



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA - UFAM

Deiziane Mendes Wanzeler

SOBRE COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE
SISTEMAS PIEZOELÉTRICOS

Belém-PA
2021

Deiziane Mendes Wanzeler

**SOBRE COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE
SISTEMAS PIEZOELÉTRICOS**

Tese apresentada ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática- PDM - UFPA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: **Análise**

Orientador: **Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo**

Co-orientador: **Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro**

Belém-PA

2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

W244s Wanzeler, Deiziane Mendes.
Sobre comportamento assintótico de sistemas piezoelétricos /
Deiziane Mendes Wanzeler. — 2021.
140 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
Coorientador(a): Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Semigrupo. 2. Decaimento exponencial. 3. Atrator
Global. 4. Estabilidade. 5. Sistema Piezoelétrico. I. Título.

CDD 515.353

Deiziane Mendes Wanzeler

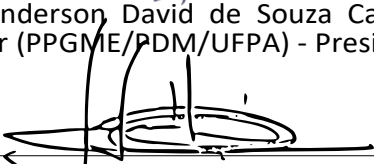
**SOBRE COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE
SISTEMAS PIEZOELÉTRICOS**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA - UFPA/UFAM, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM MATEMÁTICA.

Aprovada em 22 de Dezembro de 2021 por:



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
Orientador (PPGME/PDM/UFPA) - Presidente



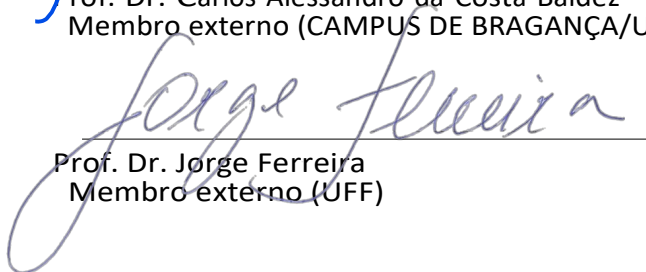
Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Membro interno (PDM/UEPA)



Prof. Dr. Manoel Jeremias dos Santos
Membro interno (PDM/UFPA)



Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez
Membro externo (CAMPUS DE BRAGANÇA/UFPA)



Prof. Dr. Jorge Ferreira
Membro externo (UFF)

Ao futuro: Weversom Wanzeler

Agradecimentos

★ Agradeço a Deus, Todo Poderoso, fonte de toda a sabedoria, que me concedeu a vida e força para chegar ao final deste trabalho;

★ Agradeço em especial a minha avó e meu avô, que sempre deram força e bons exemplos para seguir em frente;

★ Ao meu orientador, Prof. Dr. Anderson Campelo, pela orientação, disponibilidade e atenção dispensados na elaboração deste trabalho;

★ Ao Prof. Dr. Sebastião Siqueira, pela orientação, paciência e tranquilidade num momento decisivo do desenvolvimento deste trabalho;

★ Aos professores do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística;

★ A todos aqueles que mesmo inconscientes do papel que cumpriam, tornaram esta travessia mais amena.

Resumo

Neste trabalho mostraremos a existência e unicidade de soluções e o comportamento assintótico de sistemas de vigas piezoelétricas com efeito magnético com diferentes abordagens de mecanismos de amortecimento, para analisar os resultados citados, usaremos as teorias de semigrupo linear, não linear, quase-estabilidade, associados ao seguinte sistema básico de equações piezoelétricas

$$\begin{aligned}\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} &= 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty).\end{aligned}$$

Consirando as seguintes condições iniciais

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), p(x, 0) = p_0(x), p_t(x, 0) = p_1(x) \quad \text{em } (0, L),$$

e as condições de fronteira

$$\begin{aligned}v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \\ p(0, t) = p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \quad .\end{aligned}$$

Palavras-chave: Sistemas piezoelétricos; semigrupo; decaimento exponencial; atrator global; quasi-estabilidade.

Abstract

In this paper we will show the existence and uniqueness of solutions and the asymptotic behavior piezoelectric beam systems with magnetic effect with different approaches to damping mechanisms associated with the following basic system of piezoelectric equations

$$\begin{aligned}\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} &= 0 \quad em \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ \mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} &= 0 \quad em \quad (0, L) \times (0, \infty).\end{aligned}$$

where $\rho, \alpha, \gamma, \beta$ and μ denote mass density per unit volume, elastic stiffness, piezoelectric coefficient, magnetic permeability and impermittivity coefficient of the beam, respectively, and

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta$$

We consider the initial conditions given by

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), p(x, 0) = p_0(x), p_t(x, 0) = p_1(x) \quad em \quad (0, L),$$

and boundary conditions

$$\begin{aligned}v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \quad , \\ p(0, t) = p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \quad .\end{aligned}$$

Keywords: Piezoelectric Systems; semigroup; exponential decay; global attractor; quasi-stability.

SUMÁRIO

Resumo	6
Abstract	7
Introdução	2
0.1 Objetivos da Tese	8
0.2 Organização da Tese	8
1 Sistema Piezoelétrico com Efeito Magnético e Dissipação do Tipo Kelvin-Voigt	10
1.1 Energia do Sistema	11
1.2 Existência e Unicidade	13
1.3 Analiticidade	17
2 Sistema Piezoelétrico com Dissipação Viscoelástica	22
2.1 Energia do Sistema	23
2.2 Existência e Unicidade	24
2.3 Decaimento Exponencial	28
2.4 Análise Numérica	34
2.4.1 Aproximação por Elementos Finitos	34
2.4.2 Aproximação via Galerkin	35
2.4.3 Método das Acelerações Generalizadas	36
2.4.4 Simulações Numéricas	38
3 Sistema Piezoelétrico com Efeito Magnético e Dissipação não linear	42
3.1 Apresentação	42
3.2 Energia do Sistema	43
3.3 O Cenário de Semigrupo	47
3.4 Comportamento Assintótico	51
3.5 Simulações Numéricas	66
3.5.1 Aproximação via Elementos Finitos para a Solução $\{v, p\}$	66
3.5.2 Aproximação via Galerkin	66
3.5.3 Simulações	68
4 Sistema Piezoelétrico com a Lei de Coleman - Gurtin	74

4.1	Hipóteses e Configuração de Espaço	76
4.2	Energia do Sistema	78
4.3	O Semigrupo	81
4.4	Atrator Global	87
4.5	Atrator Global e sua Dimensão Fractal	89
4.5.1	Sistema gradiente e soluções estacionárias	90
4.5.2	Quase-estabilidade	92
4.5.3	Atrator Exponencial	105
5	Sistema Piezoelétrico com a Lei de Coleman - Gurtin 2	108
5.1	Hipóteses e Configuração de Espaço	110
5.2	Energia do Sistema	112
5.3	O Semigrupo	113
5.4	Atrator Global	116
5.5	Atrator Global e sua Dimensão Fractal	116
5.5.1	Sistema gradiente e soluções estacionárias	116
5.5.2	Quasi-estabilidade	119
	BIBLIOGRAFIA	128

Introdução

De um modo geral, o fenômeno de piezoelectricidade é a capacidade que alguns materiais têm de gerarem tensão elétrica quando sofrem um esforço mecânico[12]. O termo "piezo" é derivado da palavra grega que significa pressão. A piezoelectricidade foi descoberta pelos irmãos Pierre e Jacques Curie, na França, em 1880, o efeito piezoelectrico é encontrado em cristais e algumas cerâmicas. Desenvolver tecnologia com tais materiais é de grande importância atualmente, pois trata-se de uma energia limpa, tais como, a solar, eólica, entre outras. Hoje em dia, materiais piezoelectricos têm sido usados para fazer muitos dispositivos eletromecânicos, como transdutores, que convertem energia elétrica em mecânica ou vice-versa [12], sensores acústicos, os sensores de airbag de carro, pelos quais são responsáveis, enviam um sinal elétrico que aciona o airbag.

Um material piezoelectrico, quando submetido a um campo elétrico, sofre alterações em suas dimensões (atuador). O inverso também acontece, ou seja, quando sofre uma deformação, um campo elétrico é gerado (sensor), por esse motivo a Lei de Hooke não descreve completamente o comportamento eletromecânico desse tipo de material, pois este está sujeito a um campo elétrico.

Como forma de caracterizar, temos que uma placa piezoelectrica é uma placa elástica com eletródos nas superfícies superior e inferior isoladas nas bordas e conectadas a um circuito elétrico externo. Estas estruturas sobre as quais vamos estudar é uma interação entre as energias elétrica, mecânica e magnética nos sistemas. Observa-se experimentalmente que os efeitos magnéticos são menores na dinâmica geral do material (pode ser um cristal ou cerâmica) polarizado, e portanto, estes efeitos são ignorados nos modelos de placa piezoelectrica. Para iniciar, vamos citar a equação de Euler-Bernoulli para pequenos deslocamentos, como em [4]

$$\begin{aligned}\rho v_{tt} - \alpha_1 v_{xx} &= 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ v(0, t) = 0, \quad \alpha_1 v_x(L, t) &= -\frac{\gamma V(t)}{h}, & t \in \mathbb{R}^+ \\ (v, \dot{v})(x, 0) &= (v_0, v_1), & x \in [0, L]\end{aligned}$$

onde ρ, α_1, γ denotam densidade por unidade de massa, rigidez elástica e coeficiente piezoelétrico da placa, respectivamente, $V(t)$ denota a voltagem aplicada nos eletrodos e v denota deslocamento longitudinal da placa, notamos que este modelo representa o início do estudo que propomos, mas ainda precisamos mostrar a influência do campo elétrico.

Sejam x_1, x_3 as direções longitudinal e transversal, respectivamente. Seja $\Omega = [0, L] \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ onde $h \ll L$. Uma relação constitutiva linear amplamente utilizada [20] para vigas piezoelétricas é

$$\begin{pmatrix} T \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -\gamma^T \\ \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ E \end{pmatrix}$$

onde $T = (T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{23}, T_{13}, T_{12})^T$ é o vetor de tensão, $S = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{23}, S_{13}, S_{12})^T$ é o vetor de deformação, $D = (D_1, D_2, D_3)^T$ e $E = (E_1, E_2, E_3)^T$ são os deslocamentos elétrico e campo elétrico, respectivamente, e as matrizes $[c], [\gamma], [\varepsilon]$ são as componentes elástica, eletromecânica e dielétrica [20]. Contando com a isotropia transversal e polarização na direção x_3 , essas matrizes se reduzem a

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{15} & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{31} & \gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Como $h \ll L$, assumimos que todas as forças que atuam na direção de x_2 são iguais a zero.

Além disso, T_{33} considerado zero. Portanto,

$$T = (T_{11}, T_{13})^T, \quad S = (S_{11}, S_{13})^T, \quad D = (D_1, D_3)^T, \quad E = (E_1, E_3)^T$$

e a nossa relação inicial reduz-se a

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{13} \\ D_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & -\gamma_{31} \\ 0 & c_{55} & -\gamma_{15} & 0 \\ 0 & \gamma_{15} & \varepsilon_{11} & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{13} \\ E_1 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para uma viga de Euler-Bernoulli, a tensão de cisalhamento $S_{13} = 0$. As equações

constitutivas lineares das vigas piezoelétricas de Euler-Bernoulli são da seguinte forma

$$T_{11} = C_{11}S_{11} - \gamma_{31}E_3, \quad (0.1)$$

$$T_{13} = -\gamma_{15}E_1, \quad (0.2)$$

$$D_1 = \varepsilon_{11}E_1, \quad (0.3)$$

$$D_3 = \gamma_{31}S_{11} + \varepsilon_{33}E_3. \quad (0.4)$$

Com uma análise complementar, podemos aplicar o Lagrangiano de diferentes formas nosso o objetivo de controlar a voltagem aplicada que irá aparecer no termo de trabalho e pode ser controlada de acordo com os termos de fronteira, lembrando que no nosso caso iremos usar a voltagem $V(t) = 0$. As relações constitutivas dadas em (0.1)–(0.4) podem ser transformadas nas relações em termos (T, E) , organizando de forma adequada as constantes positivas conhecidas

$$T_{11} = \alpha S_{11} - \gamma\beta D_3, \quad (0.5)$$

$$T_{13} = -\gamma_1\beta_1 D_1, \quad (0.6)$$

$$E_1 = \beta_1 D_1, \quad (0.7)$$

$$E_3 = -\gamma\beta S_{11} + \beta D_3, \quad (0.8)$$

onde,

$$\gamma = \gamma_{31}, \quad \gamma_1 = \gamma_{15}, \quad \alpha = \alpha_1 + \gamma^2\beta, \quad \alpha_1 = c_{11}, \quad \beta = \frac{1}{\varepsilon_{33}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\varepsilon_{11}}.$$

Vamos supor que não hajam cargas externas no corpo e nem correntes corporais, e assumindo que $E_1 = 0$, portanto $D_1 = 0$, por (0.7) e $T_{13} = 0$, por (0.6).

Agora, vamos supor que D_3 não varia na direção da espessura

$$D_3 = (x, x_3, t) = D_3(x, t).$$

Essas suposições estão de acordo com a escolha do potencial elétrico definido como linear na direção da espessura, portanto, o componente do campo elétrico na direção da espessura satisfaz

$$E_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \beta D_3(x, t).$$

Definimos

$$p = \int_0^x D_3(\xi, t) d\xi,$$

para ser a carga elétrica total no ponto x . Portanto $p_x = D_3$.

De forma que teremos então as equações (0.5) e (0.8) formando o sistema para a análise de viga piezoelétrica sendo v o deslocamento transversal da viga e p é a carga total do deslocamento elétrico ao longo da direção transversal em cada ponto x , assim temos o sistema

$$\begin{aligned} T &= \alpha v_x - \gamma \beta p_x, \\ E &= -\gamma \beta v_x + \beta p_x, \end{aligned}$$

onde

$$T_x = \rho v_{tt} \quad e \quad E_x = \mu p_{tt}.$$

O Lagrangiano devido a este modelo é dado da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \int_0^T [K - (P + E) + B] dt, \quad (0.9)$$

onde K, P, E , e B denotam as energias cinética, potencial, elétrica e magnética, respectivamente, para uma viga de comprimento L e espessura h , teremos

$$\begin{aligned} P + E &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T_{11} S_{11} + D_3 E_3) dX = \frac{h}{2} \int_0^L (P + E) dx \\ &= \frac{h}{2} \int_0^L [\alpha |v_x|^2 - 2\gamma\beta v_x p_x + \beta |p_x|^2] dx \end{aligned} \quad (0.10)$$

$$B = \mu \frac{h}{2} \int_0^L |p_t|^2 dx \quad (0.11)$$

$$K = h \frac{\rho}{2} \int_0^L |v_t|^2 dx \quad (0.12)$$

Usando (0.10)–(0.12) para calcular (0.9) e aplicando o princípio de Hamilton, para as variações $\{v, p\}$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -h \int_0^L (\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx}) \delta v dx - h \int_0^L (\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx}) \delta p dx \\ &\quad - h \delta \alpha v_x v \Big|_0^L + h \delta \gamma \beta v_x p \Big|_0^L + h \delta \gamma \beta v p_x \Big|_0^L - h \delta \beta p_x p \Big|_0^L \\ &= -h \int_0^L (\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx}) \delta v dx - h \int_0^L (\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx}) \delta p dx \\ &\quad - h [(\alpha v_x - \gamma \beta p_x) \delta v]_0^L - h [(\beta p_x - \gamma \beta v_x) \delta p]_0^L = 0. \end{aligned} \quad (0.13)$$

Portanto,

$$\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} = 0, \quad (0.14)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = 0, \quad (0.15)$$

com as seguintes condições de fronteira

$$v(0, t) = p(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) = \beta p_x(L, t) - \gamma \beta v_x(L, t) = 0, \quad (0.16)$$

e condições iniciais

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), p(x, 0) = p_0(x), p_t(x, 0) = p_1(x). \quad (0.17)$$

Agora, citaremos alguns resultados que foram importantes para esta pesquisa, nas diversas abordagens que serão mostradas no decorrer deste trabalho, considerando um sistema de equações piezoelétricas com efeito magnético.

Em [4], K. A. Morris e A. Ozer, os autores, utilizaram uma abordagem variacional para construir um modelo acoplado de vigas piezoelétricas com efeito magnético, dado pelo seguinte sistema

$$\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} = 0$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = 0$$

com as condições de fronteira

$$v(0, t) = p(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) = 0, \\ \beta p_x(L, t) - \gamma \beta v_x(L, t) = -\frac{V(t)}{h},$$

e as condições iniciais

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), p(x, 0) = p_0(x), p_t(x, 0) = p_1(x),$$

onde $\rho, \alpha, \gamma, \mu, \beta$ e V denotam respectivamente, a densidade da massa por volume unitário, a rigidez elástica, o coeficiente piezoelétrico, permeabilidade magnética, coeficiente de resistência a água e a tensão prescrita nos eletródos da viga, além disso, fora considerada a relação

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta$$

neste trabalho os autores provaram que o efeito magnético, apesar de relativamente pequeno, influencia na estabilidade e controle do sistema.

No artigo [5], dos autores Anderson J. A. Ramos e seus colaboradores, estudaram o seguinte modelo com termo de dissipação na primeira equação

$$\begin{aligned}\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta v_t &= 0, \quad \in (0, L) \times (0, T) \\ \mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} &= 0, \quad \in (0, L) \times (0, T) \\ v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) &= 0, \quad \in 0 \leq t \leq T \\ p(0, t) = \gamma v_x(L, t) - p_x(L, t) &= 0, \quad \in 0 \leq t \leq T \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad p_t(x, 0) = p_1(x), &\quad \in 0 \leq t \leq T,\end{aligned}$$

onde $\rho, \alpha, \gamma, \mu, \beta, \delta$ são constantes positivas. Neste artigo os autores mostraram o decaimento exponencial da energia e aspectos numéricos associados ao sistema dissipativo acima, de vigas piezoelétricas com efeito magnético.

Em [18], Salim A. Messaoudi e outros, temos um sistema com uma função não linear g na segunda equação como segue

$$\begin{aligned}\varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x &= 0, \quad (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ \psi_{tt} - \psi_{xx} + \varphi_x + \psi + \alpha(t)g(\psi_t) &= 0, \quad (0, 1) \times \mathbb{R}_+ \\ \varphi(0, \cdot) = \varphi(1, \cdot) = \psi(0, \cdot) = \psi(1, \cdot) &= 0, \quad t \leq 0 \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad x &\in (0, 1) \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \quad x &\in (0, 1)\end{aligned}$$

os autores mostraram um resultado geral sobre o decaimento da energia dependendo de g e α , este artigo fora uma referência para analisarmos o decaimento da energia do nosso sistema, que será apresentado no decorrer deste trabalho.

Em [39], os autores M.M. Freitas e outros, mostraram resultados para um sistema formado por equações piezoelétricas com efeito magnético e lei de Fourier, onde mostraram a existência do atrator global com dimensão fractal finita, usando a teoria da quasi-estabilidade, provaram a existência do atrator exponencial generalizado e resultado para a estabilidade, nas seguintes

condições

$$\begin{aligned}\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x + f_1(v, p) &= h_1 \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} + A^\nu p_t + f_2(v, p) &= h_2 \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \delta v_{xt} &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T),\end{aligned}$$

onde f_1, f_2 são termos de força não lineares e h_1, h_2 são forças externas e

$$\begin{aligned}v(0, t) &= \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ p(0, t) &= p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ \theta(0, t) &= \theta(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= v_0, \quad v_t(x, 0) = v_1, \quad 0 < x < L, \\ p(x, 0) &= p_0, \quad p_t(x, 0) = p_1, \quad 0 < x < L, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0, \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x).\end{aligned}$$

0.1 Objetivos da Tese

Neste trabalho, temos como objetivo principal, o estudo do comportamento assintótico de sistemas piezoelétricos, procuramos estudar estes sistemas fazendo uma análise do decaimento exponencial quando $t \rightarrow +\infty$, com variadas abordagens no que tange os mecanismos de dissipação dos tipos linear e não linear, usando as teorias de semigrupos e de quasi-estabilidade. Também buscamos caracterizar o comportamento assintótico por meio de atratores globais compactos.

0.2 Organização da Tese

A tese esta organizada da seguinte forma:

No capítulo 1, temos um sistema piezoelétrico com mecanismo dissipativo do tipo kelvin-Voigt, mostramos a existência e unicidade de soluções, usando técnicas de semigrupo de operadores lineares, mostramos que o sistema em questão tem propriedade analítica, e usando o teorema de Gearhart é portanto exponencialmente estável.

No capítulo 2, temos um mecanismo dissipativo viscoelástico na primeira equação do sistema, este segue do sistema anterior, mostramos que o sistema é exponencialmente estável e não possui propriedade analítica, também iremos tratar de alguns experimentos numéricos, aplicando o

método de Newmark, onde conseguimos visualizar nossos resultados sobre o decaimento exponencial caracterizado no sistema.

No capítulo 3, temos um mecanismo dissipativo do tipo não linear na primeira equação do sistema, mostramos a existência e unicidade de soluções, usando técnicas de semigrupo de operadores não lineares, e mostramos uma taxa geral de decaimento da energia associada ao sistema.

No capítulo 4, estudamos um sistema piezoelétrico com dois mecanismos dissipativos não lineares e lei de Coleman-Gurtin para descrever o efeito temperatura, assim caracterizando o comportamento assintótico por meio de atratores globais compactos, para tal, provamos que o sistema é do tipo gradiente e assintoticamente regular, para então obter a existência de um atrator global com dimensão fractal finita, que será caracterizado como uma variedade instável do conjunto de soluções estacionárias, usamos a teoria de quasi-estabilidade (provada por meio de uma desigualdade de estabilização) diretamente em um conjunto positivamente invariante e limitado, e também mostramos a existência de um atrator exponencial generalizado.

No capítulo 5, estudamos um sistema piezoelétrico com um mecanismo dissipativo não linear e lei de Coleman-Gurtin para descrever o efeito temperatura, de forma que usamos as mesmas técnicas do capítulo anterior, preservando os resultados.

Capítulo 1

Sistema Piezoelétrico com Efeito Magnético e Dissipação do Tipo Kelvin-Voigt

Neste capítulo vamos estudar a existência, unicidade de soluções e o comportamento assintótico para um sistema piezoelétrico com dissipação linear do tipo Kelvin-Voigt.

Seja o seguinte sistema

$$\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \alpha_2 v_{xxt} + \gamma_1 \beta_1 p_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.1)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} + \gamma_1 \beta_1 v_{xxt} - \beta_1 p_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.2)$$

onde

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta \quad (1.3)$$

e

$$\alpha_2 > \gamma_1^2 \beta_1, \quad \alpha_2, \gamma_1, \beta_1 > 0, \quad (1.4)$$

com $\rho, \alpha, \gamma, \beta$ e μ constantes positivas que denotam a densidade de massa por unidade, rigidez elástica, coeficiente piezoelétrico, permeabilidade magnética e impermeabilidade do coeficiente da viga, respectivamente, e sejam condições iniciais

$$v(x, 0) = v_0(x); v_t(x, 0) = v_1(x); p(x, 0) = p_0(x); p_t(x, 0) = p_1(x) \text{ em } (0, L) \quad (1.5)$$

e as condições de fronteira dadas por

$$\begin{aligned} v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \\ p(0, t) = p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Devido a relação (1.3), a condição de fronteira (1.6) é equivalente a

$$\begin{aligned} v(0, t) = v_x(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ p(0, t) = p_x(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.1 Energia do Sistema

A energia de soluções do sistema (1.1) – (1.7) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx \quad (1.8)$$

O funcional energia $E(t)$, definido acima, é não crescente para todo $t > 0$. De fato, conforme será mostrado abaixo:

Proposição 1.1.1. (*Energia do modelo*) *Seja (v, v_t, p, p_t) a solução associada ao sistema (1.1) – (1.7), então*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -(\alpha_2 - \gamma_1^2 \beta_1) \int_0^L |v_{xt}|^2 dx - \beta_1 \int_0^L |\gamma_1 v_{xt} - p_{xt}|^2 dx, \quad (1.9)$$

Assim,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.10)$$

Demonstração: Para obtermos a energia do sistema (1.1) – (1.2), iniciamos multiplicando a equação (1.1) por v_t , integramos em $(0, L)$, usamos integração por partes e aplicamos as condições de fronteira:

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L v_{tt} v_t dx + \alpha_1 \int_0^L v_x v_{xt} dx + \gamma^2 \beta \int_0^L v_x v_{xt} dx - \gamma \beta \int_0^L p_x v_{xt} dx + \alpha_2 \int_0^L v_{xt} v_{xt} dx \\ - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L p_{xt} v_{xt} dx = 0 \end{aligned}$$

Organizando resultados, teremos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{\alpha_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\gamma^2 \beta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_x|^2 dx - \gamma \beta \int_0^L p_x v_{xt} dx \\ & + \alpha_2 \int_0^L |v_{xt}|^2 dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L p_{xt} v_{xt} dx = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Agora, multiplicando a equação (1.2) por p_t , integramos em $(0,L)$, usamos integração por partes e aplicamos as condições de fronteira:

$$\mu \int_0^L p_{tt} p_t dx + \beta \int_0^L p_x p_{xt} dx - \gamma \beta \int_0^L v_x p_{xt} dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L v_{xt} p_{xt} dx + \beta_1 \int_0^L p_{xt} p_{xt} dx = 0.$$

Organizando resultados, temos

$$\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |p_x|^2 dx - \gamma \beta \int_0^L v_x p_{xt} dx + \beta_1 \int_0^L |p_{xt}|^2 dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L v_{xt} p_{xt} dx = 0 \quad (1.12)$$

Somando as equações (1.11) e (1.12), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx &= -\alpha_2 \int_0^L |v_{xt}|^2 dx + 2\gamma_1 \beta_1 \int_0^L p_{xt} v_{xt} dx \\ &- \beta_1 \int_0^L |p_{xt}|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora, somando e subtraindo o termo $\gamma_1^2 \beta_1 \int_0^L |v_{xt}|^2 dx$ na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx &= -\alpha_2 \int_0^L |v_{xt}|^2 dx + \gamma_1^2 \beta_1 \int_0^L |v_{xt}|^2 dx \\ &- \gamma_1^2 \beta_1 \int_0^L |v_{xt}|^2 dx + 2\gamma_1 \beta_1 \int_0^L p_{xt} v_{xt} dx - \beta_1 \int_0^L |p_{xt}|^2 dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx &= -(\alpha_2 - \gamma_1^2 \beta_1) \int_0^L |v_{xt}|^2 dx \\ &- \beta_1 \left(\gamma_1^2 \int_0^L |v_{xt}|^2 dx - 2\gamma_1 \int_0^L p_{xt} v_{xt} dx + \int_0^L |p_{xt}|^2 dx \right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

resultando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [\rho|v_t|^2 + \mu|p_t|^2 + \alpha_1|v_x|^2 + \beta|\gamma v_x - p_x|^2] dx &= -(\alpha_2 - \gamma_1^2 \beta_1) \int_0^L |v_{xt}|^2 dx \\ -\beta_1 \int_0^L |\gamma_1 v_{xt} - p_{xt}|^2 dx, & \end{aligned} \quad (1.14)$$

a energia associada ao sistema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho|v_t|^2 + \mu|p_t|^2 + \alpha_1|v_x|^2 + \beta|\gamma v_x - p_x|^2] dx.$$

De (1.14), seguem os resultados (1.9) e (1.10). Neste caso, temos que a energia do sistema é dissipativa.

1.2 Existência e Unicidade

Consideremos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} = \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times L^2(0, L) \times L^2(0, L), \quad (1.15)$$

onde

$$\mathbb{V} = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi(0) = 0\}. \quad (1.16)$$

Agora, vamos considerar o seguinte produto interno em \mathcal{H} , definido por

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &:= \int_0^L \{\rho u_3 v_3 + \mu u_4 v_4\} dx + \int_0^L \{\alpha_1 u_{1x} v_{1x} + \beta(\gamma u_{1x} - u_{2x})(\gamma v_{1x} - v_{2x})\} dx \\ &= \int_0^L \{\rho u_3 \bar{v}_3 + \mu u_4 \bar{v}_4\} dx \\ &+ \int_0^L \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma^2 \beta & -\gamma \beta \\ -\gamma \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{2x} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} dx \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)'$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)'$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ é o produto interno no \mathbb{R}^2 . De fato, (1.17) é um produto interno se a matriz $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma^2 \beta & -\gamma \beta \\ -\gamma \beta & \beta \end{pmatrix}$ é positiva definida.

E a norma

$$\|(u_1, u_2, u_3, u_4)\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho \int_0^L |u_3|^2 dx + \mu \int_0^L |u_4|^2 dx + \alpha_1 \int_0^L |u_{1x}|^2 dx + \beta \int_0^L |\gamma u_{1x} - u_{2x}|^2 dx.$$

Vamos reescrever o sistema (1.1) – (1.2), como um problema de Cauchy, com $U = (v, p, V, P)'$, onde $v_t = V$ e $p_t = P$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U, \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde $U_0 = (v_0, p_0, v_1, p_1)'$ é o vetor dos dados iniciais e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador diferencial representado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} V \\ P \\ \frac{1}{\rho} (\alpha v_{xx} - \gamma \beta p_{xx} + \alpha_2 V_{xx} - \gamma_1 \beta_1 P_{xx}) \\ \frac{1}{\mu} (\beta p_{xx} - \gamma \beta v_{xx} - \gamma_1 \beta_1 V_{xx} + \beta_1 P_{xx}) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Definimos o domínio do operador \mathcal{A} , dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{U = (v, p, V, P) \in \mathcal{H}; (V, P) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}, \alpha v - \gamma \beta p + \alpha_2 V - \gamma_1 \beta_1 P \in H^2(0, L), \\ &\quad \beta p - \gamma \beta v - \gamma_1 \beta_1 V + \beta_1 P \in H^2(0, L)\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Teorema 1.2.1. *O operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contrações em \mathcal{H} . Assim, para algum $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (1.1) – (1.7) tem uma única solução fraca. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então U é uma solução forte do sistema (1.1) – (1.7).*

Demonstração: Seja $U = (v, p, v_t, p_t)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, usando a definição de produto interno dada anteriormente, temos que

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -(\alpha_2 - \gamma_1^2 \beta_1) \int_0^L |V_x|^2 dx - \beta_1 \int_0^L |\gamma_1 V_x - P_x|^2 dx, \quad (1.21)$$

portanto, temos que o operador \mathcal{A} é dissipativo. Sabendo que o domínio de \mathcal{A} é denso em \mathcal{H} ($\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$). Então, aplicaremos o teorema de Lummer-Phillips (ver Pazy [10]), para provar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contrações.

Para tal, precisamos mostrar que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Seja a equação resolvente

$$U - \mathcal{A}U = F. \quad (1.22)$$

Tomando $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)' \in \mathcal{H}$ e $U = (v, p, V, P)'$. Então a equação (1.22) em termos de suas componentes, será da forma

$$v - V = f_1, \quad (1.23)$$

$$p - P = f_2, \quad (1.24)$$

$$\rho V - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \alpha_2 V_{xx} + \gamma_1 \beta_1 P_{xx} = \rho f_3, \quad (1.25)$$

$$\mu P + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} + \gamma_1 \beta_1 V_{xx} - \beta_1 P_{xx} = \mu f_4. \quad (1.26)$$

De (1.23) e (1.24), teremos

$$V = v - f_1, \quad (1.27)$$

$$P = p - f_2. \quad (1.28)$$

Agora, substituindo (1.27) – (1.28) em (1.25), teremos

$$\begin{aligned} \rho(v - f_1) - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \alpha_2(v_{xx} - f_{1xx}) + \gamma_1 \beta_1(p_{xx} - f_{2xx}) &= \rho f_3 \\ \rho v - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \alpha_2 v_{xx} + \gamma_1 \beta_1 p_{xx} &= \rho(f_1 + f_3) - \alpha_2 f_{1xx} + \gamma_1 \beta_1 f_{2xx}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Substituindo (1.27) – (1.28) em (1.26), teremos

$$\begin{aligned} \mu(p - f_2) + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} + \gamma_1 \beta_1(v_{xx} - f_{1xx}) - \beta_1(p_{xx} - f_{2xx}) &= \mu f_4 \\ \mu p + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} + \gamma_1 \beta_1 v_{xx} - \beta_1 p_{xx} &= \mu(f_2 + f_4) + \gamma_1 \beta_1 f_{1xx} - \beta_1 f_{2xx}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dessa maneira, de (1.29) – (1.30), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \rho v - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \alpha_2 v_{xx} + \gamma_1 \beta_1 p_{xx} &= \rho(f_1 + f_3) - \alpha_2 f_{1xx} + \gamma_1 \beta_1 f_{2xx}, \\ \mu p + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} + \gamma_1 \beta_1 v_{xx} - \beta_1 p_{xx} &= \mu(f_2 + f_4) + \gamma_1 \beta_1 f_{1xx} - \beta_1 f_{2xx}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Multiplicando as equações (1.31)₁ – (1.31)₂ por \bar{v} e \bar{p} , respectivamente, integrando em (0,L)

e usando integração por partes, teremos

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L v \bar{v} dx + \alpha \int_0^L v_x \bar{v}_x dx - \gamma \beta \int_0^L p_x \bar{v}_x dx + \alpha_2 \int_0^L v_x \bar{v}_x dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L p_x \bar{v}_x dx \\ &= \rho \int_0^L (f_1 + f_3) \bar{v} dx - \alpha_2 \delta \int_0^L f_{1x} \bar{v}_x dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L f_{2x} \bar{v}_x dx, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} & \mu \int_0^L p \bar{p} dx - \gamma \beta \int_0^L v_x \bar{p}_x dx + \beta \int_0^L p_x \bar{p}_x dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L v_x \bar{p}_x dx + \beta_1 \int_0^L p_x \bar{p}_x dx \\ &= \mu \int_0^L (f_2 + f_4) \bar{p} dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L f_{1x} \bar{p}_x dx + \beta_1 \int_0^L f_{2x} \bar{p}_x dx. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Somando as equações (1.32) – (1.33), obtemos

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L v \bar{v} dx + \alpha \int_0^L v_x \bar{v}_x dx + \alpha_2 \int_0^L v_x \bar{v}_x dx + \mu \int_0^L p \bar{p} dx + \beta \int_0^L p_x \bar{p}_x dx + \beta_1 \int_0^L p_x \bar{p}_x dx \\ & - \gamma \beta \int_0^L p_x \bar{v}_x dx - \gamma \beta \int_0^L v_x \bar{p}_x dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L p_x \bar{v}_x dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L v_x \bar{p}_x dx \\ &= \rho \int_0^L (f_1 + f_3) \bar{v} dx + \mu \int_0^L (f_2 + f_4) \bar{p} dx - \alpha_2 \int_0^L f_{1x} \bar{v}_x dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L f_{2x} \bar{v}_x dx \\ & - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L f_{1x} \bar{p}_x dx + \beta_1 \int_0^L f_{2x} \bar{p}_x dx. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Portanto, para solucionar o problema (1.31), consideremos a forma bilinear abaixo:

$$a : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R},$$

onde $\Gamma = \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ e

$$\begin{aligned} a((v, p), (\varphi, \phi)) &= \rho \int_0^L v \bar{\varphi} dx + \alpha \int_0^L v_x \bar{\varphi}_x dx + \alpha_2 \int_0^L v_x \bar{\varphi} dx + \mu \int_0^L p \bar{\phi} dx + \beta \int_0^L p_x \bar{\phi}_x dx \\ &+ \beta_1 \int_0^L p_x \bar{\phi}_x dx - \gamma \beta \int_0^L p_x \bar{\varphi}_x dx - \gamma \beta \int_0^L v_x \bar{\phi}_x dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L p_x \bar{\varphi}_x dx \\ &- \gamma_1 \beta_1 \int_0^L v_x \bar{\phi}_x dx, \end{aligned} \quad (1.35)$$

segue que a forma bilinear é (1.35) é contínua e coerciva sobre o espaço de Hilbert Γ . Além disso, definimos uma aplicação T linear e contínua,

$$T : \Gamma \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(\varphi, \phi) \mapsto T(\varphi, \phi),$$

onde,

$$\begin{aligned} T &:= \rho \int_0^L (f_1 + f_3) \bar{v} \, dx + \mu \int_0^L (f_2 + f_4) \bar{p} \, dx - \alpha_2 \int_0^L f_{1x} \bar{v}_x \, dx - \gamma_1 \beta_1 \int_0^L f_{2x} \bar{v}_x \, dx \\ &- \gamma_1 \beta_1 \int_0^L f_{1x} \bar{p}_x \, dx + \beta_1 \int_0^L f_{2x} \bar{p}_x \, dx. \end{aligned}$$

Portanto, usando o teorema de Lax-Milgran (H. Brézis[2]), segue que existe uma única solução $(v, p) \in \Gamma$, que satisfaz o problema variacional

$$a((v, p), (\varphi, \phi)) = \langle T, (\varphi, \phi) \rangle, \quad \forall (\varphi, \phi) \in \Gamma.$$

Assim, temos que existe uma única $(v, p) \in \Gamma$ que satisfaz o sistema (1.31). Daí,

$$v \in \mathbb{V} \text{ e } p \in \mathbb{V}. \quad (1.36)$$

Usando (1.36) em (1.23) e (1.24), teremos

$$V \in \mathbb{V} \text{ e } P \in \mathbb{V}$$

Portanto, $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e sendo assim $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor, de forma que, podemos agora, aplicar o teorema de Lummer-Phillips, concluindo que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

1.3 Analiticidade

Nesta seção provaremos que o semigrupo, associado ao sistema (1.1) – (1.7), é analítico, para tal, precisaremos dos lemas que seguirem, com o objetivo de aplicarmos o seguinte teorema

Teorema 1.3.1. *Seja $S(t)$ um semigrupo C_0 de contrações gerado por um operador \mathcal{A} num espaço de Hilbert H . Suponha que*

$$i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A}).$$

Então $S(t)$ é analítico se, e somente se,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sup \|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos iniciar estruturando condições para mostrar o teorema acima.

