Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Sobre existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos singulares envolvendo um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano

por

Suellen Cristina Queiroz Arruda

Belém - PA

Novembro/2018

Sobre existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos singulares envolvendo um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano

por

Suellen Cristina Queiroz Arruda

sob orientação da

Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla - UFPA/UFAM - como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Belém - PA

Novembro/2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A773s Arruda, Suellen Cristina Queiroz.
Sobre existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos singulares envolvendo um operador do tipo p&q-Laplaciano / Suellen Cristina Queiroz Arruda. — 2018.
115 f.

Orientador(a): Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

1. p&q-Laplaciano. 2. Problema singular. 3. Método de Garlekin. 4. Método de sub-supersolução. I. Título.

CDD 515.353

Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA/UFAM

Área de concentração: Análise

Título: Sobre existência e multiplicidade de soluções positivas para problemas elípticos singulares envolvendo um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla - UFPA/UFAM - como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Resultado:

Data da defesa: 14/11/2018

Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento - PPGME/PDM/UFPA

Orientadora

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos - PPGME/PDM/UFPA

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa - UFCG

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UNB

Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares - UFCA

Prof. Dr. Uberlândio Bastista Severo - UFPB

Novembro/2018

Dedicatória

À memória do meu pai, José Lima Arruda, pelo amor incondicional e ensinamentos. Saudades eternas, pai!

Agradecimentos

- A Deus, por iluminar esta caminhada e nunca deixando que os obstáculos impedissem a realização deste momento tão importante para a minha vida pessoal e profissional;

- Ao meu grande amor, meu filho Guilherme, por ser um garoto lindo, amoroso, obediente, estudioso; pelos sorrisos, cuidados, carinhos e beijos que impulsionaram esta conquista tão almeijada por nós;

- À minha mãe, o maior exemplo de mulher que Deus poderia ter me dado, por ser maravilhosa, por me auxiliar, por todo apoio e amor dedicados ao longo da minha vida;

- Aos meus irmãos, Sullivan e Rodrigo, e demais familiares pela torcida e convivência;

- À professora Rúbia, meus sinceros agradecimentos pela orientação e paciência ao longo destes anos, uma grande amiga que o doutorado me presenteou;

- Ao professor Giovany pelas valiosas orientações, um exemplo a seguir de profissional competente e dedicado;

- Aos professores Francisco Júlio, Gelson, Leandro e Uberlândio por aceitarem o convite para compor a banca examinadora deste trabalho e contribuir para o enriquecimento do mesmo;

- Aos meus professores da graduação e pós-graduação nesta instituição que foram importantes para a minha formação profissional;

- Aos servidores da Universidade Federal do Pará do Campus de Abaetetuba que contribuíram diretamente para a realização deste trabalho;

- Aos meus amigos pelo incentivo, fator importante para o início e término deste trabalho, em especial à Fabíola e à Laila, o meu muito obrigada.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor,

mas lutei para que o melhor fosse feito.

Não sou o que deveria ser,

mas Graças a Deus, não sou o que era antes”.

(Martin Luther King)

Resumo

Neste trabalho, usamos algumas técnicas de Análise Funcional Não-linear para estudar a existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas do tipo $p\&q$-Laplaciano

$$\begin{cases} -\text{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \ \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $2 \leq p < N$. As hipóteses sobre a função $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe C^1 nos permitem estender nossos resultados para uma grande classe de problemas e a função f satisfaz certas condições a serem descritas em cada capítulo.

Palavras-chave: $p\&q$-Laplaciano, Problema singular, Método de Galerkin, Método de sub-supersolução.

Abstract

In this work we use some techniques of Nonlinear Functional Analysis to study the existence and multiplicity of positive solutions for the following class of problems of $p\&q$-Laplacian type

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \text{ in } \Omega, \\ u > 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is boundary domain in $\mathbb{R}^N$, $2 \leq p < N$. The hypotheses on function $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ of class C^1 allow us to extend our results to a large class of problems and the function f satisfies some conditions to be described in each chapter.

Key words: $p\&q$-Laplacian, Singular problem, Galerkin method, Sub-supersolution method.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos resultados de existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $2 \leq p < N$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 e f uma função que apresenta um termo singular.

Devido à grande relevância, o estudo de problemas envolvendo este operador mais geral, não-linear e não-homogêneo, vem sendo abordado nos últimos anos, conforme mencionamos abaixo.

No final da década de 90, nos artigos [30] e [31], Do Ó mostrou resultados de existência e multiplicidade de soluções para o problema (1), sendo f com crescimento polinomial subcrítico e crescimento exponencial subcrítico, respectivamente. Em Figueiredo [36], foi usado uma abordagem variacional para o estudo de problemas considerando crescimento crítico na não-linearidade. Em [23], Corrêa, Corrêa e Santos Júnior mostram a existência e multiplicidade de soluções positivas, sendo f uma função contínua mudando de sinal. Em [22] e [21], Corrêa, Corrêa e Figueiredo mostram a existência de soluções positivas para um problema escalar e para um sistema, respectivamente, com f tendo a presença de um termo singular. Em [38], Figueiredo e Nascimento encontram soluções positivas quando a não-linearidade da função f é descontínua.

O problema em $\mathbb{R}^N$ foi estudado por Figueiredo [37] e por Alves e Figueiredo [4]. Em [37], foi estudado um resultado de existência de soluções para um problema com crescimento crítico. Em [4], foi provada a multiplicidade de soluções para um problema com crescimento subcrítico via Teoria de Categoria.

Estes problemas, do tipo $p\&q$-Laplaciano, envolvem uma classe bem mais geral de operadores, em que tal generalidade é dada pela função a. Por exemplo, quando f é uma função contínua, a existência e a multiplicidade de soluções para o caso particular $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$ têm sido extensivamente investigadas nos últimos anos, como vemos nos trabalhos [11, 15, 20, 54, 57, 58, 71], em domínio limitado, e [5, 8, 18, 34, 45, 44, 53, 56, 55, 79], em $\mathbb{R}^N$.

Os estudos são justificados não somente pelo grande interesse matemático, como também porque a classe de problemas considerados tem uma vasta gama de aplicações em Física, Química, Biologia e nas ciências afins, tais como Biofísica e Física Plasmática. Por exemplo, o caso

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = f(u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem sua origem nas aplicações de um sistema geral de reação-difusão da forma

$$u_t = \text{div}[D(u)\nabla u] + c(x, u), \tag{2}$$

onde $D(u) = (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2})$. Em tais aplicações, a função u descreve uma concentração no qual o primeiro termo do lado direito de (2) corresponde à difusão com um coeficiente $D(u)$, enquanto que o segundo termo é a reação que relaciona a fonte e os processos de perda. Tipicamente, em aplicações químicas e biólogicas, o termo de reação $c(x, u)$ é um polinômio de u com coeficientes variáveis, veja [45], [53], [79].

Como mencionado anteriormente, admitiremos que a função f do problema (1) apresenta um termo singular. Em um célebre artigo de 1976, Stuart [75] considerou o problema

$$L(u) = f(x, u) \text{ em } \Omega, u = \phi(x) \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, L sendo um operador elíptico de segunda ordem e $f(x, p) \to \infty$ quando $p \to 0$. Problemas deste tipo são chamados singulares e surgem na teoria da condução de calor em materiais eletricamente condutores. Sua relevância se deve, ainda, às várias aplicações em modelos físicos, tais como fluídos não-Newtonianos, fluxo pseudoplástico de fluídos mecânicos, formação de padrões biológicos e catalisadores heterogêneos químicos, veja [13, 14].

Em 1997, Crandall, Rabinowitz e Tartar [24] voltam a estudar essa classe de problemas, no qual L é considerado um operador elíptico de segunda ordem linear que satisfaz um princípio de máximo. Na primeira parte, a existência de uma solução clássica é comprovada por meio do método de sub-supersolução. A segunda parte do artigo é dedicada a um estudo detalhado das propriedades de continuidade de uma solução para não-linearidades especiais independentes de x.

Mais recentemente, a versão com $L = -\Delta$ e $f(x,u) = \dfrac{1}{u^{\alpha}} + \lambda|\nabla u|^p + \sigma$, onde $\alpha > 0$, $\sigma \geq 0$, $0 < p \leq 2$, $\phi = 0$, foi estudada em [41, 81]. O gradiente nesta equação é chamado termo de convecção. A versão sem o termo de convecção foi estudada em [72]. Outros importantes resultados podem ser vistos em [9, 10, 16, 17, 21, 25, 35, 43, 52, 65]. As versões de sistema foram estudadas em [1, 22, 46, 60, 80].

No capítulo 1, denominado **Existência de solução positiva para uma classe de problemas elípticos singulares e quasilineares com crescimento crítico**, trataremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda}{u^{\beta}} + f(u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $\beta \in (0, p-1)$, $\lambda > 0$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento exponencial. Mais precisamente, as hipóteses sobre as funções a e f são:

(a_1) Existem constantes k_1, k_2, k_3, $k_4 > 0$ tais que

$$k_1 t^p + k_2 t^N \leq a(t^p)t^p \leq k_3 t^p + k_4 t^N, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(a_2) A função

$$t \longmapsto a(t^p)t^{p-2} \text{ é crescente.}$$

(f_1) Existe $\alpha_0 > 0$ de modo que as condições de crescimento exponencial no infinito são dadas por:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \text{ para } \alpha > \alpha_0 \text{ e } \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \text{ para } 0 < \alpha < \alpha_0.$$

(f_2) A condição de crescimento na origem:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = 0.$$

(f_3) Existe $\gamma > N$ tal que

$$f(t) \geq t^{\gamma-1}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 0.1. *Suponhamos que as condições $(a_1)-(a_2)$ e $(f_1)-(f_3)$ são satisfeitas. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (3) possui uma solução fraca positiva para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Daremos alguns exemplos de funções a com o intuito de ilustrar o grau de generalidade do tipo de problemas estudados aqui.

Exemplo 0.1. *Considerando $a(t) = t^{\frac{N-p}{p}}$, a função a satisfaz as hipóteses $(a_1)-(a_2)$ com $k_1 = k_3 = 0$ e $k_2 = k_4 = 1$. Logo, o Teorema 0.1 é válido para o operador*

$$-\Delta_N u.$$

Exemplo 0.2. *Considerando $a(t) = 1 + t^{\frac{N-p}{p}}$, a função a satisfaz as hipóteses $(a_1)-(a_2)$ com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$. Logo, o Teorema 0.1 é válido para o operador*

$$-\Delta_p u - \Delta_N u.$$

Abaixo, apresentamos outros exemplos que também são interessantes no ponto de vista matemático.

Exemplo 0.3. *Considerando* $a(t) = 1 + \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, *a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_2)$ *com* $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 2$ *e* $k_4 = 0$. *Logo, o Teorema 0.1 é válido para o operador*

$$- \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}} \right).$$

Exemplo 0.4. *Considerando* $a(t) = 1 + t^{\frac{N-p}{p}} + \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, *a função a satisfaz as hipóteses* $(a_1) - (a_2)$ *com* $k_1 = k_2 = k_4 = 1$ *e* $k_3 = 2$. *Logo, o Teorema 0.1 é válido para o operador*

$$-\Delta_p u - \Delta_N u - \operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}} \right).$$

Em [42], Giacomoni, Prashanth e Sreenadh estudaram um problema com N-Laplaciano de modo que a não-linearidade cresce como $\exp\left(\frac{N}{N-1}\right)$ no infinito e como $\dfrac{1}{t^\alpha}$ na origem. Um problema similar com o operador Laplaciano em $\mathbb{R}^2$ foi estudado por Saoudi e Kratou em [69]. Em [29], Dhanya, Prashanth, Sreenadh e Tiwari consideraram o caso singular com crescimento crítico e não-linearidade descontínua. Os resultados de multiplicidade foram considerados em [66]. A versão em $\mathbb{R}^N$ com N-Laplaciano e crescimento exponencial crítico foi estudado em [7].

Diante disso, problemas elípticos do tipo $N\&p$-Laplaciano com não-linearidades em domínios limitados ou em $\mathbb{R}^N$ têm recebido bastante atenção por muitos autores. Nesta direção, o problema (3) foi motivado pelo estudo feito por Araújo e Montenegro [26] para o caso $N = 2$, no qual provam a existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v^q + f(v) \text{ em } \Omega, \\ v > 0 \text{ em } \Omega, \\ v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado, $q \in (0,1)$, $\lambda > 0$ é um parâmetro e $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

é uma função contínua com crescimento exponencial. Os autores resolveram o problema (4) combinando uma abordagem não-variacional com a desigualdade de Trudinger-Moser.

A nossa ideia no presente capítulo é aplicar os mesmos argumentos para um classe de problemas singulares envolvendo um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano com crescimento crítico, tendo como ingrediente essencial o Príncipio de Comparação Fraco demonstrado em [21]. Para isto, é necessário o estudo de um problema auxiliar a fim de provarmos, com o auxílio do método de Galerkin, a existência de uma solução aproximada e, posteriormente, utilizar esta solução obtida para demonstrarmos o Teorema 0.1.

Abaixo, listamos o que acreditamos ser as principais contribuições deste capítulo:

1) Em [22] e [21] foram estudados um problema singular e um sistema singular, respectivamente, com este operador geral, mas as não-linearidades possuem crescimento polinomial e aqui consideramos crescimento exponencial.

2) Em [29], [42], [69] e [70] foram estudados o caso singular com a não-linearidade com crescimento exponencial. No entanto, estudaremos aqui problemas com um operador mais geral, o que traz algumas dificuldades técnicas.

3) Até o presente momento, ao menos em nosso conhecimento, não existe na literatura o uso do método de Garlekin para mostrar a existência de soluções para esta classe de problemas tendo a presença de um termo singular.

O Capítulo 2, intitulado **Existência de solução positiva para um sistema singular com crescimento crítico**, complementa o estudo feito no Capítulo 1, provando a existência de soluções positivas para a seguinte classe de sistema singular

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})\ |\nabla u|^{p_1-2}\ \nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{v^{\beta_1}} + f_1(u) \text{ em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})\ |\nabla v|^{p_2-2}\ \nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{u^{\beta_2}} + f_2(v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3$. Para $i = 1, 2$, temos $2 \leq p_i < N$,

$0 < \beta_i < p_i - 1$, $\lambda_i > 0$, a_i são funções de classe C^1 e f_i são funções contínuas com crescimento exponencial.

As hipóteses sobre as funções $a_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ e $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são as seguintes:

(A_1) Existem constantes k_1, k_2, k_3, $k_4 > 0$ tais que

$$k_1 t^{p_i} + k_2 t^N \leq a(t^{p_i}) t^{p_i} \leq k_3 t^{p_i} + k_4 t^N, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(A_2) A função

$$t \longmapsto a_i(t^{p_i}) t^{p_i - 2} \text{ é crescente.}$$

(F_1) Existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \text{ para } \alpha > \alpha_0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \text{ para } \ 0 < \alpha < \alpha_0.$$

(F_2) As funções f_i verificam o limite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f_i(t)}{t^{p_i - 1}} = 0.$$

(F_3) Existe $\gamma_i > N$ tal que

$$f_i(t) \geq t^{\gamma_i - 1}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

O resultado central obtido neste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.2. *Suponhamos que para $i = 1, 2$, a_i satisfazem $(A_1) - (A_2)$ e as funções f_i satisfazem $(F_1) - (F_3)$. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (5) possui uma solução fraca positiva para cada $\lambda_i \in (0, \lambda^*)$.*

Em [1], os autores estudaram um sistema Hamiltoniano singular para mostrar a existência de solução usando método de Galerkin. Em [2], Alves e Corrêa estudaram um sistema (p, q) com termos singulares com crescimento exponencial, mostrando a existência de solução usando um teorema devido a Rabinowitz e uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev. Estes artigos motivaram os resultados em [21], no qual é possivel investigar a existência de solução para um classe de sistemas envolvendo o operador mais geral $-\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)\ |\nabla u|^{p-2}\ \nabla u)$.

Levando em consideração os trabalhos citados acima, o presente capítulo se baseia também nos estudos feitos em [27] na qual a não-linearidade da função admite crescimento exponencial crítico e no Príncipio de Comparação Fraco obtido em [22]. Os passos para a demonstração do Teorema 0.2 seguem o mesmo racíocinio da prova do Teorema 0.1 no Capítulo 1 e o resultado ressalta as contribuições já enumeradas anteriormente para o caso escalar.

No Capítulo 3, denominado **Existência e multiplicidade de soluções positivas para um problema singular $p\&q$-Laplaciano via método de sub-supersolução**, estudaremos a existência e a multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas singulares

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = h(x)u(x)^{-\gamma} + f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1, $1 \neq \gamma > 0$ é um parâmetro real fixado, $h \geq 0$ é uma função mensurável não-trivial, e f é uma função Carathéodory sobre $\Omega \times [0, \infty)$.

As hipóteses sobre as funções a e f são as seguintes:

(h) Existe $0 < \phi_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $h\phi_0^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$.

(f_1) Existe $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ tal que

$$-h(x) \leq f(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta.$$

(a_1) Existem constantes k_1, k_2, k_3, $k_4 > 0$ e $1 < p < q < N$ tais que

$$k_1 t^p + k_2 t^q \leq a(t^p)t^p \leq k_3 t^p + k_4 t^q, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(a_2) A função

$$t \longmapsto A(t^p) \text{ é estritamente convexa,}$$

onde $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)\, ds$.

(a_3) A função

$$t \longmapsto a(t^p)t^{p-2} \text{ é crescente.}$$

(a_4) Existem constantes μ e θ tais que $\theta \in (q, q^*)$ e

$$\frac{1}{\mu} a(t)t \leq A(t), \text{ para todo } t \geq 0,$$

com $1 < \dfrac{q}{p} \leq \mu < \dfrac{\theta}{p}$.

(f_2) Existe $q < r < q^* = \dfrac{Nq}{(N-q)}$ $(q^* = \infty$ se $q \geq N)$ tal que

$$f(x,t) \leq h(x)(t^{r-1} + 1) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(f_3) Existe $t_0 > 0$ tal que

$$0 < \theta F(x,t) \leq t f(x,t), \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \geq t_0,$$

onde θ é a constante que aparece em (a_4).

Os principais resultados deste capítulo são enunciados a seguir:

Teorema 0.3. *Assuma que as condições (h), (f_1) e $(a_1) - (a_2)$ são válidas. Se $\|h\|_\infty$ é suficientemente pequena, então o problema (6) possui uma solução fraca positiva.*

Teorema 0.4. *Assuma que as condições (h), $(f_1) - (f_3)$ e $(a_1) - (a_4)$ são válidas. Se $\|h\|_\infty$ é suficientemente pequena, então o problema (6) possui duas soluções fracas positivas.*

Consideremos o problema semilinear dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = m(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{7}$$

O método clássico de sub-supersolução afirma que se $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ for um par de sub-supersolução com $v_1(x) \leq v_2(x)$ q.t.p em Ω, então existe uma solução $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_1(x) \leq v(x) \leq v_2(x)$ q.t.p em Ω.

Em geral, um candidato para subsolução do problema (7) é dado por $v_1 = \epsilon\phi_1$, onde ϕ_1 é uma autofunção associada a λ_1, o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Um candidato para supersolução, em geral, é a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = M \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Os tamanhos de ϵ e da constante M, combinados com o Príncipio de Comparação para o operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, nos permitem mostrar que a sub-supersolução são ordenadas. Se o operador é não-linear e não-homogêneo, em geral nós não temos autovalores e autofunções. No entanto, mostraremos neste capítulo que o método de sub-supersolução ainda pode ser aplicado.

O termo singular no problema (6) apresenta dificuldades que o torna muito atrativo. Por não ser possível citar todos aqui, faremos uma revisão bibliográfica em ordem cronológica de artigos com termo singular e método de sub-supersolução.

Em [19, 64], os autores estudaram o problema (6) com o operador p-Laplaciano aplicando técnicas de truncamento adequadas. O caso com o operador p-Laplaciano sem a condição de Ambrosetti-Rabinowitz foi estudado em [51]. O caso com o operador p-Laplaciano e a não-linearidade côncava e convexa foi considerado em [39]. Em [63], os autores estudaram o caso com o operador Laplaciano e o termo singular aparecendo no lado esquerdo. Em [33], foi estudado o caso com o operador Laplaciano e uma não-linearidade dependendo do gradiente. O caso com operador Laplaciano e crescimento supercrítico foi estudado em [78].

A motivação deste capítulo surge com os resultados de Perera e Silva em [64], no qual combinam argumentos de pertubação e métodos variacionais para estabelecer a existência e multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas singulares envolvendo o operador p-Laplaciano. Para a obtenção da sub-supersolução, os autores utilizam uma técnica de truncamento e o Princípio de Comparação para o operador e, posteriormente, determinam duas soluções ordenadas para o problema analisado.

Desta forma, a nossa inspiração neste capítulo é investigar a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas singulares com um operador do tipo $p\&q$-Laplaciano utilizando os argumentos vistos em [64] em vez do método clássico de sub-supersolução.

A fim de ilustrar o grau de generalidade do tipo de problemas aqui estudados, apresentamos alguns exemplos de função a que são interessantes no ponto de vista matemático e tem uma ampla gama de aplicações em física e ciências relacionadas.

Exemplo 0.5. Se $a \equiv 1$, nosso operador é o p-Laplaciano. Então, o problema (6) se torna

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= & h(x)u^{-\gamma} + f(x,u) & \text{em} & \Omega, \\ u &= & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

com $q = p$, $k_1 = k_3 = 1$ e $k_2 = k_4 = 0$.

Exemplo 0.6. Se $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}}$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u &= & h(x)u^{-\gamma} + f(x,u) & \text{em} & \Omega, \\ u &= & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$.

Exemplo 0.7. Tomando $a(t) = 1 + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, temos

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}) &= & h(x)u^{-\gamma} + f(x,u) & \text{em} & \Omega, \\ u &= & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

com $q = p$, $k_1 = 1$, $k_3 = 2$ e $k_2 = k_4 = 0$.

Exemplo 0.8. Se consideramos $a(t) = 1 + t^{\frac{q-p}{p}} + \frac{1}{(1+t)^{\frac{p-2}{p}}}$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u - \operatorname{div}(\frac{|\nabla u|^{p-2}\nabla u}{(1+|\nabla u|^p)^{\frac{p-2}{p}}}) &= & h(x)u^{-\gamma} + f(x,u) & \text{em} & \Omega, \\ u &= & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $k_1 = k_2 = k_4 = 1$ e $k_3 = 2$.

Abaixo, descreveremos o que acreditamos ser as novidades no estudo do problema (6):

1) Consideramos uma grande classe de operadores quasilineares que inclui, mas não se restringe ao operador p-Laplaciano. Em geral, esse operador não é linear nem homogêneo, o que nos traz dificuldades técnicas.

2) Como trabalhamos com um operador geral, algumas estimativas são mais refinadas. Veremos isso nas demonstrações dos teoremas.

3) Ao contrário dos trabalhos mencionados, nenhum truncamento foi necessário neste capítulo. Além disso, não usamos parâmetro como foi usado no artigo motivador.

