

MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS

Controlabilidade, Estabilização e Propriedades  
Dispersivas para Sistemas Poro-Elásticos  
Unidimensionais

BELÉM

2018

MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS

**Controlabilidade, Estabilização e Propriedades  
Dispersivas para Sistemas Poro-Elásticos Unidimensionais**

Tese apresentada ao colegiado do Programa de Doutorado em Matemática - PDM da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

BELÉM

2018

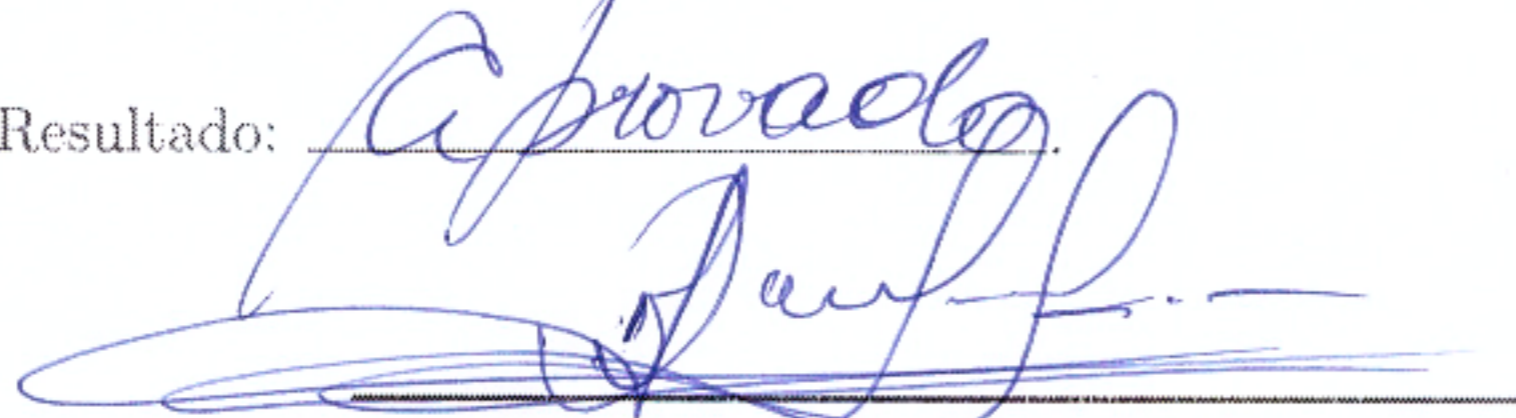
MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS

## Controlabilidade, Estabilização e Propriedades Dispersivas para Sistemas Poro-Elásticos Unidimensionais

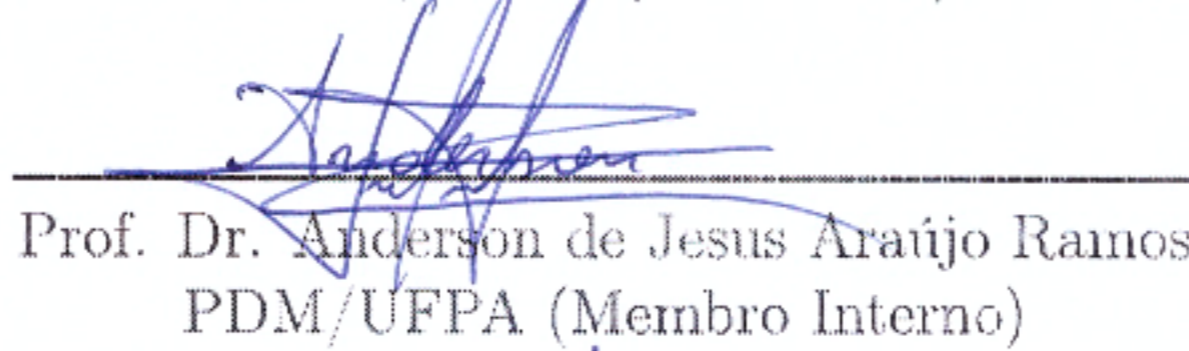
Tese apresentada ao colegiado do Programa de  
Doutorado em Matemática - PDM da Univer-  
sidade Federal do Pará, como parte dos requi-  
sitos necessários à obtenção do grau de Doutor  
em Matemática.

Data da defesa: 29/06/2018

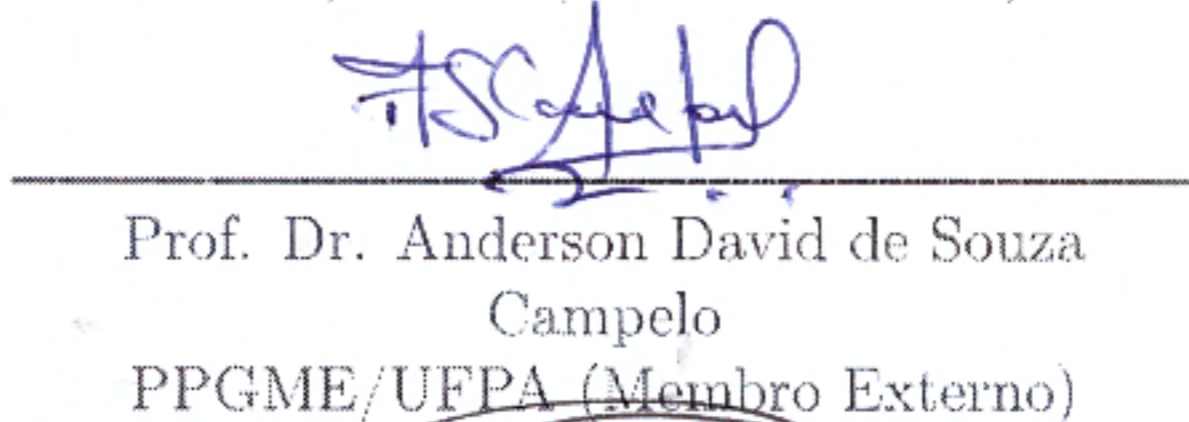
Resultado: Aprovado



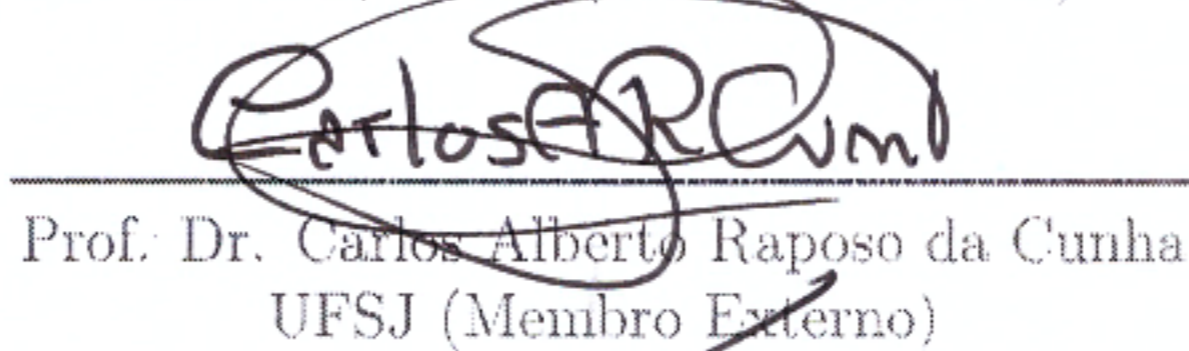
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior  
PDM/UEPA (Orientador)



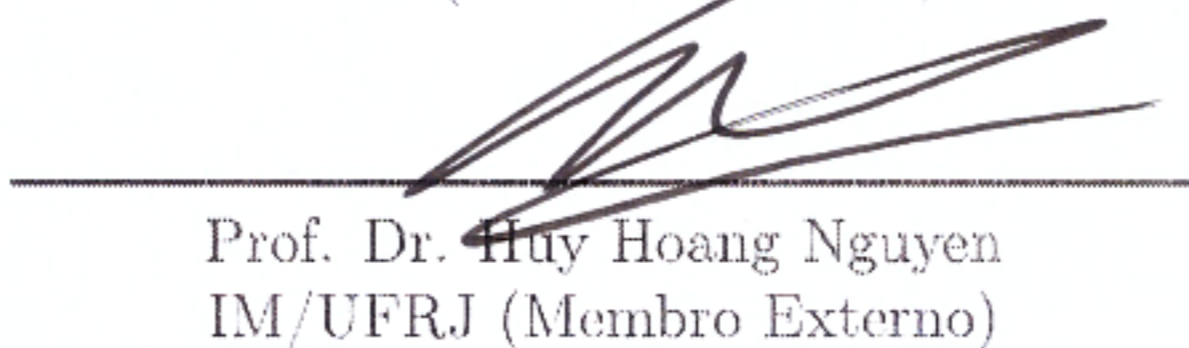
Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos  
PDM/UEPA (Membro Interno)



Prof. Dr. Anderson David de Souza  
Campelo  
PPGME/UEPA (Membro Externo)



Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha  
UFSJ (Membro Externo)



Prof. Dr. Huy Hoang Nguyen  
IM/UFRJ (Membro Externo)

BELÉM

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

D722c Santos, Manoel Jeremias dos  
Controlabilidade, Estabilização e Propriedades Dispersivas para Sistemas Poro-Elásticos Unidimensionais / Manoel Jeremias dos Santos. – 2018  
92 f. : il. color

Tese (Doutorado) - Programa de Doutorado em Matemática (PDM), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.  
Orientação: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

1. Sistema Poro-elástico. 2. Estabilização Exponencial. 3. Controlabilidade Exata Interna. 4. Método HUM. 4. Análise de Dispersão. I. Almeida Júnior, Dilberto da Silva, orient. II. Título

---

*In Memoriam*  
*Apolonia Ferrão dos Santos*  
*e*  
*Benevenuto Avelino dos Santos*

# Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior;

Ao professor Dr. Mauro de Lima Santos;

Em especial, aos colegas da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, do Campus Universitário de Abaetetuba, que me concederam o afastamento integral das atividades docentes, permitindo assim minha exclusiva dedicação ao curso de doutorado.

A todos os colegas do GPAMN;

Aos membros da banca examinadora.

*“A luta pela verdade deve ter precedência sobre todas as outras.”*

*Albert Einstein*

# Resumo

Nesta tese, será estudada a controlabilidade exata interna, estabilização e análise de dispersão para um sistema poro-elástico unidimensional. A controlabilidade exata será abordada pelo método HUM (Hilbert Uniqueness Method), enquanto que a estabilidade exponencial será considerada para dois tipos de sistemas poro-elásticos. Para o primeiro sistema, será estabelecido a propriedade do crescimento determinado pelo espectro (PCDE), já para o segundo sistema, será demonstrado somente a estabilização exponencial através da teoria de estabilização de semigrupos.

**Palavras-chave:** Sistema Poro-Elástico. Estabilização Exponencial. Controlabilidade Exata Interna. Método HUM. Análise de Dispersão.



# Abstract

In this thesis, it will be studied the exact internal controllability, stabilization and dispersion analysis for a one-dimensional porous elastic system. Exact controllability will be approached by the Hilbert Uniqueness Method, while exponential stability will be considered for two types of elastic-porous systems. For the first system, the spectrum determined growth (SDG) property will be established, and for the second system, only the exponential stabilization through the theory of stabilization of semigroups will be demonstrated.

**Key words:** Porous Elasticity Systems. Exponential Stabilization. Internal Exact Controllability. HUM Method. Dispersion Analysis

# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1	O Cenário da Controlabilidade Exata . . . . .	12
1.2	O Cenário da Propriedade de Crescimento Determinada pelo Espectro (PCDE) . . . . .	15
1.3	O Cenário da Estabilização . . . . .	18
1.4	O Cenário de Espectro de Frequência . . . . .	19
1.5	Objetivos da Tese . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Existência e Unicidade para um Sistema Poro-Elástico</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1	Formulação de Semigrupo . . . . .	24
2.2	O Sistema não Homogêneo . . . . .	29
2.3	Sistema Não-Conservativo com Amortecimento . . . . .	30
2.4	Sistema com Amortecimento Indefinido . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Controlabilidade Exata Interna</b> . . . . .	<b>33</b>
3.1	Controlabilidade Exata Interna . . . . .	33
3.2	Desigualdade de Observabilidade . . . . .	33
3.3	Controlabilidade Exata Interna . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Propriedade de Crescimento Determinado Pelo Espectro</b> . . . . .	<b>46</b>
4.1	Propriedade de Crescimento Determinado Pelo Espectro . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Estabilidade Exponencial para Amortecimento Indefinido</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>Propriedades Dispersivas</b> . . . . .	<b>69</b>
6.1	Ramo Não-Físico do Sistema Elástico Poroso Clássico (Sem Amortecimento) . . . . .	69
6.2	Ramos Físico do Sistema Poro-Elástico Amortecido . . . . .	72
	<b>A – Solução por Transposição do Sistema Elástico Poroso</b> . . . . .	<b>75</b>
A.1	Limitação para a Solução Fraca do Sistema não Homogêneo . . . . .	76
A.2	Solução por Transposição . . . . .	79
	<b>B – Solução de um Sistema Elíptico</b> . . . . .	<b>82</b>
	<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>85</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>89</b>

# 1 Introdução

D. Iesan na introdução de (IESAN, 2004), ressalta que a teoria linear dos materiais poro-elásticos, estabelecida por Nunziato e Cowin (COWIN; NUNZIATO, 1983; NUNZIATO; COWIN, 1979) é atualmente um assunto de grande interesse na pesquisa científica. Ainda na introdução, o autor afirma que sólidos porosos desempenham um importante papel em quase todos os ramos da engenharia como por exemplo: mecânica dos solos, indústria do petróleo, ciências dos materiais e biomecânica. Ele diz ainda, que a teoria é uma das mais simples extensões da teoria clássica da elasticidade para o tratamento de sólidos porosos em que matriz do material é elástica. O autor declara que a teoria é uma ferramenta adequada para descrever também o comportamento de materiais granulares como rochas, solos e corpos porosos manufaturados.

Na Seção 2 de (NUNZIATO; COWIN, 1979), os autores comentam que a teoria linear de materiais poro-elásticos (poros vazios) se baseia em pequenas mudanças na configuração de referência (configuração em um instante  $t_0$ ) de um corpo poroso e que nesta configuração a densidade aparente  $\rho(x, t)$ , a densidade da matriz do material  $\gamma(x, t)$  e a fração de volume da matriz  $\nu(x, t)$  na posição  $x = (x_1, x_2, x_3)$  no instante  $t$  estão relacionadas por

$$\rho(x, t) = \gamma(x, t)\nu(x, t), \quad (1.1)$$

e para a configuração de referência tem-se

$$\rho_R(x) = \gamma_R(x)\nu_R(x). \quad (1.2)$$

Os autores consideram nesta configuração inicial o corpo sem deformação, porém não necessariamente livre de tensão. A variável independente cinética na teoria linear é o campo deslocamento  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$  com relação a configuração de referência e a mudança na fração de volume com relação a fração de volume de referência  $\phi(x, t)$  é

$$\phi(x, t) = \nu(x, t) - \nu_R(x). \quad (1.3)$$

O tensor deformação  $E_{ij}(x, t)$  é determinado pelo do campo deslocamento, da seguinte forma

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad (1.4)$$

(onde  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ). Assumindo que o corpo ocupe uma região limitada e regular (conexa e limitada por um número finito de superfícies regulares) do  $\mathbb{R}^3$ , as equações lineares do movimento que governam um material contínuo elástico poroso são o momento linear balanceado e a força de equilíbrio balanceada, dadas por

$$\rho \ddot{u}_j = \partial_j T_{ij} + \rho b_i, \quad (1.5)$$

$$\rho \kappa \ddot{\phi} = \partial_i h_i + g + \rho l, \quad (1.6)$$

respectivamente, onde  $T_{ij}$  é o tensor tensão simétrica,  $b_i$  é o vetor força do corpo por unidade de volume,  $h_i$  é o vetor tensão equilibrada,  $\kappa$  é a inércia equilibrada,  $g$  é a força intrínseca equilibrada do corpo e  $l$  é a força extrínseca equilibrada do corpo, com

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{km} + D_{ijk} \partial_k \phi + B_{ij} \phi + T_{ij}^R, \quad (1.7)$$

$$h_i = A_{ij} \partial_j \phi + D_{ijk} E_{jk} + f_i \phi + h_i^R, \quad (1.8)$$

$$g = -\omega \dot{\phi} - \xi \phi - B_{ij} E_{ij} - f_i \partial_i \phi + g^R, \quad (1.9)$$

onde  $C_{ijkl}$ ,  $D_{ijk}$ ,  $B_{ij}$ ,  $T_{ij}^R$ ,  $A_{ij}$ ,  $f_i$ ,  $h_i^R$ ,  $\omega$ ,  $\xi$ ,  $g^R$  são funções de  $\nu_R$  e de seu gradiente. Na configuração de referência,  $E_{ij}$ ,  $\phi$  e  $\partial_i \phi$  se anulam e então  $T_{ij}^R$  é a tensão,  $h_i^R$  é o valor do vetor tensão equilibrada e  $g^R$  é o valor da força equilibrada do corpo. As hipóteses de isotropia implicam que o gradiente de  $\nu_R$  se anula e neste caso tem-se

$$\{0:1\} \quad T_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij} + \beta \phi \delta_{ij}, \quad (1.10)$$

$$\{0:2\} \quad h_i = \alpha \partial_i \phi, \quad (1.11)$$

$$\{0:3\} \quad g = -\omega \dot{\phi} - \xi \phi - \beta E_{kk}, \quad (1.12)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Para que a energia interna do modelo seja positiva deve-se considerar (COWIN; NUNZIATO, 1983)

$$\{0:4\} \quad \mu \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad (3\lambda + 2\mu)\xi \geq 3\beta^2, \quad \omega \geq 0 \quad \text{e} \quad \kappa \geq 0. \quad (1.13)$$

O modelo poro-elástico unidimensional na ausência de cargas corporais ( $b = l = 0$ ) é dado por (QUINTANILLA, 2003):

$$\{0:6\} \quad \begin{aligned} \rho_0 u_{tt} - \mu u_{xx} - \beta \phi_x &= 0 \\ \rho_0 \kappa \phi_{tt} - \delta \phi_{xx} + \beta u_x + \xi \phi + \tau \phi_t &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

com

$$\{0:7\} \quad \rho_0 > 0, \quad \mu > 0, \quad \beta \neq 0, \quad \kappa > 0, \quad \delta > 0, \quad \tau > 0, \quad \xi > 0, \quad \text{e} \quad \mu\xi \geq \beta^2. \quad (1.15)$$

## 1.1 O Cenário da Controlabilidade Exata

De forma geral, um problema de controlabilidade pode ser formulado da seguinte maneira: dado um sistema de evolução (descrito em termos de equações diferenciais ordinárias ou parciais) no qual seja possível introduzir algum mecanismo controle (que atue nas equações em cada ponto de seu domínio, na fronteira ou etc.) Dado um tempo  $T > 0$  e condição inicial  $u^0$  e final  $u^1$ , deve-se obter um controle  $v$  de modo que a solução  $y = y(t, v)$  do sistema obtido levando em conta esse controle, satisfaça

$$y(0) = u^0 \quad \text{e} \quad y(T) = u^1.$$

David L. Russel em (RUSSELL, 1978), compilou os principais resultados e as ferramentas matemáticas, bem como os problemas em aberto encontrados na literatura até aquele momento relacionados a controlabilidade e observabilidade (para o conceito de observabilidade em um cenário de espaços de Banach abstrato e sua relação com a controlabilidade (ver (DOLECKI; RUSSELL, 1977)) para equações diferenciais parciais lineares. Isto permitiu uma melhor visão do campo de pesquisa assim como os desafios a serem superados.

Em 1988, Jaques Louis Lions em (LIONS, 1988), publicou um poderoso método o qual denominou de Método de Unicidade Hilbertiana (Hilbert Uniqueness Method - HUM). Na introdução do artigo, Lions destaca a generalidade e flexibilidade do método e explica que a técnica se baseia na construção de uma estrutura de espaço de Hilbert apropriada sobre o espaço dos dados iniciais e que estas estruturas, por conseguinte, devem estar relacionadas às propriedades de unicidade. O método HUM possibilitou, dentre outras coisas, o estudo da controlabilidade exata, estabilização de sistemas de equações, análise do comportamento da controlabilidade exata e da estabilização sob perturbações e ainda viabiliza a criação de algoritmos numéricos para a obtenção do melhor controle (GLOWINSKI R.; LI; LIONS, 1990; GLOWINSKI R.; LIONS; HE, 2008). Neste artigo, dentre os vários resultados apresentados, Lions aplica o método HUM para estabelecer a controlabilidade exata para a equação da onda

com controle  $v$  na fronteira  $\Gamma$  (ou em parte dela) de um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega \times ]0, T[, \\ u = v \quad \text{em } \Gamma \times ]0, T[, \\ u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ u_t(0) = u_1 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.16)$$

e para a equação do calor com controle  $w$  na fronteira (ou em parte dela)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t - \Delta y = 0 \quad \text{em } \Omega \times ]0, T[, \\ y = w \quad \text{em } \Gamma \times ]0, T[, \\ y(0) = y_1 \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.17)$$

No capítulo nove de (MEDEIROS; MIRANDA; LOUREIRO, 2013), os autores generalizam os resultados anteriores aplicando o método HUM para provar a controlabilidade exata da equação de onda com coeficientes variáveis e controle  $v$  na fronteira dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u_t}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega \times ]0, T[, \\ u = v \quad \text{em } \Gamma \times ]0, T[, \\ u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ u_t(0) = u_1 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.18)$$

onde  $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$ ,  $b_i = b_i(x, t)$  e  $d_i = d_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são funções dadas.

Enrique Zuazua em (ZUAZUA, 1990) aplica o método HUM para mostrar a controlabilidade exata para equação de onda com controle interno  $f$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u = f\chi_\omega \quad \text{em } \Omega \times ]0, T[, \\ u = 0 \quad \text{em } \Gamma \times ]0, T[, \\ u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ u_t(0) = u_1 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.19)$$

onde  $\chi_\omega$  é a função característica do conjunto aberto  $\omega \subset \Omega$ . O termo  $f\chi_\omega$  no sistema (1.19), significa que o controle  $f$  está atuando apenas na parte  $\omega$  do domínio  $\Omega$ .

Vale ressaltar que a aplicabilidade do método HUM não se restringe a sistemas formado apenas por equações lineares. Em (ZUAZUA, 1993), o autor utiliza o método HUM com uma técnica de ponto fixo para obter a controlabilidade exata da equação de onda semilinear

com controle  $h$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx} + f(u) = h\chi_\omega \quad \text{em } ]0, 1[ \times ]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \\ u(0) = u_0 \quad \text{em } ]0, 1[, \\ u_t(0) = u_1 \quad \text{em } ]0, 1[. \end{array} \right. \quad (1.20)$$

No sistema anterior, tem-se novamente o controle  $h$  atuando somente num aberto  $\omega = ]l_1, l_2[ \subset ]0, 1[$  e a não linearidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é considerada continuamente derivável.

Além das aplicações em equações de onda e calor, o método HUM pode ainda ser aplicado no estudo da controlabilidade de modelos do tipo elástico, vibração de placas, problemas de transmissão, modelos de difusão e etc. (LIONS, 1988; LAGNESE; LIONS, 1988; GLOWINSKI R.; LIONS; HE, 2008). Em particular, pode-se destacar os sistemas do tipo Timoshenko, o qual modelam pequenas oscilações em estruturas elásticas do tipo vigas planas (TIMOSHENKO, 1937), (TAYLOR; YAU, 2003)

$$\{0:8\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \\ \rho_1 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \end{array} \right. \quad (1.21)$$

onde  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $b$  e  $\kappa$  são constantes físicas e geométricas positivas. Neste sistema de equações, as funções  $\varphi$  e  $\psi$  representam o deslocamento vertical e o ângulo de rotação do filamento da viga, respectivamente.

Em (LAGNESE; LIONS, 1988), (MEDEIROS, 1993) e (ZHANG; HU, 2007), os autores aplicaram o método HUM e estabeleceram a controlabilidade exata para o sistema de Timoshenko, considerando dois controles na fronteira e o resultado obtido não levou em conta qualquer relação entre os coeficientes das equações do sistema. Nos trabalhos de (SADEK et al., 1986), (TAYLOR, 1996) e (TAYLOR; YAU, 2003) a controlabilidade foi obtida para dois controles localizados na fronteira, contudo, o método se diferencia do HUM.

Nenhum dos trabalhos, até então citados, sinalizava a respeito da controlabilidade de sistemas de Timoshenko concebidos apenas com um único controle (utilizando ou não o método HUM). Neste cenário, Abdelazir Soufyane em (SOUFYANE, 1999) deu uma resposta positiva a questão e mostrou que se for tomado a igualdade

$$\{0:9\} \quad \frac{\rho_0}{\kappa} = \frac{\rho_1}{b}, \quad (1.22)$$

é possível mostrar a controlabilidade exata do seguinte sistema

$$\begin{aligned} \rho_0 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \\ \rho_1 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= b(x)f & \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \end{aligned} \quad (1.23)$$

com condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet,  $b(x) > 0$  sendo uma função conhecida e  $f$  o controle. A técnica utilizada por Soufyane para a obtenção da controlabilidade do sistema anterior se baseia numa equivalência entre decaimento exponencial e controlabilidade (HARAUX, 1989).

Em 2009 em sua tese de doutorado, Waël Youssef (YOUSSEF, 2009) considerando (1.22), aplicou o método HUM e provou a controlabilidade exata para (1.23) com condições de fronteira dos tipos Dirichlet-Dirichlet e Dirichlet-Neumann, com um único controle atuando na equação do ângulo de rotação.

A relação (1.22) é conhecida como igualdade de velocidades para o sistema de Timoshenko (ALMEIDA JÚNIOR; SANTOS; MUÑOZ RIVERA, 2013), apesar de ser matematicamente possível, não se verifica fisicamente (LIU; RAO, 2009).

## 1.2 O Cenário da Propriedade de Crescimento Determinada pelo Espectro (PCDE)

De acordo com (ENGEL; NAGEL, 1999, p. 298, Definição 1.5) e (NEERVEN, 1996, p. 4, Definição 1.1.3), um semigrupo de operadores lineares  $(T(t))_{t \geq 0}$ , abreviadamente representado por  $T(t)$ , definido em um espaço de Banach  $(X, \|\cdot\|)$  com valores neste mesmo espaço, com gerador infinitesimal  $A$  de domínio  $D(A) \subset X$ , é exponencialmente uniformemente estável, se existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0. \quad (1.24)$$

Será representado por  $\varrho(A)$  o conjunto resolvente de  $A$ , ou seja, o conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tais que o operador  $R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$  existe e é limitado. O símbolo  $\sigma(A)$  representará o espectro do operador  $A$  que é dado por

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A). \quad (1.25)$$



A cota superior do espectro de  $A$ , representada por  $\omega_\sigma(A)$  é definida como sendo o número

$$\omega_\sigma(A) := \sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.26)$$

Vale observar que se  $\sigma(A) = \emptyset$ , então considera-se  $\omega_\sigma(A) = -\infty$  (XU; FENG, 2001).

Além disso, para o semigrupo  $T(t)$ , definimos o assim chamado *limite de crescimento* ou *limite de crescimento uniforme* de  $T(t)$ , representado por  $\omega_0(A)$  (NEERVEN, 1996, p. 8)

$$\begin{aligned} \omega_0(A) &:= \inf\{\omega \in \mathbb{R}; \exists M_\omega > 0 \text{ tal que } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \forall t \geq 0\} \\ &= \inf\{\omega \in \mathbb{R}; \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\omega t} \|T(t)\| = 0\}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

É claro que o semigrupo  $T(t)$  é exponencialmente uniformemente estável, se e somente se,  $\omega_0(A) < 0$  (ENGEL; NAGEL, 1999, p. 299). Além disso, é possível mostrar que (ENGEL; NAGEL, 1999, p. 299)

$$\omega_0(A) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T(t)\|. \quad (1.28)$$

O limite anterior é chamado de *tipo do semigrupo*  $T(t)$ .