Consideremos $U = (v, p, V, P)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)' \in \mathcal{H}$. Então a equação resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$ em termos de suas componentes fica escrita na forma

$$i\lambda v - V = f^1, \quad (1.37)$$

$$i\lambda p - P = f^2, \quad (1.38)$$

$$i\lambda \rho V - \alpha_1 v_{xx} - \gamma^2 \beta v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \alpha_2 V_{xx} + \gamma_1 \beta_1 P_{xx} = \rho f^3, \quad (1.39)$$

$$i\lambda \mu P + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} + \gamma_1 \beta_1 V_{xx} - \beta_1 P_{xx} = \mu f^3, \quad (1.40)$$

Fazendo o produto interno em \mathcal{H} , de U com a equação resolvente de \mathcal{H} , teremos

$$i\lambda \|U\|^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}. \quad (1.41)$$

Tomando a parte real da equação anterior e usando (1.21), teremos que

$$(\alpha_2 - \gamma_1^2 \beta_1) \int_0^L |V_x|^2 dx + \beta_1 \int_0^L |\gamma_1 V_x - P_x|^2 dx \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.42)$$

Lema 1.3.1. *Seja \mathcal{A} o operador linear definido em (1.19) – (1.20). Então*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}),$$

onde ϱ é o conjunto resolvente de \mathcal{A} .

Prova: Para provar o lema é suficiente mostrarmos que o operador \mathcal{A} não possui autovalor imaginário puro. Observando que zero não é um autovalor de \mathcal{A} . Dessa forma, podemos supor que existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tal que $i\lambda$ seja um autovalor e $U = (v, p, V, P)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ seja um autovetor da forma $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$ e tal que

$$\mathcal{A}U - i\lambda U = 0.$$

Com o objetivo de provar que $U = (0, 0, 0, 0)'$, o que contraria o fato que $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$. De forma que, fazendo o produto interno em \mathcal{H} da equação anterior com U , obtemos

$$i\lambda \|U\|^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0. \quad (1.43)$$

Assim, de (1.42), com $F = 0$, podemos deduzir que $V_x = 0$ e $P_x = 0$, agora usando a desigualdade de Poincaré, temos que $V = 0$ e $P = 0$. De (1.37) – (1.38), com $f^1 = f^2 = 0$,

deduzimos que $v = 0$ e $p = 0$, respectivamente. Dessas análises, obtemos que $U = 0$, mas isso é uma contradição, o que nos permite concluir que não existem autovalores imaginários puros e o resultado está provado.

Lema 1.3.2. *Seja \mathcal{A} o operador linear definido em (1.19) – (1.20). Então existe uma constante $C > 0$, independente de $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < C.$$

Prova: Tendo em mente o Lema 1.3.1, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4) \in \mathcal{H}$, existe um único vetor $U = (v, p, V, P) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que, valem as equações (1.37) – (1.40).

Multiplicando as (1.39) – (1.40) por V e P , respectivamente, integrando de $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} i\lambda\rho \int_0^L V^2 dx + \alpha_1 \int_0^L v_x V_x dx + \gamma^2\beta \int_0^L v_x V_x dx - \gamma\beta \int_0^L p_x V_x dx + \alpha_2 \int_0^L |V_x|^2 dx \\ - \gamma_1\beta_1 \int_0^L P_x V_x dx = \rho \int_0^L f^3 V dx, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} i\lambda\mu \int_0^L P^2 dx - \gamma\beta \int_0^L v_x P_x dx + \beta \int_0^L p_x P_x dx - \gamma_1\beta_1 \int_0^L V_x P_x dx \\ + \beta_1 \int_0^L |P_x|^2 dx = \mu \int_0^L f^4 P dx. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Derivando as equações (1.37) – (1.38) em relação a x , teremos

$$V_x = i\lambda v_x - f_x^1, \quad (1.46)$$

$$P_x = i\lambda v_x - f_x^2, \quad (1.47)$$

Substituindo (1.46) – (1.47), em (1.44) – (1.45), respectivamente, para obter

$$\begin{aligned} i\lambda\rho \int_0^L V^2 dx + i\lambda\alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L v_x f_x^1 dx + i\lambda\gamma^2\beta \int_0^L |v_x|^2 dx - \gamma^2\beta \int_0^L v_x f_x^1 dx \\ - i\lambda\gamma\beta \int_0^L p_x v_x dx + \gamma\beta \int_0^L p_x f_x^1 dx + \alpha_2 \int_0^L |V_x|^2 dx - \gamma_1\beta_1 \int_0^L P_x V_x dx + \gamma_1^2\beta_1 \int_0^L |V_x|^2 dx \\ - \gamma_1^2\beta_1 \int_0^L |V_x|^2 dx = \rho \int_0^L f^3 V dx, \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned}
& i\lambda\mu \int_0^L P^2 dx - i\lambda\gamma\beta \int_0^L v_x p_x dx + \gamma\beta \int_0^L v_x f_x^2 dx + i\lambda\beta \int_0^L |p_x|^2 dx - \beta \int_0^L p_x f_x^2 dx \\
& - \gamma_1\beta_1 \int_0^L V_x P_x dx + \beta_1 \int_0^L |P_x|^2 dx = \mu \int_0^L f^4 P dx.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Somando as igualdades (1.48) – (1.49), obtemos

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho \int_0^L V^2 dx + i\lambda\mu \int_0^L P^2 dx + i\lambda\alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + i\lambda\beta \int_0^L (\gamma^2 v_x^2 - 2\gamma p_x v_x + p_x^2) dx \\
& = -(\alpha_2 - \gamma_1^2\beta_1) \int_0^L V_x^2 dx - \beta_1 \int_0^L (\gamma_1^2 V_x^2 - 2\gamma_1 V_x P_x + P_x^2) dx + \alpha_1 \int_0^L v_x f_x^1 dx \\
& + \gamma^2\beta \int_0^L v_x f_x^1 dx - \gamma\beta \int_0^L p_x f_x^1 dx + \rho \int_0^L f^3 V dx - \gamma\beta \int_0^L v_x f_x^2 dx + \beta \int_0^L p_x f_x^2 dx \\
& + \mu \int_0^L f^4 P dx.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Reorganizando e tomando a parte imaginária da equação (1.50), teremos:

$$\begin{aligned}
|\lambda| & \int_0^L (\rho|V|^2 + \mu|P|^2 + \alpha_1|v_x|^2 + \beta|\gamma v_x - p_x|^2) dx \leq Im\{\beta_1 \int_0^L |\gamma_1 V_x - P_x|^2 dx \\
& + (\alpha_2 - \gamma_1^2\beta_1) \int_0^L |V_x|^2 dx\} + Im\{\alpha_1 \int_0^L |v_x||f_x^1| dx + \gamma^2\beta \int_0^L |v_x||f_x^1| dx + \gamma\beta \int_0^L |p_x||f_x^1| dx \\
& + \rho \int_0^L |f^3||V| dx + \gamma\beta \int_0^L |v_x||f_x^2| dx + \beta \int_0^L |p_x||f_x^2| dx + \mu \int_0^L |f^4||P| dx\}.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Pela definição da nossa norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, temos que

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \int_0^L |v_x||f_x^1| dx + \gamma^2\beta \int_0^L |v_x||f_x^1| dx + \gamma\beta \int_0^L |p_x||f_x^1| dx + \rho \int_0^L |f^3||V| dx \\
& + \gamma\beta \int_0^L |v_x||f_x^2| dx + \beta \int_0^L |p_x||f_x^2| dx + \mu \int_0^L |f^4||P| dx \leq k\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned} \tag{1.52}$$

para algum $k > 0$.

Substituindo (1.42) e (1.52) em (1.51), obtemos:

$$|\lambda| \int_0^L (\rho|V|^2 + \mu|P|^2 + \alpha_1|v_x|^2 + \beta|\gamma v_x - p_x|^2) dx \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + k \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.53)$$

Daí, deduzimos que

$$|\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (1.54)$$

onde $C > 0$. Assim,

$$|\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}},$$

ou de forma equivalente,

$$\|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C \quad (1.55)$$

e C é uma constante positiva independente de λ , $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $F \in \mathcal{H}$. Logo, o resultado está provado.

Teorema 1.3.2. *Seja \mathcal{A} o operador linear definido em (1.19)–(1.20). Então o semigrupo gerado por \mathcal{A} é analítico.*

Prova: Dos Lemas 1.3.1 e 1.3.2, temos

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}),$$

$$\|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C.$$

Logo, obtemos

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sup \|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Aplicando o Teorema 1.3.1, obtemos que o semigrupo gerado por \mathcal{A} é analítico.

Observação 1.3.1. *As condições do teorema 1.3.1 implicam que, se $S(t)$ é um semigrupo C_0 de contrações analítico sobre um espaço de Hilbert \mathcal{H} , então $S(t)$ é exponencialmente estável.*

Observação 1.3.2. *Analisando tal sistema, tomando $\beta_1 = 0$ e $\alpha_2 = \delta$, nas equações (1.1)–(1.2) do nosso sistema, resulta em um sistema exponencialmente estável, que será apresentado na sequência.*

Capítulo 2

Sistema Piezoelétrico com Dissipação Viscoelástica

Neste capítulo vamos estudar a existência e unicidade de soluções para um modelo piezoelétrico, a estabilidade exponencial, experimentos numéricos, e com relação ao sistema anterior, a diferença é caracterizada pela dissipação viscoelástica, resultante da escolha dos seguintes parâmetros $\beta_1 = 0$ e $\alpha_2 = \delta$.

Seja o sistema

$$\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \delta v_{xxt} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.2)$$

onde

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta \quad (2.3)$$

com as condições iniciais

$$v(x, 0) = v_0(x); v_t(x, 0) = v_1(x); p(x, 0) = p_0(x); p_t(x, 0) = p_1(x) \text{ em } (0, L) \quad (2.4)$$

e as condições de fronteira dadas por

$$\begin{aligned} v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \\ p(0, t) = p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Devido a relação (2.3), a condição de fronteira (2.5) é equivalente a

$$\begin{aligned} v(0, t) = v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \\ p(0, t) = p_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1 Energia do Sistema

A energia de soluções do sistema (2.1) – (2.6) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx \quad (2.7)$$

O funcional energia $E(t)$, definido acima, é não crescente para todo $t > 0$. De fato, conforme será mostrado abaixo:

Proposição 2.1.1. (*Energia do modelo*) *Seja (v, v_t, p, p_t) a solução associada ao sistema (2.1) – (2.6), então*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\delta \int_0^L |v_{xt}|^2 dx, \quad (2.8)$$

Assim,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.9)$$

Demonstração: Para obtermos a energia do sistema (2.1) – (2.6), multiplicamos a equação (2.1) por v_t , integramos em $(0, L)$, usamos integração por partes e aplicamos as condições de fronteira:

$$\rho \int_0^L v_{tt} v_t dx + \alpha_1 \int_0^L v_x v_{xt} dx + \gamma^2 \beta \int_0^L v_x v_{xt} dx - \gamma \beta \int_0^L p_x v_{xt} dx + \delta \int_0^L v_{xt} v_{xt} dx = 0$$

Organizando resultados, temos

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{\alpha_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\gamma^2 \beta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_x|^2 dx - \gamma \beta \int_0^L p_x v_{xt} dx + \int_0^L |v_{xt}|^2 dx = 0. \quad (2.10)$$

Agora, multiplicamos a equação (2.2) por p_t , integramos em $(0, L)$, usamos integração por partes e aplicamos as condições de fronteira:

$$\mu \int_0^L p_{tt} p_t dx + \beta \int_0^L p_x p_{xt} dx - \gamma \beta \int_0^L v_x p_{xt} dx = 0$$

Organizando resultados, temos

$$\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |p_x|^2 dx - \gamma\beta \int_0^L v_x p_{xt} dx = 0 \quad (2.11)$$

Somando (2.10) e (2.11) e procedendo como no primeiro sistema, teremos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx = - \int_0^L \delta |v_{xt}|^2 dx.$$

daí, temos definida a energia do nosso sistema

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\delta \int_0^L |v_{xt}|^2 dx.$$

Concluimos,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t > 0.$$

Dessa forma, temos que a energia associada ao nosso sistema é dissipativa. É claro que se assumirmos $\delta = 0$, o modelo passa a obedecer a lei de conservação de energia.

2.2 Existência e Unicidade

Consideremos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} = \mathbb{V} \times \mathbb{V} \times L^2(0, L) \times L^2(0, L), \quad (2.12)$$

onde

$$\mathbb{V} = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi(0) = 0\}. \quad (2.13)$$

Agora, vamos considerar o seguinte produto interno em \mathcal{H} , definido por

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &:= \int_0^L \{\rho u_3 v_3 + \mu u_4 v_4\} dx + \int_0^L \{\alpha_1 u_{1x} v_{1x} + \beta(\gamma u_{1x} - u_{2x})(\gamma v_{1x} - v_{2x})\} dx \\ &= \int_0^L \{\rho u_3 \bar{v}_3 + \mu u_4 \bar{v}_4\} dx \\ &+ \int_0^L \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma^2 \beta & -\gamma \beta \\ -\gamma \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{2x} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)'$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)'$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ é o produto interno no \mathbb{R}^2 . De fato, (2.14) é um produto interno se a matriz $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma^2 \beta & -\gamma \beta \\ -\gamma \beta & \beta \end{pmatrix}$ é positiva definida.

E norma

$$\|(u_1, u_2, u_3, u_4)\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho \int_0^L |u_3|^2 dx + \mu \int_0^L |u_4|^2 dx + \alpha_1 \int_0^L |u_{1x}|^2 dx + \beta \int_0^L |\gamma u_{1x} - u_{2x}|^2 dx.$$

Agora, vamos reescrever o sistema (2.1) – (2.6), como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, para $U = (v, v_t, p, p_t)'$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U, \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $U_0 = (v_0, v_1, p_0, p_1)'$ é o vetor dos dados iniciais e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador diferencial representado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{\rho}(\cdot)_{xx} & 0 & -\frac{\gamma\beta}{\rho}(\cdot)_{xx} & \frac{\delta}{\rho}(\cdot)_{xx} \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{\gamma\beta}{\mu}(\cdot)_{xx} & 0 & \frac{\beta}{\mu}(\cdot)_{xx} & 0 \end{pmatrix}$$

Definimos o domínio do operador \mathcal{A} , que é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \{U = (v, V, p, P)' \in \mathcal{H}; v, p \in \mathbb{V} \cap H^2(0, L) \text{ e } V, P \in \mathbb{V}\},$$

onde $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} .

Teorema 2.2.1. *O operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contrações em \mathcal{H} . Assim, para algum $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (2.1) – (2.6) tem uma única solução fraca. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então U é uma solução forte do sistema (2.1) – (2.6).*

Prova: Seja $U = (v, V, p, P)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, usando a definição de produto interno dada anteriormente, temos que

$$\mathcal{R}e(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\delta \int_0^L |v_{xt}|^2 dx = -\delta \int_0^L |V_x|^2 dx, \quad (2.16)$$

portanto, temos que o operador \mathcal{A} é dissipativo. Sabendo que o domínio de \mathcal{A} é denso em \mathcal{H} ($\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$). Então, aplicamos o teorema de Lummer-Phillips (ver Pazy [10]), para provar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contrações.

Precisamos mostrar que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetor. Seja a equação resolvente

$$U - \mathcal{A}U = F. \quad (2.17)$$

Tomando $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)' \in \mathcal{H}$ e $U = (v, V, p, P)'$. Então a equação (2.17) em termos de suas componentes, será da forma

$$v - V = f_1, \quad (2.18)$$

$$\rho V - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \delta V_{xx} = \rho f_2, \quad (2.19)$$

$$p - P = f_3, \quad (2.20)$$

$$\mu P + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} = \mu f_4. \quad (2.21)$$

De (2.18) e (2.20), teremos

$$V = v - f_1, \quad (2.22)$$

$$P = p - f_3. \quad (2.23)$$

Agora, substituindo (2.22) em (2.19), teremos

$$\begin{aligned} \rho(v - f_1) - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \delta(v_{xx} - f_{1xx}) &= \rho f_2 \\ \rho v - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \delta v_{xx} &= \rho(f_1 + f_2) - \delta f_{1xx}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituindo (2.23) em (2.21), teremos

$$\begin{aligned} \mu(p - f_3) + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} &= \mu f_4 \\ \mu p + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} &= \mu(f_3 + f_4). \end{aligned} \quad (2.25)$$

De forma que, teremos um novo sistema formado pelas equações (2.24) – (2.25)

$$\rho v - \alpha v_{xx} + \gamma\beta p_{xx} - \delta v_{xx} = \rho(f_1 + f_2) - \delta f_{1xx} \quad (2.26)$$

$$\mu p + \gamma\beta v_{xx} - \beta p_{xx} = \mu(f_3 + f_4). \quad (2.27)$$

Multiplicando as equações (2.26) por \bar{v} e (2.27) por \bar{p} , integrando em $(0,L)$ e usando integração por partes, teremos

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L v\bar{v} dx + \alpha \int_0^L v_x\bar{v}_x dx - \gamma\beta \int_0^L p_x\bar{v}_x dx + \delta \int_0^L v_x\bar{v}_x dx = \rho \int_0^L (f_1 + f_2)\bar{v} dx \\ & + \delta \int_0^L f_{1x}\bar{v}_x dx, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\mu \int_0^L p\bar{p} dx - \gamma\beta \int_0^L v_x\bar{p}_x dx + \beta \int_0^L p_x\bar{p}_x dx = \mu \int_0^L (f_3 + f_4)\bar{p} dx. \quad (2.29)$$

Somando as equações (2.28) – (2.29), segue que

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L v\bar{v} dx + \alpha \int_0^L v_x\bar{v}_x dx + \mu \int_0^L p\bar{p} dx + \beta \int_0^L p_x\bar{p}_x dx - \gamma\beta \int_0^L p_x\bar{v}_x dx - \gamma\beta \int_0^L v_x\bar{p}_x dx \\ & + \delta \int_0^L v_x\bar{v}_x dx = \rho \int_0^L (f_1 + f_2)\bar{v} dx + \mu \int_0^L (f_3 + f_4)\bar{p} dx + \delta \int_0^L f_{1x}\bar{v}_x dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Logo, para solucionar o problema (2.26) – (2.27), vamos considerar a forma bilinear

$$a = \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R},$$

onde $\Gamma = \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ e

$$\begin{aligned} a((v, p), (\varphi, \phi)) & := \rho \int_0^L v\bar{\varphi} dx + \alpha \int_0^L v_x\bar{\varphi}_x dx + \mu \int_0^L p\bar{\phi} dx + \beta \int_0^L p_x\bar{\phi}_x dx - \gamma\beta \int_0^L p_x\bar{\varphi}_x dx \\ & - \gamma\beta \int_0^L v_x\bar{\phi}_x dx + \delta \int_0^L v_x\bar{\varphi}_x dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim, a forma bilinear (2.31) é contínua e coerciva no espaço de Hilbert Γ . Além disso, seja a aplicação G linear e contínua,

$$G : \Gamma \rightarrow \mathbb{R},$$

onde,

$$G := \int_0^L [\rho(f_1 + f_2)\bar{\varphi} + \mu(f_3 + f_4)\bar{\phi} + \delta f_{1x}\bar{\varphi}_x] dx.$$

Logo, usando o teorema de Lax-Milgran, segue que existe uma única solução $(v, p) \in \Gamma$, que satisfaz o problema variacional

$$a((v, p), (\varphi, \phi)) = \langle G, (\varphi, \phi) \rangle, \forall (\varphi, \phi) \in \Gamma.$$

Temos que existe uma única $(v, p) \in \Gamma$ que satisfaz (2.26) – (2.27). Daí, teremos que

$$v, p \in \mathbb{V} \quad (2.32)$$

De (2.32) em (2.18) e (2.20), teremos

$$V, P \in \mathbb{V}$$

Portanto, $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e sendo $I - \mathcal{A}$ sobrejetor. Agora, usando o teorema de Lummer-Phillips, concluimos que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

2.3 Decaimento Exponencial

Nesta seção, vamos mostrar que o semigrupo $S(t)$ é exponencialmente estável para o sistema (2.1) – (2.6).

Vamos considerar $U = (v, p, V, P)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)' \in \mathcal{H}$. Então a equação resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, pode reescrita da seguinte forma:

$$i\lambda v - V = f^1 \quad (2.33)$$

$$i\lambda p - P = f^2 \quad (2.34)$$

$$i\lambda \rho V - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - \delta V_{xx} = \rho f^3 \quad (2.35)$$

$$i\lambda \mu P - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = \mu f^4 \quad (2.36)$$

Aplicando (2.16) no seguinte produto interno em \mathcal{H} , de U com a equação resolvente de \mathcal{A} :

$$i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}},$$

tomando a parte real da equação acima, temos

$$\delta \int_0^L |V_x|^2 dx \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.37)$$

Agora, precisamos mostrar que o resolvente de \mathcal{A} é uniformemente limitado ao longo do eixo imaginário. Desta forma, temos o seguinte Lema.

Lema 2.3.1. *Seja \mathcal{A} o operador linear definido. Então*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$$

Prova: É suficiente provarmos que o operador \mathcal{A} não possui autovalor imaginário puro. De maneira que, vamos supor que existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tal que $i\lambda$ seja um autovalor, $U = (v, p, V, P)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$, tal que

$$\mathcal{A}U - i\lambda U = 0.$$

Queremos provar que $U = (0, 0, 0, 0)'$, o que contraria $\|U\|_{\mathcal{H}} = 1$, daí,

$$i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Como $F = 0$, de (2.37), podemos deduzir que $V = 0$ e de (2.33) segue que $v = 0$. De (2.35) segue que $p_{xx} = 0$, logo, usando Poincaré, teremos $p = 0$. De (2.34) temos que $P = 0$. Destes resultados, temos que $U = 0$, o que é uma contradição, portanto, temos que não existem autovalores imaginários puros e o Lema esta provado.

Para alcançarmos nossos objetivos, quanto ao decaimento exponencial do nosso sistema, precisamos dos seguintes Lemas auxiliares.

Lema 2.3.2. *Seja $U = (v, p, V, P)'$ a solução do sistema (2.1) – (2.6), então*

$$\alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \rho \int_0^L |V|^2 dx \leq \varepsilon \int_0^L |v_x|^2 dx + \mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 dx + C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Prova: Agora, vamos multiplicar as equações (2.35) e (2.36) por v e γv , respectivamente e integrando em $(0, L)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & i\lambda\rho \int_0^L Vv dx + \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \gamma^2\beta \int_0^L |v_x|^2 dx - \gamma\beta \int_0^L p_x v_x dx + \delta \int_0^L V_x v_x dx \\ & = \rho \int_0^L v f^3 dx, \\ & i\lambda\mu\gamma \int_0^L Pv dx + \beta\gamma \int_0^L p_x v_x dx - \gamma^2\beta \int_0^L |v_x|^2 dx = \mu\gamma \int_0^L v f^4 dx. \end{aligned}$$

Somando as duas equações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} i\lambda\rho \int_0^L Vv \, dx + i\lambda\mu\gamma \int_0^L Pv \, dx + \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \delta \int_0^L V_x v_x \, dx &= \rho \int_0^L v f^3 \, dx \\ + \mu\gamma \int_0^L v f^4 \, dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Aplicando (2.33) em (2.38), teremos

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \rho \int_0^L |V|^2 \, dx &= -\rho \int_0^L V f^1 \, dx - \mu\gamma \int_0^L PV \, dx - \mu\gamma \int_0^L P f^1 \, dx \\ -\delta \int_0^L V_x v_x \, dx + \rho \int_0^L v f^3 \, dx + \mu\gamma \int_0^L v f^4 \, dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por outro lado, podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que:

$$\rho \int_0^L |V f^1| \, dx + \mu\gamma \int_0^L |P f^1| \, dx + \rho \int_0^L |v f^3| \, dx + \mu\gamma \int_0^L v f^4 \, dx \leq C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.40)$$

Agora, aplicando (2.40) na equação (2.39) e usando as desigualdades de Poincaré e Young com $\varepsilon > 0$, para obter

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \rho \int_0^L |V|^2 \, dx &\leq \mu\gamma C_0 \frac{1}{4\varepsilon} \int_0^L |V_x|^2 \, dx + \mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 \, dx + \frac{\delta}{4\varepsilon} \int_0^L |V_x|^2 \, dx \\ + \varepsilon\delta \int_0^L |v_x|^2 \, dx + C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \rho \int_0^L |V|^2 \, dx &\leq \varepsilon\delta \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 \, dx + C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ + \left(\mu\gamma C_0 \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{\delta}{4\varepsilon} \right) \int_0^L |V_x|^2 \, dx, \end{aligned} \quad (2.42)$$

aplicando (2.37) em (2.42), obtemos:

$$\alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \rho \int_0^L |V|^2 \, dx \leq \varepsilon\delta \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 \, dx + C_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.43)$$

o que finaliza a prova do Lema.

Lema 2.3.3. *Seja $U = (v, p, V, P)'$ a solução do sistema (2.1) – (2.6), então*

$$\beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)^2 \, dx + \mu \int_0^L |P|^2 \, dx \leq \mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 \, dx + C_4 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Prova: Reescrevendo a equação (2.36), teremos:

$$i\lambda\mu P + \beta(\gamma v_x - p_x)_x = \mu f^4. \quad (2.44)$$

Agora, vamos multiplicar a equação (2.44) por $(\gamma v - p)$ e integrando em $(0, L)$, obtemos:

$$i\lambda\mu \int_0^L P(\gamma v - p) dx + \beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)_x (\gamma v - p) dx = \mu \int_0^L f^4 (\gamma v - p) dx.$$

Aplicando as equações (2.33) e (2.34) na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & \mu\gamma \int_0^L PV dx + \mu\gamma \int_0^L P f^1 dx - \mu \int_0^L |P|^2 dx - \mu \int_0^L P f^2 dx - \beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)^2 dx \\ & = \mu \int_0^L (\gamma v - p) f^4 dx. \end{aligned}$$

Assim, usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)^2 dx + \mu \int_0^L |P|^2 dx \leq \mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 dx + \frac{\mu\gamma}{4\varepsilon} \int_0^L |V|^2 dx + C_3 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.45)$$

aplicando (2.37) em (2.45), segue que

$$\beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)^2 dx + \mu \int_0^L |P|^2 dx \leq \mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 dx + C_4 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

o que finaliza a prova.

Agora, temos condições de enunciar e provar o seguinte teorema.

Teorema 2.3.1. *Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C_0 de contrações num espaço de Hilbert.*

Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$(i) \ i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

$$(ii) \ \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \sup \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty,$$

são verdadeiras.

Prova: Pelo Lema 2.3.1, (i) está provado. Dos Lemas 2.3.2, 2.3.3, teremos:

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L |V|^2 dx + \mu \int_0^L |P|^2 dx + \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)^2 dx \leq \varepsilon\delta \int_0^L |v_x|^2 dx \\ & + 2\mu\gamma\varepsilon \int_0^L |P|^2 dx + C_5 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Tomando ε pequeno e usando a definição de norma na desigualdade (2.46), segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_5 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.47)$$

Portanto,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, o nosso sistema é exponencialmente estável.

Agora, mostraremos que o nosso sistema não possui propriedade analítica, para tal, usaremos o seguinte teorema

Teorema 2.3.2. *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo C_0 de contrações definido sobre um espaço de Hilbert. Suponhamos que*

$$\varrho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}.$$

Então, $S(t)$ é um semigrupo analítico se, e somente se

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|\lambda(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty,$$

onde $\varrho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de \mathcal{A} .

Proposição 2.3.1. *O semigrupo de operadores gerado por \mathcal{A} , não é analítico.*

Demonstração: Sejam $F = \left(0, 0, 0, \sin\left(\frac{(2n+1)}{2L}\pi x\right)\right) \in \mathcal{H}$ e a equação espectral

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F,$$

reescrevendo em termos de suas componentes

$$i\lambda v - V = 0, \tag{2.48}$$

$$i\lambda p - P = 0, \tag{2.49}$$

$$i\lambda \rho V - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - V_{xx} = 0, \tag{2.50}$$

$$i\lambda \mu P - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = \mu \sin\left(\frac{(2n+1)}{2L}\pi x\right). \tag{2.51}$$

Aplicando (2.48) e (2.49) em (2.50) e (2.51), respectivamente, obtemos

$$-\lambda^2 \rho v - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} - i\lambda v_{xx} = 0 \tag{2.52}$$

$$-\lambda^2 \mu p - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = \mu \sin\left(\frac{(2n+1)}{2L}\pi x\right) \tag{2.53}$$

Como $v, p \in \mathbb{V} \cap H^2(0, L)$, podemos considerar as seguintes funções

$$v = A \sin\left(\frac{(2n+1)}{2L}\pi x\right) \text{ e } p = B \sin\left(\frac{(2n+1)}{2L}\pi x\right),$$

usando as funções definidas acima, em (2.52) e (2.53), e denotando $\nu = \frac{(2n+1)}{2L}\pi$, para obter

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \rho A + \alpha \nu^2 A - \gamma \beta \nu^2 B + i \lambda \nu^2 A &= 0, \\ -\lambda^2 \mu B + \beta \nu^2 B - \gamma \beta \nu^2 A - \mu &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$A[-\lambda^2 \rho + \alpha \nu^2 + i \lambda \nu^2] - \gamma \beta \nu^2 B = 0, \quad (2.54)$$

$$-\gamma \beta \nu^2 A + B[-\lambda^2 \mu + \beta \nu^2] - \mu = 0. \quad (2.55)$$

Definimos

$$-\lambda^2 \mu + \beta \nu^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_\nu = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} \nu \quad (2.56)$$

Aplicando (2.56) em (2.55), resultando

$$A = -\frac{\mu}{\gamma \beta \nu^2}$$

Agora, podemos calcular o valor correspondente a B, usando (2.54), resultando em:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\mu}{\gamma \beta \nu^2} \\ B &= \left(\frac{\rho \beta}{\gamma^2 \beta^2} - \frac{\mu \alpha}{\gamma^2 \beta^2} \right) \frac{1}{\nu^2} - \frac{i \sqrt{\beta \mu}}{\gamma^2 \beta^2} \frac{1}{\nu} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Como $p = B \sin(\nu x)$, e usando (2.49), obtemos

$$P_\nu = i \lambda_\nu B \sin(\nu x)$$

$$i \lambda_\nu P_\nu = -\lambda_\nu^2 B \sin(\nu x), \text{ usando (2.57)}$$

$$i \lambda_\nu P_\nu = -\lambda_\nu^2 \left[\left(\frac{\rho \beta}{\gamma^2 \beta^2} - \frac{\mu \alpha}{\gamma^2 \beta^2} \right) \frac{1}{\nu^2} - \frac{i \sqrt{\beta \mu}}{\gamma^2 \beta^2} \frac{1}{\nu} \right] \sin(\nu x)$$

Agora, aplicando (2.56), obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda_\nu P_\nu &= -\frac{\beta}{\mu} \nu^2 \left[\left(\frac{\rho\beta}{\gamma^2\beta^2} - \frac{\mu\alpha}{\gamma^2\beta^2} \right) \frac{1}{\nu^2} - \frac{i\sqrt{\beta\mu}}{\gamma^2\beta^2} \frac{1}{\nu} \right] \sin(\nu x) \\ &= -\frac{\beta}{\mu} \left[\left(\frac{\rho\beta}{\gamma^2\beta^2} - \frac{\mu\alpha}{\gamma^2\beta^2} \right) - \frac{i\sqrt{\beta\mu}}{\gamma^2\beta^2} \nu \right] \sin(\nu x). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^L |i\lambda_\nu P_\nu|^2 dx \right)^{1/2} &\geq \frac{\beta}{\mu} \left| \left(\frac{\rho\beta}{\gamma^2\beta^2} - \frac{\mu\alpha}{\gamma^2\beta^2} \right) - \frac{i\sqrt{\beta\mu}}{\gamma^2\beta^2} \nu \right| \left(\int_0^L |\sin(\nu x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{\beta}{\mu} \left| \left(\frac{\rho\beta}{\gamma^2\beta^2} - \frac{\mu\alpha}{\gamma^2\beta^2} \right) - \frac{i\sqrt{\beta\mu}}{\gamma^2\beta^2} \nu \right| \sqrt{\frac{L}{2}} \\ &\geq \frac{\beta}{\mu} \frac{\sqrt{\beta\mu}}{\gamma^2\beta^2} \sqrt{\frac{L}{2}} \nu \rightarrow \infty, \text{ quando } \nu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pela definição de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ e sabendo que $i\lambda U_\nu = (i\lambda v_\nu, i\lambda p_\nu, i\lambda V_\nu, i\lambda P_\nu) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, deduzimos que

$$\|i\lambda_\nu U_\nu\|_{\mathcal{H}} = \|i\lambda_\nu (i\lambda_\nu I - \mathcal{A})^{-1} F_\nu\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty, \text{ quando } \nu \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

deste resultado e do Teorema 2.3.2 implica, que o semigrupo de operadores gerado por \mathcal{A} não pode ser analítico.