4) Os resultados deste capítulo são válidos para uma função geral f. Note que f pode ser negativa perto da origem.

5) Ao menos em nosso conhecimento, não existem trabalhos investigando solução para esta classe de problemas com termo singular, aplicando o método de sub-supersolução.

O capítulo 4, intitulado **Existência e multiplicidade de soluções positivas para um sistema singular via método de sub-supersolução e Teorema do Passo da Montanha**, investiga a questão da existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de sistema singular

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = h_1(x)u^{-\gamma_1} + F_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(a_2(|\nabla u|^{p_2})|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u) = h_2(x)u^{-\gamma_2} + F_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $2 \leq p_1, p_2 < N$. Para $i = 1, 2$, $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1, $1 \neq \gamma_i > 0$ é uma constante fixada, e $h_i \geq 0$ é uma função mensurável não-trivial. Mais precisamente, suponhamos que as funções h_i e a_i satisfazem as seguintes hipóteses:

(H) Existem $0 < \phi_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $h_i\phi_0^{-\gamma_i} \in L^\infty(\Omega)$.

(A_1) Existem constantes $k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4 > 0$ e $1 < p_i < q_i < N$ tais que

$$k_1 t^{p_i} + k_2 t^{q_i} \leq a_i(t^{p_i})t^{p_i} \leq k_3 t^{p_i} + k_4 t^{q_i}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(A_2) A função

$$t \longmapsto A_i(t^{p_i}) \text{ é estritamente convexa,}$$

onde $A_i(t) = \displaystyle\int_0^t a_i(s)ds$.

(A_3) A função

$$t \longmapsto a_i(t^{p_i})t^{p_i-2} \text{ é crescente.}$$

(A_4) Existem constantes μ_i, $\dfrac{1}{q_1^*} < \theta_s < \dfrac{1}{q_1}$ e $\dfrac{1}{q_2^*} < \theta_t < \dfrac{1}{q_2}$ tais que

$$\frac{1}{\mu_i} a_i(t)t \leq A_i(t), \text{ para todo } t \geq 0,$$

com $1 < \dfrac{q_1}{p_1} \leq \mu_1 < \dfrac{1}{\theta_s p_1}$ e $1 < \dfrac{q_2}{p_2} \leq \mu_2 < \dfrac{1}{\theta_t p_2}$.

A seguir, os principais resultados deste capítulo:

Teorema 0.5. *Suponha que (H), (F_1) e $(A_1) - (A_2)$ são satisfeitas. Então, o sistema (8) possui uma solução fraca positiva se $\|h_i\|_\infty$ é pequena, para $i = 1, 2$.*

Teorema 0.6. *Suponha que (H), $(F_1) - (F_3)$ e $(A_1) - (A_4)$ são satisfeitas. Então, o sistema (8) possui duas soluções fracas positivas se $\|h_i\|_\infty$ é pequena, para $i = 1, 2$.*

O sistema (8) com o operador Laplaciano, em ambas as equações, foi estudado em [40], em que foram investigadas as questões de existência, não-existência e unicidade de soluções. Os resultados em [41] foram complementados em [80]. O operador geral abordado neste capítulo foi estudado em [21] usando soluções contínuas não limitadas. O caso com operador Laplaciano envolvendo pesos foi estudado em [28] e [59].

O presente capítulo complementa o estudo do Capítulo 3 e os resultados dos autores citados acima porque trabalhamos com um sistema geral com singularidade, além de considerarmos o método de sub-supersolução para um sistema que envolve um operador não-linear e não-homogêneo.

Encerraremos esta tese com dois apêndices, com o intuito de enunciar alguns resultados importantes e necessários para a compreensão dos capítulos, juntamente com suas referências para consulta das demonstrações.

Para uma maior clareza e organização deste trabalho, os problemas e os enunciados dos resultados relacionados serão repetidos em seus respectivos capítulos.

Notações

$\square$: fim de uma demonstração,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|\cdot|_\alpha = |\cdot|_{L^\alpha(\Omega)}$,

$|A|$ é a medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\int\limits_\Omega f$ denota $\int\limits_\Omega f(x)dx$,

$\langle .,. \rangle$: par de dualidade.

Capítulo

1

Existência de solução positiva para uma classe de problemas elípticos singulares e quasilineares com crescimento crítico

1.1 Introdução

Neste capítulo, investigamos a existência de solução positiva para uma classe de problemas singulares dada por

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda}{u^\beta} + f(u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $0 < \beta < p-1$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1 e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento exponencial.

Para obter uma solução do problema (1.1), utilizamos o método de Galerkin em conjunto com o seguinte resultado, que é uma variação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, cuja demonstração pode ser encontrada em [73] e [49, Teorema 5.2.5].

Lema 1.1. *Seja $G : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua tal que $\langle G(\xi), \xi \rangle \geq 0$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$ com $|\xi| = r$, para algum $r > 0$. Então, existe $z_0 \in \overline{B}_r(0)$ tal que $G(z_0) = 0$.*

As hipóteses sobre a função $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 são as seguintes:

(a_1) Existem constantes k_1, k_2, k_3, $k_4 > 0$ tais que

$$k_1 t^p + k_2 t^N \leq a(t^p)t^p \leq k_3 t^p + k_4 t^N, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(a_2) A função

$$t \longmapsto a(t^p)t^{p-2} \text{ é crescente.}$$

A função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(f_1) Existe $\alpha_0 > 0$ de modo que as condições de crescimento exponencial no infinito são dadas por:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \text{ para } \alpha > \alpha_0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \text{ para } \; 0 < \alpha < \alpha_0.$$

(f_2) A condição de crescimento na origem:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = 0.$$

(f_3) Existe $\gamma > N$ tal que

$$f(t) \geq t^{\gamma-1}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Note que, de (f_1) - (f_3), para todo $\delta > 0$ e para todo $\alpha > \alpha_0$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$|f(t)t| \leq \delta|t|^p + C_\delta|t|^q \exp\left(\alpha|t|^{\frac{N}{N-1}}\right), \tag{1.2}$$

para todo $q \geq 0$. Em particular, ao longo deste capítulo, usamos $q > N$. Além disso, vale ressaltar que, a fim de encontrar soluções positivas, suponhamos que $f(t) = 0$, para todo $t < 0$.

A seguir, enunciamos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 1.1. *Suponhamos que as condições* $(a_1)-(a_2)$ *e* $(f_1)-(f_3)$ *são satisfeitas. Então, existe* $\lambda^* > 0$ *tal que o problema (1.1) possui uma solução fraca positiva para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Vale a pena recomendar a leitura dos apêndices no intuito de recordar definições, lemas, proposições e teoremas necessários às demonstrações do nosso resultado.

No que segue, consideramos o espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{1,N} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N dx \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Definição 1.1. *Dizemos que* $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *é uma solução fraca positiva do problema (1.1) se* $u > 0$ *em* Ω *e satisfaz*

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)\ |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi\ dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{u^\beta} \phi\ dx - \int_\Omega f(u)\phi\ dx = 0,$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Em virtude da hipótese (a_1), o operador $T : W_0^{1,N}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,N}(\Omega))'$ dado por

$$\langle Tu, \phi \rangle = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)\ |\nabla u|^{p-2}\ \nabla u\ \nabla \phi\ dx$$

está bem definido. O Lema B.1, veja o Apêndice B, mostra que o operador T é contínuo, monótono e coercivo. Estas propriedades são necessárias para aplicarmos o Teorema de Minty-Browder, resultado importante a fim de determinar a existência de uma única solução $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f \in (W_0^{1,N}(\Omega))'$.

Este capítulo está organizado como segue: na Seção 1.2, estudamos a existência de solução para um problema auxiliar via método de Galerkin e na Seção 1.3, usamos uma desigualdade do tipo Hardy-Sobolev para a demonstração do Teorema 1.1.

1.2 Um problema auxiliar

Para estabelecer a existência de solução positiva para o problema (1.1), inicialmente mostramos via método de Galerkin, para cada $0 < \varepsilon < 1$, a existência de uma solução para o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda}{(|u|+\varepsilon)^\beta} + f(u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde as funções a e f satisfazem as hipóteses do Teorema 1.1.

O resultado desta seção é o seguinte:

Lema 1.2. *Para cada $0 < \varepsilon < 1$ fixado, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (1.3) possui uma solução fraca positiva para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Demonstração. Seja $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,N}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$W_m = [e_1, e_2, \ldots, e_m]$$

como sendo o espaço de dimensão finita gerado pelo conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Notemos que os espaços $(W_m, \|\cdot\|_m)$ e $(\mathbb{R}^m, |\cdot|_s)$ são isometricamente isomorfos, através da aplicação natural

$$S : W_m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

dada por

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \mapsto S(u) = \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m),$$

onde

$$|\xi|_s = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j| \quad \text{e} \quad \|u\|_m = \left(\int_\Omega |\nabla u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}, u \in W_m.$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
\|u\|_m^m &= \int_\Omega |\nabla u|^m dx = \int_\Omega \left| \nabla \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right) \right|^m dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^m |\nabla e_j|^m dx \\
&= \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^m \int_\Omega |\nabla e_j|^m dx = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^m \|e_j\|_m^m = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^m = |\xi|_s^m.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|_m = |\xi|_s = |S(u)|_s. \tag{1.4}$$

Considere, para cada $m \in \mathbb{N}$, a aplicação $G : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$G(\xi) = G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = (G_1(\xi), G_2(\xi), \ldots, G_m(\xi)),$$

onde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$G_j(\xi) = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla e_j \; dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{(|u| + \varepsilon)^\beta} e_j \; dx - \int_\Omega f(u) e_j \; dx \; , \; j = 1, 2, \ldots, m$$

e $u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \in W_m$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle G(\xi), \xi \rangle &= \sum_{j=1}^{m} G_j(\xi)\xi_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left[\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(\xi_j e_j) \; dx - \lambda \int_\Omega \frac{\xi_j e_j}{(|u| + \varepsilon)^\beta} \; dx - \int_\Omega f(u)(\xi_j e_j) dx \right] \\
&= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right) dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{(|u| + \varepsilon)^\beta} \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right) dx \\
&- \int_\Omega f(u) \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right) dx \\
&= \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx - \lambda \int_\Omega \frac{u}{(|u| + \varepsilon)^\beta} \; dx - \int_\Omega f(u) u \; dx.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Usando (1.2) e imersão de Sobolev, existem constantes positivas C_ε e C tais que

$$\int_\Omega \frac{u}{(|u|+\varepsilon)^\beta}\, dx \leq \int_\Omega \frac{|u|}{\varepsilon^\beta}\, dx \leq C_\varepsilon \|u\|_{1,N} \tag{1.6}$$

e

$$\int_\Omega f(u)u\, dx \leq \delta C \|u\|_{1,p}^p + C_\delta \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \tag{1.7}$$

Agora, por (a_1), temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx \geq k_1 \int_\Omega |\nabla u|^p dx + k_2 \int_\Omega |\nabla u|^N dx = k_1 \|u\|_{1,p}^p + k_2 \|u\|_{1,N}^N. \tag{1.8}$$

Segue de (1.5)-(1.8) que

$$\langle G(\xi), \xi \rangle \geq k_2 \|u\|_{1,N}^N + (k_1 - \delta C)\|u\|_{1,p}^p - \lambda C_\varepsilon \|u\|_{1,N} - C_\delta \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que $(k_1 - \delta C) > 0$, obtemos $(k_1 - \delta C)\|u\|_{1,p}^p > 0$. Então,

$$\langle G(\xi), \xi \rangle \geq k_2 \|u\|_{1,N}^N - \lambda C_\varepsilon \|u\|_{1,N} - C_\delta \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \tag{1.9}$$

Usando a desigualdade de Hölder com $s, s' > 1$ tais que $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, temos

$$C_\delta \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C_\delta \left(\int_\Omega |u|^{qs'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Desde que $q > N$ e $s' > 1$, por imersão de Sobolev, existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$C_\delta \int_\Omega |u|^q \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C_\delta \widetilde{C} \|u\|_{1,N}^q \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{1.10}$$

Então, decorre de (1.9) e (1.10) que

$$\langle G(\xi), \xi \rangle \geq k_2 \|u\|_{1,N}^N - \lambda C_\varepsilon \|u\|_{1,N} - C_\delta \widetilde{C} \|u\|_{1,N}^q \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Assumindo que $\|u\|_{1,N} = r$, para algum $r > 0$ a ser escolhido posteriormente, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \exp\left(\alpha s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s \|u\|_{1,N}^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s r^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \end{aligned}$$

e a fim de aplicar a desigualdade de Trudinger-Moser, veja o Teorema A.6 no Apêndice A, impomos

$$r \leq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha s}\right)^{\frac{N-1}{N}},$$

onde $\alpha_N := N w_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e w_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional da $(N-1)$ esfera.

Portanto, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|_{1,N} \leq 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha s r^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M$$

e assim,

$$\langle G(\xi), \xi \rangle \geq k_2 r^N - \lambda C_\varepsilon r - C_\delta \widetilde{C} M^{1/s} r^q.$$

Agora, escolhemos r de modo que

$$k_2 r^N - C_\delta \widetilde{C} M^{1/s} r^q \geq \frac{k_2 r^N}{2},$$

em outras palavras,

$$r \leq \left(\frac{k_2}{2 C_\delta \widetilde{C} M^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q-N}}.$$

Assim, considerando $r = \min\left\{\left(\frac{\alpha_N}{\alpha s}\right)^{\frac{N-1}{N}}, \left(\frac{k_2}{2C_\delta \widetilde{C} M^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q-N}}\right\}$, obtemos

$$\langle G(\xi), \xi \rangle \geq \frac{k_2 r^N}{2} - \lambda C_\varepsilon r.$$

Além disso, definindo $\rho = \dfrac{k_2 r^N}{2} - \lambda C_\varepsilon r$, escolhemos $\lambda^* > 0$ tal que $\rho > 0$ para $\lambda < \lambda^*$. Portanto, escolhendo

$$\lambda^* = \frac{k_2 r^{N-1}}{4C_\varepsilon},$$

concluímos que

$$\langle G(\xi), \xi \rangle > 0, \text{ para todo } 0 < \lambda < \lambda^*, \quad \xi \in \mathbb{R}^m \text{ e } |\xi|_s = r.$$

Em virtude do Lema 1.1, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $y \in \mathbb{R}^m$ com $|y|_s \leq r < 1$ tal que $G(y) = 0$. Assim, por (1.4), existe $u_m \in W_m$ satisfazendo

$$\|u_m\|_{1,N} \leq r < 1, \text{ para cada m} \in \mathbb{N}, \tag{1.11}$$

de modo que

$$\int_\Omega a(|\nabla u_m|^p)|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla e_j \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{1}{(|u_m| + \varepsilon)^\beta} e_j \, dx + \int_\Omega f(u_m) e_j \, dx \;, \tag{1.12}$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Multiplicando ambos os membros da equação (1.12) por um escalar qualquer σ_j, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, e somando-as, obtemos

$$\int_\Omega a(|\nabla u_m|^p)|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{1}{(|u_m| + \varepsilon)^\beta} \phi \, dx + \int_\Omega f(u_m) \phi \, dx, \tag{1.13}$$

para todo $\phi \in W_m$, o que mostra que $u_m \in W_m$ é uma solução fraca aproximada para o problema (1.3).

Desde que r independe de m e $W_m \subset W_0^{1,N}(\Omega)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, então (u_m) é uma sequência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existe $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_m \to u \text{ em } L^\theta(\Omega), \ \theta \geq 1, \\ u_m(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |u_m(x)| \leq g(x) \in L^\theta(\Omega), \text{ q.t.p em } \Omega, \ \theta \geq 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Fixe $k \in \mathbb{N}$ e considere $m \geq k$, então $W_k \subset W_m$ e

$$\int_\Omega a(|\nabla u_m|^p)|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi_k \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{1}{(|u_m| + \varepsilon)^\beta}\phi_k \, dx + \int_\Omega f(u_m)\phi_k \, dx, \tag{1.15}$$

para todo $\phi_k \in W_k$.

Desde que $\phi_k \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, notemos que

$$\left| \frac{\phi_k}{(|u_m| + \varepsilon)^\beta} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^\beta}|\phi_k| \in L^1(\Omega)$$

e usando (1.14), temos

$$\frac{\phi_k}{(|u_m(x)| + \varepsilon)^\beta} \to \frac{\phi_k}{(|u(x)| + \varepsilon)^\beta} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(|u_m| + \varepsilon)^\beta} \, dx \to \int_\Omega \frac{\phi_k}{(|u| + \varepsilon)^\beta} \, dx. \tag{1.16}$$

Da continuidade de f, segue de (1.14) que

$$f(u_m(x))\phi_k \to f(u(x))\phi_k \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{1.17}$$

Além disso, usando (1.2), temos

$$|f(u_m(x))\phi_k| \leq \delta|u_m(x)|^{p-1}|\phi_k| + C_\delta|u_m(x)|^{q-1}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|.$$

Agora, é necessário provar que a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(u_m(x)) := \delta|u_m(x)|^{p-1}|\phi_k| + C_\delta|u_m(x)|^{q-1}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|$$

satisfaz

$$|f(u_m(x))\phi_k| \leq h(u_m(x)) \in L^1(\Omega). \tag{1.18}$$

Para isto, é suficiente mostrar que $h(u_m(x))$ é convergente em $L^1(\Omega)$. De fato, desde que $2 \leq p < N$ e $\phi_k \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, usamos (1.14) para obter

$$|u_m(x)|^{p-1}|\phi_k| \to |u(x)|^{p-1}|\phi_k| \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$$||u_m(x)|^{p-1}|\phi_k|| = |u_m(x)|^{p-1}|\phi_k| \leq g(x)^{p-1}|\phi_k| \in L^1(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega |u_m|^{p-1}|\phi_k|dx \to \int_\Omega |u|^{p-1}|\phi_k|dx. \tag{1.19}$$

Além disso, resulta também de (1.14) que

$$|u_m(x)|^{q-1}\exp\left(\alpha|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \to |u(x)|^{q-1}\exp\left(\alpha|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{1.20}$$

Considerando $s, s' > 1$ tais que $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, usamos (1.14) e o fato que $q > N$ para obter

$$|u_m|^{q-1} \to |u|^{q-1} \quad \text{em } L^{s'}(\Omega).$$

E ainda, por (1.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp\left(\alpha s|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha s\|u_m\|_{1,N}^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u_m(x)|}{\|u_m\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \\
&\leq \int_\Omega \exp\left(\alpha s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u_m(x)|}{\|u_m\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx
\end{aligned}$$

e aplicando a desigualdade de Trudinger-Moser novamente, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_N \left(\frac{|u_m(x)|}{\|u_m\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_m(x)|^{q-1} \exp\left(\alpha |u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &\leq \left(\int_\Omega |u_m(x)|^{(q-1)s'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha s |u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq |u_m|^{q-1}_{L^{s'}(\Omega)} M^{\frac{1}{s}} = \overline{M}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Agora, resulta de (1.20), (1.21) e do Teorema de Brezis-Lieb que

$$|u_m|^{q-1} \exp\left(\alpha |u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right) \rightharpoonup |u|^{q-1} \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right).$$

Desde que $\phi_k \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, obtemos

$$\int_\Omega |u_m|^{q-1} \exp\left(\alpha |u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right) |\phi_k| dx \to \int_\Omega |u|^{q-1} \exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) |\phi_k| dx. \tag{1.22}$$

Portanto, segue de (1.19) e (1.22) que

$$\int_\Omega h(u_m(x)) dx \to \delta \int_\Omega |u(x)|^{p-1} |\phi_k| dx + C_\delta \int_\Omega |u(x)|^{q-1} \exp\left(\alpha |u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) |\phi_k| dx,$$

o que prova a afirmação (1.18).

Finalmente, invocamos (1.17), (1.18) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir

$$\int_\Omega f(u_m)\phi_k \, dx \to \int_\Omega f(u)\phi_k \, dx. \tag{1.23}$$

O próximo passo é mostrar que

$$\int_\Omega a\left(|\nabla u_m|^p\right) |\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m \nabla \phi_k \, dx \to \int_\Omega a\left(|\nabla u|^p\right) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi_k \, dx. \tag{1.24}$$

Para este fim, usamos (a_2) e a Proposição B.1, veja o Apêndice B, para obter a desigualdade abaixo

$$C_N|\nabla u_m - \nabla u|^N \leq \langle a(|\nabla u_m|^p)|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m - a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u,\ \nabla u_m - \nabla u\rangle,$$

onde $C_N = \left(\frac{k_2}{4}\right)^{N-2} > 0$.

Assim, desde que $u_m \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma solução do problema auxiliar (1.3), temos

$$\begin{aligned}
0 \leq C_N\|u_m - u\|_{1,N} &\leq \int_\Omega a\left(|\nabla u_m|^p\right)|\nabla u_m|^p dx - \int_\Omega a\left(|\nabla u_m|^p\right)|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla u\ dx + o_n(1) \\
&= \lambda\int_\Omega \frac{u_m}{(|u_m|+\varepsilon)^\beta}dx + \int_\Omega f(u_m)u_m\ dx - \lambda\int_\Omega \frac{u}{(|u_m|+\varepsilon)^\beta}dx - \int_\Omega f(u_m)u\ dx = o_n(1),
\end{aligned}$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a\left(|\nabla u|^p\right)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega a\left(|\nabla u|^p\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u_m \nabla u\ dx.$$

Logo, $\|u_m - u\|_{1,N} = o_n(1)$, o que implica em

$$u_m \to u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega).$$

Sabendo que a função $E : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$E(u) = \int_\Omega a\left(|\nabla u|^p\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi_k dx\ ,\ \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega)$$

é contínua, obtemos a convergência (1.24).

Fazendo $m \to \infty$ em (1.15), usamos (1.16), (1.23) e (1.24) para concluir

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi_k\ dx = \lambda\int_\Omega \frac{1}{(|u|+\varepsilon)^\beta}\phi_k\ dx + \int_\Omega f(u)\phi_k\ dx, \tag{1.25}$$

para todo $\phi_k \in W_k$.

Sendo $[W_k]_{k\in\mathbb{N}}$ denso em $W_0^{1,N}(\Omega)$, temos, por linearidade, que dado $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, existe uma sequência (ϕ_k) tal que

$$\phi_k \to \phi \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \text{ quando } k \to \infty.$$

Então,

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx \to \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx, \tag{1.26}$$

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(|u|+\varepsilon)^\beta} dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{(|u|+\varepsilon)^\beta} dx \tag{1.27}$$

e

$$\int_\Omega f(u)\phi_k \, dx \to \int_\Omega f(u)\phi \, dx. \tag{1.28}$$

Finalmente, desde que $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é arbitrário, segue de (1.25)-(1.28) que

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{1}{(|u|+\varepsilon)^\beta} \phi \, dx + \int_\Omega f(u)\phi \, dx, \tag{1.29}$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, o que mostra que $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma solução fraca positiva do problema (1.3). $\square$

1.3 Demonstração do Teorema 1.1

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ e $u_{\frac{1}{n}} = u_n$, onde u_n é uma solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = \dfrac{\lambda}{(|u_n| + \frac{1}{n})^\beta} + f(u_n) \text{ em } \Omega, \\ u_n > 0 \text{ em } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

obtida pelo Lema 1.2.

