



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

ESTABILIZAÇÕES E ANÁLISE NUMÉRICA PARA SISTEMAS ACOPLADOS DISSIPATIVOS DE EQUAÇÕES DE ONDAS

Renato Fabrício Costa Lobato

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM
Dezembro de 2015

Renato Fabrício Costa Lobato

ESTABILIZAÇÕES E ANÁLISE NUMÉRICA PARA SISTEMAS ACOPLADOS DISSIPATIVOS DE EQUAÇÕES DE ONDAS

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática - PDM da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM
Dezembro de 2015

Lobato, Renato Fabrício Costa, 1980-

Estabilizações e análise numérica para sistemas
acoplados dissipativos de equações de ondas / Renato
Fabrício Costa Lobato. - 2015.

Orientador: Mauro de Lima Santos.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do
Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais,
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Doutorado), Belém, 2015.

1. Equação de onda. 2. Análise numérica. 3.
Sistemas acoplados. 4. Estabilidade exponencial
e polinomial. 5. Diferenças finitas. I. Título.

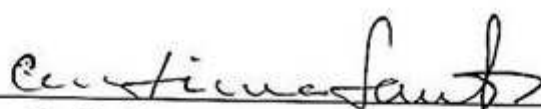
CDD 22. ed. 515.35

Renato Fabrício Costa Lobato

ESTABILIZAÇÕES E ANÁLISE NUMÉRICA PARA SISTEMAS ACOPLADOS DISSIPATIVOS DE EQUAÇÕES DE ONDAS

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em
Matemática - PDM da Universidade Federal do Pará, como um
pré-requisito para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

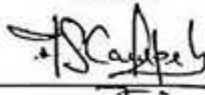
Aprovada em 18 de Dezembro de 2015, por



Prof. Dr. MAURO DE LIMA SANTOS
Presidente



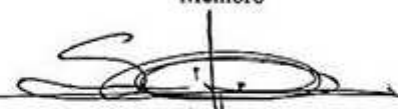
Prof. Dr. DILBERTO DA SILVA ALMEIDA JÚNIOR
Membro



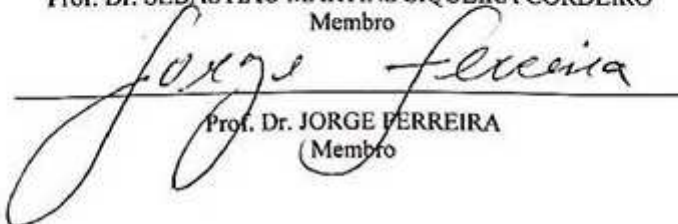
Prof. Dr. ANDERSON DAVID DE SOUZA CAMPELO
Membro



Prof. Dr. ANDERSON DE JESUS ARAUJO RAMOS
Membro



Prof. Dr. SEBASTIÃO MÁRTINS SIQUEIRA CORDEIRO
Membro



Prof. Dr. JORGE FERREIRA
Membro

BELÉM
Dezembro de 2015

A San Giovanni Paolo II

Água de Beber

Eu quis amar mas tive medo
E quis salvar meu coração
Mas o amor sabe um segredo
O medo pode matar o seu coração

Água de beber
Água de beber, camará
Água de beber
Água de beber, camará

Eu nunca fiz coisa tão certa
Entrei pra escola do perdão
A minha casa vive aberta
Abri todas as portas do coração

Água de beber
Água de beber, camará
Água de beber
Água de beber, camará

Eu sempre tive uma certeza
Que só me deu desilusão
É que o amor é uma tristeza
Muita mágoa demais para um coração

Água de beber
Água de beber, camará
Água de beber
Água de beber, camará

Antônio Carlos Jobim / Vinicius de Moraes

“Se eu nascesse de novo e pudesse escolher
mais do que eu sou eu não queira ser”

Luiz Gonzaga

Agradecimentos

Ao decorrer desta empreitada, tive inúmeras dificuldades, todavia quero apenas lembrar-me das vitórias e sucessos alcançados. Para tanto, menciono aqui meus sinceros agradecimentos, para todos que contribuíram sobremaneira a empoderar-me de mais esta conquista em minha vida.

✓ A Deus uno e trino, que da sarça ardente vivifica sua teofania pessoal para comigo, todos os dias de minha vida, mesmo sem que eu mereça.

✓ A Nossa Senhora de Nazaré, padroeira da amazônia, pelas inúmeras benções concebidas.

✓ A meus pais Célio Lobato e Roza Lobato, pela concepção de minha vida e esforços enviados para minha formação.

✓ Ao meu caríssimo irmão Augusto Lobato (pelas batalhas em comum) e família (Byanca, Lucas e Lene).

✓ Aos avós Salomão, Tereza e Dida (indeláveis em meu coração).

✓ A Universidade Federal do Pará.

✓ Ao Programa de Doutorado em Matemática - PDM/UFPA.

✓ Ao Campus Universitário de Abaetetuba - CUBT/UFPA.

✓ Aos amigos de jornada: Adenilson Bonfim, Elany Maciel, Gesson Lima, Lindomar Miranda, Manoel Jeremias dos Santos, Manoel Lucival, Marcos Lima e Marly Anjos.

✓ Aos amigos Andersons: Campelo e Ramos que tiveram uma parcela influente ao final da confecção da Tese.

✓ Ao meu orientador professor **Mauro de Lima Santos** por ter sido o mentor de todo processo de formação no doutorado, pela amizade bacana começada desde 2002, pelas viagens ao Rio de Janeiro. Aqui o agradeço como mestre e amigo.

✓ Ao meu coorientador professor **Dilberto da Silva Almeida Júnior**, por ter sido co-partícipe na formação de doutoramento, pela forte amizade construída entre nós, também começada em 2002. Aqui o agradeço como mestre e amigo.

✓ Ao grande amigo e parceiro de longas jornadas: **Sebastião Martins Siqueira Cordeiro** .

✓ Ao também amigo e grande parceiro, por enfrentamentos e gostos em comum: **Elizardo Fabrício Lima Lucena** .

✓ Aos colegas de trabalho da FACET (Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia) do CUBT/UFPA.

✓ Aos professores **Ducival Carvalho Pereira** (grande amigo e orientador de mestrado) e **Jaime Muñoz Rivera** por ministrarem o verão que me permitiu o ingresso no programa PDM.

✓ Ao professor **Jorge Ferreira**, amigo de longas datas, que se disponibilizou a participar da banca e é sempre presente.

✓ Ao homem que me trouxe ao mundo Dr. Renato Chalu Pacheco.

✓ Enfim, a todos que de forma positiva, tiveram alguma contribuição no decorrer árduo do processo de doutoramento.

RESUMO

Lobato, Renato Fabrício Costa; Santos, Mauro de Lima **ESTABILIZAÇÕES E ANÁLISE NUMÉRICA PARA SISTEMAS ACOPLADOS DISSIPATIVOS DE EQUAÇÕES DE ONDAS**. Belém do Pará, 2015. 92p. Tese de Doutorado - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática, Universidade Federal do Pará.

Neste trabalho, analisamos dois sistemas de equações diferenciais de ondas acopladas, sob o ponto de vista da existência e unicidade. Quanto a estabilização, no primeiro mostramos a perda de decaimento exponencial e consequente estabilidade polinomial com taxa ótima. Também será feita análise numérica, via discretização total, para o primeiro sistema. Quanto ao segundo, mostramos ainda a estabilização exponencial.

Palavras-chave: sistema acoplado, existência, unicidade, estabilidade exponencial, estabilidade polinomial ótima, discretização total, diferenças finitas.

ABSTRACT

Lobato, Renato Fabrício Costa; Santos, Mauro de Lima **STABILIZATIONS AND NUMERICAL ANALYSIS FOR COUPLED SYSTEMS OF DISSIPATIVES WAVES EQUATIONS**. Belém do Pará, 2015. 92p. Doctoral Thesis - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática, Universidade Federal do Pará.

In this work, we analyze two systems of differential equations of coupled wave equations from the point of view of existence and uniqueness. The stabilization in the first show the loss of exponential decay and consequent polynomial stability with optimal rate. Also numerical analysis will be done via the total discretization for the first system. The second, still show the exponential stabilization.

keywords: coupled system, existence, uniqueness, exponential stability, optimal stability polynomial, full discretization, finite differences.

Sumário

1	Sistema Acoplado Fracamente Dissipativo	17
1.1	Apresentação do Problema	17
1.1.1	Funcional de Energia	17
1.2	Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares	19
1.2.1	O Problema de Cauchy (PC)	20
1.2.2	Espaço de Fase	20
1.2.3	Domínio do Operador	21
1.2.4	Produto Interno	22
1.3	Existência e Unicidade de Soluções	25
1.4	Decaimento Polinomial Ótimo	32
2	Sistema Acoplado Unidimensional	44
2.1	Apresentação do Problema	44
2.2	Existência e Unicidade de Soluções	46
2.2.1	Funcional de Energia	46
2.3	Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares	50
2.3.1	Problema de Cauchy	50
2.3.2	Construção do Espaço de Fase	51
2.3.3	Domínio do Operador	52
2.3.4	Produto Interno	53
2.4	Decaimento Exponencial	64
2.4.1	Técnicas de Semigrupos	64
3	Abordagem Numérica	70
3.1	Considerações Gerais	70
3.2	Apresentação do Problema	70
3.2.1	Funcional de Energia	71
3.3	Método Explícito de Integração Numérica	73
3.3.1	Energia Totalmente Discreta	74
3.4	Experimentos Computacionais	78
	Referências Bibliográficas	84

Introdução

Considerações Gerais e Motivações

No presente trabalho pretende-se em estudar a existência, a unicidade, bem como o comportamento assintótico para dois sistemas hiperbólicos acoplados de equações de ondas. Também faremos a análise numérica, via discretização total, para o primeiro sistema, em sua versão unidimensional.

Quanto ao primeiro sistema, temos duas equações de ondas acopladas, com mecanismo de dissipação em somente uma equação. Na literatura, existem inúmeros trabalhos nesta direção. O texto, toma com principal referência (para o primeiro sistema) o trabalho de **Fatiha Alabau Boussoira, P. Cannarsa e V. Komornik**, intitulado “Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution” de 2002, publicado em ***Jornal of Evolution Equation***. Fatiha e seus colaboradores neste artigo, aborda os seguintes fatos:

i) A conhecida equação de onda, em domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, que descreve um sistema conservativo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v &= 0 & em & \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ v &= 0 & sobre & \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) A mesma equação, acrescida de um amortecimento (mecanismo de dissipação) descreve um sistema exponencialmente estável.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 & em & \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ u &= 0 & sobre & \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Desta maneira, a questão natural que surge é: O que ocorre, quanto a estabilidade do sistema ao acoplarmos **i)** e **ii)**, através dos termos de ordem nula? Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha v &= 0 & em & \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + \alpha u &= 0 & em & \quad \Omega \times \mathbb{R} \\ u = v &= 0 & sobre & \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este problema é motivado por um análogo em equações diferenciais ordinárias para osciladores acoplados e tem aplicação potencial no isolamento de objetos, no que diz respeito a perturbações externas. Como um exemplo em engenharia, utiliza-se material semelhante a borracha para absorver estruturas de vibração ou escudo de vibração.

O segundo capítulo desta tese estuda tal sistema, onde além da existência e unicidade temos a perda de estabilidade exponencial e consequente decaimento polinomial. O grande melhoramento aqui feito ao trabalho de Fatiha e colaboradores e a aplicação do “**Teorema de Borichev e Tomilov**”. Desta maneira, mostramos que o decaimento possui taxa ótima e por fim, fazemos uma análise numérica e computacional, via discretização total.

Vale frisar que o segundo capítulo da tese, gerou um artigo intitulado “**Optimal Polynomial Decay to Coupled Wave Equations and Its Numerical Properties**”, de 2014, dos autores R. F. C. Lobato, S.M. S. Cordeiro, M. L. Santos, and D. S. Almeida Júnior. Publicado em Journal of Applied Mathematics. Este artigo, melhora: **M. L. Santos, Rocha, M. P. C., Gomes, S. C., Polynomial Stability of a coupled system of waves equations weakly dissipative.** Applicable Analysis, v.86, 1293 - 1302, (2007), na questão da otimalidade, para o decaimento algébrico.

Veja-se ainda, que na literatura há muitos resultados associados à sistemas de equações de ondas acopladas com amortecimento fraco agindo em apenas uma das equações. Podemos por exemplo citar: **Fatiha Alabau Boussoira, Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés.** C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015-1020, (1999). Aqui a autora mostra que a energia associada aos sistemas de equações de ondas acoplados, decaem fracamente de forma polinomial com taxa explicita. Os modelos estudados foram:

I - Estabilização na Fronteira de duas Equações de Ondas Acopladas com

Mesmas Velocidades

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - \Delta u + \alpha v &= 0 & em & \quad \Omega \times]0, \infty[\\
 v_{tt} - \Delta v + \alpha u &= 0 & em & \quad \Omega \times]0, \infty[\\
 u &= v & sobre & \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\
 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + l u_t &= 0; v = 0 & sobre & \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[.
 \end{aligned}$$

II - Estabilização na Fronteira de duas Placas de Kirchhoff

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - \Delta^2 u + \alpha v &= 0 & em & \quad \Omega \times]0, \infty[\\
 v_{tt} - \Delta^2 v + \alpha u &= 0 & em & \quad \Omega \times]0, \infty[\\
 u = v = 0 = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} & & sobre & \quad \Sigma = \Gamma \times]0, \infty[.
 \end{aligned}$$

III - Estabilização na Fronteira de duas Equações de Ondas Acopladas com Velocidades Diferentes

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - c_1 \Delta u + \alpha B v &= 0 & em & \quad \Omega \times]0, \infty[\\
 v_{tt} - c_2 \Delta v + \alpha B^* u &= 0 & em & \quad \Omega \times]0, \infty[\\
 u &= v & sobre & \quad \Sigma_0 = \Gamma_0 \times]0, \infty[\\
 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u + l u_t &= 0; v = 0 & sobre & \quad \Sigma_1 = \Gamma_1 \times]0, \infty[.
 \end{aligned}$$

À guisa da motivação, consideramos a equação hiperbólica linear de segunda ordem de coeficientes constantes e inhomogênea.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a u + b \frac{\partial u}{\partial t} + d \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, t), \quad (1)$$

com $x, t \in \mathbb{R}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias mas com $c > 0$. Essa equação generaliza a equação de ondas em uma dimensão e inclui alguns casos particulares de interesse,

como a equação do telégrafo (caso $d = 0$), a equação de ondas amortecidas (caso $a = d = 0$) (também conhecida como equação de difusão relativística para $b = c^2/D$, com $D > 0$ sendo a constante de difusão) e a equação de Klein-Gordon (caso $b = d = 0, a \geq 0$). A função F , não depende de u ou suas derivadas e representa uma força externa agindo em cada ponto x do sistema em cada instante t . Para ilustrar, consideramos o problema de Cauchy no qual são dadas as condições iniciais e de bordo

$$u(x, 0) = f(x) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < \ell \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3)$$

Uma aplicação concreta para equação (1) é dada por

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (4)$$

$$a = d = F(x, t) = 0, \quad e \quad \gamma = \frac{b}{c^2}. \quad (5)$$

Temos um modelo matemático para vibrações em uma membrana circular em duas dimensões, com amortecimento, onde $\gamma > 0$, no interior de um disco de raio R , com $|u(\rho, \varphi, t)| < \infty$, com condições de contorno de Dirichlet $u(R, \varphi, t) = 0$ e com as condições iniciais

$$u(\rho, \varphi, 0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \varphi, 0) = \vartheta_0(\rho), \quad (6)$$

onde

$$\vartheta_0(\rho) = \begin{cases} V, & 0 \leq \rho < R < R_0 \\ 0, & R_0 \leq \rho < R. \end{cases} \quad (7)$$

Acima, as coordenadas ρ e φ referem-se ao sistema de coordenadas polares cuja origem coincide com o centro do disco de raio R .

Por fim, vamos enfatizar o artigo: **M. L. Santos and R. G. C. Almeida**, *Lack of exponential decay of a coupled system of wave equations with memory*. Nonlinear Analysis:

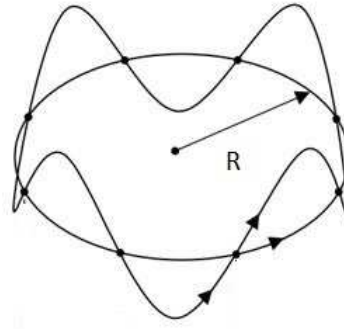


Figura 1: Modelo de Vibração em Uma Membrana Circular

Real World Applications, 12:1023 - 1032, 2011. Neste trabalho, os autores estudaram o seguinte sistema de equações de ondas com termo de memória:

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 u - \Delta u + \int_0^\infty g(s) \Delta u(t-s) ds + \alpha v &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\
 \partial_t^2 v - \Delta v + \alpha u &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\
 u = v &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \\
 (u, \partial_t u)(x, 0) &= (u_0, u_1) \quad \text{em } \Omega \\
 (v, \partial_t v)(x, 0) &= (v_0, v_1) \quad \text{em } \Omega.
 \end{aligned}$$

O modelo em questão, é usado para descrever a evolução de um sistema que é constituído por duas membranas elásticas, sujeitas a uma força elástica que atrai uma membrana para a outra com coeficiente $\alpha > 0$. (acoplamento). O sistema, pode modelar Fisicamente:

O fenômeno de cargas e campos num capacitor com dielétrico. As cargas livres $\pm Q_0$ nos eletrodos, são as fontes do campo E_0 . As cargas de polarização $\pm Q_P$ na superfície do dielétrico são as fontes do campo E_P . E é o campo resultante no interior do capacitor que determina a polarização P do dielétrico.

A constante E_0 , indica na figura, o que seria o campo elétrico resultante se o dielétrico não estivesse presente. Este campo é praticamente uniforme em todo o interior do capacitor, e só varia significativamente próximo das bordas.

Temos portanto duas membranas interagindo entre si, pelo acoplamento através da constante α .