Sabe-se que se  $X$  tem dimensão finita, então a seguinte igualdade é válida (XU; FENG, 2001)

$$\{0:9-1\} \quad \omega_0(A) = \omega_\sigma(A). \quad (1.29)$$

Neste caso, uma condição necessária e suficiente para que  $T(t)$  seja uniformemente exponencialmente estável é (HALE, 1980, p. 99, Teorema 4.2)

$$\{0:9-2\} \quad \omega_\sigma(A) < 0. \quad (1.30)$$

Quando  $X$  tem dimensão infinita, existem duas grandes diferenças. A primeira delas, advém do Teorema de Hille-Yosida (PAZY, 1983, p. 12, Corolário 3.8) que diz que se  $A$  for o gerador infinitesimal de um  $C_0$  semigrupo  $T(t)$  satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq M e^{\theta t} \quad \forall t \geq 0, \quad (1.31)$$

onde  $M > 0$  e  $\theta$  são constantes, então  $]\theta, +\infty[ \subset \varrho(A)$ . Isto implica (NEERVEN, 1996, p. 8, Proposição 1.2.1) e (PRÜSS, 1984)

$$\{0:9-3\} \quad \omega_\sigma(A) \leq \omega_0(A). \quad (1.32)$$

Se  $A$  é um operador ilimitado, então a desigualdade estrita para (1.32) pode ocorrer (NEERVEN, 1996, p. 12, Exemplo 1.2.4).

E a segunda diferença, é que a condição (1.30) não garante a estabilidade exponencial do semigrupo  $T(t)$  (ENGEL; NAGEL, 1999, p. 271, Contraexemplo 3.3).

Deve-se observar que em geral não se conhece o semigrupo  $T(t)$ , se conhece apenas o seu gerador infinitesimal  $A$ . Neste sentido, a igualdade (1.29) se torna muito importante, uma vez que ela resulta em um critério prático para a estabilidade exponencial de  $T(t)$ . A igualdade (1.29) é chamada de *propriedade do crescimento determinado pelo espectro* (PCDE). A (PCDE) é válida para uma ampla classe de semigrupos tais como analíticos e compactos, porém estas classes de semigrupos não cobrem em geral as aplicações em EDP's do tipo hiperbólicas (XU; FENG, 2001; RENARDY, 1993).

Vários esforços tem sido feito no sentido de garantir condições para que (1.29) ocorra, dentre eles podemos destacar os resultados de (SLEMROD, 1976; RENARDY, 1993; PRÜSS, 1984; GEARHART, 1978; XU; FENG, 2001).

J. E. Muñoz Rivera e R. Racke em (MUÑOZ RIVERA; RACKE, 2008), utilizando uma técnica encontrada em (PRÜSS, 1984), provaram que se (1.22) ocorre, então é válida a (PCDE) para o sistema de Timoshenko

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + \varphi)_x &= 0, & \text{em } [0, L] \times [0, \infty[, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - \delta \varphi_{xx} + k(u_x + \varphi) + \tau \varphi_t &= 0, & \text{em } [0, L] \times [0, \infty[, \end{aligned} \quad (1.33)$$

com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann. Além disso, os autores mostraram que o valor da cota superior do espectro do gerador infinitesimal associado ao sistema é negativa (1.30) e assim estabeleceram que o semigrupo é exponencialmente uniformemente estável.

Em (RAPOSO C. A.; MUÑOZ RIVERA; ALVES, 2015), C. A. Raposo, J. E. M. Rivera e R. R. Alves ressaltam que se (1.29) e (1.30) ocorrem, então  $\omega_\sigma(A)$  é a melhor taxa de decaimento uniforme para o semigrupo, os autores estabeleceram a (PCDE) para o sistema de Timoshenko

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + \varphi)_x + \alpha_1 u_t &= 0, & \text{em } [0, L] \times [0, \infty[, \\ \rho_2 \varphi_{tt} - \delta \varphi_{xx} + k(u_x + \varphi) + \alpha_2 \varphi_t &= 0, & \text{em } [0, L] \times [0, \infty[, \end{aligned} \quad (1.34)$$

quando  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$  e  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$  e  $\alpha_2 = 1$ , e condições de fronteira do tipo

Dirichlet-Neumann. Eles ainda calcularam os valores das cotas superiores dos espectros para os casos  $\alpha_1, \alpha_2$  mencionados.

### 1.3 O Cenário da Estabilização

A estabilização de sistemas de evolução, constitui uma importante questão de pesquisa nas áreas de matemática e engenharia e tem sido objeto de intensas investigações nos últimos anos. Naturalmente, significativas propriedades matemáticas são extraídas de equações diferenciais parciais sem amortecimento, vale ressaltar as importantes propriedades matemáticas da equação da onda, placas e vigas (planas e curvas) (GRAFF, 1991; LAGNESE; LIONS, 1988). Porém, mecanismos de amortecimento tornam mais realísticos os fenômenos traduzidos em termos de equações diferenciais parciais. Veja por exemplo os livros clássico (KOMORNIK, 1994; LIONS, 1988; LAGNESE, 1989) sobre estabilização de sistemas hiperbólicos com termos de amortecimento na fronteira. Em tal direção, é possível dizer que a energia das soluções de equações diferenciais parciais com termos de amortecimento decaem exponencialmente se elas são majoradas por uma exponencial negativa. Em casos em que existe perda de decaimento exponencial afirma-se de modo geral que a energia das soluções decai de forma lenta. Assim, ambos os casos são interessantes para se determinar condições para se obter algum tipo de decaimento.

A análise do decaimento temporal na teoria poro-elástica unidimensional, foi primeiro estudada por Ramón Quintanilla em (QUINTANILLA, 2003). Quintanilla, utilizando o critério de estabilização de Routh-Hurwitz (GANTMACHER, 2000, p. 194, Teorema 4) mostrou que para um conjunto particular de soluções de (1.14), formado por combinações de soluções da forma

$$u = A \exp(\omega t) \operatorname{sen} nx, \quad \phi = B \exp(\omega t) \operatorname{cos} nx, \quad (1.35)$$

não é possível obter o decaimento exponencial uniforme das soluções se

$$\{0:10-1\} \quad \delta \neq \mu\kappa. \quad (1.36)$$

Quintanilla usou o termo *decaimento lento* para caracterizar o não decaimento exponencial. O mesmo conceito de decaimento lento empregado por Quintanilla pode ser encontrado em (CASAS; QUINTANILLA, 2005a; CASAS; QUINTANILLA, 2005b; MAGAÑA; QUINTANILLA, 2006; MAGAÑA; QUINTANILLA, 2007; PAMPLONA; MUÑOZ RIVERA; QUINTANILLA,

2009; PAMPLONA; MUÑOZ RIVERA; QUINTANILLA, 2011). O método utilizado pelo autor, limitou a obtenção do decaimento lento somente ao caso em que as condições de fronteiras são do tipo Dirichlet-Neumann, mas o autor comenta no artigo, que acredita que o mesmo resultado seja válido para condições do tipo Dirichlet-Dirichlet.

Recentemente em (SANTOS; CAMPELO; ALMEIDA JÚNIOR, 2017), utilizando teoria de semigrupos de operadores lineares, M. L. Santos, A. Campelo e D. S. Almeida Júnior mostraram que

$$\delta = \mu\kappa, \quad (1.37)$$

é uma condições necessária e suficiente para o decaimento exponencial de (1.14). Além disso, eles provaram ainda que se (1.36) ocorre, então o decaimento é polinomial com taxa ótima de  $1/t^{1/2}$ . As condições de fronteira consideradas pelos autores foram do tipo Dirichlet-Neumann.

Outra recente e importante contribuição é devido a Farel e Messaoudi (FAREH; MESSAOUDI, 2017). Eles investigaram um sistema poro-elástico onde a condução de calor é dada pela lei de Cattaneo, eles provaram um resultado de decaimento exponencial dependendo de um particular número denotado por  $\chi$ .

Vejamos agora um caso particularmente interessante do sistema (1.14). Quando  $\kappa := \mu = \xi = \beta$ ,  $\rho_1 := \rho_0$  e  $\rho_2 := \rho_0\kappa$  obtém-se (1.33), que constitui o sistema (1.21) sujeito ao mecanismo de amortecimento  $\tau\varphi$ . Portanto, existe uma particular similaridade entre o sistema poro-elástico e o sistema de Timoshenko. Uma das primeiras contribuições considerando a estabilização do sistema (1.21) foi apresentada por Soufyane (SOUFYANE, 1999). Ele considerou o sistema (1.33) com  $\tau$  uma função da variável espacial, isto é,  $\tau = \tau(x)$  e provou que se (1.22) ocorre, então a energia do sistema decai exponencialmente.

J. E. Muñoz Rivera e R. Racke em (MUÑOZ RIVERA; RACKE, 2003) mostraram que o sistema (1.33) (sujeito as condições de fronteira e iniciais) é exponencialmente estável se, e somente se, a relação (1.22) ocorre.

## 1.4 O Cenário de Espectro de Frequência

O *segundo espectro de frequência* ou simplesmente *segundo espectro* constitui uma importante questão em problemas de vibração de estruturas mecânicas. Em geral, para a

maioria dos autores, o segundo espectro de frequência é não-físico por algumas razões dentre as quais podemos destacar que no regime de baixa frequência existem dois modos distintos de oscilações (ver Figura 1). Por outro lado, existem autores que defendem que o segundo espectro é tão físico quanto o primeiro espectro (BHASKAR, 2009).

Historicamente, o segundo espectro apareceu na teoria da viga de Timoshenko (TIMOSHENKO, 1937). Traill-Nash e Collar (TRAILL-NASH; COLLAR, 1953) foram os primeiros a considerar a existência de dois modos de vibração, chamados de primeiro e segundo espectro, além de uma frequência crítica para os casos de extremidades livres e presas. Mais precisamente, é possível que duas frequências naturais correspondam a um único modo de configuração. Anderson (ANDERSON, 1953) e Dolph (DOLPHI, 1954) confirmaram o resultado de Traill-Nash e Collar no caso das duas extremidades presas. Este é um aspecto interessante em problemas de vibração, isto significa que a teoria da viga de Timoshenko (TVT) prediz duas velocidades de fase de propagação de onda e uma delas vai para o infinito para pequenos números de onda. É claro que este fato é totalmente contrário a realidade física e requer algum tipo de atenção (ver Figura 1).

Na prática, as velocidades de fase para TVT são finitas para altas frequências e em primeira vista, tem-se o importante resultado que as velocidades de fase são limitadas para números de ondas grandes em oposição ao modelo de Euler-Berloully (EB), que prediz velocidade ilimitadas de propagação de ondas para altas frequências. Além do mais, Lord Rayleigh (RAYLEIGH, 1877) reestruturou o modelo de EB para contornar as altas frequências e assegurar velocidades de fase finita para número de ondas grandes (ver Figura 2). Porém, os modos de propagação são qualitativamente imprecisos para ondas progressivamente curtas (BHASKAR, 2009).

O segundo espectro, tem sido estudado por vários autores ao longo dos anos (ABBAS; THOMAS, 1977; ANDERSON, 1953; BHASKAR, 2009; BHASHYAM; PRATHAP, 1981; ELISHAKOFF, 2010; HAN; BENAROYA; TIMOTHY, 1999; HUANG, 1985; LEVINSON; COOKE, 1982; SMITH, 2008; STEPHEN, 1982; STEPHEN, 2006). Em tal direção, alguns interessantes trabalhos dão importantes explicações sobre este problema. É possível destacar aqui uma importante abordagem devido a Bhaskar (BHASKAR, 2009).

Citando Bhaskar (BHASKAR, 2009). “Timoshenko reconheceu a deficiência do

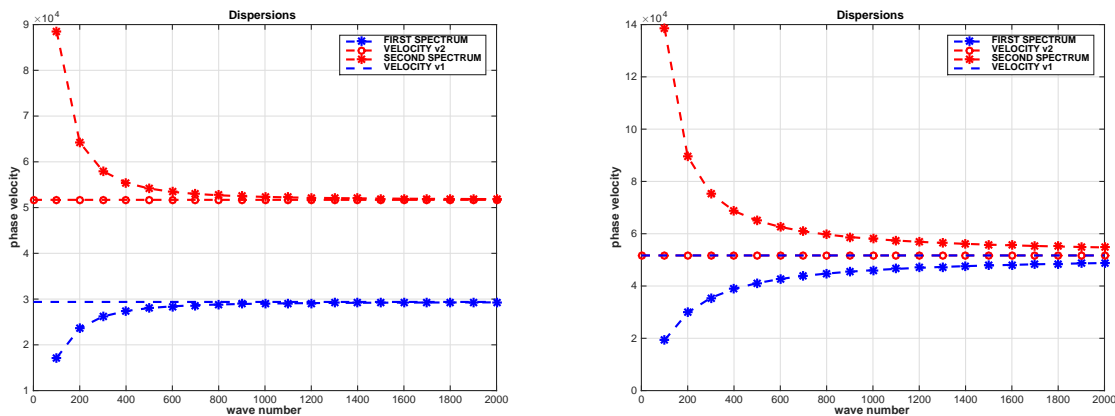


Figura 1 – Número de onda vs. velocidade de fase, para TVT sem amortecimento. Os dois ramos (primeiro e segundo espectro) da TVT são as dispersões e mostram um comportamento estável para altas frequências. Porém, o segundo ramo (ramo superior) explode para baixas frequências. Este mau comportamento é conhecido como segundo espectro.

{fig:0:1}

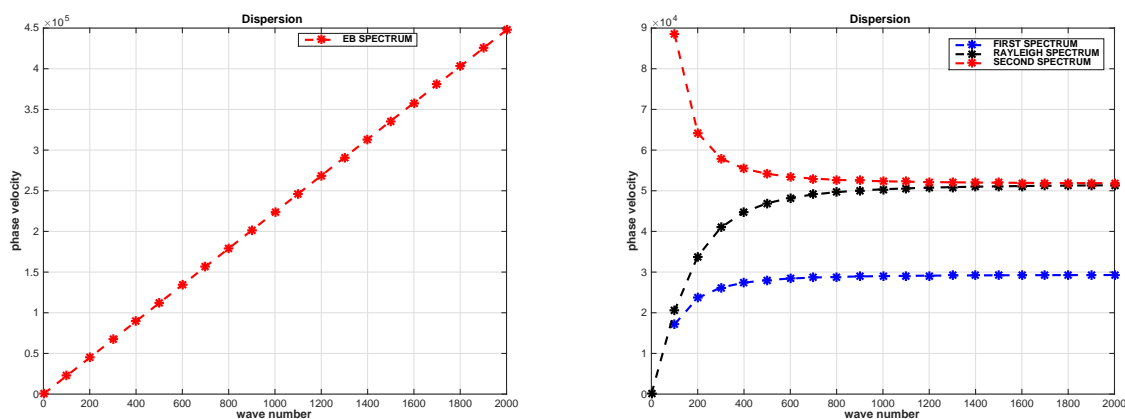


Figura 2 – Número de onda vs. velocidade de fase para os modelos de EB e Rayleigh e Timoshenko. O modelo de Rayleigh não é preciso para ondas progressivas curtas. Para grandes números de onda, o modelo de Rayleigh e o segundo espectro do model TVT tem basicamente o mesmo comportamento, convergindo para o mesmo valor da velocidade de fase.

{fig:0:2}

modelo de EB e introduziu uma correção em seu artigo de 1921, agora considerado um clássico na área. A genialidade de seu trabalho consistiu em identificar o corte da seção transversal em relação ao eixo como o mais importante grau de liberdade que falta no modelo de EB, enquanto ainda permite que a seção transversal permaneça aproximadamente plana durante o movimento.” Assim, a combinação entre força de cisalhamento (não considerada nos trabalhos prévios: EB e modelos de Rayleigh) e inércia de rotação (da hipótese de Timoshenko) também é responsável por gerar o segundo espectro.

I. Elishakoff em (ELISHAKOFF, 2010), deu uma explicação algébrica em termos

da equação de frequência na qual a instabilidade se encontra em um termo de quarta ordem. Ele propôs um modelo baseado no sistema de Timoshenko livre do segundo espectro,

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0. \end{aligned} \tag{1.38}$$

D. S. Almeida Júnior e A. J. A. Ramos em (ALMEIDA JÚNIOR; RAMOS, 2017), provaram a existência de uma relação entre o espectro não-físico e o decaimento exponencial de um sistema de Timoshenko com mecanismo de amortecimento atuando na equação do ângulo de rotação. Mais especificamente, eles provaram que o termo  $\tau\varphi_t$  atuando em (1.33) quando capaz de promover o decaimento exponencial (quando (1.22) ocorre), extingue o efeito do segundo espectro de frequência. Além disso, os autores consideraram o sistema (1.38) sujeito a um mecanismo de amortecimento  $\tau\psi_t$  atuando na equação do ângulo de rotação (segunda equação), eles mostraram que a solução decai exponencialmente independentemente de (1.22).

Recentemente (ALMEIDA JÚNIOR et al., 2018), D. S. Almeida Júnior, A. J. A. Ramos, M. L. Santos e L. Gutemberg R. M. estudaram o sistema (1.38) sujeito a um mecanismo de amortecimento dado por  $\mu\varphi_t$  atuando na primeira equação de (1.38). Eles mostraram que a energia do sistema decai exponencialmente independente da relação (1.22).

## 1.5 Objetivos da Tese

No segundo capítulo deste trabalho, será estabelecida a boa colocação dos sistemas poro-elásticos homogêneo e não-homogêneo.

O terceiro capítulo, tratará da controlabilidade exata interna para o sistema poro-elástico:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x &= 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[ \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + b u_x + \xi\phi &= \nu \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \end{aligned} \tag{1.39}$$

onde  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $J$ ,  $\delta$  e  $\xi$  são constantes positivas e  $b \neq 0$  (constante) satisfazendo  $b^2 \leq \mu\xi$  e  $\nu$  é um controle. O objetivo de tal capítulo é responder as seguintes questões:

1. É possível aplicar o método HUM, com um único controle interno, para se estabelecer a controlabilidade exata?

2. Existe uma relação para os coeficientes de (1.39), semelhante a (1.22) que garanta a controlabilidade exata?

No quarto capítulo, será considerada a propriedade do crescimento determinado pelo espectro para o sistema (1.14) bem como, a obtenção do valor da cota superior do espectro do gerador infinitesimal associado a seu semigrupo.

O quinto capítulo, consiste do estudo da estabilidade exponencial para o sistema (1.14), quando substitui-se  $\tau$  por uma função  $a = a(x)$ , com  $a \in L^\infty(0, L)$  similar a encontrada em (MUÑOZ RIVERA; RACKE, 2008). Mais precisamente consideraremos as seguintes questões:

1. A existência de dois espectro de frequência para o sistema poro-elástico no caso  $\tau = 0$ ;
2. O estudo truncamento/eliminação do segundo espectro, considerando a influência de um termo de amortecimento ( $\tau > 0$ ).

No sexto capítulo, serão analisadas as propriedades dispersivas do sistema poro-elástico sujeito ou não a um mecanismo de amortecimento.



## 2 Existência e Unicidade para um Sistema Poro-Elástico

Neste capítulo, serão estudadas as questões da existência e unicidade de solução para uma classe de sistemas poro-elásticos. Para iniciar, considere o sistema

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[, \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $J$ ,  $\delta$  e  $\xi$  são constantes positivas e  $b \neq 0$  uma constante tal que  $b^2 \leq \mu\xi$ . Considere ainda as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } ]0, L[, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x) & \text{em } ]0, L[, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e de fronteira

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & \text{em } ]0, \infty[, \\ \phi_x(0, t) = 0, \quad \phi_x(L, t) = 0 & \text{em } ]0, \infty[. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A energia total do sistema (2.1)-(2.3) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi_t|^2 + \delta|\phi_x|^2 + 2bu_x\phi + \xi|\phi|^2) dx, \quad (2.4)$$

e através de técnicas multiplicativas, é possível estabelecer

$$E(t) = E(0), \quad t > 0, \quad (2.5)$$

e neste caso, dizemos que o sistema (2.1)-(2.3) é conservativo, uma vez que sua energia é preservada no decorrer do tempo.

A metodologia para o estudo da existência e unicidade de solução para o sistema (2.1)-(2.3) será baseada na teoria de semigrupos de operadores lineares (ENGEL; NAGEL, 1999), (PAZY, 1983).

### 2.1 Formulação de Semigrupo

Esta secção tem como objetivo, obter a existência e unicidade de solução para o sistema (2.1)-(2.3), aplicando um corolário do Teorema de Lummer-Phillips cuja demonstração

pode ser encontrada em (LIU; ZHENG, 2000, p. 3, Teorema 1.24), tal resultado tem o seguinte enunciado:

**Teorema 1.** Seja  $T$  um operador linear com domínio  $D(T)$  denso em um espaço de Hilbert  $H$ . Se  $T$  é dissipativo e  $0 \in \rho(T)$  (onde  $\rho(T)$  representa o conjunto resolvente de  $T$ ), então  $T$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações em  $H$ .

O problema de valor inicial e de fronteira (2.1)-(2.3), pode ser reescrito como um problema de Cauchy em  $\Psi = (u, u_t, \phi, \phi_t)'$ , da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_t = A\Psi \quad t > 0 \\ \Psi(0) = \Psi_0, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

onde  $\Psi_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1)'$  e  $A$  é o operador dado por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2 & 0 & \frac{b}{\rho} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{b}{j} \partial_x & 0 & \frac{\delta}{j} \partial_x^2 - \frac{\xi}{j} I & 0 \end{bmatrix},$$

com valores no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

onde

$$L_*^2(0, L) = \left\{ v \in L^2(0, L); \int_0^L v dx = 0 \right\},$$

$$H_*^1(0, L) = \left\{ v \in H^1(0, L); \int_0^L v dx = 0 \right\}.$$

Estes espaços são completos, uma vez que são núcleos dos funcionais lineares contínuos

$$\begin{aligned} \tau_1 : L^2(0, L) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_0^L u dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tau_2 : H^1(0, L) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_0^L u dx, \end{aligned}$$

respectivamente. Portanto, são subespaços fechados de espaços de Banach. O domínio de  $A$  é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \{(u, \varphi, \phi, \psi) \in \mathcal{H}; u \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \varphi \in H_0^1(0, L), \\ \phi \in H^2(0, L), \phi_x \in H_0^1(0, L), \psi \in H^1(0, L)\}.$$

A forma sesquilinear representada pela expressão

$$\langle (u^0, \varphi^0, \phi^0, \psi^0), (u^1, \varphi^1, \phi^1, \psi^1) \rangle_{\mathcal{H}} = \rho \int_0^L \varphi^0 \overline{\varphi^1} dx + J \int_0^L \psi^0 \overline{\psi^1} dx + \mu \int_0^L u_x^0 \overline{u_x^1} dx + \\ \delta \int_0^L \phi_x^0 \overline{\phi_x^1} dx + b \int_0^L (\phi^0 \overline{u_x^1} + u_x^0 \overline{\phi^1}) dx + \xi \int_0^L \phi^0 \overline{\phi^1} dx,$$

define um produto interno em  $\mathcal{H}$ , sua positividade é atingida levando em conta  $b^2 \leq \xi\mu$ . A barra a cima dos elementos  $u^1, \varphi^1, \phi^1, \psi^1$  denota o complexo conjugado e a norma induzida por este produto interno será

$$\|(u, \varphi, \phi, \psi)\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho \int_0^L |\varphi|^2 dx + J \int_0^L |\psi|^2 dx + \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \\ b \int_0^L (\overline{u_x} \phi + u_x \overline{\phi}) dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx.$$

Se  $U = (u, \varphi, \phi, \psi)$ , as colocações anteriores permitem estabelecer

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

implicando na dissipatividade de  $A$ .

O próximo passo, será em direção da conclusão de que o domínio de  $A$  é denso em  $\mathcal{H}$ , a demonstração é baseada em mostrar que cada espaço constituinte do produto cartesiano que define  $D(A)$  é denso em seu respectivo espaço “maior” constituinte do produto cartesiano de  $\mathcal{H}$ .

**Lema 1.** O domínio de  $A$  é denso em  $\mathcal{H}$ .

**Demonstração.** A prova deste resultado será dividida em quatro partes:

**I)** O espaço  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  é denso em  $H_0^1(0, L)$ .

Uma vez que  $C_0^\infty(0, L) \subset H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  e  $\overline{C_0^\infty(0, L)} = H_0^1(0, L)$  (na norma de  $H^1(0, L)$ ), tem-se

$$\overline{H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)} = H_0^1(0, L)$$

na norma de  $H^1(0, L)$ . □

**II)** O espaço  $H_0^1(0, L)$  é denso em  $L^2(0, L)$ .

Segue-se de (BREZIS, 2010, p. 219). □

**III)** O espaço  $\mathcal{B} = \{\phi \in H^2(0, L); \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0, \int_0^L \phi dx = 0\}$  é denso em  $H_*^1(0, L)$ .

Dada  $f \in H_*^1(0, L)$ , redefinindo-a zero em  $\mathbb{R} \setminus ]0, L[$  e considerando uma sequência regularizante  $(\rho_n)$  (BREZIS, 2010, p. 208), para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\tau_n := \rho_n \star f,$$

a convolução de  $\rho_n$  e  $f$ . Observe que  $\rho_n \star f \in C^\infty(\mathbb{R})$  (BREZIS, 2010, p. 107, proposição 4.20) e da propriedade da integral da convolução (DIBENEDETTO, 2016, p. 159, proposição 15.2)

$$\int_{\mathbb{R}} \tau_n dx = \int_{\mathbb{R}} \rho_n \star f dx = \int_{\mathbb{R}} \tau_n dx \int_{\mathbb{R}} f dx = 0,$$

em particular

$$\begin{aligned} \int_0^L \tau_n dx &= 0, \\ \tau_n &\longrightarrow f \text{ em } H^1(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

representado por  $\tau_n|_{[0,L]}$  a restrição de  $\tau_n$  ao conjunto  $[0, L]$ , infere-se

$$\tau_n|_{[0,L]} \longrightarrow f|_{[0,L]} \text{ em } H^1(0, L),$$

com  $\tau_n|_{[0,L]} \in C^\infty([0, L])$  e portanto,  $\tau_n|_{[0,L]} \in H^2(0, L)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere  $(\tau_n|_{[0,L]})$  redefinida na extremidade da sua derivada)

$$D\bar{\tau}_n(x) := \begin{cases} D\tau_n|_{[0,L]}(x) & \text{se } x \notin \{0, L\}, \\ 0 & \text{se } x \in \{0, L\}, \end{cases}$$

(neste caso,  $D\bar{\tau}_n = D\tau_n|_{[0,L]}$  q.t.p em  $[0, L]$ ), para todo natural  $j > 1$ ,

$$D^j \bar{\tau}_n := D^j \tau_n|_{[0,L]},$$

e

$$\bar{\tau}_n := \tau_n|_{[0,L]}.$$

(isto significa que as outras derivadas de  $\tau_n|_{[0,L]}$  permanecem inalteradas. Na verdade,  $\bar{\tau}_n$  é o representante da classe  $\tau_n|_{[0,L]}$  com zero na fronteira da sua derivada primeira). Obtém-se

assim uma sequência  $(\bar{\tau}_n)$  em  $H^2(0, L)$ , com  $(\bar{\tau}_n)_x(0) = (\bar{\tau}_n)_x(L) = 0$  e  $\int_0^L \bar{\tau}_n dx = 0$  (portanto, uma sequência em  $\mathcal{B}$ ) tal que  $\bar{\tau}_n \rightarrow f$  em  $H^1(0, L)$ , provando assim que  $\mathcal{B}$  é denso em  $H_*^1(0, L)$ .