Note que, de (f_3), obtemos

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) \geq \dfrac{\lambda}{(|u_n| + 1)^\beta} + |u_n|^{\gamma-1} \text{ em } \Omega, \\ u_n > 0 \text{ em } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e como a função $t \mapsto \dfrac{\lambda}{(t+1)^\beta} + t^{\gamma-1}$ é contínua e coerciva, para todo $t \geq 0$, a mesma é limitada inferiormente e atinge um mínimo positivo z. Então,

$$-\text{div}\left(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\right) \geq z \ \ \text{em } \Omega.$$

Em virtude do Teorema de Minty-Browder, usamos a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\text{div}\,(a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = z > 0 \ \ \text{em } \Omega, \\ v > 0 \text{ em } \Omega, \\ v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.30}$$

para obter

$$\begin{cases} -\text{div}\,(a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) \geq -\text{div}\,(a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \ \ \text{em } \Omega, \\ u = v \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando o Princípio de Comparação Fraco para o operador $p\&q$-Laplaciano, veja o Lema B.2 no Apêndice B, concluímos que

$$u_n(x) \geq v(x) > 0 \text{ em } \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.31}$$

o que implica em $u_n(x) \nrightarrow 0$, para cada $x \in \Omega$.

Agora, de (1.14), temos

$$u_m \rightharpoonup u_n \ \ \text{em } W_0^{1,N}(\Omega)\ , \text{ quando } \ m \to +\infty$$

e decorre de (1.11) que

$$\|u_n\|_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} \|u_m\|_{1,N} \leq r < 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, r independe de n, o que mostra que (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, desde que $W_0^{1,N}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, a menos de subsequência, existe

$u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_n \to u \text{ em } L^{\theta}(\Omega),\ \theta \geq 1, \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |u_n(x)| \leq g(x) \in L^{\theta}(\Omega), \text{ q.t.p em } \Omega,\ \theta \geq 1. \end{cases} \tag{1.32}$$

Recordemos de (1.29) que

$$\int_{\Omega} a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi\ dx = \lambda\int_{\Omega}\frac{1}{(|u_n|+\frac{1}{n})^{\beta}}\phi\ dx + \int_{\Omega} f(u_n)\phi\ dx\ , \tag{1.33}$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Sendo f uma função contínua, por (1.32), temos

$$f(u_n(x))\phi \to f(u(x))\phi \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Fazendo os mesmos cálculos em (1.18), obtemos que a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(u_n(x)) := \delta|u_n(x)|^{p-1}|\phi_k| + C_{\delta}|u_n(x)|^{q-1}\exp\left(\alpha|u_n(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|$$

satisfaz

$$|f(u_n(x))\phi_k| \leq h(u_n(x)) \in L^1(\Omega).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\Omega} f(u_n)\phi\ dx \to \int_{\Omega} f(u)\phi\ dx,\ \forall\phi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{1.34}$$

Agora, usando o mesmo raciocínio em (1.24), temos

$$\int_{\Omega} a(|\nabla u_n|^p)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\phi\ dx \to \int_{\Omega} a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\ dx, \tag{1.35}$$

para todo $\phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Note que, de (1.32) novamente, obtemos

$$\frac{\phi}{\left(u_n(x) + \frac{1}{n}\right)^\beta} \to \frac{\phi}{u(x)^\beta} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

E ainda, em vista de (1.30) e (a_1), podemos argumentar como em [45] para obter $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Consequentemente, usando (1.30) e o Lema B.3, veja o Apêndice B, temos

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Então, para cada $x \in \Omega$, segue de (1.31) e do Lema A.1, veja o Apêndice A, que

$$u_n(x) \geq v(x) > Cd(x) > 0,$$

onde $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ e C é uma constante positiva que não depende de x.

Agora, desde que $\phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ e $\beta \in (0, p-1)$, invocamos a desigualdade de Hardy-Sobolev, veja o Teorema A.7 no Apêndice A, para obter

$$\left|\frac{\phi}{\left(u_n(x) + \frac{1}{n}\right)^\beta}\right| \leq \frac{|\phi|}{u_n(x)^\beta} \leq \frac{|\phi|}{Cd(x)^\beta} \in L^1(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\beta} dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{u^\beta} dx, \ \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{1.36}$$

Finalmente, fazendo $n \to +\infty$ em (1.33) e usando (1.34)-(1.36), temos

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega \frac{1}{u^\beta}\phi \, dx + \int_\Omega f(u)\phi \, dx, \ \ \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

o que prova que $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma solução fraca positiva do problema (1.1). $\square$

Capítulo 2

Existência de solução positiva para um sistema singular com crescimento crítico

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos um resultado de existência de solução positiva para a seguinte classe de sistema singular elíptico

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})\ |\nabla u|^{p_1-2}\ \nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{v^{\beta_1}} + f_1(u) \text{ em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})\ |\nabla v|^{p_2-2}\ \nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{u^{\beta_2}} + f_2(v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave com $N \geq 3$. Para $i = 1, 2$, temos $2 \leq p_i < N$, $0 < \beta_i < p_i - 1$, $\lambda_i > 0$ são parâmetros, a_i são funções de classe C^1 e f_i são funções contínuas com crescimento exponencial.

Usaremos o método de Galerkin para resolver o problema (2.1) e para isso, precisaremos novamente do Lema 1.1, enunciado no Capítulo 1, que é uma variação do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

As hipóteses sobre as funções $a_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são as seguintes:

(A_1) Existem constantes k_1, k_2, k_3, $k_4 > 0$ tais que

$$k_1 t^{p_i} + k_2 t^N \leq a(t^{p_i})t^{p_i} \leq k_3 t^{p_i} + k_4 t^N, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(A_2) As funções

$$t \longmapsto a_i(t^{p_i})t^{p_i-2} \text{ são crescentes.}$$

As hipóteses sobre as funções $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas são:

(F_1) Existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \text{ para } \alpha > \alpha_0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{f_i(t)}{\exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \text{ para } \; 0 < \alpha < \alpha_0.$$

(F_2) As funções f_i verificam o limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f_i(t)}{t^{p_i-1}} = 0.$$

(F_3) Existe $\gamma_i > N$ tal que

$$f_i(t) \geq t^{\gamma_i - 1}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Decorre das hipóteses (F_1) - (F_3) que, para todo $\delta > 0$ e para todo $\alpha > \alpha_0$, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$|f_i(t)t| \leq \delta |t|^{p_i} + C_\delta |t|^{q_i} \exp\left(\alpha |t|^{\frac{N}{N-1}}\right), \tag{2.2}$$

para todo $q_i \geq 0$. Em particular, vamos considerar $q_i > N$ e, desde que estamos procurando soluções positivas, $f_i(t) = 0$, para todo $t < 0$.

A seguir, descrevemos o resultado obtido neste capítulo:

Teorema 2.1. *Suponhamos que, para $i = 1, 2$, a_i satisfazem $(A_1) - (A_2)$ e as funções f_i satisfazem $(F_1) - (F_3)$. Então, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (2.1) possui uma solução fraca positiva para cada $\lambda_i \in (0, \lambda^*)$.*

Aqui, vamos considerar o espaço de Sobolev $X = W_0^{1,N}(\Omega) \times W_0^{1,N}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|(u,v)\|^N = \|u\|_{1,N}^N + \|v\|_{1,N}^N.$$

Definição 2.1. *Dizemos que o par $(u,v) \in X$ é uma solução fraca positiva do problema (2.1) se $u, v > 0$ em Ω que verifica*

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})\ |\nabla u|^{p_1-2}\ \nabla u\ \nabla \phi\ dx - \lambda_1 \int_\Omega \frac{1}{v^{\beta_1}}\phi\ dx - \int_\Omega f_1(u)\phi\ dx = 0$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})\ |\nabla v|^{p_2-2}\ \nabla v\ \nabla \varphi\ dx - \lambda_2 \int_\Omega \frac{1}{u^{\beta_1}}\varphi\ dx - \int_\Omega f_2(v)\varphi\ dx = 0,$$

para todo $(\phi, \varphi) \in X$.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira: na seção 2.2, estudamos um problema auxiliar adequado para mostrar a existência de uma solução aproximada para o problema (2.1) e na seção 2.3, usamos esta solução para a demonstração do Teorema 2.1.

2.2 Um problema auxiliar

Para cada $\varepsilon > 0$, usamos o seguinte problema auxiliar para mostrar a existência e positividade de solução para o problema (2.1)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \dfrac{\lambda_1}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}} + f_1(u) \text{ em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v) = \dfrac{\lambda_2}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}} + f_2(v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde as funções a_i e f_i $(i = 1, 2)$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1.

A seguir, enunciamos o resultado principal desta seção:

Lema 2.1. *Para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (2.3) possui uma solução fraca positiva para cada $\lambda_i \in (0, \lambda^*)$, com $i = 1, 2$.*

Demonstração. Seja $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,N}(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina

$$W_m = [e_1, e_2, \ldots, e_m]$$

como sendo o espaço de dimensão finita gerado por $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere a função $J : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ tal que

$$J(\eta, \xi) = (F_1(\eta, \xi), F_2(\eta, \xi), \ldots, F_m(\eta, \xi), G_1(\eta, \xi), G_2(\eta, \xi), \ldots, G_m(\eta, \xi)),$$

onde $(\eta, \xi) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^{2m}$,

$$F_j(\eta, \xi) = \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1 - 2}\nabla u \nabla e_j dx - \lambda_1 \int_\Omega \frac{1}{(|v| + \varepsilon)^{\beta_1}} e_j dx - \int_\Omega f_1(u) e_j dx,\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$G_j(\eta, \xi) = \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2 - 2}\nabla v \nabla e_j dx - \lambda_2 \int_\Omega \frac{1}{(|u| + \varepsilon)^{\beta_2}} e_j dx - \int_\Omega f_2(v) e_j dx,\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$u = \sum_{j=1}^m \eta_j e_j \in W_m$$

e

$$v = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j \in W_m.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\|(u, v)\|^N &= \|u\|_{1,N}^N + \|v\|_{1,N}^N = \int_\Omega |\nabla u|^N dx + \int_\Omega |\nabla v|^N dx \\
&= \int_\Omega \left|\nabla\left(\sum_{j=1}^m \eta_j e_j\right)\right|^N dx + \int_\Omega \left|\nabla\left(\sum_{j=1}^m \xi_j e_j\right)\right|^N dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^m |\eta_j|^N |\nabla e_j|^N dx + \int_\Omega \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N |\nabla e_j|^N dx \\
&= \sum_{j=1}^m |\eta_j|^N \int_\Omega |\nabla e_j|^N dx + \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N \int_\Omega |\nabla e_j|^N dx = \sum_{j=1}^m |\eta_j|^N \|e_j\|_m^N + \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N \|e_j\|_m^N \\
&= \sum_{j=1}^m |\eta_j|^N + \sum_{j=1}^m |\xi_j|^N = |\eta|_s^N + |\xi|_s^N = |(\eta, \xi)|_s^N,
\end{aligned}$$

onde

$$|\eta|_s = \sum_{j=1}^{m} |\eta_j| \quad \text{e} \quad |\xi|_s = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|.$$

Assim,

$$\|(u,v)\| = |(\eta,\xi)|_s. \tag{2.4}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle =& \langle (F_1(\eta,\xi),F_2(\eta,\xi),\ldots,F_m(\eta,\xi),G_1(\eta,\xi),G_2(\eta,\xi),\ldots,G_m(\eta,\xi)),\\
& (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)\rangle = \sum_{j=1}^{m} F_j(\eta,\xi)\eta_j + \sum_{j=1}^{m} G_j(\eta,\xi)\xi_j\\
=& \sum_{j=1}^{m}\left[\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla(\eta_j e_j)dx - \lambda_1\int_\Omega \frac{\eta_j e_j}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}}dx - \int_\Omega f_1(u)(\eta_j e_j)dx\right]\\
&+\sum_{j=1}^{m}\left[\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla(\xi_j e_j)dx - \lambda_2\int_\Omega \frac{\xi_j e_j}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx - \int_\Omega f_2(v)(\xi_j e_j)dx\right]\\
=& \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\left(\sum_{j=1}^{m}\eta_j e_j\right)dx - \lambda_1\int_\Omega \frac{1}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}}\left(\sum_{j=1}^{m}\eta_j e_j\right)dx\\
&- \int_\Omega f_1(u)\left(\sum_{j=1}^{m}\eta_j e_j\right)dx + \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j\right)dx\\
&- \lambda_2\int_\Omega \frac{1}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j\right)dx - \int_\Omega f_2(v)\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_j e_j\right)dx\\
=& \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1}dx - \lambda_1\int_\Omega \frac{u}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}}dx - \int_\Omega f_1(u)u\,dx + \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2}dx\\
&- \lambda_2\int_\Omega \frac{v}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx - \int_\Omega f_2(v)v\,dx.
\end{aligned}$$

Usando (2.2) e imersão de Sobolev, existem constantes positivas $C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}, C_1, C_2$ tais que

$$\int_\Omega \frac{u}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}}dx \le \int_\Omega \frac{|u|}{\varepsilon^{\beta_1}}dx \le C_{\varepsilon_1}\|u\|_{1,N},$$

$$\int_\Omega \frac{v}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx \le \int_\Omega \frac{|v|}{\varepsilon^{\beta_2}}dx \le C_{\varepsilon_2}\|v\|_{1,N},$$

$$\int_\Omega f_1(u)u\ dx \leq \delta_1 C_1 \|u\|_{1,p_1}^{p_1} + C_{\delta_1} \int_\Omega |u|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx$$

e

$$\int_\Omega f_2(v)v\ dx \leq \delta_2 C_2 \|v\|_{1,p_2}^{p_2} + C_{\delta_2} \int_\Omega |v|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

De (A_1), temos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1} dx \geq k_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p_1} dx + k_2 \int_\Omega |\nabla u|^N dx = k_1 \|u\|_{1,p_1}^{p_1} + k_2 \|u\|_{1,N}^N$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2} dx \geq k_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p_2} dx + k_2 \int_\Omega |\nabla v|^N dx = k_1 \|v\|_{1,p_2}^{p_2} + k_2 \|v\|_{1,N}^N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \geq{}& k_2(\|u\|_{1,N}^N + \|v\|_{1,N}^N) + (k_1 - \delta_1 C_1)\|u\|_{1,p_1}^{p_1} + (k_1 - \delta_2 C_2)\|v\|_{1,p_2}^{p_2} - \lambda_1 C_{\varepsilon_1}\|u\|_{1,N} \\ &- \lambda_2 C_{\varepsilon_2}\|v\|_{1,N} - C_{\delta_1}\int_\Omega |u|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx - C_{\delta_2}\int_\Omega |v|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.\end{aligned}$$

E ainda, tomando $\delta_1, \delta_2 > 0$ tão pequenos de modo que $(k_1 - \delta_1 C_1), (k_1 - \delta_2 C_2) > 0$, obtemos $(k_1 - \delta_1 C_1)\|u\|_{1,p_1}^{p_1} > 0$ e $(k_1 - \delta_2 C_2)\|v\|_{1,p_2}^{p_2} > 0$. Então,

$$\begin{aligned}\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \geq{}& k_2\|(u,v)\|^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1}\|(u,v)\| - \lambda_2 C_{\varepsilon_2}\|(u,v)\| - C_{\delta_1}\int_\Omega |u|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &- C_{\delta_2}\int_\Omega |v|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com $s, s' > 1$ tais que $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, obtemos

$$C_{\delta_1}\int_\Omega |u|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C_{\delta_1}\left(\int_\Omega |u|^{q_1 s'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}}$$

e

$$C_{\delta_2}\int_\Omega |v|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C_{\delta_2}\left(\int_\Omega |v|^{q_2 s'} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Desde que $q_1, q_2 > N$ e $s' > 1$, por imersão de Sobolev, existem $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2} > 0$ tais que

$$C_{\delta_1} \int\limits_{\Omega} |u|^{q_1} \exp\left(\alpha_1 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C_{\delta_1} \widetilde{C_1} \|u\|_{1,N}^{q_1} \left(\int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_1 s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \right)^{\frac{1}{s}}$$

e

$$C_{\delta_2} \int\limits_{\Omega} |v|^{q_2} \exp\left(\alpha_2 |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq C_{\delta_2} \widetilde{C_2} \|v\|_{1,N}^{q_2} \left(\int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_2 s |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \;&\geq\; k_2 \|(u,v)\|^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} \|(u,v)\| - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} \|(u,v)\| \\ &-\; C_{\delta_1} \widetilde{C_1} \|(u,v)\|^{q_1} \left(\int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_1 s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \right)^{\frac{1}{s}} \\ &-\; C_{\delta_2} \widetilde{C_2} \|(u,v)\|^{q_2} \left(\int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_2 s |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \right)^{\frac{1}{s}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Assuma que $\|(u,v)\| = r$, para algum $r > 0$ a ser escolhido posteriormente. Então,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_1 s |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \;&=\; \int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_1 s \|u\|_{1,N}^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &\leq\; \int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_1 s \|(u,v)\|^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &=\; \int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx, \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_2 s |v|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq \int\limits_{\Omega} \exp\left(\alpha_2 s r^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|v|}{\|v\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx.$$

Agora, a fim de aplicar a desigualdade de Trudinger-Moser, devemos impor

$$r \leq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_1 s}\right)^{\frac{N-1}{N}} \text{ e } r \leq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_2 s}\right)^{\frac{N-1}{N}},$$

onde $\alpha_N := N w_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e w_{N-1} é a medida $(N-1)$-dimensional da $(N-1)$ esfera.

Portanto, existem constantes $M_1, M_2 > 0$ tais que

$$\sup_{\|u\|_{1,N} \leq 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M_1$$

e

$$\sup_{\|v\|_{1,N} \leq 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha_2 s r^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|v|}{\|v\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M_2.$$

Consequentemente, reescrevemos (2.5) como

$$\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \geq k_2 r^N - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r - C_{\delta_1}\widetilde{C_1} M_1^{1/s} r^{q_1} - C_{\delta_2}\widetilde{C_2} M_2^{1/s} r^{q_2}.$$

Escolhemos $r > 0$ tal que

$$\frac{k_2 r^N}{2} - C_{\delta_1}\widetilde{C_1} M_1^{1/s} r^{q_1} \geq \frac{k_2 r^N}{4}$$

e

$$\frac{k_2 r^N}{2} - C_{\delta_2}\widetilde{C_2} M_2^{1/s} r^{q_2} \geq \frac{k_2 r^N}{4},$$

em outras palavras,

$$r \leq \left(\frac{k_2}{4C_{\delta_1}\widetilde{C_1} M_1^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q_1-N}} \quad \text{e} \quad r \leq \left(\frac{k_2}{4C_{\delta_2}\widetilde{C_2} M_2^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q_2-N}}.$$

A seguinte escolha de r é exatamente o que precisamos. Seja

$$r = \min\left\{\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_1 s}\right)^{\frac{N-1}{N}}, \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_2 s}\right)^{\frac{N-1}{N}}, \left(\frac{k_2}{4C_{\delta_1}\widetilde{C_1} M_1^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q_1-N}}, \left(\frac{k_2}{4C_{\delta_2}\widetilde{C_2} M_2^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{1}{q_2-N}}\right\},$$

então

$$\langle J(\eta,\xi),(\eta,\xi)\rangle \geq \frac{k_2 r^N}{4} - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r + \frac{k_2 r^N}{4} - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r.$$

Agora, definindo $\rho_1 = \dfrac{k_2 r^N}{4} - \lambda_1 C_{\varepsilon_1} r$ e $\rho_2 = \dfrac{k_2 r^N}{4} - \lambda_2 C_{\varepsilon_2} r$, escolhemos $\lambda_1^* > 0$ tal que

$\rho_1 > 0$ para $\lambda_1 < \lambda_1^*$ e $\lambda_2^* > 0$ tal que $\rho_2 > 0$ para $\lambda_2 < \lambda_2^*$. Portanto, escolhendo

$$\lambda_1^* = \frac{k_2 r^{N-1}}{8C_{\varepsilon_1}} \text{ e } \lambda_2^* = \frac{k_2 r^{N-1}}{8C_{\varepsilon_2}},$$

temos que

$$\langle J(\xi), \xi\rangle > 0 \text{ e } |(\eta,\xi)|_s = r,$$

para todo $\eta, \xi \in \mathbb{R}^m$ e para todo $0 < \lambda_i < \lambda^* = min\{\lambda_1^*, \lambda_2^*\}, i = 1, 2.$

Em virtude do Lema 1.1, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $(x, y) \in \mathbb{R}^{2m}$ com $|(x, y)|_s \leq r < 1$ tal que $J(x, y) = 0$. Consequentemente, por (2.4), existem $u_m, v_m \in W_m$ satisfazendo

$$\|(u_m, v_m)\| \leq r < 1 \text{ , para cada m} \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

de modo que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla\phi \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{1}{(|v_m| + \varepsilon)^{\beta_1}}\phi \, dx + \int_\Omega f_1(u_m)\phi \, dx, \, \forall \phi \in W_m \tag{2.7}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla\varphi \, dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{1}{(|u_m| + \varepsilon)^{\beta_2}}\varphi \, dx + \int_\Omega f_2(v_m)\varphi \, dx, \, \forall \varphi \in W_m, \tag{2.8}$$

o que implica que $(u_m, v_m) \in X$ é uma solução fraca aproximada do problema (2.3).