2.4 Análise Numérica

Neste capítulo obtemos a solução numérica do problema (2.1) – (2.6) aplicando o método dos elementos finitos em combinação com o método de diferenças finitas, com o objetivo de aplicar o método de Newmark.

2.4.1 Aproximação por Elementos Finitos

Para obter a forma variacional relacionada ao problema (2.1)–(2.6). Vamos multiplicar (2.1), (2.2) e (2.4) por $w \in H^1(0, L)$ e integrando em $(0, L)$ temos o seguinte problema

$$\rho(v_{tt}, w) + \alpha(v_x, w_x) - \gamma\beta(p_x, w_x) + \delta(v_{xt}, w_x) = 0, \quad (2.59)$$

$$\mu(p_{tt}, w) + \beta(p_x, w_x) - \gamma\beta(v_x, w_x) = 0, \quad (2.60)$$

$$(v(x, 0), w) = (v_0(x), w), \quad (p(x, 0), w) = (p_0(x), w), \quad (2.61)$$

$$(v_t(x, 0), w) = (v_1(x), w), \quad (p_t(x, 0), w) = (p_1(x), w). \quad (2.62)$$

2.4.2 Aproximação via Galerkin

Vamos considerar as funções v_h e p_h , definidas por

$$v_h = \sum_{j=0}^{n_e} g_j(t) \phi_j(x), \quad (2.63)$$

$$p_h = \sum_{j=0}^{n_e} h_j(t) \phi_j(x), \quad (2.64)$$

Substituindo (2.63) e (2.64) em (2.59) – (2.62), obtemos:

$$\rho \left(\sum_{j=0}^{n_e} \ddot{g}_j(t) \phi_j(x), w \right) + \alpha \left(\sum_{j=0}^{n_e} g_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) - \gamma\beta \left(\sum_{j=0}^{n_e} h_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) + \sigma \left(\sum_{j=0}^{n_e} \dot{g}_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) = 0, \quad (2.65)$$

$$\mu \left(\sum_{j=0}^{n_e} \ddot{h}_j(t) \phi_j(x), w \right) + \beta \left(\sum_{j=0}^{n_e} h_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) - \gamma\beta \left(\sum_{j=0}^{n_e} g_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) = 0, \quad (2.66)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{n_e} g_j(0) \phi_j, w \right) = (v_0(x), w), \quad \left(\sum_{j=0}^{n_e} h_j(0) \phi_j, w \right) = (p_0(x), w), \quad (2.67)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{n_e} \dot{g}_j(0) \phi_j, w \right) = (v_1(x), w), \quad \left(\sum_{j=0}^{n_e} \dot{h}_j(0) \phi_j, w \right) = (p_1(x), w). \quad (2.68)$$

Fazendo $w = \phi_i(x)$ e i, j varia de 1 a n_e , obtemos o seguinte sistema linear

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{g}(t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{h}(t) = 0, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}_3 \mathbf{h}(t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{g}(t) = 0, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{g}(0) = \mathbf{A}^{-1} v_0, \quad \mathbf{h}(0) = \mathbf{A}^{-1} p_0 \quad e \quad \dot{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{A}^{-1} g_1, \quad \dot{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{A}^{-1} h_1, \quad (2.71)$$

onde $\mathbf{M}_{1(ij)} = \rho(\phi_j, \phi_i)$, $\mathbf{C}_{(ij)} = \sigma(\phi_{j,x}, \phi_{i,x})$, $\mathbf{K}_{1(ij)} = \alpha(\phi_{j,x}, \phi_{i,x})$, $\mathbf{K}_{2(ij)} = -\gamma\beta(\phi_{j,x}, \phi_{i,x})$, $\mathbf{M}_{2(ij)} = \mu(\phi_j, \phi_i)$, $\mathbf{K}_{3(ij)} = -\beta(\phi_{j,x}, \phi_{i,x})$, $\mathbf{A} = (\phi_j, \phi_i)$.

Podemos apresentar as equações (2.69) – (2.70) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{g}} \\ \ddot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{g}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí, obtemos

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = 0, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}_0 \text{ e } \dot{\mathbf{d}}(0) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}_1 \quad (2.73)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{d}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{g}} \\ \ddot{\mathbf{h}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{d}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{g}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{d}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}.$$

Para a análise numérica do nosso problema, note que da equação (2.72) podemos usar vários métodos de diferenças finitas como Euler explícito, Euler implícito, Método de Runge-Kutta entre outros. Em nosso trabalho usaremos o Método de Newmark, este método baseia-se em aproximar os campos de deslocamento e velocidade, a partir de uma aproximação do campo aceleração. Os deslocamentos e velocidades são desenvolvidos em série de Taylor, sendo os restos calculados aproximadamente em função de dois parâmetros livres que serão fixados a posteriori a fim de garantir que o método seja estável.

2.4.3 Método das Acelerações Generalizadas

Sejam os deslocamentos e velocidades desenvolvidos de acordo com a série de Taylor com resto integral:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th) dt \right] h^{n+1}, \quad (2.74)$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = a + th$, obtemos

$$\int_0^1 (1-t) f''(a+th) h^2 dt = \int_a^{a+h} [(a+h) - \tau] f''(\tau) d\tau. \quad (2.75)$$

De (2.74) e (2.75), obtemos as relações para o deslocamento e velocidade

$$d_{n+1} = d_n + h \dot{d}_n + \int_a^{a+h} [(a+h) - \tau] d''(\tau) d\tau, \quad (2.76)$$

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \int_a^{a+h} \ddot{d}(\tau) d\tau, \quad (2.77)$$

Fazendo a quadratura das integrais (2.76) e (2.77) obtemos as seguintes aproximações para o deslocamento e velocidade:

$$d_{n+1} = d_n + h \dot{d}_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) h^2 \ddot{d}_n + \frac{1}{4} h^2 \ddot{d}_{n+1}, \quad (2.78)$$

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \left(1 - \frac{1}{2}\right) h \ddot{d}_n + \frac{1}{2} h \ddot{d}_{n+1}, \quad (2.79)$$

agora, usando $h = \Delta t$, teremos

$$d_{n+1} = d_n + \Delta t \dot{d}_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \Delta t^2 \ddot{d}_n + \frac{1}{4} \Delta t^2 \ddot{d}_{n+1}, \quad (2.80)$$

$$\dot{d}_{n+1} = \dot{d}_n + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t \ddot{d}_n + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{d}_{n+1}, \quad (2.81)$$

Notamos que dependendo do método aplicado para a aproximação dos campos deslocamento e velocidade, teremos diferentes termos constantes nas equações acima, assim, o Método de Newmark é uma família de métodos de integração dada por

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1} = 0, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_n + a \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}, \quad (2.83)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n + b \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}. \quad (2.84)$$

Aqui a e b são parâmetros que governam a estabilidade e consistência do método. Na literatura, temos que sistemas lineares são incondicionalmente estáveis, para os valores $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$.

Daí, substituindo (2.83) – (2.84) em (2.82), obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{C} [\dot{\mathbf{d}}_n + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n + b \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}] \\ & + \mathbf{K} [\mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_n + a \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}] = 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Reorganizando (2.85), segue que

$$[\mathbf{M} + \mathbf{C} b \Delta t + \mathbf{K} a \Delta t^2] \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} = -\mathbf{C} [\dot{\mathbf{d}}_n + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n] - \mathbf{K} [\mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_n]. \quad (2.86)$$

Agora, temos condições de análise de soluções, pois com as equações (2.86), (2.83) e (2.84) formam o seguinte sistema

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \mathbf{C} b \Delta t + \mathbf{K} a \Delta t^2] \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} &= -\mathbf{C} [\dot{\mathbf{d}}_n + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n] - \mathbf{K} [\mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_n], \\ \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_n + a \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}, \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n + b \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Quando $n = 0$, o sistema (2.87) é dado da seguinte forma

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \mathbf{C} b \Delta t + \mathbf{K} a \Delta t^2] \ddot{\mathbf{d}}_1 &= -\mathbf{C} [\dot{\mathbf{d}}_0 + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_0] - \mathbf{K} [\mathbf{d}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_0 + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_0], \\ \mathbf{d}_1 &= \mathbf{d}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_0 + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_0 + a \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_1, \\ \dot{\mathbf{d}}_1 &= \dot{\mathbf{d}}_0 + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_0 + b \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_1. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Note que para determinar soluções de d_1 e \dot{d}_1 , precisamos das condições iniciais dadas em (2.73) e que \ddot{d}_1 é obtida usando a equação (2.72).

Quando $n = 1$, o sistema (2.87) é dado da seguinte forma

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \mathbf{C} b \Delta t + \mathbf{K} a \Delta t^2] \ddot{\mathbf{d}}_2 &= -\mathbf{C} [\dot{\mathbf{d}}_1 + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_1] - \mathbf{K} [\mathbf{d}_1 + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_1 + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_1], \\ \mathbf{d}_2 &= \mathbf{d}_1 + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_1 + (1 - 2a) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_1 + a \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_2, \\ \dot{\mathbf{d}}_2 &= \dot{\mathbf{d}}_1 + (1 - b) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_1 + b \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

e assim sucessivamente, as aproximações de d_{n+1} , \dot{d}_{n+1} e \ddot{d}_{n+1} são obtidas para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ de maneira que o próximo passo são as simulações numéricas.

2.4.4 Simulações Numéricas

Em todos os experimentos a seguir, analisamos o comportamento assintótico das soluções dos casos conservativo e dissipativo. Além disso, usamos os parâmetros de Newmark, $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$,

as seguintes condições de fronteira

$$v(x, 0) = \sin\left(\frac{9\pi}{2L}x\right), \quad v_t(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = \sin\left(\frac{5\pi}{2L}x\right), \quad p_t(x, 0) = 0$$

e usando os seguintes valores para os parâmetros

$$L = 1.0, \quad \rho = 7.6 \cdot 10^3, \quad \mu = 4\pi \cdot 10^{-7}, \quad \beta = 1.9 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_1 = 1.2 \cdot 10^9, \quad \gamma = 1.0, \quad \Delta t = 10^{-3}.$$

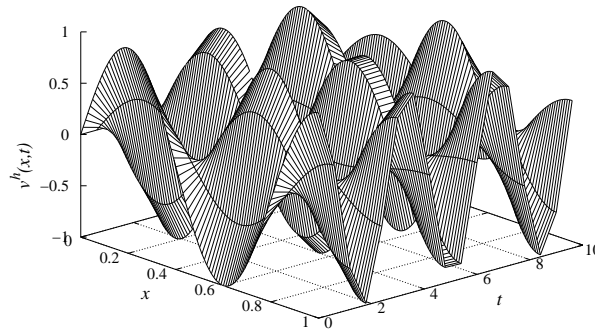


Figura 2.1 *campo deslocamento $v^h(x, t)$ - consertivo*

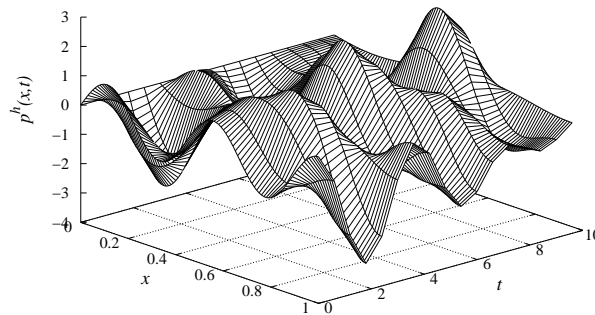
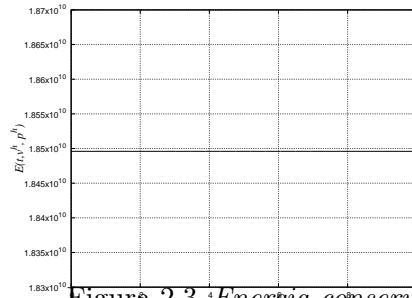
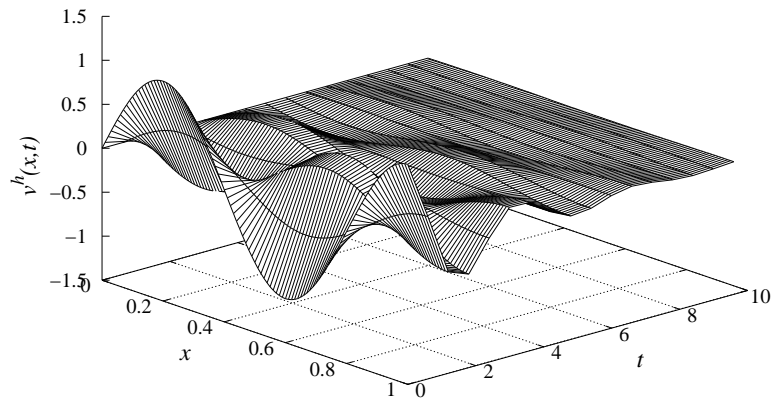


Figura 2.2 *$p^h(x, t)$ campo elétrico- consertivo*

Figura 2.3 *Energia conservativa.*Figura 2.4 *campo deslocamento $v^h(x, t)$ - Caso Dissipativo*

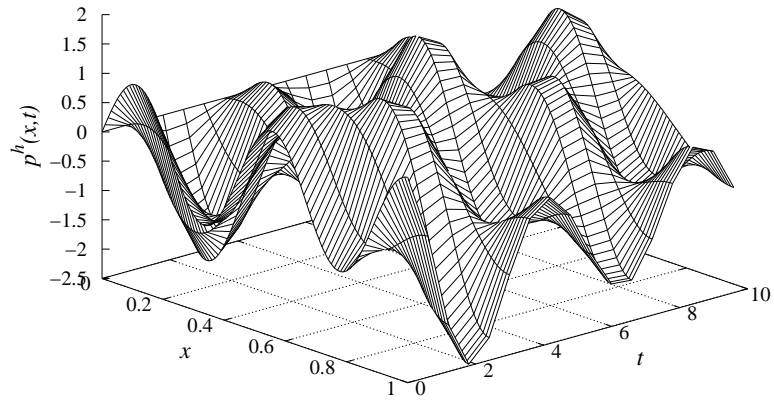


Figura 2.5 $p^h(x,t)$ campo elétrico - Caso Dissipativo.

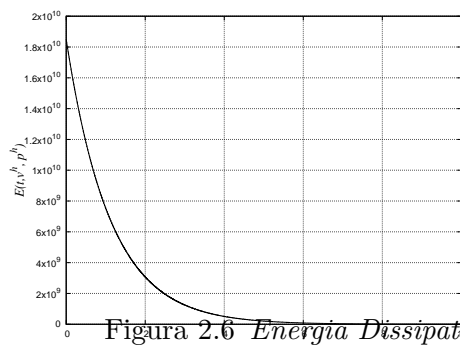


Figura 2.6 Energia Dissipativa.

Capítulo 3

Sistema Piezoelétrico com Efeito Magnético e Dissipação não linear

Neste capítulo estudaremos a existência, unicidade e comportamento assintótico de solução para um modelo piezoelétrico com efeito magnético e dissipação não linear, e o comportamento assintótico.

3.1 Apresentação

Considere o seguinte sistema piezoelétrico com dissipação não linear

$$\rho v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \sigma(t) g(v_t) = 0 \quad em \quad (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = 0 \quad em \quad (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.2)$$

e seja a seguinte relação

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta \quad (3.3)$$

Para o sistema (3.1) – (3.2), temos as seguintes condições iniciais dadas por

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), p(x, 0) = p_0(x), p_t(x, 0) = p_1(x) \quad em \quad (0, L) \quad (3.4)$$

e as condições de fronteira dadas por

$$\begin{aligned} v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \\ p(0, t) = p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observação 3.1.1. *Note que*

$$p(x, t) = \int_0^x D(\xi, t) d\xi,$$

onde $D(\xi, t)$ representa o deslocamento elétrico na direção z , então $p(0, t) = 0$ e ainda $p(L, t) = \int_0^L D(\xi, t) d\xi$ pode não ser zero, porque a condição de fronteira $p(L, t) = 0$ não representa a fixação da viga em ambos os lados. De fato, a fixação é devido a condição de fronteira $v(0, t) = v(L, t) = 0$, onde v é o deslocamento transversal.

Observação 3.1.2. Devido a relação (3.3), a condição de fronteira (3.5) é equivalente a

$$\begin{aligned} v(0, t) = v_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0; \\ p(0, t) = p_x(L, t) &= 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Hipótese 3.1.1. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, não decrescente tal que existe uma função estritamente crescente $g_0 \in C^1[0, \infty)$, com $g_0(0) = 0$, as constantes positivas α_2, β_1 e m tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad g_0(|s|) &\leq |g(s)| \leq g_0^{-1}(|s|) \text{ for all } |s| \leq m, \\ (ii) \quad \alpha_2|s| &\leq |g(s)| \leq \beta_1|s| \text{ for all } |s| \geq m, \\ (iii) \quad g(s)s &> 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hipótese 3.1.2. Seja $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função diferenciável não crescente que satisfaz

$$\int_0^\infty \sigma(t) dt = +\infty.$$

Para procedermos na resolução do nosso problema, precisamos de alguns resultados preliminares, que enunciaremos nas próximas seções.

3.2 Energia do Sistema

A energia de soluções do sistema (3.1) – (3.5) é definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L [\rho|v_t|^2 + \mu|p_t|^2 + \alpha_1|v_x|^2 + \beta|\gamma v_x - p_x|^2] dx \quad (3.8)$$

O funcional energia $E(t)$, definido acima, é não crescente para todo $t > 0$. De fato, conforme será mostrado abaixo:

Proposição 3.2.1. (*Energia do modelo*) Seja (v, v_t, p, p_t) a solução associada ao sistema (3.1) – (3.5), então

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\sigma(t) \int_0^L g(v_t)v_t dx, \quad (3.9)$$

Assim,

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.10)$$

Demonstração: Para obtermos a energia do sistema (3.1) – (3.5), fazemos a multiplicação das equações (3.1) e (3.2) por v_t e p_t respectivamente, que consiste nos passos a seguir:

- Multiplicando a equação (3.1) do sistema por v_t e integrando em $(0, L)$, teremos

$$\rho \int_0^L v_{tt}v_t dx - \alpha_1 \int_0^L v_{xx}v_t dx - \gamma^2\beta \int_0^L v_{xx}v_t dx + \gamma\beta \int_0^L p_{xx}v_t dx + \sigma(t) \int_0^L g(v_t)v_t dx = 0$$

Assim, fazendo a integração por partes e usando as condições de fronteira, teremos

$$\rho \int_0^L v_{tt}v_t dx + \alpha_1 \int_0^L v_x v_{tx} dx + \gamma^2\beta \int_0^L v_x v_{tx} dx - \gamma\beta \int_0^L p_x v_{tx} dx + \sigma(t) \int_0^L g(v_t)v_t dx = 0$$

Sabendo que

$$\rho \int_0^L v_{tt}v_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho \int_0^L |v_t|^2 dx;$$

$$\alpha_1 \int_0^L v_x v_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx;$$

$$\gamma^2\beta \int_0^L v_x v_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \gamma^2\beta \int_0^L |v_x|^2 dx;$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho|v_t|^2 + \alpha_1|v_x|^2 + \gamma^2\beta|v_x|^2] dx - \gamma\beta \int_0^L p_x v_{tx} dx + \sigma(t) \int_0^L g(v_t)v_t dx = 0. \quad (3.11)$$

- Multiplicando a equação (3.2) do sistema por p_t e integrando em $(0, L)$, teremos

$$\mu \int_0^L p_{tt} p_t dx - \beta \int_0^L p_{xx} p_t dx + \gamma\beta \int_0^L v_{xx} p_t dx = 0$$

Assim, fazendo a integração por partes e usando as condições de fronteira, teremos

$$\mu \int_0^L p_{tt} p_t dx + \beta \int_0^L p_x p_{tx} dx - \gamma\beta \int_0^L v_x p_{tx} dx = 0$$

Sabendo que

$$\mu \int_0^L p_{tt} p_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \mu |p_t|^2 dx;$$

$$\beta \int_0^L p_x p_{tx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \beta |p_x|^2 dx$$

Assim, teremos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\mu |p_t|^2 + \beta |p_x|^2] dx - \gamma\beta \int_0^L v_x p_{tx} dx = 0 \quad (3.12)$$

- Somando as equações (3.11) e (3.12), teremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho|v_t|^2 + \mu|p_t|^2 + \alpha_1|v_x|^2 + \gamma^2\beta|v_x|^2 + \beta|p_x|^2] dx - \gamma\beta \int_0^L p_x v_{tx} dx \\ & - \gamma\beta \int_0^L v_x p_{tx} dx = -\sigma(t) \int_0^L g(v_t)v_t dx \end{aligned}$$

Notando que

$$-\gamma\beta \int_0^L p_x v_{tx} dx - \gamma\beta \int_0^L v_x p_{tx} dx = -\gamma\beta \int_0^L [p_x v_{tx} + v_x p_{tx}] dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \gamma\beta \int_0^L 2 |p_x v_x| dx$$

Resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \underbrace{\gamma^2 \beta |v_x|^2 + \beta |p_x|^2 - 2\gamma \beta |p_x v_x|}_I \right] dx = -\sigma(t) \int_0^L g(v_t) v_t dx.$$

Os elementos selecionados na igualdade anterior serão apresentados da seguinte forma:

$$I = \gamma^2 \beta |v_x|^2 - 2\gamma \beta |p_x v_x| + \beta |p_x|^2 = \beta (\gamma^2 |v_x|^2 - 2\gamma |p_x v_x| + |p_x|^2) = \beta |\gamma v_x - p_x|^2,$$

resultando

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} [\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2] dx = -\sigma(t) \int_0^L g(v_t) v_t dx \quad (3.13)$$

daí, teremos a energia do sistema definida por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L (\rho |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2) dx$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\sigma(t) \int_0^L g(v_t) v_t dx \leq 0. \quad (3.14)$$

Integrando a equação (3.14) em $(0, t)$, temos que

$$E(t) = -\sigma(t) \int_0^L \int_0^t g(v_t) v_t dx dt + E(0)$$

Podemos concluir que o nosso sistema é dissipativo

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t > 0.$$

Assim fica provado o resultado proposto.

3.3 O Cenário de Semigrupo

Nesta seção vamos apresentar resultados para a existência e unicidade de solução do problema (3.1) – (3.5). Para isto, usaremos a Teoria de Semigrupos não-lineares em Barbu [1] e Brézis [2].

A partir da energia dada em (3.8), podemos definir o espaço de Hilbert \mathcal{H} , como

$$\mathcal{H} = \mathbb{V} \times L^2(0, L) \times \mathbb{V} \times L^2(0, L), \quad (3.15)$$

onde

$$\mathbb{V} = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi(0) = 0\}. \quad (3.16)$$

Agora, vamos considerar o seguinte produto interno em \mathcal{H} , definido por

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &:= \int_0^L \{\rho u_3 v_3 + \mu u_4 v_4\} dx + \int_0^L \{\alpha_1 u_{1x} v_{1x} + \beta(\gamma u_{1x} - u_{2x})(\gamma v_{1x} - v_{2x})\} dx \\ &= \int_0^L \{\rho u_3 \overline{v_3} + \mu u_4 \overline{v_4}\} dx \\ &+ \int_0^L \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma^2 \beta & -\gamma \beta \\ -\gamma \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{2x} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2} dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)'$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)'$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ é o produto interno no \mathbb{R}^2 . De fato, (3.17) é um produto interno se a matriz $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma^2 \beta & -\gamma \beta \\ -\gamma \beta & \beta \end{pmatrix}$ é positiva definida.

E norma

$$\|(u_1, u_2, u_3, u_4)\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho \int_0^L |u_3|^2 dx + \mu \int_0^L |u_4|^2 dx + \alpha_1 \int_0^L |u_{1x}|^2 dx + \beta \int_0^L |\gamma u_{1x} - u_{2x}|^2 dx.$$

Para começar, vamos reescrever o problema (3.1) – (3.5), como um problema de Cauchy para $U = (v, v_t, p, p_t)'$. Assim, o vetor U satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(t) + \mathcal{A}U(t) &= 0 \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $U = (v_0, v_1, p_0, p_1)'$ é o vetor dos dados iniciais e $\mathcal{A} = -(A_1 + A_2)$, com $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que será estruturado da seguinte forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha}{\rho}(\cdot)_{xx} & 0 & -\frac{\gamma\beta}{\rho}(\cdot)_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\gamma\beta}{\mu}(\cdot)_{xx} & 0 & \frac{\beta}{\mu}(\cdot)_{xx} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma(t)}{\rho} g(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

De maneira que podemos definir o domínio do operador \mathcal{A} , dado por

$$\mathcal{D}(A_1) = (\mathbb{V} \cap H^2(0, L) \times \mathbb{V})^2, \quad \mathcal{D}(A_2) = \mathcal{H} \quad \text{e por conseguinte o domínio } \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A_1). \quad (3.21)$$

Para enunciarmos o teorema que trata da existência e unicidade de soluções do nosso sistema, precisamos de alguns resultados preliminares como

Teorema 3.3.1. *Seja A um operador monótono de H . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) A é maximal monótono;
- (ii) A é monótono e $R(I + A) = H$;
- (iii) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)^{-1} : H \rightarrow H$ é uma contração.

Prova: Proposição 2.2 em [2].

Corolário 3.3.1. *Seja X reflexivo, e seja B um operador monótono, hemicontínuo e limitado de X em X^* . Seja A um operador maximal monótono em $X \times X^*$. Então $A+B$ é maximal monótono.*

Prova: Corolário 1.1, no Capítulo 2 em [1].

Definição 3.3.1. *Diremos que $U : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$, é uma solução forte para o problema de valor inicial (3.18), se U é contínua em $[0, \infty)$, Lipschitziana em cada subconjunto compacto de $[0, \infty)$, $U(t)$ é diferenciável em $[0, \infty)$ e*

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \quad \text{para quase todo } t \in [0, \infty).$$

Teorema 3.3.2. *Assumindo a Hipóteses 3.1.1 e 3.1.2, temos para cada dado inicial $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ uma única solução forte para o sistema (3.18). Além disso, se $U_0 \in \mathcal{H}$ então (3.18), tem uma única solução fraca.*

Demonstração: Precisamos mostrar que o operador $\mathcal{A} = -(A_1 + A_2)$ é maximal monótono

em \mathcal{H} . A prova será feita em duas etapas, de acordo com as técnicas utilizadas em [15], para usarmos o Corolário 1.1 de Barbu [1], precisaremos de duas afirmações:

Afirmação 1: O operador $-A_1$ é maximal monótono.

Para mostrar tal afirmação, iremos provar que o operador $-A_1$ é monótono e $R(I - A) = \mathcal{H}$, de forma que usaremos o a Proposição 2.2 de Brezis [2], para obter este resultado. De fato, como

$$(-A_1U, U)_{\mathcal{H}} = 0,$$

temos a monotonicidade de $-A_1$.

Considerando $F_1, \dots, F_4 \in \mathcal{H}$, e vamos resolver o seguinte problema espectral:

$$U - A_1U = F,$$

agora vamos escrever a equação acima em termos de suas componentes

$$v - y = F_1 \tag{3.22}$$

$$\rho y - \alpha_1 v_{xx} - \gamma^2 \beta v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} = \rho F_2 \tag{3.23}$$

$$p - z = F_3 \tag{3.24}$$

$$\mu z + \gamma \beta v_{xx} - \beta p_{xx} = \mu F_4 \tag{3.25}$$

Isolando y e z do sistema acima e substituindo nas equações (3.23) e (3.25), respectivamente, teremos

$$y = v - F_1 \quad e \quad z = p - F_3$$

Fazendo estas substituições

$$\rho v - \alpha_1 v_{xx} - \gamma^2 \beta v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} = \rho(F_1 + F_2) \tag{3.26}$$

$$\mu p - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = \mu(F_3 + F_4) \tag{3.27}$$

Chamando,

$$f_1 = \rho(F_1 + F_2) \quad e \quad f_2 = \mu(F_3 + F_4)$$

Teremos o problema reescrito da seguinte forma

$$\rho v - \alpha_1 v_{xx} - \gamma^2 \beta v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} = f_1 \quad (3.28)$$

$$\mu p - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = f_2 \quad (3.29)$$

Para $\mathcal{F} = \mathbb{V} \times \mathbb{V}$, seja a forma bilinear

$$a : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$\begin{aligned} a((v, p), (\varphi, \phi)) &= \int_0^L \rho v \varphi + \mu p \phi + \alpha_1 v_x \varphi_x + \gamma^2 \beta v_x \varphi_x - \gamma \beta p_x \varphi_x + \beta p_x \phi_x - \gamma \beta v_x \phi_x \, dx \\ &= \int_0^L \rho v \varphi + \mu p \phi + \alpha_1 v_x \varphi_x + \gamma \beta \varphi_x (\gamma v_x - p_x) - \beta \phi_x (\gamma v_x - p_x) \, dx \\ &= \int_0^L \rho v \varphi + \mu p \phi + \alpha_1 v_x \varphi_x + \beta (\gamma v_x - p_x) (\gamma \varphi_x - \phi_x) \, dx, \end{aligned}$$

Portanto, temos que a forma bilinear a é contínua e coerciva, F é contínua sobre o espaço de Hilbert \mathcal{F} , logo pelo Lema de Lax-Milgran, temos que existe uma única solução $\{v, p\} \in \mathcal{F}$ para o seguinte problema variacional

$$a((v, p), (\varphi, \phi)) = \langle F; (\varphi, \phi) \rangle, \quad \forall \{\varphi, \phi\} \in \mathcal{F},$$

onde $F = \{f_1, f_2\} \in \mathcal{F}$. Portanto, existe uma única solução $\{v, p\} \in \mathcal{F}$ que satisfaz o nosso sistema (3.28) – (3.29).

Portanto, operador $-A_1$ é maximal monótono, e a Afirmação 1 está provada.

Afirmação 2: $-A_2$ é um operador monótono, hemicontínuo e limitado.

Assumindo a hipótese sobre a função g , o operador $-A_2$ satisfaz

$$(-A_2 U, U)_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

e portanto, $-A_2$ é monótono.

Para provar a hemicontinuidade, seja $U_i = (v_i, y_i, p_i, z_i)' \in \mathcal{H}$, para $i = 1, 2$ e consideremos a seguinte expressão

$$(-A_2(U_1 + tU_2), U)_{\mathcal{H}} = (\sigma(t) g(y_1 + ty_2), y)_{L^2},$$

com $t > 0$.

Vamos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\sigma(t) g(y_1 + ty_2), y)_{L^2} = (\sigma(t) g(y_1), y)_{L^2}. \quad (3.30)$$

Para isto, seja $f \in L^1(0, L)$ definida por

$$f(x) = \sigma(t) g(y_1(x)) y(x),$$

e definimos a sequência $\{f_n\} \subset L^1(0, L)$, por

$$f_n(x) = \sigma(t) g\left(y_1(x) + \frac{1}{n} y_2(x)\right) y(x).$$

Assim teremos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ quase sempre em } (0, L).$$

Definindo o conjunto

$$X_n = \left\{ x \in [0, L]; \left| y_1(x) + \frac{1}{n} y_2(x) \right| < 1 \right\}.$$

Assim, façamos a seguinte análise, usando a hipótese sobre a g

$$|f_n(x)| = \left| \sigma(t) g\left(y_1(x) + \frac{1}{n} y_2(x)\right) \right| |y(x)| \leq c_1 \left| y_1(x) + \frac{1}{n} y_2(x) \right| |y(x)| \leq c_1 |y(x)|,$$

para quase todo $x \in X_n$ e $c_1 > 0$.

Logo, podemos concluir que $\{f_n\}$ é limitada por uma função integrável em $[0, L]$. Então, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos o limite (3.30). Portanto, temos que $-A_2$ é hemicontínuo.

Assim da hipótese da g podemos afirmar que o operador $-A_2$ é limitado em subconjuntos limitados, assim temos que a Afirmação 2 está concluída.

Com as Afirmações 1 e 2, o operador \mathcal{A} é maximal monótono, e assim pelo Teorema 3.1 em Brezis [2], concluímos a prova.

A segunda parte deste Teorema segue do Teorema 3.1, do Capítulo 3 em [1].

3.4 Comportamento Assintótico

Nesta seção estudaremos a taxa geral de decaimento da energia do sistema (3.1) – (3.2), para tal, aplicaremos o método da energia e precisaremos dos Lemas a seguir.