□

**IV)**  $H_*^1(0, L)$  é denso em  $L_*^2(0, L)$ .

Dada  $g \in L_*^2(0, L)$ , de maneira análoga a feita anteriormente é possível obter uma sequência  $(\nu_n)$  em  $C^\infty([0, L])$  e portanto em  $H^1(0, L)$ , tal que

$$\begin{aligned} \int_0^L \nu_n dx &= 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e} \\ \nu_n &\rightarrow g \text{ em } L^2(0, L). \end{aligned}$$

Conclui-se assim que  $D(A)$  é denso em  $\mathcal{H}$ . ■

O lema seguinte, completa os requisitos necessários à aplicação do Teorema 1, estabelecendo assim a boa colocação problema (2.1)-(2.3) (PETROV; SIZIKOV, 2005, p. 131, definição 4.4.1). A demonstração consiste em obter para cada  $F \in \mathcal{H}$  um único  $U \in D(A)$  satisfazendo

$$-AU = F \text{ e } \|U\|_{\mathcal{H}} \leq K \|F\|_{\mathcal{F}},$$

para alguma constante  $K > 0$  (independente de  $U$ ). Isto significa que o operador inverso  $-A^{-1} = (0 - A)^{-1}$  é sobrejetivo e contínuo, implicando que  $0 \in \varrho(A)$ .

**Lema 2.** O conjunto resolvente de  $A$  contém o zero.

**Demonstração.** Dado qualquer  $F = (f^1, f^2, f^3, f^4) \in \mathcal{H}$ , considere a equação

$$-AU = F,$$

com  $U = (u, \varphi, \phi, \psi)$ , assim

$$\begin{aligned} -\varphi &= f^1 \in H_0^1(0, L) \\ -\mu u_{xx} - b\phi_x &= \rho f^2 \in L^2(0, L) \\ -\psi &= f^3 \in H_*^1(0, L) \\ -\delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi &= Jf^4 \in L_*^2(0, L) \end{aligned}$$

assim temos  $\varphi = -f^1$ ,  $\psi = -f^3$  e

$$-\mu u_{xx} - b\phi_x = \rho f^2 \in L^2(0, L) \tag{2.7}$$

$$-\delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = Jf^4 + \alpha f^3 \in L_*^2(0, L), \tag{2.8}$$

para que a solução pertença a  $D(A)$  deve-se impor ao sistema anterior, a seguinte condição de fronteira

$$\{cp1-eq9\} \quad u(0) = u(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0. \quad (2.9)$$

Segue-se do Teorema (16) do apêndice, que o sistema (2.7)-(2.9) possui solução com regularidade

$$(u, \phi) \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L).$$

Portanto,  $U = (u, \varphi, \phi, \psi) \in D(A)$  e

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq K\|F\|_{\mathcal{H}},$$

com  $K$  independente de  $U$ .

Resulta da dissipatividade do operador  $A$ , Lema 1, Lema 2, do Teorema 1 que  $A$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações, isto implica (PAZY, 1983, p. 102, Teorema 1.3) que a solução  $\Psi$  tem a seguinte regularidade:

$$\Psi \in C([0, \infty[; D(A)) \cap C^1([0, \infty[; \mathcal{H}) \quad \text{se } \Psi_0 \in D(A)$$

e

$$\Psi \in C([0, \infty[; \mathcal{H}) \quad \text{se } \Psi_0 \in \mathcal{H}.$$

## 2.2 O Sistema não Homogêneo

Considere agora o seguinte sistema poro-elástico não homogêneo

$$\{cp1-eq10\} \quad \begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x &= f \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[ \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi &= g \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[ \end{aligned} \quad (2.10)$$

com condições iniciais

$$\{cp1-eq11\} \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em } ]0, L[, \\ \phi(x, 0) &= \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x) \quad \text{em } ]0, L[, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e de fronteira

$$\{cp1-eq12\} \quad \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \\ \phi_x(0, t) &= 0, \quad \phi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Este sistema pode ser escrito na forma de um problema de Cauchy não homogêneo em  $\Psi = (u, u_t, \phi, \phi_t)'$ , da seguinte maneira

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_t = A\Psi + F \quad t \in ]0, T[ \\ \Psi(0) = \Psi_0, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

onde  $\Psi_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1)'$  e  $F = (0, f, 0, g)'$ .

Se  $f \in L^1(0, T; L^2(0, L))$  e  $g \in L^1(0, T; L_*^2(0, L))$ , então o sistema (2.10)-(2.12) admite uma única solução (PAZY, 1983, capítulo 4, secção 2), com

$$\Psi \in C(0, T; \mathcal{H}).$$

## 2.3 Sistema Não-Conservativo com Amortecimento

Admita agora o seguinte sistema poro-elástico

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \alpha\phi_t = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \end{array} \right. \quad (2.14)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva, as condições iniciais e de fronteira são dadas por (2.2) e (2.3), respectivamente.

Uma vez que sua energia é dada por (2.4), mostra-se que

$$\frac{dE}{dt}(t) = -\alpha \int_0^L |\phi_t|^2 dx \leq 0.$$

Isto significa, que neste sistema a energia é dissipada e portanto, não é conservativa. O termo  $\alpha\phi_t$ , presente em (2.14), atua como um amortecimento no sistema, provocando a dissipação da energia.

É possível, assim como no caso conservativo, reescrever o sistema como um problema de Cauchy em  $\Psi = (u, u_t, \phi, \phi_t)'$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_t = A_\alpha \Psi \quad t > 0, \\ \Psi(0) = \Psi_0, \end{array} \right.$$

onde  $\Psi_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1)$  e  $A_\alpha$  é o operador

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2 & 0 & \frac{b}{\rho} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{b}{J} \partial_x & 0 & \frac{\delta}{J} \partial_x^2 - \frac{\xi}{J} I & -\frac{\alpha}{J} I \end{bmatrix}.$$

Se for carregado para este cenário, os mesmos espaços  $\mathcal{H}$  e  $D(A_\alpha) = D(A)$  do caso conservativo e com seus respectivos produto interno e norma, é possível mostrar que para todo  $U = (u, \varphi, \phi, \psi) \in D(A_\alpha)$  tem-se

$$\operatorname{Re} \langle A_\alpha U, U \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_0^L \alpha |\psi|^2 dx \leq 0$$

ou seja,  $A_\alpha$  é um operador dissipativo e através de raciocínio análogo ao realizado naquele caso, é possível mostrar que  $A_\alpha$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações, estabelecendo assim a boa colocação do sistema.

## 2.4 Sistema com Amortecimento Indefinido

Será considerado agora, um outro tipo de amortecimento atuando no sistema poro-elástico, dando origem a um problema da forma

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b \phi_x &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \\ J \phi_{tt} - \delta \phi_{xx} + b u_x + \xi \phi + a(x) \phi_t &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde  $a \in L^\infty(0, L)$  e as condições iniciais e de fronteira são dadas novamente por (2.2) e (2.3), respectivamente.

É possível mostrar que para este sistema, tem-se a seguinte relação envolvendo a energia

$$\frac{dE}{dt}(t) = - \int_0^L a(x) |\psi_t|^2 dx$$

o que torna impossível precisar se a energia se dissipa, uma vez que  $a$  pode mudar de sinal.

Mesmo neste caso, é factível ainda mostrar que o sistema tem solução. Dado que (2.15) permite ser escrito como o seguinte problema da Cauchy em  $\Psi = (u, u_t, \phi, \phi_t)'$

$$\begin{cases} \Psi_t = \mathcal{A} \Psi & t > 0 \\ \Psi(0) = \Psi_0, \end{cases} \tag{2.16}$$



onde  $\Psi_0 = (u_0, u_1, \phi_0, \phi_1)'$  e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2 & 0 & \frac{b}{\rho} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{b}{J} \partial_x & 0 & \frac{\delta}{J} \partial_x^2 - \frac{\xi}{J} I & -\frac{a(x)}{J} I \end{bmatrix},$$

é o operador definido em  $D(\mathcal{A}) = D(A) \subset \mathcal{H}$ , onde  $D(A)$  e  $\mathcal{H}$ , são os mesmos do caso conservativo.

Será comprovado que  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo. A valer, considere  $\alpha > 0$  tal que

$$a(x) < \alpha \quad \text{q.t.p. em } [0, L],$$

então,  $\mathcal{A}$  pode ser reescrita como

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \partial_x^2 & 0 & \frac{b}{\rho} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{b}{J} \partial_x & 0 & \frac{\delta}{J} \partial_x^2 - \frac{\xi}{J} I & -\frac{\alpha}{J} I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a(x)-\alpha}{J} I \end{bmatrix} \equiv A_\alpha + \mathcal{B}.$$

Já foi determinado na seção anterior, que  $A_\alpha$ , com  $D(A_\alpha) = D(\mathcal{A})$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações, e sendo  $\mathcal{B}$ , um operador contínuo, segue-se da teoria da perturbação para semigrupos (PAZY, 1983, capítulo 3), (ENGEL; NAGEL, 1999, capítulo 3), que  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo (não necessariamente de contrações), portanto, o problema (2.15) é bem posto.

## 3 Controlabilidade Exata Interna

### 3.1 Controlabilidade Exata Interna

Neste capítulo, será estudada a questão da controlabilidade exata interna para o seguinte sistema elástico poroso

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi &= \nu & \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \end{aligned} \quad (3.1)$$

com  $\rho, \mu, J, \delta, \xi$  constantes positivas,  $b$  uma constante não nula com  $b^2 \leq \xi\mu$  e  $\nu$  uma função controle. As condições iniciais são

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } ]0, L[, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x) & \text{em } ]0, L[, \end{aligned} \quad (3.2)$$

e de fronteira

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & \text{em } ]0, T[, \\ \phi_x(0, t) = 0, \quad \phi_x(L, t) = 0 & \text{em } ]0, T[. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sem perda de generalidade, será considerado por todo este capítulo  $b > 0$ . A metodologia utilizada será baseada em (YOUSSEF, 2009).

### 3.2 Desigualdade de Observabilidade

Esta secção tem como objetivo provar a desigualdade (3.32) conhecida como *desigualdade de observabilidade*. A desigualdade de observabilidade é uma condição suficiente para controlabilidade exata do sistema poro-elástico, uma vez que ela implica a coercividade da forma bilinear (3.60) no espaço de Hilbert  $\mathcal{F}$  a ser definido posteriormente. A desigualdade (3.32) indica que “observando”  $\phi$  no intervalo  $[0, L]$  e no tempo de 0 a  $T$ , podemos determinar completamente (unicamente) a solução por transposição  $(u, \phi)$  da parte homogênea ( $\nu = 0$ ) de (3.1)-(3.3).

**Teorema 2.** Suponha que  $\frac{\rho}{\mu} = \frac{J}{\delta}$  e  $b^2 = \mu\xi$ . Então, existem constantes positivas  $C_1$  e  $C_2$  (independentes dos dados iniciais) e  $T_0 > 0$  tais que para todo  $T > T_0$  e quaisquer  $U_0 =$

$(u^0, u^1, \phi^0, \phi^1) \in \mathcal{H}$ , tem-se

$$\text{\{cp2-eq3-1\}} \quad C_1 E(0) \leq \int_0^L \int_0^T |\phi_t|^2 dt dx \leq C_2 E(0), \quad (3.4)$$

onde  $(u, \phi)$  é solução da parte homogênea de (3.1)-(3.3),  $\mathcal{H}$  é o espaço de Hilbert (2.7) e  $E(0)$  é o valor da energia (2.4) para  $t = 0$ .

**Demonstração.** Será demonstrado inicialmente a primeira das desigualdades (3.4). É conveniente dividir esta primeira parte em três etapas:

**Etapa 1.** Multiplicando (3.1)<sub>1</sub> por  $b\mu^{-1}\phi_x$ , integrando por partes em  $[0, L] \times [0, T]$ , levando em conta as condições de fronteira sobre  $u$ , somando e subtraindo  $\frac{\rho\xi}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_{tt} \phi dt dx$ , obtemos

$$\text{\{cp2-eq7\}} \quad -\frac{\rho}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}(bu_x + \xi\phi) dt dx - b \int_0^L \int_0^T u_{xx} \phi_x - \frac{b^2}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_x^2 dt dx + \\ -\frac{\rho\xi}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + \frac{\rho}{\mu} \int_0^L [bu_t \phi_x + (bu_x + \xi\phi)\phi_t] \Big|_0^T dx = 0. \quad (3.5)$$

Multiplicando (3.1)<sub>2</sub> por  $\delta^{-1}(bu_x + \xi\phi)$ , integrando por partes em  $[0, L] \times [0, T]$  e levando em conta as condições de fronteira sobre  $\phi_x$  chega-se em

$$\text{\{cp2-eq8\}} \quad \frac{J}{\delta} \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}(bu_x + \xi\phi) dt dx + b \int_0^L \int_0^T u_{xx} \phi_x dt dx + \xi \int_0^L \int_0^T \phi_x^2 dt dx + \\ \frac{1}{\delta} \int_0^L \int_0^T (bu_x + \xi\phi)^2 dt dx = 0. \quad (3.6)$$

Somando (3.5) e (3.6) obtém-se,

$$\text{\{cp2-eq9\}} \quad \frac{1}{\delta} \int_0^L \int_0^T (bu_x + \xi\phi)^2 dt dx = \left( \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right) \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}(bu_x + \xi\phi) dt dx + \\ \frac{\rho\xi}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx - \frac{\rho}{\mu} \int_0^L [bu_t \phi_x + (bu_x + \xi\phi)\phi_t] \Big|_0^T dx. \quad (3.7)$$

Utilizando a desigualdade de Young para a primeira parcela do lado direito de (3.7)

tem-se

$$\left( \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right) \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}(bu_x + \xi\phi) dt dx \leq \frac{\delta}{2} \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + \\ \frac{1}{2\delta} \int_0^L \int_0^T (bu_x + \xi\phi)^2 dt dx,$$

e aplicando esta última desigualdade em (3.7) e se for levado em conta que  $b^2 = \mu\xi$ , obtém-se

$$\text{\{cp2-eq10\}} \quad \frac{\xi}{2\delta} \int_0^L \int_0^T (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dt dx \leq \frac{\delta}{2} \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + \\ \frac{\rho\xi}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx - \frac{\rho}{\mu} \int_0^L [bu_t \phi_x + (bu_x + \xi\phi)\phi_t] \Big|_0^T dx. \quad (3.8)$$

Aplicando a desigualdade de Young na última parcela no lado direito da desigualdade anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu} \int_0^L [bu_t(T)\phi_x(T) + (bu_x(T) + \xi\phi(T))\phi_t(T)]dx &\leq \frac{b}{2\mu} \int_0^L \rho u_t^2(T)dx + \\ \frac{\rho b}{2\delta\mu} \int_0^L \delta\phi_x^2(T)dx + \frac{\rho\xi}{2\mu} \int_0^L (\mu u_x^2(T) + 2bu_x(T)\phi(T) + \xi\phi^2(T))dx &+ \\ \frac{1}{2\delta} \int_0^L J\phi_t^2(T)dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Considere

$$c_1 = \max \left\{ \frac{b}{\mu}, \frac{\rho b}{\delta\mu}, \frac{\rho\xi}{\mu}, \frac{1}{\delta} \right\},$$

e de (3.9), obtém-se

$$\frac{\rho}{\mu} \int_0^L [bu_t(T)\phi_x(T) + (bu_x(T) + \xi\phi(T))\phi_t(T)]dx \leq c_1 E(T). \quad (3.10)$$

Analogamente,

$$\frac{\rho}{\mu} \int_0^L [bu_t(0)\phi_x(0) + (bu_x(0) + \xi\phi(0))\phi_t(0)]dx \leq c_1 E(0). \quad (3.11)$$

Assim, de (3.8), (3.10), (3.11) e da propriedade de conservação da energia

$$\begin{aligned} \frac{\xi}{2\delta} \int_0^L \int_0^T (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dt dx &\leq \frac{\delta}{2} \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + \\ \frac{\rho\xi}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + 2c_1 E(0), \end{aligned} \quad (3.12)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^T (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dt dx &\leq \frac{\delta^2}{\xi} \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + \\ \frac{2\delta\rho}{\mu} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + \frac{4\delta c_1}{\xi} E(0). \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Etapa 2.** Seja  $\chi$  solução do sistema

$$\begin{cases} -\chi_{xx} = \phi_x & \text{em } ]0, L[, \\ \chi(0) = \chi(L) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Observe que  $\chi \in H_0^1(0, L)$ , uma vez que  $\phi_x \in L^2(0, L)$  (CHIPOT, 2000, p. 39). Além disso

$$\chi_x = -\phi + \frac{1}{L} \int_0^L \phi dx. \quad (3.15)$$

Multiplicando (3.1)<sub>1</sub> por  $(\mu u - b\chi)$ , integrando por parte em  $[0, L] \times [0, T]$  e levando em conta as condições de fronteira sobre  $u$  e  $\chi$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \rho\mu \int_0^L \int_0^T u_t^2 dt dx + \frac{b}{L} \left( \int_0^L \phi dx \right)^2 &= \underbrace{\rho \int_0^L u_t(\mu u - b\chi)|_0^T dx}_{I_1} + \\ \underbrace{\rho b \int_0^L \int_0^T u_t \chi_t dt dx}_{I_2} + \underbrace{\mu \int_0^L \int_0^T (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dt dx}_{I_3} &. \end{aligned} \quad (3.16)$$

O objetivo agora, será majorar os termos  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Para  $I_1$ , fixado  $t \in [0, T]$  e aplicando a desigualdade de Young, obtém-se

$$\rho \int_0^L u_t(\mu u - b\chi) dx \leq \frac{\rho}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \underbrace{\frac{\rho}{2} \int_0^L (\mu u - b\chi)^2 dx}_{I_{1,1}}. \quad (3.17)$$

Para majorar  $I_{1,1}$  em (3.17), observa-se das condições de fronteira sobre  $u$  que

$$\int_0^L u_x dx = 0,$$

e de (3.15)

$$(\mu u - b\chi)_x = (\mu u_x + b\phi) - \frac{1}{L} \int_0^L (\mu u_x + b\phi) dx.$$

Multiplicando a equação anterior por  $(\mu u - b\chi)_x$ , integrando por partes em  $[0, L]$  e levando em conta as condições de fronteira sobre  $u$ , obtém-se

$$\int_0^L |(\mu u - b\chi)_x|^2 = \int_0^L (\mu u_x + b\phi)^2 dx - \frac{b}{L} \left( \int_0^L \phi dx \right)^2 \leq \int_0^L (\mu u_x + b\phi)^2 dx,$$

e da desigualdade de Poincaré,

$$\int_0^L (\mu u - b\chi)^2 \leq c_p \int_0^L |(\mu u - b\chi)_x|^2 \leq \mu c_p \int_0^L (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dx, \quad (3.18)$$

onde  $c_p$  denota a constante de Poincaré. Segue-se de (3.17) e (3.18) que

$$\rho \int_0^L u_t(\mu u - b\chi) dx \leq \frac{\rho}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{\rho\mu c_p}{2} \int_0^L (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dx. \quad (3.19)$$

Denotando

$$c_2 = \max\{1, \rho\mu c_p\},$$

de (3.19)

$$\rho \int_0^L u_t(\mu u - b\chi) dx \leq c_2 E(t).$$

Da desigualdade anterior e da propriedade de conservação da energia

$$\{cp2-eq20\} \quad I_1 \leq 2c_2 E(0). \quad (3.20)$$

Para majorar  $I_2$ , multiplicando (3.14) por  $\chi$  e integrando por partes em  $[0, L]$ , aplicando em seguida as desigualdades de Schwarz e Poincaré, obtém-se uma constante positiva  $c_3$  que depende apenas de  $L$  tal que

$$\{cp2-eq21\} \quad \int_0^L |\chi|^2 dx \leq c_3 \int_0^L \phi^2 dx, \quad (3.21)$$

e como (3.14) é derivável em  $t$

$$\{cp2-eq22\} \quad \int_0^L |\chi_t|^2 dx \leq c_3 \int_0^L \phi_t^2 dx. \quad (3.22)$$

Aplicando a desigualdade de Young, considerando (3.22) e o fato de  $b^2 = \mu\xi$  chega-se em

$$\{cp2-eq23\} \quad I_2 \leq \frac{\rho\mu}{2} \int_0^L \int_0^T u_t^2 dt dx + \frac{\rho\xi c_3}{2} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx. \quad (3.23)$$

O termo  $I_3$  em (3.16) é majorado pela desigualdade (3.13). Segue-se portanto, de (3.16), (3.20), (3.23) e (3.13)

$$\{cp2-eq24\} \quad \frac{\rho\mu}{2} \int_0^L \int_0^T u_t^2 dt dx \leq \left( \frac{\rho\xi c_3}{2} + 2\delta\rho \right) \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + \frac{\mu\delta^2}{\xi} \left| \frac{\rho}{\mu} + -\frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + \left( \frac{4\delta\mu c_1}{\xi} + 2c_2 \right) E(0). \quad (3.24)$$

**Etapa 3.** Multiplicando a equação (3.1)<sub>2</sub> por  $\delta^{-1}\phi$  e integrando em  $[0, L] \times [0, T]$  se estabelece

$$\{cp2-eq25\} \quad \int_0^L \int_0^T \phi_x^2 dt dx = \underbrace{\frac{J}{\delta} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx}_{I_4} - \underbrace{\frac{J}{\delta} \int_0^L \phi_t \phi|_0^T dx + -\frac{1}{\delta} \int_0^L \int_0^T (bu_x + \xi\phi)\phi dt dx}_{I_5}. \quad (3.25)$$

O objetivo agora é majorar  $I_4$  e  $I_5$ . Para  $I_4$ , observa-se que para todo  $t$  fixado em  $[0, T]$ , aplicando a desigualdade de Young, tem-se

$$\{cp2-eq25-1\} \quad \frac{J}{\delta} \int_0^L \phi_t \phi dx \leq \frac{1}{2\delta} \int_0^L J \phi_t^2 dx + \frac{J}{2\delta\xi} \int_0^L \xi \phi^2 dx \leq c_4 E(t), \quad (3.26)$$

onde

$$c_4 = \max \left\{ \frac{1}{\delta}, \frac{J}{\delta\xi} \right\}.$$

Resulta da propriedade de conservação da energia e de (3.26)

$$\{cp2-eq26\} \quad I_4 \leq 2c_4 E(0). \quad (3.27)$$

Para  $I_5$  em (3.25), utilizando a desigualdade de Young, obtém-se

$$\{cp2-eq27\} \quad I_5 \leq \frac{\xi c_p}{2\delta^2} \int_0^L \int_0^T (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dt dx + \frac{1}{2c_p} \int_0^L \int_0^T \phi^2 dt dx, \quad (3.28)$$

e aplicando a desigualdade de Poincaré em (3.28), tem-se

$$\{cp2-eq28\} \quad I_5 \leq \frac{\xi c_5}{2\delta^2} \int_0^L \int_0^T (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T \phi_x^2 dt dx \quad (3.29)$$

de (3.25), (3.27), (3.29) e (3.13) chega-se em

$$\{cp2-eq29\} \quad \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T \phi_x^2 dt dx \leq \left( \frac{J}{\delta} + \frac{\rho\xi}{\mu\delta} \right) \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + \frac{c_5}{2} \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + \left( 2c_4 + \frac{2c_1c_5}{\delta} \right) E(0). \quad (3.30)$$

Somando membro a membro (3.13), (3.24) e (3.30), levando em conta

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T J \phi_t^2 dt dx \geq 0$$

e

$$J = \frac{\delta\rho}{\mu},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \{cp2-eq30\} \quad & \frac{\mu}{2} \int_0^L \int_0^T \rho u_t^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T J \phi_t^2 dt dx + \frac{1}{2\delta} \int_0^L \int_0^T \delta \phi_x^2 dt dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T (\sqrt{\mu}u_x + \sqrt{\xi}\phi)^2 dt dx \leq \\ & \frac{\rho(4\delta^2 + \mu\delta\xi c_3 + 4\mu\delta^2 + \kappa\mu\delta + 2\mu\kappa + 2\xi)}{2\mu\delta} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + \\ & \left( \frac{\delta^2}{\xi} + \frac{\mu\delta^2}{\xi} + \frac{c_5}{2} \right) \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + \\ & \left( \frac{4\delta c_1}{\xi} + \frac{4\delta\mu c_1}{\xi} + 2c_2 + 2c_4 + \frac{2c_1c_5}{\delta} \right) E(0), \end{aligned} \quad (3.31)$$

e considerando

$$\begin{aligned} c_6 &= \min \left\{ \mu, \frac{1}{2\delta} \right\} \\ c_7 &= \frac{\rho(4\delta^2 + \mu\delta\xi c_3 + 4\mu\delta^2 + \kappa\mu\delta + 2\mu\kappa + 2\xi)}{2\mu\delta} \\ c_8 &= \frac{\delta^2}{\xi} + \frac{\mu\delta^2}{\xi} + \frac{c_5}{2} \\ c_9 &= \frac{4\delta c_1}{\xi} + \frac{4\delta\mu c_1}{\xi} + 2c_2 + 2c_4 + \frac{2c_1c_5}{\delta}, \end{aligned}$$

pode-se escrever (3.31) como

$$c_6 \int_0^T E(t)dt \leq c_7 \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + c_8 \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx + c_9 E(0),$$

aplicando a propriedade de conservação da energia à desigualdade anterior, resulta

$$(c_6 T - c_9)E(0) \leq c_7 \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + c_8 \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx,$$

ou equivalentemente,

$$(T - c_9 c_6^{-1})E(0) \leq c_7 c_6^{-1} \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx + c_8 c_6^{-1} \left| \frac{\rho}{\mu} - \frac{J}{\delta} \right|^2 \int_0^L \int_0^T \phi_{tt}^2 dt dx,$$

denotando,

$$\begin{aligned} T_0 &= c_9 c_6^{-1} \\ C_1 &= \frac{T - c_9 c_6^{-1}}{c_7 c_6^{-1}}, \end{aligned}$$

se

$$\frac{\rho}{\mu} = \frac{J}{\delta},$$

tem-se,

$$C_1 E(0) \leq \int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx.$$

Para demonstrar a segunda desigualdade em (3.4), basta observar que

$$\int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx \leq \frac{2}{J} \int_0^T E(t)dt,$$

e da propriedade de conservação da energia

$$\int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx \leq \frac{2T}{J} E(0),$$

escrevendo  $C_2 = \frac{2T}{J}$ , tem-se

$$\int_0^L \int_0^T \phi_t^2 dt dx \leq C_2 E(0).$$

{cp2-teo4}

■

**Teorema 3.** Suponha que  $\frac{\rho}{\mu} = \frac{J}{\delta}$  e  $b^2 = \mu\xi$ . Então, existe uma constante positiva  $C$  e  $T_0 > 0$  tais que, para todo  $T > T_0$  e qualquer

$$(u^0, u^1, \phi^0, \phi^1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]',$$

tem-se

{cp2-eq35}

$$\|u^0\|_{L^2}^2 + \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \|\phi^0\|_{L^2}^2 + \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2 \leq C \int_0^L \int_0^T \phi^2 dt dx \quad (3.32)$$

onde  $(u, \phi)$  é solução por transposição da parte homogênea de (3.1)-(3.3).