Desde que r independe de m e $W_m \subset W_0^{1,N}(\Omega)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, então as sequências (u_m) e (v_m) são limitadas em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existem $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_m \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_m \to u \text{ em } L^\theta(\Omega), \ \theta \geq 1, \\ u_m(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |u_m(x)| \leq g_1(x) \in L^\theta(\Omega), \text{ q.t.p em } \Omega, \, \theta \geq 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

e

$$\begin{cases} v_m \rightharpoonup v \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ v_m \to v \text{ em } L^\theta(\Omega),\ \theta \geq 1, \\ v_m(x) \to v(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |v_m(x)| \leq g_2(x) \in L^\theta(\Omega), \text{ q.t.p em } \Omega,\ \theta \geq 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Tome $k \in \mathbb{N}$ e considere $m \geq k$, então $W_k \subset W_m$ e

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_m|^{p_1})|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla\phi_k \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{1}{(|v_m|+\varepsilon)^{\beta_1}}\phi_k \, dx + \int_\Omega f_1(u_m)\phi_k \, dx,\ \forall \phi_k \in W_k \tag{2.11}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_m|^{p_2})|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla\varphi_k \, dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{1}{(|u_m|dx+\varepsilon)^{\beta_2}}\varphi_k \, dx + \int_\Omega f_2(v_m)\varphi_k \, dx,\ \forall \varphi_k \in W_k. \tag{2.12}$$

Sendo $\phi_k, \varphi_k \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, note que

$$\left|\frac{\phi_k}{(|v_m|+\varepsilon)^{\beta_1}}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon^{\beta_1}}|\phi_k| \in L^1(\Omega)$$

e

$$\left|\frac{\varphi_k}{(|u_m|+\varepsilon)^{\beta_2}}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon^{\beta_2}}|\varphi_k| \in L^1(\Omega).$$

Por (2.9) e (2.10),

$$\frac{\phi_k}{(|v_m(x)|+\varepsilon)^{\beta_1}} \to \frac{\phi_k}{(|v(x)|+\varepsilon)^{\beta_1}} \quad \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$$\frac{\varphi_k}{(|u_m(x)|+\varepsilon)^{\beta_2}} \to \frac{\varphi_k}{(|u(x)|+\varepsilon)^{\beta_2}} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(|v_m|+\varepsilon)^{\beta_1}}dx \to \int_\Omega \frac{\phi_k}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}}dx \tag{2.13}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi_k}{(|u_m|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx \to \int_\Omega \frac{\varphi_k}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx. \tag{2.14}$$

Desde que f_i são funções contínuas, resulta de (2.9) e (2.10) que

$$f_1(u_m(x))\phi_k \to f_1(u(x))\phi_k \;\text{ q.t.p em } \Omega \tag{2.15}$$

e

$$f_2(v_m(x))\varphi_k \to f_2(v(x))\varphi_k \;\text{ q.t.p em } \Omega. \tag{2.16}$$

Usando (2.2), obtemos

$$|f_1(u_m(x))\phi_k| \leq \delta_1|u_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| + C_{\delta_1}|u_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|$$

e

$$|f_2(v_m(x))\varphi_k| \leq \delta_2|v_m(x)|^{p_2-1}|\varphi_k| + C_{\delta_2}|v_m(x)|^{q_2-1}\exp\left(\alpha_2|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\varphi_k|.$$

Aplicando o mesmo racíocinio feito para o caso escalar, precisamos mostrar que as funções $h_1, h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$h_1(u_m(x)) := \delta_1|u_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| + C_{\delta_1}|u_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|$$

e

$$h_2(v_m(x)) := \delta_2|v_m(x)|^{p_2-1}|\varphi_k| + C_{\delta_2}|v_m(x)|^{q_2-1}\exp\left(\alpha_2|v_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\varphi_k|$$

satisfazem

$$|f_1(u_m(x))\phi_k| \leq h_1(u_m(x)) \in L^1(\Omega) \tag{2.17}$$

e

$$|f_2(v_m(x))\varphi_k| \leq h_2(v_m(x)) \in L^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Portanto, é suficiente provar que $h_1(u_m(x))$ e $h_2(v_m(x))$ são convergentes em $L^1(\Omega)$. Mostraremos somente a primeira desigualdade, uma vez que a demostração da segunda segue os mesmos passos. De fato, sendo $2 \leq p_1 < N$ e $\phi_k \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, usamos (2.9) para obter

$$|u_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| \to |u(x)|^{p_1-1}|\phi_k| \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$||u_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k|| = |u_m(x)|^{p_1-1}|\phi_k| \leq g_1(x)^{p_1-1}|\phi_k| \in L^1(\Omega).$$

Decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega |u_m|^{p_1-1}|\phi_k|dx \to \int_\Omega |u|^{p_1-1}|\phi_k|dx. \tag{2.19}$$

E ainda, de (2.9) mais uma vez, temos

$$|u_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \to |u(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right) \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{2.20}$$

Considerando $s, s' > 1$ tais que $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$, usamos (2.9) e o fato que $q_1 > N$ para obter

$$|u_m|^{q_1-1} \to |u|^{q_1-1} \text{ em } L^{s'}(\Omega).$$

Agora, por (2.6), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &= \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s\|u_m\|_{1,N}^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u_m(x)|}{\|u_m\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \\
&\leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s r^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{|u_m(x)|}{\|u_m\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx
\end{aligned}$$

e aplicando a desigualdade de Trudinger-Moser resulta que

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha_1 s|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq \int_\Omega \exp\left(\alpha_N\left(\frac{|u_m(x)|}{\|u_m\|_{1,N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}\right)dx \leq M_1.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}|u_m(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx &\le \left(\int\limits_{\Omega}|u_m(x)|^{(q_1-1)s'}dx\right)^{\frac{1}{s'}}\left(\int\limits_{\Omega}\exp\left(\alpha_1 s|u_m(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)dx\right)^{\frac{1}{s}}\\ &\le |u_m|^{q_1-1}_{L^{s'}(\Omega)}M_1^{\frac{1}{s}}=\overline{M_1}. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

Portanto, invocamos (2.20), (2.21) e o Teorema de Brezis-Lieb para concluir

$$|u_m|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right)\rightharpoonup|u|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u|^{\frac{N}{N-1}}\right).$$

Desde que $\phi_k\in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, temos

$$\int\limits_{\Omega}|u_m|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u_m|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|dx\to\int\limits_{\Omega}|u|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|dx. \qquad (2.22)$$

Então, (2.19) e (2.22) nos fornecem que

$$\int\limits_{\Omega}h_1(u_m(x))dx\to\delta_1\int\limits_{\Omega}|u(x)|^{p_1-1}|\phi_k|dx+C_{\delta_1}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^{q_1-1}\exp\left(\alpha_1|u(x)|^{\frac{N}{N-1}}\right)|\phi_k|dx,$$

o que mostra a afirmação (2.17).

Por fim, usando 2.15)-(2.18) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int\limits_{\Omega}f_1(u_m)\phi_k\ dx\to\int\limits_{\Omega}f_1(u)\phi_k\ dx \qquad (2.23)$$

e

$$\int\limits_{\Omega}f_2(v_m)\varphi_k\ dx\to\int\limits_{\Omega}f_2(v)\varphi_k\ dx. \qquad (2.24)$$

O último passo é provar que

$$\int\limits_{\Omega}a_1\left(|\nabla u_m|^{p_1}\right)|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m\nabla\phi_k\ dx\to\int\limits_{\Omega}a_1\left(|\nabla u|^{p_1}\right)|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\phi_k\ dx \qquad (2.25)$$

e

$$\int\limits_{\Omega}a_2\left(|\nabla v_m|^{p_2}\right)|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m\nabla\varphi_k\ dx\to\int\limits_{\Omega}a_2\left(|\nabla v|^{p_2}\right)|\nabla v|^{p_2-2}\nabla u\nabla\varphi_k\ dx. \qquad (2.26)$$

De modo análogo ao raciocínio no capítulo anterior, usamos (A_2) e a desigualdade da Proposição B.1 para obter

$$C_N|x-y|^N \leq \langle a_i(|x|^{p_i})|x|^{p_i-2}x - a_i(|y|^{p_i})|y|^{p_i-2}y,\ x-y\rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$ e $C_N = \left(\dfrac{k_2}{4}\right)^{N-2} > 0$.

Assim, desde que (u_m, v_m) é uma solução para o problema auxiliar (2.3), temos

$$\begin{aligned}
0 \leq C_N\|u_m - u\|_{1,N} &\leq \int\limits_\Omega a_1\left(|\nabla u_m|^{p_1}\right)|\nabla u_m|^{p_1}dx - \int\limits_\Omega a_1\left(|\nabla u_m|^{p_1}\right)|\nabla u_m|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u\ dx + o_n(1)\\
&= \lambda_1 \int\limits_\Omega \frac{u_m}{(|v_m|+\varepsilon)^{\beta_1}}dx + \int\limits_\Omega f_1(u_m)u_m\ dx - \lambda_1 \int\limits_\Omega \frac{u}{(|v_m|+\varepsilon)^{\beta_1}}dx - \int\limits_\Omega f_1(u_m)u\ dx = o_n(1),
\end{aligned}$$

onde

$$o_n(1) = \int\limits_\Omega a_1\left(|\nabla u|^{p_1}\right)|\nabla u|^{p_1}dx - \int\limits_\Omega a_1\left(|\nabla u|^{p_1}\right)|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_m \nabla u\ dx$$

e

$$\begin{aligned}
0 \leq C_N\|v_m - v\|_{1,N} &\leq \int\limits_\Omega a_2\left(|\nabla v_m|^{p_2}\right)|\nabla v_m|^{p_2}dx - \int\limits_\Omega a_2\left(|\nabla v_m|^{p_2}\right)|\nabla v_m|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v\ dx + o_n(1)\\
&= \lambda_2 \int\limits_\Omega \frac{v_m}{(|u_m|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx + \int\limits_\Omega f_2(v_m)v_m\ dx - \lambda_2 \int\limits_\Omega \frac{v}{(|u_m|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx - \int\limits_\Omega f_2(v_m)v\ dx = o_n(1),
\end{aligned}$$

onde

$$o_n(1) = \int\limits_\Omega a_2\left(|\nabla v|^{p_2}\right)|\nabla v|^{p_2}dx - \int\limits_\Omega a_2\left(|\nabla v|^{p_2}\right)|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v_m \nabla v\ dx.$$

Logo,

$$\|u_m - u\|_{1,N} = o_n(1) \ \text{ e } \ \|v_m - v\|_{1,N} = o_n(1),$$

o que implica em

$$u_m \to u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega)$$

e

$$v_m \to v \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega).$$

Como as funções definidas por

$$E_1(u) = \int_\Omega a_1\left(|\nabla u|^{p_1}\right)|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx$$

e

$$E_2(v) = \int_\Omega a_2\left(|\nabla v|^{p_2}\right)|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi_k \, dx$$

são contínuas, mostramos as convergências (2.25) e (2.26).

Fazendo $m \to \infty$ em (2.11) e (2.12), aplicamos (2.13), (2.14), (2.23)-(2.26) para concluir

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{1}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}}\phi_k \, dx + \int_\Omega f_1(u)\phi_k \, dx \tag{2.27}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi_k \, dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{1}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}\varphi_k \, dx + \int_\Omega f_2(v)\varphi_k \, dx, \tag{2.28}$$

para todo $\phi_k, \varphi_k \in W_k$.

Desde que $[W_k]_{k\in\mathbb{N}}$ é denso em $W_0^{1,N}(\Omega)$, por linearidade, temos

$$\phi_k \to \phi \text{ , quando } \ k \to \infty$$

e

$$\varphi_k \to \varphi \text{ , quando } \ k \to \infty.$$

Então,

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi_k \, dx \to \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi \, dx, \tag{2.29}$$

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi_k \, dx \to \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi \, dx, \tag{2.30}$$

$$\int_\Omega \frac{\phi_k}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}} dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}} dx, \tag{2.31}$$

$$\int_\Omega \frac{\varphi_k}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx \to \int_\Omega \frac{\varphi}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}dx, \tag{2.32}$$

$$\int_\Omega f_1(u)\phi_k\ dx \to \int_\Omega f_1(u)\phi\ dx \tag{2.33}$$

e

$$\int_\Omega f_2(v)\varphi_k\ dx \to \int_\Omega f_2(v)\varphi\ dx. \tag{2.34}$$

Portanto, para quaisquer $\phi, \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, decorre de (2.27)-(2.34) que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\phi\ dx = \lambda_1\int_\Omega \frac{1}{(|v|+\varepsilon)^{\beta_1}}\phi\ dx + \int_\Omega f_1(u)\phi\ dx, \tag{2.35}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\varphi\ dx = \lambda_2\int_\Omega \frac{1}{(|u|+\varepsilon)^{\beta_2}}\varphi\ dx + \int_\Omega f_2(v)\varphi\ dx, \tag{2.36}$$

para todo $\phi, \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, o que mostra que $(u, v) \in X$ é uma solução fraca positiva do problema (2.3). $\square$

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $u_{\frac{1}{n}} = u_n$ e $v_{\frac{1}{n}} = v_n$, onde (u_n, v_n) é uma solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) = \dfrac{\lambda_1}{(|v_n|+\frac{1}{n})^{\beta_1}} + f_1(u_n) \text{ em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n) = \dfrac{\lambda_2}{(|u_n|+\frac{1}{n})^{\beta_2}} + f_2(v_n) \text{ em } \Omega, \\ u_n, v_n > 0 \text{ em } \Omega, \\ u_n = v_n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

obtida pelo Lema 2.1.

Observe que, de (F_3), obtemos

$$-\text{div}(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n) \geq \frac{\lambda_1}{(|v_n|+|u_n|+1)^{\beta_1}} + |u_n|^{\gamma_1-1} \text{ em } \Omega$$

e como a função $t \mapsto \dfrac{\lambda_1}{(|v_n|+t+1)^{\beta_1}} + t^{\gamma_1-1}$, para todo $t \geq 0$, atinge um mínimo positivo z_1. Então,

$$-\text{div}\left(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n\right) \geq z_1 \quad \text{em } \Omega.$$

Seja w_1 a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(a_1(|\nabla w_1|^{p_1})|\nabla w_1|^{p_1-2}\nabla w_1\right) = z_1 > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ w_1 > 0 \text{ em } \Omega, \\ w_1 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.37}$$

Então,

$$\begin{cases} -\text{div}\left(a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n\right) \geq -\text{div}\left(a_1(|\nabla w_1|^{p_1})|\nabla w_1|^{p_1-2}\nabla w_1\right) \quad \text{em } \Omega, \\ u_n = w_1 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando o Príncipio de Comparação Fraco para o operador $p\&q$-Laplaciano, obtemos

$$u_n(x) \geq w_1(x) > 0 \text{ em } \Omega, \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Analogamente, mostramos que

$$v_n(x) \geq w_2(x) > 0 \text{ em } \Omega \;, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.39}$$

onde w_2 satisfaz

$$\begin{cases} -\text{div}\,(a_2(|\nabla w_2|^{p_2})|\nabla w_2|^{p_2-2}\nabla w_2) = z_2 > 0 \ \text{ em } \Omega, \\ w_2 > 0 \text{ em } \Omega, \\ w_2 = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.40}$$

e z_2 é o mínimo positivo da função $t \mapsto \dfrac{\lambda_2}{(|u_n| + t + 1)^{\beta_2}} + t^{\gamma_2 - 1}$, para todo $t \geq 0$.

Agora, de (2.9) segue que

$$u_m \rightharpoonup u_n \ \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \text{ , quando } \ m \to +\infty$$

e

$$v_m \rightharpoonup v_n \ \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \text{ , quando } \ m \to +\infty.$$

Decorre de (2.6),

$$\|u_n\|_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} \|u_m\|_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} \|(u_m, v_m)\| \leq r < 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e

$$\|v_n\|_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} \|v_m\|_{1,N} \leq \liminf_{m\to+\infty} \|(u_m, v_m)\| \leq r < 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, r não depende de n, o que resulta que (u_n) e (v_n) são sequências limitadas em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existem $u, v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_n \to u \text{ em } L^\theta(\Omega), \ \theta \geq 1, \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |u_m(x)| \leq g_1(x) \in L^\theta(\Omega), \text{ q.t.p em } \Omega, \, \theta \geq 1 \end{cases} \tag{2.41}$$

e

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \\ v_n \to v \text{ em } L^\theta(\Omega),\ \theta \geq 1, \\ v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |v_m(x)| \leq g_2(x) \in L^\theta(\Omega), \text{ q.t.p em } \Omega,\ \theta \geq 1. \end{cases} \tag{2.42}$$

Recordemos de (2.35) e (2.36) que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla\phi\ dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{1}{(|v_n| + \frac{1}{n})^{\beta_1}}\phi\ dx + \int_\Omega f_1(u_n)\phi\ dx,\ \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega) \tag{2.43}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla\varphi\ dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{1}{(|u_n| + \frac{1}{n})^{\beta_2}}\varphi\ dx + \int_\Omega f_2(v_n)\varphi\ dx,\ \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{2.44}$$

Sendo f_i funções contínuas, por (2.41) e (2.42), temos

$$f_1(u_n(x))\phi \to f_1(u(x))\phi \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$f_2(v_n(x))\varphi \to f_2(v(x))\varphi \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Pelos mesmos cálculos em (2.17) e (2.18), obtemos

$$|f_1(u_n(x))\phi| \leq h_1(u_n(x)) \in L^1(\Omega)$$

e

$$|f_2(v_n(x))\varphi| \leq h_2(v_n(x)) \in L^1(\Omega).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_\Omega f_1(u_n)\phi\ dx \to \int_\Omega f_1(u)\phi\ dx\ ,\ \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega) \tag{2.45}$$

e

$$\int_\Omega f_2(v_n)\varphi\ dx \to \int_\Omega f_2(v)\varphi\ dx\ ,\ \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{2.46}$$

Agora, resulta do mesmo raciocínio em (2.25) e (2.26) que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla \phi\ dx \to \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi\ dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega) \tag{2.47}$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla \varphi\ dx \to \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi\ dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{2.48}$$

De (2.41) e (2.42) novamente, obtemos

$$\frac{\phi}{\left(v_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}} \to \frac{\phi}{v(x)^{\beta_1}} \ \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$\frac{\varphi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}} \to \frac{\varphi}{u(x)^{\beta_2}} \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Em virtude de (2.37), (2.40) e (A_1), podemos argumentar como em [45] para obter $w_1, w_2 \in C^1(\overline{\Omega})$. Consequentemente, invocando (2.37), (2.40) e o Lema B.3, temos

$$\frac{\partial w_1}{\partial \eta}, \frac{\partial w_2}{\partial \eta} < 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Então, para cada $x \in \Omega$, segue de (2.38), (2.39) e do Lema A.1 que

$$u_n(x) \geq w_1(x) > Cd(x) > 0$$

e

$$v_n(x) \geq w_2(x) > Cd(x) > 0,$$

onde $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ e C é uma constante positiva que não depende de x.

Desde que $\phi, \varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ e $\beta_i \in (0, p_i - 1)$, aplicamos a desigualdade de Hardy-Sobolev para obter

$$\left|\frac{\phi}{\left(v_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}}\right| \leq \frac{|\phi|}{v_n(x)^{\beta_1}} \leq \frac{|\phi|}{Cd(x)^{\beta_1}} \in L^1(\Omega)$$

e

$$\left|\frac{\varphi}{\left(u_n(x)+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}}\right| \leq \frac{|\varphi|}{u_n(x)^{\beta_2}} \leq \frac{|\varphi|}{Cd(x)^{\beta_2}} \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega \frac{\phi}{\left(v_n+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}} dx \to \int_\Omega \frac{\phi}{v^{\beta_1}} dx,\ \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega) \tag{2.49}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}} dx \to \int_\Omega \frac{\varphi}{u^{\beta_2}} dx,\ \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{2.50}$$

Fazendo $n \to +\infty$ em (2.43) e (2.44), usamos (2.45)-(2.50) para concluir que

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \phi \ dx = \lambda_1 \int_\Omega \frac{1}{v^{\beta_1}}\phi \ dx + \int_\Omega f_1(u)\phi \ dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi \ dx = \lambda_2 \int_\Omega \frac{1}{u^{\beta_2}}\varphi \ dx + \int_\Omega f_2(v)\varphi \ dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

o que prova que $(u,v) \in X$ é uma solução fraca positiva do problema (2.2). $\square$

Capítulo

3

Existência e multiplicidade de soluções positivas para um problema singular p&q-Laplaciano via método de sub-supersolução

3.1 Introdução

Neste capítulo, mostramos resultados que envolvem existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos singulares

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = h(x)u(x)^{-\gamma} + f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $2 \leq p < N$, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1, $1 \neq \gamma > 0$ é um parâmetro real fixado e $h \geq 0$ é uma função mensurável não-trivial que satisfaz:

(h) Existe $0 < \phi_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $h\phi_0^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$.

Observação 3.1. *Por* (h), *note que*

$$|h| = |h\phi_0^{-\gamma}\phi_0^{\gamma}| \leq \|h\phi_0^{-\gamma}\|_\infty \phi_0^{\gamma} \in L^\infty(\Omega).$$

Admitimos que f é uma função Carathéodory sobre $\Omega \times [0, \infty)$ satisfazendo a seguinte condição:

(f_1) Existe $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ tal que

$$-h(x) \leq f(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \delta.$$

As hipóteses sobre a função $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 são as seguintes:

(a_1) Existem constantes k_1, k_2, k_3, $k_4 > 0$ e $1 < p < q < N$ tais que

$$k_1 t^p + k_2 t^q \leq a(t^p)t^p \leq k_3 t^p + k_4 t^q, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(a_2) A função

$$t \longmapsto A(t^p) \text{ é estritamente convexa,}$$

onde $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)\, ds.$

(a_3) A função

$$t \longmapsto a(t^p)t^{p-2} \text{ é crescente.}$$

(a_4) Existem constantes μ e θ tais que $\theta \in (q, q^*)$ e

$$\frac{1}{\mu} a(t)t \leq A(t), \text{ para todo } t \geq 0,$$

com $1 < \dfrac{q}{p} \leq \mu < \dfrac{\theta}{p}$.

O nosso primeiro resultado de existência é dado pelo teorema abaixo:

Teorema 3.1. *Assuma que as condições* (h), (f_1) *e* $(a_1) - (a_2)$ *são válidas. Se* $\|h\|_\infty$ *é suficientemente pequena, então o problema (3.1) possui uma solução fraca positiva.*

Sabendo que $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$, assumimos as condições abaixo a fim de estabelecer a existência de duas soluções para o problema (3.1).

(f_2) Existe $q < r < q^* = \dfrac{Nq}{(N-q)}$ $(q^* = \infty$ se $q \geq N)$ tal que

$$f(x,t) \leq h(x)(t^{r-1} + 1) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(f_3) Existe $t_0 > 0$ tal que

$$0 < \theta F(x,t) \leq t f(x,t) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \geq t_0,$$

onde θ é a mesma constante que aparece em (a_4).

O resultado que expressa a multiplicidade de soluções é o seguinte:

Teorema 3.2. *Assuma que as condições (h), $(f_1) - (f_3)$ e $(a_1) - (a_4)$ são válidas. Se $\|h\|_\infty$ é suficientemente pequena, então o problema (3.1) possui duas soluções fracas positivas.*

Vale a pena recordar que, como Ω é um aberto limitado e $p < q$, então $W_0^{1,q}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é, $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) = W_0^{1,q}(\Omega)$. Portanto, a fim de mostrar a existência e a multiplicidade de soluções para o problema (3.1), vamos considerar o espaço de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{1,q} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

O resultado a seguir fornece a existência de uma subsolução e uma supersolução para o problema (3.1) ao fixar o valor de $\|h\|_\infty$. Para alcançar este objetivo, usamos o Teorema de Minty-Browder e o Princípio de Comparação Fraco para o operador $p\&q$-Laplaciano.

Antes de enunciar o lema de sub e supersolução para o caso escalar, veremos algumas definições para o seu melhor entendimento.