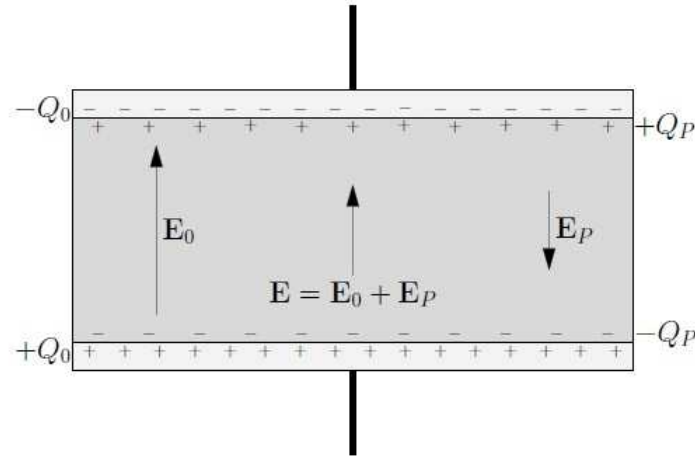


Figura 2: Cargas e Campos num Capacitor com Dielétrico

O principal problema neste tipo de equação está no seu caráter não-local, devido à presença do termo de memória.

Quanto ao segundo sistema, temos por referência, os trabalhos de **Mahmoud Najafi**, os quais tratam de sistemas de equações de ondas acoplados em paralelo. São eles:

a) Stabilizability of Coupled Wave Equations in Parallel Under Various Boundary Conditions

Artigo de M. Najafi, G. R. Sarhangi e H. Wang, 1997, publicado em IEEE Transactions on Automatic Control

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \alpha(v - u) \quad em \quad \Omega \times]0, \infty[\\ v_{tt} - c^2 v_{xx} &= \alpha(u - v) \quad em \quad \Omega \times]0, \infty[. \end{aligned}$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} (u(x, 0), v(x, 0)) &= (u_0, v_0) \quad em \quad \Omega \\ (u_t(x, 0), v_t(x, 0)) &= (u_1, v_1) \quad em \quad \Omega. \end{aligned}$$

e três casos de condições de bordo

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad c^2 u_x(1, t) = -\beta_1 u_t(1, t) \\ v(0, t) &= 0, \quad c^2 v_x(1, t) = -\beta_2 v_t(1, t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0 \\ v(0, t) &= 0, \quad c^2 v_x(1, t) = -\beta_2 v_t(1, t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = 0 \\ v(0, t) &= 0, \quad c^2 v_x(1, t) = -\beta_2 v_t(1, t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Aqui, t e x são as variáveis de tempo e espaço, respectivamente. Também, u e v são os deslocamentos de duas cordas vibrantes, medidos de suas posições de equilíbrio. As molas distribuídas que ligam a duas cordas vibrantes são os termos de acoplamento, ou seja, $\pm\alpha(v - u)$. As ondas se propagam com velocidade constante c . Os coeficientes de amortecimento $\beta_i > 0$, ($i = 1, 2$) são os parâmetros de controle de fronteira. Estes parâmetros desempenham importantes papéis no comportamento físico do sistema.

Este problema é motivado por um problema análogo em equações diferenciais para osciladores acoplados e tem potencial de aplicação no isolamento de objetos a partir de perturbações externas. Como um exemplo em engenharia, materiais de borracha ou que se assemelham a borracha, em geral são usados para absorver vibrações ou como protetor de estruturas de vibração. Como aproximação, estruturas tais como vigas ou placas coladas com borracha ou similar materiais, conduzirá a equações semelhantes ao sistema em questão.

O artigo mostra que a taxa de convergência da solução é uniformemente exponencial, desde que os controladores de velocidade nas duas equações sejam mantidos, caso contrário, o sistema perde estabilidade.

b) Study of Exponential Stability of Coupled Waves Systems Via Distributed Stabilizer

Artigo de M. Najafi, 2001, publicado em International Journal of Mathematics and Math-

emational Sciences

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} &= \alpha(v - u) + \beta(v_t - u_t) \quad em \quad \Omega_1 \times]0, \infty[\\ v_{tt} - c_2^2 v_{xx} &= \alpha(u - v) + \beta(u_t - v_t) \quad em \quad \Omega_2 \times]0, \infty[. \end{aligned}$$

com condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} u(0) &= f_1, u_t(0) = g_1 \quad em \quad \Omega \\ v(0) &= f_2, v_t(0) = g_2 \quad em \quad \Omega. \end{aligned}$$

São empregadas duas condições de bordo

(1) Dirichlet e Neumann para primeira equação e Dirichlet para segunda equação

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u_x(1, 0) = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega_1 \times (0, +\infty) \\ v = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega_2 \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

(2) Dirichlet para o sistema

$$u = v = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \times (0, +\infty).$$

Aqui c_1 e c_2 representam as velocidades de propagação das ondas.

Neste artigo, estuda-se a estabilidade exponencial, caso $c_1 = c_2$, caso contrário ($c_1 \neq c_2$) ocorre a perda de estabilidade.

Para formulação do Segundo Problema da Tese, também utilizou-se a lei de Fourier-Cattaneo. A lei de Fourier implica no fato de que uma perturbação térmica em qualquer ponto de um corpo será instantaneamente sentida, mas de forma desigual em todos os outros pontos do refrido corpo. Em outras palavras, a lei de Fourier prevê que os sinais térmicos se propagam com velocidade infinita, o que na prática não acontece, configurando assim o que se conhece como paradoxo da lei de Fourier.

Várias modificações da equação da lei de Fourier tem sido propostas afim de “corrigir” o paradoxo citado. A principal delas é lei de Maxwell-Cattaneo.

Organização da Tese

No primeiro capítulo, apresentamos um sistema acoplado de equações da onda, com um único mecanismo de dissipação, presente apenas na primeira equação com acoplamento nos termos de ordem nula. Utilizando técnicas do cenário de semigrupo de operadores lineares, analisamos a existência e unicidade de soluções. Definimos a energia do modelo dissipativo, sendo ela decrescente e levantamos as questões relacionadas a falta de estabilidade exponencial (mais precisamente, o teorema de estabilização uniforme de Gearhart-Herbst-Pruss-Huang) e consequente decaimento polinomial com taxa ótima (Teorema de Tomilov Borichev).

No segundo capítulo, apresentamos um sistema acoplado de equações de ondas em paralelo do tipo estudado por Najafi [21], onde se tem amortecimento viscoso, acrescido da lei de fourier-cattaneo. Utilizando técnicas do cenário de semigrupo de operadores lineares, analisamos a existência e unicidade de soluções. Definimos a energia do modelo dissipativo, sendo ela decrescente e levantamos as questões relacionadas a estabilidade exponencial.

Finalmente no terceiro e último capítulo, estudamos o sistema do primeiro capítulo, porém em sua versão unidimensional. Fazemos um estudo numérico, através da discretização total. Também são feitos experimentos computacionais para avaliar o comportamento da energia, bem como das soluções.

Capítulo 1

Sistema Acoplado Fracamente Dissipativo

1.1 Apresentação do Problema

No que se segue, apresentamos um sistema acoplado de equações diferenciais parciais de equações da onda, fracamente dissipativo, uma vez que o mecanismo de dissipação, ocorre apenas na primeira equação. O acoplamento se dá através dos termos de ordem nula. Vejamos.

$$\partial_t^2 u - \Delta u + \partial_t u + \alpha v = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \quad (1.1)$$

$$\partial_t^2 v - \Delta v + \alpha u = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, \infty) \quad (1.2)$$

$$u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty) \quad (1.3)$$

$$(u, \partial_t u)(x, 0) = (u_0, u_1) \quad \text{em } \Omega \quad (1.4)$$

$$(v, \partial_t v)(x, 0) = (v_0, v_1) \quad \text{em } \Omega. \quad (1.5)$$

Aqui Ω representa uma parte aberta e limitada do $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave Γ , onde α é uma constante real positiva, suficientemente pequena.

1.1.1 Funcional de Energia

Proposição 1.1. *A Energia $E(t)$ associada ao sistema (1.1) - (1.5) é dada por:*

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx, \quad (1.6)$$

satisfazendo,

$$\frac{d}{dt}E(t) = - \int_{\Omega} u_t^2 dx \leq 0. \quad (1.7)$$

Demonstração. Multiplicamos as equações (1.1) e (1.2) respectivamente por u_t e v_t . Ao obtido, integramos em Ω . Isto nos dá:

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t dx - \int_{\Omega} \Delta u u_t dx + \int_{\Omega} u_t u_t dx + \alpha \int_{\Omega} v u_t dx = 0 \quad (1.8)$$

$$\int_{\Omega} v_{tt}v_t dx - \int_{\Omega} \Delta v v_t dx + \alpha \int_{\Omega} u v_t dx = 0. \quad (1.9)$$

Adicionando (1.8) e (1.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{tt}u_t dx + \int_{\Omega} v_{tt}v_t dx - \int_{\Omega} (\Delta u u_t + \Delta v v_t) dx + \int_{\Omega} u_t u_t dx \\ + \alpha \int_{\Omega} (u v_t + v u_t) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Aplicando regras derivacionais de produto interno a (1.10), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_t^2 dx - \int_{\Omega} (\Delta u u_t + \Delta v v_t) dx + \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\ + \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u v dx = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Agora usamos em (1.11) a Primeira Identidade de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} S. \quad (1.12)$$

Isto nos dá

$$- \int_{\Omega} (\Delta u u_t + \Delta v v_t) dx = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla u_t + \nabla v \nabla v_t) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx. \quad (1.13)$$

Aplicando (1.13) a (1.11) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ + \alpha \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv dx = - \int_{\Omega} |u_t|^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Definimos agora:

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx, \quad (1.15)$$

como sendo a energia associada ao sistema (1.1) - (1.5).

De (1.14) e (1.15), segue-se que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_{\Omega} |u_t|^2 dx. \quad (1.16)$$

Agora, veja que, ao integrar (1.16) de 0 a t , tem-se:

$$E(t) = - \int_0^t \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt + E(0). \quad (1.17)$$

Portanto a energia é decrescente, isto é

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (1.18)$$

Desta forma, verifica-se que sistema é dissipativo.

□

1.2 Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares

Nesta seção, mostramos a existência e unicidade de solução do sistema (1.1)-(1.5). A priori, obtemos o Cenário de Semigrupo, provamos que o operador $\mathcal{A}$ desse sistema é dissipativo. Por fim, montamos um problema variacional, e obtemos o principal resultado desta seção, usando o Lema de Lax-Milgram, ou seja, provamos a existência e unicidade.

1.2.1 O Problema de Cauchy (PC)

Vamos agora reescrever (1.1)-(1.5), como um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0,\end{aligned}\tag{PC}$$

aqui denominado Problema de Valor Inicial ou Problema de Cauchy (**PC**).

Para tanto, consideramos $\varphi = u_t$ e $\psi = v_t$ e os vetores:

$$U = (u, \varphi, v, \psi)^T, U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1)^T \text{ e } U_t = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T.$$

A fim de satisfazer o **PC**, temos que

$$\frac{dU}{dt} = U_t = \begin{pmatrix} \varphi \\ \Delta u - \varphi - \alpha v \\ \psi \\ \Delta v - \alpha u \end{pmatrix} = \mathcal{A}U = \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \end{pmatrix}.\tag{1.19}$$

Veja que, de (1.19), obtemos:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & Id & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \Delta & -Id & -\alpha Id & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & Id \\ -\alpha Id & \mathcal{O} & \Delta & \mathcal{O} \end{pmatrix}.\tag{1.20}$$

Sendo $\mathcal{O}$, Id , e Δ respectivamente os operadores nulo, identidade e Laplaciano.

1.2.2 Espaço de Fase

A fim de se determinar o Espaço de Fase $\mathcal{H}$ é necessária uma avaliação sistemática da energia associada ao sistema em questão, com suas condições de bordo. Vejamos:

Da proposição (1.1), segue que $u_t, v_t, \nabla u, \nabla v \in L^2(\Omega)$.

Sendo Ω um aberto, limitado do $\mathbb{R}^n$, decorre de Poincaré-Friedrichs, que em $H_0^1(\Omega)$ a norma induzida por $H^1(\Omega)$ é equivalente a:

$$\|u\|^2 = |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Como $|\nabla u|, |\nabla v| \in L^2(\Omega)$ e $u = v = 0$ sobre Γ segue-se que: $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Desta maneira, considerando $U = (u, u_t, v, v_t)^T$, então:

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

1.2.3 Domínio do Operador

Por definição, o domínio do Operador Elíptico $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$$

Desta feita, temos então para $U = (u, \varphi, v, \psi)^T$, que

$$\varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{1.21}$$

$$(\Delta u - u_t - \alpha v) \in L^2(\Omega) \tag{1.22}$$

$$\psi \in H_0^1(\Omega) \tag{1.23}$$

$$(\Delta v - \alpha u) \in L^2(\Omega). \tag{1.24}$$

Usando o fato de que

$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e analisando as expressões: (1.21)-(1.24)

Segue que: $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$

Assim sendo, vem que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega). \tag{1.25}$$

1.2.4 Produto Interno

Sejam $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ e $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ vetores de $\mathcal{H}$. Consideramos a forma bilinear, no Espaço Hilbertiano $\mathcal{H}$.

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} [\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + u_2 v_2 + \nabla u_3 \cdot \nabla v_3 + u_4 v_4 + \alpha(u_1 v_3 + u_3 v_1)] dx. \quad (1.26)$$

A fim de que (1.26) defina o produto interno entre U e V , precisamos mostrar que é uma forma positiva definida, isto é,

$$\langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

para α suficientemente pequeno.

No que se segue, usaremos respectivamente as desigualdades de Young e Poincaré.

$$\begin{aligned} \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2 + \alpha(u_1 u_3 + u_3 u_1)] dx \\ &\implies \\ \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} &\geq \int_{\Omega} \left[|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2 - 2\alpha \left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{u_3^2}{2} \right) \right] dx \\ &\implies \\ \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} &\geq \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2 - \alpha(u_1^2 + u_3^2)] dx \\ &\implies \\ \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} &\geq \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2 - \alpha c_p (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_3|^2)] dx \\ &\implies \\ \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} &\geq \int_{\Omega} [(1 - \alpha c_p) |\nabla u_1|^2 + u_2^2 + (1 - \alpha c_p) |\nabla u_3|^2 + u_4^2] dx \end{aligned}$$

Desta maneira, devemos impor $(1 - \alpha c_p) > 0 \implies \alpha < \frac{1}{c_p}$.

Portanto, a fim de que (1.26) seja um produto interno, devemos ter $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{c_p} \right[$, onde $c_p = c_p(\text{med}(\Omega))$ é a constante de Poincaré.

Agora, como $\|U\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle U, U \rangle_{\mathcal{H}}}$, em um espaço hilbertiano, então definimos a seguinte norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}} := \left(\int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2 + 2\alpha u_1 u_3] dx \right)^{1/2} \quad (1.27)$$

Observação 1.1. *Note que, podemos obter uma norma equivalente. Para tanto, aplicando Young a (1.27), obtemos*

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \int_{\Omega} \left[|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2 + 2\alpha \left(\frac{u_1^2}{2} + \frac{u_3^2}{2} \right) \right] dx$$

Agora aplicamos ao obtido, a desigualdade de Poincaré. Daí então,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \int_{\Omega} \left[|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2 + \alpha c_p (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_3|^2) \right] dx$$

Isto é,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \int_{\Omega} \left[(1 + \alpha c_p) |\nabla u_1|^2 + u_2^2 + (1 + \alpha c_p) |\nabla u_3|^2 + u_4^2 \right] dx \quad (1.28)$$

Agora, uma vez que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} \geq \int_{\Omega} [(1 - \alpha c_p) |\nabla u_1|^2 + u_2^2 + (1 - \alpha c_p) |\nabla u_3|^2 + u_4^2] dx$$

Então de (1.28) segue que,

$$\zeta_1 \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2] dx \leq \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \zeta_2 \int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2] dx.$$

onde $\zeta_1 = \min\{1, 1 - \alpha c_p\}$ e $\zeta_2 = \max\{1, 1 + \alpha c_p\}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{1}{c_p}\right[$.

Desta maneira, obtemos a seguinte norma equivalente

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbf{H}} = \sqrt{\int_{\Omega} [|\nabla u_1|^2 + u_2^2 + |\nabla u_3|^2 + u_4^2] dx}. \quad (1.29)$$

Teorema 1.1. *O operador Elíptico $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Demonstração. Com efeito, pois considerando $U = (u, \varphi, v, \psi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tem-se:

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi \\ \Delta u - \varphi - \alpha v \\ \psi \\ \Delta v - \alpha u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Assim sendo, pela Primeira Identidade de Green (1.12), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} [\nabla \varphi \nabla u + (\Delta u - \varphi - \alpha v)\varphi + \nabla \psi \nabla v + (\Delta v - \alpha u)\psi] dx \\ &+ \int_{\Omega} [\alpha \varphi v + \alpha \psi u] \\ &= \int_{\Omega} [\nabla \varphi \nabla u + \varphi \Delta u - \varphi \varphi - \alpha v \varphi + \nabla \psi \nabla v + \psi \Delta v - \alpha u \psi] dx \\ &+ \int_{\Omega} [\alpha \varphi v + \alpha \psi u] \\ &= \int_{\Omega} [-\varphi \varphi - \alpha v \varphi - \alpha u \psi + \alpha \varphi v + \alpha \psi u] dx \end{aligned}$$

Segue então que,

$$\Re \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \leq 0, \quad (1.30)$$

de onde segue, que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Além do que, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

□

1.3 Existência e Unicidade de Soluções

Teorema 1.2. *O operador Elíptico $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço Hilbertiano $\mathcal{H}$. Denotamos esse semigrupo por $T(t) := e^{\mathcal{A}t}$*

Demonstração. Pelo Teorema de Lumer-Phillips (Pazy [3]), basta mostrar que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$, definido por

$$\varrho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Devemos portanto assegurar que $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador limitado em $\mathcal{H}$. Deste modo, consideremos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$, queremos encontrar

$$U = (u, \varphi, v, \psi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \text{ que satisfaça a seguinte equação resolvente}$$

$$(\lambda I - \mathcal{A}U) = F \quad \text{com} \quad \lambda = 0.$$

Isto é,

$$\mathcal{A}U = -F.$$

Ou ainda,

$$-\mathcal{A}(u, \varphi, v, \psi)^T = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T.$$

Temos então o seguinte sistema

$$\varphi = -f_1 \in H_0^1(\Omega) \tag{1.31}$$

$$\Delta u - \varphi - \alpha v = -f_2 \in L^2(\Omega) \tag{1.32}$$

$$\psi = -f_3 \in H_0^1(\Omega) \tag{1.33}$$

$$\Delta v - \alpha u = -f_4 \in L^2(\Omega). \tag{1.34}$$

Assim, obtemos o seguinte problema elíptico

$$\Delta u - \alpha v = -f_1 - f_2 \quad (1.35)$$

$$\Delta v - \alpha u = -f_4 \quad (1.36)$$

Nosso propósito agora, é formular um problema variacional.