**Demonstração.** Com efeito, para qualquer

$$(u^0, u^1, \phi^0, \phi^1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]'$$

seja  $(u, \phi)$  solução por transposição da parte homogênea de (3.1)-(3.3), então considere

$$\left( \bar{u}(x, t) = \int_0^t u(x, s) ds + v(x), \bar{\phi}(x, t) = \int_0^t \phi(x, s) ds + w(x) \right)$$

onde  $(v, w)$  é solução do Teorema 16 (Apêndice B) (para  $f = -\rho u^1$  e  $g = -J\phi^1$ ). Desta forma,  $(\bar{u}, \bar{\phi})$  é solução de (3.1)-(3.3) com dados iniciais  $(v, u^0, w, \phi^0)$ . Resulta então do Teorema 2 a existência de uma constante positiva  $c_1$  tal que

$$\{cp2-eq36\} \quad \|u^0\|_{L^2}^2 + \|\phi^0\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 \leq c_1 \int_0^L \int_0^T \bar{\phi}_t^2 dt dx. \quad (3.33)$$

Por outro lado, sabe-se que o Laplaciano  $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  é um isomorfismo de  $H_0^1(0, L)$  em  $H^{-1}(0, L)$  (MEDEIROS; MIRANDA, 2000, p. 38) e também uma aplicação linear contínua de  $H_*^1(0, L)$  em  $[H_*^1(0, L)]'$ , isto é,

$$\begin{aligned} \|-\tilde{v}_{xx}\|_{H^{-1}} &= \|\tilde{v}\|_{H_0^1} \text{ para todo } \tilde{v} \in H_0^1(0, L), \\ \|-\tilde{w}_{xx}\|_{[H_*^1]'} &\leq K\|\tilde{w}\|_{H_*^1} \text{ para todo } \tilde{w} \in H_*^1(0, L), \end{aligned}$$

para alguma constante positiva  $K$ . Deste modo

$$\|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 \geq \| -v_{xx} \|_{H^{-1}}^2 + \frac{1}{K} \| -w_{xx} \|_{[H_*^1]'}^2.$$

Utilizando o Teorema 16 (no sentido da regularidade das soluções) e as desigualdades triangular e de Young, obtém-se

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 &\geq \left\| \frac{b}{\mu} w_x - \frac{\rho}{\mu} u^1 \right\|_{H^{-1}}^2 + \frac{1}{K} \left\| \frac{b}{\delta} v_x - \frac{\mu}{\delta} w - \frac{J}{\delta} \phi^1 \right\|_{[H_*^1]'}^2 \\ &\geq \frac{\rho^2}{2\mu^2} \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \frac{J}{2\delta K} \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2 - \frac{b^2}{\mu^2} \|w_x\|_{H^{-1}}^2 - \frac{1}{\delta K} \|bv_x - \mu w\|_{[H_*^1]'}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} L^2(0, L) &\hookrightarrow H^{-1}(0, L), \\ L_*^2(0, L) &\hookrightarrow [H_*^1(0, L)]', \end{aligned}$$

é possível obter constantes positivas  $K_1$  e  $K_2$  de modo que

$$\|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 \geq \frac{\rho}{2\mu} \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \frac{J}{2\delta K} \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2 - \frac{K_1 b}{\mu} \|w_x\|_{L^2}^2 - \frac{K_2}{\delta K} \|bv_x - \mu w\|_{L^2}^2,$$

da desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 &\geq \frac{\rho}{2\mu} \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \frac{J}{2\delta K} \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2 - \frac{K_1 b}{\mu} \|w_x\|_{L^2}^2 - \frac{2K_2 b}{\delta K} \|v_x\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \frac{2K_2 \mu}{\delta K} \|w\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

e da desigualdade de Poincaré (com constante de Poincaré  $c_p > 0$ ), tem-se

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 &\geq \frac{\rho}{2\mu} \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \frac{J}{2\delta K} \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2 - \frac{K_1 b}{\mu} \|w_x\|_{L^2}^2 \\ &\quad - \frac{2K_2 b}{\delta K} \|v\|_{H_0^1}^2 - \frac{2K_2 \mu c_p}{\delta K} \|w_x\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 &\geq \frac{\rho}{2\mu} \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \frac{J}{2\delta K} \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2 - \frac{2K_2 b}{\delta K} \|v\|_{H_0^1}^2 \\ &\quad - \left( \frac{K_1 b}{\mu} + \frac{2K_2 \mu c_p}{\delta K} \right) \|w_x\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Como  $\|w_x\|_{L^2} = \|w\|_{H^1}$  e tomando

$$K_3 = \max \left\{ \frac{2K_2 b}{\delta K}, \frac{K_1 b}{\mu} + \frac{2K_2 \mu c_p}{\delta \mu} \right\},$$

tem-se,

$$(1 + K_3) (\|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2) \geq \frac{\rho}{2\mu} \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \frac{J}{2\delta K} \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2.$$

e se

$$K_4 = \min \left\{ \frac{\rho}{2\mu}, \frac{J}{2\delta K} \right\},$$

obtém-se

$$\|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2 \geq \frac{K_4}{1 + K_3} (\|u^1\|_{H^{-1}} + \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}),$$

e ao considerar

$$K_5 = \min \left\{ 1, \frac{K_4}{1 + K_3} \right\},$$

chega-se em

$$\{\text{cp2-eq37}\} \quad K_5 (\|u^0\|_{L^2}^2 + \|u^1\|_{H^{-1}}^2 + \|\phi^0\|_{L^2}^2 + \|\phi^1\|_{[H_*^1]'}^2) \leq \|u^0\|_{L^2}^2 + \|\phi^0\|_{L^2}^2 + \|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_*^1}^2, \quad (3.34)$$

além disso, temos

$$\int_0^L \int_0^T \bar{\phi}_t^2 dt dx = \int_0^L \int_0^T \phi^2 dt dx,$$

e da igualdade anterior, (3.34), (3.33) e tomando

$$C := \frac{c_1}{K_5},$$

conclui-se (3.32). ■

### 3.3 Controlabilidade Exata Interna

Considere agora o sistema elástico poroso com um controle  $w$  atuando na equação da fração de volume

$$\{\text{cp2-eq38}\} \quad \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (3.35)$$

$$\{\text{cp2-eq39}\} \quad J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = w \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (3.36)$$

$$\{\text{cp2-eq40}\} \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (3.37)$$

$$\{\text{cp2-eq41}\} \quad \phi_x(0, t) = 0, \quad \phi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (3.38)$$

$$\{\text{cp2-eq42}\} \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) \quad \text{em } ]0, L[, \quad (3.39)$$

$$\{\text{cp2-eq43}\} \quad \phi(x, 0) = \phi^0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi^1(x) \quad \text{em } ]0, L[. \quad (3.40)$$

**Definição 1. (Controlabilidade Exata Interna)** Diz-se que o sistema (3.35)-(3.40) é *Exatamente Controlável*, se existe  $T_0 > 0$  tal que para todo  $T > T_0$  e qualquer iniciais  $(u^0, u^1, \phi^0, \phi^1)$  e final  $(\tilde{u}^0, \tilde{u}^1, \tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1)$  é possível obter um controle  $w$  (em um determinado espaço) de modo que para a solução  $(u, u_t, \phi, \phi_t)$  de (3.35)-(3.40) tem-se,

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad \phi(x, 0) = \phi^0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi^1(x) \quad (3.41)$$

$$\{\text{cp2-eq44}\} \quad u(x, T) = \tilde{u}^0(x), \quad u_t(x, T) = \tilde{u}^1(x), \quad \phi(x, T) = \tilde{\phi}^0(x), \quad \phi_t(x, T) = \tilde{\phi}^1(x). \quad (3.42)$$

O sistema é exatamente controlável, se existir um tempo  $T_0$  de modo que a partir deste, para todo estado inicial  $(u^0, u^1, \phi^0, \phi^1)$  e final  $(\tilde{u}^0, \tilde{u}^1, \tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1)$  é possível obter um controle  $w$  o qual atuando neste sistema, gerará uma solução que conduzirá o sistema, do estado inicial ao estado final.

**Definição 2. (Controlabilidade Nula Interna)** Diz-se que o sistema (3.35)-(3.40) é *Nulo Controlável*, se existe  $T_0 > 0$  tal que para todo  $T > T_0$  e qualquer  $(u^0, u^1, \phi^0, \phi^1)$  é possível obter um controle  $w$  (em um determinado espaço) de modo que para a solução  $(u, u_t, \phi, \phi_t)$  de (3.35)-(3.40) tem-se

$$\{\text{cp2-eq45}\} \quad u(x, T) = u_t(x, T) = \phi(x, T) = \phi_t(x, T) = 0 \quad \text{em } [0, L]. \quad (3.43)$$

Observa-se que a controlabilidade exata implica em controlabilidade nula, porém, sendo o sistema (3.35)-(3.40) reversível no tempo, tem-se também que controlabilidade nula

implica em controlabilidade exata, ou seja, os dois conceitos são equivalentes para o sistema (3.35)-(3.40). Esta equivalência permitirá estabelecer, através do teorema seguinte, a controlabilidade exata para o sistema (3.35)-(3.40) demonstrando que este é nulo controlável.

**Teorema 4 (Controlabilidade Exata Interna).** Sejam  $\frac{\rho}{\mu} = \frac{J}{\delta}$  e  $b^2 = \xi\mu$ . Então, existe  $T_0 > 0$  tal que, para todo  $T > T_0$  e qualquer

$$U^0 = (u^0, u^1, \phi^0, \phi^1) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]',$$

existe um controle  $w \in L^2(0, T; L^2(0, L))$  de modo que a solução  $(u, u_t, \phi, \phi_t)$  de (3.35)-(3.40) verifica

$$u(x, T) = u_t(x, T) = \phi(x, T) = \phi_t(x, T) = 0 \quad \text{em } [0, L].$$

**Demonstração.** Para a prova deste teorema, será utilizado o método HUM (Hilbert Uniqueness Method) (LIONS, 1988). Com efeito, para qualquer

$$(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1) \in F = \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}(0, L) \times \mathcal{D}_*(0, L) \times \mathcal{D}_*(0, L),$$

onde

$$\mathcal{D}_*(0, L) = \left\{ \nu \in \mathcal{D}(0, L); \int_0^L \nu dx = 0 \right\},$$

resolve-se o seguinte sistema homogêneo

$$\{\text{cp2-eq46}\} \quad \rho v_{tt} - \mu v_{xx} - b\psi_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (3.44)$$

$$\{\text{cp2-eq47}\} \quad J\psi_{tt} - \delta\psi_{xx} + bv_x + \xi\psi = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (3.45)$$

$$\{\text{cp2-eq48}\} \quad v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (3.46)$$

$$\{\text{cp2-eq49}\} \quad \psi_x(0, t) = 0, \quad \psi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (3.47)$$

$$\{\text{cp2-eq50}\} \quad v(x, 0) = v^0(x), \quad v_t(x, 0) = v^1(x) \quad \text{em } ]0, L[, \quad (3.48)$$

$$\{\text{cp2-eq51}\} \quad \psi(x, 0) = \psi^0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi^1(x) \quad \text{em } ]0, L[, \quad (3.49)$$

obtendo assim uma única solução  $(v, \psi)$  com regularidade

$$(v, \psi) \in C(0, T; H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)) \cap C^1(0, T; L^2(0, L) \times L_*^2(0, L)),$$

e com esta solução, resolve-se o seguinte sistema

$$\{\text{cp2-eq52}\} \quad \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (3.50)$$

$$\{\text{cp2-eq53}\} \quad J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = -\psi \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (3.51)$$

$$\{\text{cp2-eq54}\} \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (3.52)$$

$$\{\text{cp2-eq55}\} \quad \phi_x(0, t) = 0, \quad \phi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (3.53)$$

$$\{\text{cp2-eq56}\} \quad u(x, T) = 0, \quad u_t(x, T) = 0 \quad \text{em } ]0, L[, \quad (3.54)$$

$$\{\text{cp2-eq57}\} \quad \phi(x, T) = 0, \quad \phi_t(x, T) = 0 \quad \text{em } ]0, L[, \quad (3.55)$$

cuja solução única  $(u, \phi)$  com regularidade

$$(u, \phi) \in C(0, T; L^2(0, L) \times L_*^2(0, L)) \cap C^1(0, T; H^{-1}(0, L) \times [H_*^1(0, L)]'),$$

é obtida pelo método da transposição. O processo acima permite definir uma aplicação

$$\{\text{cp2-eq58}\} \quad \Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1) = (u(0), u_t(0), \phi(0), \phi_t(0)), \quad (3.56)$$

e graças a linearidade do sistema elástico poroso, é possível provar que  $\Lambda$  é linear. Se  $(w^0, w^1, \phi^0, \phi^1) \in F$  então, multiplicando (3.50) por  $w$  e (3.51) por  $\phi$ , integrando em  $[0, L] \times [0, T]$  e somando as duas igualdades resultantes, onde  $(w, \phi)$  é solução de (3.44)-(3.49) com dados iniciais  $(w^0, w^1, \phi^0, \phi^1)$  chega-se em

$$\{\text{cp2-eq59}\} \quad \rho \langle u_t(0), w^0 \rangle_{-1,1} - \rho \int_0^L u(0)w^1 dx + J \langle \phi_t(0), \phi^0 \rangle_{-1_*,1_*} - J \int_0^L \phi(0)\phi^1 dx = \int_0^L \int_0^T \psi \phi dt dx. \quad (3.57)$$

Define-se em  $F$  a seguinte forma bilinear

$$\{\text{cp2-eq59}\} \quad \langle \Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1), (w^0, w^1, \phi^0, \phi^1) \rangle_F = \rho \langle u_t(0), w^0 \rangle_{-1,1} - \rho \int_0^L u(0)w^1 dx + J \langle \phi_t(0), \phi^0 \rangle_{-1_*,1_*} - J \int_0^L \phi(0)\phi^1 dx, \quad (3.58)$$

onde  $(w, \phi)$  é solução de um sistema do tipo (3.44)-(3.49). Observa-se que

$$\{\text{cp2-eq60}\} \quad \langle \Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1), (w^0, w^1, \phi^0, \phi^1) \rangle_F = \int_0^L \int_0^T \psi \phi dt dx, \quad (3.59)$$

e, em particular,

$$\{\text{cp2-eq61}\} \quad \langle \Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1), (v^0, v^1, \psi^0, \psi^1) \rangle_F = \int_0^L \int_0^T \psi^2 dt dx. \quad (3.60)$$

Assim, a forma quadrática

$$\{(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1)\|_F^2 = \int_0^L \int_0^T \psi^2 dt dx, \quad (3.61)$$

define uma seminorma em  $F$  e graças ao Teorema 3, ela também é uma norma neste espaço.

Note da desigualdade de Schwarz que

$$\langle \Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1), (w^0, w^1, \phi^0, \phi^1) \rangle_F \leq \|(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1)\|_F \|(w^0, w^1, \phi^0, \phi^1)\|_F, \quad (3.62)$$

estabelecendo assim a continuidade da forma bilinear definida por  $\Lambda$  em  $F$ . Seja  $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$  o completamento de  $F$  com respeito a norma  $\|\cdot\|_F$  definida em (3.61). A forma bilinear contínua

$$\{(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1), (w^0, w^1, \phi^0, \phi^1)\} \longrightarrow \langle \Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1), (w^0, w^1, \phi^0, \phi^1) \rangle_F, \quad (3.63)$$

possui uma única extensão contínua ao fecho de  $F$  e esta extensão será representada por  $\langle \Lambda(\cdot), \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ . Portanto, (3.62) ainda é válida em  $\mathcal{F}$ . Por outro lado, como (3.61) é válida em  $\mathcal{F}$ , obtém-se

$$\langle \Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1), (v^0, v^1, \psi^0, \psi^1) \rangle_{\mathcal{F}} = \int_0^L \int_0^T \psi^2 dt dx = \|(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1)\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (3.64)$$

ou seja, a forma bilinear (3.63) também é coerciva. Segue-se assim do Teorema de Lax-Milgram, que para todo  $(u^0, u^1, \phi^0, \phi^1) \in \mathcal{F}'$ , existe um único  $(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1) \in \mathcal{F}$  tal que

$$\Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1) = (u^0, u^1, \phi^0, \phi^1).$$

Note que  $\Lambda$  foi definida por  $\Lambda(v^0, v^1, \psi^0, \psi^1) = (u(0), u_t(0), \phi(0), \phi_t(0))$ , onde  $(u, u_t, \phi, \phi_t)$  é solução (única) de (3.50)-(3.55), portanto

$$u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1, \quad \phi(0) = \phi^0, \quad \phi_t(0) = \phi^1,$$

e

$$u(T) = 0, \quad u_t(T) = 0, \quad \phi(T) = 0, \quad \phi_t(T) = 0,$$

com controle  $w = -\psi$  obtida em (3.44)-(3.49). Além disso, de (3.32) e (3.64)

$$\mathcal{F} \subset L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]',$$

de (A.15) é possível mostrar uma desigualdade contrária a (3.32) o que implica em

$$L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]' \subset \mathcal{F},$$

portanto,

$$\mathcal{F}' = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L^2(0, L).$$

■

# 4 Propriedade de Crescimento Determinado Pelo Espectro

## 4.1 Propriedade de Crescimento Determinado Pelo Espectro

Neste capítulo será analisada a propriedade do crescimento determinado pelo espectro para o seguinte sistema elástico poroso

$$\begin{aligned} \text{\{cp3-eq1\}} \quad \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x &= 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[, \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\phi_t &= 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $J$ ,  $\delta$ ,  $\xi$  e  $\bar{a}$  são constantes positivas e  $b \neq 0$  uma constante tal que  $b^2 \leq \mu\xi$ . Somado a este sistema, estão as condições iniciais

$$\begin{aligned} \text{\{cp3-eq2\}} \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) &\quad \text{em } ]0, L[, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x) &\quad \text{em } ]0, L[, \end{aligned} \tag{4.2}$$

e de fronteira

$$\begin{aligned} \text{\{cp3-eq3\}} \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 &\quad \text{em } ]0, \infty[, \\ \phi_x(0, t) = 0, \quad \phi_x(L, t) = 0 &\quad \text{em } ]0, \infty[. \end{aligned} \tag{4.3}$$

As relações

$$\text{\{cp3-eq4\}} \quad \frac{\rho}{\mu} = \frac{J}{\delta} \tag{4.4}$$

e

$$\text{\{cp3-eq5\}} \quad b^2 = \mu\xi, \tag{4.5}$$

desempenham um papel importante neste capítulo.

A metodologia é baseada em (MUÑOZ RIVERA; RACKE, 2008b, seção 3).

Será representado por  $A$  o gerador infinitesimal do  $C_0$ -semigrupo obtido quando se reescreve o sistema (4.1)-(4.3) como um problema de Cauchy, cuja existência e unicidade de soluções já foram estudados no Capítulo 1.

**Definição 3.** Um operador linear  $T$  com  $\varrho(T) \neq \emptyset$  tem operador resolvente compacto, se para algum  $\zeta \in \varrho(T)$  o operador resolvente  $R(\zeta)$  é compacto.

A prova do Lema 3 a seguir, é baseada nos dois seguinte resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em (ENGEL; NAGEL, 1999, p. 117, proposição 4.25) e (KATO, 1976, p. 187, Teorema 6.29), respectivamente.

**Teorema 5.** Seja  $(T, D(T))$  um operador em  $X$  com  $\varrho(T) \neq \emptyset$  e considere  $X_1 := (D(T), \|\cdot\|_T)$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- a) O operador  $T$  tem resolvente compacto;
- b) A injeção canônica  $i : X_1 \hookrightarrow X$  é compacta.

**Teorema 6.** Seja  $T$  um operador fechado em um espaço de Banach  $X$  tal que o operador resolvente  $R(\zeta)$  existe e é compacto para algum  $\zeta$ . Então o espectro de  $T$  consiste apenas de autovalores isolados com multiplicidade finita, e  $R(\gamma)$  é compacto para todo  $\gamma \in \varrho(T)$ .

**Lema 3.** O espectro de  $A$  consiste apenas de autovalores isolados com multiplicidade finita, ou seja  $\sigma(A)$  não possui pontos de acumulação.

**Demonstração.** Deveras, da seção anterior, tem-se  $0 \in \varrho(A)$ . Uma vez que

$$W^{m,p}(0, L) \subset L^q(0, L)$$

compactamente, para  $1 < p \leq \infty$  e  $1 \leq q < \infty$  (BREZIS, 2010, p. 213) e

$$W^{m,p}(0, L) \subset W^{j,p}(0, L)$$

compactamente, para  $1 \leq j < m$  (BURENKOV, 1998, p. 135, Teorema 3). Portanto,  $D(A) \subset \mathcal{H}$  compactamente e assim, segue-se do Teorema 5 que  $A$  tem resolvente compacto, além disso  $D(A)$  é fechado, pois é gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo, o resultado segue-se do Teorema 6. ■

**Teorema 7.** Supondo (4.4) e (4.5), então

$$\sigma(A) = \left\{ \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{\mu\theta_j^2}{\rho}} \mid y = -\frac{\bar{a}}{2J} \pm \sqrt{\frac{\bar{a}^2}{4J^2} - \frac{\xi}{J}}, \theta_j = \frac{j\pi}{L}, j \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Demonstração.** O objetivo é estabelecer os  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tais que, existe  $\Psi \in D(A)$ , com  $\Psi \neq 0$  satisfazendo

$$(A - \lambda I)\Psi = 0. \tag{4.6}$$



Constata-se de (4.6), que  $\Psi = (u, \lambda u, \phi, \lambda \phi)'$  e  $(u, \phi)$  deve satisfazer

$$\{\text{cp3-eq7}\} \quad \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \text{ em } ]0, L[, \quad (4.7)$$

$$\{\text{cp3-eq8}\} \quad J\lambda^2 \phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\lambda\phi = 0 \text{ em } ]0, L[, \quad (4.8)$$

juntamente com as condições de fronteira

$$\{\text{cp3-eq9}\} \quad u(0) = u(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0. \quad (4.9)$$

De (4.8)

$$\{\text{cp3-eq10}\} \quad bu_x = \delta\phi_{xx} - (J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi, \quad (4.10)$$

e derivando (4.7)

$$\{\text{cp3-eq11}\} \quad \rho\lambda^2 u_x - \mu u_{xxx} - b\phi_{xx} = 0. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.10) em (4.11)

$$\{\text{cp3-eq12}\} \quad \rho\lambda^2 \left\{ \frac{\delta}{b}\phi_{xx} - \left( \frac{J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda}{b} \right)\phi \right\} - \mu \left\{ \frac{\delta}{b}\phi_{xxxx} - \left( \frac{J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda}{b} \right)\phi_{xx} \right\} - b\phi_{xx} = 0. \quad (4.12)$$

Multiplicando (4.12) por  $b$

$$\rho\lambda^2 \{ \delta\phi_{xx} - (J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi \} - \mu \{ \delta\phi_{xxxx} - (J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi_{xx} \} - b^2\phi_{xx} = 0,$$

assim

$$\{\text{cp3-eq13}\} \quad \rho\lambda^2 \delta\phi_{xx} - \rho\lambda^2 (J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi - \mu\delta\phi_{xxxx} + \mu(J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi_{xx} - b^2\phi_{xx} = 0. \quad (4.13)$$

Multiplicando (4.13) por  $-1$ ,

$$\{\text{cp3-eq14}\} \quad -\rho\lambda^2 \delta\phi_{xx} + \rho\lambda^2 (J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi + \mu\delta\phi_{xxxx} - \mu(J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi_{xx} + b^2\phi_{xx} = 0. \quad (4.14)$$

Rearranjando (4.14)

$$\{\text{cp3-eq15}\} \quad \mu\delta\phi_{xxxx} - \{ \rho\lambda^2 \delta + \mu(J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda) - b^2 \} \phi_{xx} + \rho\lambda^2 (J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda)\phi = 0. \quad (4.15)$$

De (4.7) e (4.9) tem-se  $u_{xx}(0) = u_{xx}(L) = 0$ , e derivando (4.10), encontra-se

$$\{\text{cp3-eq16}\} \quad \phi_x(0) = \phi_x(L) = \phi_{xxx}(0) = \phi_{xxx}(L) = 0. \quad (4.16)$$

Para (4.15)-(4.16), existe um sistema ortonormal completo de autofunções

$$\{\text{cp3-eq17}\} \quad \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\theta_j x) \quad \text{com} \quad \theta_j = j \frac{\pi}{L}. \quad (4.17)$$

Observe que

$$\{\text{cp3-eq18}\} \quad \phi_{jxx}(x) = -\theta_j^2 \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\theta_j x), \quad (4.18)$$

$$\{\text{cp3-eq19}\} \quad \phi_{jxxxx}(x) = \theta_j^4 \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\theta_j x). \quad (4.19)$$

Substituindo (4.17), (4.18) e (4.19) em (4.15), obtém-se

$$\begin{aligned} \mu\delta \left( \theta_j^4 \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\theta_j x) \right) + \{ \rho\lambda^2\delta + \mu(J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda) - b^2 \} \left( \theta_j^2 \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\theta_j x) \right) + \\ \rho\lambda^2(J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda) \left( \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\theta_j x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\rho J\lambda^4 + \rho\bar{a}\lambda^3 + [(\rho\delta + \mu J)\theta_j^2 + \rho\xi]\lambda^2 + \mu\bar{a}\theta_j^2\lambda + (\mu\xi - b^2)\theta_j^2 + \mu\delta\theta_j^4 = 0,$$

da relação (4.5), segue-se

$$\rho J\lambda^4 + \rho\bar{a}\lambda^3 + [(\rho\delta + \mu J)\theta_j^2 + \rho\xi]\lambda^2 + \mu\bar{a}\theta_j^2\lambda + \mu\delta\theta_j^4 = 0.$$

Dividindo a equação anterior por  $\rho J\lambda^2$ ,

$$\{\text{cp3-eq20}\} \quad \lambda^2 + \frac{\bar{a}}{J}\lambda + \left\{ \left( \frac{\rho\delta + \mu J}{\rho J} \right) \theta_j^2 + \frac{\xi}{J} \right\} + \frac{\mu\bar{a}}{\rho J} \theta_j^2 \frac{1}{\lambda} + \frac{\mu\delta}{\rho J} \theta_j^4 \frac{1}{\lambda^2} = 0. \quad (4.20)$$

Usando (4.4)

$$\left\{ \lambda^2 + 2\frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 + \frac{\mu^2}{\rho^2}\theta_j^4 \frac{1}{\lambda^2} \right\} + \frac{\bar{a}}{J} \left\{ \lambda + \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 \frac{1}{\lambda} \right\} + \frac{\xi}{J} = 0,$$

ou equivalentemente

$$\{\text{cp3-eq21}\} \quad \left\{ \lambda + \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 \frac{1}{\lambda} \right\}^2 + \frac{\bar{a}}{J} \left\{ \lambda + \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 \frac{1}{\lambda} \right\} + \frac{\xi}{J} = 0. \quad (4.21)$$

Considerando

$$\{\text{cp3-eq22}\} \quad y := \lambda + \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 \frac{1}{\lambda}, \quad (4.22)$$

de (4.21) e (4.22)

$$\{\text{cp3-eq23}\} \quad y^2 + \frac{\bar{a}}{J}y + \frac{\xi}{J} = 0. \quad (4.23)$$

As soluções de (4.23) são

$$\{\text{cp3-eq24}\} \quad y_{1,2} = \frac{-\bar{a} \pm \sqrt{\bar{a}^2 - 4J\xi}}{2J}. \quad (4.24)$$

Multiplicando (4.22) por  $\lambda$  chega-se em

$$\{\text{cp3-eq25}\} \quad \lambda^2 - y\lambda + \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 = 0, \quad (4.25)$$

cujas soluções são

$$\lambda = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2}.$$

Isto significa, que para cada  $j \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\{\text{cp3-eq26}\} \quad \lambda_j^1 = \frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2}, \quad (4.26)$$

$$\{\text{cp3-eq27}\} \quad \lambda_j^2 = \frac{y_1}{2} - \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2}, \quad (4.27)$$

$$\{\text{cp3-eq28}\} \quad \lambda_j^3 = \frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2}, \quad (4.28)$$

$$\{\text{cp3-eq29}\} \quad \lambda_j^4 = \frac{y_2}{2} - \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2}, \quad (4.29)$$

e uma vez que  $\theta_j \neq 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ , resulta

$$\{\text{cp3-eq30}\} \quad \lambda_j^r \neq 0 \quad \text{para todo } (j, r) \in \mathbb{N} \times \{1, 2, 3, 4\}. \quad (4.30)$$

Portanto, o conjunto

$$\{\text{cp3-eq31}\} \quad B := \left\{ \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2}; y = -\frac{\bar{a}}{2J} \pm \sqrt{\frac{\bar{a}}{4J^2} - \frac{\xi}{J}}, \theta_j = \frac{j\pi}{L}, j \in \mathbb{N} \right\}, \quad (4.31)$$

é candidato a espectro de  $A$ . Para  $\lambda_j \in B$ , uma possível autofunção  $\Psi$  tem a forma  $\Psi_j = c(u_j, \lambda_j u_j, \phi_j, \lambda_j \phi_j)'$ , onde  $c$  é uma constante e  $u_j$  é determinada por (4.7)-(4.9). Uma vez que já conhecemos  $\phi_j$ , segue-se de (4.10)

$$\{\text{cp3-eq32}\} \quad u_{xx} = \frac{\delta}{b}\phi_{xxx} - \left( \frac{J\lambda^2 + \xi + \bar{a}\lambda}{b} \right) \phi_x. \quad (4.32)$$

Substituindo (4.32) em (4.7)

$$\begin{aligned} \rho\lambda_j^2 u_j &= \mu \left\{ \frac{\delta}{b}\phi_{xxx} - \left( \frac{J\lambda_j + \xi + \bar{a}\lambda_j}{b} \right) \phi_x \right\} + b\phi_x \\ \{\text{cp3-eq33}\} \quad &= \frac{\mu\delta}{b}\phi_{xxx} - \left[ \frac{\mu(J\lambda_j^2 + \xi + \bar{a}\lambda_j) - b^2}{b} \right] \phi_x. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Trocando (4.17) em (4.33)

$$\begin{aligned} \rho\lambda_j^2 u_j &= \frac{\mu\delta}{b} \left\{ \theta_j^3 \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\theta_j x) \right\} + \left[ \frac{\mu(J\lambda_j^2 + \xi + \bar{a}\lambda_j) - b^2}{b} \right] \left\{ \theta_j \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\theta_j x) \right\} \\ &= \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2}{L}} \left[ \mu\delta\theta_j^3 + [\mu(J\lambda_j^2 + \xi + \bar{a}\lambda_j) - b^2]\theta_j \right] \text{sen}(\theta_j x), \end{aligned}$$

e dado que  $\lambda_j \neq 0$

$$u_j = \frac{1}{\rho b} \sqrt{\frac{2}{L}} \left[ \frac{\mu \delta \theta_j^3 + [\mu(J\lambda_j^2 + \xi + \bar{a}\lambda_j) - b^2]\theta_j}{\lambda_j^2} \right] \text{sen}(\theta_j x).$$

Portanto, (4.31) é o espectro de  $A$ .