Definição 3.1. *Dizemos que $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ é uma solução fraca positiva do problema* (3.1) *se $u > 0$ em Ω e verifica*

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx = \int_\Omega h(x)u^{-\gamma}\phi \, dx + \int_\Omega f(x,u)\phi \, dx,$$

para todo $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Definição 3.2. *Dizemos que um par $(\underline{u}, \overline{u})$ é uma sub e supersolução para o problema (3.1), respectivamente, se $\underline{u}, \overline{u} \in W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com*

(a) *$\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω,*

(b) *Para cada $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ com $\phi \geq 0$,*

$$\int_\Omega a(|\nabla \underline{u}|^p)|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} \nabla \phi \, dx \leq \int_\Omega h(x)\underline{u}^{-\gamma}\phi \, dx + \int_\Omega f(x,\underline{u})\phi \, dx$$

e

$$\int_\Omega a(|\nabla \overline{u}|^p)|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u} \nabla \phi \, dx \geq \int_\Omega h(x)\overline{u}^{-\gamma}\phi \, dx + \int_\Omega f(x,\overline{u})\phi \, dx.$$

Lema 3.1. *Suponha que (h), (f_1) e $(a_1)-(a_2)$ são satisfeitas. Se $\|h\|_\infty$ é suficientemente pequena, então existem $\underline{u}, \overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ tais que*

i) $h\underline{u}^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$ *e* $\|\underline{u}\|_\infty \leq \delta < \dfrac{1}{2}$, *onde δ é dada em (f_1).*

ii) $0 < \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ *q.t.p em Ω.*

iii) *$\underline{u}$ é uma subsolução e $\overline{u}$ é uma supersolução de* (3.1).

Demonstração. Em virtude do Lema B.1 e do Teorema de Minty-Browder, o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla \underline{u}|^p)|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}) = h(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

possui uma única solução positiva $\underline{u} \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Pela Observação 3.1, $h \in L^\infty(\Omega)$ e usando os mesmos argumentos em [45], obtemos $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$. Então, segue do Lema A.1 e do Lema B.3 que existe $C > 0$ tal que $\dfrac{\underline{u}}{\phi_0} \geq C > 0$. Logo,

$$0 < \underline{u} \ \text{ e } \frac{\underline{u}^{-\gamma}}{\phi_0^{-\gamma}} \leq C^{-\gamma}.$$

Consequentemente,

$$|h\underline{u}^{-\gamma}| = \left| h \frac{\underline{u}^{-\gamma}}{\phi_0^{-\gamma}} \phi_0^{-\gamma} \right| \leq C^{-\gamma} \|h\phi_0^{-\gamma}\|_\infty, \tag{3.3}$$

implicando que $h\underline{u}^{-\gamma} \in L^\infty(\Omega)$.

Além disso, argumentando como em [76, Lemma 4.5.], existe $C^* > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\|\underline{u}\|_\infty \leq C^* \|h\|_\infty^\alpha$. Assim, pela Observação 3.1, podemos escolher $\|h\|_\infty$ suficientemente pequena de modo que $\|\underline{u}\|_\infty \leq \delta < \dfrac{1}{2}$, o que finaliza a prova de (i).

A fim de mostrar (ii), usamos o Lema B.1 e o Teorema de Minty-Browder mais uma vez para obter que o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla \overline{u}|^p)|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}) = h(x)\underline{u}^{-\gamma} \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

possui uma única solução positiva $\overline{u} \in W_0^{1,q}(\Omega)$, e novamente por [45], temos $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$. Note que, argumentando como em [76, Lemma 4.5.] e usando (3.3), obtemos

$$\|\overline{u}\|_\infty \leq C^* \|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty^\alpha \leq C^* \|h\|_\infty^\alpha C^{-\gamma\alpha} \|\phi_0\|_\infty^{-\gamma\alpha}.$$

Assim, escolhendo $\|h\|_\infty$ suficientemente pequena, é possível ter

$$\|\overline{u}\|_\infty \leq \delta < \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

E ainda, desde que $h \geq 0$ e $\gamma > 0$ segue da condição (i) que $h(x)\underline{u}^{-\gamma} \geq h(x)$. Então, para todo $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e $\phi \geq 0$, obtemos

$$\int_\Omega a(|\nabla \overline{u}|^p)|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla\phi\, dx = \int_\Omega h(x)\underline{u}^{-\gamma}\phi\, dx \geq \int_\Omega h(x)\phi\, dx = \int_\Omega a(|\nabla \underline{u}|^p)|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\phi\, dx.$$

Portanto, pelo Princípio de Comparação Fraco para o operador $p\&q$-Laplaciano, concluímos que

$$0 < \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Finalmente, verificamos que a condição (iii) é satisfeita. De fato, inicialmente, para todo $\phi \geq 0$, usamos (f_1), (3.2) e (i) para obter

$$\int_\Omega a(|\nabla \underline{u}|^p)|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\phi\, dx - \int_\Omega h(x)\underline{u}^{-\gamma}\phi\, dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\phi\, dx \leq 2\int_\Omega h(x)\phi\, dx - \int_\Omega h(x)\underline{u}^{-\gamma}\phi\, dx.$$

Desde que $-h(x)\underline{u}^{-\gamma} \leq -2h(x)$, temos

$$\int_\Omega a(|\nabla \underline{u}|^p)|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\phi\, dx - \int_\Omega h(x)\underline{u}^{-\gamma}\phi\, dx - \int_\Omega f(x,\underline{u})\phi\, dx \leq 0,$$

o que implica que $\underline{u}$ é uma subsolução do problema (3.1).

Agora, decore de (f_1), (3.4) e (3.5) que

$$\int_\Omega a(|\nabla \overline{u}|^p)|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla\phi\, dx - \int_\Omega h(x)\overline{u}^{-\gamma}\phi\, dx - \int_\Omega f(x,\overline{u})\phi\, dx \geq \int_\Omega (\underline{u}^{-\gamma} - \overline{u}^{-\gamma})h(x)\phi\, dx.$$

Note que, da condição (ii), $\underline{u}^{-\gamma} - \overline{u}^{-\gamma} \geq 0$. Logo, como $h \geq 0$, então

$$\int_\Omega a(|\nabla \overline{u}|^p)|\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla \overline{u}\nabla\phi\, dx - \int_\Omega h(x)\overline{u}^{-\gamma}\phi\, dx - \int_\Omega f(x,\overline{u})\phi\, dx \geq 0,$$

concluindo que $\overline{u}$ é uma supersolução do problema (3.1). $\square$

Demonstração do Teorema 3.1. Considere a função

$$g(x,t) = \begin{cases} h(x)\overline{u}(x)^{-\gamma} + f(x,\overline{u}(x)), & t > \overline{u}(x) \\ h(x)t^{-\gamma} + f(x,t), & \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x) \\ h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + f(x,\underline{u}(x)), & t < \underline{u}(x) \end{cases} \tag{3.6}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\text{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = g(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Definimos o funcional $\Phi : W_0^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (3.7) por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)\; dx - \int_\Omega G(x,u)\; dx,$$

onde $G(x,t) = \displaystyle\int_0^t g(x,s)\; ds$.

Observe que, pela hipótese (a_1), o funcional está bem definido. E ainda, por argumentos padrões, é possível mostrar que Φ é um funcional de classe C^1 sobre $W_0^{1,q}(\Omega)$ com a seguinte derivada de Fréchet

$$\Phi^{'}(u)\phi = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi\; dx - \int_\Omega g(x,u)\phi\; dx,$$

para todo $\phi \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Segue do Lema 3.1(ii), (f_1) e (3.5) que

$$-h(x) \leq f(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \|\overline{u}\|_\infty.$$

Assim, usando o Lema 3.1(ii) novamente e (3.6), temos que:

- Se $t > \overline{u}(x)$, então

$$g(x,t) = h(x)\overline{u}(x)^{-\gamma} + f(x,\overline{u}(x)) \leq h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma},$$

- Se $\underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x)$, então

$$g(x,t) = h(x)t^{-\gamma} + f(x,t) \leq h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma}$$

e

- Se $t < \underline{u}(x)$, então

$$g(x,t) = h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + f(x,\underline{u}(x)) \leq h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma}.$$

Logo,

$$g(x,t) \leq h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

e consequentemente,

$$G(x,t) \leq \int_0^t h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma}\, ds = t\left(h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma}\right) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Agora, considere o conjunto

$$M = \left\{u \in W_0^{1,q}(\Omega); \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ q.t.p em } \Omega\right\}.$$

Afirmamos que Φ é limitado inferiormente em M. Com efeito, para todo $u \in M$, aplicamos (a_1) e (3.8) para obter

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \frac{k_1}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{k_2}{q}\|u\|_{1,q}^q - \int_\Omega u\left(h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma}\right)dx \\ &\geq \frac{k_2}{q}\|u\|_{1,q}^q - \|\overline{u}\|_\infty \int_\Omega h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma}dx = \frac{k_2}{q}\|u\|_{1,q}^q - K,\end{aligned}$$

onde $K = \|\overline{u}\|_\infty \int_\Omega h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma}dx$ devido o Lema 3.1(i).

Fazendo $\|u\|_{1,q} \to +\infty$, temos $\Phi(u) \to +\infty$, assim Φ é coercivo. Além disso, pela hipótese (a_2), Φ é fracamente semicontínuo inferiormente. Portanto, desde que M é fechado e convexo, pelo Teorema A.13, veja o Apêndice A, concluímos que Φ é limitado inferiormente em M e atinge seu mínimo em um ponto u em M.

Seguindo o mesmo raciocínio da demonstração de [74, Teorema 2.4], obtemos que u é um ponto crítico do funcional Φ em todo o espaço, isto é, u é uma solução fraca do problema auxiliar (3.7). Mas, como $g(x,t) = h(x)t^{-\gamma} + f(x,t)$, para $t \in [\underline{u}, \overline{u}]$, então o problema (3.1) possui uma solução fraca positiva $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ satisfazendo

$$0 < \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ q.t.p em } \Omega. \qquad \square$$

3.3 Demonstração do Teorema 3.2

Sejam $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ a subsolução do problema (3.1) e $\widehat{g}$ uma função Carathéodory definida sobre $\Omega \times \mathbb{R}$ dada por

$$\widehat{g}(x,t) = \begin{cases} h(x)t^{-\gamma} + f(x,t), & t > \underline{u}(x) \\ h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + f(x,\underline{u}(x)), & t \leq \underline{u}(x). \end{cases} \tag{3.9}$$

Considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \widehat{g}(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.10}$$

e defina o seu funcional associado $\widehat{\Phi} : W_0^{1,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\widehat{\Phi}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla u|^p)\, dx - \int_\Omega \widehat{G}(x,u)\, dx, \text{ para todo } u \in W_0^{1,q}(\Omega),$$

onde $\widehat{G}(x,t) = \displaystyle\int_0^t \widehat{g}(x,s)\, ds$.

Novamente, pela hipótese (a_1), o funcional $\widehat{g}(x,t)$ está bem definido e é de classe C^1 sobre o espaço de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ com a seguinte derivada de Fréchet

$$\widehat{\Phi}'(u)\phi = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx - \int_\Omega \widehat{g}(x,u)\phi \, dx, \text{ para todo } \phi \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

E ainda, cálculos padrões mostram que qualquer ponto crítico de $\widehat{\Phi}$ é uma solução fraca do problema auxiliar (3.10).

Note que, pela definição de $\widehat{g}$ e por (f_2), temos que:

- Se $t > \underline{u}(x)$, então

$$\widehat{g}(x,t) = h(x)t^{-\gamma} + f(x,t) \leq h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + h(x)(t^{r-1}+1)$$

e

- Se $t \leq \underline{u}(x)$, então

$$\widehat{g}(x,t) = h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + f(x,\underline{u}(x)) \leq h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + h(x)(t^{r-1}+1).$$

Logo,

$$\widehat{g}(x,t) \leq h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} + h(x)(t^{r-1}+1) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

e consequentemente, pelo Lema 3.1(i) e pela Observação 3.1, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \widehat{G}(x,t) &\leq \int_0^t \left[h(x)\underline{u}^{-\gamma} + h(x)(s^{r-1}+1)\right] ds \\ &= \int_0^t h(x)\underline{u}^{-\gamma} ds + \int_0^t h(x)(s^{r-1}+1) ds \\ &\leq \|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty t + \|h\|_\infty (c_1 t^r + t) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

O próximo resultado prova que $\widehat{\Phi}$ satisfaz as duas geometrias do Teorema do Passo da Montanha [6].

Lema 3.2. *Suponhamos que* (h), $(f_1)-(f_3)$ *e* $(a_1)-(a_4)$ *são válidas. Então,* $\widehat{\Phi}$ *satisfaz as seguintes geometrias:*

$(\widehat{\Phi}_1)$ *Existem* R, α, β *com* $R > \|\underline{u}\|_{1,q}$ *e* $\alpha < \beta$ *tal que*

$$\widehat{\Phi}(\underline{u}) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\partial B_R(0)} \widehat{\Phi}.$$

$(\widehat{\Phi}_2)$ *Existe* $e \in W_0^{1,q}(\Omega) \setminus \overline{B_R(0)}$ *tal que* $\widehat{\Phi}(e) < \beta$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1(i) e por (f_1), temos

$$-h(x) \leq f(x,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \|\underline{u}\|_\infty.$$

Usando (3.9), obtemos

$$\widehat{G}(x,\underline{u}) \geq \int_0^{\underline{u}} \big(h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} - h(x)\big)\, ds = \big[h(x)\underline{u}(x)^{-\gamma} - h(x)\big]\, \underline{u} \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Portanto,

$$\widehat{\Phi}(\underline{u}) \leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla \underline{u}|^p)\, dx - \int_\Omega \big(h(x)\underline{u}^{-\gamma} - h(x)\big)\, \underline{u}\, dx.$$

Sabemos, pelo Lema 3.1(i), que $h(x)\underline{u}^{-\gamma} - h(x) \geq 0$, então existe um número real $\alpha > 0$ de modo que

$$\widehat{\Phi}(\underline{u}) \leq \frac{1}{p}\int_\Omega A(|\nabla \underline{u}|^p)\, dx \equiv \alpha. \tag{3.13}$$

Agora, para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, invocamos (a_1) e (3.12) para obter

$$\widehat{\Phi}(u) \geq \frac{k_1}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{k_2}{q}\|u\|_{1,q}^q - \|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty \int_\Omega |u| dx - \|h\|_\infty c_1 \int_\Omega |u|^r dx - \|h\|_\infty \int_\Omega |u| dx.$$

Pela imersão de Sobolev, existem $c_2, c_3, c_4 > 0$ tais que

$$\widehat{\Phi}(u) \geq \frac{k_2}{q}\|u\|_{1,q}^q - c_2\|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty \|u\|_{1,q} - c_3\|h\|_\infty\|u\|_{1,q} - c_4\|h\|_\infty\|u\|_{1,q}^r, \tag{3.14}$$

para todo $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Considerando $\|u\|_{1,q} = R$, com $R > 0$ a ser escolhido posteriormente, temos

$$\widehat{\Phi}(u) \geq \frac{k_2}{q} R^q - \left(c_2 \|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty + c_3\|h\|_\infty\right) R - c_4\|h\|_\infty R^r,$$

Fixamos R de modo que

$$\frac{k_2}{q} R^q - \left(c_2 \|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty + c_3\|h\|_\infty\right) R \geq \frac{k_2}{q}\frac{R^q}{2},$$

ou seja,

$$R > \left(\frac{2q(c_2\|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty + c_3\|h\|_\infty)}{k_2}\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Escolhendo $R > \max\{1, \|\underline{u}\|_{1,q}\}$, obtemos

$$\widehat{\Phi}(u) \geq \frac{k_2}{q}\frac{R^q}{2} - c_4\|h\|_\infty R^r.$$

Assim, tomando $\|h\|_\infty$ suficientemente pequena de modo que $\frac{k_2}{q}\frac{R^q}{2} > c_4\|h\|_\infty R^r$, existe $0 < \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{\Phi}(u) \geq \beta, \text{ para todo } u \in \partial B_R(0).$$

Portanto, as escolhas de α, β, R e $\|h\|_\infty$ combinadas com as desigualdades (3.13) e (3.14) resultam em

$$\widehat{\Phi}(\underline{u}) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{u \in \partial B_R(0)} \widehat{\Phi},$$

o que mostra a condição $\widehat{\Phi}_1$.

Agora, pela definição de $\widehat{g}$, temos

$$\widehat{g}(x, t\underline{u}) = h(x)u(x)^{-\gamma} + f(x, t\underline{u}) \geq f(x, t\underline{u}) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \geq 1,$$

e consequentemente,

$$\widehat{G}(x, t\underline{u}) \geq F(x, t\underline{u}) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \geq 1.$$

Logo, aplicando (a_1), obtemos

$$\widehat{\Phi}(t\underline{u}) \leq \frac{k_3}{p} t^p \|\underline{u}\|_{1,p}^p + \frac{k_4}{q} t^q \|\underline{u}\|_{1,q}^q - \int_\Omega F(x, t\underline{u})\, dx.$$

Além disso, usando (f_3), existe $d_1 > 0$ tal que $F(x,t) \geq d_1 t^\theta$, para todo $t \geq \max\{1, t_0\}$, onde t_0 é a constante que aparece em (f_3). Então,

$$\widehat{\Phi}(t\underline{u}) \leq \frac{k_3}{p} t^p \|\underline{u}\|_{1,p}^p + \frac{k_4}{q} t^q \|\underline{u}\|_{1,q}^q - d_1 t^\theta \int_\Omega |\underline{u}|^\theta\, dx.$$

Por imersão de Sobolev, existe $c_5 > 0$ tal que

$$\widehat{\Phi}(t\underline{u}) \leq \frac{k_3}{p} t^p \|\underline{u}\|_{1,p}^p + \frac{k_4}{q} t^q \|\underline{u}\|_{1,q}^q - d_1 c_5 t^\theta \|\underline{u}\|^\theta.$$

Sendo $1 < p < q < \theta < q^*$, segue que $\widehat{\Phi}(t\underline{u}) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Logo, existe $t^* > 0$ tal que $e = t^*\underline{u} \in W_0^{1,q}(\Omega)$ satisfazendo $\|e\|_{1,q} > R$ e $\widehat{\Phi}(e) < \beta$, finalizando a prova da condição $\widehat{\Phi}_2$. $\square$

Lema 3.3. *O funcional $\widehat{\Phi}$ satisfaz a condição de Palais-Smale para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere $(u_n) \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, ou seja,

$$\begin{cases} \widehat{\Phi}(u_n) \to c, \\ \widehat{\Phi}'(u_n) \to 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Assim, existem $d_2, d_3 > 0$ tais que, para todo n suficientemente grande,

$$\hat{\Phi}(u_n) - \frac{1}{\theta}\hat{\Phi}'(u_n)u_n \leq d_2 + \frac{1}{\theta} d_3 \|u_n\|_{1,q}. \tag{3.16}$$

Por outro lado, usamos (a_1) e (a_4) para obter

$$\widehat{\Phi}(u_n) - \frac{1}{\theta}\widehat{\Phi}'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{p\mu} - \frac{1}{\theta}\right) k_2 \|u_n\|_{1,q}^q + \int_\Omega \left[\frac{1}{\theta}\widehat{g}(x,u_n)u_n - \widehat{G}(x,u_n)\right] dx. \tag{3.17}$$

Agora, decorre de (3.9) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\,\widehat{g}(u_n)u_n-\widehat{G}(x,u_n) &= \frac{1}{\theta}\left(h(x)u_n^{-\gamma}+f(x,u_n)\right)u_n-\int_0^{u_n}\left(h(x)t^{-\gamma}+f(x,t)\right)dt\\
&= \frac{1}{\theta}h(x)u_n^{1-\gamma}+\frac{1}{\theta}f(x,u_n)u_n-\frac{1}{1-\gamma}h(x)u_n^{1-\gamma}-\int_0^{u_n}f(x,t)dt\\
&= \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{1-\gamma}\right)h(x)u_n^{1-\gamma}+\left(\frac{1}{\theta}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right).
\end{aligned}$$

Considerando $A_n=\{x\in\Omega;|u_n(x)|>t_0\}$, temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{\theta}\,\widehat{g}(x_n,u_n)u_n-\widehat{G}(x_n,u_n)\right]dx &= \int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{1-\gamma}\right)h(x)u_n^{1-\gamma}dx\\
&+ \int\limits_{A_n}\left(\frac{1}{\theta}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right)dx\\
&+ \int\limits_{A_n^c}\left[\frac{1}{\theta}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]dx.
\end{aligned}$$

Mas, por (f_3), obtemos

$$\int\limits_{A_n}\left[\frac{1}{\theta}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]dx\geq 0,\text{ para todo }x\in A_n,$$

e sendo $\overline{\Omega}\times[-t_0,t_0]$ um conjunto compacto, f e F funções contínuas. Então existe $C>0$ tal que

$$\int\limits_{A_n^c}\left[\frac{1}{\theta}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]dx\leq C.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{\theta}\widehat{g}(x,u_n)u_n-\widehat{G}(x,u_n)\right] &\geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{1-\gamma}\right)\int\limits_{\Omega}h(x)u_n^{1-\gamma}dx-\int\limits_{A_n^c}\left[\frac{1}{\theta}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]dx\\
&\geq \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{1-\gamma}\right)\int\limits_{\Omega}h(x)u_n^{1-\gamma}dx-C. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Note que

- Se $\gamma > 1$, então

$$\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{1-\gamma}\right) \int_\Omega h(x) u_n^{1-\gamma} dx \geq 0.$$

Assim, por (3.16)-(3.18), temos

$$C + d_2 + \frac{1}{\theta} d_3 \|u_n\|_{1,q} \geq \left(\frac{1}{p\mu} - \frac{1}{\theta}\right) k_2 \|u_n\|_{1,q}^q.$$

- Se $0 < \gamma < 1$, então $\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{1-\gamma}\right) < 0$, pois $1 < p < q < \theta < q^*$. E ainda, aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{q}{1-\gamma}$ e $\frac{q}{q+(\gamma-1)}$, e a imersão de Sobolev, obtemos

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{\theta} \widehat{g}(x, u_n) u_n - \widehat{G}(x, u_n)\right] dx \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{1-\gamma}\right) \|h\|_{1,q}^{q+(\gamma-1)} \|u_n\|_{1,q}^{1-\gamma} - C.$$

Logo, segue de (3.16)-(3.18) que

$$C + d_2 + \frac{1}{\theta} d_3 \|u_n\|_{1,q} + \left(\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{\theta}\right) \|h\|_{1,q}^{q+(\gamma-1)} \|u_n\|_{1,q}^{1-\gamma} \geq \left(\frac{1}{p\mu} - \frac{1}{\theta}\right) k_2 \|u_n\|_{1,q}^q.$$

Portanto, analisando os dois casos acima, desde que $\theta > p\mu$, concluímos que (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,q}(\Omega), \\ u_n \to u \text{ em } L^s(\Omega), \ 1 \leq s < q^*, \\ u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \\ |u_n(x)| \leq \varphi(x) \in L^s(\Omega), \ 1 \leq s < q^*. \end{cases} \tag{3.19}$$

Em virtude de (a_3), podemos usar a Proposição B.1 para obter

$$C_q \|u_n - u\|_{1,q}^q \leq \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^p dx - \int_\Omega a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u \, dx + o_n(1),$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^p dx - \int_\Omega a(|\nabla u|^p|\nabla u|^{p-2}\nabla u_n \nabla u\ dx.$$

Mas, desde que $(u_n - u)$ é limitada em $W_0^{1,q}(\Omega)$, resulta de (3.15) que

$$C_q\|u_n - u\|_{1,q}^q \leq \int_\Omega \widehat{g}(x,u_n)(u_n - u)dx. \tag{3.20}$$

Agora, de (3.19) e da continuidade de $\widehat{g}$, temos

$$\widehat{g}(x,u_n(x))u_n(x) - \widehat{g}(x,u_n(x))u(x) \to \widehat{g}(x,u(x))u(x) - \widehat{g}(x,u(x))u(x),$$

o que implica em

$$\widehat{g}(x,u_n(x))(u_n(x) - u(x)) \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, usamos Lema 3.1(i), Observação 3.1, (3.11) e (3.19) novamente para obter

$$\begin{aligned} |\widehat{g}(x,u_n(x))u_n(x) - \widehat{g}(x,u_n(x))u(x)| &\leq |\widehat{g}(x,u_n(x))u_n(x)| + |\widehat{g}(x,u_n(x))u(x)| \\ &= |\widehat{g}(x,u_n(x))||u_n(x)| + |\widehat{g}(x,u_n(x))||u(x)| \\ &\leq \left[\ h(x)\underline{u}^{-\gamma} + h(x)(|u_n|^{r-1} + 1)\ \right]|u_n(x)| \\ &+ \left[h(x)\underline{u}^{-\gamma} + h(x)(|u_n(x)|^{r-1} + 1)\right]|u(x)| \\ &\leq \|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty\ \varphi(x) + \|h\|_\infty\ \varphi^r(x) \\ &+ \|h\|_\infty\ \varphi(x) + \|h\underline{u}^{-\gamma}\|_\infty\ |u(x)| \\ &+ \|h\|_\infty \varphi^{r-1}(x)|u(x)| + \|h\|_\infty |u(x)| \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_\Omega \widehat{g}(x,u_n)(u_n - u)dx \to 0, \text{ quando } n \to 0. \tag{3.21}$$

Então, decorre de (3.20) e (3.21) que

$$\|u_n - u\|_{1,q} = o_n(1) \text{ e assim, } u_n \to u \text{ em } W_0^{1,q}(\Omega). \qquad \square$$

Demonstração do Teorema 3.2. Sejam $\underline{u}$, $\overline{u}$ a subsolução e a supersolução, respectivamente, do problema (3.1), dadas no Lema 3.1, e w a solução fraca de (3.1) obtida pelo Teorema 3.1.