Para tanto, multiplicamos (1.35) e (1.36) respectivamente por η e ν e integramos em Ω .

$$\int_{\Omega} (\Delta u - \alpha v) \eta dx = \int_{\Omega} (-f_1 - f_2) \eta dx \quad (1.37)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta v - \alpha u) \nu dx = \int_{\Omega} (-f_4) \nu dx. \quad (1.38)$$

Adicionando (1.37) e (1.38), nos dá

$$\int_{\Omega} \eta \Delta u dx - \int_{\Omega} \alpha v \eta dx + \int_{\Omega} \nu \Delta v dx - \int_{\Omega} \alpha u \nu dx = \int_{\Omega} [(-f_1 - f_2) \eta + (-f_4) \nu] dx. \quad (1.39)$$

Ou de forma equivalente

$$- \int_{\Omega} \eta \Delta u dx + \int_{\Omega} \alpha v \eta dx - \int_{\Omega} \nu \Delta v dx + \int_{\Omega} \alpha u \nu dx = \int_{\Omega} [f_1 \eta + f_2 \eta + f_4 \nu] dx. \quad (1.40)$$

Agora, aplicando-se a Primeira Identidade de Green (1.12) a (1.40), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \eta \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla \nu \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} (u \nu + v \eta) dx = \int_{\Omega} [f_1 \eta + f_2 \eta + f_4 \nu] dx. \quad (1.41)$$

Vamos aplicar o Lema de Lax-Milgram, ao Problema Variacional. Para tanto, vamos considerar o funcional linear e contínuo (mostramos) $f = f(f_1, f_2, f_3, f_4)$, dado por:

$$f = \int_{\Omega} [f_1 \eta + f_2 \eta + f_4 \nu] dx. \quad (1.42)$$

E a formar bilinear, contínua e coerciva (verificamos). Dada por:

$$a((u, v), (\eta, \nu)) = \int_{\Omega} \nabla \eta \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla \nu \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} (u \nu + v \eta) dx. \quad (1.43)$$

Temos então o seguinte problema variacional:

Determinar $(u, v) \in E$, onde $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Munido com a norma:

$$\|\Phi\|_E^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + 2\alpha \int_{\Omega} u v dx, \quad (1.44)$$

desde que $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{c_p} \right]$, onde c_p é a constante de Poincaré.

E tal que, para $\Phi = (u, v)$ e $\Psi = (\eta, \nu)$ em E , a forma

$$a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a(\Phi, \Psi) = \int_{\Omega} \nabla \eta \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla \nu \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} (u \nu + v \eta) dx, \quad (1.45)$$

é bilinear, contínua e coerciva no espaço hilbertiano $\Pi = E \times E$.

Com efeito,

i) $a(\Phi, \Psi)$ é Bilinear

Segue trivialmente da linearidade da integral.

ii) $a(\Phi, \Psi)$ é Contínua

Aplicamos a Desigualdade Triangular.

$$\begin{aligned}
 |a(\Phi, \Psi)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla \eta \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla \nu \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} (u\nu + v\eta) dx \right| \\
 &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla \eta \nabla u dx \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla \nu \nabla v dx \right| + \alpha \left| \int_{\Omega} (u\nu + v\eta) dx \right|.
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Agora, aplicando desigualdade de Cauchy-Schwarz a (1.46), obtemos:

$$\begin{aligned}
 |a(\Phi, \Psi)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\eta| dx + \int_{\Omega} |\nabla v| |\nu| dx + \alpha \int_{\Omega} |u| |\nu| dx + \alpha \int_{\Omega} |v| |\eta| dx \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\quad + \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \nu|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\quad + \alpha \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\nu|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\quad + \alpha \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\eta|^2 dx \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
 |a(\Phi, \Psi)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\eta| dx + \int_{\Omega} |\nabla v| |\nu| dx + \alpha \int_{\Omega} |u| |\nu| dx + \alpha \int_{\Omega} |v| |\eta| dx \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla \nu|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\quad + \left(\alpha^2 \int_{\Omega} |u|^2 dx \int_{\Omega} |\nu|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\alpha^2 \int_{\Omega} |v|^2 dx \int_{\Omega} |\eta|^2 dx \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Agora, utilizamos a seguinte desigualdade elementar:

$$\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} \leq n \sqrt{a_1 + \cdots + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isto nos dá,

$$\begin{aligned}
|a(\Phi, \Psi)| \leq & 4 \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx \right) + \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla \nu|^2 dx \right) \right. \\
& \left. + \left(\alpha^2 \int_{\Omega} |u|^2 dx \int_{\Omega} |\nu|^2 dx \right) + \left(\alpha^2 \int_{\Omega} |v|^2 dx \int_{\Omega} |\eta|^2 dx \right) \right]^{1/2}.
\end{aligned} \quad (1.49)$$

E por fim,

$$\begin{aligned}
|a(\Phi, \Psi)| \leq & 4 \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + 2\alpha \int_{\Omega} uv dx \right)^{1/2} \\
& \times \left(\int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \nu|^2 dx + 2\alpha \int_{\Omega} \eta \nu dx \right)^{1/2}.
\end{aligned} \quad (1.50)$$

Assim,

$$|a(\Phi, \Psi)| \leq 4 \|\Phi\|_E \|\Psi\|_E. \quad (1.51)$$

iii) $a(\Phi, \Psi)$ é **Coerciva**

De fato, posto que

$$\begin{aligned}
a(\Phi, \Phi) = a((u, v), (u, v)) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + 2\alpha \int_{\Omega} uv dx \\
&= \|\Phi\|_E^2.
\end{aligned} \quad (1.52)$$

Assim,

$$a(\Phi, \Phi) \geq 1 \cdot \|\Phi\|_E^2.$$

Agora, mostramos que f (1.42) é uma forma linear e contínua

iv) $f(\eta, \nu)$ é **Linear**

Segue trivialmente da linearidade da integral.

v) $f(\eta, \nu)$ é Contínua

De fato, pois para $\Psi = (\eta, \nu)$, tem-se das desigualdades: Integral, Triangular, de Hölder, Poincaré e Elementar, que:

$$\begin{aligned}
 |f(\Psi)| &= \left| \int_{\Omega} [f_1\eta + f_2\eta + f_4\nu] dx \right| \\
 &\leq \int_{\Omega} |f_1||\eta| dx + \int_{\Omega} |f_2||\eta| dx + \int_{\Omega} |f_4||\nu| dx \\
 &\leq \|f_1\| \|\eta\| + \|f_2\| \|\eta\| + \|f_4\| \|\nu\| \\
 &\leq C_1 \|f_1\| \|\nabla\eta\| + C_2 \|f_2\| \|\nabla\eta\| + C_3 \|f_4\| \|\nabla\nu\| \\
 &\leq (C_1 \|f_1\| + C_2 \|f_2\|) \|\nabla\eta\| + C_3 \|f_4\| \|\nabla\nu\| \\
 &\leq M_1 (\|\nabla\eta\| + \|\nabla\nu\|) \\
 &\leq 2M_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla\eta|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla\nu|^2 dx \right)^{1/2},
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

onde se tem, $M_1 = \max \{(C_1 \|f_1\| + C_2 \|f_2\|), C_3 \|f_4\|\}$.

Agora, veja que:

$$\begin{aligned}
 -2\alpha \int_{\Omega} \eta\nu dx &\leq 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\eta^2}{2} + \frac{\nu^2}{2} \right) dx \\
 &\leq \alpha c_p \int_{\Omega} (|\nabla\eta|^2 + |\nabla\nu|^2) dx.
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

De (1.54) obtemos

$$0 \leq \left(\alpha c_p \int_{\Omega} (|\nabla\eta|^2 + |\nabla\nu|^2) dx + 2\alpha \int_{\Omega} \eta\nu dx \right)^{1/2}. \tag{1.55}$$

De (1.53) e (1.55)

$$\begin{aligned}
|f(\Psi)| &\leq \left(4M_1^2 \int_{\Omega} (|\nabla \eta|^2 + |\nabla \nu|^2) dx \right)^{1/2} \\
&+ \left(\alpha c_p \int_{\Omega} (|\nabla \eta|^2 + |\nabla \nu|^2) dx + 2\alpha \int_{\Omega} \eta \nu dx \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

O que nos dá:

$$|f(\Psi)| \leq 2 \left((4M_1^2 + \alpha c_p) \int_{\Omega} (|\nabla \eta|^2 + |\nabla \nu|^2) dx + 2\alpha \int_{\Omega} \eta \nu dx \right)^{1/2}. \tag{1.57}$$

Seja $M_2 = \frac{M_1^2}{4} = \max\{1, 4M_1^2 + \alpha c_p\}$, então de (1.57), segue que:

$$|f(\Psi)| \leq M_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \nu|^2 dx + 2\alpha \int_{\Omega} \eta \nu dx \right). \tag{1.58}$$

Isto é,

$$|f(\Psi)| \leq M_2 \|\Psi\|. \tag{1.59}$$

Assim, pelo Lema de Lax-Milgram, existe uma única solução $\Phi = (u, v) \in E$ para o problema variacional

$$a(\Phi, \Psi) = f(\Psi),$$

isto é, Φ satisfaz ao sistema (1.31)-(1.34)

Por outro lado, usando a regularidade elíptica, concluímos que existe uma única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solução para o sistema $\mathcal{A}U = F$. Mais ainda, existe uma constante C que depende somente do domínio, tal que:

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}$$

Segue portanto que $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq C$, isto é, $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador limitado. Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips (Apêndice), $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço Hilbertiano $\mathcal{H}$.

Desta maneira, obtemos nosso resultado sobre existência e unicidade de soluções, no teorema seguinte.

□

Teorema 1.3. (Existência e Unicidade de Soluções) *Existe uma única solução $U = (u, \varphi, v, \psi)^T$ para o sistema (1.1)-(1.5), com $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, satisfazendo*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

1.4 Decaimento Polinomial Ótimo

Aqui, nossa principal ferramenta é usar um resultado devido a Prüss, o qual assegura que o semigrupo associado ao problema é exponencialmente estável se, e somente se, são satisfeitas as condições

$$\begin{aligned} i) \quad & \varrho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} = i\mathbb{R} \\ ii) \quad & \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left\| (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty \end{aligned}$$

onde $\varrho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$.

O objetivo é mostrar a perda de estabilidade exponencial. No entanto o resultado mais importante desta seção, encontra-se no resultado de otimalidade de decaimento polinomial, devido a Tomilov-Borichev.

Para tanto, consideremos o problema espectral

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \lambda_\nu w_\nu \text{ em } \Omega \\ w_\nu &= 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{aligned} \tag{1.60}$$

onde $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_\nu \rightarrow +\infty$

Teorema 1.4. (Perda de Estabilidade) *Seja $S(t)$ um C_0 semigrupo de contrações gerado por $\mathcal{A}$. Então $S(t)$ não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Sejam $U = (u, \varphi, v, \psi)^T$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T$ e consideremos a equação resolvente

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F, \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } F \in \mathcal{H}. \quad (1.61)$$

Isto é,

$$i\lambda u - \varphi = f^1 \quad (1.62)$$

$$i\lambda \varphi - \Delta u + \alpha v + \varphi = f^2 \quad (1.63)$$

$$i\lambda v - \psi = f^3 \quad (1.64)$$

$$i\lambda \psi - \Delta v + \alpha u = f^4. \quad (1.65)$$

Consideramos agora, $u = aw_\nu, \varphi = bw_\nu, v = cw_\nu$ e $\psi = dw_\nu$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Então fazendo $f^1 = f^3 = 0$ e $f^2 = f^4 = w_\nu$, respectivamente em (1.62), (1.64), (1.63) e (1.65) e usando o Problema Espectral (1.60), obtemos após adições:

$$i\lambda(a + c)w_\nu = (b + d)w_\nu$$

$$i\lambda(b + d)w_\nu + \lambda_\nu(a + c)w_\nu + \alpha(a + c)w_\nu + bw_\nu = 2w_\nu.$$

Fazendo a substituição da primeira, na segunda equação, obtemos

$$i\lambda(i\lambda(a + c)w_\nu) + \lambda_\nu(a + c)w_\nu + \alpha(a + c)w_\nu + bw_\nu = 2w_\nu.$$

Isto é,

$$-\lambda^2(a + c)w_\nu + (a + c)w_\nu\lambda_\nu + \alpha(a + c)w_\nu + bw_\nu = 2w_\nu. \quad (1.66)$$

Agora, escolhendo $\lambda = \sqrt{\lambda_\nu + \alpha}$ e usando (1.66), obtemos $b = 2$. Logo,

$$i\lambda u - \varphi = f^1 \implies i\lambda(aw_\nu) - 2w_\nu = 0 \implies a = \frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}. \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} i\lambda\varphi - \Delta u + \alpha v + \varphi = f^2 &\implies i\lambda(2w_\nu) + \frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}\lambda_\nu w_\nu + \alpha c w_\nu + 2w_\nu = w_\nu \quad (1.68) \\ &\implies \left(2i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha} + \frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}\lambda_\nu + \alpha c + 2 \right) w_\nu = w_\nu \\ &\implies \frac{2i(\lambda_\nu + \alpha) - 2i\lambda_\nu}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \alpha c = -1 \\ &\implies c = \frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} - \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\lambda\psi - \Delta v + \alpha u = f^4 &\implies id\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}w_\nu + \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) \lambda_\nu w_\nu \quad (1.69) \\ &\quad - \frac{2i\alpha}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}w_\nu = w_\nu \\ &\implies id\sqrt{\lambda_\nu + \alpha} - \frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}\lambda_\nu - \frac{1}{\alpha}\lambda_\nu - \frac{2i\alpha}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} = 1 \\ &\implies id\sqrt{\lambda_\nu + \alpha} - \frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}(\lambda_\nu + \alpha) = 1 + \frac{\lambda_\nu}{\alpha} \\ &\implies id\sqrt{\lambda_\nu + \alpha} - 2i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha} = \frac{\lambda_\nu + \alpha}{\alpha} \\ &\implies di - 2i = \frac{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha} \\ &\implies d = 2 - \frac{i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Segue então que,

$$u = \frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}w_\nu \quad (1.70)$$

$$v = \left(-\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) w_\nu \quad (1.71)$$

$$\varphi = 2w_\nu \quad (1.72)$$

$$\psi = \left(2 - \frac{i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha} \right) w_\nu. \quad (1.73)$$

Agora, mostremos que $\|U\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow +\infty$, quando $\nu \longrightarrow +\infty$.

Com efeito, segue de (1.70)-(1.73) e de (1.27) que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_{\Omega} \left| \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_{\nu} + \alpha}} \nabla w_{\nu} \right) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |2w_{\nu}|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \left| \left(-\frac{2i}{\sqrt{\lambda_{\nu} + \alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) \nabla w_{\nu} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \left(2 - \frac{i\sqrt{\lambda_{\nu} + \alpha}}{\alpha} \right) \right|^2 w_{\nu} dx \\ &+ 2\alpha \int_{\Omega} \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_{\nu} + \alpha}} w_{\nu} \right) \left(-\frac{2i}{\sqrt{\lambda_{\nu} + \alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) w_{\nu} dx. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Assim, obtemos:

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \int_{\Omega} \left| \left(2 - \frac{i\sqrt{\lambda_{\nu} + \alpha}}{\alpha} \right) \right|^2 w_{\nu} dx \approx \mathcal{O}(|\lambda|^2) \longrightarrow +\infty \quad (1.75)$$

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \geq \mathcal{O}(|\lambda|).$$

Recordando que:

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F \iff U = (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F. \quad (1.76)$$

Segue então de (1.75), (1.76) e do Teorema de **Gearhart-Herbst-Huang-Prüss** que $S(t)$ não é exponencialmente estável.

□

A fim de demonstrar o decaimento polinomial do semigrupo associado ao sistema (1.1)-(1.5), primeiro vamos considerar o produto em $\mathcal{H}$ com $U = (u, \varphi, v, \psi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, com a equação resolvente de $\mathcal{A}$, isto é,

$$i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}. \quad (1.77)$$

No entanto, sabemos que

$$\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx = -(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}}. \quad (1.78)$$

O que nos dá:

$$i\lambda\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx = (F, U)_{\mathcal{H}}. \quad (1.79)$$

Agora, tomando a parte real e aplicando a desigualdade de Cauchy Schwarz, obtemos

$$\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.80)$$

A seguir, estudaremos dois lemas que servirão de auxílio para o principal resultado desta seção. Vejamos:

Lema 1.1. *A solução forte do sistema (1.1) -(1.5), dada pelo Teorema (1.3), satisfaz*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\bar{v} + v\bar{u}) dx + \int_{\Omega} \varphi\bar{u} dx &\leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \\ &+ \mathcal{K}_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

onde $\mathcal{K}_1$ é uma constante positiva.