{cp3-teo4}



**Teorema 8.** Considere (4.4) e (4.5), então

$$\omega_\sigma(A) = \sup\{\text{Re } \lambda; \lambda \in \sigma(A)\} < 0.$$

**Demonstração.** A prova consistirá em considerar dois casos:

**Caso I.**  $\bar{a}^2 \geq 4\xi J$ .

Isto implica

$$y_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad 0 > y_1 \geq y_2.$$

Observe que se

$$\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu}{\rho} \theta_1^2 < \frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu}{\rho} \theta_1^2 < 0,$$

então para todo  $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2} \pm \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu}{\rho} \theta_j^2} &= \frac{y_1}{2} \pm i \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \theta_j^2 - \frac{y_1^2}{4}}, \\ \frac{y_2}{2} \pm \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu}{\rho} \theta_j^2} &= \frac{y_2}{2} \pm i \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \theta_j^2 - \frac{y_2^2}{4}}, \end{aligned}$$

que acarreta

$$\begin{aligned} \max_{r=1,2,3,4} \text{Re } \lambda_j^r &= \text{Re} \left\{ \frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu \theta_j^2}{\rho}}; \frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu \theta_j^2}{\rho} < 0 \right\} \\ &= \frac{y_1}{2}, \end{aligned}$$

logo,

$$\max_{j \in \mathbb{N}} \max_{r=1,2,3,4} \text{Re } \lambda_j^r = \frac{-\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 - 4\xi J}}{4J} < 0.$$

Se

$$0 < \frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_1^2 < \frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_1^2,$$

notando que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu\theta_1^2}{\rho}}\right\} &\geq \operatorname{Re}\left\{\frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu\theta_j^2}{\rho}}\right\}, \\ \operatorname{Re}\left\{\frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu\theta_1^2}{\rho}}\right\} &\geq \operatorname{Re}\left\{\frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu\theta_1^2}{\rho}}\right\}, \end{aligned}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$  e uma vez que é possível mostrar

$$\frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu\theta_1^2}{\rho}} \geq \frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu\theta_1^2}{\rho}},$$

tem-se

$$\begin{aligned} \max_{j \in \mathbb{N}} \max_{r=1,2,3,4} \operatorname{Re} \lambda_j^r &= \operatorname{Re}\left\{\frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu\theta_1^2}{\rho}}\right\} \\ &= \frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu\theta_1^2}{\rho}} < 0. \end{aligned}$$

Se porém,

$$\frac{y_1^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_1^2 < 0 < \frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_1^2.$$

Pode-se ter

$$\max_{j \in \mathbb{N}} \max_{r=1,2,3,4} \operatorname{Re} \lambda_j^r = \frac{y_1}{2} < 0$$

ou

$$\max_{j \in \mathbb{N}} \max_{r=1,2,3,4} \operatorname{Re} \lambda_j^r = \frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - \frac{\mu}{\rho}\theta_1^2} < 0.$$

**Caso II.**  $\bar{a}^2 < 4\xi J$ .

Considere

$$y_{1,2} = \frac{-\bar{a} \pm i\sqrt{4\xi J - \bar{a}^2}}{2J} \equiv \eta_1 \pm i\eta_2,$$

ou seja,

$$\eta_1 := -\frac{\bar{a}}{2J} \quad \text{e} \quad \eta_2 := \pm \frac{\sqrt{4\xi J - \bar{a}^2}}{2J},$$

por conseguinte,

$$\operatorname{Re} y_1 = \operatorname{Re} y_2 = -\frac{\bar{a}}{2J}.$$

Representando

$$\gamma_j := \frac{\mu\theta_j^2}{\rho},$$

se

$$\sqrt{\frac{y_{1,2}^2}{4} - \gamma_j} = \alpha + i\zeta, \quad \alpha, \zeta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 0,$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \zeta^2 + i2\alpha\zeta &= \frac{y_{1,2}^2}{4} - \gamma_j = \left[ \frac{-\bar{a} \pm i\sqrt{4\xi J - \bar{a}^2}}{2J} \right]^2 / 4 - \gamma_j = \\ &= \frac{\bar{a}^2 - (4\xi J - \bar{a}^2) \pm i2\bar{a}\sqrt{4\xi J - \bar{a}^2}}{16J^2} - \gamma_j = \frac{\bar{a}^2 - (4\xi J - \bar{a}^2)}{16J^2} - \gamma_j \pm i\frac{2\bar{a}}{16J^2}\sqrt{4\xi J - \bar{a}^2}. \end{aligned}$$

Da igualdade anterior, resulta

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \zeta^2 &= \frac{\bar{a}^2/4J^2 - (4\xi J - \bar{a}^2)/4J^2}{4} - \gamma_j = \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{4} - \gamma_j, \\ 2\alpha\zeta &= \pm \frac{\eta_1\eta_2}{2}. \end{aligned}$$

Isto implica em

$$\alpha^2 - \left( \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{4} - \gamma_j \right) = \zeta^2,$$

e

$$\zeta^2 = \frac{\eta_1^2\eta_2^2}{16\alpha^2},$$

das igualdades acima pode-se concluir

$$\alpha^4 - \left( \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{4} - \gamma_j \right) \alpha^2 - \frac{\eta_1^2\eta_2^2}{16} = 0,$$

e assim,

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{4} - \gamma_j \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{4} - \gamma_j \right]^2 + \frac{\eta_1^2\eta_2^2}{16}}},$$

e uma vez que

$$\begin{aligned} \eta_1^2 - \eta_2^2 &= \frac{\bar{a}^2 - (4\xi J - \bar{a}^2)}{4J^2}, \\ \eta_1^2\eta_2^2 &= \frac{\bar{a}^2}{4J^2} \left( \frac{4\xi J - \bar{a}^2}{4J^2} \right), \end{aligned}$$

segue-se que para todo  $j \in \mathbb{N}$

$$\{\text{cp3-eq34}\} \quad \max_{r=1,2,3,4} \operatorname{Re} \lambda_j^r = -\frac{\bar{a}}{4J} + \sqrt{\frac{b_1 - \gamma_j}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 - \gamma_j}{2}\right)^2 + b_2}}, \quad (4.34)$$

onde

$$b_1 := \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{4}, \quad b_2 := \frac{\eta_1^2 \eta_2^2}{16}.$$

Levando em conta que

$$x \mapsto f(x) := \sqrt{\frac{b_1 - x}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 - x}{2}\right)^2 + b_2}},$$

para  $x \geq \gamma_1 = \mu\pi^2/\rho L^2$  atinge seu máximo em  $\gamma_1$ , note de (4.34)

$$\max_{j \in \mathbb{N}} \max_{r=1,2,3,4} \operatorname{Re} \lambda_j^r = -\frac{\bar{a}}{4J} + \sqrt{\underbrace{\frac{1}{2} \left( \left( \frac{\bar{a}}{4J} \right)^2 - \frac{4J\xi - \bar{a}^2}{16J^2} - \frac{\mu\pi^2}{\rho L^2} \right)}_{=:z} + \sqrt{z^2 + \frac{\bar{a}^2}{16J^2} \frac{(4J\xi - \bar{a}^2)}{16J^2}} < 0.$$

■

Deve-se voltar a atenção para a prova da PCDE. Para isto, é preciso investigar  $\|(\lambda I - A)^{-1}\|$  para  $\operatorname{Re} \lambda > \omega_\sigma := \omega_\sigma(A)$ . Para mostrar que o semigrupo gerado por  $A$  possui a PCDE, utilizaremos o seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em (MUÑOZ RIVERA, 2008, p. 121).

\{\text{cp3-teo5}\} **Teorema 9.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Então, um  $C_0$ -semigrupo  $e^{\mathcal{G}t}$  em  $H$  tem a PCDE se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existir  $M_\epsilon \geq 1$  tal que  $\|(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}\| \leq M_\epsilon$  para todo  $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_\sigma(\mathcal{G}) + \epsilon$ .

**Teorema 10.** Supondo (4.4) e (4.5). Então, a PCDE é verificada para o semigrupo gerado por  $A$ , isto é,  $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$ .

**Demonstração.** Seja  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_\sigma + \epsilon$ , para algum  $\epsilon > 0$  qualquer. A equação

$$\{\text{cp3-eq35}\} \quad \lambda W - AW = F \quad (4.35)$$

em termos de suas componentes torna-se

$$\{\text{cp3-eq36}\} \quad \lambda u - \varphi = f^1, \quad (4.36)$$

$$\{\text{cp3-eq37}\} \quad -\frac{\mu}{\rho} u_{xx} + \lambda \varphi - \frac{b}{\rho} \phi_x = f^2, \quad (4.37)$$

$$\{\text{cp3-eq38}\} \quad \lambda \phi - \psi = f^3, \quad (4.38)$$

$$\{\text{cp3-eq39}\} \quad -\frac{\delta}{J} \phi_{xx} + \frac{b}{J} u_x + \frac{\xi}{J} \phi + \left( \lambda + \frac{\bar{a}}{J} \right) \psi = f^4, \quad (4.39)$$

onde  $W = (u, \varphi, \phi, \psi)'$  e  $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)$ . De (4.36), (4.38) e visto que é necessário  $W \in D(A)$ , chega-se em

$$\{\text{cp3-eq40}\} \quad \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho(\lambda f^1 + f^2) =: F_1, \quad (4.40)$$

$$\{\text{cp3-eq41}\} \quad J\lambda^2 \phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \lambda\bar{a}\phi = J(\lambda f^3 + f^4) + \bar{a}f^3 =: F_2, \quad (4.41)$$

$$\{\text{cp3-eq42}\} \quad u(0) = u(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0. \quad (4.42)$$

As condições de fronteira (4.42) admitem as expansões

$$\{\text{cp3-eq43}\} \quad u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j v_j(x), \quad \phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j w_j(x), \quad (4.43)$$

onde

$$\{\text{cp3-eq44}\} \quad v_j(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \text{sen}(\theta_j x), \quad w_j(x) := \sqrt{\frac{2}{L}} \text{cos}(\theta_j x) \quad \theta_j := \frac{j\pi}{L}. \quad (4.44)$$

Então, de (4.40), (4.41), (4.43) e (4.44)

$$\begin{aligned} (\rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2)g_j + b\theta_j h_j &= F_{1,j}, \\ b\theta_j g_j + (J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \xi + \lambda\bar{a})h_j &= F_{2,j}, \end{aligned}$$

onde  $(F_{1,j})_j$  e  $(F_{2,j})_j$  denotam os coeficientes de Fourier de  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2 & b\theta_j \\ b\theta_j & (J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \xi + \lambda\bar{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_j \\ h_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,j} \\ F_{2,j} \end{bmatrix},$$

como

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2 & b\theta_j \\ b\theta_j & (J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \xi + \lambda\bar{a}) \end{array} \right| = (\rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2)(J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \lambda\bar{a} + \xi) - b^2\theta_j^2 \\ & = \rho J\lambda^4 + \rho\delta\lambda^2\theta_j^2 + \rho\lambda^3\bar{a} + \rho\xi\lambda^2 + \mu J\theta_j^2\lambda^2 + \mu\delta\theta_j^4 + \mu\lambda\bar{a}\theta_j^2 + \mu\xi\theta_j^2 - b^2\theta_j^2 \\ & = \rho J\lambda^4 + \rho\delta\lambda^2\theta_j^2 + \mu J\theta_j^2\lambda^2 + \rho\lambda^3\bar{a} + \rho\xi\lambda^2 + \mu\delta\theta_j^4 + \mu\lambda\bar{a}\theta_j^2 \\ & = \rho J\lambda^2 \left[ \left( \lambda^2 + \frac{\delta\mu}{\rho J}\theta_j^4 \frac{1}{\lambda^2} + \left( \frac{\rho\delta + \mu J}{\rho J} \right)\theta_j^2 + \frac{\xi}{J} \right) + \frac{\bar{a}}{J} \left( \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 \frac{1}{\lambda} + \lambda \right) \right], \end{aligned}$$

fazendo

$$y := \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 \frac{1}{\lambda} + \lambda,$$

tem-se

$$\left| \begin{array}{cc} \rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2 & b\theta_j \\ b\theta_j & (J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \xi + \lambda\bar{a}) \end{array} \right| = \rho J\lambda^2 \left[ y^2 + \frac{\bar{a}}{J}y + \frac{\xi}{J} \right].$$



Agora,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} F_{1,j} & b\theta_j \\ F_{2,j} & (J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \xi + \lambda\bar{a}) \end{vmatrix} &= F_{1,j}(J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \lambda\bar{a} + \xi) - bF_{2,j}\theta_j, \\ \begin{vmatrix} \rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2 & F_{1,j} \\ b\theta_j & F_{2,j} \end{vmatrix} &= F_{2,j}(\rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2) - bF_{1,j}\theta_j. \end{aligned}$$

À vista disso, tem-se

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{F_{1,j}(J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 + \lambda\bar{a} + \xi) - bF_{2,j}\theta_j}{\rho J\lambda^2(y^2 + \frac{\bar{a}}{j}y + \frac{\xi}{j})}, \\ h_j &= \frac{-bF_{1,j}\theta_j + F_{2,j}(\rho\lambda^2 + \mu\theta_j^2)}{\rho J\lambda^2(y^2 + \frac{\bar{a}}{j}y + \frac{\xi}{j})}. \end{aligned}$$

De (4.36) e (4.38)

$$\begin{aligned} \varphi = \lambda u - f^1 &\implies \|\varphi\|_{L^2} \leq \|\lambda u\|_{L^2} + \|f^1\|_{L^2}, \\ \psi = \lambda\phi - f^3 &\implies \|\psi\|_{L^2} \leq \|\lambda\phi\|_{L^2} + \|f^3\|_{L^2}, \end{aligned}$$

e que as normas em  $H_0^1(0, L)$  e  $H_*^1(0, L)$  são equivalentes a norma do gradiente em  $L^2(0, L)$  nesses espaços. Isto posto, o objetivo agora é estimar os termos

$$\int_0^L |u_x(x, t)|^2 dx, \quad \int_0^L |\lambda u(x, t)|^2 dx, \quad \int_0^L |\phi_x(x, t)|^2 dx, \quad \int_0^L |\lambda\phi(x, t)|^2 dx,$$

em relação à  $\|F\|_{\mathcal{H}}^2$ .

Reescrevendo  $g_j$ ,

$$\{cp3-eq45\} \quad g_j = \frac{F_{1,j}(J\lambda^2 + \delta\theta_j^2)}{\rho J\lambda^2(y^2 + \frac{\bar{a}}{j}y + \frac{\xi}{j})} + \frac{F_{1,j}(\bar{a}\lambda + \xi) - bF_{2,j}\theta_j}{\rho J\lambda^2(y^2 + \frac{\bar{a}}{j}y + \frac{\xi}{j})}, \quad (4.45)$$

será provado primeiramente uma limitação para

$$I := \frac{\theta_j^2 |J\lambda^2 + \delta\theta_j^2|^2}{|\rho J\lambda^2(y^2 + \frac{\bar{a}}{j}y + \frac{\xi}{j})|^2},$$

uniformemente em  $j$  e  $\lambda$ , para  $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_\sigma + \epsilon$ .

Uma vez que

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\delta}{J} \quad \text{e} \quad \lambda^2 + \frac{\mu}{\rho}\theta_j^2 = \lambda y,$$

resulta

$$J\lambda^2 + \delta\theta_j^2 = J\lambda y.$$

Assim,

$$I = \left| \frac{\theta_j^2 y^2}{\rho^2 \lambda^2 (y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})^2} \right|,$$

e de (4.22)

$$\frac{y}{\lambda} = \frac{\mu \theta_j^2}{\rho \lambda^2} + 1,$$

implicando em

$$\frac{\theta_j^2}{\rho \lambda^2} = \frac{y}{\mu \lambda} - \frac{1}{\mu},$$

sucedendo-se

$$\begin{aligned} I &= \left| \frac{y^3}{\rho \mu \lambda (y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})^2} - \frac{y^2}{\rho \mu (y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{y^3}{\rho \mu \lambda (y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})^2} \right| + \left| \frac{y^2}{\rho \mu (y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})^2} \right| \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, pode-se assumir que  $|\lambda| \geq 1$  (na verdade  $|\lambda| \geq \operatorname{Re} \lambda \geq \omega_\sigma + \epsilon$ ).

Existe  $R_0 > 0$  tal que para  $|y| \geq R_0$  tem-se

$$\left| \frac{y^3}{(y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})^2} \right| \leq 1.$$

Agora, no conjunto compacto  $\{y : |y| \leq R_0\}$  o polinômio quadrático em  $y$  no denominador não tem zero, uma vez que  $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_\sigma + \epsilon$ . Portanto, existe uma constante positiva  $c = c(\epsilon)$  tal que, para  $|y| \leq R_0$  tem-se

$$\left| \frac{y^2}{(y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})^2} \right| \leq c^2(\epsilon).$$

Assim, é possível estimar  $I_1$  e  $I_2$  uniformemente (independente de  $j$  e  $\lambda$ ), obtendo

$$\text{\{cp3-eq46\}} \quad I \leq c^2(\epsilon). \quad (4.46)$$

Agora, de (4.45)

$$\begin{aligned} \text{II} &= \frac{\theta_j^2 |\bar{a} \lambda + \xi|^2}{|\rho J \lambda^2 (y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})|^2} \\ &\leq 2 \left| \frac{\bar{a}}{\rho J} \right|^2 \left| \frac{\theta_j}{\lambda} \right|^2 \frac{1}{|y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j}|^2} + \frac{2 \theta_j^2 |\xi|^2}{|\rho J \lambda^2 (y^2 + \frac{\bar{a}}{j} y + \frac{\xi}{j})|^2}, \end{aligned}$$

uma vez que

$$\frac{\theta_j^2}{\rho \lambda^2} = \frac{y}{\mu \lambda} - \frac{1}{\mu},$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \text{II} &\leq \frac{2}{\rho\mu} \left| \frac{\bar{a}}{J} \right|^2 \left| \frac{y}{\lambda} \right| \frac{1}{|y^2 + \frac{\bar{a}}{J}y + \frac{\xi}{J}|^2} + \frac{2}{\rho\mu} \left| \frac{\bar{a}}{J} \right|^2 \frac{1}{|y^2 + \frac{\bar{a}}{J}y + \frac{\xi}{J}|^2} + \\ &\frac{2}{\rho\mu} \left| \frac{\xi}{J} \right|^2 \left| \frac{y}{\lambda} \right| \frac{1}{|y^2 + \frac{\bar{a}}{J}y + \frac{\xi}{J}|^2} + \frac{2}{\rho\mu} \left| \frac{\xi}{J} \right|^2 \frac{1}{|y^2 + \frac{\bar{a}}{J}y + \frac{\xi}{J}|^2} \\ \text{{cp3-eq47}} &\leq \text{const.} \end{aligned} \tag{4.47}$$

Finalmente

$$\text{III} : = \frac{\theta_j^2}{|\rho J \lambda^2 (y^2 + \frac{\bar{a}}{J}y + \frac{\xi}{J})|^2} \leq \frac{c}{|\lambda|}, \tag{4.48}$$

onde  $c$  denota uma constante positiva similar a  $c(\epsilon)$ . As estimativas (4.46)-(4.48) implicam

$$|\theta_j g_j|^2 \leq c^2(\epsilon)(|F_{1,j}|^2 + |F_{2,j}|^2), \tag{4.49}$$

observa-se que os termos  $F_1$  e  $F_2$  contém  $\lambda f^1$  e  $\lambda f^3$ , respectivamente. Agora, notando que

$$\lambda f_j^1 = \frac{\lambda}{\theta_j} \theta_j f_j^1 = \frac{\lambda}{\theta_j} (\theta_j f_j^1),$$

e o fato de que o termo  $|\lambda/\theta_j|$  não influi na obtenção de (4.49), prova-se que

$$\int_0^L |u_x(y)|^2 dy \leq c^2(\epsilon) \|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde  $c(\epsilon)$  depende no máximo de  $\epsilon$ , não de  $\lambda$  para  $\text{Re } \lambda \geq \omega_\sigma + \epsilon$ .

Uma vez que  $\lambda = \frac{\lambda}{\theta_j} \theta_j$ , consegue-se analogamente

$$\int_0^L |\lambda u(x)|^2 dx + \int_0^L |\phi_x(x)|^2 dx + \int_0^L |\lambda \phi(x)|^2 dx \leq c^2(\epsilon) \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim sendo, provou-se que existe  $c(\epsilon) > 0; \forall \lambda, \text{Re } \lambda \geq \omega_\sigma + \epsilon, \forall F \in \mathcal{H}$ :

$$\|(\lambda - A)^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq c(\epsilon) \|F\|_{\mathcal{H}}$$

## 5 Estabilidade Exponencial para Amortecimento Indefinido

Neste capítulo será investigado a questão da estabilidade exponencial para o seguinte sistema elástico poroso

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[, \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + a(x)\phi_t &= 0 & \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[, \end{aligned} \quad (5.1)$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{em } ]0, L[, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x) & \text{em } ]0, L[, \end{aligned} \quad (5.2)$$

e de fronteira

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 & \text{em } ]0, \infty[, \\ \phi_x(0, t) = 0, \quad \phi_x(L, t) = 0 & \text{em } ]0, \infty[. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A função  $a \in L^\infty(0, L)$  deve satisfazer as condições

$$\bar{a} := \frac{1}{L} \int_0^L a(x) dx > 0, \quad (5.4)$$

e

$$\|a - \bar{a}\|_{L^2} < \tau, \quad (5.5)$$

para  $\tau > 0$  suficientemente pequeno (a ser estabelecido posteriormente).

A existência e unicidade de solução para o sistema (5.1)-(5.3) já foi determinada através de método de perturbação para semigrupos no [capítulo 1](#). Neste capítulo, assim como no capítulo 1, o gerador infinitesimal do  $C_0$ -semigrupo obtido do sistema (5.1)-(5.3) será representado por  $\mathcal{A}$ .

A estabilidade exponencial no cenário em que  $a = a(x)$  é constante positiva, estudada no capítulo 3, exercerá um papel chave neste capítulo e por isso, novamente será considerada as relações

$$\frac{\rho}{\mu} = \frac{J}{\delta} \text{ e } b^2 = \mu\xi. \quad (5.6)$$

Para se atingir o principal resultado deste capítulo, utilizaremos o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em (PRÜSS, 1984, Corolário 4).

**Teorema 11.** Seja  $S(t) = e^{\mathcal{G}t}$  um  $C_0$ -semigrupo em um espaço de Hilbert. Então,  $S(t)$  é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\varrho(\mathcal{G}) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \lambda \geq 0\},$$

e existe  $M \geq 1$  tal que,

$$\|(\lambda I - \mathcal{G})^{-1}\| \leq M \quad \text{para todo } \operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

**Teorema 12.** Considere (5.4), (5.5) e (5.6). Então, para  $\tau > 0$  suficientemente pequeno, o semigrupo associado ao sistema (5.1)-(5.3) é exponencialmente estável.