Inicialmente, note que $g(x,t) = \widehat{g}(x,t)$, para $t \in [0, \overline{u}]$, então $\Phi(u) = \widehat{\Phi}(u)$, para $u \in [0, \overline{u}]$. Portanto,

$$\widehat{\Phi}(w) = \inf_{M} \Phi,$$

onde M foi dada na demonstração do Teorema 3.1.

Assim, usando os Lemas 3.2 e 3.3, temos que existe um mínimo local $w \in B_R(0)$ tal que

$$\widehat{\Phi}(w) \leq \inf_{u \in B_R(0)} \hat{\Phi}(u) \leq \widehat{\Phi}(\underline{u}) \leq \alpha.$$

Além disso, decorre do Teorema do Passo da Montanha que existe $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tal que

$$\beta \leq \widehat{\Phi}(v) = c,$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \widehat{\Phi}(\gamma(t)), \text{ com } \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,q}(\Omega)) : \gamma(0) = \underline{u} \text{ e } \gamma(1) = e\},$$

é o valor minimax de $\widehat{\Phi}$.

Portanto, o problema (3.9) possui duas soluções fracas positivas $w, v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tais que

$$\widehat{\Phi}(w) \leq \widehat{\Phi}(\underline{u}) \leq \alpha < \beta \leq \widehat{\Phi}(v) = c.$$

Afirmamos que $v \geq \underline{u}$. De fato, tomando $(\underline{u} - v)^+$ como função teste, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(\underline{u} - v)^+ dx &= \int_\Omega \widehat{g}(x,v)(\underline{u} - v)^+ dx \\ &= \int_{\{v \leq \underline{u}\}} \left[h(x)\underline{u}^{-\gamma} + f(x,\underline{u})\right](\underline{u} - v)dx. \end{aligned}$$

Desde que $\underline{u}$ é subsolução, então

$$\int_{\Omega} a(|\nabla \underline{u}|^p)|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla(\underline{u}-v)^+dx \leq \int_{\Omega} h(x)\underline{u}^{-\gamma}(\underline{u}-v)^+dx + \int_{\Omega} f(x,\underline{u})(\underline{u}-v)^+dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} a(|\nabla \underline{u}|^p)|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla(\underline{u}-v)^+dx - \int_{\Omega} a(|\nabla v|^p)|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla(\underline{u}-v)^+dx \leq 0.$$

Aplicando a desigualdade da Proposição B.1, veja o Apêndice B, obtemos

$$C_q\int_{\Omega} |\nabla(\underline{u}-v)^+|^q \leq 0,$$

implicando que $(\underline{u}-v)^+=0$ e, assim, $\underline{u}\leq v$.

Pela relação em (3.9), temos

$$\widehat{g}(x,v) = h(x)v^{-\gamma} + f(x,v) \text{ em } \Omega.$$

Portanto, w e v são duas soluções fracas positivas para o problema (3.1). $\square$

Capítulo

4

Existência e multiplicidade de soluções positivas para um sistema singular via método sub-supersolução e Teorema do Passo da Montanha

4.1 Introdução

Neste capítulo, tratamos as questões da existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de sistemas singulares de equações elípticas não lineraes

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = h_1(x)u^{-\gamma_1} + F_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla u|^{p_2})|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u) = h_2(x)u^{-\gamma_2} + F_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $2 \leq p_1, p_2 < N$. Para $i = 1, 2$, $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1, $1 \neq \gamma_i > 0$ é uma constante fixada e $h_i \geq 0$ é uma função mensurável não-trivial. Mais precisamente, suponhamos que as funções h_i e a_i satisfazem as seguintes hipóteses:

(H) Existem $0 < \phi_0 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ tal que $h_i\phi_0^{-\gamma_i} \in L^\infty(\Omega)$.

(A_1) Existem constantes k_1, k_2, k_3, $k_4 > 0$ e $1 < p_i < q_i < N$ tais que

$$k_1t^{p_i} + k_2t^{q_i} \le a_i(t^{p_i})t^{p_i} \le k_3t^{p_i} + k_4t^{q_i}, \text{ para todo } t \ge 0.$$

(A_2) As funções

$$t \longmapsto A_i(t^{p_i}) \text{ são estritamente convexas,}$$

onde $A_i(t) = \displaystyle\int_0^t a_i(s)ds, \; i = 1, 2.$

(A_3) As funções

$$t \longmapsto a_i(t^{p_i})t^{p_i-2} \text{ são crescentes.}$$

(A_4) Existem constantes μ_i, $\dfrac{1}{q_1^*} < \theta_s < \dfrac{1}{q_1}$ e $\dfrac{1}{q_2^*} < \theta_t < \dfrac{1}{q_2}$ tais que

$$\frac{1}{\mu_i}a_i(t)t \le A_i(t), \text{ para todo } t \ge 0,$$

com $1 < \dfrac{q_1}{p_1} \le \mu_1 < \dfrac{1}{\theta_s p_1}$ e $1 < \dfrac{q_2}{p_2} \le \mu_2 < \dfrac{1}{\theta_t p_2}$.

Observação 4.1. *Por (H), temos*

$$|h_i| = |h_i\phi_0^{-\gamma_i}\phi_0^{\gamma_i}| \le \|h_i\phi_0^{-\gamma_i}\|_\infty \phi_0^{\gamma_i} \in L^\infty(\Omega).4$$

Aqui, admitimos que F é uma função sobre $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$ de classe C^1 satisfazendo as seguintes condições:

(F_1) Existe $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ tal que

$$-h_1(x) \le F_s(x, s, t) \le 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \le s \le \delta$$

e

$$-h_2(x) \le F_t(x, s, t) \le 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \le t \le \delta.$$

Sendo $p_i < q_i$ e Ω limitado, $W_0^{1,p_i}(\Omega) \cap W_0^{1,q_i}(\Omega) = W_0^{1,q_i}(\Omega)$. Logo, a fim de mostrar a existência e multiplicidade de soluções para o problema (4.1), definimos o espaço de Sobolev $X = W_0^{1,q_1}(\Omega) \times W_0^{1,q_2}(\Omega)$ munido com a norma

$$\|(u,v)\| = \|u\|_{1,q_1} + \|v\|_{1,q_2},$$

onde

$$\|u\|_{1,q_i} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^{q_i} dx \right)^{\frac{1}{q_i}}.$$

Definição 4.1. *Dizemos que $u \in X$ é uma solução fraca positiva do problema* (4.1) *se $u, v > 0$ em Ω e se verifica*

$$\int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \ \nabla\phi \ dx = \int_\Omega \big(h_1(x)u^{-\gamma_1} + F_u(x,u,v)\big) \, \phi \ dx$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \ \nabla\varphi \ dx = \int_\Omega \big(h_2(x)v^{-\gamma_2} + F_v(x,u,v)\big) \, \varphi \ dx,$$

para todo $(\phi, \varphi) \in X$.

Em nosso primeiro teorema, aplicamos o método de sub-supersolução para estabelecer a existência de uma solução fraca para o problema (4.1).

Teorema 4.1. *Suponha que (H), (F_1) e $(A_1) - (A_2)$ são satisfeitas. Então, o sistema (4.1) possui uma solução fraca positiva se $\|h_i\|_\infty$ é pequena, para $i = 1, 2$.*

E ainda, assumimos a condição abaixo para provar a existência de duas soluções para o problema (4.1).

(F_2) Para $i = 1, 2$, existe $q_i < r < q_i^* = \dfrac{Nq_i}{(N - q_i)}$ ($q_i^* = \infty$ se $q_i \geq N$) tal que

$$F_s(x,s,t) \leq h_1(x)(1 + |s|^{r-1} + |t|^{r-1}) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } s \geq 0$$

e

$$F_t(x,s,t) \leq h_2(x)(1 + |s|^{r-1} + |t|^{r-1}) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } t \geq 0.$$

(F_3) Existem $s_0, t_0 > 0$ tais que

$$0 < F(x,s,t) \leq \theta_s s F_s(x,s,t) + \theta_t t F_t(x,s,t) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } s \geq s_0 \text{ e } t \geq t_0,$$

onde θ_s e θ_t configuram em (A_4).

Teorema 4.2. *Suponha que (H), $(F_1)-(F_3)$ e $(A_1)-(A_4)$ são satisfeitas. Então, o sistema (4.1) possui duas soluções fracas positivas se $\|h_i\|_\infty$ é pequena, para $i = 1, 2$.*

4.2 Demonstração do Teorema 4.1

O próximo resultado é essencial para nos fornecer a existência de uma subsolução e uma supersolução para o problema (4.1). Para este fim, fixamos o valor de $\|h_i\|_\infty$ com $i = 1, 2$.

Definição 4.2. *Dizemos que $[(\underline{u}, \underline{v}), (\overline{u}, \overline{v})]$ é um par de sub e supersolução para o problema (4.1), respectivamente, se $\underline{u}, \overline{u} \in W_0^{1,q_1}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$, $\underline{v}, \overline{v} \in W_0^{1,q_2}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ com*

(a) $\underline{u} \leq \overline{u}$, $\underline{v} \leq \overline{v}$ em Ω.

(b) Dado $(\phi, \varphi) \in X$ com $\phi, \varphi \geq 0$, temos

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega a_1(|\nabla \underline{u}|^{p_1})|\nabla \underline{u}|^{p_1-2}\nabla \underline{u}\ \nabla \phi\ dx \leq \int\limits_\Omega \big(h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} + F_u(x,\underline{u},w)\big)\,\phi\ dx, & \text{para todo } w \in [\underline{v}, \overline{v}], \\ \int\limits_\Omega a_2(|\nabla \underline{v}|^{p_2})|\nabla \underline{v}|^{p_2-2}\nabla \underline{v}\ \nabla \varphi\ dx \leq \int\limits_\Omega \big(h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} + F_v(x,w,\underline{v})\big)\,\varphi\ dx, & \text{para todo } w \in [\underline{u}, \overline{u}] \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega a_1(|\nabla \overline{u}|^{p_1})|\nabla \overline{u}|^{p_1-2}\nabla \overline{u}\ \nabla \phi\ dx \geq \int\limits_\Omega \big(h_1(x)\overline{u}^{-\gamma_1} + F_u(x,\overline{u},w)\big)\,\phi\ dx, & \text{para todo } w \in [\underline{v}, \overline{v}], \\ \int\limits_\Omega a_2(|\nabla \overline{v}|^{p_2})|\nabla \overline{v}|^{p_2-2}\nabla \overline{v}\ \nabla \varphi\ dx \geq \int\limits_\Omega \big(h_2(x)\overline{v}^{-\gamma_2} + F_v(x,w,\overline{v})\big)\,\varphi\ dx, & \text{para todo } w \in [\underline{u}, \overline{u}]. \end{cases}$$

Lema 4.1. *Suponha que (H), (F_1) e $(A_1)-(A_2)$ são satisfeitas. Se $\|h_i\|_\infty$ é pequena, para $i = 1, 2$, então existem $\underline{u}, \overline{u}, \underline{v}, \overline{v} \in C^1(\overline{\Omega})$ tais que* *i)* $h_1\underline{u}^{-\gamma_1}, h_2\underline{v}^{-\gamma_2} \in L^\infty(\Omega)$, $\|\underline{u}\|_\infty \leq \delta < \dfrac{1}{2}$ *e* $\|\underline{v}\|_\infty \leq \delta < \dfrac{1}{2}$, *onde* δ *é dada em* (F_1).

ii) $0 < \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ *q.t.p em* Ω *e* $0 < \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x)$ *q.t.p em* Ω.

iii) $(\underline{u}, \underline{v})$ *é uma subsolução e* $(\overline{u}, \overline{v})$ *é uma supersolução de* (4.1).

Demonstração. Pelo Lema B.1 e Teorema de Minty-Browder, dado $h_1 \in (W_0^{1,q_1}(\Omega))'$, existe uma única solução positiva $\underline{u} \in W_0^{1,q_1}(\Omega)$ satisfazendo o problema abaixo

$$\begin{cases} -\text{div}(a_1(|\nabla \underline{u}|^{p_1})|\nabla \underline{u}|^{p_1-2}\nabla \underline{u}) = h_1(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Analogamente, existe uma única solução positiva $\underline{v} \in W_0^{1,q_2}(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\text{div}(a_2(|\nabla \underline{v}|^{p_2})|\nabla \underline{v}|^{p_2-2}\nabla \underline{v}) = h_2(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

Desde que $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$, veja Observação 4.1, podemos usar o mesmo argumento em [45] para fornecer que $\underline{u}, \underline{v} \in C^1(\overline{\Omega})$. Assim, em virtude do Lema A.1 e do Lema B.3, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\frac{\underline{u}(x)}{\phi_0(x)} \geq C_1 > 0 \;\text{ e }\; \frac{\underline{v}(x)}{\phi_0(x)} \geq C_2 > 0 \text{ , para todo } x \in \Omega.$$

Portanto, $\underline{u}, \underline{v} > 0$, $\dfrac{\underline{u}^{-\gamma_1}}{\phi_0^{-\gamma_1}} \leq C_1^{-\gamma_1}$ e $\dfrac{\underline{v}^{-\gamma_2}}{\phi_0^{-\gamma_2}} \leq C_2^{-\gamma_2}$. Assim, por (H)

$$|h_1\underline{u}^{-\gamma_1}| \leq C_1^{-\gamma_1}\|h_1\phi_0^{-\gamma_1}\|_\infty \;\text{ e }\; |h_2\underline{v}^{-\gamma_2}| \leq C_2^{-\gamma_2}\|h_2\phi_0^{-\gamma_2}\|_\infty, \tag{4.4}$$

implicando que $h_1\underline{u}^{-\gamma_1}, h_2\underline{v}^{-\gamma_2} \in L^\infty(\Omega)$. E ainda, argumentando como em [76, Lemma 4.5], existem $C_1^*, C_2^* > 0$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tais que

$$\|\underline{u}\|_\infty \leq C_1^*\|h_1\|_\infty^{\alpha_1} \;\text{ e }\; \|\underline{v}\|_\infty \leq C_2^*\|h_2\|_\infty^{\alpha_2}$$

e consequentemente, pela Observação 4.1 novamente, podemos escolher $\|h_i\|_\infty$

suficientemente pequena, com $i = 1, 2$, de modo que

$$\|\underline{u}\|_\infty \le \delta < \frac{1}{2} \text{ e } \|\underline{v}\|_\infty \le \delta < \frac{1}{2},$$

o que termina a prova da condição (i).

Com o intuito de provar (ii), invocamos o Lema B.1 e o Teorema de Minty-Browder mais uma vez para mostrar que existe uma única solução positiva $\overline{u} \in W_0^{1,q_1}(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\text{div}(a_1(|\nabla \overline{u}|^{p_1})|\nabla \overline{u}|^{p_1-2}\nabla \overline{u}) = h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

e existe uma única solução positiva $\overline{v} \in W_0^{1,q_2}(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\text{div}(a_2(|\nabla \overline{v}|^{p_2})|\nabla \overline{v}|^{p_2-2}\nabla \overline{v}) = h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} \text{ em } \Omega, \\ \overline{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Novamente, usamos o mesmo argumento em [45] para obter $\overline{u}, \overline{v} \in C^1(\overline{\Omega})$. Note que, argumentando como em [76, Lemma 4.5] e usando (4.4), temos

$$\|\overline{u}\|_\infty \le C_1^*\|h_1\underline{u}^{-\gamma_1}\|_\infty^{\alpha_1} \le C_1^*\|h_1\|_\infty^{\alpha_1} C_1^{-\gamma_1\alpha_1}\|\phi_0\|_\infty^{-\gamma_1\alpha_1}$$

e

$$\|\overline{v}\|_\infty \le C_2^*\|h_2\underline{v}^{-\gamma_2}\|_\infty^{\alpha_2} \le C_2^*\|h_2\|_\infty^{\alpha_2} C_2^{-\gamma_2\alpha_2}\|\phi_0\|_\infty^{-\gamma_2\alpha_2}.$$

Logo, escolhendo $\|h_i\|_\infty$ suficientemente pequena, com $i = 1, 2$, concluímos que

$$\|\overline{u}\|_\infty \le \delta < \frac{1}{2} \text{ e } \|\overline{v}\|_\infty \le \delta < \frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

Além disso, da condição (i),

$$h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} \ge h_1(x) \text{ e } h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} \ge h_2(x)$$

e assim, para todo $\phi, \varphi \geq 0$, usamos (4.2), (4.3), (4.5) e (4.6) para obter

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_1(|\nabla \overline{u}|^{p_1})|\nabla \overline{u}|^{p_1-2}\nabla \overline{u}\ \nabla \phi\ dx &= \int_\Omega h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1}\phi\ dx \geq \int_\Omega h_1(x)\phi\ dx \\ &= \int_\Omega a_1(|\nabla \underline{u}|^{p_1})|\nabla \underline{u}|^{p_1-2}\nabla \underline{u}\ \nabla \phi\ dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_2(|\nabla \overline{v}|^{p_2})|\nabla \overline{v}|^{p_2-2}\nabla \overline{v}\ \nabla \varphi\ dx &= \int_\Omega h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2}\varphi\ dx \geq \int_\Omega h_2(x)\varphi\ dx \\ &= \int_\Omega a_2(|\nabla \underline{v}|^{p_2})|\nabla \underline{v}|^{p_2-2}\nabla \underline{v}\ \nabla \varphi\ dx.\end{aligned}$$

Portanto, aplicamos o Príncipio de Comparação Fraco para o operador $p\&q$-Laplaciano para concluir que

$$0 < \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x) \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$0 < \underline{v}(x) \leq \overline{v}(x) \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

o que prova a condição (ii).

Nossa tarefa final é verificar que a condição (iii) é válida. Primeiro, para cada $\phi, \varphi \geq 0$, invocamos (F_1), (4.2) e (4.3) para obter

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_1(|\nabla \underline{u}|^{p_1})|\nabla \underline{u}|^{p_1-2}\nabla \underline{u}\ \nabla \phi\ dx - \int_\Omega h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1}\phi\ dx - \int_\Omega F_u(x,\underline{u},v)\phi\ dx \\ \leq \int_\Omega h_1(x)\phi\ dx - \int_\Omega h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1}\phi\ dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_2(|\nabla \underline{v}|^{p_2})|\nabla \underline{v}|^{p_2-2}\nabla \underline{v}\ \nabla \varphi\ dx - \int_\Omega h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2}\varphi\ dx - \int_\Omega F_v(x,u,\underline{v})\varphi\ dx \\ \leq 2\int_\Omega h_2(x)\varphi\ dx - \int_\Omega h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2}\varphi\ dx.\end{aligned}$$

Desde que $-h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} \leq -2h_1(x)$ e $-h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} \leq -2h_2(x)$, temos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla \underline{u}|^{p_1})|\nabla \underline{u}|^{p_1-2}\nabla \underline{u}\nabla \phi \, dx - \int_\Omega h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1}\phi \, dx - \int_\Omega F_u(x,\underline{u},v)\phi \, dx \leq 0$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla \underline{v}|^{p_2})|\nabla \underline{v}|^{p_2-2}\nabla \underline{v}\nabla \varphi \, dx - \int_\Omega h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2}\varphi \, dx - \int_\Omega F_v(x,u,\underline{v})\varphi \, dx \leq 0.$$

Então, $(\underline{u},\underline{v})$ é uma subsolução para o problema (4.1).