Demonstração. Com efeito, multiplicamos respectivamente as equações (1.63) e (1.65) por $\bar{u}$ e $\bar{v}$. Integrando em Ω e somando os resultados, temos

$$\begin{aligned} &\underbrace{i\lambda \int_{\Omega} \varphi\bar{u} dx}_{:=I_1} + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} v\bar{u} dx + \int_{\Omega} \varphi\bar{u} dx \\ &+ \underbrace{i\lambda \int_{\Omega} \psi\bar{v} dx}_{:=I_2} + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u\bar{v} dx = \int_{\Omega} f^2\bar{u} dx + \int_{\Omega} f^4\bar{v} dx. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Agora, substituindo $\overline{i\lambda u}$, dado em (1.62) em I_1 de (1.82) e $\overline{i\lambda v}$, dado em (1.64) em I_2 de (1.82), nós obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (v\bar{u} + u\bar{v}) dx &+ \int_{\Omega} \varphi\bar{u} dx \\ &= \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx + \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \varphi\bar{f^1} dx + \int_{\Omega} \psi\bar{f^3} dx \\ &+ \int_{\Omega} f^2\bar{u} dx + \int_{\Omega} f^4\bar{v} dx. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Aplicando (1.80) em (1.83), temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (v\bar{u} + u\bar{v}) dx &+ \int_{\Omega} \varphi \bar{u} dx \\
 &\leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
 &+ \int_{\Omega} \varphi \bar{f}^1 dx + \int_{\Omega} \psi \bar{f}^3 dx \\
 &+ \int_{\Omega} f^2 \bar{u} dx + \int_{\Omega} f^4 \bar{v} dx.
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

Seja,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (v\bar{u} + u\bar{v}) dx + \int_{\Omega} \varphi \bar{u} dx = \vartheta. \tag{1.85}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \vartheta &\leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \int_{\Omega} \varphi \bar{f}^1 dx \\
 &+ \int_{\Omega} \psi \bar{f}^3 dx + \int_{\Omega} f^2 \bar{u} dx + \int_{\Omega} f^4 \bar{v} dx.
 \end{aligned} \tag{1.86}$$

Agora, de acordo com (1.29), vamos usar a norma equivalente

$$\|U\|_{\mathbf{H}} = \sqrt{\int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + \varphi^2 + |\nabla v|^2 + \psi^2] dx}.$$

com

$$\chi_1 \|U\|_{\mathbf{H}} \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \leq \chi_2 \|U\|_{\mathbf{H}}, \tag{1.87}$$

onde $\chi_1 = \sqrt{\zeta_1}$ e $\chi_2 = \sqrt{\zeta_2}$.

Então, de (1.86), segue que:

$$\begin{aligned}
 \vartheta &\leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \int_{\Omega} |\varphi| |\bar{f}^1| dx \\
 &+ \int_{\Omega} |\psi| |\bar{f}^3| dx + \int_{\Omega} |f^2| |\bar{u}| dx + \int_{\Omega} |f^4| |\bar{v}| dx.
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

Daí,

$$\vartheta \leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + M_3 \|U\|_{\mathbf{H}} \|F\|_{\mathbf{H}}, \quad (1.89)$$

onde $M_3 > 0$ é uma constante que depende das constantes de Poincaré associadas as funções u, v, f^1, f^3 . Agora podemos usar a equivalência de normas para escrevermos

$$\vartheta \leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \mathcal{K}_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (1.90)$$

$$\text{com } \mathcal{K}_1 = \left(1 + \frac{M_3}{\chi_1^2}\right) = \left(1 + \frac{M_3}{\zeta_1}\right).$$

Segue portanto, o resultado requerido. □

Lema 1.2. *A solução forte do sistema (1.1) -(1.5), dada pelo Teorema (1.1), satisfaz*

$$\left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \leq \frac{c}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) + \mathcal{K}_2 |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

onde $\mathcal{K}_2$ e c são constantes positivas e $|\lambda| > 1$.

Demonstração. Multiplicando a equação (1.65) por $\bar{\psi}$ e integrando em Ω obtemos

$$i\lambda \int_{\Omega} |\psi|^2 dx = \int_{\Omega} \Delta v \bar{\psi} dx - \alpha \int_{\Omega} u \bar{\psi} dx + \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} dx. \quad (1.91)$$

Agora, usando (1.64), obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &= \int_{\Omega} \Delta v (-\lambda \bar{v} - \bar{f}^3) dx - \alpha \int_{\Omega} u (-\lambda \bar{v} - \bar{f}^3) dx \\ &+ \int_{\Omega} f^4 (-\lambda \bar{v} - \bar{f}^3) dx \\ &= -\lambda \int_{\Omega} \Delta v \bar{v} dx - \int_{\Omega} \Delta v \bar{f}^3 dx + \alpha \lambda \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \alpha \int_{\Omega} u \bar{f}^3 dx \\ &- \lambda \int_{\Omega} f^4 \bar{v} dx - \int_{\Omega} f^4 \bar{f}^3 dx. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Então, modulando (1.92) e aplicando Primeira Identidade de Green, obtemos

$$\begin{aligned} |\lambda| \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq |\lambda| \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v| |\nabla \bar{f}^3| dx \\ &+ \alpha |\lambda| \int_{\Omega} |u| |(\bar{v})| dx + \alpha \int_{\Omega} |u| |(\bar{f}^3)| dx \\ &+ |\lambda| \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{v})| dx + \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{f}^3)| dx. \end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} |\lambda| \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq |\lambda| \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v| |\nabla \bar{f}^3| dx \\ &+ \frac{\alpha |\lambda|}{2} \int_{\Omega} (|u|^2 + |(\bar{v})|^2) dx + \alpha \int_{\Omega} |u| |(\bar{f}^3)| dx \\ &+ |\lambda| \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{v})| dx + \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{f}^3)| dx. \end{aligned}$$

Assim, temos pela desigualdade de Poincaré que:

$$\begin{aligned} |\lambda| \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq \frac{\alpha |\lambda| c_p}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{|\lambda| (2 + \alpha c_p)}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} |\nabla v| |\nabla \bar{f}^3| dx + \alpha \int_{\Omega} |u| |(\bar{f}^3)| dx \\ &+ |\lambda| \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{v})| dx + \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{f}^3)| dx. \end{aligned} \tag{1.93}$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

$$\text{Seja } c = \max \left\{ \frac{\alpha |\lambda| c_p}{2}, \frac{|\lambda| (2 + \alpha c_p)}{2}, 1, \alpha, |\lambda| \right\}.$$

Usando (1.93) segue-se que

$$\begin{aligned} |\lambda| \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq c \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \\ &+ c \left(\int_{\Omega} |\nabla v| |\nabla \bar{f}^3| dx + \int_{\Omega} |u| |(\bar{f}^3)| dx \right. \\ &\left. + \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{v})| dx + \int_{\Omega} |f^4| |(\bar{f}^3)| dx \right). \end{aligned} \tag{1.94}$$

Daí, com a mesma argumentação de (1.88), (1.89) e (1.90), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq \frac{c}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \\ &+ \frac{c}{|\lambda|} \mathcal{K}_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|} \int_{\Omega} |\psi|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.95)$$

E assim obter,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq \frac{c}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \\ &+ \frac{c}{|\lambda|} \mathcal{K}_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{K}_2 = \frac{c}{|\lambda|} \mathcal{K}_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq \frac{c}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \\ &+ \mathcal{K}_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Uma vez que $|\lambda| > 1$, então $|\lambda|^2 > 1$.

Com isso, obtemos o requerido, isto é,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx &\leq \frac{c}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \\ &+ \mathcal{K}_2 |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

□

Vamos agora ao principal resultado desta seção, o qual trata sobre a taxa ótima de estabilidade algébrica. Vejamos:

Teorema 1.5. (Otimalidade Algébrica)

O Semigrupo associado ao sistema (1.1)-(1.5) é polinomialmente estável e

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \quad (1.97)$$

Além disso, este resultado é ótimo.

Demonstração. No que se segue, estamos considerando $\mathcal{K} = \max\{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2\}$.

A partir dos lemas (1.1) e (1.2) e $|\lambda| > 1$, nós temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \mathcal{K}|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.98)$$

De fato, pois pelos lemas, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (u\bar{v} + v\bar{u}) dx + \int_{\Omega} \varphi \bar{u} dx &\leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \\ &+ \mathcal{K} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right) \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \leq \frac{c}{|\lambda|} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) + \mathcal{K}|\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.100)$$

Então adicionando (1.99) a (1.100) obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right) \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |\psi|^2 dx \right] + \alpha \int_{\Omega} (u\bar{v} + v\bar{u}) dx + \int_{\Omega} \varphi \bar{u} dx & \\ \leq \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \mathcal{K}(|\lambda|^2 + 1) \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. & \end{aligned} \quad (1.101)$$

Agora, aplicando- a (1.101) Young, Poincaré e majoração conveniente, obtemos

$$M_4 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathcal{K}(|\lambda|^2 + 1) \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.102)$$

onde $M_4 = \frac{1}{|\lambda|^2} + 1$. Com isso temos a verificação de (1.98).

Agora note que, (1.98) equivale a

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \mathcal{K}|\lambda|^2. \quad (1.103)$$

Então, usando o Teorema (2.4) em [1], obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{H}} = \mathcal{O}(t^{-1/2}) \implies \|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{t}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (1.104)$$

Desde que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, segue então que $\mathcal{A}U_0 = F$. Dai nós temos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \quad (1.105)$$

Por conseguinte, a solução decai polinomialmente, isto é, à uma taxa algébrica.

Para mostrarmos que a taxa de decaimento polinomial em questão é ótima, faremos a prova via argumento de contradição. Vejamos.

Suponha que a taxa $t^{-1/2}$ possa ser melhorada. Por exemplo a taxa $t^{-1/(2-\varepsilon)}$, para algum $0 < \varepsilon < 2$.

A partir do Teorema 5.3 de [19], o operador

$$|\lambda|^{-2+\varepsilon}\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}, \quad (1.106)$$

deve ser limitado, no entanto isso não acontece.

Vamos então supor que exista uma sequência $(\lambda_\mu) \subset \mathbb{R}$, com $\lim_{\mu \rightarrow \infty} |\lambda_\mu| = \infty$ e $(U_n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $(F_n) \subset \mathcal{H}$, de tal modo que

$$(i\lambda_\mu I - \mathcal{A})U_\mu = F_\mu, \quad (1.107)$$

é limitada em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |\lambda|^{-2+\varepsilon}\|U_\mu\|_{\mathcal{H}} = \infty \quad (1.108)$$

Então, podemos considerar para cada $\mu \in \mathbb{N}$, $F_\mu = (0, \omega_\mu, 0, \omega_\mu)^T$ e $U_\mu = (u_\mu, \varphi_\mu, v, \psi_\mu)^T$, onde devido as condições de contorno, U_μ esta na forma $u_\mu = aw_\mu, \varphi_\mu = bw_\mu, v_\mu = cw_\mu$ e

$\psi_\mu = dw_\mu$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Seguindo então, os mesmos passos da prova do Teorema (1.4), podemos concluir que

$$|\lambda|^{-2+\varepsilon} \|U_\mu\|_{\mathcal{H}} \geq \mathcal{O}(\mu^\varepsilon) \longrightarrow \infty, \text{ quando } \mu \longrightarrow \infty. \quad (1.109)$$

Portanto, a taxa não pode ser melhorada. A prova é agora completa.

□

Capítulo 2

Sistema Acoplado Unidimensional

2.1 Apresentação do Problema

O modelo matemático **1-D** de propagação de ondas acopladas é apresentado como se segue

$$u_{tt} = S_{1x} - \mathcal{F}_1 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (2.1)$$

$$v_{tt} = S_{2x} - \mathcal{F}_2 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{F}_i$ $i = 1, 2$ representam as forças de interação entre as funções u e v e S_{ix} representa o stress, para cada $i = 1, 2$. As leis constitutivas, correspondentes são dadas por

$$S_1 = c_1^2 u_x - \delta \theta \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (2.3)$$

$$S_2 = c_2^2 v_x - \delta \theta \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[. \quad (2.4)$$

Por t e x denotam-se as variáveis de tempo e espaço respectivamente, δ é a densidade, c_i^2 $i = 1, 2$ são as velocidades de propagação de onda. Finalmente por θ denotamos a diferença de temperatura e assumimos que θ age uniformemente em u e v .

Com respeito às leis constitutivas em termoelasticidade linear, é bem conhecido que o modelo para a temperatura usa a lei de Fourier, e isto, resulta em uma discrepância física de propagação de calor infinita.

Para remover esse paradoxo, mas ainda mantendo o essencial de um processo de condução de calor, podemos usar a lei de Cattaneo em substituição a lei de Fourier $q = -k' \nabla \theta$, isso é

$$\tau q_t + q + k' \theta_x = 0,$$

agora sobre o vetor fluxo de calor como uma outra função a ser determinada através da equação diferencial. O parâmetro τ , positivo, representa o tempo de relaxação do fluxo de calor, em resposta a um gradiente de temperatura. Combinando o balanço de energia

$$\theta_t + q_x = 0,$$

com a lei de Cattaneo, nós obtemos

$$\tau\theta_{tt} - k'\theta_{xx} + \theta_t = 0,$$

que é a equação de onda amortecida. Onde mais uma vez, obtém a já conhecida estabilidade exponencial.

Portanto, a lei de Cattaneo transforma a natureza parabólica do processo de condução de calor em um sistema hiberbólico.

Finalmente, assumindo que

$$\mathcal{F}_1 = \alpha(u - v) + \beta(u_t - v_t) \quad (2.5)$$

$$\mathcal{F}_2 = \alpha(v - u) + \beta(v_t - u_t), \quad (2.6)$$

para $\alpha, \beta > 0$, das leis constitutivas (2.1)-(2.4) e do balanço de energia dado pela lei de Cattaneo, obtemos o seguinte sistema hiperbólico de equações diferenciais

$$u_{tt} - c_1^2 u_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(u_t - v_t) + \delta\theta_x = 0 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (2.7)$$

$$v_{tt} - c_2^2 v_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(v_t - u_t) + \delta\theta_x = 0 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (2.8)$$

$$\varrho\theta_t + q_x + \delta u_{xt} + \delta v_{xt} = 0 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (2.9)$$

$$\tau q_t + \gamma q + \theta_x = 0 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[. \quad (2.10)$$

As constantes positivas ϱ , τ , δ e γ referem-se a hipóteses em termoelasticidade. Aqui, consideramos as seguintes condições de bordo

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = q(0, t) = q(L, t) = 0. \quad (2.11)$$

para todo $t > 0$ e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) = q(x, 0) = q_0(x) = 0, \forall x \in (0, L). \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2 Existência e Unicidade de Soluções

Nesta seção mostramos a existência e unicidade de solução do sistema (2.7)-(2.12). A priori, obtemos o funcional de energia associado ao problema, bem como o Cenário de Semigrupo. Daí então, provamos que o operador $\mathcal{A}$, desse sistema é dissipativo. Por fim, montamos um problema variacional, e obtemos o principal resultado desta seção usando o lema de Lax-Milgram.

2.2.1 Funcional de Energia

No que se segue encontraremos a energia associada ao sistema (2.7)-(2.12), que sugere o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ a ser obtido a posteriori.

Proposição 2.1. *A Energia $E(t)$ associada ao sistema (2.7)-(2.12) é dada por*

$$\begin{aligned} E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{c_1^2}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{c_2^2}{2} \int_0^L |v_x|^2 dx \\ + \frac{\alpha}{2} \int_0^L |u - v|^2 dx + \frac{\varrho}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_0^L |q|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

satisfazendo,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\beta \int_0^L |u_t - v_t|^2 dx - \gamma \int_0^L |q|^2 dx \leq 0. \quad (2.14)$$

Com efeito, multiplicamos as equações (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10) respectivamente por u_t, v_t, θ e q . Ao obtido, integremos em $]0, L[$. Isto nos dá

$$\int_0^L u_{tt}u_t dx - c_1^2 \int_0^L u_{xx}u_t dx + \alpha \int_0^L (u-v)u_t dx + \beta \int_0^L (u_t-v_t)u_t dx + \delta \int_0^L \theta_x u_t dx = 0 \quad (2.15)$$

$$\int_0^L v_{tt}v_t dx - c_2^2 \int_0^L v_{xx}v_t dx + \alpha \int_0^L (v-u)v_t dx + \beta \int_0^L (v_t-u_t)v_t dx + \delta \int_0^L \theta_x v_t dx = 0 \quad (2.16)$$

$$\varrho \int_0^L \theta_t \theta dx + \int_0^L q_x \theta dx + \delta \int_0^L u_{xt} \theta dx + \delta \int_0^L v_{xt} \theta dx = 0 \quad (2.17)$$

$$\tau \int_0^L q_t q dx + \gamma \int_0^L q q dx + \int_0^L \theta_x q dx = 0. \quad (2.18)$$

Agora, aplicando integração por partes ao obtido. Temos então

$$\int_0^L u_{tt}u_t dx + c_1^2 \left[-u_x u_t \Big|_0^L + \int_0^L u_x u_{tx} dx \right] + \alpha \int_0^L (v-u)u_t dx + \beta \int_0^L (v_t-u_t)v_t dx + \delta \int_0^L \theta_x v_t dx = 0 \quad (2.19)$$

$$\int_0^L v_{tt}v_t dx + c_2^2 \left[-v_x v_t \Big|_0^L + \int_0^L v_x v_{tx} dx \right] + \alpha \int_0^L (u-v)v_t dx + \beta \int_0^L (u_t-v_t)u_t dx + \delta \int_0^L \theta_x u_t dx = 0 \quad (2.20)$$

$$\varrho \int_0^L \theta_t \theta dx + \int_0^L q_x \theta dx - \delta \int_0^L u_t \theta_x dx - \delta \int_0^L v_t \theta_x dx = 0 \quad (2.21)$$

$$\tau \int_0^L q_t q dx + \gamma \int_0^L q q dx + \theta q \Big|_0^L - \int_0^L \theta q_x dx = 0. \quad (2.22)$$

Adicionando as (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22), aplicando as condições de bordo e regras derivacionais de produto interno, isto nos dá

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{c_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{c_2^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_x|^2 dx \\
& + \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |q|^2 dx + \gamma \int_0^L |q|^2 dx + \alpha \int_0^L (v - u) u_t dx \\
& + \alpha \int_0^L (u - v) v_t dx + \beta \int_0^L (v_t - u_t) v_t dx + \beta \int_0^L (u_t - v_t) u_t dx \\
& + \int_0^L q_x \theta dx - \int_0^L \theta q_x dx + \delta \int_0^L \theta_x v_t dx - \delta \int_0^L v_t \theta_x dx \\
& + \delta \int_0^L \theta_x u_t dx - \delta \int_0^L u_t \theta_x dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Por outro lado, veja-se que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_0^L (u - v) u_t dx + \alpha \int_0^L (v - u) v_t dx &= \alpha \int_0^L (u u_t - v u_t + v v_t - u v_t) dx \\
&= \alpha \int_0^L [u(u_t - v_t) + v(v_t - u_t)] dx \\
&= \alpha \int_0^L (u - v)(u_t - v_t) dx \\
&= \alpha \int_0^L (u - v)(u - v)_t dx \\
&= \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u - v|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta \int_0^L (u_t - v_t) u_t dx + \beta \int_0^L (v_t - u_t) v_t dx &= \beta \int_0^L (u_t u_t - v_t u_t + v_t v_t - u_t v_t) dx \\
&= \beta \int_0^L u_t(u_t - v_t) + v_t(v_t - u_t) dx \\
&= \beta \int_0^L (u_t - v_t)(u_t - v_t) dx \\
&= \beta \int_0^L |u_t - v_t|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Aplicando (2.24) e (2.25) em (2.23), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{c_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{c_2^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |v_x|^2 dx \\
& + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u - v|^2 dx + \frac{\varrho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |q|^2 dx \\
& = -\beta \int_0^L |u_t - v_t|^2 dx - \gamma \int_0^L |q|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Definindo a energia associada ao sistema (2.7)-(2.12) por

$$\begin{aligned}
E(t) := & \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{c_1^2}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |v_t|^2 dx + \frac{c_2^2}{2} \int_0^L |v_x|^2 dx \\
& + \frac{\alpha}{2} \int_0^L |u - v|^2 dx + \frac{\varrho}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_0^L |q|^2 dx,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

decorre de (2.26) e (2.27), que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\beta \int_0^L |u_t - v_t|^2 dx - \gamma \int_0^L |q|^2 dx. \tag{2.28}$$

Isto é, a energia é decrescente, uma vez que $\beta, \gamma > 0$ e, portanto o sistema em questão é dissipativo, pois

$$E(t) = E(0) - \beta \int_0^t \int_0^L |u_t - v_t|^2 dx dt - \gamma \int_0^t \int_0^L |q|^2 dx dt. \tag{2.29}$$

Implicando em,

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t \geq 0. \tag{2.30}$$

A fim de que o sistema (2.7)-(2.12) seja conservativo, deve-se ter

$$\beta = \gamma = 0 \implies E(t) = E(0) \quad \forall t \geq 0. \tag{2.31}$$

□

2.3 Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares

Nesta seção, mostramos a existência e unicidade de solução do sistema (2.7)-(2.12). A priori, obtemos o Cenário de Semigrupo, provamos que o operador $\mathcal{A}$ desse sistema é dissipativo. Por fim, montamos um problema variacional, e obtemos o principal resultado desta seção, usando o lema de Lax-Milgram, ou seja, a existência e unicidade.