Lema 3.4.1. *Seja (v, p) solução do sistema (3.1) – (3.2). Então o funcional*

$$\mathcal{F}(t) := \rho \int_0^L v_t v \, dx + \gamma \mu \int_0^L p_t v \, dx, \quad (3.31)$$

satisfaz a estimativa

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq \left(\rho + \frac{\gamma \mu}{4\epsilon_1} \right) \int_0^L |v_t|^2 \, dx + \gamma \mu \epsilon_1 \int_0^L |p_t|^2 \, dx - (\alpha_1 - c_p \epsilon_2) \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} \int_0^L g^2(v_t) \, dx, \quad (3.32)$$

Prova: Multiplicando (3.1) por v ,

$$\rho \int_0^L v_{tt} v \, dx - \alpha_1 \int_0^L v_{xx} v \, dx - \gamma^2 \beta \int_0^L v_{xx} v \, dx + \gamma \beta \int_0^L p_{xx} v \, dx + \sigma(t) \int_0^L g(v_t) v \, dx = 0.$$

Daí, integrando por partes em $(0, L)$ e usando as condições de fronteira, obtemos:

$$\rho \int_0^L v_{tt} v \, dx + \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx - \gamma \beta \int_0^L v(\gamma v - p)_{xx} \, dx + \int_0^L \sigma(t) g(v_t) v \, dx = 0,$$

Usando a seguinte identidade

$$v_{tt} v = \frac{d}{dt} v_t v - |v_t|^2$$

e explorando a equação (3.2), temos

$$\mu p_{tt} = \beta p_{xx} - \gamma \beta v_{xx} = \beta(p - \gamma v)_{xx} \iff -\mu p_{tt} = \beta(\gamma v - p)_{xx}$$

Resultando

$$\frac{d}{dt} \rho \int_0^L v_t v \, dx - \rho \int_0^L |v_t|^2 \, dx + \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \gamma \mu \int_0^L p_{tt} v \, dx + \sigma(t) \int_0^L g(v_t) v \, dx = 0.$$

Usando a seguinte identidade:

$$p_{tt} v = \frac{d}{dt} p_t v - p_t v_t$$

Teremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_t v dx + \gamma \mu \int_0^L p_t v dx \right) &= \rho \int_0^L |v_t|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \gamma \mu \int_0^L p_t v_t dx \\ &\quad - \sigma(t) \int_0^L g(v_t) v dx, \end{aligned} \quad (3.33)$$

aplicando as desigualdades de Young e Poincaré nas seguintes integrais

$$\gamma \mu \int_0^L p_t v_t dx \leq \gamma \mu \epsilon_1 \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{\gamma \mu}{4\epsilon_1} \int_0^L |v_t|^2 dx, \quad (3.34)$$

$$-\sigma(t) \int_0^L g(v_t) v dx \leq \epsilon_2 c_p \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} \int_0^L g^2(v_t) dx. \quad (3.35)$$

Substituindo as expressões (3.34) e (3.35) em (3.33), segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_t v dx + \gamma \mu \int_0^L p_t v dx \right) &\leq \rho \int_0^L |v_t|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \gamma \mu \epsilon_1 \int_0^L |p_t|^2 dx \\ &\quad + \frac{\gamma \mu}{4\epsilon_1} \int_0^L |v_t|^2 dx + \epsilon_2 c_p \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} \int_0^L g^2(v_t) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) &\leq \rho \int_0^L |v_t|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \gamma \mu \epsilon_1 \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{\gamma \mu}{4\epsilon_1} \int_0^L |v_t|^2 dx \\ &\quad + \epsilon_2 c_p \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} \int_0^L g^2(v_t) dx, \end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema.

Lema 3.4.2. *Seja (v, p) solução do sistema (3.1) – (3.2). Então o funcional*

$$\mathcal{G}(t) := \rho \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx. \quad (3.36)$$

satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) &\leq \left(\rho \gamma + \frac{C}{4\epsilon_5} \right) \int_0^L |v_t|^2 dx - (\gamma \mu - \epsilon_5 C) \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{\alpha_1}{4\epsilon_3} \int_0^L |v_x|^2 dx \\ &\quad + (\alpha_1 \epsilon_3 + \epsilon_4 c_p) \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} \int_0^L g^2(v_t) dx. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Prova: Multiplicando a equação (3.1) por $(\gamma v - p)$,

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L v_{tt}(\gamma v - p) dx - \alpha_1 \int_0^L v_{xx}(\gamma v - p) dx - \gamma^2 \beta \int_0^L v_{xx}(\gamma v - p) dx + \gamma \beta \int_0^L p_{xx}(\gamma v - p) dx \\ & + \sigma(t) \int_0^L g(v_t)(\gamma v - p) dx = 0. \end{aligned}$$

Daí, integrando por partes em $(0, L)$ e usando as condições de fronteira, segue:

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L v_{tt}(\gamma v - p) dx + \alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v - p)_x dx - \gamma \beta \int_0^L (\gamma v - p)(\gamma v - p)_{xx} dx \\ & + \sigma(t) \int_0^L g(v_t)(\gamma v - p) dx = 0 \end{aligned}$$

Usando a equação (3.2) do sistema na forma

$$\beta(\gamma v - p)_{xx} = -\mu p_{tt}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^L v_{tt}(\gamma v - p) dx + \alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v - p)_x dx + \gamma \mu \int_0^L (\gamma v - p) p_{tt} dx \\ & + \sigma(t) \int_0^L g(v_t)(\gamma v - p) dx = 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

De acordo com as seguintes identidades,

$$v_{tt}(\gamma v - p) = \frac{d}{dt} v_t(\gamma v - p) - v_t(\gamma v - p)_t$$

e

$$p_{tt}(\gamma v - p) = \frac{d}{dt} p_t(\gamma v - p) - p_t(\gamma v - p)_t$$

Substituindo as identidades acima em (3.38), teremos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx \right) = -\alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v - p)_x dx \\ & + \rho \int_0^L v_t(\gamma v - p)_t dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p)_t dx - \sigma(t) \int_0^L g(v_t)(\gamma v - p) dx. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Desenvolvendo os termos de (3.39), teremos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx \right) = -\alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v - p)_x dx + \gamma \rho \int_0^L |v_t|^2 dx \\ & - \rho \int_0^L v_t p_t dx + \gamma^2 \mu \int_0^L v_t p_t dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx - \sigma(t) \int_0^L g(v_t)(\gamma v - p) dx. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx \right) &= -\alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v - p)_x dx + \gamma \rho \int_0^L |v_t|^2 dx \\ + C \int_0^L v_t p_t dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx - \sigma(t) \int_0^L g(v_t)(\gamma v - p) dx, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde $C = \gamma^2 \mu - \rho$.

Usando as desigualdades de Young e Poincaré nas seguintes integrais

$$\begin{aligned} -\alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v - p)_x dx &\leq \alpha_1 \epsilon_3 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \frac{\alpha_1}{4\epsilon_3} \int_0^L |v_x|^2 dx, \\ -\sigma(t) \int_0^L g(v_t)(\gamma v - p) dx &\leq c_p \epsilon_4 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} \int_0^L g^2(v_t) dx, \\ C \int_0^L v_t p_t dx &\leq C \epsilon_5 \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{C}{4\epsilon_5} \int_0^L |v_t|^2 dx. \end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades acima em (3.41), resultará

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx \right) &\leq \alpha_1 \epsilon_3 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \frac{\alpha_1}{4\epsilon_3} \int_0^L |v_x|^2 dx \\ + \gamma \rho \int_0^L |v_t|^2 dx + C \epsilon_5 \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{C}{4\epsilon_5} \int_0^L |v_t|^2 dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx &+ c_p \epsilon_4 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} \int_0^L g^2(v_t) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) &\leq \alpha_1 \epsilon_3 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \frac{\alpha_1}{4\epsilon_3} \int_0^L |v_x|^2 dx + \gamma \rho \int_0^L |v_t|^2 dx + C \epsilon_5 \int_0^L |p_t|^2 dx \\ + \frac{C}{4\epsilon_5} \int_0^L |v_t|^2 dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx + c_p \epsilon_4 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx &+ \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} \int_0^L g^2(v_t) dx, \end{aligned}$$

o que conclui a prova.

Lema 3.4.3. *Seja (v, p) solução do sistema (3.1) – (3.2). Então o funcional*

$$\mathcal{H}(t) := \rho \int_0^L v_t v dx + \mu \int_0^L p_t p dx. \quad (3.42)$$

satisfaz a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) &\leq \rho \int_0^L |v_t|^2 dx + \mu \int_0^L |p_t|^2 dx - (\alpha_1 - \epsilon_6 c_p) \int_0^L |v_x|^2 dx - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_6} \int_0^L g^2(v_t) dx. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Prova: Multiplicando a equação (3.1) por v , integrando por partes em $(0, L)$ e usando as condições de fronteira, teremos,

$$\rho \int_0^L v_{tt}v \, dx + \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx - \gamma^2 \beta \int_0^L v_{xx}v \, dx + \gamma \beta \int_0^L p_{xx}v \, dx + \sigma(t) \int_0^L g(v_t)v \, dx = 0.$$

Usando a identidade : $\frac{d}{dt}v_tv = v_{tt}v + v_t^2$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_tv \, dx \right) &= \rho \int_0^L |v_t|^2 \, dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx - \gamma \beta \int_0^L v_x(\gamma v_x - p_x) \, dx \\ &\quad - \sigma(t) \int_0^L g(v_t)v \, dx. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agora, multiplicando a equação (3.2) por p , teremos:

$$\mu \int_0^L p_{tt}p \, dx - \beta \int_0^L p_{xx}p \, dx + \gamma \beta \int_0^L v_{xx}p \, dx = 0.$$

Aplicando a identidade: $p_{tt}p = \frac{d}{dt}p_tp - p_t^2$.

Segue que

$$\frac{d}{dt} \left(\mu \int_0^L p_tp \, dx \right) = \mu \int_0^L |p_t|^2 \, dx + \beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)p_x \, dx. \quad (3.45)$$

Agora, somando (3.44) e (3.45), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_tv \, dx + \mu \int_0^L p_tp \, dx \right) &= \rho \int_0^L |v_t|^2 \, dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \mu \int_0^L |p_t|^2 \, dx \\ &\quad - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 \, dx - \sigma(t) \int_0^L g(v_t)v \, dx. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Poincaré e Young na última igualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho \int_0^L v_tv \, dx + \mu \int_0^L p_tp \, dx \right) &\leq \rho \int_0^L |v_t|^2 \, dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \mu \int_0^L |p_t|^2 \, dx \\ &\quad - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 \, dx + \epsilon_6 c_p \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_6} \int_0^L g^2(v_t) \, dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) &\leq \rho \int_0^L |v_t|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \mu \int_0^L |p_t|^2 dx - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ &\quad + \epsilon_6 c_p \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_6} \int_0^L g^2(v_t) dx. \end{aligned}$$

Assim concluímos a prova.

Agora podemos provar o principal resultado, com esta finalidade, seja o funcional de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + N_1 \mathcal{F}(t) + N_2 \mathcal{G}(t) + N_3 \mathcal{H}(t), \quad (3.46)$$

onde N, N_i , para $i = 1, 2, 3$ constantes positivas, $E(t)$ é a energia associada ao sistema e os funcionais $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ dados pelos Lemas anteriores.

Assim, combinando os resultados acima e tomando ϵ_i suficientemente pequenos, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -N\sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx + N_1 \left(\rho + \frac{\gamma\mu}{4\epsilon_1} \right) \int_0^L |v_t|^2 dx + N_1 \gamma \mu \epsilon_1 \int_0^L |p_t|^2 dx \\ &\quad - N_1 \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + N_1 c_p \epsilon_2 \int_0^L |v_x|^2 dx + N_1 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} \int_0^L g^2(v_t) dx + N_2 \frac{\alpha_1}{4\epsilon_3} \int_0^L |v_x|^2 dx \\ &\quad + N_2 \alpha_1 \epsilon_3 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + N_2 \rho \gamma \int_0^L |v_t|^2 dx + N_2 \frac{C}{4\epsilon_5} \int_0^L |v_t|^2 dx + N_2 \epsilon_5 C \int_0^L |p_t|^2 dx \\ &\quad - N_2 \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx + N_2 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} \int_0^L g^2(v_t) dx + N_2 \epsilon_4 c_p \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + N_3 \rho \int_0^L |v_t|^2 dx \\ &\quad + N_3 \mu \int_0^L |p_t|^2 dx - N_3 \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx - N_3 \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + N_3 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_6} \int_0^L g^2(v_t) dx \\ &\quad + N_3 \epsilon_6 c_p \int_0^L |v_x|^2 dx \end{aligned} \quad (3.47)$$

Organizando os termos de (3.47)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -N\sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx - [-N_1 \gamma \mu \epsilon_1 - N_2 \epsilon_5 C + N_2 \gamma \mu - N_3 \mu] \int_0^L |p_t|^2 dx \\ &\quad - \left[N_1 \alpha_1 - N_1 \epsilon_2 c_p - N_2 \frac{\alpha_1}{4\epsilon_3} + N_3 \alpha_1 - N_3 \epsilon_6 c_p \right] \int_0^L |v_x|^2 dx \\ &\quad - [-N_2 \alpha_1 \epsilon_3 - N_2 \epsilon_4 c_p + N_3 \beta] \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ &\quad + \left[N_1 \left(\rho + \frac{\gamma\mu}{4\epsilon_1} \right) + N_2 \rho \gamma + N_2 \frac{C}{4\epsilon_5} + N_3 \rho \right] \int_0^L |v_t|^2 dx \\ &\quad + \left[N_1 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} + N_2 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} + N_3 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_6} \right] \int_0^L g^2(v_t) dx. \end{aligned}$$

Reagrupando os termos, a inequação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -N\sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx - \left[-N_1\gamma\epsilon_1 + N_2 \left(\gamma - \frac{\epsilon_5 C}{\mu} \right) - N_3 \right] \mu \int_0^L |p_t|^2 dx \\
& - \left[N_1 \left(1 - \frac{\epsilon_2 c_p}{\alpha_1} \right) - \frac{N_2}{4\epsilon_3} - N_3 \left(1 - \frac{\epsilon_6 c_p}{\alpha_1} \right) \right] \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx \\
& - \left[N_3 - N_2 \left(\alpha_1 \frac{\epsilon_3}{\beta} + \frac{\epsilon_4 c_p}{\beta} \right) \right] \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\
& + \left[N_1 \left(\rho + \frac{\gamma\mu}{4\epsilon_1} \right) + N_2 \rho \gamma + N_2 \frac{C}{4\epsilon_5} + N_3 \rho \right] \int_0^L |v_t|^2 dx \\
& + \left[N_1 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} + N_2 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} + N_3 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_6} \right] \int_0^L g^2(v_t) dx.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Agora, tomando

$$\begin{aligned}
k_1 &= N_2 \left(\gamma - \frac{\epsilon_5 C}{\mu} \right) - N_1 \gamma \epsilon_1 - N_3 > 0, \\
k_2 &= N_1 \left(1 - \frac{\epsilon_2 c_p}{\alpha_1} \right) - \frac{N_2}{4\epsilon_3} - N_3 \left(1 - \frac{\epsilon_6 c_p}{\alpha_1} \right) > 0, \\
k_3 &= N_3 - N_2 \left(\alpha_1 \frac{\epsilon_3}{\beta} + \frac{\epsilon_4 c_p}{\beta} \right) > 0, \\
c_1 &= N_1 \left(\rho + \frac{\gamma\mu}{4\epsilon_1} \right) + N_2 \rho \gamma + N_2 \frac{C}{4\epsilon_5} + N_3 \rho, \\
c_2 &= N_1 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_2} + N_2 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_4} + N_3 \frac{\sigma(t)}{4\epsilon_6}.
\end{aligned}$$

Substituindo os valores associados a k_1, k_2, k_3, c_1 e c_2 em (3.48), resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq & -\rho \int_0^L |v_t|^2 dx - k_1 \mu \int_0^L |p_t|^2 dx - k_2 \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx - k_3 \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\
& + c \int_0^L (v_t^2 + g^2(v_t)) dx.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -d_1 E(t) + c \int_0^L (v_t^2 + g^2(v_t)) dx, \tag{3.50}$$

ou

$$E(t) \leq -d_2 \mathcal{L}'(t) + c \int_0^L (v_t^2 + g^2(v_t)) dx, \tag{3.51}$$

Por outro lado, escolhemos N suficientemente grande, teremos

$$\mathcal{L}(t) \sim E(t) \tag{3.52}$$

Antes de enunciarmos nosso principal resultado, precisaremos do seguinte Lema:

Lema 3.4.4. *Seja $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função não crescente e $\alpha_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função de classe C^1 estritamente crescente, com $\alpha_3(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.*

Assumindo que existem $b, q \geq 0$ e $c > 0$ tal que

$$\int_S^\infty \alpha_3'(t) E(t)^{1+b} dt \leq c E(t)^{1+b} + \frac{c E(t)}{\alpha_3^q}, \quad 1 \leq S \leq \infty.$$

Então, temos as constantes positivas k e w tal que

$$E(t) \leq k e^{-w \alpha_3(t)}, \quad \forall t \geq 1 \text{ se } b = q = 0.$$

e

$$E(t) \leq \frac{k}{\alpha_3(t)^{\frac{1+q}{b}}}, \quad \forall t \geq 1 \text{ se } b > 0.$$

Prova: Ver [16].

Podemos então enunciar e provar nosso principal resultado

Teorema 3.4.1. *Assumindo as hipóteses 3.1.1 e 3.1.2, então, existe uma constante $c > 0$ tal que, para t grande, a solução de (3.1) – (3.5) satisfaz*

$$E(t) \leq c \left(G_0^{-1} \left(\frac{1}{\int_0^t \sigma(s) ds} \right) \right)^2 \quad (3.53)$$

onde

$$G_0(s) = s g_0(s)$$

Mais ainda, se K , definida por $K(s) = \frac{g_0(s)}{s}$, seja estritamente crescente, em $[0, r)$, para $r > 0$, e $K(0) = 0$, então temos a estimativa

$$E(t) \leq c \left(g_0^{-1} \left(\frac{1}{\int_0^t \sigma(s) ds} \right) \right)^2 \quad (3.54)$$

Prova: Definimos

$$\psi(t) := 1 + \int_1^t \left(\frac{1}{g_0\left(\frac{1}{s}\right)} \right) ds \quad t \geq t',$$

para $t' > \max\{1, \frac{1}{m}\}$. Então

$$\psi'(t) := \frac{1}{g_0\left(\frac{1}{t}\right)} > 0, \quad t \geq t', \quad \psi'(t) \rightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty$$

e $\psi'(t)$ é estritamente crescente.

Assim, ψ é uma função convexa e estritamente crescente C^2 , com $\psi'(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Dessa forma, ψ admite inversa, se $\alpha_0 := \psi^{-1}$, então α_0 é estritamente crescente, e $\alpha'_0(t) = g_0\left(\frac{1}{\alpha_0(t)}\right)$ é decrescente, pois $\alpha_0(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Definimos

$$\alpha(t) := \alpha_0\left(\int_0^t \sigma(s) ds\right), \quad t \geq t_1$$

para algum $t_1 \geq t'$ com $\int_0^{t_1} \sigma(s) ds \geq t'$ e $\alpha'_0\left(\int_0^{t_1} \sigma(s) ds\right) < m$. Usando as propriedades de α_0 e σ temos que α é uma função diferenciável estritamente crescente e côncava, com $\alpha_0(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Usando (3.52), segue que

$$\begin{aligned} E(t) &\leq c\mathcal{L}(t), \quad \text{devido a equivalência} \\ \alpha'(t)E^2(t) &\leq c\alpha'(t)E\mathcal{L} \end{aligned}$$

Substituindo (3.51) e integrando em $T \geq S \geq t_1$, a desigualdade acima será da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_S^T \alpha'(t)E^2(t) dt &\leq c \int_S^T \alpha'(t)E\mathcal{L} dt \\ &\leq -c' \int_S^T \alpha'(t)\mathcal{L}'\mathcal{L} dt + c \int_S^T \alpha'(t)\mathcal{L} \left(\int_0^L (v_t^2 + g^2(v_t)) dx \right) dt \\ &\leq cE^2(S) + c \int_S^T \alpha'(t)E \left(\int_0^L (v_t^2 + g^2(v_t)) dx \right) dt \end{aligned} \quad (3.55)$$

Agora, usando a Hipótese 3.1.1 e (3.14) e as propriedades de α, α_0 e σ , temos as seguintes estimativas.

(1) Estimativa para a integral $\int_S^T \alpha'(t)E \left(\int_0^L v_t^2 dx \right) dt$.

Considerando a seguinte partição em $(0, L)$:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in (0, L); |v_t| > m\}, \\ \Omega_2 &= \left\{ x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } |v_t| \leq g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right\}, \\ \Omega_3 &= \left\{ x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } |v_t| > g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Calculando as integrais uma a uma, teremos

- Para Ω_1 :

$$\alpha'(t) \int_{\Omega_1} v_t^2 dx \leq c \underbrace{\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right)}_{< m} \sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx \leq -cE'(t).$$

- Para Ω_2 :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \int_{\Omega_2} v_t^2 dx &= \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_{\Omega_2} |v_t|^2 dx \\ &\leq \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_0^L \left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2 dx \\ &\leq c \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2. \end{aligned}$$

- Para Ω_3 :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \int_{\Omega_3} v_t^2 dx &= \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_{\Omega_3} v_t^2 dx \\ &= g_0 \underbrace{\left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \int_0^t \sigma(s) ds \right) \right)}_{< |v_t|} \sigma(t) \int_{\Omega_3} v_t^2 dx \\ &< \underbrace{g_0(|v_t|)}_{\text{Da Hip. 1.1.1}} \sigma(t) \int_{\Omega_3} \underbrace{|v_t|}_{\text{De } \Omega_3} |v_t| dx \leq \sigma(t) \int_{\Omega_3} g(|v_t|) m |v_t| dx \\ &\leq c \sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx = -cE'(t). \end{aligned}$$

Consequentemente, somando as integrais referentes a Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 teremos

$$\alpha'(t) \int_0^L v_t^2 dx \leq -cE'(t) + c \sigma(t) \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2$$

e resultando

$$\begin{aligned} \int_S^T \alpha'(t) E \left(\int_0^L v_t^2 dx \right) dt &< cE^2(S) \\ + cE(S) \int_S^T \sigma(t) \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) &\left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2 dt \end{aligned} \quad (3.57)$$

(2) Estimativa para a integral $\int_S^T \alpha'(t) E \left(\int_0^L g^2(v_t) dx \right) dt$

Considerando a seguinte partição de $(0, L)$:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \{x \in (0, L); |v_t| > m\}, \\ \Theta_2 &= \left\{ x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } |v_t| \leq \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right\}, \\ \Theta_3 &= \left\{ x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } |v_t| > \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Então, teremos

- Para Θ_1 :

$$\alpha'(t) \int_{\Theta_1} g^2(v_t) dx \leq \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx \leq -cE'(t).$$

- Para Θ_2 :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \int_{\Theta_2} \underbrace{g^2(v_t)}_{\text{Da Hip. 1.1.1}} dx &\leq \sigma(t) \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \int_{\Theta_2} (g_0^{-1}(|v_t|))^2 dx \\ &\leq c \sigma(t) \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2. \end{aligned}$$

- Para Θ_3 :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \int_{\Theta_3} g^2(v_t) dx &= \sigma(t) \underbrace{\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right)}_{< |v_t|} \int_{\Theta_3} g^2(v_t) dx \leq |v_t| \sigma(t) \int_{\Theta_3} g(v_t) \underbrace{g(v_t)}_{\text{Da Hip. 1.1.1}} dx \\ &\leq |v_t| \sigma(t) \int_{\Theta_3} g(v_t) g_0^{-1}(|v_t|) dx \leq \underbrace{g_0^{-1}(m)}_{cts} \sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx \\ &\leq -cE'(t). \end{aligned}$$

Obtemos

$$\alpha'(t) \int_0^L g^2(v_t) dx \leq -cE'(t) + \sigma(t) \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2$$

Que implica

$$\begin{aligned} &\int_S^T \alpha' E \left(\int_0^L g^2(v_t) dx \right) dt \\ &\leq cE^2(S) + cE(S) \int_S^T \sigma(t) \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2 dt \quad (3.59) \end{aligned}$$

Combinando (3.55), (3.57) e (3.59), resulta

$$\begin{aligned}
\int_S^\infty \alpha'(t) E^2(t) dt &\leq cE^2(S) + cE(S) \int_S^\infty \sigma(t) \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \left(g_0^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2 dt \\
&= cE^2(S) + cE(S) \int_{\left(\int_0^S \sigma(t) dt\right)}^\infty \alpha'_0(\tau) (g_0^{-1}(\alpha'_0(\tau)))^2 d\tau \\
&= cE^2(S) + cE(S) \int_{\alpha_0\left(\int_0^S \sigma(t) dt\right)}^\infty \left(g_0^{-1} \left(g_0 \left(\frac{1}{s} \right) \right) \right)^2 ds \\
&= cE^2(S) + \frac{cE(S)}{\alpha_0\left(\int_0^S \sigma(t) dt\right)} = cE^2(S) + \frac{cE(S)}{\alpha(S)}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.4.4, resulta

$$E(t) \leq \frac{c}{\alpha(t)^2} = \frac{c}{\left(\alpha_0\left(\int_0^t \sigma(s) ds\right)\right)^2}, \quad \forall t \geq t_1 \quad (3.60)$$

Para obter (3.53), tomamos $s_0 > t'$ tal que $g_0\left(\frac{1}{s_0}\right) \leq 1$. Uma vez que g_0 é crescente e $G_0(s) = sg_0(s)$, temos

$$\alpha_0^{-1}(s) \leq 1 + (s-1) \frac{1}{g_0\left(\frac{1}{s}\right)} \leq \frac{s}{g_0\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{1}{G_0\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\alpha_0(t)} \leq G_0^{-1}\left(\frac{1}{t}\right), \quad \forall t \geq t'.$$

Isto gera (3.53) em virtude de (3.60).

Para provar (3.54), vamos tomar $r = m$. Assim, para $r < m$ e $r \leq |s| \leq m$, usando a Hipótese 3.1.1, segue que

$$|g(s)| \leq \frac{g_0^{-1}(|s|)}{|s|} |s| \leq \frac{g_0^{-1}(m)}{r} |s| \quad e \quad |g(s)| \geq \frac{g_0(|s|)}{|s|} |s| \geq \frac{g_0(r)}{m} |s|$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
g_0(|s|) &\leq |g(s)| \leq g_0^{-1}(|s|) \quad \text{para todo } |s| \leq r \\
c'_1 |s| &\leq |g(s)| \leq c'_2 |s| \quad \text{para todo } |s| \geq r
\end{aligned}$$

o que justifica nossa suposição.

Agora, tomamos

$$\alpha_0 := \psi^{-1} \quad \text{onde} \quad \psi(t) := 1 + \int_1^t \frac{1}{K\left(\frac{1}{s}\right)} ds, \quad t \geq t'.$$

Neste caso, substituímos (3.56) e (3.58) por

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in (0, L); |v_t| > m\} \\ \Omega_2 &= \left\{x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } |v_t| \leq K^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right)\right\} \\ \Omega_3 &= \left\{x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } |v_t| > K^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right)\right\}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \{x \in (0, L); |v_t| > m\} \\ \Theta_2 &= \left\{x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } g_0^{-1}(|v_t|) \leq K^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right)\right\} \\ \Theta_3 &= \left\{x \in (0, L); |v_t| \leq m \text{ e } g_0^{-1}(|v_t|) > K^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right)\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, tendo as anteriores como referência.

Para Ω :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \int_{\Omega_1} v_t^2 dx &= \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_{\Omega_1} v_t^2 dx \leq -c E'(t). \\ \alpha'(t) \int_{\Omega_2} v_t^2 dx &= \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_{\Omega_2} \underbrace{|v_t|^2}_{De \Omega_2} dx \\ &\leq \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_{\Omega_2} \left(K^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2 dx \\ &\leq c \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \left(K^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2. \\ \alpha'(t) \int_{\Omega_3} v_t^2 dx &= \underbrace{\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right)}_{propriedade e \Omega_3} \sigma(t) \int_{\Omega_3} v_t^2 dx < K(|v_t|) \sigma(t) \int_{\Omega_3} v_t^2 dx \\ &= \sigma(t) \int_{\Omega_3} \underbrace{K(|v_t|)}_{definido} v_t^2 dx = \sigma(t) \int_{\Omega_3} \frac{g_0(|v_t|)}{|v_t|} |v_t| |v_t| dx \\ &= \sigma(t) \int_{\Omega_3} \underbrace{g_0(|v_t|)}_{Hipotese 1.1.1} |v_t| dx \leq \int_0^L v_t g(v_t) dx = -E'(t). \end{aligned}$$

Para Θ :

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) \int_{\Theta_1} g^2(v_t) dx &= \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_0^L g^2(v_t) dx = -c E'(t). \\
\alpha'(t) \int_{\Theta_2} g^2(v_t) dx &= \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_{\Theta_2} \underbrace{g^2(v_t)}_{\text{hipotese 1.1.1}} dx \\
&\leq \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \int_{\Theta_2} (g_0^{-1}(|v_t|)) dx \\
&\leq c \alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \sigma(t) \left(K^{-1} \left(\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right) \right)^2. \\
\alpha'(t) \int_{\Theta_3} g^2(v_t) dx &= \underbrace{\alpha'_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right)}_{\text{Propriedade}} \sigma(t) \int_{\Theta_3} \underbrace{g(v_t)}_{\text{Hipotese de } g} g(v_t) dx \\
&< K (g_0^{-1}(|v_t|)) \sigma(t) \int_{\Theta_3} g_0^{-1}(|v_t|) g(v_t) dx \\
&\leq \sigma(t) \int_{\Theta_3} \underbrace{K(g_0^{-1}(|v_t|))}_{\text{definido}} g_0^{-1}(|v_t|) g(v_t) dx \\
&= \sigma(t) \int_0^L v_t g(v_t) dx \leq -E'(t).
\end{aligned}$$

De forma análoga a anterior, teremos a mesma estimativa para a energia

$$E(t) \leq \frac{c}{\alpha(t)^2} = \frac{c}{\left(\alpha_0 \left(\int_0^t \sigma(s) ds \right) \right)^2}, \quad \forall t \geq t_1$$

Para obter (3.54), tomamos $s_0 > t'$ tal que $K\left(\frac{1}{s_0}\right) \leq 1$. Uma vez que K é estritamente crescente e $K(s) = \frac{g_0(s)}{s}$, temos

$$\psi = \alpha_0^{-1}(s) \leq 1 + (s-1) \frac{1}{K\left(\frac{1}{s}\right)} \leq \frac{s}{K\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{s}{s g_0\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{1}{g_0\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\alpha_0(t)} \leq g_0^{-1}\left(\frac{1}{t}\right), \quad \forall t \geq t'.$$

Isto gera (3.54) em virtude da estimativa de energia acima. Os outros casos podem ser tratados da mesma forma e o mesmo raciocínio leva a (3.54).

3.5 Simulações Numéricas

3.5.1 Aproximação via Elementos Finitos para a Solução $\{v, p\}$

Nesta seção desenvolvemos um algoritmo para obter a solução numérica para a viga piezoelétrica com damping não linear, assumindo regularidade suficiente sobre a solução $\{v, p\}$. Faremos uma série de simulações numéricas para verificar as propriedades já mostradas nos resultados teóricos. Em nossos esquemas numéricos consideramos um método aproximação por elementos finitos na variável espacial e um método das diferenças finitas na variável temporal com métodos iterativos para obter soluções, com o objetivo de aplicar o método de Newmark.

Para obter a forma variacional relacionada ao nosso problema. Fazemos o produto interno das equações (3.1), (3.2) e (3.4) por $w \in \mathbb{V}$ e integrando em $(0, L)$ temos o seguinte problema

$$\rho(v_{tt}, w) + \alpha(v_x, w_x) - \gamma\beta(p_x, w_x) + \sigma(t)(g(v_t), w) = 0, \quad (3.61)$$

$$\mu(p_{tt}, w) + \beta(p_x, w_x) - \gamma\beta(v_x, w_x) = 0, \quad (3.62)$$

$$(v(x, 0), w) = (v_0(x), w), \quad (p(x, 0), w) = (p_0(x), w), \quad (3.63)$$

$$(v_t(x, 0), w) = (v_1(x), w), \quad (p_t(x, 0), w) = (p_1(x), w). \quad (3.64)$$

3.5.2 Aproximação via Galerkin

Vamos considerar as funções v^h e p^h , definidas por

$$v^h = \sum_{j=0}^n f_j(t) \phi_j(x), \quad (3.65)$$

$$p^h = \sum_{j=0}^n h_j(t) \phi_j(x), \quad (3.66)$$

Substituindo (3.65) e (3.66) em (3.61) – (3.64), obtemos:

$$\begin{aligned} & \rho \left(\sum_{j=0}^n \ddot{f}_j(t) \phi_j(x), w \right) + \alpha \left(\sum_{j=0}^n f_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) \\ & - \gamma\beta \left(\sum_{j=0}^n h_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) + \sigma(t) (g(v_t^h) \phi_j(x), w) = 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\mu \left(\sum_{j=0}^n \ddot{h}_j(t) \phi_j(x), w \right) + \beta \left(\sum_{j=0}^n h_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) - \gamma\beta \left(\sum_{j=0}^n f_j(t) \phi_{j,x}(x), w_x \right) = 0 \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^n f_j(0) \phi_j, w \right) &= (v_0(x), w), \\ \left(\sum_{j=0}^n h_j(0) \phi_j, w \right) &= (p_0(x), w), \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^n \dot{f}_j(0) \phi_j, w \right) &= (v_1(x), w), \\ \left(\sum_{j=0}^n \dot{h}_j(0) \phi_j, w \right) &= (p_1(x), w). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Fazendo $w = \phi_i(x)$ e i, j varia de 1 a n , obtemos o seguinte sistema linear

$$\mathbf{M}_1 \ddot{f}(t) + \mathbf{C} g(v_t^h) + \mathbf{K}_1 f(t) + \mathbf{K}_2 h(t) = 0, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{M}_2 \ddot{h}(t) + \mathbf{K}_3 h(t) + \mathbf{K}_2 f(t) = 0, \quad (3.72)$$

$$f(0) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}_0, \quad h(0) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_0 \quad e \quad \dot{f}(0) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}_1, \quad \dot{h}(0) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_1, \quad (3.73)$$

onde $\mathbf{M}_{1(ij)} = \rho(\phi_j, \phi_i)$, $\mathbf{C}_{(ij)} = \sigma(t)(\phi_j, \phi_i)$, $\mathbf{K}_{1(ij)} = \alpha(\phi_{j,x}, \phi_{i,x})$, $\mathbf{K}_{2(ij)} = -\gamma\beta(\phi_{j,x}, \phi_{i,x})$, $\mathbf{M}_{2(ij)} = \mu(\phi_j, \phi_i)$, $\mathbf{K}_{3(ij)} = -\beta(\phi_{j,x}, \phi_{i,x})$, $\mathbf{A} = (\phi_j, \phi_i)$.

Podemos apresentar as equações (3.71) – (3.72) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{f} \\ \ddot{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(v_t^h) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando a abordagem descrita acima, obtemos o seguinte problema dinâmico em \mathbb{R}^n .

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}(t) + \mathbf{C} \mathbf{g} = 0, \quad (3.74)$$

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0, \quad \dot{\mathbf{d}}(0) = \dot{\mathbf{d}}_1 \quad (3.75)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \text{ é a matriz de massa, } \quad \ddot{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \ddot{f} \\ \ddot{h} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \dot{f}(0) \\ \dot{h}(0) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix}$ o vetor de rigidez elástica, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g(v_t^h) \\ 0 \end{bmatrix}$ a matriz do damping, no tempo t .

Além disso, \mathbf{d}_0 e $\dot{\mathbf{d}}_1$ denotam deslocamento e velocidades, nodal inicial.