Agora, usamos (F_1) e (4.5)-(4.7) para ter

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_1(|\nabla \overline{u}|^{p_1})|\nabla \overline{u}|^{p_1-2}\nabla \overline{u}\nabla \phi \, dx - \int_\Omega h_1(x)\overline{u}^{-\gamma_1}\phi \, dx - \int_\Omega F_u(x,\overline{u},v)\phi \, dx \\ \geq \int_\Omega (\underline{u}^{-\gamma_1} - \overline{u}^{-\gamma_1})h_1(x)\phi \, dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_2(|\nabla \overline{v}|^{p_2})|\nabla \overline{v}|^{p_2-2}\nabla \overline{v}\nabla \varphi \, dx - \int_\Omega h_2(x)\overline{v}^{-\gamma_2}\varphi \, dx - \int_\Omega F_v(x,u,\overline{v})\varphi \, dx \\ \geq \int_\Omega (\underline{v}^{-\gamma_2} - \overline{v}^{-\gamma_2})h_2(x)\varphi \, dx.\end{aligned}$$

De (ii), temos $\underline{u}^{-\gamma_1} - \overline{u}^{-\gamma_1} \geq 0$ e $\underline{v}^{-\gamma_2} - \overline{v}^{-\gamma_2} \geq 0$. Então, desde que $h_1, h_2 \geq 0$, obtemos

$$\int_\Omega a_1(|\nabla \overline{u}|^{p_1})|\nabla \overline{u}|^{p_1-2}\nabla \overline{u}\nabla \phi \, dx - \int_\Omega h_1(x)\overline{u}^{-\gamma_1}\phi \, dx - \int_\Omega F_u(x,\overline{u},v)\phi \, dx \geq 0$$

e

$$\int_\Omega a_2(|\nabla \overline{v}|^{p_2})|\nabla \overline{v}|^{p_2-2}\nabla \overline{v}\nabla \varphi \, dx - \int_\Omega h_2(x)\overline{v}^{-\gamma_2}\varphi \, dx - \int_\Omega F_v(x,u,\overline{v})\varphi \, dx \geq 0,$$

o que implica que $(\overline{u},\overline{v})$ é uma supersolução para o problema (4.1). $\square$

Demonstração do Teorema 4.1. Considere as funções

$$G_s(x,s,t)=\begin{cases} h_1(x)\overline{u}(x)^{-\gamma_1}+F_s(x,\overline{u}(x),t), & s>\overline{u}(x)\\ h_1(x)s^{-\gamma_1}+F_s(x,s,t), & \underline{u}(x)\leq s\leq \overline{u}(x)\\ h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1}+F_s(x,\underline{u}(x),t), & s<\underline{u}(x)\end{cases} \tag{4.8}$$

$$G_t(x,s,t)=\begin{cases} h_2(x)\overline{v}(x)^{-\gamma_2}+F_t(x,s,\overline{v}(x)), & t>\overline{v}(x)\\ h_2(x)t^{-\gamma_2}+F_t(x,s,t), & \underline{v}(x)\leq t\leq \overline{v}(x)\\ h_2(x)\underline{v}(x)^{-\gamma_2}+F_t(x,s,\underline{u}(x)), & t<\underline{v}(x)\end{cases} \tag{4.9}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)=G_u(x,u,v) \text{ em } \Omega,\\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla u|^{p_2})|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u)=G_v(x,u,v) \text{ em } \Omega,\\ u,v>0 \text{ em } \Omega,\\ u=v=0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{cases} \tag{4.10}$$

Associamos ao problema (4.10) o funcional $\Phi: X\to\mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u,v)=\frac{1}{p_1}\int_\Omega A_1(|\nabla u|^{p_1})dx+\frac{1}{p_2}\int_\Omega A_2(|\nabla v|^{p_2})dx-\int_\Omega G(x,u,v)dx. \tag{4.11}$$

Note que, em vista de (A_1), o funcional Φ está bem definido e é de classe C^1. Além disso, qualquer ponto crítico de Φ é uma solução fraca para o problema (4.10) e a derivada de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned}\Phi^{'}(u,v)(\phi,\varphi) &= \int_\Omega \left[a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\phi+a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\varphi\right]dx\\ &- \int_\Omega \left[G_u(x,u,v)\phi+G_v(x,u,v)\varphi\right]dx,\end{aligned}$$

para todo $(u,v),(\phi,\varphi)\in X$.

Segue do Lema 4.1(ii), (F_1) e (4.7) que

$$h_1(x) \leq F_s(x,s,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq s \leq \|\overline{u}\|_\infty, \tag{4.12}$$

e

$$h_2(x) \leq F_t(x,s,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \|\overline{v}\|_\infty. \tag{4.13}$$

Agora, usando o Lema 4.1(ii), (4.8) e (4.12), temos que:

- Se $s > \overline{u}(x)$, então

$$G_s(x,s,t) = h_1(x)\overline{u}(x)^{-\gamma_1} + F_s(x,\overline{u}(x),t) \leq h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1},$$

- Se $\underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x)$, então

$$G_s(x,s,t) = h_1(x)s^{-\gamma_1} + F_s(x,s,t) \leq h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1}$$

e

- Se $s < \underline{u}(x)$, então

$$G_s(x,s,t) = h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1} + F_s(x,\underline{u}(x),t) \leq h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1}.$$

Logo,

$$G_s(x,s,t) \leq h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} \text{ q.t.p em } \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

De modo análogo, usamos o Lema 4.1(ii), (4.9) e (4.13) para obter

$$G_t(x,s,t) \leq h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} \text{ q.t.p em } \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Considere $M = \{(u,v) \in X; \underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ q.t.p em } \Omega \text{ e } \underline{v} \leq v \leq \overline{v} \text{ q.t.p em } \Omega\}$. Afirmamos que Φ é limitado inferiormente em M. De fato, para todo $(u,v) \in X$, usamos (A_1), (4.11), (4.14) e (4.15) para obter

$$\begin{aligned}
\Phi(u,v) &\geq \frac{k_1}{p_1}\|u\|_{1,p_1}^{p_1} + \frac{k_2}{q_1}\|u\|_{1,q_1}^{q_1} + \frac{k_1}{p_2}\|v\|_{1,p_2}^{p_2} + \frac{k_2}{q_2}\|v\|_{1,q_2}^{q_2} \\
&- \int_\Omega \left[\int_0^u G_s(x,s,t)ds\right]dx - \int_\Omega \left[\int_0^v G_t(x,s,t)dt\right]dx \\
&\geq \frac{k_2}{q_1}\|u\|_{1,q_1}^{q_1} + \frac{k_2}{q_2}\|v\|_{1,q_2}^{q_2} - \int_\Omega u\left(h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1}\right)dx - \int_\Omega v\left(h_2(x)\underline{v}(x)^{-\gamma_2}\right)dx \\
&\geq K(\|u\|_{1,q_1}^{q_1} + \|v\|_{1,q_2}^{q_2}) - K^*,
\end{aligned}$$

onde $K = \min\left\{\dfrac{k_2}{q_1}, \dfrac{k_2}{q_2}\right\}$ e $K^* = \|u\|_\infty \displaystyle\int_\Omega h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1}dx + \|v\|_\infty \int_\Omega h_2(x)\underline{v}(x)^{-\gamma_2}dx$ devido o Lema 4.1(i).

Fazendo $\|(u,v)\| \to +\infty$, temos $\|u\|_{1,q_1}^{q_1} \to +\infty$ ou $\|v\|_{1,q_2}^{q_2} \to +\infty$, o que implica em $\Phi(u,v) \to +\infty$, e assim Φ é coerciva. E ainda, pela condição (A_2), obtemos que Φ é fracamente semicontínua inferiormente. Assim, desde que M é fechado e convexo em X, pelo Teorema A.13, segue que Φ é limitado inferiormente em M e atinge o seu ínfimo em um ponto $(u,v) \in M$, conforme queríamos.

Usando o mesmo raciocínio na demonstração de [74, Teorema 2.4], este ponto mínimo (u,v) é uma solução fraca positiva para o problema (4.10). Como $G_s(x,s,t) = h_1(x)s^{-\gamma_1} + F_s(x,s,t)$, para $s \in [\underline{u},\overline{u}]$, e $G_t(x,s,t) = h_2(x)t^{-\gamma_2} + F_t(x,s,t)$, para $t \in [\underline{v},\overline{v}]$, então $(u,v) \in X$ é precisamente uma solução fraca positiva de (4.1). $\square$

4.3 Demonstração do Teorema 4.2

Seja $(\underline{u},\underline{v}) \in X$ a subsolução do problema (4.1). Em nosso próximo resultado, provamos que o funcional satisfaz as duas geometrias do Teorema do Passo da Montanha [6].

Considere as funções

$$\widehat{G}_s(x,s,t) = \begin{cases} h_1(x)s^{-\gamma_1} + F_s(x,s,t), & s > \underline{u}(x) \\ h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1} + F_s(x,\underline{u}(x),t), & s \leq \underline{u}(x) \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\widehat{G}_t(x,s,t) = \begin{cases} h_2(x)t^{-\gamma_2} + F_t(x,s,t), & t > \underline{v}(x) \\ h_2(x)\underline{v}(x)^{-\gamma_2} + F_t(x,s,\underline{v}(x)), & t \le \underline{v}(x) \end{cases} \tag{4.17}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u) = \widehat{G}_u(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\mathrm{div}(a_2(|\nabla u|^{p_2})|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u) = \widehat{G}_v(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u, v > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.18}$$

Definimos o funcional $\widehat{\Phi} : X \to \mathbb{R}$ associado ao problema (4.18) por

$$\widehat{\Phi}(u,v) = \frac{1}{p_1}\int_\Omega A_1(|\nabla u|^{p_1})dx + \frac{1}{p_2}\int_\Omega A_2(|\nabla v|^{p_2})dx - \int_\Omega \widehat{G}(x,u,v)dx. \tag{4.19}$$

Novamente, por (A_1), o funcional $\widehat{\Phi} \in C^1(X,\mathbb{R})$ com a seguinte derivada de Fréchet

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}'(u,v)(\phi,\varphi) &= \int_\Omega \left[a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\phi + a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\varphi\right] dx \\ &- \int_\Omega \left[\widehat{G_u}(x,u,v)\phi + \widehat{G_v}(x,u,v)\varphi\right] dx, \end{aligned}$$

para todo $(u,v), (\phi,\varphi) \in X$.

Note que, aplicando (4.16) e (F_2), temos que:

- Se $s > \underline{u}(x)$, então

$$\widehat{G}_s(x,s,t) = h_1(x)s^{-\gamma_1} + F_s(x,s,t) \le h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1} + h_1(x)(1 + |s|^{r-1} + |t|^{r-1})$$

e

- Se $s \le \underline{u}(x)$, então

$$\widehat{G}_s(x,s,t) = h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1} + F_s(x,\underline{u}(x),t) \le h_1(x)\underline{u}(x)^{-\gamma_1} + h_1(x)(1 + |s|^{r-1} + |t|^{r-1}).$$

Logo,

$$\widehat{G}_s(x,s,t) \leq h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} + h_1(x)(1+|s|^{r-1}+|t|^{r-1}) \text{ q.t.p em } \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

De modo análogo, usando (4.17) e (F_2), temos

$$\widehat{G}_t(x,s,t) \leq h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} + h_2(x)(1+|s|^{r-1}+|t|^{r-1}) \text{ q.t.p em } \Omega, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, pelo Lema 4.1 (i) e Observação 4.1, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \widehat{G}(x,s,t) &\leq \|h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1}\|_\infty s + \|h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2}\|_\infty t + \|h_1(x)\|_\infty (s + c_1|s|^r + |t|^{r-1}s) \\ &+ \|h_2(x)\|_\infty (t + |s|^{r-1}t + c_2|t|^r) \text{ q.t.p em } \Omega, \forall s,t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Lema 4.2. *Suponha que* (H), $(F_1)-(F_3)$ *e* $(A_1)-(A_4)$ *são satisfeitas. Então,* $\widehat{\Phi}$ *satisfaz*

$(\widehat{\Phi}_1)$ *Existem* R, α, β *com* $R > \|(\underline{u}, \underline{v})\|$ *e* $\alpha < \beta$ *tais que*

$$\widehat{\Phi}(\underline{u}, \underline{v}) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{\partial B_R(0)} \widehat{\Phi}.$$

$(\widehat{\Phi}_2)$ *Existe* $e \in X \setminus \overline{B_R(0)}$ *tal que* $\widehat{\Phi}(e) < \beta$.

Demonstração. Decorre do Lema 4.1(i) e (F_1) que

$$-h_1(x) \leq F_s(x,s,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq s \leq \|\underline{u}\|_\infty,$$

e

$$-h_2(x) \leq F_t(x,s,t) \leq 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ para todo } 0 \leq t \leq \|\underline{u}\|_\infty.$$

Logo, usando (4.16) e (4.17), obtemos

$$\widehat{G}_{\underline{u}}(x,\underline{u},\underline{v}) = h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} + F_{\underline{u}}(x,\underline{u},\underline{v}) \geq h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} - h_1(x)$$

e

$$\widehat{G}_{\underline{v}}(x,\underline{u},\underline{v}) = h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} + F_{\underline{v}}(x,\underline{u},\underline{v}) \geq h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} - h_2(x).$$

Consequentemente,

$$\widehat{G}(x,\underline{u},\underline{v}) \geq \left[h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} - h_1(x)\right]\underline{u} + \left[h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} - h_2(x)\right]\underline{v} \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Assim, por (4.19), temos

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(\underline{u},\underline{v}) &\leq \frac{1}{p_1}\int_\Omega A_1(|\nabla \underline{u}|^{p_1})\,dx + \frac{1}{p_2}\int_\Omega A_2(|\nabla \underline{v}|^{p_2})\,dx \\ &- \int_\Omega \left(h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} - h_1(x)\right)\underline{u}\,dx - \int_\Omega \left(h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} - h_2(x)\right)\underline{v}\,dx.\end{aligned}$$

Desde que $h_1, h_2 \geq 0$ e $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, invocamos o Lema 4.1(i) para obter $h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1} - h_1(x) \geq 0$ e $h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2} - h_2(x) \geq 0$. Então, existe $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{\Phi}(\underline{u},\underline{v}) \leq \frac{1}{p_1}\int_\Omega A_1(|\nabla \underline{u}|^{p_1})\,dx + \frac{1}{p_2}\int_\Omega A_2(|\nabla \underline{v}|^{p_2})\,dx \equiv \alpha. \tag{4.21}$$

Assim, usando (A_1), (4.19), (4.20), Desigualdade de Young e imersão de Sobolev, existem constantes positivas tais que

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(u,v) &\geq K(\|u\|_{1,q_1}^{q_1} + \|v\|_{1,q_2}^{q_2}) - c_3\|h_1(x)\underline{u}^{-\gamma_1}\|_\infty\|(u,v)\| - c_4\|h_1(x)\|_\infty\,\|(u,v)\| \\ &- c_5\|h_1(x)\|_\infty\|(u,v)\|^r - c_6\|h_2(x)\underline{v}^{-\gamma_2}\|_\infty\|(u,v)\| - c_7\|h_2(x)\|_\infty\|(u,v)\| \\ &- c_8\|h_2(x)\|_\infty\|(u,v)\|^r - c_9\|h_1(x)\|_\infty\|(u,v)\|^r - c_{10}\|h_1(x)\|_\infty\|(u,v)\|^r \\ &- c_{11}\|h_2(x)\|_\infty\|(u,v)\|^r - c_{12}\|h_2(x)\|_\infty\|(u,v)\|^r, \end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $K = \min\left\{\frac{k_2}{q_1}, \frac{k_2}{q_2}\right\}$.

Assumindo $\|(u,v)\| = R$ com $R > \max\{1, \|(\underline{u},\underline{v})\|\}$ e para $\|h_i\|_\infty$ suficientemente pequena, com $i = 1,2$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\widehat{\Phi}(u,v) \geq \beta$, para todo $(u,v) \in \partial B_R(0)$. Assim, as escolhas de α, β, R e $\|h_i\|_\infty$ combinadas com as desigualdades (4.21) e (4.22) resultam em

$$\widehat{\Phi}(\underline{u},\underline{v}) \leq \alpha < \beta \leq \inf_{(u,v)\in\partial B_R(0)} \widehat{\Phi},$$

o que mostra a condição $\widehat{\Phi}_1$.

Agora, pela definição de $\widehat{G}$, temos

$$\widehat{G}(x, s\underline{u}, 0) \geq F(x, s\underline{u}, 0), \text{ para todo } s \geq 1, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Invocamos (A_1) e (4.19) para obter

$$\widehat{\Phi}(s\underline{u}, 0) \leq \frac{k_3}{p_1} s^{p_1} \|\underline{u}\|_{1,p_1}^{p_1} + \frac{k_4}{q_1} s^{q_1} \|\underline{u}\|_{1,q_1}^{q_1} - \int_\Omega F(x, s\underline{u}, 0)dx.$$

Usando (F_3), existe $d_1 > 0$ tal que $F(x, s, 0) \geq d_1 s^{\frac{1}{\theta_s}}$, para todo $s \geq \max\{1, s_0\}$, onde s_0 é a constante que aparece em (F_3). Então,

$$\widehat{\Phi}(s\underline{u}, 0) \leq \frac{k_3}{p_1} s^{p_1} \|\underline{u}\|_{1,p_1}^{p_1} + \frac{k_4}{q_1} s^{q_1} \|\underline{u}\|_{1,q_1}^{q_1} - d_1 s^{\frac{1}{\theta_s}} \int_\Omega |\underline{u}|^{\frac{1}{\theta_s}} dx.$$

Desde que $1 < p_1 < q_1 < \frac{1}{\theta_s} < q_1^*$, concluímos que $\widehat{\Phi}(s\underline{u}, 0) \to -\infty$ quando $s \to +\infty$. Logo, podemos encontrar $e = s_0(\underline{u}, 0) \in X$ tal que $\|e\| > R$ e $\widehat{\Phi}(e) < \beta$, o que satisfaz a condição $\widehat{\Phi}_2$. □

Demonstração do Teorema 4.2. Sejam $(\underline{u}, \underline{v})$ e $(\overline{u}, \overline{v})$ a subsolução e supersolução, respectivamente, do problema (4.1), dadas pelo Lema 4.1, e (u_1, v_1) a solução fraca do problema (4.1) obtida pelo Teorema 4.1.

Agora, afirmamos que o funcional $\widehat{\Phi}$ satisfaz a condição de Palais-Smale. De fato, considere $(u_n, v_n) \subset X$ uma sequência de Palais-Smale, ou seja,

$$\widehat{\Phi}(u_n, v_n) \to c \text{ e } \widehat{\Phi}'(u_n, v_n) \to 0. \tag{4.23}$$

Assim, existem $d_2, d_3 > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{\Phi}(u_n, v_n) - \Big[\theta_{u_n} \hat{\Phi}'(u_n, v_n)(u_n, 0) + \theta_{v_n} \widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(0, v_n)\Big] \leq d_2 + d_3(\theta_{u_n} + \theta_{v_n})(\|u_n\|_{1,q_1} + \|v_n\|_{1,q_2}). \tag{4.24}$$

Por outro lado, usamos (A_1) e (A_4) para obter

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Phi}(u_n, v_n) - \left[\theta_{u_n}\hat{\Phi}'(u_n, v_n)(u_n, 0) + \theta_{v_n}\widehat{\Phi}'(u_n, v_n)(0, v_n)\right] \\
&\qquad \geq \left(\frac{1}{p_1\mu_1} - \theta_{u_n}\right) k_2\|u_n\|_{1,q_1}^{q_1} + \left(\frac{1}{p_2\mu_2} - \theta_{v_n}\right) k_2\|v_n\|_{1,q_2}^{q_2} \\
&\qquad + \int_\Omega \left[\theta_{u_n}\widehat{G}_{u_n}(x, u_n, v_n)u_n + \theta_{v_n}\widehat{G}_{v_n}(x, u_n, v_n)v_n - \widehat{G}(x, u_n, v_n)\right]. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Mas, por virtude de (4.16) e (4.17), temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\theta_{u_n}\widehat{G}_{u_n}(x, u_n, v_n)u_n + \theta_{v_n}\widehat{G}_{v_n}(x, u_n, v_n)v_n - \widehat{G}(x, u_n, v_n)\right] dx \\
&\qquad \geq \left(\theta_{u_n} - \frac{1}{1-\gamma_1}\right)\int_\Omega h_1(x)u_n^{1-\gamma_1}dx + \left(\theta_{v_n} - \frac{1}{1-\gamma_2}\right)\int_\Omega h_2(x)u_n^{1-\gamma_2}dx \\
&\qquad + \int_\Omega [\theta_{u_n}F_{u_n}(x, u_n, v_n)u_n + \theta_{v_n}F_{v_n}(x, u_n, v_n)v_nF(x, u_n, v_n)]\, dx.
\end{aligned}$$

Considerando $A_n = \{x \in \Omega; |u_n(x)| > s_0 \text{ e } |v_n(x)| > t_0\}$. Então, por (F_3), existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\theta_{u_n}\widehat{G}_{u_n}(x, u_n, v_n)u_n + \theta_{v_n}\widehat{G}_{v_n}(x, u_n, v_n)v_n - \widehat{G}(x, u_n, v_n)\right] dx \geq \\
&\qquad \geq \left(\theta_{u_n} - \frac{1}{1-\gamma_1}\right)\int_\Omega h_1(x)u_n^{1-\gamma_1}dx + \left(\theta_{v_n} - \frac{1}{1-\gamma_2}\right) - C. \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

Analisando os casos possíveis e usando (4.24)-(4.26), podemos concluir que (u_n, v_n) é limitada em X. Assim, a menos de subsequência, existe $(u, v) \in X$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_2 \text{ em } W_0^{1,q_1}(\Omega), \\ u_n \to u_2 \text{ em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < q_1^*, \\ u_n(x) \to u_2(x) \text{ q.t.p em } \Omega \end{cases} \qquad (4.27)$$

e

$$\begin{cases} v_n \rightharpoonup v_2 \text{ em } W_0^{1,q_1}(\Omega), \\ v_n \to v_2 \text{ em } L^t(\Omega), \ 1 \leq t < q_2^*, \\ v_n(x) \to v_2(x) \text{ q.t.p em } \Omega. \end{cases} \tag{4.28}$$

Usando (A_2), aplicamos a Proposição B.1 para obter

$$C_{q_1}\|u_n - u\|_{1,q_1}^{q_1} \leq \int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_1}dx - \int_\Omega a_1(|\nabla u_n|^{p_1})|\nabla u_n|^{p_2-2}\nabla u_n \nabla u \ dx + o_n(1),$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1}dx - \int_\Omega a_1(|\nabla u|^{p_1})|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla u \ dx.$$

e

$$C_{q_2}\|v_n - v\|_{1,q_2}^{q_2} \leq \int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2}dx - \int_\Omega a_2(|\nabla v_n|^{p_2})|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla v \ dx + o_n(1),$$

onde

$$o_n(1) = \int_\Omega a_2(|\nabla v|^{p_2})|\nabla v|^{p_2}dx - \int_\Omega a_2(|\nabla v_2|^{p_2}|\nabla v|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla v \ dx.$$

Em vista de (4.23) e (4.27), obtemos

$$C_{q_1}\|u_n - u\|_{1,q_1}^{q_1} + C_{q_2}\|v_n - v\|_{1,q_2}^{q_2} \leq \int_\Omega \Big[\widehat{G}_{u_n}(x,u_n,v_n)(u_n - u) + \widehat{G}_{v_n}(x,u_n,v_n)(v_n - v)\Big]\,dx. \tag{4.29}$$

Aplicando (F_2), (4.27), Lema 4.1(i), Observação 4.1 e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega \Big[\widehat{G}_{u_n}(x,u_n,v_n)(u_n - u) + \widehat{G}_{v_n}(x,u_n,v_n)(v_n - v)\Big]\,dx \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \tag{4.30}$$

Note que, sem perda de generalidade, podemos considerar $q_1 \leq q_2$. Segue de (4.29) e (4.30) que

$$\|(u_n,v_n)-(u_2,v_2)\|^{q_2} = (\|u_n-u_2\|_{1,q_1}+\|v_n-v_2\|_{1,q_2})^{q_2} \leq C_{q_1}\|u_n-u_2\|_{1,q_1}^{q_1}+C_{q_2}\|v_n-v_2\|_{1,q_2}^{q_2} = o_n(1)$$

e assim, $(u_n, v_n) \to (u_2, v_2)$ em X, mostrando a afirmação.