2.3.1 Problema de Cauchy

Vamos agora reescrever (2.7)-(2.12), como um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \mathcal{A}U \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \quad (P.V.I)$$

aqui denominado Problema de Valor Inicial (**P.V.I**), ou Problema de Cauchy (**P.C**).

Para tanto, consideremos $\varphi = u_t$ e $\psi = v_t$ e os vetores

$$U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T, U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0, q_0)^T \text{ e } U_t = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \theta_t, q_t)^T.$$

A fim de satisfazer o **P.V.I**, temos que

$$\frac{dU}{dt} = U_t = \begin{pmatrix} \varphi \\ c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(\varphi - \psi) - \delta\theta_x \\ \psi \\ c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(\varphi - \psi) - \delta\theta_x \\ \frac{1}{\varrho}(-q_x - \delta\varphi_x - \delta\psi_x) \\ \frac{1}{\tau}(-\gamma q - \theta_x) \end{pmatrix} = \mathcal{A}U = \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \\ \theta \\ q \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Veja-se que, de (2.32), obtemos

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & Id & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ c_1^2 \partial_{xx} - \alpha Id & -\beta Id & \alpha Id & \beta Id & -\delta \partial_x & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & Id & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \alpha Id & \beta Id & c_2^2 \partial_{xx} - \alpha Id & -\beta Id & -\delta \partial_x & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\frac{\delta}{\varrho} \partial_x & \mathcal{O} & -\frac{\delta}{\varrho} \partial_x & \mathcal{O} & -\frac{1}{\rho_3} \partial_x \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & -\frac{1}{\tau} \partial_x & -\frac{\gamma}{\tau} Id \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Sendo $\mathcal{O}, Id, \partial_x = \frac{d}{dx}$ e $\partial_{xx} = \frac{d^2}{dx^2}$ respectivamente os operadores nulo, identidade, derivadas primeira e segunda na variável x .

2.3.2 Construção do Espaço de Fase

A fim de se determinar o Espaço de Fase $\mathcal{H}$ é necessária uma avaliação sistemática da energia associada ao sistema em questão, com suas condições de bordo. Vejamos

Da Proposição (2.1), segue-se que

$$u_t, u_x, v_t, v_x, (u - v), \theta, q \in L^2(0, L).$$

Como $u_x, v_x \in L^2(0, L)$ e $u = v = 0$ sobre $\Gamma(0, L)$. Então da Desigualdade de Poincaré na reta, segue-se que $u, v \in H_0^1(0, L)$

Em razão das condições de contorno do tipo Neumann para θ em (2.11), é bem sabido que para as condições iniciais $\theta_0(x), \theta_1(x) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, existem soluções que não decaem exponencialmente. Para evitar esse problema, devemos assumir que os dados iniciais são tais que:

$$\int_0^L \theta_0(x) dx = 0, \int_0^L \theta_1(x) dx = 0.$$

Desta forma, definimos o seguinte espaço, ao qual θ pertence.

$$L_*^2(0, L) = \left\{ w \in L^2(0, L) / \int_0^L w(x) dx = 0 \right\}.$$

Portanto o Espaço de Fase, deve ser Hilbertiano e dado por:

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L^2(0, L) \quad (2.34)$$

2.3.3 Domínio do Operador

Por definição, o domínio do Operador Elíptico $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}.$$

Desta feita, temos então para $U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T$, que

$$\varphi \in H_0^1(0, L) \quad (2.35)$$

$$(c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(\psi - \varphi) - \delta\theta_x) \in L^2(0, L) \quad (2.36)$$

$$\psi \in H_0^1(0, L) \quad (2.37)$$

$$(c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(\varphi - \psi) - \delta\theta_x) \in L^2(0, L) \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{\varrho}(-q_x - \delta\varphi_x - \delta\psi_x) \in L_*^2(0, L) \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{\tau}(-\gamma q - \theta_x) \in L^2(0, L). \quad (2.40)$$

Usando o fato de que

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L_*^2(0, L) \times L^2(0, L) \text{ e (2.35)-(2.38),}$$

Segue que: $u, v \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ e $\varphi, \psi \in H_0^1(0, L)$.

Por outro lado de (2.39) e (2.40) $q \in H_0^1(0, L)$ e θ a

$$H_*^1(0, L) = \left\{ w \in H^1(0, L) / \int_0^L w(x) dx = 0 \right\}$$

Assim sendo, vem que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Upsilon \times H_0^1(0, L) \times \Upsilon \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \quad (2.41)$$

onde $\Upsilon = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))$.

2.3.4 Produto Interno

Considere $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6)^T$ e $V = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6)^T$ vetores de $\mathcal{H}$. Defina-se o produto interno entre U e V , como sendo:

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = & \int_0^L [c_1^2 u_x^1 v_x^1 + u^2 v^2 + c_2^2 u_x^3 v_x^3 + u^4 v^4 + \alpha(u^1 - u^3)(v^1 - v^3)] dx \\ & + \int_0^L \varrho(u^5 v^5 + \tau u^6 v^6) dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

E norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L [c_1^2 |u_x^1|^2 + |u^2|^2 + c_2^2 |u_x^3|^2 + |u^4|^2 + \alpha |u^1 - u^3|^2 + \varrho |u^5|^2 + \tau |u^6|^2] dx. \quad (2.43)$$

Teorema 2.1. *O operador Elíptico $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Demonstração. Com efeito, pois considerando $U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tem-se

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(\psi - \varphi) - \delta\theta_x \\ c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(\varphi - \psi) - \delta\theta_x \\ \frac{1}{\varrho}(-q_x - \delta\varphi_x - \delta\psi_x) \\ \frac{1}{\tau}(-\gamma q - \theta_x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \\ \theta \\ q \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.44)$$

Assim sendo, temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L [c_1^2 \varphi_x u_x + (c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(\psi - \varphi) - \delta\theta_x)\varphi + c_2^2 \psi_x v_x] dx \quad (2.45) \\
&+ \int_0^L [(c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(u_t - v_t) - \delta\theta_x)\psi + \alpha(\varphi - \psi)(u - v)] dx \\
&+ \int_0^L \left[\varrho \left(\frac{1}{\varrho} (-q_x - \delta\varphi_x - \delta\psi_x) \right) \theta + \tau \left(\frac{1}{\tau} (-\gamma q - \theta_x) \right) q \right] dx.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L [c_1^2 \varphi_x u_x + c_1^2 u_{xx} \varphi + \alpha v \varphi - \alpha u \varphi + \beta v_t \varphi - \beta u_t \varphi - \delta\theta_x \varphi] dx \quad (2.46) \\
&+ \int_0^L [c_2^2 \psi_x v_x + c_2^2 v_{xx} \psi + \alpha u \psi - \alpha v \psi + \beta \varphi \psi - \beta \psi \psi - \delta\theta_x \psi] dx \\
&+ \int_0^L [\alpha(\varphi - \psi)(u - v) - q_x \theta - \delta\varphi_x \theta - \delta\psi_x \theta - \gamma q^2 - \theta_x q] dx.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L [c_1^2 \varphi_x u_x - c_1^2 u_x \varphi_x + \alpha v \varphi - \alpha u \varphi + \beta \psi \varphi - \beta \varphi \varphi - \delta\theta_x \varphi] dx \quad (2.47) \\
&+ \int_0^L [c_2^2 \psi_x v_x - c_2^2 v_x \psi_x + \alpha u \psi - \alpha v \psi + \beta \varphi \psi - \beta \psi \psi - \delta\theta_x \psi] dx \\
&+ \int_0^L [\alpha \varphi u - \alpha \varphi v - \alpha \psi u + \alpha \psi v + q \theta_x] dx \\
&+ \int_0^L [-\delta\varphi_x \theta - \delta\psi_x \theta - \gamma q^2 - \theta_x q] dx.
\end{aligned}$$

Decorre então que,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L [\beta \varphi \psi - \beta \varphi \varphi + \beta \psi \varphi - \beta \psi \psi - \delta\theta_x \varphi - \delta\theta_x \psi - \delta\varphi_x \theta] dx \quad (2.48) \\
&+ \int_0^L [-\delta\psi_x \theta - \gamma q^2] dx.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L \{ \beta [\varphi(\psi - \varphi) + \psi(\varphi - \psi)] - \gamma q^2 \} dx. \quad (2.49)$$

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L [-\beta(\varphi - \psi)^2 - \gamma q^2] dx. \quad (2.50)$$

Assim,

$$\Re \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\beta \int_0^L |\varphi - \psi|^2 dx - \gamma \int_0^L |q|^2 dx \leq 0. \quad (2.51)$$

Visto que β e γ são positivos, segue-se que $\mathcal{A}$ é dissipativo.

□

Teorema 2.2. *O operador Elíptico $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço Hilbertiano $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Basta mostrar que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$.

Deste modo, consideremos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \in \mathcal{H}$. Queremos encontrar $U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, que satisfaça a seguinte equação resolvente

$$(\lambda I - \mathcal{A}U) = F \quad \text{com} \quad \lambda = 0. \quad (2.52)$$

Isto é,

$$\mathcal{A}U = -F. \quad (2.53)$$

Daí, temos o seguinte sistema

$$\varphi = -f_1 \in H_0^1(0, L) \quad (2.54)$$

$$c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(\psi - \varphi) - \delta\theta_x = -f_2 \in L^2(0, L) \quad (2.55)$$

$$\psi = -f_3 \in H_0^1(0, L) \quad (2.56)$$

$$c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(\varphi - \psi) - \delta\theta_x = -f_4 \in L^2(0, L) \quad (2.57)$$

$$-q_x - \delta\varphi_x - \delta\psi_x = -\varrho f_5 \in L_*^2(0, L) \quad (2.58)$$

$$-\gamma q - \theta_x = -\tau f_6 \in L^2(0, L). \quad (2.59)$$

Substituindo θ_x , obtido de (2.59) em (2.55) e (2.56), temos

$$\begin{aligned} c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(\psi - \varphi) - \delta\tau f_6 + \delta\gamma q &= -f_2 \\ c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(\varphi - \psi) - \delta\tau f_6 + \delta\gamma q &= -f_4. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Agora, uma vez que $\varphi = -f_1$ e $\psi = -f_3$, segue-se de (2.60) que

$$\begin{aligned} c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(f_1 - f_3) + \delta\gamma q &= \delta\tau f_6 - f_2 \\ c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(f_3 - f_1) + \delta\gamma q &= \delta\tau f_6 - f_4. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por outro lado, de (2.54), (2.56) e (2.58), segue-se que

$$q_x = \varrho f_5 + \delta f_{1,x} + \delta f_{3,x}.$$

Integrando a equação acima de 0 a x , obtemos

$$q = \varrho \int_0^x f_5(y) dy + \delta f_1 + \delta f_3.$$

Desta maneira, substituindo q no sistema (2.61), obtemos o seguinte problema elíptico

$$c_1^2 u_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(f_1 - f_3) = \delta\tau f_6 - f_2 - \gamma\delta^2 f_1 - \gamma\delta^2 f_3 - \gamma\delta\varrho \int_0^x f_5(y) dy \quad (2.62)$$

$$c_2^2 v_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(f_3 - f_1) = \delta\tau f_6 - f_4 - \gamma\delta^2 f_1 - \gamma\delta^2 f_3 - \gamma\delta\varrho \int_0^x f_5(y) dy \quad (2.63)$$

com condições de Dirichlet.

$$u(0) = u(L) = v(0) = v(L) = 0.$$

Nosso propósito agora, é formular um problema variacional.

Para tanto, multiplicamos (2.62) e (2.63) respectivamente por η e ν e integremos de 0 a L .

$$\begin{aligned}
c_1^2 \int_0^L u_{xx} \eta dx + \alpha \int_0^L (v - u) \eta dx &= \int_0^L \left(\beta f_3 - \beta f_1 + \delta \tau f_6 - f_2 - \gamma \delta^2 f_1 \right. \\
&\quad \left. - \gamma \delta^2 f_3 - \gamma \delta \varrho \int_0^x f_5(y) dy \right) \eta dx. \quad (2.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2^2 \int_0^L v_{xx} \nu dx + \alpha \int_0^L (u - v) \nu dx &= \int_0^L \left(\beta f_1 - \beta f_3 + \delta \tau f_6 - f_4 - \gamma \delta^2 f_1 \right. \\
&\quad \left. - \gamma \delta^2 f_3 - \gamma \delta \varrho \int_0^x f_5(y) dy \right) \nu dx. \quad (2.65)
\end{aligned}$$

Note que para $x = L$, tem-se

$$\int_0^L \left(\int_0^x f_5(y) dy \right) dx \leq \int_0^L \int_0^L \left(f_5(y) dy \right) dx = \int_0^L \|f_5\|_{L^1} dx = L \|f_5\|_{L^1}.$$

Vamos agora integrar por partes (2.64) e (2.65), adicionar os resultados e ainda usar a desigualdade acima, isto nos dá

$$\begin{aligned}
c_1^2 \int_0^L u_x \eta_x dx + c_2^2 \int_0^L v_x \nu_x dx + \alpha \int_0^L (u - v)(\eta - \nu) &= \beta \int_0^L (f_1 - f_3)(\eta - \nu) dx \\
- \delta \tau \int_0^L f_6(\eta + \nu) dx - \int_0^L (f_2 + f_4)(\eta + \nu) dx + \gamma \delta^2 \int_0^L (f_1 + f_3)(\eta + \nu) dx \\
&\quad + \gamma \delta \varrho \|f_5\|_{L^1} (\eta + \nu) dx. \quad (2.66)
\end{aligned}$$

Aplicamos o Lema de Lax-Milgram, ao Problema Variacional. Para tanto, consideramos o funcional linear e contínuo (mostramos)

$$f = f(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$$

Dado por

$$\begin{aligned}
f &= \beta \int_0^L (f_1 - f_3)(\eta - \nu) dx - \delta \tau \int_0^L f_6(\eta + \nu) dx - \int_0^L (f_2 + f_4)(\eta + \nu) dx \\
&\quad + \gamma \delta^2 \int_0^L (f_1 + f_3)(\eta + \nu) dx + \gamma \delta \varrho \|f_5\|_{L^1} (\eta + \nu) dx. \quad (2.67)
\end{aligned}$$

E a formar bilinear, contínua e coerciva (verificamos). Dada por

$$a((u, v), (\eta, \nu)) = c_1^2 \int_0^L u_x \eta_x dx + c_2^2 \int_0^L v_x \nu_x dx + \alpha \int_0^L (u - v)(\eta - \nu) dx. \quad (2.68)$$

Temos então o seguinte problema variacional

Determinar $(u, v) \in E$, onde $E = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. Munido com a norma:

$$\|\Phi\|_E^2 = c_1^2 \int_0^L u_x^2 dx + c_2^2 \int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L (u - v)^2 dx. \quad (2.69)$$

E tal que, para $\Phi = (u, v)$ e $\Psi = (\eta, \nu)$ em E , a forma

$$a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a(\Phi, \Psi) = c_1^2 \int_0^L u_x \eta_x dx + c_2^2 \int_0^L v_x \nu_x dx + \alpha \int_0^L (u - v)(\eta - \nu) dx, \quad (2.70)$$

é bilinear, contínua e coerciva no espaço hilbertiano $E \times E$.

