua em $C^0(I; B_1)$ veja *J. L. Lions, E. Magenes* [14], [1969]. Logo

$$\|v_n(s)\|_{B_1} \leq \|v_n\|_{C^0(I;B_1)} \leq C_0\|v_n\|_W < C \tag{D.8}$$

Se mostrarmos que $\|v_n(s)\|_{B_1}$ converge para zero quase sempre em $(0, T)$, concluiremos de (D.8) que $\|v_n(s)\|_{B_1}^{p_0}$ é limitada e converge para zero em $(0, T)$. Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, teremos que $\|v_n\|_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $L^{p_0}(I; B_1)$. De volta a (D.7), concluímos que (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(I; B)$, o que conclui a prova da compacidade da imersão de W em $L^{p_0}(I; B)$.

Portanto, resta-nos mostrar que $\|v_n(s)\|_{B_1}$ converge para zero em $(0, T)$. O que faremos para o caso $s = 0$. Seja w_n dada por

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \quad \lambda > 0,$$

em que λ é uma constante a determinar. Temos

$$w_n(0) = v_n(0),$$

$$\|w_n(t)\|_{L^{p_0}(I;B_0)} \leq C_1 \lambda^{-1/p_0},$$

$$\|w_n'(t)\|_{L^{p_0}(I;B_1)} \leq C_2 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}}$$

Agora tomemos $\theta \in C^1(I;\mathbb{R})$, tal que $\theta(0) = -1$ e $\theta(T) = 0$. Temos que

$$w_n(0) = \int_0^T (\theta w_n)' dt = \int_0^T \theta w_n' dt + \int_0^T \theta' w_n dt = \beta_n + \gamma_n$$

Segue-se que

$$\|w_n(0)\|_{B_1} \leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \leq C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} + \|\gamma_n\|_{B_1}.$$

Agora para cada $\epsilon > 0$, tomemos $\lambda > 0$, tal que $C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Por outro lado, seja a integral em B_0 dada por

$$\gamma_n = \int_0^T \theta' w_n dt.$$

Dada $\psi \in B_0'$, temos que

$$\psi(\gamma_n) = \int_0^T \theta' \gamma(w_n) dt$$

converge para zero. Logo γ_n converge fracamente para zero em B_0. Como a imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta, resulta que γ_n converge fortemente para zero em B. Notando que v_n converge fracamente para zero em W e que $W \hookrightarrow L^{p_0}(I;B_0)$, vemos que v_n converge fracamente para zero em $L^{p_0}(I;B_0)$. Segue-se que para $\lambda > 0$ fixo, w_n converge fracamente para zero em $L^{p_0}(I;B_0)$. Desse modo, $v_n(0) = w_n(0)$ converge fortemente para zero em B_1. Isso conclui a demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Fluid Mech. **16** (1966) 1-18.

[2] C. Calmelet-Eluhu and D. R. Majundar, *Flow of a micropolar fluid trhough a circular cylinder subject to longitudinal and torsional oscilations*, Math. Comput. Modelling. **27** (8) (1998) 69-78.

[3] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New Delhi, 1955.

[4] Frehse J. and J. Málek, *Problems due to the no-slip boundary in incompressible fluids dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003 .

[5] G. M. de Araújo, M. M. Araújo and E. F. L. Lucena, *On a System of equations of a Non-Newtonian Micropolar Fluid* , Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics Volume 2015, Article ID 481754, 11 pages. (2015)

[6] G. M. de Araújo, M. M. Arnaud and E. F. L. Lucena, *On the Navier-Stokes Equations with VariableViscosity in Stationary Form*, Far East Journal of Applied Mathematics, Volume 80, number 2, 2013, pp 107-124

[7] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

[8] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and applications*, Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 1999.

[9] G. Vitali, *Sull' Integrazione per Serie,* Rendiconti Circolo Mat. Palermo, **23** (1907) 137-155.

[10] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[11] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (in German), 1992.

[12] J. L. Boldrini, M. Durán and M. A. Rojas-Medar, *Existence and Uniqueness of Strong Solution for the Incompressible Micropolar Fluid Equations in Domain of* $\mathbb{R}^3$, Ann Univ Ferrara **56** (2010) 37-51.

[13] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[14] J. L. Lions, E. Magenes, *Problémes Aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1969.

[15] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta and M. Růžička, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman & Hall, First Edition, 1996.

[16] J. Málek, J. Nečas, and M. Růžička, *On weak solutions to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case* $p \geq 2$, Advances in Differential Equations, **6**(3)(2001) 257-302.

[17] J. Málek, K. R. Rajagopal, and M. Růžička, *Existence and regularity of solution and stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity*, Math. Models Methods Appl. Sci. **5**(6)(1995) 789-812.

[18] J. Nečas, *Sur le normes équivalentes dans* $W_p^k(\Omega)$ *et sur la coercivité des formes formellement positives*, in Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Montreal (1966) 102-128

[19] J. Nečas and Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*, Studies in Applied Mechanics, 3, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.

[20] J. R. Choksi, *Vitali's Convergence Theorem on Term by Term Integration*, L'Enseignement Mathématique, **47** (2001), 269-285.

[21] L. A. Medeiros, *Lições de Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro - RJ, 2001.

[22] L. Schwartz, *Théorie des distribuitions*, Vols. I, II. Hermann, Paris, 1950-1951 (2^o édition 1957).

[23] M.M. Cavalcante and V.N.D. Cavalcante, *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev,* Editora da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

[24] M.M. Cavalcante and V.N.D. Cavalcante, *Introdução à Análise Funcional,* Editora da Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

[25] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Vol. 1-3. Interscience, New York, 1958.

[26] N. Kishan and S. Jagadha, *MHD Effects on Non-Newtonian Micropolar Fluid with Uniform Suction/ Blowing and Heat Generation in the Presence of Chemical Reaction and Thermophoresis* **2**(9)(2013) 1567-1573.

[27] N. Yamaguchi, *Existence of Global Strong Solution to the Micropolar Fluid System in a Bounded Domain*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **28**(2005) 1507-1526.

[28] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, Science Publishers, New York. (1963).

[29] P. Szopa, *On Existence and Regularity of Solutions for 2-D Micropolar Fluid Equations with Periodic Boundary Conditions* , Mathematical Methods in the Applied Sciences **30**(2007) 331-346.

[30] R. Ellahi, S. U. Rahman, M. Mudassar Gulzar, S. Nadeem and K. Vafai, *A Mathematical Study of Non-Newtonian Micropolar Fluid in Arterial Blood Flow Through Composite Stenosis* **8**(4)(2014) 1567-1573.

[31] R. Temam, *Mathematical Problems in Plasticity*, Gauthier Villars, Paris, 1985.

[32] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland Publishing Company, 1979.

[33] Rajagopal, K. R., *Mechanics of non-Newtonian Fluids. In: Recent Developments in Theoretical Fluid Mechanics, Galdi, G. P. and Nečas, J. (eds)*, Pitman Research Notes in Mathematics, Series 291, Longman Scientific & Technical, Essex, 129-162, 1993.

[34] W. L. Wilkinson, *Non-Newtonian fluids*, Pergamon Press, Oxford, 1960.