Consequentemente, usando o Lema 4.2, existe $(u_2, v_2) \in X$ tal que

$$\beta < \widehat{\Phi}(u_2, v_2) = c,$$

onde c é o valor minimax de $\widehat{\Phi}$.

Além disso, desde que $G_s(x, s, t) = \widehat{G}_s(x, s, t)$, para $s \in [0, \overline{u}]$ e $G_t(x, s, t) = \widehat{G}_t(x, s, t)$, para $t \in [0, \overline{v}]$, então $\Phi(u, v) = \widehat{\Phi}(u, v)$, para $(u, v) \in [0, \overline{u}] \times [0, \overline{v}]$, onde Φ e $\widehat{\Phi}$ são definidos em (4.11) e (4.19), respectivamente. Assim, $\widehat{\Phi}(u_1, v_1) = \inf\limits_{M} \Phi$, onde M é dada na demonstração do Teorema 4.1.

Portanto, o problema (4.18) possui duas soluções fracas positivas $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in X$ tais que

$$\widehat{\Phi}(u_1, v_1) \leq \widehat{\Phi}(\underline{u}, \underline{v}) \leq \alpha < \beta \leq \widehat{\Phi}(u_2, v_2) = c.$$

Argumentando como na prova do Teorema 3.2, obtemos $u_2 \geq \underline{u}$ e $v_2 \geq \underline{u}$. Por (4.16) e (4.17), temos

$$\widehat{G}_s(x, u_2, v_2) = h_1(x) u_2^{-\gamma_1} + F_s(x, u_2, v_2) \text{ em } \Omega$$

e

$$\widehat{G}_t(x, u_2, v_2) = h_2(x) v_2^{-\gamma_2} + F_t(x, u_2, v_2) \text{ em } \Omega.$$

Logo, (u_1, v_1) e (u_2, v_2) são duas soluções fracas positivas para o problema (4.1). $\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

APÊNDICE

Neste apêndice, definimos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ e enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo do nosso trabalho.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos $W^{1,p}(\Omega)$ por

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega); i = 1, 2, \ldots, N \right\}$$

com a seguinte norma

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_{1,p}$, isto é,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,p}},$$

onde a norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$ é dada por

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema A.1. *(Rellich-Kondrachov) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado de classe C^1, temos as seguintes imersões compactas*

(i) Se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*)$ onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

(ii) Se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \infty)$,

(iii) Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com imersão compacta para todo p.

Demonstração: Ver [12].

Teorema A.2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } |fg|_1 \leq |f|_p |g|_{p'}.$$

Demonstração: Ver [12].

Teorema A.3. *(Desigualdade de Young) Para todo $a, b \geq 0$, vale a desigualdade*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [50].

Teorema A.4. *(Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω,

(ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em $\Omega, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

Demonstração: Ver [12].

Teorema A.5. *(Minty-Browder) Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E^*$ uma aplicação não-linear contínua tal que*

$$\langle -Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle > 0, \;\forall\, v_1, v_2 \in E,\; v_1 \neq v_2$$

e

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|} = +\infty$$

Então, para todo $f \in E^*$, existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Demonstração: Ver [12].

Teorema A.6. *(Desigualdade de Trudinger-Moser) Para cada $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\alpha > 0$, tem-se*

$$\exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-1}}\right) \in L^1(\Omega)$$

e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,N}(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega \exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \leq M,$$

para cada $\alpha \leq \alpha_N := N w_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, onde w_{N-1} é a medida $(N-1)$ - dimensional da $(N-1)$ esfera.

Demonstração: Ver [61, 77].

Teorema A.7. *(Desigualdade de Hardy-Sobolev) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 < p \leq N$, então $\dfrac{u}{Cd^\tau} \in L^r(\Omega)$, para $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1-\tau}{N}$, $0 \leq \tau \leq 1$ e*

$$\left|\frac{u}{Cd^\tau}\right|_{L^r(\Omega)} \leq |\nabla u|_{L^p(\Omega)},$$

onde $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ e C é uma constante positiva que não depende de x.

Demonstração: Ver [47].

Teorema A.8. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma sequência limitada em X, então existem uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Demonstração: Ver [12].

Teorema A.9. *Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que*

$$f_n \to f \ \text{em } L^p(\Omega).$$

Então, existem uma subsequência (f_{n_k}) *e* $g \in L^p(\Omega)$ *tais que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω,

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ *q.t.p em* Ω, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [12].

Teorema A.10. *(Brezis-Lieb) Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$ *e* $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ *com* $p > 1$. *Suponha que* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω *e que existe* $C > 0$, *tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx \leq C,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx,\ \forall\ \varphi \in L^q(\Omega),$$

onde, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Demonstração:. Ver [48].

Teorema A.11. *(Princípio Variacional de Ekeland) Seja* V *um espaço de Banach,* $F : V \to R \cup \infty$ *uma função Gateaux diferenciável, semicontínua inferiormente e limitada inferiormente, tal que*

$$-\infty < \inf F < +\infty.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, *para todo* $u \in V$ *tal que* $F(u) \leq \inf F + \varepsilon$, *para todo* $\lambda > 0$, *existe* $v \in V$ *tal que*

$$F(v) \leq F(u),\ \|v - u\| < \lambda \ \text{e}\ \|F'(v)\|_* \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Demonstração: Ver [32].

Teorema A.12. *(Teorema do Passo da Montanha - Ambrosetti-Rabinowitz) Sejam* X *um Espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *com* $I(0) = 0$. *Suponha que: existem* $\alpha, \rho > 0$ *tais que*

(H_1)

$$I(u) \geq \alpha > 0 \text{ para todo } u \in X : \|u\| = \rho$$

e existe $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *e*

(H_2)

$$I(e) < 0.$$

Seja

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Se I *satisfaz a condição* $(PS)_c$*, então* c *é um valor crítico de* I*, isto é existe* $u \in X$ *tal que*

$$I(u) = c > 0 \text{ e } I'(u) = 0.$$

Demonstração: Ver [6].

Lema A.1. *Sejam* $\phi, \omega > 0$ *duas funções quaisquer em* $C_0^1(\overline{\Omega})$*. Se* $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} > 0$ *em* $\partial\Omega$*, onde* ν *é a normal unitária interior em* $\partial\Omega$*, então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\frac{\phi(x)}{\omega(x)} \geq C > 0, \text{para todo } x \in \Omega.$$

Demonstração: Ver [62, Lema 2.6].

Teorema A.13. *Suponha que* V *é um espaço de Banach reflexivo com norma* $\|\cdot\|$ *e seja* $M \subset V$ *um subconjunto fracamente fechado em* V*. Suponha que* $E : M \to \mathbb{R} \cup +\infty$ *é coercivo e fracamente (sequencialmente) semicontínuo inferiormente em* M *com respeito a* V*, isto é, suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) $E(u) \to \infty$ *quando* $\|u\| \to \infty$, $u \in M$,

(2) *Para qualquer* $u \in M$*, qualquer sequência* (u_m) *em* M *tal que* $u_m \rightharpoonup u$ *em* V *ocorre*

$$E(u) \leq \liminf_{m \to \infty} E(u_m).$$

Então, E é limitada inferiormente em M e atinge o seu ínfimo em M.

Demonstração: Ver [74, Teorema 1.2].

Apêndice

$\mathcal{B}$

APÊNDICE

Aqui, faremos uma exposição de resultados envolvendo o operador $p\&q$-Laplaciano que foram fortemente utilizados em todos os capítulos do trabalho.

Proposição B.1. *Seja $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^1 tal que as condições (a_1) e (a_2) são válidas. Se $p < q$ então*

$$C_q|x-y|^q \leq \langle a(|x|^p)|x|^{p-2}x - a(|y|^p)|y|^{p-2}y, x-y\rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração: Ver [37, Lema 2.4].

O próximo lema demonstra algumas propriedades satisfeitas pelo operador T_i que nos permite aplicar o Teorema de Minty-Browder.

Lema B.1. *O operador $T_i : X \to X^*$ definido por*

$$\langle T_i u_i, \phi\rangle = \int_\Omega a_i(|\nabla u_i|^{p_i})\ |\nabla u_i|^{p_i-2}\ \nabla u_i\ \nabla\phi\ dx$$

satisfaz as seguintes condições:

$$\langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i\rangle > 0, \text{ para todo } u_i, v_i \in X \text{ com } u_i \neq v_i$$

e

$$\lim_{\|u_i\|\to+\infty} \frac{\langle T_i u_i, u_i\rangle}{\|u_i\|} = +\infty.$$

Demonstração: Ver [21, Lema 1].

Lema B.2. *(Princípio de Comparação Fraco para o operador p&q-Laplaciano) Se* Ω *é um domínio limitado e se* $u_i, v_i \in X$ *satisfazem*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a_i(|\nabla u_i|^{p_i})|\nabla u_i|^{p_i-2}\nabla u_i) \leq -\mathrm{div}(a_i(|\nabla v_i|^{p_i})|\nabla v_i|^{p_i-2}\nabla v_i) \ \textit{em } \Omega, \\ u_i \leq v_i \ \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Então, $u_i \leq v_i$ *q.t.p em* Ω*.*

Demonstração: Ver [21, Lema 2].

Lema B.3. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira suave. Se* $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ *e*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq 0 \ \textit{em } \Omega, \\ u > 0 \ \textit{em } \Omega, \\ u = 0 \ \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$*, onde* η *é a normal unitária exterior em* $\partial\Omega$*.*

Demonstração. A demonstração é feita com argumentos similares aos usados em [68] substituindo $-\Delta_p u$ por $-\mathrm{div}(a(|\nabla u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e o Princípio de Comparação Fraco para o operador p-Laplaciano pelo princípio de comparação fraco do Lema B.2. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A., Gonçalves, J.V.A., *Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems*, Adv. Nonlinear Stud. 5 (2005), no. 2, 265-278.

[2] Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A., *On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators*, Appl. Math. Comput. 185 (2007), no. 1, 727-736.

[3] Alves, C.O., De Figueiredo, D.G. *Nonvariational elliptic systems via Galerkin methods.* Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Teistungen, 2001), 47?57, Birkhäuser, Basel, 2003.

[4] Alves, C.O., Figueiredo, G.M., *Multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems*, Adv. Nonlinear Stud. 11 (2011), no. 2, 265-278.

[5] Alves, M.J., Assunção, R.B., Miyagaki, O.H., *Existence result for a class of quasilinear elliptic equations with (p-q)-Laplacian and vanishing potentials.* Ill. J. Math. 59 (2015), no. 3, 545-575.

[6] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[7] Aouaoui, S., *On some quasilinear equation with critical exponential growth at infinity and a singular behavior at the origin*, J. Elliptic Parabol. Equ. 4 (2018), no. 1, 27-50.

[8] Bartolo, R., Salvatore, A.M., *On a class of superlinear(p,q)-Laplacian type equations on* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 438 (2016), no. 1, 29-41.

[9] Boccardo, L., *A Dirichlet problem with singular and supercritical nonlinearities*, Nonlinear Anal. 75 (2012), no. 12, 4436-4440.

[10] Boccardo, L., Orsina, L., *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 37 (2010), no. 3-4, 363-380 pp.

[11] Bonheure, D., Rossi, J., *The behavior of solutions to an elliptic equation involving a p-Laplacian and a q-Laplacian for large p*, Nonlinear Anal. 150 (2017), 104-113.

[12] Brezis, H., *Analyse Fonctinelle*, Masson, Paris, 1983.

[13] Callegari, A., Nachman, A., *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math. 38 (1980), no. 2, 275-281.

[14] Callegari A., Nachman, A., *Some singular nonlinear differential equations arising in boundary layer theory*, J. Math. Anal. Appl. 64 (1978), no. 1, 96-105.

[15] Candito, P., Marano, S.A., Perera, K., *On a class of critical (p,q)-Laplacian problems*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 22 (2015), no. 6, 1959-1972.

[16] Canino A., Degiovanni, M., *A variational approach to a class of singular semilinear elliptic equations*, J. Convex Anal. 11 (2004), no. 1, 147-162.

[17] Canino A., Grandinetti, M., Sciunzi, B., *A jumping problem for some singular semilinear elliptic equations*, Adv. Nonlinear Stud. 14 (2014), no. 4, 1037-1054.

[18] Chaves, M.C., Ercole, G., Miyagaki, O.H., *Existence of a nontrivial solution for the (p,q)-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ without the Ambrosetti-Rabinowitz condition.* Nonlinear Anal. 114 (2015), 133-141.

[19] Chen J., Papageorgiou, N.S., Rocha, E.M., *Twin positive solutions for singular nonlinear elliptic equations*, Topol. Methodos Nonlinear Anal. 35 (2010), no. 1, 187-201.

[20] Cherfils L., Il'yasov Y., *On the stationary solutions of generalized reaction difusion equations with p&q-Laplacian*, Commun. Pure Appl. Anal. 4 (2005), no. 1, 9-22.

[21] Corrêa, A.S., Corrêa, F.J.S.A., Figueiredo, G.M., *Existence of positive solution for a singular system involving general quasilinear operators*, Differ. Equ. Appl. 6 (2014), no. 4, 481-494.

[22] Corrêa, A.S., Corrêa, F.J.S.A., Figueiredo, G.M., *Positive solution for a class of p&q singular elliptic equation*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 16 (2014), 163-169.

[23] Corrêa, A.S., Corrêa, F.J.S.A., Santos Júnior, J.R., *Multiple ordered positive solutions of an elliptic problems involving the p&q-Laplacian*, J. Convex Anal. 21 (2014), no. 4, 1023-1042.

[24] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H., Tatar L., *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Commun. Partial Differential Equations 2 (1997), no. 2, 193-222.

[25] Dávila, J., Montenegro, M., *Positive versus free boundary solutions to a singular elliptic equation*, J. Anal. Math. 90 (2003), 303-335.

[26] De Araujo, A.L.A., Montenegro, M., *Existence of solution for a general class of elliptic equations with expontential growth*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 195 (2016), no. 5, 1737-1748.

[27] De Araujo, A.L.A., Montenegro, M., *Existence of solution for a nonvariational elliptic system with exponential growth in dimension two*, J. Differential Equations 264 (2018), no. 3, 2270-2286.

[28] De Cave, L.M, Oliva F., Strani, M., *Existence of solutions to a non-variational singular elliptic system with unbounded weights*, Math. Nachr. 290 (2017), no. 2-3, 236-247.

[29] Dhanya, R., Prashanth, S., Sreenadh, K., Tiwari, S., *Critical growth elliptic problem in* $\mathbb{R}^2$ *with singular discontinuous nonlinearities*, Adv. Differential Equations 19 (2014), no. 5-6, 409-440.

[30] Do Ó, J.M.B., *Existence of solutions for quasilinear elliptic equations*, J. Math . Anal. Appl. 207 (1997), no. 1, 104-126.

[31] Do Ó, J.M.B., *Quasilinear elliptic equations with exponential nonlinearities*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 2 (1995), no. 3, 63-72.

[32] Ekeland, I., *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[33] Faraci, F., Puglisi D., *A singular semilinear problem with dependence on the gradient*, J. Differential Equations 260 (2016), no. 4, 3327-3349.

[34] Faria, L.F.O., Miyagaki, O.H., Tanaka, M., *Existence of a positive solution for problems with (p-q)-Laplacian and convection term in* $\mathbb{R}^N$, Bound. Value Probl. 2016, no. 158, 20 pp.

[35] Felmer, P., Quaas, A., Sirakov, B., *Existence and regularity results for fully nonlinear equations with singularitie*, Math. Ann. 354 (2012), no. 1, 377-400.

[36] Figueiredo, G.M., *Existence and multiplicity of solutions for a class of p&q elliptic problems with critical exponent*, Math. Nachr. 286 (2013), no. 11-12, 1129-1141.

[37] Figueiredo, G.M., *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problem with critical growth on* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 378 (2011), no. 2, 507-518.

[38] Figueiredo, G.M., Nascimento, R.G., *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problem with critical exponent and discontinuous nonlinearity*, Monatsh Math (2018), https://doi.org/10.1007/s00605-018-1200-0.

[39] Gasiński L., Papageorgiou, N.S., *Nonlinear elliptic equations with singular terms and combined nonlinearities*, Ann. Henri Poincaré 13 (2012), no. 3, 481-512.

[40] Ghergu, M., *Lane-Emden systems with negative exponents*, J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 10, 3295-3318.

[41] Ghergu, M., Rãdulescu, V., *On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term*, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), no. 2, 635-646.

[42] Giacomoni, J., Prashanth S., Sreenadh, K., *Uniqueness and multiplicity results for N-Laplace equation with critical and singular nonlinearity in a ball*, Asymptot. Anal. 61 (2009), no. 3-4, 195 -227.

[43] Hai, D.D., *On an asymptotically linear singular boundary value problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 39 (2012), no. 1, 83-92.

[44] He, C., Li, G., *The existence of a nontrivial solution to the p&q-Laplacian problem with nonlinearity asymptotic to u^{p-1} at infinity in $\mathbb{R}^N$*, Nonlinear Anal. 68 (2008), no. 5, 1100-1119.

[45] He, C., Li, G., *The regularity of weak solutions to nonlinear scalar field elliptic equations containing p&q-Laplacians*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 33 (2008), no. 2, 337-371.

[46] Hernández, J., Mancebo, F.J., Vega, J.M., *Positive solutions for singular semilinear elliptic systems*, Adv. Differential Equations 13 (2008), no. 9-10, 857-880.

[47] Kavian, O., *Inegalitè de Hardy-Sobolev et applications*, Tèse de Doctorate de 3 eme cycle, Universitè de Paris VI, 1978.

[48] Kavian, O., *Introdution à la théorie des points critiques et applications aux problèms elliptiques*, Springer, Heidelberg, 1983.

[49] Kesavan, S., *Topics in Functional Analysis and Applications*, Wiley, New Jersey (1989).

[50] Kreyzkig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York (1989).

[51] Kyritsi, S., Papageorgiou, N.S., *Pairs of positive solutions for singular p-Laplacian equations with a p-superlinear potential*, Nonlinear Anal. 73 (2010), no. 5, 1136-1142.

[52] Lazer, A., C., McKenna, P.J., *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), no. 3, 721-730.

[53] Li, G., Liang, X., *The existence of nontrivial solutions to nonlinear elliptic equation of (p-q)-Laplacian type on $\mathbb{R}^N$*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 5-6, 2316-2334.

[54] Li, G., Zhang, G., *Multiple solutions for the p&q-Laplacian problem with critical exponent*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) 29 (2009), no. 4, 903-918.

[55] Li, Q., Yang, Z., *Multiplicity of positive solutions for a p-q-Laplacian system with concave and critical nonlinearities*. J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), no. 1, 660-680.

[56] Li, R., Liang, Z., *Sign-changing solution and ground state solution for a class of (p,q)-Laplacian equations with nonlocal terms on* $\mathbb{R}^N$. Adv. Bound. Val. Probl. 2016, no. 118, 28 pp.

[57] Marano, S.A., Mosconi, S.J.N., Papageorgiou, N.S., *Multiple solutions to (p,q)-Laplacian problems with resonant concave nonlinearity*, Adv. Nonlin. Stud. 16 (2016), no. 1, 51-65.

[58] Medeiros, E., Perera, K., *Multiplicity of solutions for a quasilinear elliptic problem via the cohomoligical index*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 9, 3654-3660.

[59] Mi, L., *Positive solutions for a class of singular elliptic system*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 24 (2017), 13 pp.

[60] Montenegro, M., Suárez, A., *Existence of a positive solution for a singular system*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 140 (2010), no. 2, 435-447.

[61] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970/71), 1077-1092.

[62] Nascimento, R.G., *Nonlocal elliptic problems of p-Kirchoff type*, PhD Thesis, Unicamp, 2008.

[63] Papageorgiou, N.S., Rãdulescu, V., *Combined effects of singular and sublinear nonlinearities in some elliptic problems*, Nonlinear Anal. 109 (2014), 236-244.

[64] Perera, K., Silva, E.A.B., *Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems*, J. Math. Anal. Appl. 323 (2006), no. 2, 1238-1252.

[65] Perera, K., Silva, E.A.B., *Multiple positive solutions of singular elliptic problems*, Differential and Integral Equations 23 (2010), no. 5-6, 435-444.

[66] Prashanth, S., Tiwari, S., Sreenadh, K., *Very singular problems with critical nonlinearities in two dimensions*, Commun. Contemp. Math. 20 (2018), no. 2, 1650067, 25 pp.

[67] Rabinowitz, P.H., *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analalysis 7 (1971), 487-513.

[68] Sakaguchi, S., *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 14 (1987), no. 3, 403-421.

[69] Saoudi, K., Kratou M., *Existence of multiple solutions for a singular and quasilinear equation*, Complex Var. Elliptic Equ. 60 (2015), no. 7, 893-925.

[70] Saoudi, K., *Multiplicity results for a class of singular elliptic equation involving sublinear Neumann boundary condition in* $\mathbb{R}^2$, J. Fixed Point Theory Appl. 19 (2017), no. 4, 2963-2984.

[71] Shahrokhi-Dehkordi, M.S., *On a class of (p,q)-Laplacian problems involving the critical Sobolev-Hardy exponents in starshaped domain*. Commun. Math. 25 (2017), no. 1, 13-20.

[72] Shi, J., Yao, M., *Positive solutions for elliptic equations with singular nonlinearity*, Electron. J. Differential Equations 2005, no. 04, 11 pp.

[73] Strauss, W.A., *On weak solutions of semi-linear hyperbolic equations*, An. Acad. Brasil. Ci. 42 (1970), 645-651.

[74] Struwe, M., *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, (1996).

[75] Stuart C.A., *Existence and approximation of solutions of non-linear elliptic equations*, Math. Z. 147 (1976), no. 1, 53-63.

[76] Tan, Z., Fang, F., *Orlicz-Sobolev versus Hölder local minimizer and multiplicity results for quasilinear elliptic equations*, J. Math. Anal. Appl. 402 (2013), no. 1, 348-370.

[77] Trudinger, N.S., *On imbeddings into Orlicz spaces and applications*, J. Math. Mech. 17 (1967), 473-483.

[78] Wang, X., Qin, X., Hu, G., *Existence of weak positive solution for a singular elliptic problem with supercritical nonlinearity*, Anal. Math. Phys. 8 (2018), no. 1, 43-55.

[79] Wu, M., Yang, Z., *A class of* $p-q$*-Laplacian type equation with potentials eigenvalue problem in* $\mathbb{R}^N$, Bound. Value Probl. (2009), Art. ID 185319, 19 pp. 185319.

[80] Zhang, Z., *Positive solutions of Lane-Emden systems with negative exponents: existence, boundary behavior and uniqueness*, Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 16, 5544-5553.

[81] Zhang, Z., Yu, J., *On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term*, SIAM J. Math. Anal. 32 (2000), no. 4, 916-927.