Com efeito,

i) $a(\Phi, \Psi)$ é **Bilinear**

Segue da linearidade da integral.

ii) $a(\Phi, \Psi)$ é **Contínua**

Aplicamos a Desigualdade Triangular.

$$\begin{aligned}
|a(\Phi, \Psi)| &= \left| c_1^2 \int_0^L u_x \eta_x dx + c_2^2 \int_0^L v_x \nu_x dx + \alpha \int_0^L (u - v)(\eta - \nu) dx \right| \\
&\leq c_1^2 \left| \int_0^L u_x \eta_x dx \right| + c_2^2 \left| \int_0^L v_x \nu_x dx \right| + \alpha \left| \int_0^L (u - v)(\eta - \nu) dx \right|.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Agora, aplicando desigualdade de Cauchy-Schwarz a (2.71), obtemos

$$\begin{aligned}
|a(\Phi, \Psi)| &\leq c_1^2 \|u_x\| \|\eta_x\| + c_2^2 \|v_x\| \|\nu_x\| + \alpha \|(u - v)\| \|(\eta - \nu)\| \\
&\leq c_1^2 \left(\int_0^L |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\eta_x|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + c_2^2 \left(\int_0^L |v_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L |\nu_x|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \alpha \left(\int_0^L (u - v)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L (\eta - \nu)^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
|a(\Phi, \Psi)| &\leq \left(c_1^4 \int_0^L |u_x|^2 dx \int_0^L |\eta_x|^2 dx \right)^{1/2} + \left(c_2^4 \int_0^L |v_x|^2 dx \int_0^L |\nu_x|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\alpha^2 \int_0^L (u - v)^2 dx \int_0^L (\eta - \nu)^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Agora, utilizamos a seguinte desigualdade elementar:

$$\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} \leq n \sqrt{a_1 + \cdots + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então temos,

$$\begin{aligned}
|a(\Phi, \Psi)| &\leq \left(c_1^2 \int_0^L |u_x|^2 dx \, c_1^2 \int_0^L |\eta_x|^2 dx \right)^{1/2} + \left(c_2^2 \int_0^L |v_x|^2 dx \, c_2^2 \int_0^L |\nu_x|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\alpha \int_0^L (u-v)^2 dx \, \alpha \int_0^L (\eta-\nu)^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq 3 \left[\left(c_1^2 \int_0^L |u_x|^2 dx \, c_1^2 \int_0^L |\eta_x|^2 dx \right) + \left(c_2^2 \int_0^L |v_x|^2 dx \, c_2^2 \int_0^L |\nu_x|^2 dx \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\alpha \int_0^L (u-v)^2 dx \, \alpha \int_0^L (\eta-\nu)^2 dx \right) \right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

O que finalmente nos dá

$$\begin{aligned}
|a(\Phi, \Psi)| &\leq 3 \left(c_1^2 \int_0^L |u_x|^2 dx + c_2^2 \int_0^L |v_x|^2 dx + \alpha \int_0^L (u-v)^2 dx \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(c_1^2 \int_0^L |\eta_x|^2 dx + c_2^2 \int_0^L |\nu_x|^2 dx + \alpha \int_0^L (\eta-\nu)^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Assim,

$$|a(\Phi, \Psi)| \leq 3 \|\Phi\|_E \|\Psi\|_E. \tag{2.76}$$

iii) $a(\Phi, \Psi)$ é **Coerciva**

De fato, para tanto veja-se que:

$$a(\Phi, \Phi) = a((u, v), (u, v)),$$

onde,

$$\begin{aligned}
a((u, v), (u, v)) &= c_1^2 \int_0^L u_x u_x dx + c_2^2 \int_0^L v_x v_x dx + \alpha \int_0^L (u-v)(u-v) dx \\
&= c_1^2 \int_0^L u_x^2 dx + c_2^2 \int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L (u-v)^2 dx = \|\Phi\|_E^2.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Agora, mostramos que

$$\begin{aligned} f = & \beta \int_0^L (f_1 - f_3)(\eta - \nu)dx - \delta\tau \int_0^L f_6(\eta + \nu)dx - \int_0^L (f_2 + f_4)(\eta + \nu)dx \\ & + \gamma\delta^2 \int_0^L (f_1 + f_3)(\eta + \nu)dx + \gamma\delta\varrho \|f_5\|_{L^1}(\eta + \nu)dx, \end{aligned} \quad (2.78)$$

é linear e contínua.

iv) $f(\eta, \nu)$ é Linear

Segue trivialmente da linearidade da integral.

v) $f(\eta, \nu)$ é Contínua

De fato, pois para $\Psi = (\eta, \nu)$, tem-se das desigualdades, Triangular e Integral que

$$\begin{aligned} |f(\Psi)| &= \left| \beta \int_0^L (f_1 - f_3)(\eta - \nu)dx - \delta\tau \int_0^L f_6(\eta + \nu)dx - \int_0^L (f_2 + f_4)(\eta + \nu)dx \right. \\ &\quad \left. + \gamma\delta^2 \int_0^L (f_1 + f_3)(\eta + \nu)dx + \gamma\delta\varrho \int_0^L \left(\int_0^x f_5(y)dy \right) (\eta + \nu)dx \right| \\ &\leq \beta \int_0^L |f_1 - f_3| |(\eta - \nu)|dx + \delta\tau \int_0^L |f_6| |\eta + \nu|dx + \int_0^L |f_2 + f_4| |(\eta + \nu)|dx \\ &\quad + \gamma\delta^2 \int_0^L |f_1 + f_3| |(\eta + \nu)|dx + \gamma\delta\varrho \|f_5\|_{L^1} |(\eta + \nu)|dx. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder a (2.79), vem que

$$\begin{aligned} |f(\Psi)| &\leq \beta \|f_1 - f_3\| \|(\eta - \nu)\| + \delta\tau \|f_6\| \|(\eta + \nu)\| + \|f_2 + f_4\| \|(\eta + \nu)\| \\ &\quad + \gamma\delta^2 \|f_1 + f_3\| \|(\eta + \nu)\| + \gamma\delta\varrho \|f_5\|_{L^1} \|(\eta + \nu)\|. \end{aligned} \quad (2.80)$$

E aplicando as desigualdades de Poincaré e Minkowski a (2.80). Então temos

$$\begin{aligned}
|f(\Psi)| &\leq \beta\|f_1 - f_3\|(\|\eta - \nu\| + C_4\delta\tau\|f_6\|\|\eta_x\| + C_4\delta\tau\|f_6\|\|\nu_x\| \\
&+ C_5\|f_2\|\|\eta_x\| + C_5\|f_4\|\|\nu_x\| + C_6\gamma\delta^2\|f_1\|\|\eta_x\| + C_6\gamma\delta^2\|f_3\|\|\nu_x\| \\
&+ C_7\gamma\delta\varrho\|f_5\|_{L^1}\|\eta_x\| + C_7\gamma\delta\varrho\|f_5\|_{L^1}\|\nu_x\|.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
|f(\Psi)| &\leq (C_4\delta\tau\|f_6\| + C_5\|f_2\| + C_6\gamma\delta^2\|f_1\| + C_7\gamma\delta\varrho\|f_5\|_{L^1})\|\eta_x\| \\
&+ (C_4\delta\tau\|f_6\| + C_5\|f_4\| + C_6\gamma\delta^2\|f_3\| + C_7\gamma\delta\varrho\|f_5\|_{L^1})\|\nu_x\| \\
&+ \beta\|f_1 - f_3\|(\|\eta - \nu\|).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Sejam,

$$M_5 = C_4\delta\tau\|f_6\| + C_5\|f_2\| + C_6\gamma\delta^2\|f_1\| + C_7\gamma\delta\varrho\|f_5\|_{L^1}. \tag{2.83}$$

$$M_6 = C_4\delta\tau\|f_6\| + C_5\|f_4\| + C_6\gamma\delta^2\|f_3\| + C_7\gamma\delta\varrho\|f_5\|_{L^1}. \tag{2.84}$$

$$M_7 = \beta\|f_1 - f_3\|. \tag{2.85}$$

Agora, aplicando (2.83), (2.84) e (2.85) a (2.82), vem que

$$|f(\Psi)| \leq M_5\|\eta_x\| + M_6\|\nu_x\| + M_7\|\eta - \nu\|. \tag{2.86}$$

Seja agora, $M_7 = \max\{M_5, M_6, M_7\}$.

Então, de (2.86) resulta

$$|f(\Psi)| \leq M_8(\|\eta_x\| + \|\nu_x\| + \|\eta - \nu\|). \tag{2.87}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
|f(\Psi)| &\leq M_8 \left\{ \frac{1}{c_1} \left(c_1^2 \int_0^L |\eta_x|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{1}{c_2} \left(c_2^2 \int_0^L |\nu_x|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\alpha \int_0^L |(\eta - \nu)|^2 dx \right)^{1/2} \right\} \\
&\leq 3M_8 M_9 \left\{ c_1^2 \int_0^L |\eta_x|^2 dx + c_2^2 \int_0^L |\nu_x|^2 dx + \alpha \int_0^L |(\eta - \nu)|^2 dx \right\}^{1/2} \\
&\leq \mathcal{M} \|\Psi\|_E,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

onde se tem,

$$M_9 = \max \left\{ \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right\} \text{ e } \mathcal{M} = 3M_8 M_9.$$

Assim, pelo Lema de Lax-Milgram, existe uma única solução $\Phi = (u, v) \in E$ para o problema variacional

$$a(\Phi, \Psi) = f(\Psi).$$

isto é, Φ satisfaz ao sistema (2.7)-(2.12)

Por outro lado, usando a regularidade elíptica, concluímos que existe uma única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solução para o sistema $\mathcal{A}U = F$. Mais ainda, existe uma constante C que depende somente do domínio, tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Segue portanto que $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq C$, isto é, $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador limitado. Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips (Pazy [3]), $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço Hilbertiano $\mathcal{H}$.

□

Desta maneira, obtemos nosso resultado sobre existência e unicidade de soluções, no teorema seguinte.

Teorema 2.3. (Existência e Unicidade de Soluções) *Existe uma única solução $U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T$ para o sistema (2.7)-(2.12), com $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, satisfazendo*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

2.4 Decaimento Exponencial

Nesta seção mostramos que existe decaimento exponencial para a solução do sistema (2.7)-(2.12). Para tanto, usaremos técnicas de semigrupo.

2.4.1 Técnicas de Semigrupos

No que se segue mostramos que a solução do problema decai exponencialmente, para isso usamos argumentos de semigrupos devido a Liu e Zheng [17]. Para estabelecer esse resultado necessitamos de alguns resultados preliminares. Dessa forma, temos

Lema 2.1. *Seja $\mathcal{A}$ o operador definido em (2.33). Então vale a condição*

$$\{i\beta; \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(\mathcal{A}). \quad (2.89)$$

Demonstração. Demonstraremos o lema, em três etapas

Etapa (1)

Aqui denotamos por $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ a norma no espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Então para todo $\beta \in \mathbb{R}$ com $\|\beta\mathcal{A}^{-1}\| < 1$ o operador linear limitado $(i\beta\mathcal{A}^{-1} - I)$ é invertível, e portanto

$$i\beta I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(i\beta\mathcal{A}^{-1} - I)$$

é invertível. Sua inversa pertence a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, isto é, $i\beta \in \rho(\mathcal{A})$

Além disso, $\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ é uma função contínua para $\beta \in (-\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1})$.

Etapa (2)

Se $\sup\{\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; |\beta| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}\} = M < \infty$ então o operador

$$(i\beta I - \mathcal{A}) = (i\beta_0 I - \mathcal{A}).(I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - \mathcal{A})^{-1}),$$

com $|\beta_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1}$ é invertível para $|\beta - \beta_0| < M^{-1}$. Por outro lado, o seguinte conjunto $\{\beta; |\beta| < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} + M^{-1}\}$ está contido em $\rho(\mathcal{A})$. Além disso, $\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ é uma

função contínua para $\beta \in (-\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} - M^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} + M^{-1})$.

Etapa (3)

Suponha por contradição que $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{A})$. Então existe $z \in \mathbb{R}$, com $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-1} \leq |z| < \infty$ tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |z|\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad e \quad \sup\{\|(i\beta - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; |\beta| < |z|\} = \infty.$$

Resulta que existe uma sequência $\beta_n \in \mathbb{R}$ com $|\beta_n| \rightarrow |z|$, $|\beta_n| < |z|$ e sequências de funções vetoriais

$U_n = (u_n, \varphi_n, v_n, \psi_n, \theta_n, q_n)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ e $F = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6)^T \in \mathcal{H}$ tal que $(i\beta_n I - \mathcal{A})U_n = F_n$ e $F_n \rightarrow 0$ em $\mathcal{H}$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow 0. \quad (2.90)$$

Note que a equação resolvente

$$i\beta_n U_n - \mathcal{A}U_n = F_n. \quad (2.91)$$

em termos de suas componentes, toma a forma

$$i\beta_n u_n - \varphi_n = f_n^1 \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.92)$$

$$i\beta_n \varphi_n - u_{nxx} + \alpha(u_n - v_n) + \beta(\varphi_n - \psi_n) + \delta\theta_{nx} = f_n^2 \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.93)$$

$$i\beta_n v_n - \psi_n = f_n^3 \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, L), \quad (2.94)$$

$$i\beta_n \psi_n - v_{nxx} + \alpha(v_n - u_n) + \beta(\psi_n - \varphi_n) + \delta\theta_{nx} = f_n^4 \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L), \quad (2.95)$$

$$i\beta_n \theta_n + q_{nx} + \delta(\varphi_{nx} + \psi_{nx}) = f_n^5 \rightarrow 0 \text{ em } L_*^2(0, L), \quad (2.96)$$

$$i\beta_n q_n + \gamma q_n + \theta_{nx} = f_n^6 \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, L). \quad (2.97)$$

Por outro lado, fazendo o produto interno de $X_n = (i\beta_n I - \mathcal{A})U_n$ com $Y_n = U_n$ em $\mathcal{H}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle X_n, Y_n \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} i\beta_n u_n - \varphi_n \\ i\beta_n \varphi_n - u_{nxx} + \alpha(u_n - v_n) + \beta(\varphi_n - \psi_n) + \delta\theta_{nx} \\ i\beta_n v_n - \psi_n \\ i\beta_n \psi_n - v_{nxx} + \alpha(v_n - u_n) + \beta(\psi_n - \varphi_n) + \delta\theta_{nx} \\ i\beta_n \varrho \theta_n + q_{nx} + \delta(\varphi_{nx} + \psi_{nx}) \\ i\beta_n \varrho q_n + \gamma q_n + \theta_{nx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ \varphi_n \\ v_n \\ \psi_n \\ \theta_n \\ q_n \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2.98) \\
&= \int_0^L c_1^2 (i\beta_n u_{nx} - \varphi_{nx}) \overline{u_{nx}} dx + \int_0^L [i\beta_n \varphi_n - u_{nxx} + \alpha(u_n - v_n) \\
&+ \beta(\varphi_n - \psi_n) + \delta\theta_{nx}] \overline{\varphi_n} dx + \int_0^L c_2^2 (i\beta_n v_{nx} - \psi_{nx}) \overline{v_{nx}} dx \\
&+ \int_0^L [i\beta_n \psi_n - v_{nxx} + \alpha(v_n - u_n) + \beta(\psi_n - \varphi_n) + \delta\theta_{nx}] \overline{\psi_n} dx \\
&+ \alpha \int_0^L [i\beta_n (u_n - v_n) + (\psi_n - \varphi_n)] (\overline{u_n} - \overline{v_n}) dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \varrho \{ [i\beta_n \varrho \theta_n + q_{nx} + \delta(\varphi_{nx} + \psi_{nx})] \overline{\theta_n} + \tau (i\beta_n \varrho q_n + \gamma q_n + \theta_{nx}) \overline{q_n} \} dx.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle X_n, Y_n \rangle = \beta \int_0^L |\varphi_n - \psi_n|^2 dx - \gamma \int_0^L |q_n|^2 dx. \quad (2.99)$$

Tomando a parte real, temos

$$\Re(\langle X_n, Y_n \rangle) = \beta \int_0^L |\varphi_n - \psi_n|^2 dx - \gamma \int_0^L |q_n|^2 dx \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \quad (2.100)$$

Portanto,

$$\beta \|\varphi_n - \psi_n\|_{L^2(0,L)}^2 dx - \gamma \|q_n\|_{L^2(0,L)}^2 \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0,L), \quad \text{para } n \longrightarrow \infty.$$

Consequentemente, como $\beta, \gamma > 0$, então temos

$$\varphi_n - \psi_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0,L), \quad \text{para } n \longrightarrow \infty. \quad (2.101)$$

$$q_n \longrightarrow 0 \quad \text{em } L^2(0,L), \quad \text{para } n \longrightarrow \infty. \quad (2.102)$$

De (2.97) e (2.102), vem que

$$\|D\theta_n\|_{L^2(0,L)} \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \longrightarrow \infty, \quad (2.103)$$

onde $D = \frac{d}{dx}$.

Então, usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\theta_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \longrightarrow \infty. \quad (2.104)$$

Agora, de (2.96)

$$\|D\varphi_n + D\psi_n\|_{L^2(0,L)} \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \longrightarrow \infty. \quad (2.105)$$

Então, da desigualdade de Poincaré, segue-se que

$$\varphi_n + \psi_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \longrightarrow \infty. \quad (2.106)$$

Agora, de (2.101) e (2.106), concluimos que

$$\varphi_n, \psi_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \longrightarrow \infty. \quad (2.107)$$

Desde de que $|\beta_n| < |z|$, então de (2.92), (2.94) e (2.107), obtemos

$$u_n, v_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \longrightarrow \infty. \quad (2.108)$$

Portanto, obtemos $1 = \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \longrightarrow 0$, o que é uma contradição, Com isso terminamos a prova do lema.

□

Lema 2.2. *Seja o operador $\mathcal{A}$ definido em (2.33). Então, vale a condição*

$$\overline{\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \quad (2.109)$$

Demonstração. Suponha que (2.109) seja falso. Então, existe uma sequência de números reais β_n tal que $|\beta_n| \rightarrow \infty$ e uma sequência de vetores $Y_n = (u_n, \varphi_n, v_n, \psi_n, \theta_n, q_n)^T$ no domínio de $\mathcal{A}$ com norma unitária em $\mathcal{H}$, de modo que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A})Y_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow 0. \quad (2.110)$$

Escrevendo (2.110) termo a termo e depois tomando a parte real de $\langle X_n, Y_n \rangle$, onde $X_n = (i\beta_n I - \mathcal{A})U_n$, já vimos que

$$\beta \|\varphi_n - \psi_n\|_{L^2(0,L)}^2 dx - \gamma \|q_n\|_{L^2(0,L)}^2 \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \rightarrow \infty.$$

E assim,

$$\varphi_n, \psi_n, \theta_n, q_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0,L), \text{ para } n \rightarrow \infty. \quad (2.111)$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (2.93) com u_n . Temos

$$i\beta_n \langle \varphi_n, u_n \rangle - \langle u_{nxx}, u_n \rangle + \alpha \langle (u_n - v_n), u_n \rangle + \beta \langle (\varphi_n - \psi_n), u_n \rangle + \delta \langle \theta_{nx}, u_n \rangle \rightarrow 0. \quad (2.112)$$

Agora, usando (2.92) e integrando por partes (2.112), obtemos

$$\|Du_n\|_{L^2(0,L)}^2 + \alpha \langle (u_n - v_n), u_n \rangle \rightarrow 0 \quad (2.113)$$

Por outro lado, tomando o produto interno de (2.95) com v_n . Temos

$$i\beta_n \langle \varphi_n, v_n \rangle - \langle v_{nxx}, v_n \rangle + \alpha \langle (v_n - u_n), v_n \rangle + \beta \langle (\psi_n - \varphi_n), v_n \rangle + \delta \langle \theta_{nx}, v_n \rangle \rightarrow 0. \quad (2.114)$$

Agora, usando (2.94) e integrando por partes (2.114), obtemos

$$\|Dv_n\|^2 + \alpha \langle (v_n - u_n), v_n \rangle \rightarrow 0. \quad (2.115)$$

Então, de (2.113) e (2.115), vem que

$$\|Du_n\|_{L^2(0,L)}^2 + \|Dv_n\|_{L^2(0,L)}^2 \longrightarrow 0. \quad (2.116)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré a (2.116), temos

$$\|u_n\|_{L^2(0,L)}^2 + \|v_n\|_{L^2(0,L)}^2 \longrightarrow 0. \quad (2.117)$$

Isto é,

$$u_n, v_n \longrightarrow 0. \quad (2.118)$$

Portanto, o vetor Y_n não tem norma unitária, mas isso é uma contradição. Assim, concluímos a demonstração do lema.