**Demonstração.** A prova consiste no uso de um argumento de ponto fixo e será dividida em três etapas:

1ª **Etapa:** *Concepção do operador  $T$ .*

É imediato, em vista do capítulo anterior que para o caso  $A = A_{\bar{a}}$ , quando  $a = a(x)$  é constante e igual a  $\bar{a}$ , operador resolvente verifica

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq c, \quad \forall \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

para alguma constante  $c > 0$ . Agora, considera-se  $F \in \mathcal{H}$ , então, deve-se resolver

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = F,$$

que é equivalente a determinar

$$(\lambda I - A)U = F + (\mathcal{A} - A)U = F - (a - \bar{a})BU, \tag{5.7}$$

com

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}.$$

Portanto, se  $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)'$  e  $U = (u, \varphi, \phi, \psi)'$ , então reescrevendo (5.7) como

$$\{\text{cp4-eq8}\} \quad \lambda u - \varphi = f^1, \quad (5.8)$$

$$\{\text{cp4-eq9}\} \quad \rho\lambda\varphi - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho f^2, \quad (5.9)$$

$$\{\text{cp4-eq10}\} \quad \lambda\phi - \psi = f^3, \quad (5.10)$$

$$\{\text{cp4-eq11}\} \quad J\lambda\psi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\psi = Jf^4 - (a - \bar{a})\psi. \quad (5.11)$$

Substituindo  $\varphi$  e  $\psi$  dadas por (5.8) e (5.10) em (5.9) e (5.11), respectivamente, e usando a condição de fronteira de Dirichlet-Neumann, chega-se em

$$\{\text{cp4-eq12}\} \quad \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\phi_x = F_1, \quad (5.12)$$

$$\{\text{cp4-eq13}\} \quad J\lambda^2\phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\lambda\phi = (\bar{a} - a)\lambda\phi + F_2, \quad (5.13)$$

$$\{\text{cp4-eq14}\} \quad u(0) = u(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0, \quad (5.14)$$

onde

$$F_1 = \rho f^2 + \rho\lambda f^1,$$

e

$$F_2 = Jf^4 + J\lambda f^3 + af^3.$$

Agora, a equação (5.13), pode ser reescrita como

$$\{\text{cp4-eq15}\} \quad \phi_{xx} - \underbrace{\left( \frac{J\lambda^2 + \bar{a}\lambda + \xi}{\delta} \right)}_{=: \beta^2} \phi = \frac{b}{\delta} u_x + \frac{a - \bar{a}}{\delta} \lambda\phi - \frac{1}{\delta} F_2. \quad (5.15)$$

Considere o operador  $\mathcal{N}_\beta$  tal que  $\mathcal{N}_\beta(h)$  denota a solução  $\Phi$  do problema de Neumann

$$\{\text{cp4-eq16}\} \quad \begin{aligned} \Phi_{xx} - \beta^2\Phi &= h, \\ \Phi_x(0) = \Phi_x(L) &= 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

isto é,

$$\Phi = \mathcal{N}_\beta(h).$$

É importante notar que este problema está bem definido se  $\beta^2 \neq -\frac{j^2\pi^2}{L^2}$ , para  $j = 1, 2, \dots$ , que é garantido se

$$\{\text{cp4-eq17}\} \quad \text{Re } \lambda > -\text{Re} \frac{-\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 - 4J\xi}}{2J} =: z_0. \quad (5.17)$$

A condição suficiente (5.17) vem de

$$b^2 = -\frac{j^2\pi^2}{L^2} \iff \lambda = \frac{-\bar{a} \pm \sqrt{\bar{a}^2 - 4J(\xi + \frac{j^2\pi^2}{L^2})}}{2J}.$$

Como consequência, (5.15) pode ser escrita como

$$\{\text{cp4-eq18}\} \quad \phi = \mathcal{N}_\beta \left( \frac{b}{\delta} u_x + \frac{a - \bar{a}}{\delta} \lambda \phi - \frac{1}{\delta} F_2 \right), \quad (5.18)$$

onde

$$\{\text{cp4-eq19}\} \quad \mathcal{N}_\beta(h)(x) = -\frac{1}{b} \frac{\cosh(bx)}{\sinh(bL)} \int_0^L \cosh(b(L-s))h(s)ds + \frac{1}{b} \int_0^x \sinh(b(x-s))h(s)ds. \quad (5.19)$$

Substituindo (5.18) em (5.13), chega-se em

$$\{\text{cp4-eq20}\} \quad J\lambda^2\phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\lambda\phi = (\bar{a} - a)\lambda H(u, \phi) + F_2, \quad (5.20)$$

onde  $H$  é dada por

$$H(w, v) = \frac{b}{\delta} \mathcal{N}_\beta(w_x) + \frac{\lambda}{\delta} \mathcal{N}_\beta((a - \bar{a})v) - \frac{1}{\delta} \mathcal{N}_\beta(F_2).$$

Conceba agora o operador

$$T : H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \longrightarrow H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L), \\ (w, v) \longmapsto (u, \phi),$$

onde  $(u, \phi)$  é solução de

$$\{\text{cp4-eq21}\} \quad \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\phi_x = F_1, \quad (5.21)$$

$$\{\text{cp4-eq22}\} \quad J\lambda^2\phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\lambda\phi = (\bar{a} - a)\lambda H(w, v) + F_2, \quad (5.22)$$

$$\{\text{cp4-eq23}\} \quad u(0) = u(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0, \quad (5.23)$$

que esta bem definido, uma vez que  $\lambda \in \varrho(A)$ .

Considere a norma definida no domínio do operador  $T$ , dada por

$$\|(w, v)\|_\lambda^2 := \int_0^L (\rho|\lambda w|^2 + J|\lambda v|^2 + \mu|w_x|^2 + \delta|v_x|^2 + b(\bar{w}_x v + w_x \bar{v}) + \xi|v|^2) dx.$$

O passo seguinte, é provar que o operador  $T$  possui um ponto fixo  $(u, \phi)$  que resolve o sistema (5.12)-(5.14).

**2ª Etapa:** Para  $\tau > 0$  suficientemente pequeno,  $T$  é uma contração.

Sejam  $(w^j, \phi^j) = T(w^j, v^j)$  para  $j = 1, 2$ ;  $(u, \phi) = (u^1 - u^2, \phi^1 - \phi^2)$  e  $(w, v) = (w^1 - w^2, v^1 - v^2)$ . Definidos dessa maneira,  $(u, \phi)$  e  $(w, v)$  satisfazem (5.21)-(5.23) para  $F_1 = F_2 = 0$ , isto é,

$$\{\text{cp4-eq24}\} \quad \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0, \quad (5.24)$$

$$\{\text{cp4-eq25}\} \quad J\lambda^2 \phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\lambda\phi = (\bar{a} - a)\lambda H(w, v), \quad (5.25)$$

$$\{\text{cp4-eq26}\} \quad u(0) = u(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0. \quad (5.26)$$

Multiplicando as equações (5.24), (5.25) por  $\bar{\lambda}u$  e  $\bar{\lambda}\phi$ , respectivamente, e integrando, obtém-se

$$\{\text{cp4-eq27}\} \quad \lambda\rho \int_0^L |\lambda u|^2 dx + \bar{\lambda}\mu \int_0^L |u_x|^2 dx + \bar{\lambda}b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx = 0, \quad (5.27)$$

$$\{\text{cp4-eq28}\} \quad \lambda J \int_0^L |\lambda\phi|^2 dx + \bar{\lambda}\delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \bar{\lambda}b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \bar{\lambda}\xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \bar{a} \int_0^L |\lambda\phi|^2 dx = \lambda \int_0^L (\bar{a} - a) H \bar{\lambda}\bar{\phi} dx. \quad (5.28)$$

Somando (5.27) e (5.28) chega-se em

$$\{\text{cp4-eq29}\} \quad \text{Re } \lambda \|(u, \phi)\|_{\bar{\lambda}}^2 + \bar{a} \int_0^L |\lambda\phi|^2 dx = \text{Re} \left\{ \lambda \int_0^L (\bar{a} - a) H \bar{\lambda}\bar{\phi} dx \right\}. \quad (5.29)$$

Multiplicando a equação (5.25) por  $\bar{u}_x$  e integrando, alcança-se a igualdade

$$\{\text{cp4-eq30}\} \quad J\lambda^2 \int_0^L \phi \bar{u}_x dx + \delta \int_0^L \phi_x \bar{u}_{xx} dx + b \int_0^L |u_x|^2 dx + \xi \int_0^L \phi \bar{u}_x dx + \bar{a}\lambda \int_0^L \phi \bar{u}_x dx = \lambda \int_0^L (\bar{a} - a) H \bar{u}_x dx. \quad (5.30)$$

Devido a (5.24) pode-se considerar

$$\bar{u}_{xx} = \frac{\rho}{\mu} \bar{\lambda}^2 \bar{u} - \frac{b}{\mu} \bar{\phi}_x,$$

e da primeira igualdade em (5.6), tem-se

$$\{\text{cp4-eq31}\} \quad \bar{u}_{xx} = \frac{J}{\delta} \bar{\lambda}^2 \bar{u} - \frac{b}{\mu} \bar{\phi}_x. \quad (5.31)$$

Substituindo (5.31) em (5.30), chega-se em

$$b \int_0^L |u_x|^2 dx + J\lambda^2 \int_0^L \phi \bar{u}_x dx + J\bar{\lambda}^2 \int_0^L \phi_x \bar{u} dx - \frac{\delta b}{\mu} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \xi \int_0^L \phi \bar{u}_x dx + \bar{a}\lambda \int_0^L \phi \bar{u}_x dx = \lambda \int_0^L (\bar{a} - a) H \bar{u}_x dx,$$



da igualdade acima, tem-se

$$\begin{aligned}
 b \int_0^L |u_x|^2 dx + J(\lambda^2 - \bar{\lambda}^2) \int_0^L \phi \bar{u}_x dx - \frac{\delta b}{\mu} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + \xi \int_0^L \phi \bar{u}_x dx + \\
 \bar{a} \lambda \int_0^L \phi \bar{u}_x dx = \lambda \int_0^L (\bar{a} - a) H \bar{u}_x dx.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Então, utilizando a desigualdade de Young, notando que  $|\lambda^2 - \bar{\lambda}^2| \leq |\lambda|$  e

$$\left| \lambda \int_0^L (a - \bar{a}) H \bar{\lambda} \bar{\phi} dx \right| \geq 0,$$

pode-se concluir de (5.32)

$$\begin{aligned}
 \frac{|b|}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx \leq c \left( \int_0^L |\lambda \phi|^2 dx + \left| \lambda \int_0^L (a - \bar{a}) H \bar{u}_x dx \right| + \left| \lambda \int_0^L (a - \bar{a}) H \bar{\lambda} \bar{\phi} dx \right| \right) + \\
 \frac{\delta |b|}{\mu} \int_0^L |\phi_x|^2 dx,
 \end{aligned}$$

onde  $c$  é uma constante que depende apenas dos coeficientes (e não de  $\lambda$ ). Multiplicando a desigualdade anterior por  $\frac{\mu}{2|b|}$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\mu}{4} \int_0^L |u_x|^2 dx \leq c \left( \int_0^L |\lambda \phi|^2 dx + \left| \lambda \int_0^L (a - \bar{a}) H \bar{u}_x dx \right| + \left| \lambda \int_0^L (a - \bar{a}) H \bar{\lambda} \bar{\phi} dx \right| \right) + \\
 \frac{\delta}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Multiplicando (5.25) por  $\bar{\phi}$  e integrando por partes, chega-se em

$$\begin{aligned}
 J\lambda^2 \int_0^L |\phi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \\
 \bar{a} \lambda \int_0^L |\phi|^2 dx = \int_0^L (\bar{a} - a) \lambda H \bar{\phi} dx,
 \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
 J\lambda^2 \int_0^L |\phi|^2 dx + \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx + \\
 \bar{a} \lambda \int_0^L |\phi|^2 dx = b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx + \int_0^L (\bar{a} - a) \lambda H \bar{\phi} dx.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Não é difícil mostrar que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$  (análogo ao procedimento realizado para mostrar que  $0 \in \rho(A)$  no capítulo 1), e uma vez que a aplicação  $\lambda \mapsto R(\lambda)$  é analítica (em cada componente conexa de  $\rho(\mathcal{A})$ , (MUÑOZ RIVERA, 2008, p. 169) e (VRABIE, 2003, p. 25, Teorema 1.7.2)), consequentemente

$$\exists z_1 > 0, \exists c_1 > 0, \forall \lambda, |\lambda| \leq z_1 : \lambda \in \rho(\mathcal{A}) \text{ com } \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq c_1,$$

isto é, deve-se assumir na sequência, sem perda de generalidade  $|\lambda| \geq z_1$ . Então,

$$\{\text{cp4-eq35}\} \quad \int_0^L |\phi|^2 dx \leq \frac{1}{z_1^2} \int_0^L |\lambda\phi|^2 dx. \quad (5.35)$$

Combinando (5.34) e (5.35), é possível obter

$$\{\text{cp4-eq36}\} \quad \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \leq \frac{\mu}{8} \int_0^L |u_x|^2 dx + c \left( |\lambda| \int_0^L |a - \bar{a}| |H\phi| dx + \int_0^L |\lambda\phi|^2 dx \right), \quad (5.36)$$

somando as desigualdades (5.33) e (5.36), chega-se em

$$\{\text{cp4-eq37}\} \quad \begin{aligned} & \frac{\mu}{8} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\phi_x|^2 dx + b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx + b \int_0^L u_x \bar{\phi} dx + \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ & \leq c \left( \int_0^L |\lambda\phi|^2 dx + |\lambda| \int_0^L |a - \bar{a}| |H\phi| dx + |\lambda| \int_0^L |a - \bar{a}| |Hu_x| dx + \right. \\ & \quad \left. |\lambda|^2 \int_0^L |a - \bar{a}| |H\phi| dx \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Multiplicando (5.24) por  $\frac{\bar{\lambda}u}{\lambda}$  e integrando, estabelece-se

$$\rho \int_0^L |\lambda u|^2 dx + \frac{\bar{\lambda}\mu}{\lambda} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} b \int_0^L \bar{u}_x \phi dx = 0,$$

da igualdade acima segue-se

$$\rho \int_0^L |\lambda u|^2 dx \leq \mu \int_0^L |u_x|^2 dx + |b| \int_0^L |u_x \phi| dx,$$

aplicando a desigualdade de Young

$$\rho \int_0^L |\lambda u|^2 dx \leq c \left( \int_0^L |u_x|^2 dx + \int_0^L |\phi|^2 dx \right).$$

Desta última desigualdade e de (5.35), tem-se

$$\{\text{cp4-eq38}\} \quad \rho \int_0^L |\lambda u|^2 dx \leq c \left( \int_0^L |\lambda\phi|^2 dx + \int_0^L |u_x|^2 dx \right), \quad (5.38)$$

e combinando (5.29), (5.37) e (5.38), é possível obter uma constante positiva  $\gamma_0$  tal que

$$\{\text{cp4-eq39}\} \quad (\text{Re } \lambda + \gamma_0) \|(u, \phi)\|_\lambda^2 \leq c \left( (|\lambda| + |\lambda|^2) \int_0^L |a - \bar{a}| |H\phi| dx + |\lambda| \int_0^L |a - \bar{a}| |Hu_x| dx \right). \quad (5.39)$$

Considere agora, o lado direito da desigualdade anterior

$$\text{I} := c \left( (|\lambda| + |\lambda|^2) \int_0^L |a - \bar{a}| |H\phi| dx + |\lambda| \int_0^L |a - \bar{a}| |Hu_x| dx \right).$$

Deverá ser mostrado

$$\{\text{cp4-eq40}\} \quad \text{I} \leq c \|(a - \bar{a})\|_{L^2} \|(u, \phi)\|_\lambda \|(w, v)\|_\lambda. \quad (5.40)$$

Para iniciar, note que é factível decompor  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  e  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  em suas partes reais e imaginárias, respectivamente, de modo que (procedimento análogo ao realizado em (MUÑOZ RIVERA; RACKE, 2008a, lema 2.3) e (GARAY, 2009, capítulo 5, lema 5.1))

$$\exists \alpha > 0, \forall \lambda, \operatorname{Re} \lambda \in [d_0, d_1] : |\beta_1| \geq \alpha, \beta_2 = \mathcal{O}(|\lambda_2|), (|\lambda_2| \rightarrow \infty).$$

Além disso, de (5.25) tem-se

$$H(w, v) = \frac{b}{\delta} \mathcal{N}_\beta(w_x) + \frac{\lambda}{\delta} \mathcal{N}_\beta((a - \bar{a})v),$$

e levando em conta (5.19) é possível concluir

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}_\beta(w_x)(s)| &\leq c \|w_x\|_{L^2}, \\ |\lambda|^2 |\mathcal{N}_\beta((a - \bar{a})v)(s)| &\leq c \|a - \bar{a}\|_{L^2} \|\lambda v\|_{L^2}, \end{aligned}$$

que acarreta

$$|\lambda H(w, v)(s)| \leq c \|(w, v)\|_\lambda,$$

e segue-se assim (5.40).

Agora, combinando as desigualdades (5.39) e (5.40) chega-se em

$$\begin{aligned} \|(u, \phi)\|_\lambda &\leq c \|a - \bar{a}\|_{L^2} \|(w, v)\|_\lambda \\ &\leq d \|(w, v)\|_\lambda, \end{aligned} \tag{5.41}$$

{cp4-eq41}

para  $\operatorname{Re} \lambda > \gamma_0$  e para algum  $d < 1$ , desde que  $\|a - \bar{a}\|_{L^2}$  seja pequeno o suficiente. Este raciocínio, culmina com a existência de um único ponto fixo  $(u, \phi)$  de  $T$ .

**3ª Etapa:** O ponto fixo de  $T$  é também solução de (5.12)-(5.14).

Seja,  $(u, \phi)$  este ponto fixo e considere

$$\tilde{\phi} := H(u, \phi) = \frac{b}{\delta} \mathcal{N}_\beta(u_x) + \frac{\lambda}{\delta} \mathcal{N}_\beta((a - \bar{a})\phi) - \frac{1}{\delta} \mathcal{N}_\beta(F_2),$$

da definição de  $\mathcal{N}_\beta$ , resulta

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{xx} - \beta^2 \tilde{\phi} &= \frac{b}{\delta} u_x + \frac{\lambda}{\delta} (a - \bar{a})\phi - \frac{1}{\delta} F_2, \\ \tilde{\phi}_x(0) = \tilde{\phi}_x(L) &= 0, \end{aligned}$$

acarretando

$$J\lambda^2 \tilde{\phi} - \delta \tilde{\phi}_{xx} + bu_x + \xi \tilde{\phi} + \bar{a}\lambda \tilde{\phi} = \lambda(\bar{a} - a)\phi + F_2. \tag{5.42}$$

{cp4-eq42}

Em outra mão, de (5.22) é verdade que

$$\{cp4-eq43\} \quad J\lambda^2\phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \bar{a}\lambda\phi = \lambda(\bar{a} - a)\tilde{\phi} + F_2. \quad (5.43)$$

Escrevendo  $\theta := \tilde{\phi} - \phi$ , chega-se em

$$\theta_{xx} - \beta^2\theta = \frac{\lambda(a - \bar{a})}{\delta}\theta,$$

ou

$$\theta = \mathcal{N}_\beta\left(\frac{\lambda(a - \bar{a})}{\delta}\theta\right),$$

das estimativas obtidas anteriormente para  $\mathcal{N}_\beta$ , obtém-se

$$|\theta| \leq c_1\|(a - \bar{a})\theta\|_{L^1} \leq c_2\|(a - \bar{a})\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2},$$

assim

$$\|\theta\|_{L^2} \leq c_2\|(a - \bar{a})\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2},$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes positivas. Em concordância com o raciocínio prévio, se  $\|a - \bar{a}\| < 1/c_2$ , então  $\theta = 0$ .

Resta agora, mostrar que o operador resolvente  $(\lambda - \mathcal{A})^{-1}$  é limitado. Com efeito, do raciocínio anterior, resulta na solução única para

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = F,$$

que é equivalente à

$$U = (u, \lambda u, \phi, \lambda\phi)' + (0, -f^1, 0, -f^3)',$$

que implica

$$\{cp4-eq44\} \quad \|(u, \phi)\|_\lambda = \|(u, \lambda u, \phi, \lambda\phi)\|_{\mathcal{H}} = \|U - (0, -f^1, 0, -f^3)\|_{\mathcal{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.44)$$

Em outra mão, seja  $\tilde{U}$  solução de

$$(\lambda I - A)\tilde{U} = F,$$

com

$$(\tilde{u}, \tilde{\phi}) = T(0, 0),$$

isto é,

$$\tilde{U} = (\tilde{u}, \lambda\tilde{u}, \tilde{\phi}, \lambda\tilde{\phi})' + (0, -f^1, 0, -f^3)'$$

Então, usando (5.41) e (5.44)

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}} - \|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}} &\leq \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}} = \|(u, \phi) - (\tilde{u}, \tilde{\phi})\|_{\lambda} = \|T(u, \phi) - T(0, 0)\|_{\lambda} \\ &\leq d\|(u, \phi)\|_{\lambda} \leq d\|U\|_{\mathcal{H}} + d\|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

assim

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{1-d}\|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{d}{1-d}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Uma vez que  $\lambda \in \varrho(A)$ , então

$$\|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}} \leq c\|F\|_{\mathcal{H}},$$

e conseqüentemente, existe uma constante positiva  $M$  tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M\|F\|_{\mathcal{H}},$$

e a demonstração está completa. ■

## 6 Propriedades Dispersivas

Neste capítulo será realizada a análise de dispersão para o sistema poro-elástico unidimensional

$$\{5:1\} \quad \rho_0 u_{tt} - \mu u_{xx} - \beta \varphi_x = 0, \quad (6.1)$$

$$\{5:2\} \quad \rho_0 \kappa \varphi_{tt} - \alpha \varphi_{xx} + \beta u_x + \xi \varphi + \tau \varphi_t = 0. \quad (6.2)$$

Na primeira seção será considerado o caso sem amortecimento, isto é,  $\tau = 0$  e na segunda seção será analisado o caso com amortecimento ( $\tau > 0$ ).

### 6.1 Ramo Não-Físico do Sistema Elástico Poroso Clássico (Sem Amortecimento)

Para obter as propriedades de dispersão das equações (6.1)-(6.2) será considerado as soluções harmônicas simples de equações da onda

$$\{5:3\} \quad u(x, t) = A_1 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad \varphi(x, t) = A_2 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad (6.3)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária,  $\gamma$  é o número de onda,  $\omega$  é a frequência e  $A_1$  e  $A_2$  são as amplitudes associadas as funções  $u$  e  $\varphi$ , respectivamente. Assim, substituindo (6.3) nas equações do sistema poro-elástico (6.1)-(6.2) obtém-se

$$\begin{aligned} -\rho_0 A_1 \omega^2 + \mu A_1 \gamma^2 - i\beta A_2 \gamma &= 0, \\ -\rho_0 \kappa A_2 \omega^2 + \alpha A_2 \gamma^2 + i\beta A_1 \gamma + \xi A_2 &= 0, \end{aligned}$$

e para soluções não nulas, obtém-se a equação de frequência dada por

$$\{5:4\} \quad \omega^4 - \frac{1}{\rho_0} \left[ \left( \frac{\alpha}{\kappa + \mu} \right) \gamma^2 + \frac{\xi}{\kappa} \right] \omega^2 + \frac{1}{\rho_0^2 \kappa} (\xi \mu - \beta^2) \gamma^2 + \frac{\alpha \mu}{\rho_0^2 \kappa} \gamma^4 = 0, \quad (6.4)$$

daí obtém-se, após simplificações no determinante, quatro raízes dadas por

$$\{5:5\} \quad \omega(\gamma) = \pm \sqrt{\frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) \gamma^2 + \frac{\xi}{2\rho_0 \kappa} \pm \frac{1}{2\rho_0} \sqrt{\left( \frac{\alpha}{\kappa} - \mu \right)^2 \gamma^4 + \frac{2}{\kappa} \left[ \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) \xi - 2(\xi \mu - \beta^2) \right] \gamma^2 + \rho_0^2 \frac{\xi^2}{\kappa^2}}}. \quad (6.5)$$

De acordo com (GRAFF, 1991) para obter a velocidade de fase usa-se a identidade que relaciona a frequência  $\omega$  com o número de onda  $\gamma$ , i.e.  $\omega = c\gamma$ . Assim, substituindo esta relação em (6.5), obtém-se a assim chamada velocidade de fase da teoria elástico porosa dada por

$$\{5:6\} \quad c(\gamma) = \pm \sqrt{\frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) + \frac{\xi}{2\rho_0\kappa} \frac{1}{\gamma^2} \pm \frac{1}{2\rho_0} \sqrt{\left( \frac{\alpha}{\kappa} - \mu \right)^2 + \frac{2}{\kappa} \left[ \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) \xi - 2(\xi\mu - \beta^2) \right] \frac{1}{\gamma^2} + \rho_0^2 \frac{\xi^2}{\kappa^2} \frac{1}{\gamma^4}}. \quad (6.6)$$

Aqui, a análise será restrita a valores positivos das velocidades de fase de onde obtém-se duas curvas de dispersão. Primeiramente, tomando o limite dos valores positivos de (6.6) quando  $\gamma$  vai para o infinito, obtém-se duas velocidades de fase dadas por

$$\{5:7\} \quad c \in \left\{ v_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\alpha}{\kappa} \right)}, v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \right\}, \quad (6.7)$$

e assim, as velocidades de fase são finitas para altas frequências e tem-se assim a importante conclusão de que as velocidades de fase são limitadas para números de ondas grandes. Isto é o contrário, por exemplo, da teoria de viga de Euler-Bernoulli (GRAFF, 1991) e também a teoria do *segundo espectro* da teoria da viga de Timoshenko (BHASKAR, 2009; SMITH, 2008) que prediz velocidades ilimitadas de propagação de ondas em altas frequências. Em segundo lugar, e este é um caso interessante, procura-se por alguma relação entre dois valores positivos das frequências em geral para ver o comportamento desses valores em baixa frequência.

Resolvendo agora (6.4) como uma equação quadrática na variável  $\omega^2$ , obtém-se dois ramos de frequência

$$\{5:8\} \quad \omega_{1,2}^2(\gamma) = \frac{1}{2\rho_0} [(\alpha/\kappa + \mu)\gamma^2 + \xi/\kappa] \pm \frac{1}{2\rho_0} [(\alpha/\kappa + \mu)\gamma^2 + \xi/\kappa] \sqrt{1 - \frac{4}{\kappa} [(\xi\mu - \beta^2)\gamma^2 + \alpha\mu\gamma^4] / [(\alpha/\kappa + \mu)\gamma^2 + \xi/\kappa]^2}. \quad (6.8)$$

Agora, considere  $\xi\mu - \beta^2 \geq 0$ . Assim, usando a representação assintótica do discriminante (veja (ABRAMOVICH; ELISHAKOFF, 1987)) e realizando alguns cálculos chega-se em

$$\{5:9\} \quad \omega_1^2(\gamma) \approx \frac{1}{\kappa\rho_0} \frac{(\xi\mu - \beta^2)\gamma^2 + \alpha\mu\gamma^4}{(\alpha/\kappa + \mu)\gamma^2 + \xi/\kappa} \quad \text{e} \quad \omega_2^2(\gamma) \approx \frac{(\xi\mu - \beta^2)\gamma^2 + \alpha\mu\gamma^4}{\rho_0^2\kappa} \frac{1}{\omega_1^2} + \omega_1^2. \quad (6.9)$$

Além do mais, levando em conta que  $\omega = c\gamma$ , obtém-se as seguintes aproximações para as velocidades de fase

$$\{5:10\} \quad c_1^2(\gamma) \approx \frac{1}{\kappa\rho_0} \frac{(\xi\mu - \beta^2) + \alpha\mu\gamma^2}{(\alpha/\kappa + \mu)\gamma^2 + \xi/\kappa}, \quad c_2^2(\gamma) \approx \frac{(\xi\mu - \beta^2) + \alpha\mu\gamma^2}{\rho_0^2\kappa} \frac{1}{c_1^2\gamma^2} + c_1^2. \quad (6.10)$$

Em uma primeira análise, para  $\beta^2 \approx \xi\mu$ , nota-se que  $c_1^2$  vai para zero quando  $\gamma$  vai para zero e  $c_1^2$  é limitado quando  $\gamma$  vai para infinito. Assim, no plano  $(\gamma, c_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ , a curva  $c_2^2$  determina uma hipérbole que é inversamente proporcional a  $c_1^2$  de onde conclui-se que  $c_2^2$  explode para baixas frequências. Isto é um comportamento típico de uma anomalia conhecida como *segundo espectro* encontrada no modelo de viga de Timoshenko. Veja por exemplo (ABBAS; THOMAS, 1977; ANDERSON, 1953; BHASKAR, 2009; BHASHYAM; PRATHAP, 1981; ELISHAKOFF, 2010; HAN; BENAROYA; TIMOTHY, 1999; HUANG, 1985; LEVINSON; COOKE, 1982; SMITH, 2008; STEPHEN, 1982; STEPHEN, 2006). Portanto, conclui-se que este espectro não-físico também atua na teoria linear elástico porosa de acordo com a análise acima (veja Figura 3). Da discussão anterior resulta

**Teorema 13.** As solução de onda harmonica da teoria elástico-porosa unidimensional são dadas por

$$u(x, t) = A_1 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad \varphi(x, t) = A_2 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad (6.11)$$

onde  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  são as amplitudes, e as velocidades de fase positivas  $c$  como funções do número de ondas  $\gamma$  são

$$c(\gamma) := \sqrt{\frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) + \frac{\xi}{2\rho_0 \kappa} \frac{1}{\gamma^2} \pm \frac{1}{2\rho_0} \sqrt{\left( \frac{\alpha}{\kappa} - \mu \right)^2 + \frac{2}{\kappa} \left[ \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) \xi - 2(\xi\mu - \beta^2) \right] \frac{1}{\gamma^2} + \rho_0^2 \frac{\xi^2}{\kappa^2} \frac{1}{\gamma^4}}. \quad (6.12)$$

Em particular, a velocidade de fase  $c_1(\gamma)$  corresponde ao segundo ramo.