Para resolver o sistema acima, introduzimos uma partição P de $[0, T]$ em J intervalos de comprimento Δt tais que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j = T$, com $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ e usamos o Método de Newmark [26]. Como em nosso trabalho temos um sistema não linear, desenvolvemos uma estrutura necessária para o método escolhido para analisar as soluções numéricas.

Sejam as seguintes equações que discretizam a aproximação do deslocamento, velocidade e a aceleração:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{g} &= 0, \\ \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t\dot{\mathbf{d}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1 - 2a)\ddot{\mathbf{d}}_n + 2a\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}] \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t[(1 - b)\ddot{\mathbf{d}}_n + b\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}], \end{aligned} \quad (3.76)$$

3.5.3 Simulações

Em todos os experimentos, consideramos o caso em que um feixe piezoelétrico embutido em uma extremidade se move livremente na outra extremidade. Além disso, usamos os seguintes parâmetros Newmark $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, e as seguintes condições iniciais:

$$v(x, 0) = \sin\left(5\pi\frac{x}{2L}\right), \quad v_t(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = \sin\left(9\pi\frac{x}{2L}\right) \text{ e } p_t(x, 0) = 0.$$

Simulação 1 (Caso Conservativo: $g \equiv 0$): Consideramos uma viga com os seguintes parâmetros: $L = 1.0$, $\rho = 7.6 \cdot 10^3$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 1.9 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 1.0$, $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10$. Além disso, uma malha de elementos finitos com 100 elementos e $\Delta t = 10^{-3}s$.

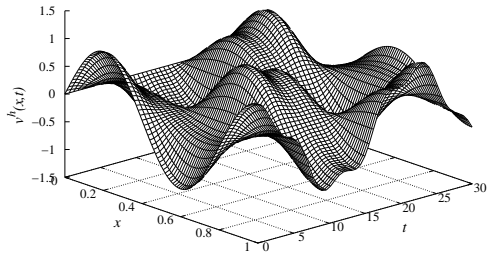


Figura 3.1 campo deslocamento $v^h(x,t)$

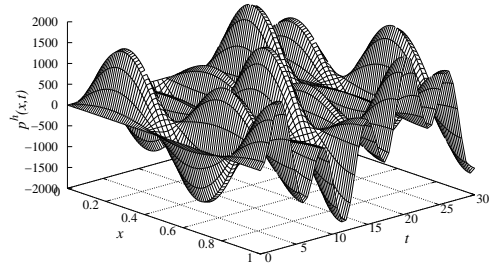


Figura 3.2 campo elétrico $p^h(x,t)$

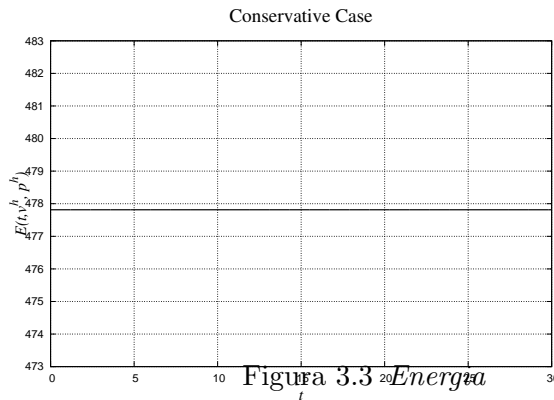


Figura 3.3 Energia

Simulação 2 (Caso Dissipativo com $g(s) = \sigma s$). Consideramos uma viga com $L = 1.0 m$, $\rho = 7.6 \cdot 10^{-3}$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 1.9 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 10^5$, $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^1$. Além disso, uma malha de elementos finitos com 100 elementos e $\Delta t = 10^{-3} s$.

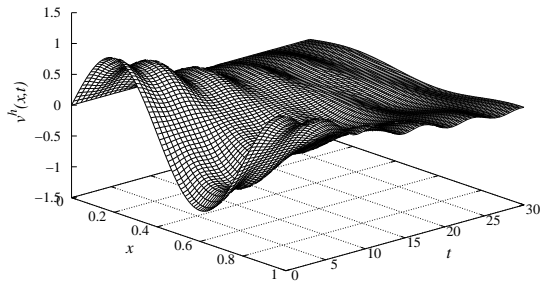


Figura 3.4 campo deslocamento $v^h(x,t)$

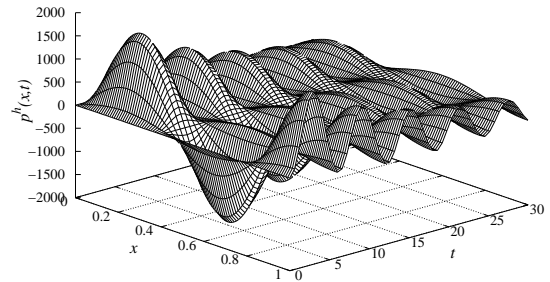


Figura 3.5 campo elétrico $p^h(x,t)$

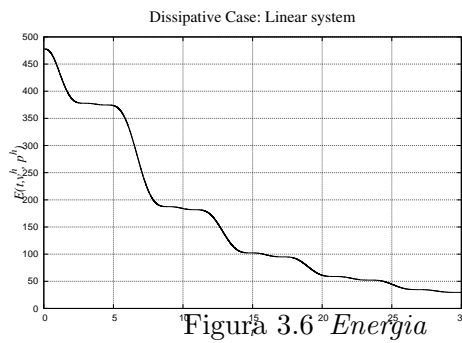


Figura 3.6 Energia

Simulação 3 (Caso não linear com $g(s) = \sigma \arctan 2s$): Consideramos uma viga retangular com $L = 1.0\text{ m}$, $\rho = 1000.0$, $\mu = 10.0$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 10.0$, $\alpha_1 = 1.0$. Além disso, uma malha de elementos finitos com 100 elementos e $\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$.

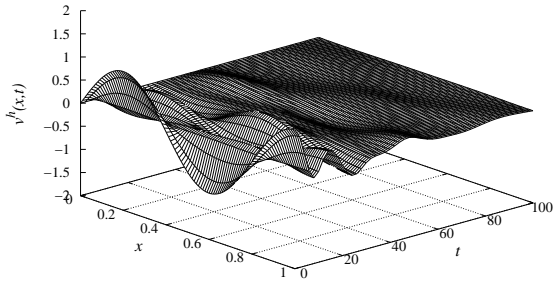


Figura 3.7

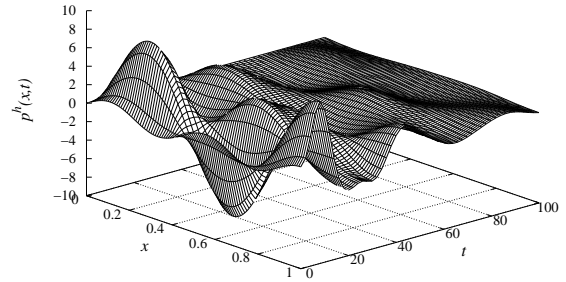
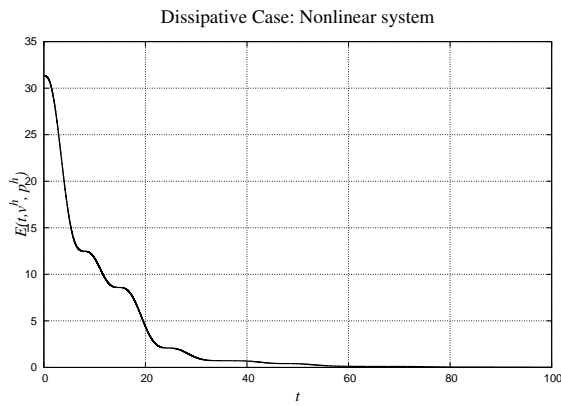


Figura 3.8



Simulação 4 (Solução Assintótica com $g(s) = \arctan 2s$): Consideramos uma viga retangular com $L = 1.0\text{ m}$, $\rho = 1.0$, $\mu = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\alpha_1 = 1.0$. Consideramos $f_1(x) = 3(1 - 2x)$ e $f_2(x) = -2(1 - 3x)$. Além disso, uma malha de elementos finitos com 32 elementos e $\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$.

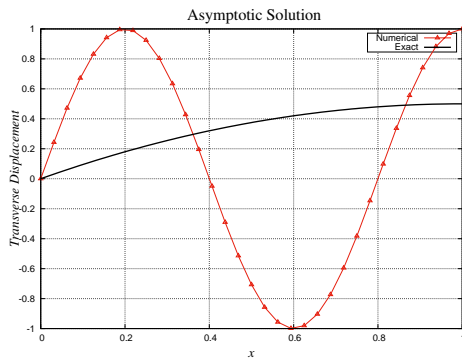


Figura 3.9

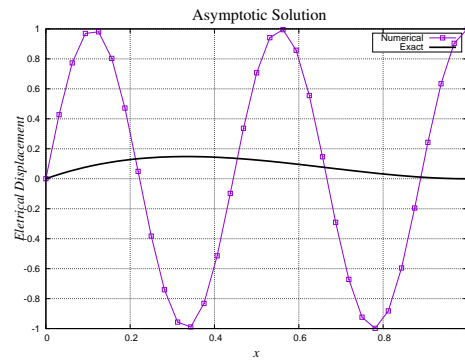


Figura 3.10

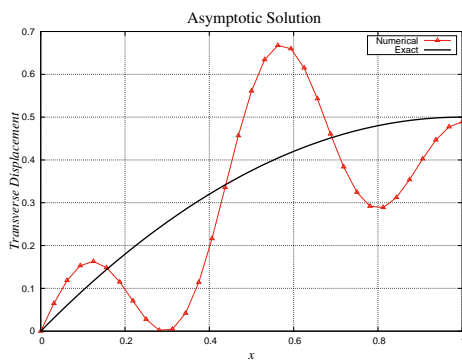


Figura 3.11

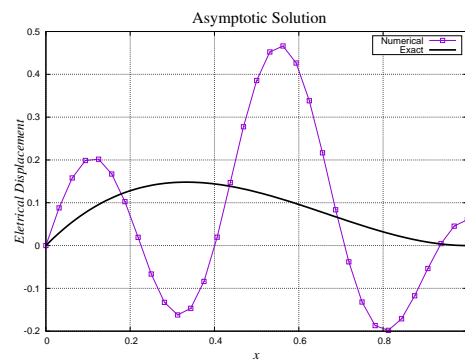


Figura 3.12

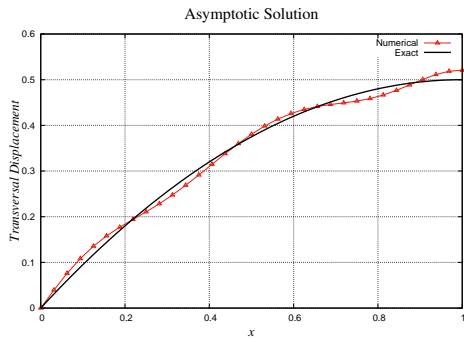


Figura 3.13

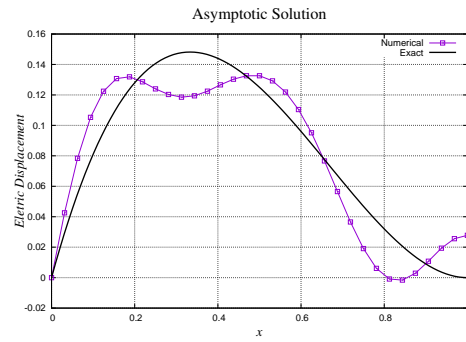


Figura 3.14

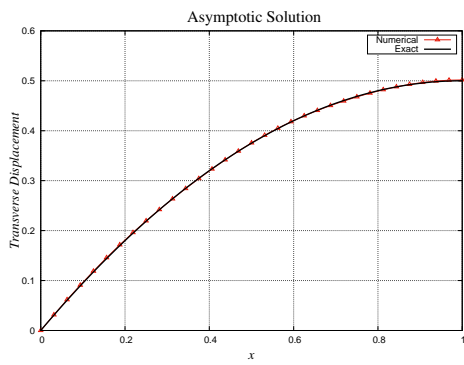


Figura 3.15

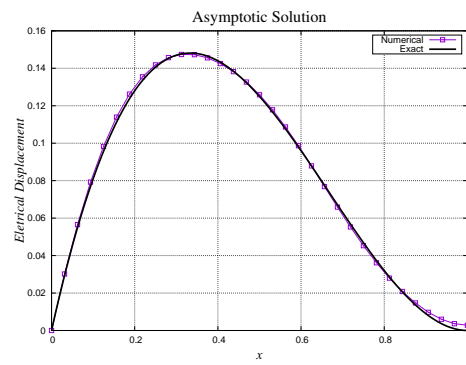


Figura 3.16

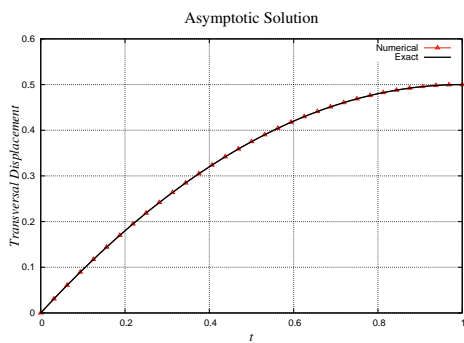


Figura 3.17

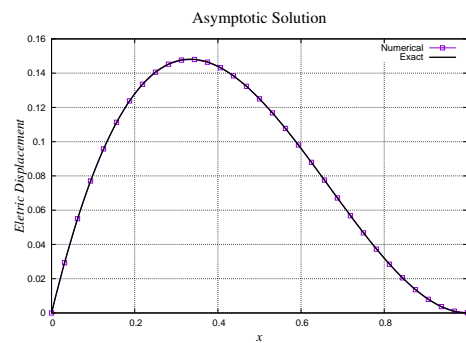


Figura 3.18

Capítulo 4

Sistema Piezoelétrico com a Lei de Coleman - Gurtin

Neste capítulo estudaremos a existência de um atrator global que possui dimensão fractal finita, para o sistema Piezoelétrico com lei térmica Coleman - Gurtin. Para alcançarmos nosso objetivo usaremos a técnica desenvolvida por Chueshov e Lasiecka.

$$\rho_1 v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x + g_1(v_t) + f_1(v, p) = h_1, \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} + g_2(p_t) + f_2(v, p) = h_2, \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \quad (4.2)$$

$$\rho_2 \theta_t - \left(\frac{1 - \alpha_2}{\beta_1} \right) \theta_{xx} - \frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g(s) \theta_{xx}(t - s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad (4.3)$$

onde as constantes $\rho_1, \rho_2, \mu, \alpha, \gamma, \beta, \beta_1, \delta$ e $\alpha_2 \in (0, 1)$ são positivas. As funções $g_1(v_t)$ e $g_2(p_t)$ são mecanismos de dissipação não lineares, as funções $f_1(v, p)$ e $f_2(v, p)$ representam termos não lineares de força, e os termos $h_1, h_2 \in L^2(0, L)$ são forças externas e seja a relação

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta,$$

sejam as condições iniciais dadas por

$$(v(x, 0), p(x, 0), \theta(x, 0)) = (v_0(x), p_0(x), \theta_0(x)), \quad (4.4)$$

$$(v_t(x, 0), p_t(x, 0)) = (v_1(x), p_1(x)), \quad \theta(-s) |_{s>0} = \vartheta_0(s), \quad x \in (0, L), \quad (4.5)$$

e condições de fronteira dadas por

$$v(0, t) = v(L, t) = p(0, t) = p(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (4.6)$$

$$v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) = 0,$$

$$p(0, t) = p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) = 0.$$

Para estudarmos este modelo, tomamos como base o artigo desenvolvido por Baowei Feng[32], onde

$\theta(x, t)$ é o mecanismo de temperatura, de acordo com a lei de Coleman-Gurtin[30] para o vetor fluxo de calor

$$\rho_2 \theta_t - \left(\frac{1 - \alpha_2}{\beta_1} \right) \theta_{xx} - \frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g(s) \theta_{xx}(t-s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad \alpha_2 \in (0, 1),$$

usado para assim termos o sistema proposto (4.1) – (4.3). Os casos em que $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_2 = 1$ correspondem aos casos Fourier e Gurtin-Pipkin, respectivamente, ver [33].

Em virtude da memória com história, o sistema não corresponde a um sistema autônomo, para lidar com a memória, motivada por Giorgi e outros[30,31], definimos uma nova variável $\eta = \eta^t(x, s)$ dada da seguinte forma

$$\eta^t(x, s) = \int_0^s \theta(t - \tau) d\tau, \quad (t, s) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^+. \quad (4.7)$$

Portanto, a história de θ satisfaz

$$\eta_t + \eta_s = \theta, \quad (x, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (4.8)$$

onde

$$\eta^t(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

e condição inicial

$$\eta^0(s) = \eta_0(s) \in \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{R}^+,$$

com

$$\eta_0(s) = \int_0^s \theta_0(\tau) d\tau, \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

Usando (4.7), teremos

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g(s) \theta_{xx}(t-s) ds = -\frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g'(s) \eta_{xx}^t ds.$$

Denotamos

$$\xi(s) = -\frac{\alpha_2}{\beta_1} g'(s) \text{ e } l = \frac{1 - \alpha_2}{\beta_1} > 0,$$

então teremos o seguinte sistema, equivalente ao sistema (4.1) – (4.3):

$$\rho_1 v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x + g_1(v_t) + f_1(v, p) = h_1, \quad (4.9)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} + g_2(p_t) + f_2(v, p) = h_2, \quad (4.10)$$

$$\rho_2 \theta_t - l \theta_{xx} - \int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx}^t(s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad (4.11)$$

$$\eta_t + \eta_s = \theta, \quad (4.12)$$

com o seguinte dado inicial

$$\begin{aligned} (v(x, 0), p(x, 0), \theta(x, 0)) &= (v_0(x), p_0(x), \theta_0(x)), \\ (v_t(x, 0), p_t(x, 0)) &= (v_1(x), p_1(x)), \quad \eta^0(x, s) = \eta_0(s), \end{aligned} \quad (4.13)$$

e condições de fronteira

$$v(0, t) = v(L, t) = p(0, t) = p(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = \eta^t(0, 0) = \eta^t(L, 0) = 0. \quad (4.14)$$

4.1 Hipóteses e Configuração de Espaço

Usaremos espaços de Lebesgue e Sobolev

$$L^q(0, L), \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \text{e } (u, v)_2 = (u, v)_{L^2(0, L)}.$$

Denotamos a norma no espaço B por $\|\cdot\|_B$. No caso, $q = 2$, escreveremos $\|u\|$ no lugar de $\|u\|_2$.

Uma vez que $u(0) = 0$, a desigualdade de Poincaré se mantém

$$\|u\| \leq L \|u_x\| \quad \text{e } \|u\|_{\mathbb{V}} = \|u_x\|, \quad \forall u \in \mathbb{V}.$$

Para o termo não linear de força f , usaremos as hipóteses

(F1) Existe uma função de classe C^2 , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\nabla F = (f_1, f_2), \quad (4.15)$$

e existem as constantes positivas ϱ e m_F tal que, para cada $v, p \in \mathbb{R}$

$$F(v, p) \geq -\varrho(|v|^2 + |p|^2) - m_F, \quad (4.16)$$

onde $0 \leq \varrho < \min \left\{ \frac{\alpha_1}{4(L^2 + 2\gamma^2 L^2)}, \frac{\beta}{8L^2} \right\}$.

(F2) Existem constantes positivas $q \geq 1$ e C_f , tal que para cada $v, p, s \in \mathbb{R}$,

$$|\nabla f_i(v, p)| \leq C_f (1 + |v|^{q-1} + |p|^{q-1}), \quad i = 1, 2 \quad (4.17)$$

o que resulta, que existe uma constante positiva C_F , tal que

$$F(v, p) \leq C_F (1 + |v|^{q+1} + |p|^{q+1}).$$

Com relação a função g , assumiremos que

(G1)

$$g_i \in C^1(\mathbb{R}), \quad g_i(0) = 0 \quad \text{e} \quad g_i \text{ é crescente.} \quad (4.18)$$

(G2) Existem constantes $m_i > 0$ e $M_i > 0$ tal que, para qualquer $s \in \mathbb{R}$,

$$m_i \leq g'_i(s) \leq M_i, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2 \quad (4.19)$$

o que nos dá a propriedade da monotonicidade

$$(g_i(u) - g_i(v))(u - v) \geq m_i |u - v|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

Para a função $\xi(s)$, definimos

(R1) $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável tal que

$$\xi(0) > 0, \quad \int_0^\infty \xi(s) ds = l_0 < \infty. \quad (4.20)$$

(R2) Existe a constante positiva μ_1 tal que

$$\xi'(t) + \mu_1 \xi(t) \leq 0, \quad \text{para } t \geq 0. \quad (4.21)$$

Agora, definimos os seguintes espaços em relação a variável η ,

$$\mathcal{M} = L^2_\xi(\mathbb{R}^+, H_0^1) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_0^1 \mid \int_0^\infty \xi(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert com norma

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^\infty \xi(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds,$$

e produto interno

$$(\eta, \chi)_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \eta_x(s) \chi_x(s) dx ds.$$

Definimos o espaço de Hilbert \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \mathbb{V} \times L^2(0, L) \times \mathbb{V} \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M},$$

onde

$$\mathbb{V} = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi(0) = 0\},$$

equipado com a norma

$$\|v, V, p, P, \theta, \eta\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|V\|^2 + \mu \|P\|^2 + \alpha_1 \|v_x\|^2 + \beta \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \rho_2 \|\theta\|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2.$$

4.2 Energia do Sistema

Nesta seção, definiremos o funcional energia da solução do sistema (4.9) – (4.14) como

$$E(t) = \frac{1}{2} [\rho_1 \|V\|^2 + \mu \|P\|^2 + \alpha_1 \|v_x\|^2 + \beta \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \rho_2 \|\theta\|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2], \quad (4.22)$$

e definimos também o funcional da energia modificada por

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + \int_0^L F(v, p) dx - \int_0^L h_1 v dx - \int_0^L h_2 p dx. \quad (4.23)$$

Então podemos enunciar o seguinte Lema.

Lema 4.2.1. *O funcional da energia modificada definida em (4.23) satisfaz para todo $t \geq 0$,*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -l \int_0^\infty \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(t) \|\eta_x\|^2 ds - \int_0^L (g_1(v_t) v_t + g_2(p_t) p_t) dx. \quad (4.24)$$

Além disso, se as funções $h_1, h_2 \in L^2(0, L)$, então existe uma constante positiva $K = K(\|h_1\|, \|h_2\|)$, tal que para qualquer $t \geq 0$,

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{1}{4} \|(v, v_t, p, p_t, \theta, \eta)\|_{\mathcal{H}}^2 - K. \quad (4.25)$$

Prova: Multiplicando as equações (4.9), (4.10) e (4.11) por v_t, p_t e θ , respectivamente, que consiste nas etapas a seguir:

- Multiplicando a equação (4.9) por v_t , integrando o resultado em $(0, L)$ e usando integração por partes, teremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_1 \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \gamma^2 \beta \int_0^L |v_t|^2 dx - \gamma \beta \int_0^L p_x v_{tx} dx \\ & + \delta \int_0^L \theta_x v_t dx - \int_0^L g_1(v_t) v_t dx + \int_0^L f_1(v, p) v_t dx - \int_0^L h_1 v_t dx = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

- Multiplicando a equação (4.10) por p_t , integrando o resultado em $(0, L)$ e usando integração por partes, teremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mu \int_0^L |p_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \beta \int_0^L |p_x|^2 dx - \gamma \beta \int_0^L v_x p_{tx} dx \\ & - \int_0^L g_2(p_t) p_t dx + \int_0^L f_2(v, p) p_t dx - \int_0^L h_2 p_t dx = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

- Multiplicando a equação (4.11) por θ , integrando o resultado em $(0, L)$ e usando integração por partes, teremos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_2 \int_0^L |\theta|^2 dx - \int_0^\infty \int_0^L \xi(s) \eta_{xx}^t(s) \theta dx ds + l \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \delta \int_0^L v_t \theta_x dx = 0. \quad (4.28)$$

Substituindo (4.12) na equação (4.28), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_2 \int_0^L |\theta|^2 dx - \underbrace{\int_0^\infty \int_0^L \xi(s) \eta_{xx}(s) \eta_t dx ds}_{I_1} - \underbrace{\int_0^\infty \int_0^L \xi(s) \eta_{xx}(s) \eta_s dx ds}_{I_2} \\ & + l \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \delta \int_0^L v_t \theta_x dx = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Calculando I_1 e I_2 :

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^\infty \int_0^L \xi(s) \eta_{xx}(s) \eta_t dx ds = \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \eta_x(s) \eta_{tx} dx \right) ds \\ &= \int_0^\infty \xi(s) \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\eta_x|^2 dx \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \xi(s) \|\eta_x\|^2 ds = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^\infty \int_0^L \xi(s) \eta_{xx}(s) \eta_s dx ds = \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \eta_x(s) \eta_{xs} dx \right) ds \\ &= \int_0^\infty \xi(s) \left(\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^L |\eta_x|^2 dx \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_0^\infty \xi(s) \frac{d}{ds} |\eta_x|^2 ds \right) dx, \quad \text{usando integração por partes} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(- \int_0^\infty \xi'(s) |\eta_x|^2 ds \right) dx \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \left(\int_0^L |\eta_x|^2 dx \right) ds \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x\|^2 ds \end{aligned}$$

Substituindo I_1 e I_2 na equação (4.29), obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_2 \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 - \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x\|^2 ds + l \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \delta \int_0^L v_t \theta_x dx = 0. \quad (4.30)$$

Somando as equações (4.26), (4.27) e (4.30), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2 + \rho_2 |\theta|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2) dx}_{E(t)} \\
& + \frac{d}{dt} \int_0^L (F(v, p) - h_1 v - h_2 p) dx \\
& = -l \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x\|^2 ds - \int_0^L (g_1(v_t) v_t + g_2(p_t) p_t) dx. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Daí, de (4.23) e (4.31), resulta (4.24),

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -l \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x\|^2 ds - \int_0^L (g_1(v_t) v_t + g_2(p_t) p_t) dx.$$

Usando (4.16) e a desigualdade de Poincaré, teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^L F(v, p) dx & \geq -\varrho L^2 \|v_x\|^2 - \varrho L^2 \|p_x\|^2 - Lm_F \\
& \geq -Lm_F - \varrho L^2 \|v_x\|^2 - \varrho L^2 (2\gamma^2 \|v_x\|^2 + 2\|\gamma v_x - p_x\|^2) \\
& \geq -Lm_F - (\varrho L^2 + 2\gamma^2 \varrho L^2) \|v_x\|^2 - 2\varrho L^2 \|\gamma v_x - p_x\|^2, \tag{4.32}
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|p_x\|^2 = \|\gamma v_x - \gamma v_x + p_x\|^2 = \|\gamma v_x - (\gamma v_x - p_x)\|^2 \leq 2\gamma^2 \|v_x\|^2 + 2\|\gamma v_x - p_x\|^2.$$

Segue das desigualdades de Poincaré e Young que

$$\begin{aligned}
\int_0^L h_1 v dx & \leq \|h_1\| L \|v_x\| \\
& \leq \frac{4L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \frac{\alpha_1}{16} \|v_x\|^2. \tag{4.33}
\end{aligned}$$

E também,

$$\begin{aligned}
\int_0^L h_2 p dx & \leq \|h_2\| L \|p_x\| \\
& \leq \|h_2\| L (\gamma \|v_x\| + \|\gamma v_x - p_x\|) \\
& \leq L \|h_2\| \|\gamma v_x - p_x\| + L\gamma \|h_2\| \|v_x\| \\
& \leq \frac{2L^2}{\beta} \|h_2\|^2 + \frac{\beta}{8} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{4L^2 \gamma^2}{\alpha_1} \|h_2\|^2 + \frac{\alpha_1}{16} \|v_x\|^2. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Somando as equações (4.32), (4.33) e (4.34), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^L F(v, p) dx - \int_0^L h_1 v dx - \int_0^L h_2 p dx \\
& \geq -Lm_F - \varrho(L^2 + 2\gamma^2 L^2) \|v_x\|^2 - 2\varrho L^2 \|\gamma v_x - p_x\|^2 - \frac{\alpha_1}{16} \|v_x\|^2 - \frac{\alpha_1}{16} \|v_x\|^2 \\
& - \frac{4L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 - \left(\frac{2L^2}{\beta} + \frac{4L^2 \gamma^2}{\alpha_1} \right) \|h_2\|^2 - \frac{\beta}{8} \|\gamma v_x - p_x\|^2 \\
& \geq -Lm_F - \frac{3\alpha_1}{8} \|v_x\|^2 - \frac{3\beta}{8} \|\gamma v_x - p_x\|^2 - \frac{4L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 - \left(\frac{2L^2}{\beta} + \frac{4L^2 \gamma^2}{\alpha_1} \right) \|h_2\|^2. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Combinando a equação (4.35) com (4.23), resulta em:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) & \geq E(t) - \frac{3\alpha_1}{8} \|v_x\|^2 - \frac{3\beta}{8} \|\gamma v_x - p_x\|^2 - K \\
& \geq \frac{1}{4} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - K,
\end{aligned}$$

onde $K = Lm_F + \frac{4L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \left(\frac{2L^2}{\beta} + \frac{4L^2 \gamma^2}{\alpha_1} \right) \|h_2\|^2$. O que conclui a prova.

4.3 O Semigrupo

Para provar a boa colocação do sistema (4.9) – (4.14) usando o método de semigrupo, vamos escrever a derivada η_s como uma forma de operador. Definindo o operador T da seguinte forma

$$T\eta = -\eta_s, \quad \eta \in D(T),$$

com

$$D(T) = \{\eta \in \mathcal{M} \mid \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0\},$$

em particular,

$$(T\eta, \eta)_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds, \quad \eta \in D(T), \quad (4.36)$$

e a solução de

$$\eta_t = T\eta + \theta, \quad \eta(0) = 0,$$

possui uma representação explícita.

Introduzimos duas variáveis dependentes $V = v_t$ e $P = p_t$, então o sistema (4.9) – (4.14) equivale ao seguinte problema abstrato de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})U(t) + \mathcal{F}(U(t)), \quad t > 0, \\ U(0) &= U_0 = (v_0, v_1, p_0, p_1, \theta_0, \eta_0)^T, \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde

$$U(t) = (v(t), V(t), p(t), P(t), \theta(t), \eta)^T \in \mathcal{H},$$

e

$$\mathcal{A}U(t) = \begin{pmatrix} V \\ \frac{\alpha}{\rho_1}v_{xx} - \frac{\gamma\beta}{\rho_1}p_{xx} - \frac{\delta}{\rho_1}\theta_x \\ P \\ \frac{\beta}{\mu}p_{xx} - \frac{\gamma\beta}{\mu}v_{xx} \\ \frac{l}{\rho_2}\theta_{xx} + \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty \xi(s)\eta_{xx}(s)ds - \frac{\delta}{\rho_2}v_{xt} \\ \theta + T\eta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}U(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g_1(V)}{\rho_1} \\ 0 \\ -\frac{g_2(P)}{\mu} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com o domínio

$$D(\mathcal{A}) = \{U(t) \in \mathcal{H} \mid v, p \in (H^2(0, L) \cap \mathbb{V}), v_t, p_t \in \mathbb{V}, \theta \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \eta \in D(T), \\ l\theta_{xx} + \int_0^\infty \xi(t)\eta_{xx}(s)ds \in L^2(0, L)\},$$

e

$$D(\mathcal{B}) = \mathcal{H}.$$

A força externa é dada por uma função não linear $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definida por

$$\mathcal{F}(U(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho_1}(h_1 - f_1(v, p)) \\ 0 \\ \frac{1}{\mu}(h_2 - f_2(v, p)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definiremos a seguir o significado de solução para o nosso problema de valor inicial, usando a referência V. Barbu[1].

Definição 4.3.1. Diremos que $U : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$, é uma solução forte para o problema de valor inicial (4.37), se U é contínua em $[0, \infty)$, Lipschitziana em cada subconjunto compacto de

$[0, \infty)$, $U(t)$ é diferenciável em $[0, \infty)$ e

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \text{ para quase todo } t \in [0, \infty).$$

Definição 4.3.2. Uma solução generalizada para o problema (4.37) em $[0, T)$, com $T > 0$ é uma função $U \in C([0, T], \mathcal{H})$ com $U(0) = U_0$ para o qual existe uma seqüência de soluções fortes $(U_n) \in C([0, T], \mathcal{H})$ de

$$\frac{d}{dt}U_n + (\mathcal{A} + \mathcal{B})U_n + \mathcal{F}(U_n) = f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

com $U_n \rightarrow U$ em $C([0, T], \mathcal{H})$ e $f_n \rightarrow 0$ sobre $L^1(0, T; \mathcal{H})$. Uma função $U \in C([0, T], \mathcal{H})$, com $0 < T \leq \infty$ é solução generalizada para o problema (4.37) sobre $[0, T)$ se U é solução generalizada para (4.37) sobre $[0, T')$ para qualquer $0 < T' < T$.

Agora, precisamos mostrar que \mathcal{F} é localmente Lipschitz em \mathcal{H} . Denotamos $U^i = (v^i, V^i, p^i, P^i, \theta^i, \eta^i)$, $i = 1, 2$. Seja B um conjunto limitado de \mathcal{H} , tal que $\|U^1\|_{\mathcal{H}}, \|U^2\|_{\mathcal{H}} \leq B$, onde $B > 0$, desta forma teremos

$$\|\mathcal{F}(U^1) - \mathcal{F}(U^2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L |f_1(v^1, p^1) - f_1(v^2, p^2)|^2 dx + \int_0^L |f_2(v^1, p^1) - f_2(v^2, p^2)|^2 dx. \quad (4.38)$$

De (4.17), teremos:

$$\begin{aligned} |f_i(v^1, p^1) - f_i(v^2, p^2)|^2 &= |\nabla f_1(\nu(v^1, p^1) + (1 - \nu)(v^2, p^2))|^2 \cdot |(v^1, p^1) - (v^2, p^2)|^2 \quad (0 < \nu < 1) \\ &\leq C_f(1 + |v^1|^{2(p-1)} + |v^2|^{2(p-1)} + |p^1|^{2(p-1)} + |p^2|^{2(p-1)})(|v^1 - v^2|^2 + |p^1 - p^2|^2). \end{aligned}$$

Vamos detalhar uma das etapas do produto acima, usando a desigualdade de Holder, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^L |v^1 - v^2|^2 |v^1|^{2(p-1)} dx &\leq C \left(\int_0^L |v^1 - v^2|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^L |v^1|^{2p} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq C \|v^1 - v^2\|_{\mathbb{V}}^2 \|v^1\|_{\mathbb{V}}^{2(p-1)} \\ &\leq C \|v^1 - v^2\|_{\mathbb{V}}^2 B^{2(p-1)} = C_B \|v^1 - v^2\|_{\mathbb{V}}^2. \end{aligned}$$

Generalizando,

$$\|f_i(v^1, p^1) - f_i(v^2, p^2)\|^2 \leq C_B \|(v^1 - v^2)^2 + (p^1 - p^2)^2\|.$$

Concluimos que

$$\|\mathcal{F}(U^1) - \mathcal{F}(U^2)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_B \|U^1 - U^2\|_{\mathcal{H}}^2,$$

logo, \mathcal{F} é localmente Lipschitz em \mathcal{H} .