□

Teorema 2.4. (de Decaimento Exponencial) *A solução $U = (u, \varphi, v, \psi, \theta, q)^T$ do sistema (2.7)-(2.12) decai exponencialmente.*

Demonstração. Segundo os lemas (2.1) e (2.2), podemos usar o resultado devido a Gearhart-Herbst-Huang-Prüss. Isto é, o semigrupo de contrações no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é exponencialmente estável se, e somente se, satisfaz as condições (2.89) e (2.109). Assim, o teorema está provado.

□

Capítulo 3

Abordagem Numérica

3.1 Considerações Gerais

Nesta seção, temos por objetivo investigar no contexto da análise numérica teórica e computacional, aspectos qualitativos das soluções de um modelo unidimensional de propagação de ondas acopladas, fracamente dissipativo (com mecanismo de dissipação em apenas uma equação). Tal modelo consiste em um sistema hiperbólico de propagação de ondas com condições iniciais e de contorno. No que tange ao aspecto qualitativo, nós obtemos a energia do sistema mostrando o seu decrescimento com a variável temporal. Ressaltamos ainda, com base na literatura existente, que essa energia pode ser exponencial ou polinomialmente estável.

Questões dessa natureza são importantes tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista das aplicações. Nosso foco principal, é investigar sob que condições a discretização numérica total em diferenças finitas preserva o comportamento qualitativo da energia do sistema sob consideração. Extraímos a respectiva energia numérica, onde ilustramos, que tal energia é conservada no caso da ausência de mecanismos que dissipam energia. Isso nos fornece uma precisão inicial em termos da consistência do método. Para o caso dissipativo, nossos resultados numéricos iniciais, nos mostram que existe uma compatibilidade com os resultados a nível do contínuo.

3.2 Apresentação do Problema

O sistema em consideração é semelhante ao do segundo capítulo. No entanto, estamos agora fazendo a investigação em uma versão unidimensional. Vejamos

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha v + u_t = 0 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (3.1)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha u = 0 \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (3.2)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = 0 \text{ com } t \in (0, T) \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \forall x \in (0, L) \quad (3.4)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \forall x \in (0, L), \quad (3.5)$$

onde α é uma constante positiva suficientemente pequena.

3.2.1 Funcional de Energia

Em geral, sistemas hiperbólicos de propagações de ondas possuem uma energia associada que é composta pela soma de uma energia potencial mais uma energia cinética. Esta energia é matematicamente dada por um funcional quadrático dependente do tempo t . Nesta seção encontraremos a energia associada ao sistema (3.1)-(3.5).

Proposição 3.1. (Dissipação de Energia)

A energia $E(t)$ associada ao sistema (3.1)-(3.5) é dada por:

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L uv dx, \quad (3.6)$$

satisfazendo,

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L u_t^2 dx \implies E(t) \leq E(0) \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.7)$$

Demonstração. Com efeito, multiplicamos as equações (3.1) e (3.2) respectivamente por u_t e v_t . Ao obtido, integremos em $]0, L[$. Isto nos dá:

$$\int_0^L u_{tt} u_t dx - \int_0^L u_{xx} u_t dx + \alpha \int_0^L v u_t dx + \int_0^L u_t u_t dx = 0 \quad (3.8)$$

$$\int_0^L v_{tt} v_t dx - \int_0^L v_{xx} v_t dx + \alpha \int_0^L u v_t dx = 0. \quad (3.9)$$

Aplicamos integração por partes a (3.8) e (3.9). Temos então

$$\int_0^L u_{tt}u_t dx + \left[-u_x u_t \Big|_0^L + \int_0^L u_x u_{tx} dx \right] + \alpha \int_0^L v u_t dx + \int_0^L u_t u_t dx = 0 \quad (3.10)$$

$$\int_0^L v_{tt}v_t dx + \left[-v_x v_t \Big|_0^L + \int_0^L v_x v_{tx} dx \right] + \alpha \int_0^L u v_t dx = 0 \quad . \quad (3.11)$$

Vamos adicionar as equações (3.10) e (3.11), aplicando as condições de bordo e regras derivacionais de produto interno. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v_x^2 dx \\ + \alpha \int_0^L (uv)_t dx = - \int_0^L u_t^2 dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Definindo a energia associada ao sistema (3.1)-(3.5) por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \alpha \int_0^L u v dx. \quad (3.13)$$

decorre de (3.12) e (3.13), que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L u_t^2 dx. \quad (3.14)$$

Isto é, a energia é decrescente e, portanto o sistema em questão é dissipativo, uma vez que

$$E(t) = E(0) - \int_0^t \int_0^L u_t^2 dx dt. \quad (3.15)$$

Implicando em,

$$E(t) \leq E(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.16)$$

□

3.3 Método Explícito de Integração Numérica

Nesta seção, estudamos um esquema explícito de aproximação por diferenças finitas. Para nossos propósitos, definimos os parâmetros $\Delta x = \frac{L}{J+1}$, $\Delta t = \frac{T}{N+1}$ para $J, N \in \mathbb{N}$ e a rede de pontos,

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_J = J\Delta x < x_{J+1} = L \quad (3.17)$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_N = N\Delta t < t_{N+1} = T, \quad (3.18)$$

onde $x_j = j\Delta x$ e $t_n = n\Delta t$ para $j = 0, 1, 2, \dots, J+1$ e $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$.

O esquema numérico espaço-tempo em diferenças finitas que assumimos para o problema (3.1)-(3.5) consiste nas seguintes equações numéricas:

$$\bar{\partial}_t \partial_t u_j^n - \bar{\partial}_x \partial_x u_j^n + \alpha v_j^n + \frac{\bar{\partial}_t + \partial_t}{2} u_j^n = 0, \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq J \quad (3.19)$$

$$\bar{\partial}_t \partial_t v_j^n - \bar{\partial}_x \partial_x v_j^n + \alpha u_j^n = 0, \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq J \quad (3.20)$$

$$u_0^n = v_{J+1}^n = v_0^n = v_{J+1}^n = 0, \quad \forall n, \quad 0 \leq n \leq N \quad (3.21)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad \frac{\bar{\partial}_t + \partial_t}{2} u_j^0 = u_1(x_j), \quad \forall j, \quad 0 \leq j \leq J \quad (3.22)$$

$$v_j^0 = v_0(x_j), \quad \frac{\bar{\partial}_t + \partial_t}{2} v_j^0 = v_1(x_j), \quad \forall j, \quad 0 \leq j \leq J, \quad (3.23)$$

onde os operadores $\bar{\partial}_t \partial_t u_j^n$ e $\bar{\partial}_x \partial_x u_j^n$ são dados por

$$\bar{\partial}_t \partial_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad \bar{\partial}_x \partial_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.24)$$

e

$$\frac{\bar{\partial}_t + \partial_t}{2} u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Analogamente os operadores $\bar{\partial}_t \partial_t v_j^n$ e $\bar{\partial}_x \partial_x v_j^n$ são dados por

$$\bar{\partial}_t \partial_t v_j^n = \frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad \bar{\partial}_x \partial_x v_j^n = \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.25)$$

Estas equações numéricas são construídas pelo uso da série de Taylor aplicada nas variáveis espacial e temporal. Todas são consistentes com erro de truncamento da ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Sendo consistentes e estáveis, segue pelo Lema de Lax que tais equações convergem. Por conveniência, usamos o critério de estabilidade devido a saber $\Delta t \leq \Delta x$.

3.3.1 Energia Totalmente Discreta

Proposição 3.2. *A Energia Totalmente Discreta, do problema (3.19)-(3.23) é dada por:*

$$\begin{aligned} E^n := & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) + \alpha \sum_{j=1}^J (v_j^n u_j^{n+1} + u_j^n v_j^{n+1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Demonstração. Consideramos a equação (3.19), escrita de forma explícita

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \alpha v_j^n + \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = 0. \quad (3.27)$$

Agora vamos multiplicar a equação (3.27) por $(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})/2\Delta t$ e efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$, daí

$$\begin{aligned} & \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ & - \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ & + \alpha \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J v_j^n (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Façamos agora as seguintes simplificações

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{1,h} &= \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta t \Delta t^2} \sum_{j=1}^J (u_j^{n+1} + u_j^{n-1})(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) - \frac{2\Delta x}{2\Delta t \Delta t^2} \sum_{j=1}^J u_j^n (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta t \Delta t^2} \sum_{j=1}^J (|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^{n-1}|^2 - 2u_j^n u_j^{n+1} + 2u_j^n u_j^{n-1}).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Na expressão (3.29), adicionamos e subtraímos o somatório

$$\frac{\Delta x}{2\Delta t \Delta t^2} \sum_{j=1}^J |u_j^n|^2$$

para obtermos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{1,h} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t \Delta t^2} \sum_{j=1}^J (|u_j^{n+1}|^2 - 2u_j^n u_j^{n+1} + |u_j^n|^2 - |u_j^{n-1}|^2 + 2u_j^n u_j^{n-1} - |u_j^n|^2) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta t \Delta t^2} \sum_{j=1}^J (|u_j^{n+1} - u_j^n|^2 - |u_j^{n-1} - u_j^n|^2).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, daí

$$\mathbb{I}_{1,h} = \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right|^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right|^2. \tag{3.31}$$

Simplificando $\mathbb{I}_{2,h}$ dado abaixo, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{2,h} &= \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta x^2 \Delta t} \sum_{j=1}^J (u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
&\quad + \frac{\Delta x}{2\Delta x^2 \Delta t} \sum_{j=1}^J (u_{j-1}^n - u_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Usamos novamente as condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{2,h} &= \frac{\Delta x}{2\Delta x^2 \Delta t} \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n - u_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta x^2 \Delta t} \sum_{j=0}^J (u_j^n - u_{j+1}^n)(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1}) \\
&= \frac{\Delta x}{2\Delta x^2 \Delta t} \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^n u_j^{n+1} - u_{j+1}^n u_j^{n-1} - u_j^n u_{j+1}^{n+1} + u_j^n u_{j+1}^{n-1}) \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta x^2 \Delta t} \sum_{j=0}^J (u_j^n u_{j+1}^{n+1} - u_j^n u_{j+1}^{n-1} - u_{j+1}^n u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n u_{j+1}^{n-1}) \\
&= -\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Combinando as simplificações $\mathbb{I}_{1,h}$ em (3.31) e $\mathbb{I}_{2,h}$ em (3.33) temos,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right|^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 \\
&+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
&+ \alpha \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J v_j^n (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) - \Delta x \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Simplificando Δt segue que,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\
&- \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
&+ \alpha \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J v_j^n (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) - \Delta x \Delta t \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

De forma inteiramente análoga, consideremos a equação (3.20), escrita na forma explícita

$$\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \alpha u_j^n = 0. \tag{3.36}$$

□

Agora multiplicamos a equação (3.36) por $(v_j^{n+1} - v_j^{n-1})/2\Delta t$ e efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$, daí

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) \\ & - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ & - \alpha \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J u_j^n (v_j^{n+1} - v_j^{n-1}) = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

E então, adicionando as equações (3.35) e (3.37) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\ & + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 \\ & - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ & + \alpha \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J v_j^n (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) - \alpha \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^J u_j^n (v_j^{n+1} - v_j^{n-1}) \\ & = \Delta x \Delta t \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Definindo,

$$\begin{aligned} E^n := & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) + \alpha (v_j^n u_j^{n+1} + u_j^n v_j^{n+1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Obtemos então,

$$E^n - E^{n-1} = -\Delta x \Delta t \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 \Rightarrow E^n \leq E^0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, N+1. \quad (3.40)$$

Fica portanto demonstrado, o seguinte resultado

Teorema 3.1. (Energia Totalmente Discreta)

Sejam (u_j^n, v_j^n) a solução do esquema de diferenças finitas (3.19)-(3.23). Então para todo $\Delta t, \Delta x \in (0, 1)$ a taxa discreta de variação de energia numérica do esquema (3.19)-(3.23), no instante de tempo t_n é dada por

$$\frac{E^n - E^{n-1}}{\Delta t} = -\Delta x \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, N+1. \quad (3.41)$$

3.4 Experimentos Computacionais

No presente trabalho é de nosso interesse reproduzirmos numericamente os resultados obtidos no contínuo, de forma a ratificar os mesmos. Desta feita, após fazermos a discretização total da energia, passemos às simulações numéricas, as quais sugerem os gráficos estabelecidos abaixo. Vale ressaltar, que aqui usamos o seguinte critério de estabilidade $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ e que a energia numérica é um importante instrumento para certificar os resultados analíticos de estabilidade polinomial.

As figuras (3.1) e (3.2) mostram o comportamento de conservação da energia numérica E^n , onde se tem um sistema não-amortecido. Já nas figuras (3.3) e (3.4), temos dissipação da energia, onde se observa o seu decaimento. Vale ressaltar, que temos dois mecanismo de dissipação: em somente uma ou em duas variáveis. E finalmente, nas figuras (3.5) e (3.6), observamos (para os dois mecanismos de dissipação citados) os comportamentos das soluções u e v , onde se tem Full e Partial Damping.

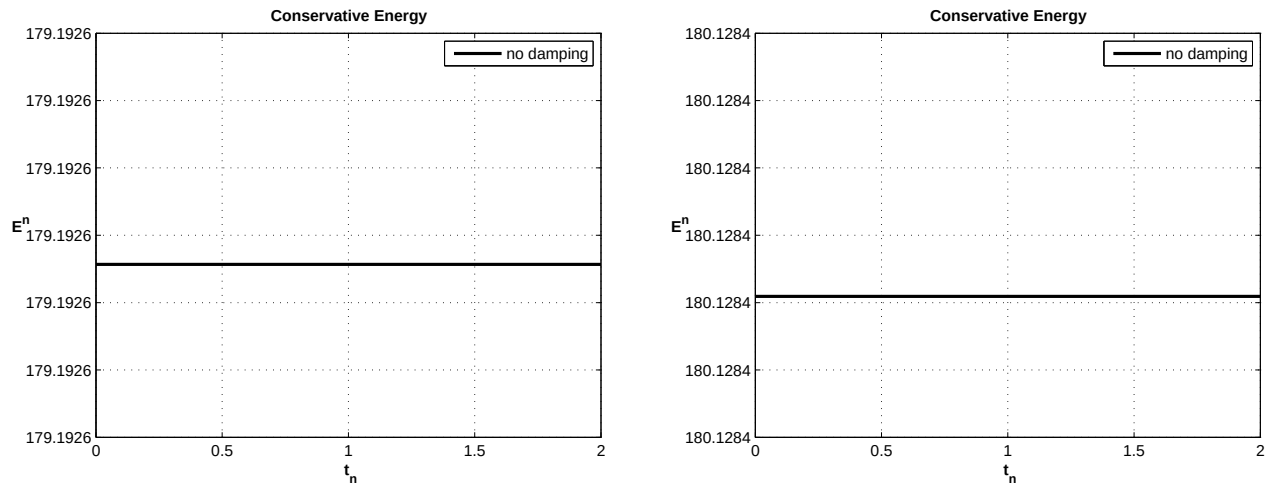


Figura 3.1: Ausência de Damping $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.9600$ e $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.8960$

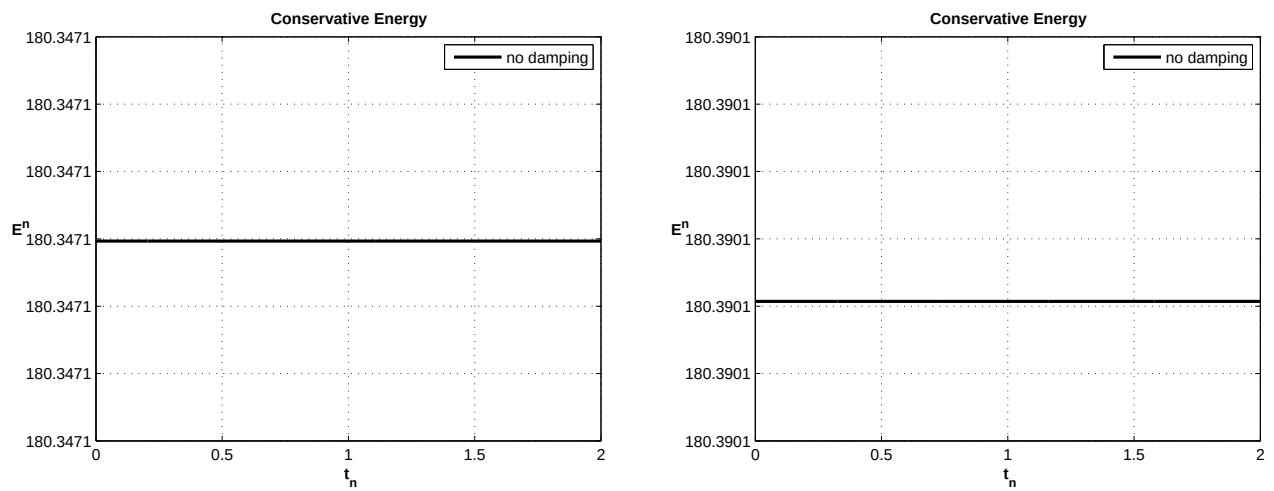


Figura 3.2: Ausência de Damping $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.7680$ e $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.7168$