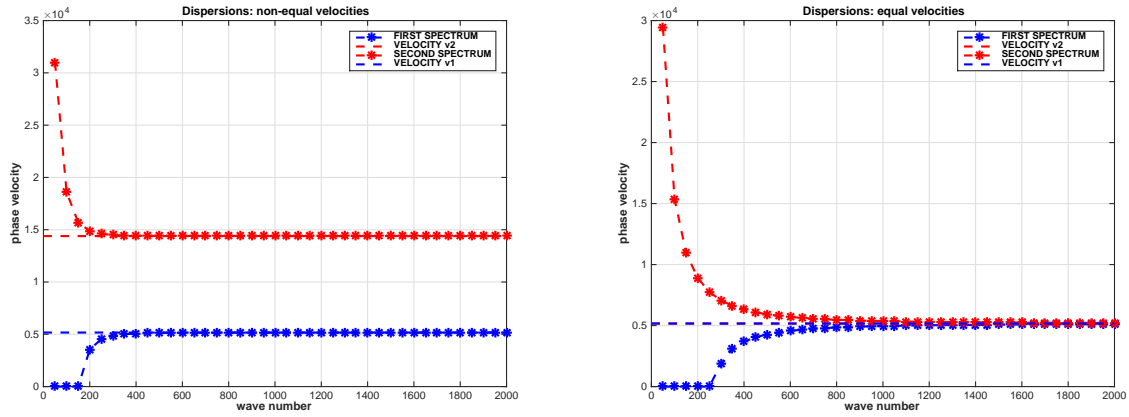


Figura 3 – Número de ondas vs. velocidade de fase. Curvas de dispersão para o modelo poro-elástico unidimensional. Ambos os ramos são dispersivos e mostram um comportamento dominante para ondas longas. O primeiro ramo (ramo inferior) tem modo de propagação válida para todo o domínio do espectro e converge para  $v_1$  em altas frequências. O segundo ramo (ramo superior) mostra uma velocidade de fase infinita para valores após a frequência crítica e se aproxima da velocidade de fase  $v_2$  para altas frequências. Para velocidades iguais de propagação (segundo gráfico) os dois espectros se aproximam para altas frequências

{fig:5:1}

## 6.2 Ramos Físico do Sistema Poro-Elástico Amortecido

Aqui, será considerado o caso  $\tau > 0$  no sistema (6.1)-(6.2) para obter as propriedades de dispersão. Um problema interessante em tal caso, diz respeito ao comportamento assintótico temporal das soluções da teoria elástico-porosa com dissipação. A análise da estabilização neste caso, foi primeiro realizada por Quintanilha (QUINTANILLA, 2003). Foi mostrado que o lei de feedback atuando na função  $\varphi$  na equação (6.2), com condições iniciais apropriadas é capaz de produzir algum tipo de decaimento (lento ou rápido) de acordo com o número  $\mu\kappa - \alpha$  ser zero ou não.

Particularmente, a análise de dispersão será considerada para o caso  $\alpha = \mu\kappa$  e será mostrado que a lei de feedback ( $\tau > 0$ ) elimina a anomalia do segundo ramo da teoria elástico-porosa para comprimentos de onda suficientemente pequenos (veja Figura 4). Isto constitui um resultado interessante uma vez que é possível assegurar que o segundo ramo é proeminente em explicar propriedades da onda na teoria poro-elástica com amortecimento.

{teo:5:2}

A dispersão para o caso com amortecimento é caracterizada pelo seguinte teorema:

**Teorema 14.** Sejam  $\alpha = \mu\kappa$  e  $\beta^2 = \xi\mu$ . Então, soluções em ondas harmonicas do sistema

com amortecimento (6.1)-(6.2) são dadas por

$$u(x, t) = A_1 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad \varphi(x, t) = A_2 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad (6.13)$$

onde  $A_i$ ,  $i = 1, 2$  são amplitudes e as velocidades de fase são

$$\{5:10\} \quad c_{1,2}^\pm(\gamma) = -\frac{z^\pm}{2\gamma} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{z^\pm}{\gamma}\right)^2 + 4\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad (6.14)$$

onde os valores de  $z$  são dados por

$$z^\pm = -\frac{1}{2} \frac{\tau}{\rho_0 \kappa} i \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\frac{\xi}{\rho_0 \kappa} - \left(\frac{\tau}{\rho_0 \kappa}\right)^2}. \quad (6.15)$$

**Demonstração.** Considere as soluções harmônicas (6.3) e as substituindo no sistema com dissipação (6.1)-(6.2), chega-se em

$$\omega^4 - \frac{1}{\rho_0} \left[ \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) \gamma^2 + \frac{\xi}{\kappa} \right] \omega^2 + \frac{\tau}{\rho_0^2 \kappa} (\mu \gamma^2 - \omega^2 \rho_0) \omega i + \frac{1}{\rho_0^2 \kappa} (\xi \mu - \beta^2) \gamma^2 + \frac{\alpha \mu}{\rho_0^2 \kappa} \gamma^4 = 0. \quad (6.16)$$

Levando em conta as frequências não nulas, pode-se reescrever a equação anterior obtendo

$$\{5:11\} \quad \omega^2 - \frac{1}{\rho_0} \left[ \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) \gamma^2 + \frac{\xi}{\kappa} \right] + \frac{\tau}{\rho_0 \kappa} \left( \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\gamma^2}{\omega} - \omega \right) i + \frac{1}{\rho_0^2 \kappa} (\xi \mu - \beta^2) \frac{\gamma^2}{\omega^2} + \frac{\alpha \mu}{\rho_0^2 \kappa} \frac{\gamma^4}{\omega^2} = 0, \quad (6.17)$$

definindo (seguindo um argumento similar devido a Rivera e Racke (MUÑOZ RIVERA; RACKE, 2008))

$$z := \frac{\gamma^2}{\omega} \frac{\mu}{\rho_0} - \omega, \quad (6.18)$$

tem-se

$$z^2 = \frac{\gamma^4}{\omega^2} \frac{\mu^2}{\rho_0^2} - 2\gamma^2 \frac{\mu}{\rho_0} + \omega^2, \quad (6.19)$$

reescrevendo (6.17) em função de  $z$ , tem-se

$$z^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{\alpha \mu}{\kappa} - \mu^2 \right) \frac{\gamma^4}{\omega^2} + 2\gamma^2 \frac{\mu}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \left[ \left( \frac{\alpha}{\kappa} + \mu \right) \gamma^2 + \frac{\xi}{\kappa} \right] + \left( \frac{\tau}{\rho_0 \kappa} i \right) z + \frac{1}{\rho_0^2 \kappa} (\xi \mu - \beta^2) \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 0. \quad (6.20)$$

Da hipótese das velocidades de ondas iguais e  $\beta^2 = \mu \xi$ , obtém-se a seguinte equação

$$z^2 + \left( \frac{\tau}{\rho_0 \kappa} i \right) z - \frac{\xi}{\rho_0 \kappa} = 0, \quad (6.21)$$

resolvendo a equação anterior

$$\{5:12\} \quad z^\pm = -\frac{1}{2} \frac{\tau}{\rho_0 \kappa} i \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\frac{\xi}{\rho_0 \kappa} - \left(\frac{\tau}{\rho_0 \kappa}\right)^2}. \quad (6.22)$$

Naturalmente, a conclusão da demonstração é a solução da equação

$$w^2 + zw - \gamma^2 \frac{\mu}{\rho_0} = 0, \quad (6.23)$$

para cada valor de  $z$  em (6.22). Portanto, tomando  $\omega = c\gamma$ , a prova este completa. ■

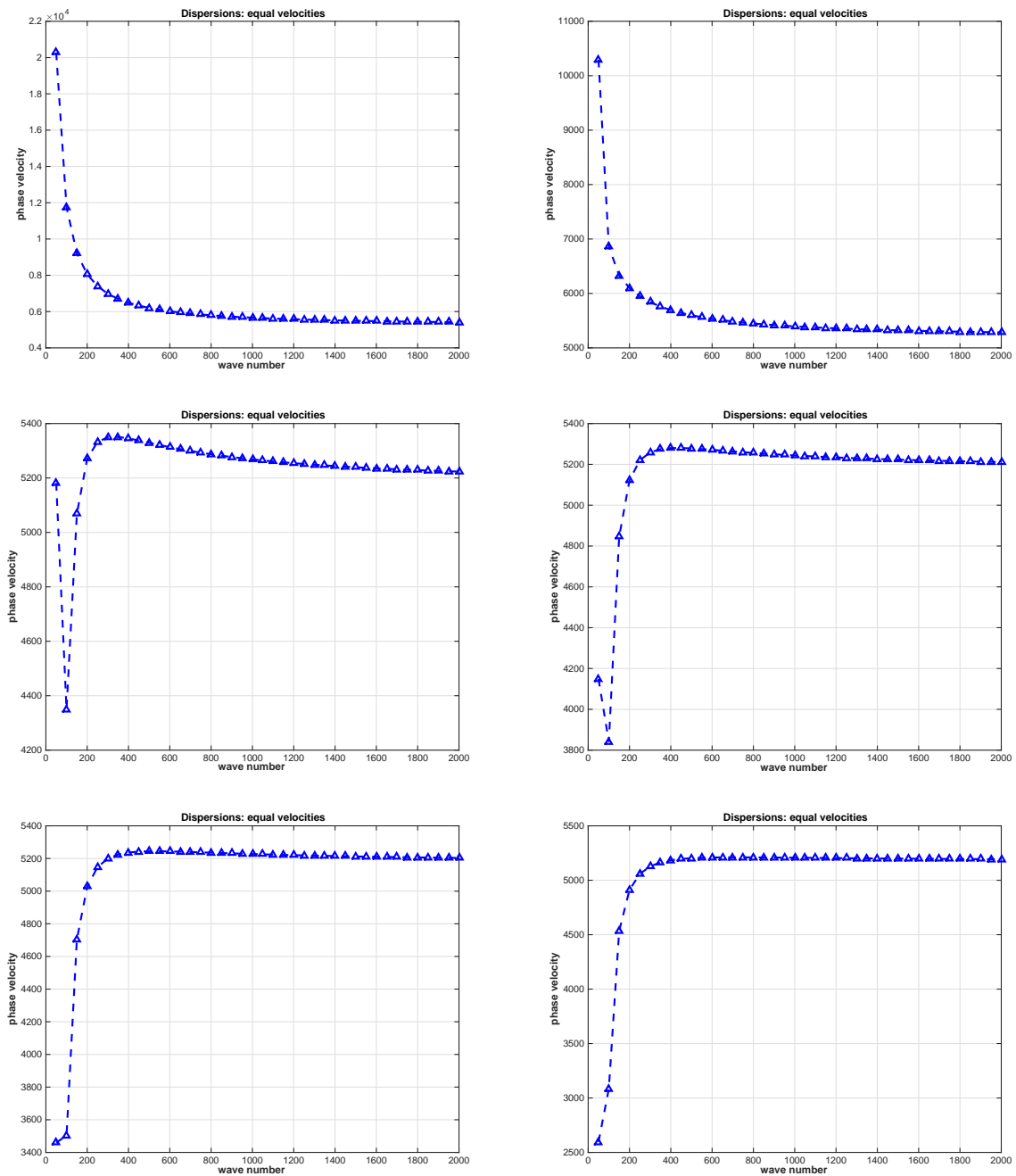


Figura 4 – Diagramas de dispersão para o caso dissipativo (tomando somente a parte real e positiva) plotada dos valores em (6.14). Para os valores do amortecimento dados por  $\tau = j\sqrt{\xi\rho_0\kappa}$ , para  $j = 2, 1, 1/2, 1/2.5, 1/3, 1/4$ . Note que o segundo espectro começa a ser truncado a partir da segunda figura onde o amortecimento é dado por  $\tau = j\sqrt{\xi\rho_0\kappa}$ . Este é um importante resultado uma vez que do ponto de vista da análise de dispersão a condição não-física do segundo espectro é eliminada e isto é uma notável consequência do efeito do amortecimento sobre o sistema

{fig:5:2}

# APÊNDICE A – Solução por Transposição do Sistema Elástico Poroso

{ap1-lem1} Este capítulo será iniciado com o enunciado de dois resultados relevantes para o restante do capítulo.

**Lema 4.** Seja  $m \in L^1(0, T; \mathbb{R})$  tal que  $m \geq 0$  q.t.p. em  $[0, T]$  e  $a \geq 0$  constante. Suponha que  $g \in L^\infty(0, T)$ ,  $g \geq 0$  em  $[0, T]$  verifique

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq 2a^2 + 2 \int_0^t m(s)g(s)ds,$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Então

$$g(t) \leq 2 \left( a + \int_0^t m(s)ds \right) \text{ em } [0, T].$$

{ap1-lem2} **Demonstração.** ver (MEDEIROS; MIRANDA; LOUREIRO, 2013, p. 20).

**Lema 5 (Desigualdade de Gronwall).** Seja  $\phi$  uma função real continua tal que

$$\phi(t) \leq \gamma_1 + \gamma_2 \int_{t_0}^t \phi(s)ds,$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ , onde  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são constantes positivas. Então tem-se

$$\phi(t) \leq \gamma_1 e^{\gamma_2(t-t_0)},$$

para todo  $t \in [t_0, t_1[$ .

## A.1 Limitação para a Solução Fraca do Sistema não Homogêneo

Considere o sistema elástico poroso não homogêneo

$$\begin{aligned} \{\text{ap1-eq1}\} \quad & \rho v_{tt} - \mu v_{xx} - b\psi_x = f \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \\ & J\psi_{tt} - \alpha\psi_{xx} + bv_x + \xi\psi = g \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \{\text{ap1-eq2}\} \quad & v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \\ & \psi_x(0, t) = 0, \quad \psi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} \{\text{ap1-eq3}\} \quad & v(x, T) = 0, \quad v_t(x, T) = 0 \quad \text{em } ]0, L[, \\ & \psi(x, T) = 0, \quad \psi_t(x, T) = 0 \quad \text{em } ]0, L[, \end{aligned} \tag{A.3}$$

e vale observar, que usando técnicas da teoria de semigrupos (PAZY, 1983, capítulo 4, secção 2) e considerando a reversibilidade no tempo para o sistema (A.1)-(A.3), dado qualquer par  $(f, g) \in L^1(0, T; L^2(0, L) \times L_*^2(0, L))$  o sistema acima possui solução

$$(v, \psi) \in C(0, T; H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)) \cap C^1(0, T; L^2(0, L) \times L_*^2(0, L)).$$

O objetivo desta secção é estabelecer através de técnicas multiplicativas a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \|v_t(t)\|_2 + \|v_x(t)\|_2 + \|\psi_t(t)\|_2 + \|\psi_x(t)\|_2 + \|\psi(t)\|_2 \leq \\ & C(\|f\|_{L^1(0, T; L^2(0, L))} + \|g\|_{L^1(0, T; L_*^2(0, L))}), \end{aligned}$$

para alguma constante  $C > 0$ .

Com efeito, multiplica-se (A.1) por  $v_t$ , integra-se por partes em  $[0, L] \times [0, t]$  com  $0 \leq t \leq T$  e obtém-se

$$\frac{1}{2} \left[ \rho \|v_t(s)\|_2^2 + \mu \|v_x(s)\|_2^2 \right]_0^t = \int_0^L \int_0^t [(f + \psi_x)v_t] ds dx,$$

aplica-se agora a desigualdade de Schwarz, para chegar-se a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \left[ \rho \|v_t(s)\|_2^2 + \mu \|v_x(s)\|_2^2 \right]_0^t \leq \int_0^t \|f(s) + \psi_x(s)\|_2 \|v_t(s)\|_2 ds,$$

e assim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \rho \|v_t(s)\|_2^2 + \mu \|v_x(s)\|_2^2 \right]_0^t \leq \\ & \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^t \|f(s) + \psi_x(s)\|_2 (\sqrt{\rho} \|v_t(s)\|_2 + \sqrt{\mu} \|v_x(s)\|_2) ds, \end{aligned}$$

desta forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sqrt{\rho}\|v_t(t)\|_2 + \sqrt{\mu}\|v_x(t)\|_2)^2 &\leq 2(\sqrt{\rho}\|v_t(0)\|_2 + \sqrt{\mu}\|v_x(0)\|_2)^2 + \\ &\frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^t \|f(s) + \psi_x(s)\|_2(\sqrt{\rho}\|v_t(s)\|_2 + \sqrt{\mu}\|v_x(s)\|_2)ds, \end{aligned}$$

segue-se do lema 4

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho}\|v_t(t)\|_2 + \sqrt{\mu}\|v_x(t)\|_2 &\leq 2(\sqrt{\rho}\|v_t(0)\|_2 + \sqrt{\mu}\|v_x(0)\|_2) + \\ &\frac{2}{\sqrt{\rho}} \int_0^t \|f(s) + \psi_x(s)\|_2 ds, \end{aligned}$$

da desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho}\|v_t(t)\|_2 + \sqrt{\mu}\|v_x(t)\|_2 &\leq 2(\sqrt{\rho}\|v_t(0)\|_2 + \sqrt{\mu}\|v_x(0)\|_2) + \\ &\frac{2}{\sqrt{\rho}} \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \frac{2}{\sqrt{\rho}} \int_0^t \|\psi_x(s)\|_2 ds. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Em outra mão, multiplica-se (A.2) por  $\psi_t$ , integra-se por partes em  $[0, L] \times [0, t]$  com  $0 \leq t \leq T$ , chegando a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \left[ J\|\psi_t(s)\|_2^2 + \alpha\|\psi_x(s)\|_2^2 + \xi\|\psi(s)\|_2^2 \right]_0^t = \int_0^L \int_0^t [(g - bv_x)\psi_t] ds dx,$$

aplicando a desigualdade de Schwarz

$$\frac{1}{2} \left[ J\|\psi_t(s)\|_2^2 + \alpha\|\psi_x(s)\|_2^2 + \xi\|\psi(s)\|_2^2 \right]_0^t \leq \int_0^t \|g(s) - bv_x(s)\|_2 \|\psi_t(s)\|_2 ds,$$

e assim

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[ J\|\psi_t(s)\|_2^2 + \alpha\|\psi_x(s)\|_2^2 + \xi\|\psi(s)\|_2^2 \right]_0^t \leq \\ &\frac{1}{J} \int_0^t \|g(s) - bv_x(s)\|_2 (J\|\psi_t(s)\|_2 + \alpha\|\psi_x(s)\|_2 + \xi\|\psi(s)\|_2) ds, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(J\|\psi_t(t)\|_2^2 + \alpha\|\psi_x(t)\|_2^2 + \xi\|\psi(t)\|_2^2) \leq \\ &\frac{1}{2}(J\|\psi_t(0)\|_2^2 + \alpha\|\psi_x(0)\|_2^2 + \xi\|\psi(0)\|_2^2) + \\ &\frac{1}{\sqrt{J}} \int_0^t \|g(s) - bv_x(s)\|_2 (\sqrt{J}\|\psi_t(s)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(s)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(s)\|_2) ds, \end{aligned}$$

desta forma

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\sqrt{J}\|\psi_t(t)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(t)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(t)\|_2)^2 \leq \\ &\frac{3}{2}(J\|\psi_t(t)\|_2^2 + \alpha\|\psi_x(t)\|_2^2 + \xi\|\psi(t)\|_2^2) \leq \\ &2(\sqrt{J}\|\psi_t(0)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(0)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(0)\|_2)^2 + \\ &\frac{4}{\sqrt{J}} \int_0^t \|g(s) - bv_x(s)\|_2 (\sqrt{J}\|\psi_t(s)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(s)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(s)\|_2) ds, \end{aligned}$$

e do lema 4

$$\begin{aligned} & \sqrt{J}\|\psi_t(t)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(t)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(t)\|_2 \leq \\ & 2(\sqrt{J}\|\psi_t(0)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(0)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(0)\|_2) + \frac{6}{\sqrt{J}} \int_0^t \|g(s) - bv_x(s)\|_2 ds, \end{aligned}$$

aplicando a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} & \sqrt{J}\|\psi_t(t)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(t)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(t)\|_2 \leq \\ & 2(\sqrt{J}\|\psi_t(0)\|_2 + \sqrt{\alpha}\|\psi_x(0)\|_2 + \sqrt{\xi}\|\psi(0)\|_2) + \frac{6}{\sqrt{J}} \|g\|_{L^1(0,T;L^2_*(0,L))} + \\ & \frac{6b}{\sqrt{J}} \int_0^t \|v_x(s)\|_2 ds, \end{aligned} \tag{A.5}$$

considerando

$$\begin{aligned} c_1 &= \min\{\sqrt{\rho}, \sqrt{\mu}, \sqrt{J}, \sqrt{\alpha}, \sqrt{\xi}\}, \\ c_2 &= \max\left\{2\sqrt{\rho}, 2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{J}, 2\sqrt{\alpha}, 2\sqrt{\xi}, \frac{2}{\sqrt{\rho}}, \frac{6}{\sqrt{J}}\right\}, \end{aligned}$$

de (A.4) e (A.5)

$$\begin{aligned} & c_1(\|v_t(t)\|_2 + \|v_x(t)\|_2 + \|\psi_t(t)\|_2 + \|\psi_x(t)\|_2 + \|\psi(t)\|_2) \leq \\ & c_2(\|v_t(0)\|_2 + \|v_x(0)\|_2 + \|\psi_t(0)\|_2 + \|\psi_x(0)\|_2 + \|\psi(0)\|_2) + \\ & c_2(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|g\|_{L^1(0,T;L^2_*(0,L))}) + \\ & c_2 \int_0^t (\|v_x(s)\|_2 + \|v_x(s)\|_2) ds, \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} & \|v_t(t)\|_2 + \|v_x(t)\|_2 + \|\psi_t(s)\|_2 + \|\psi_x(s)\|_2 + \|\psi(s)\|_2 \leq \\ & \frac{c_2}{c_1} (\|v_t(0)\|_2 + \|v_x(0)\|_2 + \|\psi_t(0)\|_2 + \|\psi_x(0)\|_2 + \|\psi(0)\|_2) + \\ & \frac{c_2}{c_1} (\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|g\|_{L^1(0,T;L^2_*(0,L))}) + \\ & \frac{c_2}{c_1} \int_0^t (\|v_t(s)\|_2 + \|v_x(s)\|_2 + \|\psi_t(s)\|_2 + \|\psi_x(s)\|_2 + \|\psi(s)\|_2) ds, \end{aligned}$$

segue-se da desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned} & \|v_t(t)\|_2 + \|v_x(t)\|_2 + \|\psi_t(s)\|_2 + \|\psi_x(s)\|_2 + \|\psi(s)\|_2 \leq \\ & c_3(\|v_t(0)\|_2 + \|v_x(0)\|_2 + \|\psi_t(0)\|_2 + \|\psi_x(0)\|_2 + \|\psi(0)\|_2) + \\ & c_3(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|g\|_{L^1(0,T;L^2_*(0,L))}), \end{aligned}$$

onde  $c_3 = \frac{c_2}{c_1} e^{\frac{c_2}{c_1} T}$ . Se for considerado  $T - t$  no lugar de  $t$  (reversibilidade no tempo) na solução  $(v, \psi)$  tem-se  $v(0) = v_t(0) = \psi(0) = \psi_t(0) = 0$  e assim

$$\begin{aligned} & \|v_t(t)\|_2 + \|v_x(t)\|_2 + \|\psi_t(s)\|_2 + \|\psi_x(s)\|_2 + \|\psi(s)\|_2 \leq \\ & c_3(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|g\|_{L^1(0,T;L^2_*(0,L))}). \end{aligned} \tag{A.6}$$

## A.2 Solução por Transposição

Nesta secção será estudado o significado e a existência de solução do seguinte sistema elástico poroso não homogêneo

$$\{\text{ap1-eq10}\} \quad \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\varphi_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (\text{A.7})$$

$$\{\text{ap1-eq11}\} \quad J\varphi_{tt} - \alpha\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi = \nu \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (\text{A.8})$$

$$\{\text{ap1-eq12}\} \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (\text{A.9})$$

$$\{\text{ap1-eq13}\} \quad \varphi_x(0, t) = 0, \quad \varphi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } ]0, T[, \quad (\text{A.10})$$

$$\{\text{ap1-eq14}\} \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x) \quad \text{em } ]0, L[, \quad (\text{A.11})$$

$$\{\text{ap1-eq15}\} \quad \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x) \quad \text{em } ]0, L[, \quad (\text{A.12})$$

onde  $u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1$  e  $\nu$  são dados. A ideia da solução por transposição (LIONS; MAGENES, 1972, p. 283) é dar significado a solução de (A.7)-(A.12) quando as regularidades de  $u^0, u^1, \varphi^0$  e  $\varphi^1$  são enfraquecidas, isto é,  $u^0 \in L^2(0, L)$ ,  $\varphi^0 \in L_*^2(0, L)$ ,  $u^1 \in H^{-1}(0, L)$  e  $\varphi^1 \in [H_*^1(0, L)]'$ .

Será adotado um método heurístico para determinar a existência de solução de (A.7)-(A.12), e por isso não será especificado inicialmente a quais espaços pertencem  $u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1$  e  $\nu$ .

Inicia-se, multiplicando (A.7) por  $v$  e (A.8) por  $\psi$ , integra-se cada uma delas por partes em  $[0, L] \times [0, T]$ , onde  $(v, \psi)$  é solução de (A.1)-(A.3) obtendo

$$\{\text{ap1-eq16}\} \quad -\rho \int_0^L u^1 v(0) dx + \rho \int_0^L u^0 v_t(0) dx + \int_0^L \int_0^T (\rho u v_{tt} - \mu u v_{xx} + b\varphi v_x) dx dt = 0, \quad (\text{A.13})$$

e

$$\{\text{ap1-eq17}\} \quad \begin{aligned} & -J \int_0^L \varphi^1 \psi(0) dx + J \int_0^L \varphi^0 \psi_t(0) dx + \\ & \int_0^L \int_0^T (J\varphi\psi_{tt} - \alpha\varphi\psi_{xx} - bu\psi_x + \xi\varphi\psi) dx = \int_0^L \int_0^T \nu\psi dx dt, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

somando (A.13) e (A.14)

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^T (fu + g\varphi) = \int_0^L \int_0^T \nu\psi dx dt + \rho \int_0^L u^1 v(0) dx - \rho \int_0^L u^0 v_t(0) dx + \\ J \int_0^L \varphi^1 \psi(0) dx - J \int_0^L \varphi^0 \psi_t(0) dx, \end{aligned}$$

das regularidades de  $v(0), v_t(0), \psi(0), \psi_t(0)$  e  $\psi$ , pode-se considerar então

$$(u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1, \nu) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]' \times L^2(0, T; L^2(0, L)),$$



desta forma, para a igualdade anterior

$$\int_0^L \int_0^T (fu + g\varphi) = \int_0^L \int_0^T \nu\psi dxdt + \rho\langle u^1, v(0) \rangle_{-1,1} - \rho \int_0^L u^0 v_t(0) dx + J\langle \varphi^1, \psi(0) \rangle_{-1^*,1^*} - J \int_0^L \varphi^0 \psi_t(0) dx, \quad (\text{A.15})$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1,1}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1^*,1^*}$  são os produtos duais entre  $H_0^1(0, L)$  e  $H^{-1}(0, L)$  e  $H_*^1(0, L)$  e  $[H_*^1(0, L)]'$  respectivamente.