Teorema 4.3.1. *Assumindo que (4.15) – (4.21) valem, então seguem os resultados:*

(i) *Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (4.37) tem uma única solução fraca $U(t) \in C([0, \infty), \mathcal{H})$ com $U(0) = U_0$ dada por*

$$U(t) = e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})t}U_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)(\mathcal{A}+\mathcal{B})}\mathcal{F}(U(\tau))d\tau.$$

(ii) *Se $U^1(t)$ e $U^2(t)$ são soluções fracas do problema (4.37) então, temos que existe uma constante positiva $C_0 = C(U^1(0), U^2(0))$, tal que*

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{C_0 T} \|U^1(0) - U^2(0)\|_{\mathcal{H}}, \text{ para } 0 \leq t \leq T.$$

(iii) *Se $U_0 \in D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, então a solução fraca é uma solução forte.*

Prova: A ideia desta demonstração é mostrar que o operador $(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ é maximal monótono em \mathcal{H} . Para iniciarmos, mostraremos que o operador \mathcal{A} é maximal monótono. Seja $U(t) = (v(t), V(t), p(t), P(t), \theta(t), \eta)$ no $D(\mathcal{A})$, temos que para qualquer $t > 0$,

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -l \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \leq 0,$$

o que implica que o operador \mathcal{A} é um operador monótono. Além disso, o operador \mathcal{A} possui a propriedade $R(\mathcal{I} - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. De fato, seja $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$, daí resolvemos o seguinte sistema $U - \mathcal{A}U = F$ para $U \in D(\mathcal{A})$. Vamos escrever a equação em termos de suas componentes

$$v - V = f^1 \in \mathbb{V}, \quad (4.39)$$

$$V - \frac{\alpha}{\rho_1} v_{xx} + \frac{\gamma\beta}{\rho_1} p_{xx} + \frac{\delta}{\rho_1} \theta_x = f^2 \in L^2(0, L), \quad (4.40)$$

$$p - P = f^3 \in \mathbb{V}, \quad (4.41)$$

$$P - \frac{\beta}{\mu} p_{xx} + \frac{\gamma\beta}{\mu} v_{xx} = f^4 \in L^2(0, L), \quad (4.42)$$

$$\theta - \frac{l}{\rho_2} \theta_{xx} - \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx}(s) ds + \frac{\delta}{\rho_2} V_x = f^5 \in L^2(0, L), \quad (4.43)$$

$$\eta - \theta - T\eta = f^6 \in L^2(0, L). \quad (4.44)$$

Multiplicando a equação (4.44) por $(e^{\tau-s})$ e que $\eta(0) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^s \eta(\tau) e^{\tau-s} d\tau &= \int_0^s \theta(x) e^{\tau-s} d\tau - \int_0^s \eta_s(s) e^{\tau-s} d\tau + \int_0^s f^6(\tau) e^{\tau-s} d\tau, \\ \eta(s) &= \theta(x)(1 - e^{-s}) + \int_0^s f^6(\tau) e^{\tau-s} d\tau. \end{aligned} \quad (4.45)$$

E aplicando (4.39), (4.41) e (4.45) em (4.40), (4.42) e (4.43), respectivamente, resultando assim no seguinte problema:

$$\begin{aligned}\rho_1 v - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x &= \rho_1 (f^1 + f^2), \\ \mu p - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} &= \mu (f^3 + f^4), \\ \rho_2 \theta - \left(l + \int_0^\infty \xi(s) (1 - e^{-s}) ds \right) \theta_{xx} + \delta v_x &= \vartheta,\end{aligned}\tag{4.46}$$

onde

$$\vartheta = \int_0^\infty \xi(s) \int_0^s e^{\tau-s} f_{xx}^6(\tau) d\tau ds + \delta f_x^1 + \rho_2 f^5.$$

Definimos uma forma bilinear

$$a : \mathbb{V}^2 \times L^2(0, L) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$a((v, p, \theta), (\varphi, \phi, \sigma)) = \int_0^L [\rho_1 v \varphi + \mu p \phi + \alpha_1 v_x \varphi_x + \beta(\gamma v_x - p_x)(\gamma \varphi_x - \phi_x) + \rho_2 \theta \sigma] dx.$$

Note que, $a((v, p, \theta), (\varphi, \phi, \sigma))$ é bilinear contínua e coerciva, portanto pelo Lema de Lax-Milgran, o problema elíptico acima, tem uma única solução fraca $(v, p, \theta) \in \mathbb{V}^2 \times L^2(0, L)$. Além disso, segue de (4.45) que

$$\begin{aligned}\eta_x(s) &= \underbrace{(1 - e^{-s})}_{<1} \theta_x + \int_0^s e^{\tau-s} f_x^6(\tau) d\tau, \\ \|\eta_x(s)\|^2 &= \left\| \theta_x + \int_0^s e^{\tau-s} f_x^6(\tau) d\tau \right\|^2, \text{ segue que} \\ \|\eta_x(s)\|^2 &\leq 2\|\theta_x\|^2 + 2 \int_0^s \|e^{\tau-s} f_x^6(\tau)\|^2 d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \xi(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds &\leq 2\|\theta_x\|^2 \underbrace{\int_0^\infty \xi(s) ds}_{l_0} + 2 \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^s e^{\tau-s} \|f_x^6(\tau)\| d\tau \right)^2 ds, \\ &\leq 2l_0 \|\theta_x\|^2 + 2 \int_0^\infty \xi(s) \|f_x^6(s)\|^2 \left(\int_0^s e^{\tau-s} d\tau \right)^2 ds, \\ &\leq 2l_0 \|\theta_x\|^2 + 2\|f^6\|_{\mathcal{M}}^2,\end{aligned}$$

o que resulta que $\eta \in \mathcal{M}$. Então, obtemos

$$T\eta = \eta - \theta - f^6 \in \mathcal{M}$$

Portanto, $U(t) \in D(\mathcal{A})$, que resolve o problema $U - \mathcal{A}U = F$. Logo \mathcal{A} é maximal monótono.

Usando o mesmo método do Teorema 2.2 em Falção e outros autores[15] e também por Barbu[1], sabemos que o operador \mathcal{B} é monótono, hemicontínuo e limitado. Portanto, o operador \mathcal{B} é maximal monótono em \mathcal{H} .

Desta análise, sabemos que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é um operador maximal monótono em \mathcal{H} , e portanto, concluímos que o operador $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ gera um semigrupo de contrações em \mathcal{H} , usando o Teorema de Lummer-Phillips.

Dos resultados acima, concluímos que o problema abstrato de Cauchy admite uma única solução local dada por

$$U(t) = e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})t}U_0 + \int_0^t e^{(t-s)(\mathcal{A}+\mathcal{B})}\mathcal{F}(U(s)) ds, \quad (4.47)$$

definida em um intervalo maximal $[0, t_{\max})$. Se $t_{\max} < \infty$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty. \quad (4.48)$$

Usando argumento de contradição, vemos que a solução é global. Seja $U(t)$ uma solução fraca com $U_0 \in D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$. Usando o Teorema 6.1.5 em Pazy[10], sabemos que a solução é uma solução forte. Segue de (4.25) que para todo $t \geq 0$,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4\mathcal{E}(0) + K, \quad (\text{pois } \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)),$$

que, por argumentos de densidade, ou seja, vale para soluções fracas. Então é uma contradição com (4.48) e portanto $t_{\max} = \infty$, isto é, a solução $U(t)$ é uma solução global. Dado, $T > 0$ e qualquer $t \in (0, T)$, consideramos duas soluções fracas U^1, U^2 com os dados iniciais $U^1(0)$ e $U^2(0)$, respectivamente, de (4.47), teremos

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|e^{t(\mathcal{A}+\mathcal{B})}(U^1(0) - U^2(0))\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \|e^{(t-s)(\mathcal{A}+\mathcal{B})}(\mathcal{F}(U^1(s)) - \mathcal{F}(U^2(s)))\|_{\mathcal{H}} ds,$$

usando a propriedade da \mathcal{F} ser localmente Lipschitz e (4.25), teremos

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|U^1(0) - U^2(0)\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \|U^1(s) - U^2(s)\|_{\mathcal{H}} ds.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Gronwall, para $t \in [0, T]$, obtemos:

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{C_0 T} \|U^1(0) - U^2(0)\|_{\mathcal{H}},$$

onde $C_0 = C(U^1(0), U^2(0))$.

Usando o Teorema 6.1.5 em Pazy[10], obtemos que quaisquer soluções fracas com dados em $D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ são fortes.

Observação 4.3.1. *Com a boa colocação do problema (4.37) dada pelo Teorema 4.3.1, o operador solução $S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por*

$$S(t)U_0 = U(t), \quad t \geq 0,$$

onde $U(t)$ é a única solução do problema (4.37), satisfaz as propriedades de semigrupo

$$S(0) = I \quad \text{e} \quad S(t+s) = S(t) \circ S(s), \quad t, s \geq 0,$$

e define um C_0 -semigrupo não linear, é localmente Lipschitz contínuo em \mathcal{H} . Estudaremos a dinâmica do problema (4.37) através do sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$.

4.4 Atrator Global

Nesta seção, mostraremos a existência do atrator global e sua dimensão fractal para o problema (4.9) – (4.14).

Inicialmente, precisamos de algumas teorias básicas sobre o atrator global, para tal, nos baseamos nos seguintes autores Chueshov e Lasiecka[34,35], Hale[36] e Robinson[37].

Seja $(\mathcal{H}, S(t))$ um sistema dinâmico dado por um semigrupo fortemente contínuo $S(t)$ no espaço de Banach H . Um conjunto compacto $\mathcal{A} \subset H$ é chamado de atrator global do semigrupo $S(t)$ se \mathcal{A} é estritamente invariante em relação a $S(t)$, isto é, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$, e \mathcal{A} atrai qualquer conjunto limitado B , de forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(S(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

onde dist_H é a semidistância de Hausdorff em H .

Seja \mathcal{N} o conjunto de pontos estacionários de $S(t)$, isto é

$$\mathcal{N} := \{y \in \mathcal{H}; S(t)y = y, \forall t \geq 0\}.$$

Então a variedade instável $\mathbb{M}_+(\mathcal{N})$ é a família de $y \in H$ tal que existe uma trajetória completa $u(t)$ satisfazendo

$$u(0) = y, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(u(t), \mathcal{N}) = 0.$$

Para dar suporte aos nossos resultados, usaremos o seguinte teorema, que pode ser encontrado em Chueshov e Lasiecka[35](Corolário 7.5.7).

Teorema 4.4.1. *Assumindo que o sistema dinâmico $(H, S(t))$ é um sistema gradiente assintoticamente regular, com o correspondente funcional de Lyapunov denotado por Φ . Suponha que*

$$\Phi(S(t)z) \rightarrow \infty \text{ se e somente se } \|z\|_H \rightarrow \infty,$$

e que o conjunto de pontos estacionários \mathcal{N} é limitado. Então o sistema $(H, S(t))$ possui um atrator global compacto caracterizado por $\mathcal{A} = \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$.

Dado um conjunto compacto M no espaço métrico H , a dimensão fractal de M é definida por

$$\dim_f^H M = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n(M, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

onde $n(M, \varepsilon)$ é o número mínimo de bolas fechadas de raio ε que cobrem M .

Sejam X, Y espaços de Banach reflexivos com X compactamente imerso em Y e denotamos $H = X \times Y$. Considere o sistema dinâmico $(H, S(t))$ dado por um operador de evolução

$$S(t)U_0 = (u, u_t), \quad U_0 = (u(0), u_t(0)) \in H, \quad (4.49)$$

onde a função u tem regularidade

$$u \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y). \quad (4.50)$$

O sistema dinâmico $(H, S(t))$ é quasi-estável no conjunto $B \subset H$ se existe uma seminorma compacta n_X em X e as funções escalares não negativas $a(t)$ e $c(t)$, localmente limitadas em $[0, \infty)$, e $b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ com $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$, tal que,

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_H^2 \leq a(t) \|U^1 - U^2\|_H^2, \quad (4.51)$$

e

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_H^2 \leq b(t) \|U^1 - U^2\|_H^2 + c(t) \sup_{0 < s < t} [n_X(u^1(s) - u^2(s))]^2, \quad (4.52)$$

para qualquer $U^1, U^2 \in B$. A desigualdade (4.52) é chamada de desigualdade de estabilização.

Teorema 4.4.2. *Seja o sistema dinâmico $(H, S(t))$ dado por (4.49) e satisfazendo (4.50). Se o sistema $(H, S(t))$ é quasiestável em todo conjunto limitado positivamente invariante $B \subset H$, então o sistema dinâmico $(H, S(t))$ é assintoticamente regular.*

Prova: Ver ([35], Teorema 7.9.4)

Podemos encontrar o seguinte Teorema em Hale[36](Teorema 2.4.6) e em Chueshov Lasiecka[35](Corolário 7.5.7).

Teorema 4.4.3. *Assumindo que o sistema dinâmico $(H, S(t))$ é assintoticamente regular e gradiente com o funcional de Lyapunov Φ . Assumindo também:*

(i) Φ é não crescente em qualquer subconjunto limitado de H ;

(ii) o conjunto $\Phi_R = \{U \mid \Phi(U) \leq R\}$ é limitado em todo R ;

(iii) o conjunto de pontos estacionários \mathcal{N} é limitado.

Então o sistema dinâmico $(H, S(t))$ possui um atrator global compacto caracterizado por $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$.

Por outro lado, quase-estabilidade também implica que atratores globais têm dimensão fractal finita. O seguinte Teorema pode ser encontrado em Chueshov Lasiecka[35](Teorema 7.9.6).

Teorema 4.4.4. *Seja o sistema dinâmico $(H, S(t))$ dado por (4.49) e satisfazendo (4.50). Se $(H, S(t))$ possui um atrator global \mathcal{A} e é quasi-estável em \mathcal{A} , então o atrator \mathcal{A} possui dimensão fractal finita.*

4.5 Atrator Global e sua Dimensão Fractal

Nesta subseção, vamos provar a existência de um atrator global. Seja o principal resultado:

Teorema 4.5.1. *Assumindo as hipóteses (4.15) – (4.21) verdadeiras. Então o sistema dinâmico $(H, S(t))$ gerado pelo problema (4.9) – (4.14) possui um atrator global compacto \mathfrak{A} , com dimensão fractal finita, caracterizado por*

$$\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+(\mathcal{N}),$$

onde \mathcal{N} é o conjunto de pontos estacionários de $S(t)$ e $\mathbb{M}_+(\mathcal{N})$ é a variedade instável de \mathcal{N} .

Neste momento, usaremos o Teorema 4.4.3 para provar o Teorema 4.5.1, e dividiremos em duas partes.

4.5.1 Sistema gradiente e soluções estacionárias

Um sistema dinâmico $(H, S(t))$ é chamado um sistema gradiente se possui um funcional de Lyapunov estrito. Mais precisamente, um funcional $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ é um função de Lyapunov estrito para um sistema $(H, S(t))$ se,

- (i) $t \rightarrow \Phi(S(t)z)$ é não crescente para cada $z \in H$;
- (ii) Se $\Phi(S(t)z) = \Phi(z)$ para alguns $z \in H$ e para todo $t > 0$, então z é um ponto estacionário de $S(t)$, isto é, $S(t)z = z$.

Daí, para tal estrutura precisamos do seguinte Lema.

Lema 4.5.1. *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondente ao problema (4.9) – (4.14) é gradiente.*

Prova: Seja a energia modificada $\mathcal{E}(t)$ definida em (4.23) como um funcional de Lyapunov Φ . Então para $U = (v_0, v_1, p_0, p_1, \theta_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$, obtemos de (4.24) que para todo $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}\Phi(S(t)U) = -l \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - \int_0^L (g_1(v_t) v_t + g_2(p_t) p_t) dx \leq 0, \quad (4.53)$$

o que resulta $\Phi(S(t)U)$ é não crescente. Agora, suponhamos que $\Phi(S(t)U) = \Phi(U)$ para todo $t \geq 0$, então teremos,

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(S(t)U) - \Phi(U) \\ &= -l \int_0^t \int_0^L \theta_x^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 dx ds - \int_0^t \int_0^L (g_1(v_t) v_t + g_2(p_t) p_t) dx ds \leq 0, \end{aligned}$$

implicando que, para qualquer $t \geq 0$,

$$\int_0^L g_1(v_t) v_t dx = 0 \quad e \quad \int_0^L g_2(p_t) p_t dx = 0, \quad (4.54)$$

e

$$l \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty (-\xi'(s)) \|\eta_x(s)\|^2 ds = 0. \quad (4.55)$$

Usando (4.19), podemos concluir de (4.54) que para qualquer $t \geq 0$,

$$v_t(t) = 0, \quad p_t(t) = 0, \quad em \quad (0, L),$$

que resulta para todo $t \geq 0$,

$$v(t) = v_0, \quad p(t) = p_0.$$

Notemos que os termos do lado direito de (4.55) são não negativos, daí teremos para todo $t \geq 0$,

$$\int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds = 0.$$

Usando a seguinte condição $\xi'(s) + \mu \xi(s) \leq 0$, sabemos que para $t \geq 0$,

$$\eta(x, s) = 0.$$

Portanto, segue da equação (4.12) que $\theta(t) = 0$.

Isso nos dá que $S(t)U_0 = U(t) = (v_0, 0, p_0, 0, 0, 0)$ é uma solução estacionária, isto é, $S(t)U_0 = U_0$ para todo $t \geq 0$. A prova esta completa. \square

Lema 4.5.2. *Com as hipóteses do Teorema 4.5.1, o conjunto de pontos de equilíbrio \mathcal{N} é limitado em \mathcal{H} .*

Prova: Seja $U \in \mathcal{N}$ existe uma solução estacionária do problema (4.9) – (4.14), sabemos que $U = (v, 0, p, 0, 0, 0)$ e satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} -\alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + f_1(v, p) &= h_1, \\ -\beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} + f_2(v, p) &= h_2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (4.56) por v e a segunda por p , respectivamente, e integrando o resultado em $(0, L)$, obtemos:

$$\int_0^L (\alpha v_x^2 + \beta p_x^2) dx - 2\gamma\beta \int_0^L v_x p_x dx = - \int_0^L (f_1(v, p) v + f_2(v, p) p) dx + \int_0^L (h_1 v + h_2 p) dx, \quad (I)$$

tendo em mente que:

$$(1) \alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta;$$

$$(2) \beta (\gamma v_x + p_x)^2 = \beta \gamma^2 v_x^2 - 2\gamma\beta v_x p_x + \beta p_x^2,$$

assim, reescrevemos (I) da seguinte maneira:

$$\int_0^L [\alpha_1 v_x^2 + \beta (\gamma v_x + p_x)^2] dx = - \int_0^L f(v, p) v dx + \int_0^L (h_1 v + h_2 p) dx,$$

Usando (4.15) – (4.16) e (4.32), obtemos

$$- \int_0^L (f_1(v, p) v + f_2(v, p) p) dx \leq Lm_F + (\varrho L^2 + 2\gamma^2 \varrho L^2) \|v_x\|^2 + 2\varrho L^2 \|\gamma v_x + p_x\|^2.$$

Usando as desigualdades de Poincaré e Young, teremos:

$$\int_0^L h_1 v \, dx \leq \int_0^L |h_1| L |v_x| \, dx \leq \frac{L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \frac{\alpha_1}{4} \|v_x\|^2, \quad (II)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L h_2 p \, dx &\leq \int_0^L |h_2| L |p_x| \, dx \leq \int_0^L |h_2| L (\gamma |v_x| + |\gamma v_x - p_x|) \, dx \\ &\leq \int_0^L \gamma L |h_2| |v_x| \, dx + \int_0^L L |h_2| |\gamma v_x - p_x| \, dx \\ &\leq \frac{L^2}{2\beta} \|h_2\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{\gamma^2 L^2}{\alpha_1} \|h_2\|^2 + \frac{\alpha_1}{4} \|v_x\|^2, \quad (III) \end{aligned}$$

onde,

$$|p_x| = |\gamma v_x - \gamma v_x + p_x| = |\gamma v_x - (\gamma v_x - p_x)| \leq |\gamma v_x| + |\gamma v_x - p_x|.$$

Somando as desigualdades (II) e (III), teremos:

$$\int_0^L (h_1 v + h_2 p) \, dx \leq \frac{\beta}{2} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|v_x\|^2 + \left(\frac{L^2}{2\beta} + \frac{\gamma^2 L^2}{\alpha_1} \right) \|h_2\|^2 + \frac{L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2.$$

Aplicando os resultados acima na igualdade (I), obtemos

$$\frac{1}{4} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{\beta}{4} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{\alpha_1}{4} \|v_x\|^2 \leq L m_F + \frac{L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \left(\frac{L^2}{2\beta} + \frac{\gamma^2 L^2}{\alpha_1} \right) \|h_2\|^2,$$

o que mostra que o conjunto \mathcal{N} é limitado em \mathcal{H} . A prova deste Lema está completa.

4.5.2 Quase-estabilidade

Nesta subseção, vamos estabelecer a quase-estabilidade do semigrupo gerado pela solução global do problema (4.9) – (4.14).

Lema 4.5.3. *Assumindo que (4.15) – (4.21) são verdadeiras. Dado um conjunto limitado B de \mathcal{H} , então existem constantes $\gamma_0, b_0 > 0$ e $C_B > 0$ tal que*

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b_0 e^{-\gamma_0 t} \|U^1 - U^2\|_{\mathcal{H}}^2 + C_B \int_0^t e^{-\gamma_0(t-s)} (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) \, ds, \quad (4.57)$$

onde $S(t)U^i = (v^i, v_t^i, p^i, p_t^i, \theta^i, \eta^i)$ é a solução fraca do problema (4.9) – (4.14) com as respectivas condições iniciais U^i em B , $i = 1, 2$.

Prova: Para qualquer $(v_0^i, v_1^i, p_0^i, p_1^i, \theta_0^i, \eta_0^i) \in B$, $i = 1, 2$, onde o conjunto B é um subconjunto limitado de \mathcal{H} . Seja $U^i(t) = (v^i, v_t^i, p^i, p_t^i, \theta^i, \eta^i)$, com $i = 1, 2$, duas soluções que correspondem aos respectivos dados iniciais $(v_0^i, v_1^i, p_0^i, p_1^i, \theta_0^i, \eta_0^i)$. Denotamos

$$v = v^1 - v^2, \quad p = p^1 - p^2, \quad \theta = \theta^1 - \theta^2, \quad \eta = \eta^1 - \eta^2,$$

e

$$G_1(v_t) = g_1(v_t^1) - g_1(v_t^2), \quad G_2(p_t) = g_2(p_t^1) - g_2(p_t^2), \quad F(v, p) = f(v^1, p^1) - f(v^2, p^2),$$

então $(v, v_t, p, p_t, \theta, \eta)$ satisfazem

$$\rho_1 v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x = -F_1(v, p) - G_1(v_t), \quad (4.58)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = -F_2(v, p) - G_2(v_t), \quad (4.59)$$

$$\rho_2 \theta_t - l \theta_{xx} - \int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx}(s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad (4.60)$$

$$\eta_t + \eta_s = \theta, \quad (4.61)$$

com a condição de fronteira e condições iniciais

$$U^1(0) - U^2(0) = (v_0, v_1, p_0, p_1, \theta_0, \eta_0).$$

A energia correspondente $E(t)$ para (4.58) – (4.61) é a mesma que (4.22). A prova deste Lema será dividida nas seguintes etapas.

ETAPA 1: Primeiramente, afirmamos que existe uma constante positiva C_B tal que para qualquer $t > 0$,

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -l \int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{m_1}{2} \int_0^L v_t^2 dx - \frac{m_2}{2} \int_0^L p_t^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Para provar, vamos multiplicar as equações (4.58) – (4.60) por v_t, p_t e θ , respectivamente, integrando o resultado em $(0, L)$ e usando (4.61) para concluir que

$$\begin{aligned} E'(t) &= -l \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - \int_0^L (F_1(v, p)v_t + F_1(v, p)p_t) dx \\ &\quad - \int_0^L (G_1(v_t)v_t + G_2(v_t)p_t) dx. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, usando (4.17), e as desigualdades de Holder e Young, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L F_1(v, p) v_t dx &= \int_0^L [f_1(v^1, p^1) - f_1(v^2, p^2)] v_t dx \\
&= \int_0^L f'(v, p) (|v| + |p|) |v_t| dx \\
&\leq C_1 \int_0^L (1 + |v|^{p-1} + |v^2|^{p-1} + |p^1|^{p-1} + |p^2|^{p-1}) (|v| + |p|) |v_t| dx \\
&\leq C_1 (\|v^1\|_{2p}^{p-1} + \|v^2\|_{2p}^{p-1} + \|p^1\|_{2p}^{p-1} + \|p^2\|_{2p}^{p-1}) (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v_t\|_{2p} \\
&+ C_1 (\|v\| + \|p\|) \|v_t\| \\
&\leq C_B (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v_t\|_{2p} \\
&\leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) + \frac{m_1}{2} \|v_t\|^2,
\end{aligned} \tag{4.64}$$

pois, usando a desigualdade de Holder generalizada, teremos,

$$\begin{aligned}
\int_0^L |v^1|^{p-1} (|v| + |p|) |v_t| dx &\leq \left(\int_0^L |v^1| dx \right)^{\frac{p-1}{2p}} \left(\int_0^L (|v| + |p|) dx \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_0^L |v_t|^2 dx \right)^{\frac{p}{2p}} \\
&\leq \underbrace{\|v^1\|_{2p}^{p-1}}_{\leq C_B} (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v_t\|,
\end{aligned}$$

onde, $\frac{p-1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{p}{2p} = 1$.

Analogamente, segue que

$$\int_0^L F_2(v, p) p_t dx \leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) + \frac{m_2}{2} \|p_t\|^2, \tag{4.65}$$

Segue de (4.19) que

$$\begin{aligned}
\int_0^L G_1(v_t) v_t dx &= \int_0^L [g(v_t^1) - g(v_t^2)] v_t dx \\
&= \int_0^L g'(v_t) v_t dx \\
&\geq m_1 \int_0^L v_t^2 = m_1 \|v_t\|^2,
\end{aligned} \tag{4.66}$$

e

$$\int_0^L G_2(v_t) v_t dx \geq m_2 \int_0^L v_t^2 dx = m_2 \|v_t\|^2. \quad (4.67)$$

Agora, substituindo (4.64) – (4.67) em (4.63), então obtemos a estimativa desejada (4.62).

ETAPA 2: Seja o seguinte funcional

$$\mathcal{F}(t) = \rho_1 \int_0^L v_t v dx + \mu \int_0^L p_t p dx, \quad (4.68)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(t) \leq & 2\rho_1 \int_0^L |v_t|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + 2\mu \int_0^L |p_t|^2 dx - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |v_x|^2 dx \\ & + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Multiplicando as equações (4.58) – (4.59) por v e p , respectivamente, integrando o resultado em $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L v_{tt} v dx - \alpha \int_0^L v_{xx} v dx + \gamma \beta \int_0^L p_{xx} v dx + \delta \int_0^L \theta_x v dx = - \int_0^L F_1(v, p) v dx \\ - \int_0^L G_1(v_t) v dx, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\mu \int_0^L p_{tt} p dx - \beta \int_0^L p_{xx} p dx + \gamma \beta \int_0^L v_{xx} p dx = - \int_0^L F_2(v, p) p dx - \int_0^L G_2(p_t) p dx. \quad (4.71)$$

Daí, usando integração por partes e substituindo as identidades $v_{tt}v = \frac{d}{dt}v_tv - v_t^2$ e $p_{tt}p = \frac{d}{dt}p_tp - p_t^2$ em (4.70) – (4.71), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_1 \int_0^L v_t v dx - \rho_1 \int_0^L v_t^2 dx + \alpha_1 \int_0^L v_x^2 dx + \gamma^2 \beta \int_0^L v_x^2 dx - \gamma \beta \int_0^L v_x p_x dx + \delta \int_0^L \theta_x v dx \\ = - \int_0^L F_1(v, p) v dx - \int_0^L G_1(v_t) v dx, \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\frac{d}{dt} \mu \int_0^L p_t p dx - \mu \int_0^L p_t^2 dx - \beta \int_0^L p_x (\gamma v_x - p_x) dx = - \int_0^L F_2(v, p) p dx - \int_0^L G_2(p_t) p dx. \quad (4.73)$$

Somando as equações (4.72) e (4.73),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\rho_1 \int_0^L v_t v \, dx + \mu \int_0^L p_t p \, dx \right) &= \rho_1 \int_0^L v_t^2 \, dx - \alpha_1 \int_0^L v_x^2 \, dx + \mu \int_0^L p_t^2 \, dx + \delta \int_0^L \theta v_x \, dx \\ &- \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 \, dx - \int_0^L (F_1(v, p)v + F_2(v, p)p) \, dx - \int_0^L (G_1(v_t)v + G_2(p_t)p) \, dx. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Usando (4.17) e as desigualdades de Holder e Young, nas seguintes integrais, teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^L F_1(v, p) v \, dx &= \int_0^L [f(v^1, p^1) - f(v^2, p^2)] v \, dx \\ &\leq C_1 (\|v^1\|_{2p}^{2p-2} + \|v^2\|_{2p}^{2p-2} + \|p^1\|_{2p}^{2p-2} + \|p^2\|_{2p}^{2p-2}) (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v\|_{2p} \\ &+ C_1 L^{\frac{p-1}{2p}} (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v\|_{2p} \\ &\leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2), \end{aligned} \quad (4.75)$$

onde usamos a desigualdade de Holder generalizada:

$$\begin{aligned} \int_0^L |v^1|^{p-1} (|v| + |p|) |v| \, dx &\leq C_1 \left(\int_0^L |v^1| \, dx \right)^{\frac{2p-2}{2p}} \left(\int_0^L (|v| + |p|) \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_0^L |v| \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \\ &\leq \underbrace{\|v^1\|_{2p}^{2p-2}}_{\leq C_B} (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v\|_{2p}, \end{aligned}$$

sabendo que, $\frac{2p-2}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{p}{2p} = 1$.