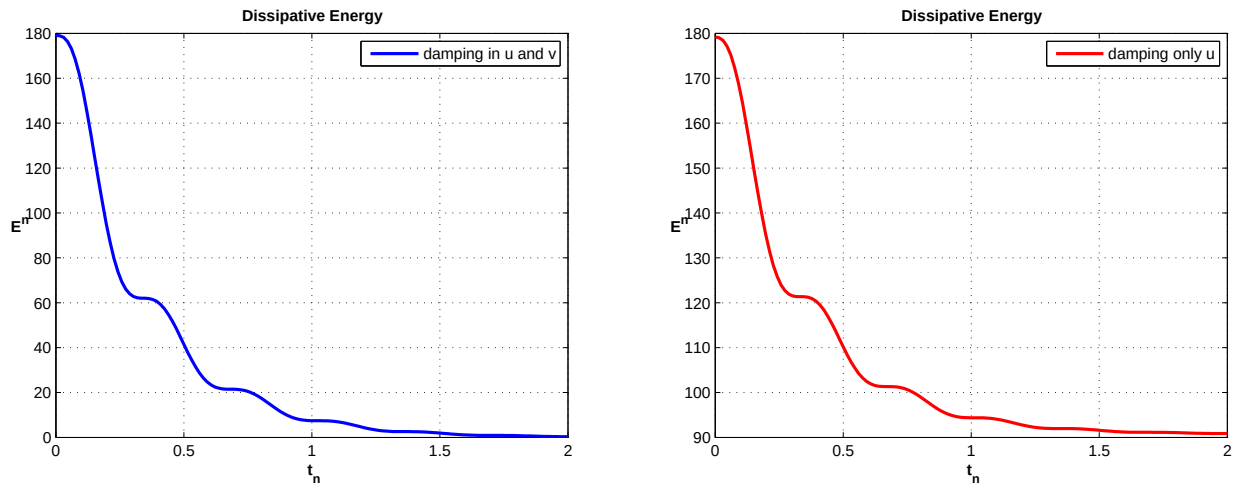


Figura 3.3: Damping em u e v $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.9600\right)$ e Damping somente em u $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.960\right)$

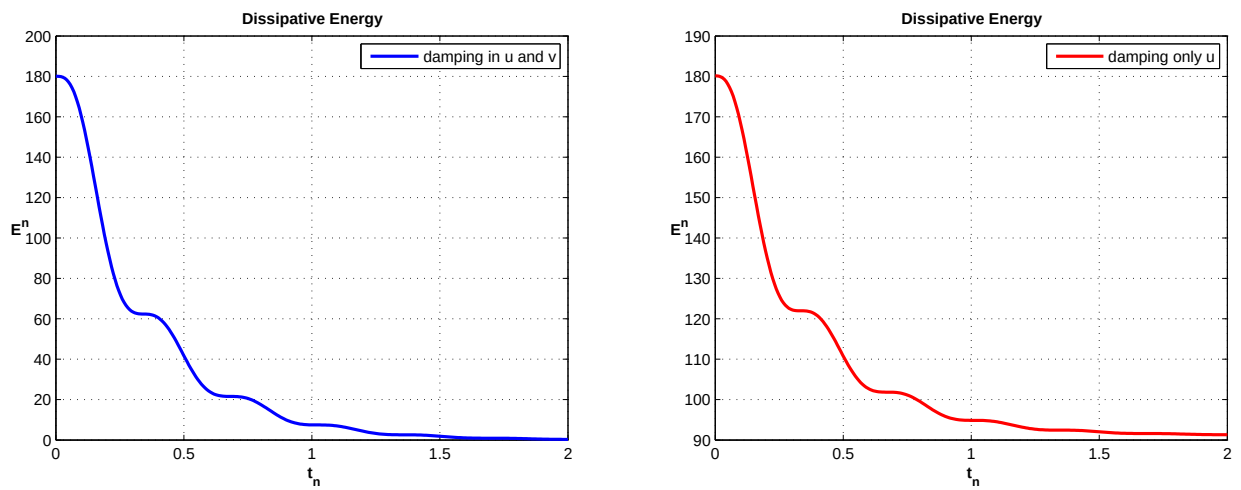


Figura 3.4: Damping em u e v $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.8960\right)$ e Damping somente em u $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.8960\right)$

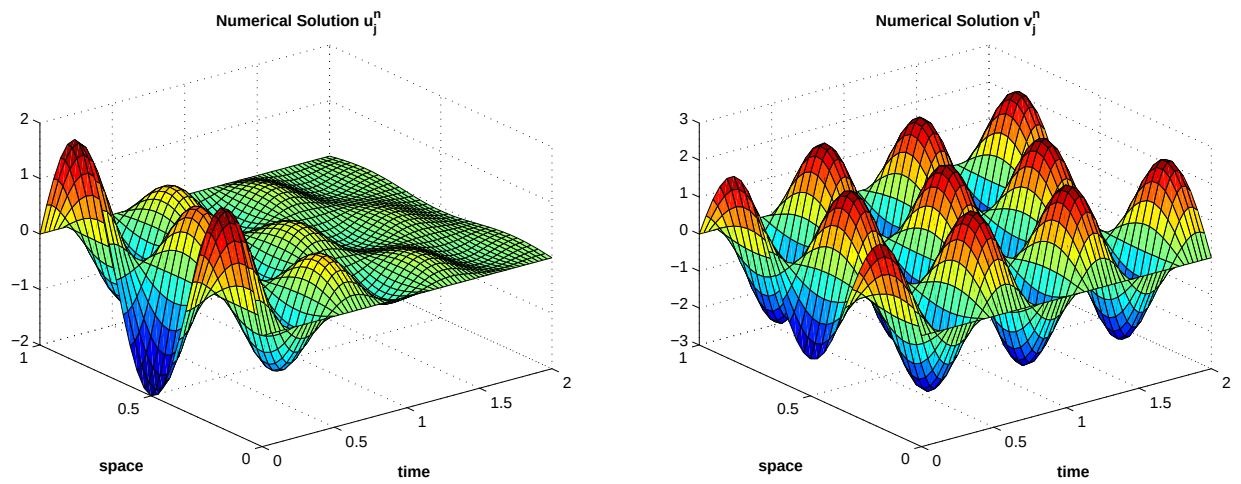


Figura 3.5: Damping Partial

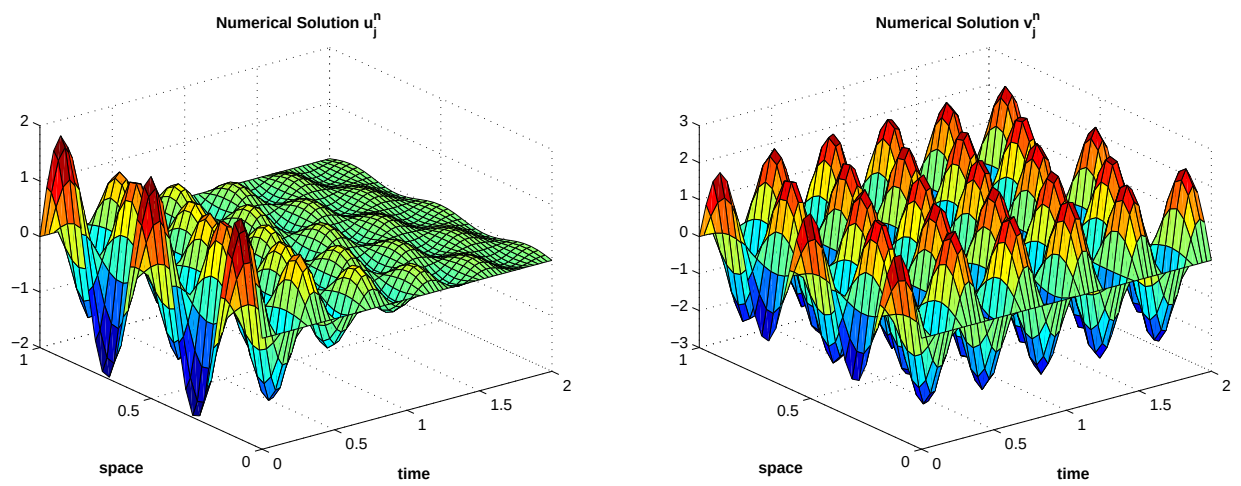


Figura 3.6: Damping Partial

Considerações Finais

A pesquisa da Tese, foi motivada por trabalhos específicos da área de Análise Matemática, mais precisamente a estabilização de sistemas acoplados de equações diferenciais parciais. Estudamos dois sistemas acoplados de equações de ondas. No primeiro tínhamos um sistema fracamente dissipativo, onde se mostrou a existência e unicidade. Tal sistema foi amplamente estudado com dois mecanismos de dissipação nas duas equações, onde ocorre o decaimento exponencial, todavia, ao retirarmos um dos mecanismos, temos uma nova configuração, isto é, passamos a ter um comportamento assintótico algébrico.

O decaimento polinomial agora em questão, tem um novo rumo, posto que conseguimos via Tomilov-Borichev mostrar que a taxa de decaimento é ótima. Além disso para o sistema em questão, o estudamos em sua forma unidimensional, onde fizemos discretização total da energia via o método de diferenças finitas e também simulações numéricas. Os gráficos obtidos, tanto da energia quando das soluções foram condizentes com os resultados no contínuo.

Agora, quanto ao segundo sistema, tínhamos a junção de dois modelos conhecidos, isto é, um sobre sistemas acoplados em paralelo, com amortecimento viscoso e outro que introduz a lei de Fourier-Cataneo, a qual corrige o “Paradoxo da Lei de Fourier”. Nesse sistema, fizemos novamente o estudo da existência e unicidade e ao contrário do que se esperava, não há relação entre as velocidades, que origine dependência para o decaimento exponencial. Este se dá de forma natural.

Apêndice

Principais Resultados Usados na Tese

Vamos agora elencar os principais resultados usados ao longo do texto. Não temos aqui o objetivo da demonstração, tampouco a instrução à título de aprofundamento na teoria. Desta feita queremos apenas nortear o leitor, através de um referencial de resultados.

Teorema 3.2. (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear em X , com domínio $D(A)$ denso em X .*

- (1) *Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações em X .*
- (2) *Se A é o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Teorema 3.3. (Gearhart) *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações sobre o espaço de Hilbert H . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \quad e \quad \overline{\lim_{|\beta| \rightarrow \infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_H < \infty.$$

Lema 3.1. (Lax-Milgram) *Seja uma forma bilinear b , limitada e coerciva num espaço de Hilbert H . Então, dado qualquer funcional linear contínuo f em H , existe um único $v \in H$ de modo que*

$$b(u, v) = f(u), \quad \text{onde } u \in H.$$

Proposição 3.3. (Desigualdade de Young) *Sejam a e b números reais não negativos e considere $p \in (1, \infty)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 3.4. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p \in (1, +\infty)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Teorema 3.5. (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um domínio aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma constante positiva C_p tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{onde } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde C_p é chamada de constante de Poincaré.

Teorema 3.6. *Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 de contrações dos operadores lineares, no espaço de Hilbert com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. E se*

$$\|T(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\gamma} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$$

Então, nós temos que para qualquer $\varepsilon > 0$ um $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$\frac{1}{\beta^{\varepsilon + \frac{1}{\gamma}}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq C_\varepsilon$$

Teorema 3.7. *Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 de contrações dos operadores lineares, no espaço de Hilbert com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Então temos, que para um $\alpha > 0$ fixo, as seguintes condições são equivalentes*

$$i) \quad \|R(is, \mathcal{A})\| = \mathcal{O}(|s|^\alpha), \quad s \longrightarrow \infty$$

$$ii) \quad \|T(t)(-\mathcal{A})^{-\alpha}\| = \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \longrightarrow \infty$$

$$iii) \quad \|T(t)(-\mathcal{A})^{-\alpha}x\| = o(t^{-1}), \quad t \longrightarrow \infty, \quad x \in \mathcal{H}$$

$$iv) \quad \|T(t)(-\mathcal{A})^{-1}\| = \mathcal{O}(t^{-1/\alpha}), \quad t \longrightarrow \infty$$

$$v) \quad \|T(t)(-\mathcal{A})^{-1}\| = o(t^{-1/\alpha}), \quad t \longrightarrow \infty \quad x \in \mathcal{H}$$

Referências Bibliográficas

- [1] **A. Borichev, Y. Tomilov**, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*, Math. Ann. 347 (2) (2009) 455-478.
- [2] **Anderson de Jesus Araújo Ramos**, *Análise Numérica em Diferenças Finitas da Desigualdade de Observabilidade de Sistemas Hiperbólicos Conservativos*, Tese de Doutorado - Programa de Doutorado em Matemática - UFPA (2015).
- [3] **A. Pazy**, *semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, (1983).
- [4] **Cavalcanti, M. M., Cavalcanti, V. N. D.** *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. 1º. ed. Maringá: Editora da Universidade Estadual de Maringá (EDUEM), 2009. v. 1. 452p .
- [5] **Cavalcanti, M. M., Cavalcanti, V. N. D., KOMORNIK, V.** *Introdução à Análise Funcional*. 1. ed. Maringá: EDUEM, 2011. v. 1. 481p.
- [6] **Cunha, Carlos Alberto Raposo da**, *Semigrupos Aplicados a Sistemas Dissipativos em EDP*. Florianópolis, SC : SBMAC, 2007, 79 p. (Notas em Matemática Aplicada; v. 32)
- [7] **C.A. Raposo and W.D. Bastos**, *Energy Decay for the Solutions of a Coupled Wave System*. TEMA Tend. Mat. Apl. Comput., 10, No. 2 (2009), 203-209.
- [8] **Emmanuele DiBenedetto**, *Classical Mechanics Theory and Mathematical Modeling* Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

-
- [9] **Fatiha Alabau Boussoira, J. Le Rousseau, E. Zuazua, R. Brockett and O. Glass**, *Control of Partial Differential Equations*. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy, July 19 - 23, 2010.
- [10] **Fatiha Alabau Boussoira, P. Cannarsa and V. Komornik**, *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*. J. Evol. Equ., 2, 127-150, (2002).
- [11] **Fatiha Alabau Boussoira**, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015-1020, (1999).
- [12] **F. Tahamtani**, *Boundary Stabilization of a Compactly System of Wave Equations* Journal of Mathematical Extension Vol. 1, N0. 2, (2007), 127-137.
- [13] **G. D. Smith**, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1984.
- [14] **H. Brezis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* Springer-Verlag, Masson, 2010.
- [15] **H. Brezis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co./ American Elsevier Publishing Co., Inc., Amsterdam, London / New York, Masson, 1973.
- [16] **Hugo D. Fernández Sare and Reinhard Racke**, *On the Stability of Damped Timoshenko Systems: Cattaneo Versus Fourier Law*. Archive for Rational Mechanics and Analysis. October 2009, Volume 194, Issue 1, pp 221-251.
- [17] **Jaime E. Muñoz Rivera**, *Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity*. Funkcialaj Ekvacioj, 35 (1992) 19-30.
- [18] **Liu, Z. e Zheng, S.**, *Semigroups associated with dissipative systems*. CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman e Hall. 1999.
- [19] **L. H. Fatori and J. E. M. Rivera**, *Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system*, IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 75, no. 6, pp. 881-904, 2010.

-
- [20] **Mahmoud Najafi**, *Stabilizability of Coupled Wave Equations in Parallel Under Various Boundary Conditions* IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 42, NO. 9, SEPTEMBER 1997.
- [21] **Mahmoud Najafi, G. R. Sarhangi, and H. Wang**, *Study of Exponential Stability of Coupled Wave Systems via Distributed Stabilizer*. Hindawi Publishing Corporation. IJMMS 28:8 (2001) 479 - 491.
- [22] **M. Najafi, G. R. Sarhangi and H. Wang**, *The study of stability of coupled wave equations under various end conditions*, Proceedings of 31st Conferences on Decision and Control, Tucson, Arizona, (1992), 374-379.
- [23] **M. L. Santos R. G. C. Almeida**, *Lack of exponential decay of a coupled system of wave equations with memory*. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12:1023 - 1032, 2011.
- [24] **M. L. Santos, Rocha, M. P. C., Gomes, S. C.**, *Polynomial Stability of a coupled system of waves equations weakly dissipative*. Applicable Analysis. , v.86, 1293 - 1302, (2007).
- [25] **Negreanu, M. and Zuazua, E.** *Uniform boundary controllability of a discret 1-D wave equations*, Syst. Control Letters, 48 (2003), 261 - 279.
- [26] **J. Prüss**, *On the spectrum of C_0 -semigroups*. Trans. AMS 28, 847-857, (1984).
- [27] **Racke, Reinhard**; *Thermoelasticity with second sound-exponential stability in linear and non-linear 1-d*, Mathematical Methods in the Applied Sciences Vol. 25, (5), pages 409- 441, (2002).
- [28] **R. F. C. Lobato, S.M. S. Cordeiro, M. L. Santos, and D. S. Almeida Júnior**, *Optimal Polynomial Decay to Coupled Wave Equations and Its Numerical Properties*. Hindawi Publishing Corporation. Journal of Applied Mathematics. Volume 2014. Article ID 897080.
- [29] **Salim A. Messaoudi and Belkacem Said-Houari**, *Exponential stability in one-dimensional non-linear thermoelasticity with second sound*. Math. Meth. Appl. Sci. DOI: 10.1002/mma.556.

-
- [30] **Sebastião Martins Siqueira Cordeiro**, *Estabilidade Geral para o Modelo de Bresse e Taxa Ótima Polinomial para Sistemas de Equações de Ondas*, Tese de Doutorado - Programa de Doutorado em Matemática - UFPA (2014).
- [31] **Smith, J. D.:** *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1984.
- [32] **Strauss, W. and Vazquez, L. :** *Numerical solution of a nonlinear Klein-Gordon equation*, Journal of Computational Physics, 28(2), 1978, 271-278.
- [33] **Trefethen, L. N.:** *Spectral Methods in MATLAB*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [34] **V.Barbu.** *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Editura Academici Române, Bucuresti, 1974.