É possível considerar desta forma o funcional linear  $S$  definido em  $L^1(0, T; L^2(0, L)) \times L^1(0, T; L_*^2(0, L))$  dado por

$$\langle S, \{f, g\} \rangle = \int_0^L \int_0^T \nu\psi dxdt + \rho\langle u^1, v(0) \rangle_{-1,1} - \rho \int_0^L u^0 v_t(0) dx + J\langle \varphi^1, \psi(0) \rangle_{-1^*,1^*} - J \int_0^L \varphi^0 \psi_t(0) dx,$$

da desigualdade de Schwarz e de Poincaré, existe uma constante  $c_p > 0$  tal que

$$|\langle S, \{f, g\} \rangle| \leq \left( \int_0^T \|\nu(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^T \|\psi(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} + \rho c_p \|u^1\|_{-1} \|v_x(0)\|_2 + \rho \|u^0\|_2 \|v_t(0)\|_2 + J c_p \|\varphi^1\|_{[H_*^{-1}(0,L)]'} \|\psi_x(0)\|_2 + J \|\varphi^0\|_2 \|\psi_t(0)\|_2,$$

considerando

$$c_1 = \max \left\{ \left( \int_0^T \|\nu(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2}, \rho c_p \|u^1\|_{-1}, \rho \|u^0\|_2, J c_p \|\varphi^1\|_{[H_*^{-1}(0,L)]'}, J \|\varphi^0\|_2 \right\},$$

tem-se

$$|\langle S, \{f, g\} \rangle| \leq c_1 \left( \left( \int_0^T \|\psi(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} + \|v_x(0)\|_2 + \|v_t(0)\|_2 + \|\psi_x(0)\|_2 + \|\psi_t(0)\|_2 \right),$$

de (A.6), é possível obter constantes positivas  $c_2$  e  $c_3$  de modo que

$$|\langle S, \{f, g\} \rangle| \leq c_1(c_2 + c_3)(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \|g\|_{L^1(0,T;L_*^2(0,L))}),$$

ou seja,  $S$  é um funcional linear contínuo definido em  $L^1(0, T; L^2(0, L)) \times L_*^2(0, L)$ , resulta do teorema da representação de Riesz, a existência de um único par  $(u, \varphi) \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \times L_*^2(0, L)$  tal que

$$\langle S, \{f, g\} \rangle = \int_0^L \int_0^T (uf + \varphi g) dt dx \quad \forall (f, g) \in L^1(0, T; L^2(0, L)) \times L_*^2(0, L),$$

e assim  $(u, \varphi)$  é solução de (A.7)-(A.12).

Destas forma tem-se a seguinte definição:

**Definição 4.** Dado qualquer  $(u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1, \nu) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]' \times L^1(0, T; L^2(0, L))$ . Uma solução por transposição do problema (A.7)-(A.12) é um par  $(u, \varphi) \in L^\infty(0, T; L^2(0, L)) \times L^\infty(0, T; L_*^2(0, L))$  tal que

$$\int_0^L \int_0^T (uf + \varphi g) dt dx = \int_0^L \int_0^T \nu \psi dx dt + \rho \langle u^1, w(0) \rangle_{-1,1} - \rho \int_0^L u^0 w_t(0) dx + J \langle \varphi^1, \psi(0) \rangle_{-1_*, 1_*} - J \int_0^L \varphi^0 \psi_t(0) dx,$$

para todo par  $(f, g) \in L^1(0, T; L^2(0, L)) \times L^1(0, T; L_*^2(0, L))$  e todo par  $(w, \psi)$  solução de (A.1)-(A.3).

Além da existência de solução por transposição para o sistema (A.7)-(A.12), é possível também mostrar a unicidade via Lema de Du Bois Raymound (MEDEIROS; MIRANDA; LOUREIRO, 2013, p. 99).

Sendo assim, pode-se enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 15.** Dado qualquer  $(u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1, v) \in L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L) \times L_*^2(0, L) \times [H_*^1(0, L)]' \times L^1(0, T; L^2(0, L))$ . O sistema (A.7)-(A.12) admite uma única solução por transposição.

# APÊNDICE B – Solução de um Sistema Elíptico

Será considerado agora, a existência, unicidade e regularidade de soluções para o sistema

$$\text{\{ap2-eq1\}} \quad -\mu u_{xx} - b\phi_x = f, \quad (\text{B.1})$$

$$\text{\{ap2-eq2\}} \quad -\delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = g, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{\{ap2-eq3\}} \quad u(0) = u(L) = \phi_x(0) = \phi_x(L) = 0, \quad (\text{B.3})$$

com  $f$  e  $g$  funções dadas,  $\mu, \delta, \xi$  constantes positivas e  $b$  constante, tal que  $b^2 \leq \xi\mu$ .

A existência e unidade de solução fraca será estabelecida através de uma aplicação do lema de Lax-Milgram, enquanto a regularidade será obtida via resultados bem conhecidos a respeito de soluções de equações elípticas que podem ser encontrados em (NIRENBERG, 1974, capítulo 2, seção 5), (LIONS; MAGENES, 1972, capítulo 2, seção 3) ou em (LIU; ZHENG, 2000, capítulo 1, seção 4)

A formulação variacional de (B.1)-(B.3) consiste no seguinte: sejam  $(f, g) \in L^2(0, L) \times L^2_*(0, L)$ , para qualquer  $(\bar{u}, \bar{\phi}) \in H^1_0(0, L) \times H^1_*(0, L)$ , multiplicando (B.1) por  $\bar{u}$  e (B.2) por  $\bar{\phi}$ , integrando por partes as duas igualdades obtidas, levando em conta (B.3) e as somando, chega-se em

$$\text{\{ap2-eq4\}} \quad \int_0^L (\mu u_x \bar{u}_x + b(u_x \bar{\phi} + \bar{u}_x \phi) + \xi \phi \bar{\phi} + \delta \phi_x \bar{\phi}_x) dx = \int_0^L f \bar{u} dx + \int_0^L g \bar{\phi} dx. \quad (\text{B.4})$$

Portanto, uma solução (fraca) de (B.1)-(B.3) é um par  $(u, \phi) \in H^1_0(0, L) \times H^1_*(0, L)$  satisfazendo (B.3), tal que para quaisquer  $(\bar{u}, \bar{\phi}) \in H^1_0(0, L) \times H^1_*(0, L)$ , (B.4) se verifica.

**Teorema 16.** Dado  $(f, g) \in L^2(0, L) \times L^2_*(0, L)$ , o sistema (B.1)-(B.3) possui uma única solução fraca.

**Demonstração.** Considere em  $H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$  a seguinte forma bilinear

$$\langle (w, v), (\bar{w}, \bar{v}) \rangle = \int_0^L (\mu w_x \bar{w}_x + b(w_x \bar{v} + \bar{w}_x v) + \xi v \bar{v} + \delta v_x \bar{v}_x) dx. \quad (\text{B.5})$$

Do fato de  $b^2 \leq \mu\xi$  e da desigualdade de Young

$$\begin{aligned} \langle (w, v), (w, v) \rangle &= \int_0^L (\mu w_x^2 + 2bw_x v + \xi v^2 + \delta v_x^2) dx \\ &\geq \int_0^L (\mu w_x^2 - 2|b||w_x v| + \xi v^2 + \delta v_x^2) dx \\ &\geq \int_0^L (2\sqrt{\xi\mu}|w_x v| - 2|b||w_x v| + \delta v_x^2) dx \\ &\geq \int_0^L [2(\sqrt{\xi\mu} - |b|)|w_x v| + \delta v_x^2] dx \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

levando em conta a desigualdade anterior e a desigualdade de Poincaré válida em  $H_*^1(0, L)$ , existe uma constante positiva  $c_p$  tal que

$$0 \leq \int_0^L [2(\sqrt{\xi\mu} - |b|)|w_x v| + c_p \delta v^2] dx \leq \langle (w, v), (w, v) \rangle.$$

Segue-se de (B.5) e da desigualdade anterior que se

$$\langle (w, v), (w, v) \rangle = 0,$$

então,  $v = 0$  e de (B.5),  $u = 0$ . Isto significa que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto interno em  $H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ , logo

$$\|(w, v)\|^2 := \langle (w, v), (w, v) \rangle,$$

define uma norma em  $H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ . Considere a forma bilinear em  $H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$  dada por

$$a((w, v), (\bar{w}, \bar{v})) := \langle (w, v), (\bar{w}, \bar{v}) \rangle,$$

que é contínua e coerciva em  $H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ , e o resultado é consequência do Lema de Lax-Milgram. ■

**Observação 1.** Uma vez que  $\phi \in H_*^1(0, L)$  e de (B.1),  $u \in H_0^1(0, L)$  é solução fraca do problema

$$-\mu u_{xx} = f + b\phi_x \in L^2(0, L), \quad (\text{B.6})$$

segue-se da regularização para problemas de valores de fronteiras elípticos (NIRENBERG, 1974, capítulo 2, secção 5, secção 2), (LIONS; MAGENES, 1972, capítulo 2, secção 5) que  $u \in H^2(0, L)$  e com esta regularidade para  $u$ , e de (B.2) que  $\phi$  é solução fraca de

$$\{ap2-eq8\} \quad -\delta\phi_{xx} + \xi\phi = g - bu_x \in L^2(0, L), \quad (B.7)$$

e conseqüentemente,  $\phi \in H^2(0, L)$ . Com estas regularidades para  $u$  e  $\phi$  é possível integrar (B.6) e substituir em (B.7) obtendo

$$-\mu\delta\phi_{xx} + (\mu\xi - b^2)\phi = \mu g + b \int_0^x f ds + c_0,$$

onde  $c_0$  é uma constante. Sucede novamente da regularização de soluções de equações elípticas que existe uma constante  $k_1 > 0$  (independente de  $\phi$ ) tal que

$$\{ap2-eq9\} \quad \|\phi\|_{H^2} \leq k_1(\|f\|_2 + \|g\|_2). \quad (B.8)$$

De (B.6) existe  $k_2 > 0$  (independente de  $u$ ) tal que

$$\{ap2-eq10\} \quad \|u\|_{H^2} \leq k_2(\|f\|_2 + \|\phi_x\|_2), \quad (B.9)$$

e de (B.8) e (B.9) é possível obter  $k > 0$  (independente de  $u$  e  $\phi$ ) de modo que

$$\|u\|_{H^2} + \|\phi\|_{H^2} \leq k(\|f\|_2 + \|g\|_2). \quad (B.10)$$

# Considerações Finais

Nesta tese, foram estudadas algumas das importantes propriedades matemáticas (existência e unicidade de solução, controlabilidade exata, estabilidade exponencial e propriedades de dispersão) de um sistema poro-elástico unidimensional. Até onde o aprofundamento da pesquisa bibliográfica desta tese se permitiu chegar, tais resultados são novos e potencialmente contribuem para um melhor entendimento do modelo poro-elásticos.

## Controlabilidade Exata

Foi considerado no segundo capítulo desta tese, a controlabilidade exata interna para o sistema poro-elástico

$$\{7:1\} \quad \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (\text{B.11})$$

$$\{7:2\} \quad J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = \nu \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (\text{B.12})$$

onde  $\nu$  é o controle. As condições de fronteira foram de Dirichlet para  $u$  e Neumann para  $\phi$ . A controlabilidade interna foi obtida via método HUM, utilizando as igualdades

$$\{7:3\} \quad \frac{\rho}{\mu} = \frac{J}{\delta} \quad \text{e} \quad b^2 = \mu\xi, \quad (\text{B.13})$$

as quais são primordiais para a obtenção do resultado.

Outro ponto importante que vale ser citado, é com relação a obtenção da desigualdade de observabilidade (Teorema 2) que estabelece um limite para a energia inicial do sistema, como uma integral dupla da derivada temporal da solução (com base nas condições iniciais do sistema). Esta desigualdade é um ponto chave para o capítulo, pois ela permite estabelecer a desigualdade inversa que é fundamental na aplicação do método HUM.

Importantes questões podem ser consideradas futuramente como por exemplo:

1. É possível obter a controlabilidade exata interna para o caso em que as condições de fronteira são do tipo Dirichlet-Dirichlet?
2. É possível obter a controlabilidade exata interna para o caso  $\frac{\rho}{\mu} \neq \frac{J}{\delta}$ ?

## Estabilidade Exponencial

No terceira capítulo, foi considerado a questão da estabilidade exponencial do sistema poro-elástico

$$\{7:4\} \quad \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (\text{B.14})$$

$$\{7:5\} \quad J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\phi_t = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[, \quad (\text{B.15})$$

com  $\tau$  uma constante positiva. Foi provado que o gerador infinitesimal do semigrupo associado ao sistema acima goza da propriedade do crescimento determinado pelo espectro (quando as condições de fronteira são de Dirichlet em  $u$  e Neumann em  $\phi$ ). Estas condições de fronteira bem como a primeira das relações (B.13) são primordiais para a obtenção do resultado, a importância deste fato encontra-se na determinação precisa da taxa de decaimento do semigrupo (e conseqüentemente das soluções), o que é computacionalmente significativo, uma vez que seu valor é igual supremo da parte real dos elementos do espectro do gerador infinitesimal do semigrupo associado ao sistema (B.14)-(B.15) e uma vez que foi provado que o valor de tal supremo é negativo, o semigrupo decai exponencialmente.

O importante uso da base do tipo senos e cossenos na demonstração do resultado, possibilitou o emprego do método no caso das condições de fronteira Dirichlet-Neumann, porém ela (base do tipo senos e cossenos) impossibilita o uso do método no caso de condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet ou Neumann-Neumann.

A seguinte questão pode ser considerada futuramente:

1. É possível obter a propriedade CDE para o sistema (B.14)-(B.15) (utilizando outro método) com condições de Dirichlet-Dirichlet ou Neumann-Neumann?

Já no quarto capítulo, a tese abordou a estabilidade exponencial do sistema (B.14)-(B.15) quando  $\tau$  é uma função  $a = a(x) \in L^\infty(0, L)$  que pode mudar de sinal, porém deve satisfazer

$$\{7:6\} \quad \bar{a} = \frac{1}{L} \int_0^L a(x) dx > 0, \quad (\text{B.16})$$

e

$$\{7:7\} \quad \|a - \bar{a}\|_{L^2} \text{ suficientemente pequeno.} \quad (\text{B.17})$$

As condições de fronteiras são as mesmas do caso  $\tau$  constante (Dirichlet-Neumann), como foi mencionado no capítulo, este amortecimento é chamado de indefinido, já que não se pode inferir se há dissipação da energia. Novamente neste caso, as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann assim como a primeira igualdade de (B.13) desempenham um papel fundamental na obtenção do resultado. Sua importância apoia-se no fato de ampliar os tipos de amortecimento capazes de tornar o modelo poro-elástico exponencialmente estável a serem relativamente fáceis de serem obtidos computacionalmente. Apesar do poder do método, ele não deixa explicitamente claro quão pequeno deve ser (B.17).

As seguintes questões podem ser consideradas futuramente:

1. É possível obter o decaimento exponencial para o sistema (B.14)-(B.15), com condições de fronteira de Dirichlet-Dirichlet ou Neumann-Neumann,  $\tau = a = a(x) \in L^\infty(0, L)$  satisfazendo (B.16)-(B.17)?
2. É possível se determinar exatamente quão pequeno deve ser o valor de (B.17), para que se tenha o decaimento exponencial?

## Análise de Dispersão

No quinto capítulo desta tese, foi considerada a análise de dispersão para o sistema poro-elástico (B.14)-(B.15), com  $J = \rho_0 \kappa$ . No estudo, concluiu-se que no caso do sistema sem amortecimento ( $\tau = 0$ ) um dos dois ramos de dispersão que aparece na análise é similar ao já conhecido segundo espectro da teoria da viga de Timoshenko, tal ramo como foi observado, prevê velocidades de fase infinitas para pequenos números de onda, o que não é concebível para modelos realistas (um comportamento não-físico).

Porém, quando se considera o sistema amortecido ( $\tau > 0$ , adequado) e as relações (B.13) é possível extinguir o efeito não-físico do ramo anômalo, produzindo um único ramo fisicamente concebível.

Neste sentido, esta tese tem sua contribuição na identificação do ramo não-físico da teoria poro-elástica unidimensional, bem como apresenta um tipo de amortecimento potencialmente capaz de extinguir o ramo anômalo da teoria.



Como foi possível notar, não ficou explícito nesta tese, a partir de que valor de  $\tau$  o ramo deixa de ter o efeito segundo espectro (valores infinitos para velocidade de onda, com pequenos números de onda).

As seguintes questões podem ser consideradas futuramente:

1. Para valores menores aos considerados nesta tese para  $\tau$ , o efeito segundo espectro vai sendo eliminado do sistema?
2. Existem outros amortecimentos capazes de eliminar o efeito segundo espectro na teoria poro-elástica unidimensional?
3. Se o modelo poro-elástico for melhorado de modo a não existir o efeito segundo espectro para o sistema não amortecido, é possível obter o decaimento exponencial para tal sistema com algum tipo de amortecimento sem o uso de qualquer relação da forma (B.13)?

Espera-se que os resultados contidos nesta tese, bem como suas sugestões para a continuação das pesquisas no assunto, sirvam de fonte inspiradora para novos trabalhos relacionados ao sistema poro-elástico, permitindo novas interpelações e reflexões na busca por modelos mais completos (realistas) que possibilitem o avanço no desenvolvimento de novas ferramentas e metodologias capazes de viabilizar o progresso social, científico e tecnológico.

# Referências

- ABBAS, B.; THOMAS, J. The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sounds and Vibrations*, v. 51, n. 1, p. 123–137, 1977.
- ABRAMOVICH, H.; ELISHAKOFF, I. Application of the krein's method for determination of natural frequencies of periodically supported beam based on simplified bresse-timoshenko equations. *Acta Mechanica*, v. 66, n. 1-4, p. 39–59, 1987.
- ALMEIDA JÚNIOR, D. S.; RAMOS, A. J. A. On the nature of dissipative timoshenko systems at light of the second spectrum of frequency. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 68, n. 3, p. 145, 2017.
- ALMEIDA JÚNIOR, D. S. et al. Asymptotic behavior of weakly dissipative bresse-timoshenko system on influence of second spectrum of frequency. *Z Angew Math Mech*, p. 1–14, 2018.
- ALMEIDA JÚNIOR, D. S.; SANTOS, M. L.; MUÑOZ RIVERA, J. E. Stability to weakly dissipative Timoshenko system. *Mathematical methods in the applied sciences*, v. 36, p. 1965–1976, 2013.
- ANDERSON, R. A. Flexural vibration in uniform beams according to the timoshenko theory. *Journal of Applied Mechanics*, v. 75, p. 504–510, 1953.
- BHASHYAM, G.; PRATHAP, G. The second frequency spectrum of timoshenko beams. *Journal of sound and Vibration*, v. 76, n. 3, p. 407–420, 1981.
- BHASKAR, A. Elastic waves in timoshenko beams: the 'lost' and 'found' of an eigemode. *Proceedings of the Royal Society*, v. 465, p. 239–255, 2009.
- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer, 2010.
- BURENKOV, V. I. *Sobolev spaces on domains*. Basel: Vieweg+Teubner Verlag, 1998.
- CASAS, P.; QUINTANILLA, R. Exponential decay in one-dimensional porous-thermo-elasticity. *Mechanics Research Communications*, v. 32, p. 652–658, 2005.
- CASAS, P.; QUINTANILLA, R. Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures. *International Journal of Engineering Science*, v. 43, p. 33–47, 2005.
- CHIPOT, M. *Elements of nonlinear analysis*. Berlin: Birkhäuser, 2000.
- COWIN, S.; NUNZIATO, J. W. Linear elastic materials with voids. *Journal of Elasticity*, v. 13, p. 125–147, 1983.
- DIBENEDETTO, E. *Real analysis*. 2ª ed. New York: Springer, 2016.
- DOLECKI, S.; RUSSELL, D. L. A general theory of observation and control. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 15, p. 185–220, 1977.
- DOLPHI, C. On the timoshenko theory of transverse beam vibrations. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 12, p. 175–187, 1954.

- ELISHAKOFF, I. An equation both more consistent and simpler than the Bresse–Timoshenko equation. In: GILAT, R.; BANKS-SILLS, L. (Ed.). *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, Solid Mechanics and Its Applications*. Berlin: Springer, 2010. p. 249–254.
- ENGEL, K. J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. New York: Springer, 1999.
- FAREH, A.; MESSAOUDI, S. Energy decay for a porous thermoelastic system with thermoelasticity of second sound and with a non-necessary positive definite energy. *Applied Mathematics and Computation*, v. 293, p. 493–507, 2017.
- GANTMACHER, F. R. *The theory of matrices*. [S.l.]: AMS Chelsear Publishing, American Mathematical Society, 2000.
- GARAY, M. N. Z. *Estabilidade assintótica para sistemas com amortecimento indefinido. Taxa ótima*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert space. *Transactions of American Mathematical Society*, v. 236, p. 385–394, 1978.
- GLOWINSKI R.; LI, C.; LIONS, J. L. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (i) dirichlet controls: Description of the numerical methods. *Japan J. Appl. Math.*, v. 7, p. 1–76, 1990.
- GLOWINSKI R.; LIONS, J. L.; HE, J. *Exact and approximate controllability for distributed parameters systems: a numerical approach*. New York: Cambridge University Press, 2008.
- GRAFF, K. F. *Wave motion in elastic solids*. New York: Dover Publication, 1991.
- HALE, J. *Ordinary Differential Equations*. 2<sup>l</sup>. ed. New York: Wiley-Interscience, 1980.
- HAN, S.; BENAROYA, H.; TIMOTHY, W. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999.
- HARAUX, A. Une remarque sur la stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps. *Port. Math.*, v. 46, n. 3, p. 245–258, 1989.
- HUANG, F. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. Differential Equations*, v. 1, p. 43–56, 1985.
- IESAN, D. *Thermoelastic models os continua*. [S.l.]: Springer, 2004.
- KATO, T. *Perturbation theory for linear operators*. 2<sup>a</sup> ed. Berlin: Springer, 1976.
- KOMORNIK, V. *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*. [S.l.]: John Wiley & Sons-Masson, 1994.
- LAGNESE, J. *Boundary stabilization of thin plates*. Philadelphia: SIAM, 1989.
- LAGNESE, J. E.; LIONS, J. L. *Modelling analysis and control of thin plates*. Paris: MASSON, 1988.
- LEVINSON, M.; COOKE, D. On the two frequency spectra of timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 84, n. 3, p. 319–326, 1982.

- LIONS, J. L. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués: Perturbations*. Paris: Masson, 1988.
- LIONS, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, v. 30, n. 1, p. 1–68, 1988.
- LIONS, J. L.; MAGENES, E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications*. New York: Springer, 1972.
- LIU, Z.; RAO, B. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 60, n. 1, p. 54–69, 2009.
- LIU, Z.; ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*. Boca Raton: CHAPMAN & HALL/CRC, 2000.
- MAGAÑA, A.; QUINTANILLA, R. On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, p. 3414–3427, 2006.
- MAGAÑA, A.; QUINTANILLA, R. On the time decay of solutions in porous-elasticity with quasi-static microvoids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 331, n. 1, p. 617–630, 2007.
- MEDEIROS, L. A. Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, v. 2, n. 1, p. 47–61, 1993.
- MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.
- MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M.; LOUREIRO, A. T. *Introduction to exact control theory method HUM*. Campina Grande: EDUEPB, 2013.
- MUÑOZ RIVERA, J.; RACKE, R. Global stability for damped timoshenko systems. *Discrete Continuous and Dynamical Systems*, v. 9, p. 1625–1639, 2003.
- MUÑOZ RIVERA, J.; RACKE, R. Timoshenko systems with indefinite damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 341, p. 1068–1083, 2008.
- MUÑOZ RIVERA, J. E. *Estabilização de semigrupos e aplicações*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.
- MUÑOZ RIVERA, J. E.; RACKE, R. Exponential stability for wave equations with non-dissipative damping. *Nonlinear Analysis*, v. 68, n. 1, p. 2531–2551, 2008.
- MUÑOZ RIVERA, J. E.; RACKE, R. Timoshenko systems with indefinite damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 341, p. 1068–1083, 2008.
- NEERVEN, J. v. *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1996.
- NIRENBERG, L. *Topics in nonlinear functional analysis*. Rhode Island: AMS, 1974.
- NUNZIATO, J.; COWIN, S. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Archive for Rational Mechanical Analysis*, v. 2, p. 175–201, 1979.
- PAMPLONA, P.; MUÑOZ RIVERA, J.; QUINTANILLA, R. Stabilization in elastic solids with voids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 350, p. 37–49, 2009.

- PAMPLONA, P.; MUÑOZ RIVERA, J.; QUINTANILLA, R. On the decay of solutions for porous-elastic system with history. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 319, p. 682–705, 2011.
- PAZY, H. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Springer, 1983.
- PETROV, Y. P.; SIZIKOV, V. S. *Well-posed, Ill-posed, and intermediate problems with applications*. Boston: VSP, 2005.
- PRÜSS, J. On the spectrum of  $c_0$ -semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 284, p. 847–857, 1984.
- QUINTANILLA, R. Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity. *Applied Mathematics Letters*, v. 16, p. 487–491, 2003.
- RAPOSO C. A.; MUÑOZ RIVERA, J.; ALVES, R. R. Property of growth determined by spectrum of operator associated with the timoshenko system with weakly dissipation. *Differential Equations & Applications*, v. 7, p. 385–400, 2015.
- RAYLEIGH, J. W. S. *Theory of sounds*. London: Macmillan Publications Co., Inc., 1877.
- RENARDY, M. On the type of certain  $c_0$  semigroup. *Commun. In Partial Differential Equations*, v. 18, n. 7–8, p. 1299–1307, 1993.
- RUSSELL, D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 20, n. 4, p. 639–739, 1978.
- SADEK, I. et al. Optimal control of a Timoshenko beam by distributed forces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 50, n. 3, p. 451–461, 1986.
- SANTOS, M.; CAMPELO, A.; ALMEIDA JÚNIOR, D. Rates of decay for porous elastic system weakly dissipative. *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 151, p. 1–26, 2017.
- SLEMROD, M. Asymptotic behaviour of  $c_0$  semigroups as determined by spectrum of the generator. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, p. 783–792, 1976.
- SMITH, R. Graphical representation of timoshenko beam modes for clamped-clamped boundary conditions at high frequency: Beyond transverse deflection. *Wave Motion*, v. 45, p. 785–794, 2008.
- SOUFYANE, A. Stabilization de la poutre de Timoshenko. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 328, n. 8, p. 731–734, 1999.
- STEPHEN, N. The second frequency spectrum of timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 80, p. 578–582, 1982.
- STEPHEN, N. The second frequency spectrum of timoshenko beams theory - further assessment. *Journal of Sound and Vibration*, v. 192, p. 372–389, 2006.
- TAYLOR, S. W. *Boudary Control of a Timoshenko beam with variable Physical Characteristics*. Nova Zelandia, 1996.
- TAYLOR, S. W.; YAU, S. C. Boundary control of a rotating Timoshenko beam. *ANZIAM J.*, v. 44, p. 143–184, 2003.

- TIMOSHENKO, S. *Vibration problems in engineering*. 2<sup>a</sup> ed. New York: D. Van Nostrand Company, 1937.
- TRAILL-NASH, R.; COLLAR, A. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. *The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, v. 6, p. 186–222, 1953.
- VRABIE, I.  *$C_0$ -Semigroups and applications*. Amsterdam: Elsevier, 2003.
- XU, G.; FENG, D. On the spectrum determined growth assumption and the perturbation of  $c_0$  semigroup. *Integr. Equ. Oper. Theory*, v. 39, p. 363–376, 2001.
- YOUSSEF, W. *Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés*. Tese (Doutorado) — Université Paul Verlaine de Metz, Metz, 2009.
- ZHANG, C.; HU, X. Exact controllability of a Timoshenko beam with dynamical boundary. *J. Math. Kyoto Univ.*, v. 47, n. 3, p. 643–655, 2007.
- ZUAZUA, E. *An introduction to the exact controllability for distributed systems*, *Textos e Notas 44, C. M.A.F.* Lisboa: Universidade de Lisboa, 1990.
- ZUAZUA, E. Exact controllability for the semilinear wave equation in onespace dimension. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 10, p. 109–129, 1993.