Analogamente, teremos

$$\int_0^L F_2(v, p) p \, dx \leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2), \quad (4.76)$$

Usando a hipótese G_2 , obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L G_1(v_t) v \, dx &= \int_0^L [g_1(v_t^1) - g_1(v_t^2)] v \, dx \\
&= \int_0^L \frac{[g_1(v_t^1) - g_1(v_t^2)]}{(v_t^1 - v_t^2)} \underbrace{(v_t^1 - v_t^2)}_{v_t} v \, dx \\
&= \int_0^L \underbrace{g_1'(v_t^1)}_{(4.19)} v_t v \, dx \\
&\leq M \int_0^L v_t v \, dx \\
&\leq \left(\int_0^L M^{2p} \, dx \right)^{\frac{p-1}{2p}} \left(\int_0^L |v_t|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |v| \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \\
&\leq M_1^{p-1} \|v_t\| \|v\|_{2p} \\
&\leq \rho_1 \|v_t\|^2 + C_1 \|v\|_{2p}^2,
\end{aligned} \tag{4.77}$$

onde, $\frac{p-1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} = 1$ e

$$\int_0^L G_2(p_t) p \, dx \leq \mu \|p_t\|^2 + C_1 \|p\|_{2p}^2, \tag{4.78}$$

Segue da desigualdade de Young que:

$$\delta \int_0^L \theta v_x \, dx \leq \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 \, dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |v_x|^2 \, dx. \tag{4.79}$$

Substituindo (4.75) – (4.79) na equação (4.74), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\rho_1 \int_0^L v_t v \, dx + \mu \int_0^L p_t p \, dx \right) &\leq \rho_1 \int_0^L v_t^2 \, dx - \alpha_1 \int_0^L v_x^2 \, dx + \mu \int_0^L p_t^2 \, dx \\
&- \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 \, dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) + \rho_1 \int_0^L |v_t|^2 + C_1 \|v\|_{2p}^2 + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 \, dx \\
&+ \frac{\delta}{2} \int_0^L |v_x|^2 \, dx + \mu \int_0^L |p_t|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Assim, teremos o resultaddo procurado

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(t) &\leq 2\rho_1 \int_0^L |v_t|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + 2\mu \int_0^L |p_t|^2 dx - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ &+ \frac{\delta}{2} \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned}$$

ETAPA 3: Seja o funcional

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^L |\theta|^2 dx, \quad (4.80)$$

que satisfaz

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) \leq -l \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \epsilon \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + l_0 C_\epsilon \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \epsilon \delta \int_0^L |v_t|^2 dx + \delta C_\epsilon \int_0^L |\theta_x|^2 dx. \quad (4.81)$$

Para mostrar os resultados acima, vamos multiplicar a equação (4.60) por θ e integrando em $(0, L)$, resultando

$$\rho_2 \int_0^L \theta_t \theta dx - l \int_0^L \theta_{xx} \theta dx - \int_0^L \int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx}(s) \theta dx ds + \delta \int_0^L v_{xt} \theta dx = 0, \quad (4.82)$$

fazendo a integração por partes, teremos,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_2 \int_0^L |\theta|^2 dx + l \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \underbrace{\int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \eta_{xx}(s) \theta dx \right) ds}_I - \delta \int_0^L v_t \theta_x dx = 0, \quad (4.83)$$

onde

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \eta_{xx}(s) \theta dx \right) ds = \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \eta_x(s) \theta_x dx \right) ds \\ &\leq \int_0^\infty \xi(s) \left(\epsilon \int_0^L |\eta_x(s)|^2 + C_\epsilon \int_0^L |\theta_x|^2 dx \right) ds \\ &\leq \epsilon \int_0^\infty \int_0^L \xi(s) |\eta_x(s)|^2 dx ds + l_0 C_\epsilon \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\ &\leq \epsilon \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + l_0 C_\epsilon \int_0^L |\theta_x|^2 dx \end{aligned}$$

Substituindo I em (4.83), teremos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho_2 \int_0^L |\theta|^2 dx \leq -l \int_0^L |\theta_x| dx + \epsilon \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + l_0 C_\epsilon \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \epsilon \delta \int_0^L |v_t|^2 dx + \delta C_\epsilon \int_0^L |\theta_x|^2 dx.$$

ETAPA 4: Seja o funcional

$$\mathcal{H}(t) = \rho_1 \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx, \quad (4.84)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) &\leq C_2 \int_0^L |v_t|^2 dx - C_3 \int_0^L |p_t|^2 dx + \alpha_1 \epsilon \int_0^L |v_x|^2 dx \\ &+ C_4 C_\epsilon \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \epsilon \delta \int_0^L |\theta|^2 dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Para mostrar tais resultados, vamos multiplicar a equação (4.58) por $(\gamma v - p)$:

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L v_{tt}(\gamma v - p) dx - \alpha_1 \int_0^L v_{xx}(\gamma v - p) dx - \gamma^2 \beta \int_0^L v_{xx}(\gamma v - p) dx + \gamma \beta \int_0^L p_{xx}(\gamma v - p) dx \\ + \delta \int_0^L \theta_x(\gamma v - p) dx = - \int_0^L F_1(v, p) (\gamma v - p) dx - \int_0^L G_1(v_t) (\gamma v - p) dx. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Daí, integrando por partes (4.86):

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L v_{tt}(\gamma v - p) dx + \alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v_x - p_x) dx - \gamma \beta \int_0^L (\gamma v - p)(\gamma v - p)_{xx} dx \\ - \delta \int_0^L \theta (\gamma v - p)_x dx = - \int_0^L F_1(v, p) (\gamma v - p) dx - \int_0^L G_1(v_t) (\gamma v - p) dx. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Agora, usando a equação (4.59), obtemos:

$$\beta(\gamma v - p)_{xx} = -\mu p_{tt}. \quad (4.88)$$

Substituindo (4.88) e a identidade $\frac{d}{dt}[v_t(\gamma v - p)] = v_{tt}(\gamma v - p) + v_t(\gamma v - p)_t$ na equação (4.87), para obter

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx - \rho_1 \int_0^L v_t(\gamma v - p)_t dx + \alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v_x - p_x) dx + \gamma \mu \int_0^L p_{tt}(\gamma v - p) dx \\ - \delta \int_0^L \theta(\gamma v - p)_x dx = - \int_0^L F_1(v, p) (\gamma v - p) dx - \int_0^L G_1(v_t) (\gamma v - p) dx. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dt}[p_t(\gamma v - p)] = p_{tt}(\gamma v - p) + p_t(\gamma v - p)_t.$$

Assim, usando a identidade acima em (4.89), teremos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \rho_1 \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \frac{d}{dt} \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx = \rho_1 \int_0^L v_t(\gamma v - p)_t dx \\ & + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p)_t dx - \alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v_x - p_x) dx + \delta \int_0^L \theta(\gamma v_x - p_x) dx \\ & - \int_0^L F_1(v, p)(\gamma v - p) dx - \int_0^L G_1(v_t)(\gamma v - p) dx. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Na sequência, vamos detalhar algumas integrais da igualdade (4.90):

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^L v_t(\gamma v - p)_t dx + \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p)_t dx \\ & = \rho_1 \gamma \int_0^L |v_t|^2 dx - \rho_1 \int_0^L v_t p_t dx + \gamma^2 \mu \int_0^L p_t v_t dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx \\ & = \rho_1 \gamma \int_0^L |v_t|^2 dx + C \int_0^L v_t p_t dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx \\ & \leq \rho_1 \gamma \int_0^L |v_t|^2 dx + \epsilon C \int_0^L |p_t|^2 dx + C_\epsilon C \int_0^L |v_t|^2 dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.91)$$

onde $C = \gamma^2 \mu - \rho_1 > 0$.

$$\delta \int_0^L \theta(\gamma v_x - p_x) dx \leq \delta \epsilon \int_0^L |\theta|^2 dx + \delta C_\epsilon \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx; \quad (4.92)$$

$$-\alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v_x - p_x) dx \leq \epsilon \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \alpha_1 C_\epsilon \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx; \quad (4.93)$$

$$-\int_0^L F_1(v, p)(\gamma v - p) dx = -\gamma \int_0^L F_1(v, p) v dx + \int_0^L F_1(v, p) p dx \leq C_B(\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2); \quad (4.94)$$

$$-\int_0^L G_1(v_t)(\gamma v - p) dx \leq \rho_1 \|v_t\|^2 + C_1 \|v\|_{2p}^2 + \mu \|p_t\|^2 + C_1 \|p\|_{2p}^2. \quad (4.95)$$

Daí substituindo (4.91) – (4.95) na equação (4.90), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \rho_1 \int_0^L v_t(\gamma v - p) dx + \frac{d}{dt} \gamma \mu \int_0^L p_t(\gamma v - p) dx \leq \rho_1 \gamma \int_0^L |v_t|^2 dx + \epsilon C \int_0^L |p_t|^2 dx \\ & + C_\epsilon C \int_0^L |v_t|^2 dx - \gamma \mu \int_0^L |p_t|^2 dx + \epsilon \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \alpha_1 C_\epsilon \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ & + \delta \epsilon \int_0^L |\theta|^2 dx + \delta C_\epsilon \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \rho_1 \|v_t\|^2 + \mu \|p_t\|^2 + C_B(\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned}$$

Organizando a equação acima, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) &\leq C_2 \int_0^L |v_t|^2 dx - C_3 \int_0^L |p_t|^2 dx + \epsilon \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + C_4 C_\epsilon \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ &+ \delta \epsilon \int_0^L |\theta|^2 dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned}$$

onde $C_2(\epsilon) = \rho_1 \gamma + C_\epsilon C + \rho_1$, $C_3(\epsilon) = \gamma \mu - \epsilon C - \mu$, $C_4 = \alpha_1 + \delta$. E concluímos esta etapa.

ETAPA 5: Seja o funcional

$$\mathcal{T}(t) = -\rho_2 l_0 \int_0^L \theta \eta(s) dx, \quad (4.96)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{T}(t) &\leq -\frac{\rho_2}{2} l_0 \int_0^L |\theta|^2 dx + \delta l_0 C_\epsilon \int_0^L |v_t|^2 dx - \frac{l}{2} l_0 \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\ &+ C_5 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 - \frac{\rho_2}{2} C_0 \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x\|^2 ds. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Para mostrar tais resultados, vamos multiplicar a equação (4.60) por $-\int_0^\infty \xi(s) \eta(s) ds$:

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \theta_t \eta(s) dx \right) ds + l \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta_{xx} \eta(s) dx ds - \delta \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L v_{xt} \eta(s) dx ds \\ + \int_0^L \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx} ds \right) \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta ds \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Usando a identidade $\frac{d}{dt}(\theta \eta) = \theta_t \eta + \theta \eta_t$ na equação (4.98), teremos:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(\rho_2 \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta \eta dx ds \right) &= -\rho_2 \underbrace{\int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta \eta_t(s) dx ds}_{I_1} - l \underbrace{\int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta_{xx} \eta(s) dx ds}_{I_2} \\ + \delta \underbrace{\int_0^\infty \xi(s) \int_0^L v_{xt} \eta(s) dx ds}_{I_3} &- \underbrace{\int_0^L \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx} ds \right) \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta ds \right) dx}_{I_4}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Calculando $I_1 - I_4$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta \eta_t(s) dx ds = - \int_0^\infty \xi(s) \left(- \int_0^L \theta \eta_s(s) dx + \int_0^L |\theta|^2 dx \right) ds \\
&= \int_0^\infty \xi(s) \eta_s(s) \left(\int_0^L \theta dx \right) ds - \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L |\theta|^2 dx \right) ds \\
&= - \int_0^\infty \xi'(s) \eta \left(\int_0^L \theta dx \right) ds - l_0 \int_0^L |\theta|^2 dx \\
&= - \int_0^\infty \xi'(s) \left(\int_0^L \eta(s) \theta dx \right) ds - l_0 \int_0^L |\theta|^2 dx, \text{ usando Poincaré e Young} \\
&\leq - \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \left(C_0 \int_0^L |\eta_x(s)|^2 dx \right) ds - \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \left(\int_0^L |\theta|^2 dx \right) ds - l_0 \int_0^L |\theta|^2 dx \\
&\leq - \frac{C_0}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds + \frac{l_0}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx - l_0 \int_0^L |\theta|^2 dx \\
&\leq - \frac{C_0}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - \frac{l_0}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -l \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \theta_{xx} \eta(s) dx \right) ds = l \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L \theta_x \eta_x(s) dx \right) ds \\
&\leq l \int_0^\infty \xi(s) \left(\frac{1}{2} \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |\eta_x(s)|^2 dx \right) ds \\
&\leq \frac{l}{2} l_0 \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{l}{2} \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \delta \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L v_{xt} \eta(s) dx \right) ds = -\delta \int_0^\infty \xi(s) \left(\int_0^L v_t \eta_x(s) dx \right) ds \\
&\leq \delta \int_0^\infty \xi(s) \left(C_\epsilon \int_0^L |v_t|^2 dx + \epsilon \int_0^L |\eta_x(s)|^2 dx \right) ds \\
&\leq \delta l_0 C_\epsilon \int_0^L |v_t|^2 dx + \delta \epsilon \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= - \int_0^L \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx} ds \right) \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta ds \right) dx \\
&= \underbrace{\left(\int_0^\infty \xi(s) ds \right)}_{l_0} \left(\int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \eta_x(s) \eta_x(s) dx ds \right) \\
&\leq l_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2.
\end{aligned}$$

Substituindo I_1, I_2, I_3 e I_4 em (4.99), teremos (4.97).

Etapa 6: Definimos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ por:

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1\mathcal{F}(t) + N_2\mathcal{G}(t) + \mathcal{H}(t) + N_3\mathcal{T}(t), \quad (4.100)$$

então, podemos mostrar que existem as constantes positivas k_1 e k_2 tal que

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t). \quad (4.101)$$

De fato, seja

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| = |N_1\mathcal{F}(t) + N_2\mathcal{G}(t) + \mathcal{H}(t) + N_3\mathcal{T}(t)| \leq k_0 E(t).$$

Então, obtemos (4.101) com $k_1 = N - k_0$ e $k_2 = N + k_0$, escolhendo $k_0 > 0$ tal que $N - k_0 > 0$.

Usando a derivada em relação a t de (4.100), usando os resultados (4.63), (4.69), (4.81), (4.85) e (4.97) para qualquer $t > 0$, daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq - \left[N \frac{m_1}{2} - 2\rho_1 N_1 - \epsilon \delta N_2 - C_2 - \delta l_0 C_\epsilon N_3 \right] \int_0^L |v_t|^2 dx \\ &\quad - \left[lN - CN_2 + \frac{l l_0}{2} N_3 \right] \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \left[\left(\alpha_1 - \frac{\delta}{2} \right) N_1 - \alpha_1 \epsilon \right] \int_0^L |v_x|^2 dx \\ &\quad - \left[N \frac{m_2}{2} - 2\mu N_1 + C_3 \right] \int_0^L |p_t|^2 dx - [\beta N_1 - C_4 C_\epsilon] \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ &\quad - \left[-\frac{\delta}{2} N_1 - \delta \epsilon + l_0 \frac{\rho_2}{2} N_3 \right] \int_0^L |\theta|^2 dx + \left[\frac{1}{2} N - \frac{\rho_2}{2} C_0 N_3 \right] \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \\ &\quad + (\epsilon N_2 + C_5 N_3) \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno, podemos escolher uma constante N suficientemente grande, de forma que

$$N \frac{m}{2} - (\rho_1 + C) N_1 - \epsilon \delta N_2 - C_2 - \delta l_0 C_\epsilon N_3 > 0, \quad lN - CN_2 + \frac{l l_0}{2} N_3 > 0 \quad e \quad \frac{1}{2} N - \frac{\rho_2}{2} C_0 N_3 > 0,$$

$$N \frac{m_2}{2} - 2\mu N_1 + C_3 > 0.$$

Então, dos resultados acima, podemos concluir que existe uma constante $N_0 > 0$ e uma constante C_B , dependendo de B , tal que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -N_0 E(t) + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \quad (4.103)$$

Usando (4.101), teremos

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\frac{N_0}{k_1}t} + C_B \int_0^t e^{-\frac{N_0}{k_1}(t-s)} (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) ds.$$

Novamente por (4.101), obtemos

$$E(t) \leq \frac{k_2}{k_1} E(0)e^{-\frac{N_0}{k_1}t} + C_B \int_0^t e^{-\frac{N_0}{k_1}(t-s)} (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) ds. \quad (4.104)$$

Portanto, renomeando a constante, obtemos (4.57), o que completa a prova.

Lema 4.5.4. *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quasi-estável em qualquer conjunto limitado e positivamente invariante $B \subset \mathcal{H}$.*

Prova: Uma vez que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é definido como operador de solução do problema (4.37), concluímos que (4.49) – (4.50) é válido para $X = [\mathbb{V}]^2$, $Y = L^2(0, L) \times \mathcal{M}$. Além disso, da parte (ii) do Teorema 4.3.1, sabemos que a condição (4.51) também é verdadeira.

Seja $B \subset \mathcal{H}$ um conjunto limitado e positivamente invariante com relação a $S(t)$. Seja $S(t)U^i = (v^i, v_t^i, p^i, p_t^i, \theta^i, \eta^i)$ a solução do problema (4.9) – (4.14) com as respectivas condições iniciais U^i em B , $i = 1, 2$. Definimos a seminorma

$$n_X(v, p) = \|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2,$$

onde $(v, p) = (v^1 - v^2, p^1 - p^2)$. Usando a imersão compacta $H^1 \hookrightarrow L^{2p}$, temos que $n_X(\cdot)$ é uma norma de X . De (4.57), teremos

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b(t) \|U^1 - U^2\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t) \sup_{0 < s < t} [n_X(v(s) - p(s))]^2,$$

onde

$$b(t) = b_0 e^{-\gamma_0 t}, \quad c(t) = C_B \int_0^t e^{-\gamma_0(t-s)} ds, \quad t > 0.$$

Daí,

$$b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+) \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0.$$

Como B é limitado, sabemos que $c(t)$ é localmente limitado em $[0, \infty)$. Portanto a inequação da

estabilizabilidade (4.52) é válida, isto é, o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quasi-estável em qualquer conjunto limitado positivamente invariante $B \subset \mathcal{H}$. A prova esta completa.

Prova do Teorema 4.5.1: Do Teorema 4.4.2 e do Lema 4.5.4, concluímos o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é assintoticamente regular.

Para qualquer $R > 0$, o conjunto $\Phi_R = \{U \in \mathcal{H} \mid \Phi(U) \leq R\}$, segue de (4.25) que para qualquer $U(t) \in \Phi_R$,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4(\Phi(U(t))) + 4K \leq 4(R + K),$$

resultando que o conjunto Φ_R é limitado.

Então, usando o Lema 4.5.2 e o Teorema 4.4.3 obtemos que o problema (4.9) – (4.14) tem um atrator global compacto dado por $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$.

Além disso, do Lema 4.5.4, o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quasi-estável no atrator \mathfrak{A} , então, usando o Teorema 4.4.4, segue que o atrator \mathfrak{A} tem dimensão fractal finita. A prova esta completa.

4.5.3 Atrator Exponencial

Nesta seção teremos o resultado quanto a existência do atrator exponencial, dado pelo teorema abaixo:

Teorema 4.5.2. *Assumindo que (4.15) – (4.21) são válidas. Então o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ possui um atrator exponencial generalizado. Mais precisamente, para qualquer $\delta \in (0, 1)$, temos que existe um atrator exponencial generalizado $\mathfrak{A}_{exp, \delta} \subset \mathcal{H}$, com dimensão fractal finita em espaço estendido $\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}$ ($\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta} \supseteq \mathcal{H}$), definido como interpolação de*

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 := \mathcal{H}, \text{ e } \tilde{\mathcal{H}}_{-1} := [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^2 \times H^{-1}(0, L) \times \mathcal{M}_0,$$

onde $\mathcal{M}_0 = L^2_{\xi}(\mathbb{R}^+, L^2(0, L))$.

Antes de provarmos o teorema acima, precisamos apresentar uma teoria básica para caracterizar o atrator exponencial.

Definição 4.5.1. *Um atrator global exponencial de um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é um conjunto compacto $\mathfrak{A}_{exp} \subset X$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) Possui dimensão fractal finita;
- (ii) É positivamente invariante;
- (iii) Atrai exponencialmente rápido as trajetórias de qualquer conjunto limitado de dados iniciais, isto é, para qualquer conjunto limitado $B \subset X$, existem constantes positivas t_B, C_B e γ_B tal que para todo $t \geq t_B$.

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)B, \mathfrak{A}_{exp}) = \sup_{x \in B} \text{dist}_{\mathcal{H}}(S(t)x, \mathfrak{A}_{exp}) \leq C_B \exp(-\gamma_B(t - t_B)).$$

Usaremos o seguinte teorema para provar o Teorema 4.5.2, o qual pode ser encontrado em Chueshov e Lasiecka [35, Teorema 7.9.9].

Teorema 4.5.3. *Seja $(\mathcal{H}, S(t))$ um sistema dinâmico satisfazendo (4.49) e (4.50) e quasi-estável em algum conjunto absorvente limitado \mathfrak{B} . Além disso, suponha que existe um espaço estendido $\tilde{\mathcal{H}} \supseteq \mathcal{H}$ tal que, para qualquer $T > 0$,*

$$\|S(t_1)y - S(t_2)y\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq C_{\mathfrak{B}T} |t_1 - t_2|^\gamma, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \quad y \in \mathfrak{B}, \quad (4.105)$$

onde $C_{\mathfrak{B}T} > 0$ e $\gamma \in (0, 1]$ são constantes. Então o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ possui um atrator exponencial generalizado $\mathfrak{A}_{exp} \subset \mathcal{H}$ com dimensão fractal finita em $\tilde{\mathcal{H}}$.

Prova do Teorema 4.5.2. Seja o conjunto

$$\mathfrak{B} = \{U \in \mathcal{H} \mid \Phi(U) \leq R\},$$

onde $R > 0$ e Φ é o funcional de Lyapunov estrito considerado no Lema 5.5.1. Então, temos que o conjunto \mathfrak{B} é limitado, note que, para todo $R > 0$, dado $U(0) \in \mathfrak{B}$, existe uma única solução $U \in C([0, \infty), \mathcal{H})$ tal que $U(t) = S(t)U(0)$ e como Φ é um funcional de Lyapunov, teremos que $\Phi(U(t)) \leq \Phi(U_0)$, para todo $t \geq 0$, isto é, $\Phi(U(t)) \leq \Phi(U_0) \leq R$, o que resulta que \mathfrak{B} é positivamente invariante para todo $R > 0$.

Então temos que \mathfrak{B} é um conjunto absorvente positivamente invariante para R suficientemente grande. Portanto, o sistema $(\mathcal{H}, S(t))$ é quasi-estável em \mathfrak{B} .

Para a solução $U(t)$ com dado inicial $y = U(0) \in \mathfrak{B}$, podemos concluir da invariância positiva de \mathfrak{B} que existe $C_{\mathfrak{B}} > 0$ tal que para qualquer $0 \leq t \leq T$,

$$\|U_t(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}} \leq C_{\mathfrak{B}},$$

o que resulta para qualquer $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$,

$$\|S(t_1)y - S(t_2)y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}} = \left\| \int_{t_1}^{t_2} U_t(\tau) d\tau \right\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|U_t(\tau)\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}} d\tau \leq C_{\mathfrak{B}}|t_1 - t_2|. \quad (4.106)$$

Segue de (4.106) que para qualquer $y \in \mathfrak{B}$, a aplicação $t \mapsto S(t)y$ é Holder contínua no espaço estendido $\tilde{\mathcal{H}}$ com expoente $\delta = 1$. Portanto, (4.105) é verificado e então obtemos a existência de um atrator exponencial generalizado, cuja dimensão fractal é finita em $\tilde{\mathcal{H}}_{-1}$.

A existência atrator exponencial no espaço estendido $\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}$ com $(0, 1)$, segue, tendo em mente a seguinte cadeia de inclusões

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \subset \tilde{\mathcal{H}}_{-\delta} \subset \tilde{\mathcal{H}}_{-1}$$

Podemos escolher espaços estendidos menores. De fato, tendo $\tilde{\mathcal{H}}_0 \subset \tilde{\mathcal{H}}_{-1}$ continuamente, seja $\delta \in (0, 1)$, usando a desigualdade de interpolação, teremos

$$\|U\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}} \leq C \|U\|_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{1-\delta} \|U\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}}^{\delta} \leq C_B^{1-\delta} \|U\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}}^{\delta}$$

Em particular,

$$\|S(t_1)U - S(t_2)U\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}} \leq C_B^{1-\delta} \|S(t_1)U - S(t_2)U\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}}^{\delta}.$$

Então, a desigualdade acima, combinada a resultados anteriores, resulta

$$\|S(t_1)U - S(t_2)U\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}} \leq C_B |t_1 - t_2|^{\delta}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

Isto mostra que $t \mapsto S(t)U$ é Holder contínua no espaço estendido $\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}$. Então a existência do atrator exponencial generalizado com dimensão finita em $\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}$ esta provada, usando novamente o Teorema 4.5.3. A prova esta completa.

Capítulo 5

Sistema Piezoelétrico com a Lei de Coleman - Gurtin 2

Neste capítulo estudaremos a existência de um atrator global que possui dimensão fractal finita, para o sistema Piezoelétrico com lei térmica Coleman - Gurtin. Para alcançarmos nosso objetivo usaremos a técnica desenvolvida por Chueshov e Lasiecka.

$$\rho_1 v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x + f_1(v, p) = h_1, \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \quad (5.1)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} + g(p_t) + f_2(v, p) = h_2, \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \quad (5.2)$$

$$\rho_2 \theta_t - \left(\frac{1 - \alpha_2}{\beta_1} \right) \theta_{xx} - \frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g(s) \theta_{xx}(t - s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad \text{em } (0, L) \times \mathbb{R}^+ \quad (5.3)$$

onde as constantes $\rho_1, \rho_2, \mu, \alpha, \gamma, \beta, \beta_1, \delta$ e $\alpha_2 \in (0, 1)$ são positivas. As funções $g_1(v_t)$ e $g_2(p_t)$ são mecanismos de dissipação não lineares, as funções $f_1(v, p)$ e $f_2(v, p)$ representam termos não linear de força, e os termos $h_1, h_2 \in L^2(0, L)$ são forças externas e seja a relação

$$\alpha = \alpha_1 + \gamma^2 \beta,$$

sejam as condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} (v(x, 0), p(x, 0), \theta(x, 0)) &= (v_0(x), p_0(x), \theta_0(x)) \\ (v_t(x, 0), p_t(x, 0)) &= (v_1(x), p_1(x)), \quad \theta(-s)|_{s>0} = \vartheta_0(s), \quad x \in (0, L), \end{aligned} \quad (5.4)$$

e condições de fronteira dadas por

$$v(0, t) = \alpha v_x(L, t) - \gamma \beta p_x(L, t) = p(0, t) = p_x(L, t) - \gamma v_x(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.5)$$

$$\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.6)$$

Para estudarmos este modelo, tomamos como base o artigo desenvolvido por Baowei Feng[32], onde $\theta(x, t)$ é o mecanismo de temperatura, de acordo com a lei de Coleman-Gurtin[30] para o vetor

fluxo de calor

$$\rho_2 \theta_t - \left(\frac{1 - \alpha_2}{\beta_1} \right) \theta_{xx} - \frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g(s) \theta_{xx}(t-s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad \alpha_2 \in (0, 1),$$

usado para assim termos o sistema proposto. Os casos em que $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_2 = 1$ correspondem aos casos Fourier e Gurtin-Pipkin, respectivamente, ver [33].

Em virtude da memória com história, o sistema não corresponde a um sistema autônomo, para lidar com a memória, motivada por Giorgi e outros[30,31], definimos uma nova variável $\eta = \eta^t(x, s)$ dada da seguinte forma

$$\eta^t(x, s) = \int_0^s \theta(x, t - \tau) d\tau = \int_{t-s}^t \theta(x, \tau) d\tau, \quad (t, s) \in [0, L] \times \mathbb{R}^+. \quad (5.7)$$

Portanto, a história de θ satisfaz

$$\eta_t + \eta_s = \theta, \quad (x, t, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (5.8)$$

onde

$$\eta^t(0) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

e condição inicial

$$\eta^0(s) = \eta_0(s) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{R}^+,$$

com

$$\eta_0(s) = \int_0^s \theta_0(\tau) d\tau, \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

Usando a relação (5.7), teremos

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g(s) \theta_{xx}(t-s) ds = -\frac{\alpha_2}{\beta_1} \int_0^\infty g'(s) \eta_{xx}^t ds.$$

Usando,

$$\xi(s) = \frac{\alpha_2}{\beta_1} g'(s) \quad \text{and} \quad l = \frac{1 - \alpha_2}{\beta_1} > 0,$$

então teremos o seguinte sistema, equivalente a (4.1) – (4.3)

$$\rho_1 v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x + f_1(v, p) = h_1, \quad (5.9)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} + g(p_t) + f_2(v, p) = h_2, \quad (5.10)$$

$$\rho_2 \theta_t - l \theta_{xx} - \int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx}^t(s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad (5.11)$$

$$\eta_t + \eta_s = \theta, \quad (5.12)$$

com os dados iniciais

$$\begin{aligned} (v(x, 0), p(x, 0), \theta(x, 0)) &= (v_0(x), p_0(x), \theta_0(x)) \\ (v_t(x, 0), p_t(x, 0)) &= (v_1(x), p_1(x)), \quad \eta^0(x, s) = \eta_0(s), \end{aligned} \quad (5.13)$$

e condições de fronteira

$$v(0, t) = v_x(L, t) = p(0, t) = p_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = \eta^t(0, 0) = \eta^t(L, 0) = 0. \quad (5.14)$$

5.1 Hipóteses e Configuração de Espaço

Usaremos espaços de Lebesgue e Sobolev

$$L^q(0, L), \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \text{e} \quad (u, v)_2 = (u, v)_{L^2(0, L)}.$$

Denotamos a norma no espaço B por $\|\cdot\|_B$. No caso, $q = 2$, escreveremos $\|u\|$ no lugar de $\|u\|_2$.

Uma vez que $u(0) = 0$, a desigualdade de Poincaré se mantém

$$\|u\| \leq L \|u_x\| \quad \text{e} \quad \|u\|_{\mathbb{V}} = \|u_x\|, \quad \forall u \in \mathbb{V}.$$

Para o termo não linear de força f , usaremos as hipóteses

(F1) Existe uma função de classe C^2 , $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\nabla F = (f_1, f_2), \quad (5.15)$$

e existem as constantes positivas ϱ e m_F tal que, para cada $v, p \in \mathbb{R}$

$$F(v, p) \geq -\varrho(|v|^2 + |p|^2) - m_F, \quad (5.16)$$

onde $0 \leq \varrho < \min \left\{ \frac{\alpha_1}{4(L^2 + 2\gamma^2 L^2)}, \frac{\beta}{8L^2} \right\}$.

(F2) Existem constantes positivas $p \geq 1$ e C_f tal que, para cada $v, p, s \in \mathbb{R}$,

$$|\nabla f_i(v, p)| \leq C_f(1 + |v|^{p-1} + |p|^{p-1}), \quad i = 1, 2, \quad (5.17)$$

o que resulta, que existe uma constante positiva C_F , tal que

$$F(v, p) \leq C_F(1 + |v|^{q+1} + |p|^{q+1}).$$

Com relação a função g , assumiremos que

(G1)

$$g \in C^1(\mathbb{R}), \quad g(0) = 0 \text{ e } g_i \text{ é crescente.} \quad (5.18)$$

(G2) Existem constantes $m_i > 0$ e $M_i > 0$ tal que, para qualquer $s \in \mathbb{R}$,

$$m \leq g'(s) \leq M, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (5.19)$$

o que nos dá a propriedade da monotonicidade

$$(g(u) - g(v))(u - v) \geq m|u - v|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Para a função $\xi(s)$, definimos

(R1) $\xi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável tal que

$$\xi(0) > 0, \quad \int_0^\infty \xi(s) ds = l_0 < \infty. \quad (5.20)$$

(R2) Existe a constante positiva μ_1 tal que

$$\xi'(t) + \mu_1 \xi(t) \leq 0, \quad \text{para } t \geq 0. \quad (5.21)$$

Agora, definimos os seguintes espaços em relação a variável η ,

$$\mathcal{M} = L^2_\xi(\mathbb{R}^+, H_0^1) = \left\{ \eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow H_0^1 \mid \int_0^\infty \xi(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert com norma

$$\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^\infty \xi(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds,$$

e produto interno

$$(\eta, \chi)_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \eta_x(s) \chi_x(s) dx ds.$$

Definimos o espaço de Hilbert \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \mathbb{V} \times L^2(0, L) \times \mathbb{V} \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times \mathcal{M},$$

onde

$$\mathbb{V} = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi(0) = 0\},$$

equipado com a norma

$$\|v, V, p, P, \theta, \eta\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|V\|^2 + \mu \|P\|^2 + \alpha_1 \|v_x\|^2 + \beta \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \rho_2 \|\theta\|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2.$$

5.2 Energia do Sistema

Nesta seção, definiremos o funcional energia da solução do sistema (5.9) – (5.14) como

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|(v, v_t, p, p_t, \theta, \eta)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \frac{1}{2} [\rho_1 \|v_t\|^2 + \mu \|p_t\|^2 + \alpha_1 \|v_x\|^2 + \beta \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \rho_2 \|\theta\|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2] \end{aligned} \quad (5.22)$$

e definimos também o funcional da energia modificada por

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + \int_0^L F(v, p) dx - \int_0^L h_1 v dx - \int_0^L h_2 p dx. \quad (5.23)$$

Então podemos enunciar o seguinte Lema.

Lema 5.2.1. *O funcional da energia modificada definida em (5.23) satisfaz para todo $t \geq 0$.*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -l \int_0^\infty \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(t) \|\eta_x\|^2 ds - \int_0^\infty g(p_t) p_t dx. \quad (5.24)$$

Além disso, se as funções $h_1, h_2 \in L^2(0, L)$, então existe uma constante positiva $K = K(\|h_1\|, \|h_2\|)$, tal que para qualquer $t \geq 0$,

$$\mathcal{E}(t) \geq \frac{1}{4} \|(v, v_t, p, p_t, \theta, \eta)\|_{\mathcal{H}}^2 - K. \quad (5.25)$$

Prova: Multiplicando as equações (5.9), (5.10) e (5.11) por v_t, p_t e θ , respectivamente, e usando (5.12), integrando em $(0, L)$ e usando integração por partes, segue que

$$\begin{aligned} & \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 |v_t|^2 + \mu |p_t|^2 + \alpha_1 |v_x|^2 + \beta |\gamma v_x - p_x|^2 + \rho_2 |\theta|^2 + \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2) dx}_{E(t)} \\ & + \frac{d}{dt} \int_0^L (F(v, p) - h_1 v - h_2 p) dx \\ & = -l \int_0^L |\theta_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x\|^2 ds - \int_0^\infty g(p_t) p_t dx, \end{aligned} \quad (5.26)$$

resultando em (5.24).

Aplicando (5.16) e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L F(v, p) dx &\geq -\varrho L^2 \|v_x\|^2 - \varrho L^2 \|p_x\|^2 - Lm_F \\ &\geq -Lm_F - \varrho L^2 \|v_x\|^2 - \varrho L^2 (2\gamma^2 \|v_x\|^2 + 2\|\gamma v_x - p_x\|^2) \\ &\geq -Lm_F - (\varrho L^2 + 2\gamma^2 \varrho L^2) \|v_x\|^2 - 2\varrho L^2 \|\gamma v_x - p_x\|^2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|p_x\|^2 = \|\gamma v_x - \gamma v_x + p_x\|^2 = \|\gamma v_x - (\gamma v_x - p_x)\|^2 \leq 2\gamma^2 \|v_x\|^2 + 2\|\gamma v_x - p_x\|^2.$$

Segue das desigualdades de Young e Poincaré que

$$\begin{aligned} \int_0^L h_1 v \, dx &\leq \|h_1\| L \|v_x\| \\ &\leq \frac{4L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \frac{\alpha_1}{16} \|v_x\|^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

De maneira análogo, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^L h_2 p \, dx &\leq \|h_2\| L \|p_x\| \\ &\leq \|h_2\| L (\gamma \|v_x\| + \|\gamma v_x - p_x\|) \\ &\leq L \|h_2\| \|\gamma v_x - p_x\| + L\gamma \|h_2\| \|v_x\| \\ &\leq \frac{2L^2}{\beta} \|h_2\|^2 + \frac{\beta}{8} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{4L^2 \gamma^2}{\alpha_1} \|h_2\|^2 + \frac{\alpha_1}{16} \|v_x\|^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Combinando (5.27)–(5.29) em (5.23), obtemos (5.25) com $K = Lm_F + \frac{4L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \left(\frac{2L^2}{\beta} + \frac{4L^2 \gamma^2}{\alpha_1}\right) \|h_2\|^2$.
A prova esta completa.

5.3 O Semigrupo

Para provar a boa colocação do sistema (5.9) – (5.14) usando o método de semigrupo, vamos escrever a derivada η_s como uma forma de operador. Definindo o operador T da seguinte forma

$$T\eta = -\eta_s, \quad \eta \in D(T),$$

com

$$D(T) = \{\eta \in \mathcal{M} \mid \eta_s \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0\},$$

em particular,

$$(T\eta, \eta)_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 \, ds, \quad \eta \in D(T), \quad (5.30)$$

e a solução de

$$\eta_t = T\eta + \theta, \quad \eta(0) = 0,$$

possui uma representação explícita.

Introduzimos duas variáveis dependentes $V = v_t$ e $P = p_t$, então o sistema (5.9) – (5.14) equivale ao seguinte problema abstrato de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(t) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})U(t) + \mathcal{F}(U(t)), \quad t > 0, \\ U(0) &= U_0 = (v_0, v_1, p_0, p_1, \theta_0, \eta_0)^T, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde

$$U(t) = (v(t), V(t), p(t), P(t), \theta(t), \eta)^T \in \mathcal{H},$$

e

$$\mathcal{A}U(t) = \begin{pmatrix} V \\ \frac{\alpha}{\rho_1}v_{xx} - \frac{\gamma\beta}{\rho_1}p_{xx} - \frac{\delta}{\rho_1}\theta_x \\ P \\ \frac{\beta}{\mu}p_{xx} - \frac{\gamma\beta}{\mu}v_{xx} \\ \frac{l}{\rho_2}\theta_{xx} + \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty \xi(s)\eta_{xx}(s)ds - \frac{\delta}{\rho_2}v_{xt} \\ \theta + T\eta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}U(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{g(P)}{\rho_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

com o domínio

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= \{U(t) \in \mathcal{H} \mid v, p \in (H^2(0, L) \cap \mathbb{V}), v_t, p_t \in \mathbb{V}, \theta \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \eta \in D(T), \\ &\quad l\theta_{xx} + \int_0^\infty \xi(t)\eta_{xx}(s)ds \in L^2(0, L)\}, \end{aligned}$$

e

$$D(\mathcal{B}) = \mathcal{H}.$$

A força externa é dada por uma função não linear $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definida por

$$\mathcal{F}(U(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\rho_1}(h_1 - f_1(v, p)) \\ 0 \\ -\frac{1}{\mu}(h_2 - f_2(v, p)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definiremos a seguir o significado de solução para o nosso problema de valor inicial, usando a referência V. Barbu[1].

Definição 5.3.1. Diremos que $U : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{H}$, é uma solução forte para o problema de valor inicial (5.31), se U é contínua em $[0, \infty)$, Lipschitziana em cada subconjunto compacto de $[0, \infty)$, $U(t)$ é diferenciável em $[0, \infty)$ e

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \text{ para quase todo } t \in [0, \infty).$$

Definição 5.3.2. Uma solução generalizada para o problema (5.31) em $[0, T)$, com $T > 0$ é uma função $U \in C([0, T], \mathcal{H})$ com $U(0) = U_0$ para o qual existe uma sequência de soluções fortes $(U_n) \in C([0, T], \mathcal{H})$ de

$$\frac{d}{dt}U_n + (\mathcal{A} + \mathcal{B})U_n + \mathcal{F}(U_n) = f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

com $U_n \rightarrow U$ em $C([0, T], \mathcal{H})$ e $f_n \rightarrow 0$ sobre $L^1(0, T; \mathcal{H})$. Uma função $U \in C([0, T], \mathcal{H})$, com $0 < T \leq \infty$ é solução generalizada para o problema (5.31) sobre $[0, T)$ se U é solução generalizada para (5.31) sobre $[0, T']$ para qualquer $0 < T' < T$.

Observação 5.3.1. A demonstração do fato de \mathcal{F} ser Lipschitziana em \mathcal{H} segue exatamente o mesmo processo do sistema anterior.

Teorema 5.3.1. Assumindo as hipóteses (5.15) – (5.21), então seguem os seguintes resultados.

(i) Se $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (5.31) possui uma única solução fraca $U(t) \in C([0, \infty), \mathcal{H})$ com $U(0) = U_0$ dada por

$$U(t) = e^{(\mathcal{A}+\mathcal{B})t}U_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)(\mathcal{A}+\mathcal{B})}\mathcal{F}(U(\tau))d\tau.$$

(ii) Se $U^1(t)$ e $U^2(t)$ soluções fracas (5.31) então existe uma constante positiva $C_0 = C(U^1(0), U^2(0))$, tal que

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{C_0 T} \|U^1(0) - U^2(0)\|_{\mathcal{H}}, \text{ para qualquer } 0 \leq t \leq T.$$

(iii) Se $U_0 \in D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, então a solução fraca é uma solução forte.

Demonstração: Segue exatamente como o problema anterior.

Observação 5.3.2. Com a boa colocação do problema (5.31) dada pelo Teorema 5.3.1, o operador solução $S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por

$$S(t)U_0 = U(t), \quad t \geq 0,$$

onde $U(t)$ é a única solução do problema (5.31), satisfaz as propriedades de semigrupo

$$S(0) = I \text{ e } S(t+s) = S(t) \circ S(s), \quad t, s \geq 0,$$

e define um C_0 -semigrupo não linear, é localmente Lipschitz contínuo em \mathcal{H} . Estudaremos a dinâmica do problema (5.31) através do sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$.

5.4 Atrator Global

Nesta seção, mostraremos a existência do atrator global e sua dimensão fractal finita para o problema (5.9) – (5.14).

Usaremos neste sistema as teorias básicas sobre o atrator global, como no problema anterior.

5.5 Atrator Global e sua Dimensão Fractal

Vamos provar a existência de um atrator global. Seja o principal resultado:

Teorema 5.5.1. *Assumindo as hipóteses (5.15) – (5.21). Então o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ gerado pelo problema (5.9) – (5.14) possui um atrator global compacto \mathfrak{A} , com dimensão fractal finita, caracterizado por*

$$\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+(\mathcal{N}),$$

onde \mathcal{N} é o conjunto de pontos estacionários de $S(t)$ e $\mathbb{M}_+(\mathcal{N})$ é a variedade instável de \mathcal{N} .

De acordo com metodologia adotada para mostrar o teorema acima, precisamos dos seguintes resultados

5.5.1 Sistema gradiente e soluções estacionárias

Daí, para tal estrutura precisamos do seguinte Lema.

Lema 5.5.1. *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondente ao problema (5.9) – (5.14) é gradiente.*

Prova: Seja a energia modificada $\mathcal{E}(t)$ definida em (5.23) como um funcional de Lyapunov Φ . Então para $U = (v_0, v_1, p_0, p_1, \theta_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$, obtemos de (5.24) que para todo $t > 0$,

$$\frac{d}{dt} \Phi(S(t)U) = -l \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - \int_0^L g(p_t) p_t dx \leq 0, \quad (5.32)$$

o que resulta $\Phi(S(t)U)$ é não crescente. Agora, suponhamos que $\Phi(S(t)U) = \Phi(U)$ para todo $t \geq 0$, então teremos,

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(S(t)U) - \Phi(U) \\ &= -l \int_0^t \int_0^L \theta_x^2 dx ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 dx ds - \int_0^t \int_0^L g(p_t) p_t dx ds \leq 0, \end{aligned}$$

implicando que, para qualquer $t \geq 0$,

$$\int_0^L g(p_t) p_t dx = 0, \quad (5.33)$$

e

$$l \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty (-\xi'(s)) \|\eta_x(s)\|^2 ds = 0. \quad (5.34)$$

De (5.19), concluímos de (5.33) que para cada $t \geq 0$,

$$p_t(t) = 0, \text{ em } (0, L),$$

que resulta para todo $t \geq 0$,

$$p(t) = p_0.$$

Notemos que os termos do lado direito de (5.34) são não negativos, daí teremos para todo $t \geq 0$,

$$\int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds = 0,$$

onde, aplicamos a condição $\xi'(s) + \mu \xi(s) \leq 0$, assim deduzimos,

$$\eta(x, s) = 0.$$

Portanto, $\theta(t) = 0$ usando a equação (5.12).

Da equação (5.11), dos resultados acima e usando a desigualdade de Poincaré, deduzimos que

$$v_t(t) = 0, \text{ então } v(t) = v_0 \text{ em } (0, L).$$

Resultando que $S(t)U_0 = U(t) = (v_0, 0, p_0, 0, 0, 0)$ é uma solução estacionária, isto é, $S(t)U_0 = U_0$ para todo $t \geq 0$. A prova esta completa. \square

Lema 5.5.2. *Com as hipóteses do Teorema 5.5.1, o conjunto de pontos de equilíbrio \mathcal{N} é limitado em \mathcal{H} .*

Demonstração: Seja $U \in \mathcal{N}$ existe uma solução estacionária do problema (5.9) – (5.14), sabemos que $U = (v, 0, p, 0, 0, 0)$ e satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} -\alpha v_{xx} + \gamma\beta p_{xx} + f_1(v, p) &= h_1, \\ -\beta p_{xx} + \gamma\beta v_{xx} + f_2(v, p) &= h_2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (5.35) por v e a segunda por p , e integrando o resultado em $(0, L)$, obtemos:

$$\int_0^L (\alpha v_x^2 + \beta p_x^2) dx - 2\gamma\beta \int_0^L v_x p_x dx = - \int_0^L [f_1(v, p)v + f_2(v, p)p] dx + \int_0^L (h_1 v + h_2 p) dx, \quad (I)$$

tendo em mente que:

$$(1) \alpha = \alpha_1 + \gamma^2\beta;$$

$$(2) \beta (\gamma v_x - p_x)^2 = \beta\gamma^2 v_x^2 - 2\gamma\beta v_x p_x + \beta p_x^2,$$

assim, reescrevemos (I) da seguinte maneira:

$$\int_0^L [\alpha_1 v_x^2 + \beta (\gamma v_x + p_x)^2] dx = - \int_0^L f(v, p) v dx + \int_0^L (h_1 v + h_2 p) dx,$$

Usando (5.15) – (5.16) e (5.27), obtemos

$$- \int_0^L [f_1(v, p) v + f_2(v, p) p] dx \leq Lm_F + (\rho L^2 + 2\gamma^2 \rho L^2) \|v_x\|^2 + 2\rho L^2 \|\gamma v_x - p_x\|^2.$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré, teremos:

$$\int_0^L h_1 v dx \leq \int_0^L |h_1| L |v_x| dx \leq \frac{L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \frac{\alpha_1}{4} \|v_x\|^2, \quad (II)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L h_2 p dx &\leq \int_0^L |h_2| L |p_x| dx \leq \int_0^L |h_2| L (\gamma |v_x| + |\gamma v_x - p_x|) dx \\ &\leq \int_0^L \gamma L |h_2| |v_x| dx + \int_0^L L |h_2| |\gamma v_x - p_x| dx \\ &\leq \frac{L^2}{2\beta} \|h_2\|^2 + \frac{\beta}{2} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{\gamma^2 L^2}{\alpha_1} \|h_2\|^2 + \frac{\alpha_1}{4} \|v_x\|^2, \quad (III) \end{aligned}$$

onde,

$$|p_x| = |\gamma v_x - \gamma v_x + p_x| = |\gamma v_x - (\gamma v_x - p_x)| \leq |\gamma v_x| + |\gamma v_x - p_x|.$$

Somando as desigualdades (II) e (III), teremos:

$$\int_0^L (h_1 v + h_2 p) dx \leq \frac{\beta}{2} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|v_x\|^2 + \left(\frac{L^2}{2\beta} + \frac{\gamma^2 L^2}{\alpha_1} \right) \|h_2\|^2 + \frac{L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2.$$

Aplicando os resultados acima na igualdade (I), obtemos

$$\frac{1}{4} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{\beta}{4} \|\gamma v_x - p_x\|^2 + \frac{\alpha_1}{4} \|v_x\|^2 \leq Lm_F + \frac{L^2}{\alpha_1} \|h_1\|^2 + \left(\frac{L^2}{2\beta} + \frac{\gamma^2 L^2}{\alpha_1} \right) \|h_2\|^2,$$

o que mostra que o conjunto \mathcal{N} é limitado em \mathcal{H} . A prova deste Lema está completa.

5.5.2 Quasi-estabilidade

Nesta subseção, vamos estabelecer a quase-estabilidade do semigrupo gerado pela solução global do problema (5.9) – (5.14).

Lema 5.5.3. *Assumindo as hipóteses (5.15) – (5.21). Dado um conjunto limitado B de \mathcal{H} , então existem constantes $\gamma_0, b_0 > 0$ e $C_B > 0$ tal que*

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b_0 e^{-\gamma_0 t} \|U^1 - U^2\|_{\mathcal{H}}^2 + C_B \int_0^t e^{-\gamma_0(t-s)} (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) ds, \quad (5.36)$$

onde $S(t)U^i = (v^i, v_t^i, p^i, p_t^i, \theta^i, \eta^i)$ é a solução fraca do problema (5.9) – (5.14) com as respectivas condições iniciais U^i em B , $i = 1, 2$.

Prova: Para qualquer $(v_0^i, v_1^i, p_0^i, p_1^i, \theta_0^i, \eta_0^i) \in B$, $i = 1, 2$, onde o conjunto B é um subconjunto limitado de \mathcal{H} . Seja $U^i(t) = (v^i, v_t^i, p^i, p_t^i, \theta^i, \eta^i)$, com $i = 1, 2$, duas soluções que correspondem aos respectivos dados iniciais $(v_0^i, v_1^i, p_0^i, p_1^i, \theta_0^i, \eta_0^i)$. Denotamos

$$v = v^1 - v^2, \quad p = p^1 - p^2, \quad \theta = \theta^1 - \theta^2, \quad \eta = \eta^1 - \eta^2,$$

e

$$G(p_t) = g(p_t^1) - g(p_t^2), \quad F(v, p) = f(v^1, p^1) - f(v^2, p^2),$$

então $(v, v_t, p, p_t, \theta, \eta)$ satisfazem

$$\rho_1 v_{tt} - \alpha v_{xx} + \gamma \beta p_{xx} + \delta \theta_x = -F_1(v, p), \quad (5.37)$$

$$\mu p_{tt} - \beta p_{xx} + \gamma \beta v_{xx} = -F_2(v, p) - G(p_t), \quad (5.38)$$

$$\rho_2 \theta_t - l \theta_{xx} - \int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx}(s) ds + \delta v_{tx} = 0, \quad (5.39)$$

$$\eta_t + \eta_s = \theta, \quad (5.40)$$

com a condição de fronteira e condições iniciais

$$U^1(0) - U^2(0) = (v_0, v_1, p_0, p_1, \theta_0, \eta_0).$$

A energia correspondente $E(t)$ para (5.37) – (5.40) é a mesma que (5.22). A prova deste Lema será dividida nas seguintes etapas.

ETAPA 1: Primeiramente, afirmamos que existe uma constante positiva C_B tal que para qualquer $t > 0$,

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -l \int_0^L \theta_x^2 dx + \rho_1 \varepsilon_1 \int_0^L v_t^2 dx - \frac{m}{2} \int_0^L p_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \\ &+ C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Prova: Multiplicando as equações (5.37) – (5.39) by v_t, p_t e θ , respectivamente, integrando em $(0, L)$ e usando (5.40) concluímos que

$$\begin{aligned} E'(t) &= -l \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds - \int_0^L (F_1(v, p) v_t + F_2(v, p) p_t) dx \\ &- \int_0^L G(p_t) p_t dx. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Usando (5.17), as desigualdades de Holder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L F_1(v, p) v_t dx &= \int_0^L [f_1(v^1, p^1) - f_1(v^2, p^2)] v_t dx \\
&= \int_0^L f_1'(v, p) (|v| + |p|) |v_t| dx \\
&\leq C_1 \int_0^L (1 + |v^1|^{p-1} + |v^2|^{p-1} + |p^1|^{p-1} + |p^2|^{p-1}) (|v| + |p|) |v_t| dx \\
&\leq C_1 (\|v^1\|_{2p}^{p-1} + \|v^2\|_{2p}^{p-1} + \|p^1\|_{2p}^{p-1} + \|p^2\|_{2p}^{p-1}) (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v_t\|_{2p} \\
&\quad + C_1 (\|v\| + \|p\|) \|v_t\| \\
&\leq C_B (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v_t\|_{2p} \\
&\leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) + \rho_1 \varepsilon_1 \|v_t\|^2.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

De forma análoga, segue

$$\int_0^L F_2(v, p) p_t dx \leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) + \frac{m}{2} \|p_t\|^2. \tag{5.44}$$

Segue de (5.19) que

$$\begin{aligned}
\int_0^L G(p_t) p_t dx &= \int_0^L [g(p_t^1) - g(p_t^2)] p_t dx \\
&= \int_0^L g'(v_t) p_t p_t dx \\
&\geq m \int_0^L p_t^2 dx = m \|p_t\|^2.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Substituindo (5.43) – (5.45) em (5.42), obtemos a estimativa desejada (5.41).

Etapa 2: Seja o funcional

$$\mathcal{F}(t) = \rho_1 \int_0^L v_t v dx + \mu \int_0^L p_t p dx, \tag{5.46}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'(t) &\leq \rho_1 \int_0^L |v_t|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{3}{2} \mu \int_0^L |p_t|^2 dx - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |v_x|^2 dx \\
&\quad + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2).
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Prova: Multiplicando as equações (5.37) – (5.38) por v, p , respectivamente, integrando em $(0, L)$ e usando (5.40) concluímos

$$\rho_1 \int_0^L v_{tt} v \, dx - \alpha \int_0^L v_{xx} v \, dx + \gamma \beta \int_0^L p_{xx} v \, dx + \delta \int_0^L \theta_x v \, dx = - \int_0^L F_1(v, p) v \, dx, \quad (5.48)$$

$$\mu \int_0^L p_{tt} p \, dx - \beta \int_0^L p_{xx} p \, dx + \gamma \beta \int_0^L v_{xx} p \, dx = - \int_0^L F_2(v, p) p \, dx - \int_0^L G(p_t) p \, dx, \quad (5.49)$$

Fazendo a integração por partes e substituindo as identidades $v_{tt} v = \frac{d}{dt} v_t v - v_t^2$ e $p_{tt} p = \frac{d}{dt} p_t p - p_t^2$ em (5.48) – (5.49), respectivamente, teremos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \rho_1 \int_0^L v_t v \, dx - \rho_1 \int_0^L v_t^2 \, dx + \alpha_1 \int_0^L v_x^2 \, dx + \gamma^2 \beta \int_0^L v_x^2 \, dx - \gamma \beta \int_0^L v_x p_x \, dx + \delta \int_0^L \theta_x v \, dx \\ & = - \int_0^L F_1(v, p) v \, dx, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\frac{d}{dt} \mu \int_0^L p_t p \, dx - \mu \int_0^L p_t^2 \, dx - \beta \int_0^L p_x (\gamma v_x - p_x) \, dx = - \int_0^L F_2(v, p) p \, dx - \int_0^L G(p_t) p \, dx, \quad (5.51)$$

Somando as equações (5.50) e (5.51),

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\rho_1 \int_0^L v_t v \, dx + \mu \int_0^L p_t p \, dx \right) = \rho_1 \int_0^L v_t^2 \, dx - \alpha_1 \int_0^L v_x^2 \, dx + \mu \int_0^L p_t^2 \, dx + \delta \int_0^L \theta v_x \, dx \\ & - \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 \, dx - \int_0^L (F_1(v, p) v + F_2(v, p) p) \, dx - \int_0^L G(p_t) p \, dx. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Usando (5.17), e as desigualdades de Holder e Young, para obter:

$$\begin{aligned} \int_0^L F_1(v, p) v \, dx & = \int_0^L [f_1(v^1, p^1) - f_1(v^2, p^2)] v \, dx \\ & \leq C_1 (\|v^1\|_{2p}^{2p-2} + \|v^2\|_{2p}^{2p-2} + \|p^1\|_{2p}^{2p-2} + \|p^2\|_{2p}^{2p-2}) (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v\|_{2p} \\ & + C_1 L^{\frac{p-1}{2p}} (\|v\|_{2p} + \|p\|_{2p}) \|v\|_{2p} \\ & \leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2), \end{aligned} \quad (5.53)$$

e de maneira análoga, temos

$$\int_0^L F_2(v, p) p \, dx \leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2), \quad (5.54)$$

Usando (5.19), teremos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L G(p_t) p \, dx &= \int_0^L [g(p_t^1) - g(p_t^2)] p \, dx \\
&= \int_0^L g'(p^1) p_t p \, dx \\
&\leq M \int_0^L p_t p \, dx \\
&\leq \left(\int_0^L M^{2p} \, dx \right)^{\frac{p-1}{2p}} \left(\int_0^L |p_t|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |p| \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \\
&\leq M_1^{p-1} \|p_t\| \|p\|_{2p} \\
&\leq \frac{\mu}{2} \|p_t\|^2 + C_1 \|p\|_{2p}^2,
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Segue da desigualdade de Young:

$$\delta \int_0^L \theta v_x \, dx \leq \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 \, dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |v_x|^2 \, dx. \tag{5.56}$$

Substituindo (5.53) – (5.56) em (5.52), resulta (5.47).

Etapa 3: Seja o funcional

$$\mathcal{G}(t) = -\rho_1 \int_0^L v_t(\gamma v - p) \, dx, \tag{5.57}$$

que satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) &\leq -\frac{\rho_1 \gamma}{2} \int_0^L |v_t|^2 \, dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |p_t|^2 \, dx + \alpha_1 \varepsilon_2 \int_0^L |v_x|^2 \, dx + C_2 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 \, dx \\
&\quad + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 \, dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2).
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Prova: Multiplicando a equação (5.37) por $(\gamma v - p)$, integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^L v_{tt}(\gamma v - p) \, dx + \alpha_1 \int_0^L v_x(\gamma v_x - p_x) \, dx - \gamma \beta \int_0^L (\gamma v - p)(\gamma v - p)_{xx} \, dx \\
- \delta \int_0^L \theta (\gamma v - p)_x \, dx = - \int_0^L F_1(v, p) (\gamma v - p) \, dx.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

usando a identidade

$$\frac{d}{dt} [v_t(\gamma v - p)] = v_{tt}(\gamma v - p) + v_t(\gamma v - p)_t \tag{5.60}$$

na equação (5.59) obtemos

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L v_t (\gamma v - p) dx + \rho_1 \int_0^L v_t (\gamma v - p)_t dx - \alpha_1 \int_0^L v_x (\gamma v_x - p_x) dx \\ & - \gamma \beta \int_0^L (\gamma v_x - p_x)^2 dx + \delta \int_0^L \theta (\gamma v_x - p_x) dx = \int_0^L F_1(v, p) (\gamma v - p) dx. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Resolvendo as integrais

$$\begin{aligned} - \int_0^L F_1(v, p) (\gamma v - p) dx &= -\gamma \underbrace{\int_0^L F_1(v, p) v dx}_{(5.53)} + \underbrace{\int_0^L F_1(v, p) p dx}_{(5.54)} \\ &\leq C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Usando Young e (5.62) na equação (5.61), teremos a estimativa procurada.

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \rho_1 \int_0^L v_t (\gamma v - p) dx &\leq -\rho_1 \gamma \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \rho_1 \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |p_t|^2 dx \\ &+ \alpha_1 \varepsilon_2 \int_0^L |v_x|^2 dx + C_{\varepsilon_2} \alpha_1 \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \gamma \beta \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ &+ \frac{\delta}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned}$$

Etapa 4: Seja o funcional

$$\mathcal{H}(t) = -\rho_2 l_0 \int_0^L \theta \eta(s) dx, \quad (5.63)$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) &\leq -\frac{\rho_2}{2} l_0 \int_0^L |\theta|^2 dx + \delta l_0 \varepsilon_3 \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{l}{2} l_0 \int_0^L |\theta_x|^2 dx \\ &+ C_3 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 - \frac{\rho_2}{2} C_0 \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x\|^2 ds. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Multiplicando a equação (5.39) por $-\int_0^\infty \xi(s) \eta(s) ds$, integrando em $(0, L)$, concluímos que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(\rho_2 \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta \eta dx ds \right) &= -\rho_2 \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta \eta_t(s) dx ds - l \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L \theta_{xx} \eta(s) dx ds \\ &+ \delta \int_0^\infty \xi(s) \int_0^L v_{xt} \eta(s) dx ds - \int_0^L \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta_{xx} ds \right) \left(\int_0^\infty \xi(s) \eta ds \right) dx, \end{aligned} \quad (5.65)$$

resultando (5.64).

Etapa 5: Definimos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ por:

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \mathcal{F}(t) + N_1\mathcal{G}(t) + N_2\mathcal{H}(t), \quad (5.66)$$

onde N, N_1, N_2 constantes positivas. Então, podemos mostrar que existem as constantes positivas k_1 e k_2 tal que

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t). \quad (5.67)$$

De fato, seja

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| = |\mathcal{F}(t) + N_1\mathcal{G}(t) + N_2\mathcal{H}(t)| \leq k_0 E(t).$$

Então, obtemos (5.67) com $k_1 = N - k_0$ e $k_2 = N + k_0$, tomando $k_0 > 0$ tal que $N - k_0 > 0$.

Segue de (5.41), (5.47), (5.58) e (5.64) para $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq - \left[\frac{\rho_1 \gamma}{2} N_1 - \rho_1 \varepsilon_1 N - \rho_1 - \delta l_0 \varepsilon_3 N_2 \right] \int_0^L |v_t|^2 dx \\ &\quad - \left[lN - \frac{l}{2} l_0 N_2 \right] \int_0^L |\theta_x|^2 dx - \left[\left(\alpha_1 - \frac{\delta}{2} \right) - \alpha_1 \varepsilon_2 N_1 \right] \int_0^L |v_x|^2 dx \\ &\quad - \left[\frac{m}{2} N - \frac{3}{2} \mu - \frac{\rho_1}{2} N_1 \right] \int_0^L |p_t|^2 dx - [\beta - C_2 N_1] \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx \\ &\quad - \left[-\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} N_1 + l_0 \frac{\rho_2}{2} N_2 \right] \int_0^L |\theta|^2 dx + \left[\frac{1}{2} N - \frac{\rho_2}{2} C_0 N_2 \right] \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \\ &\quad + C_3 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Escolhendo $\varepsilon_1 = \frac{1}{4N}$, $\varepsilon_2 = \frac{\delta}{2\alpha_1 N_1}$ e $\varepsilon_3 = \frac{\rho_1}{4\delta l_0 N_2}$, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq (\gamma N_1 - 3) \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |v_t|^2 dx - \left[lN - \left(\frac{ll_0}{2} - \frac{l_0 \rho_2}{2} \right) N_2 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} N_1 \right] \int_0^L |\theta|^2 dx \\ &\quad - (\alpha_1 - \delta) \int_0^L |v_x|^2 dx - \left[\frac{m}{2} N - \frac{3}{2} \mu - \frac{\rho_1}{2} N_1 \right] \int_0^L |p_t|^2 dx \\ &\quad - [\beta - C_2 N_1] \int_0^L |\gamma v_x - p_x|^2 dx + \left[\frac{1}{2} N - \frac{\rho_2}{2} C_0 N_2 \right] \int_0^\infty \xi'(s) \|\eta_x(s)\|^2 ds \\ &\quad + C_3 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \end{aligned}$$

Tomando $N_1 > 3/\gamma$, $\alpha_1 > \delta$, $\beta > C_2 N_1$ e

$N_1 > \max\{\frac{1}{7}(C_4 N_2 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} N_1), \frac{2}{m}(\frac{3\mu}{2} + \frac{\rho_1}{2} N_1), 2(\frac{\rho_2}{2} C_0 N_2 + C_3), k_0\}$, tomando $N_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -N_0 E(t) + C_B (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2). \quad (5.69)$$

Usando (5.67), temos

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\frac{N_0}{k_1} t} + C_B \int_0^t e^{-\frac{N_0}{k_1} (t-s)} (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) ds.$$

Usando (5.67) novamente,

$$E(t) \leq \frac{k_2}{k_1} E(0) e^{-\frac{N_0}{k_1} t} + C_B \int_0^t e^{-\frac{N_0}{k_1} (t-s)} (\|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2) ds. \quad (5.70)$$

Portanto, renomeando as constantes, teremos (5.36). A prova está completa.

Lema 5.5.4. (*Quasi-estabilidade*) *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quasi-estável em qualquer conjunto limitado positivamente invariante $B \subset \mathcal{H}$.*

Prova: Uma vez que sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é definido como operador de solução do problema (5.31), concluímos que (4.49) – (4.50) é válida para $X = [\mathbb{V}]^2$, $Y = L^2(0, L) \times \mathcal{M}$. Além disso, da parte (ii) do Teorema 5.3.1, sabemos que a condição (4.51) também é verdadeira.

Seja $B \subset \mathcal{H}$ um conjunto limitado positivamente invariante com respeito a $S(t)$. Seja $S(t)U^i = (v^i, v_t^i, p^i, p_t^i, \theta^i, \eta^i)$ solução do problema (5.9) – (5.14) nas condições iniciais U^i in B , $i = 1, 2$. Definimos a seminorma

$$n_X(v, p) = \|v\|_{2p}^2 + \|p\|_{2p}^2,$$

onde $(v, p) = (v^1 - v^2, p^1 - p^2)$. Pela imersão compacta $H^1 \hookrightarrow L^{2p}$, temos $n_X(\cdot)$ é compacto em X . De (5.36) resulta

$$\|S(t)U^1 - S(t)U^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b(t) \|U^1 - U^2\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t) \sup_{0 < s < t} [n_X(v(s) - p(s))]^2,$$

onde

$$b(t) = b_0 e^{-\gamma_0 t}, \quad c(t) = C_B \int_0^t e^{-\gamma_0 (t-s)} ds, \quad t > 0.$$

Teremos

$$b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+) \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0.$$

Como $B \subset \mathcal{H}$ é limitado, temos que $c(t)$ é localmente limitado em $[0, \infty)$. Portanto, a desigualdade de estabilização é verificada, isto é, o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quasi-estável em qualquer conjunto limitado positivamente invariante $B \subset \mathcal{H}$. A prova está completa.

Prova do Teorema 5.5.1: Do Teorema 4.4.2 e do Lemma 5.5.4, concluímos o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é assintoticamente regular.

Para qualquer $R > 0$, o conjunto $\Phi_R = \{U \in \mathcal{H} \mid \Phi(U) \leq R\}$, segue de (5.25) que para qualquer $U(t) \in \Phi_R$,

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4(\Phi(U(t))) + 4K \leq 4(R + K),$$

resultando que o conjunto Φ_R é limitado.

Então, usando o Lema 5.5.2 e o Teorema 4.4.3, obtemos que o problema (5.9) – (5.14) tem um atrator global compacto caracterizado por $\mathfrak{A} = \mathbb{M}_+(\mathcal{N})$.

Além disso, do Lema 5.5.4, o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é quase-estável no atrator \mathfrak{A} , então, usando o Teorema 4.4.4, segue que o atrator \mathfrak{A} tem dimensão fractal finita. A prova está completa.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Barbu, V. *Nonlinear Semigroups and differential equations in Banach spaces*. Editura Academici Române, Bucuresti, 1974.
- [2] BRÉZIS, H , *Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, N 5. Notas de Matemática (50). North-Holland Publishing Co. / American Elsevier Publishing Co, Inc., Amsterdam-London/ New York, 1973.
- [3] BARBU, V, *Analysis and Control of Nonlinear Infinite-Dimensional Systems*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993.
- [4] Morris, K. A, and Ozer, A. O, *Modeling and Stabilizability of Voltage-Actuated Piezoelectric Beams with Magnetic Effects*, 2013.
- [5] Ramos, A. J. A and Gonçalves, C. S, L and Neto, S. S. C, *Exponential Stability and Numerical Treatment for Piezoelectric Beams with Magnetic Effect*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2017.
- [6] Martinez, P. and Vancostenoble, J. *Exponential Stability For The Wave Equation With Weak Nonmonotone Damping*.
- [7] Liu, Z and Zheng, S. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*. Chapman and Hall/ CRC, Boca Raton, 1999.
- [8] M. L. Santos, D. S. Almeida and S. M. S. Cordeiro. *Asymptotic Stability for the Porous-elastic System with Nonlinear Localized Damping*, 2017.
- [9] W. Strauss e L. Vazquez, Numerical Solution of a Nonlinear Klein-Gordon Equation, *Jornal of Computational Phisics*. 28 (1974), 271-278.
- [10] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* , Springer-Verlag, New York, 1983.
- [11] Morris, K. A, and Ozer, A. O, *Strong Stabilization of Piezoelectric Beams with Magnetic*

-
- Effects*, In: The Proceeding of 52nd IEEE Conference on Decision e control. (2013), 3014-3019.
- [12] Pohl, D. W. Pohl, *Dynamic Piezoelectric translation devices*, Review of Scientific Instrument 41 (1987), 54-57.
- [13] Pruss, J. , *On the spectrum of C_0 -semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), 847-857.
- [14] Borichev, A. e Tomilov, Y. , *Optimal polynomial decay of function and operator semigroups*, Math. Ann. 347 (2) (2010), 455-478.
- [15] Flávio A. Falção Nascimento, Wenden Charles S. Rodrigues, J. A. Soriano and J. H. Rodrigues. *Decay rates for bresse system with arbitrary nonlinear localized damping*. J. Differential Equations, 255:2267-2290, 2013.
- [16] P. Martinez, *A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping*. Revista Matemática Complutense 12(1), 251-283 (1999).
- [17] S. M. S. Cordeiro, M.L. Santos and C. A. Raposo, *General decay of solution for a Porous-Elastic system with weak nonlinear dissipation* . Poincaré Journal of Analyses and Applications, Vol. 2018(1), 9-23.
- [18] S. A. Messaoud and M. I. Mustafa, *On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation*. Mathematical Methods in the Applied Sciences. (2009); 32: 454-469.
- [19] Ammar-Khodja F, Benabdallah A, Muñoz Rivera JE, Racke R, *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*. Journal of Differential Equations (2009); 194: 82-115.
- [20] Tiersten, H. F. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. Ed. Springer, 1969.
- [21] C. Dafermos. *Asymptotic stability in viscoelasticity*. Arch. Ration. Mech. Anal. 37:297-308, 1970.
- [22] A. Morro M. Fabrizio. *Mathematical problems in linear viscoelasticity*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [23] Grazia Naso M. Rivera, J.E.M. *Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory*. J. Math. Appl., 326:691-707, 2007.
- [24] M. L. Santos R.G.C. Almeida. *Lack of exponential decay of a coupled system of wave equations with memory*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12:1023-1032, 2011.
- [25] A. D. F. Loula, J. R. Hughes and L. P. Franca. *Petrov-Galerkin Formulation of the Ti-*

-
- moshenko Beam Problem*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 63, 115-132 (1987).
- [26] N. M. Newmark. *A Method of Computation for Structural Dynamics*. J. Engrg. Mech. 85, 67-94 (1959).
- [27] T. J. R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dinamic Finite Elements Analysis*. Dover Civil and Mechanical Engineering Series. Dover Publications(2000).
- [28] A. Blanguernon, F. Léné, M. Bernadou. *Active control of a beam using a piezo-ceramic element*. Smart Mater. Struct.: 8(1), 116-124 (1999).
- [29] A. J. A. Ramos, M. M. Freitas, D. S. Almeida Jr., S. S. Jesus and T. R. S. Moura. *Equivalence between exponential stabilization and observability for piezoelectric beams with magnetic effetc*. Z. Angew. Math. Phys: 70:60(2019).
- [30] C. Giorgi, A. Marzocchi and V. Pata, *Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory*, NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl.,5(1998), 333-354.
- [31] C. Giorgi and V. Pata, *Stability of abstract linear thermoelastic systems with memory*, Math. Models Methods Appl. Sci.,11(2001), 627-644.
- [32] B. Feng, *On A Semilinear Timoshenko-Coleman-Gurtin System: Quasi-Stability and Attractors*. Discrete And Continuous Dynamical Systems: Vol.37, N 9(201, pp.4729-4751.
- [33] F. Dell’Oro and V. Pata, *On the Stability of Timoshenko systems with Gurtin-Pipkin Thermal Law*, J. Differential Equations, 257(2014), 523-548.
- [34] I. D. Chueshov and I. Lasiecka, *Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping*. in Mem. Amer. Math. Soc., 195(2008). viii+183pp.
- [35] I. D. Chueshov and I. Lasiecka, *Von Karman Evolution Equations*, Springer Verlag, 2010.
- [36] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [37] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems, An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge University Press, 2001.
- [38] T. F. Ma e R. N. Monteiro, *Singular limit and long-time dynamics of Bresse systems* , preprint, arXiv:1511.06786.
- [39] M.M. Freitas, A.J.A. Ramos, A. Ö. Özer *Long-time dynamics for a fractional piezoelectric*

system with magnetic effects and Fourier's law , Journal of differential Equations, 180(2021), 891-927.

- [40] M. Alves, J. M. Rivera, R. Quintanilha, *Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids* , International Journal of Solids and Structures 46 (7-8)(2009) 1659-1666.