



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Vigas de Timoshenko aplicadas para duplos nanotubos e Sistema Elástico Poroso Não Linear: Análise Assintótica e Numérica

Marly dos Anjos Nunes

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM
Dezembro de 2015

Marly dos Anjos Nunes

**Vigas de Timoshenko aplicadas para duplos
nanotubos e Sistema Elástico Poroso Não Linear:
Análise Assintótica e Numérica**

Tese submetida ao corpo docente
do Programa em Associação Am-
pla de Doutorado em Matemática-
UFPA/UFAM, como parte dos requisi-
tos necessários para obtenção do grau
de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Nunes, Marly dos Anjos, 1985-

Vigas de Timoshenko aplicadas para duplos nanotubos e sistema elástico poroso não linear: análise assintótica e numérica / Marly dos Anjos Nunes. - 2015.

Orientador: Mauro de Lima Santos.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Doutorado), Belém, 2015.

1. Nanotubos. 2. Vigas de Timoshenko. 3. Decaimento exponencial. 4. Decaimento polinomial. 5. Diferenças finitas. I. Título.

CDD 22. ed. 620.5

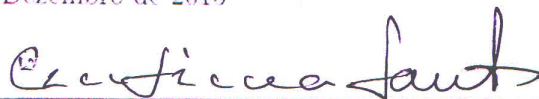
Vigas de Timoshenko Aplicadas para Duplos Nanotubos e Sistema Elástico Poroso Não Linear: Análise Assintótica e Numérica

por

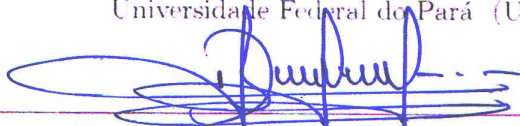
Marly dos Anjos Nunes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA- UFPA/UFAM. COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM MATEMÁTICA.

Data da defesa: 18 de Dezembro de 2015



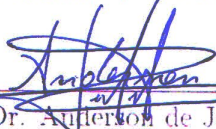
Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)



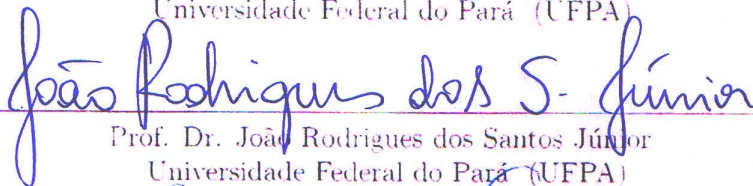
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Universidade Federal do Pará (UFPA)



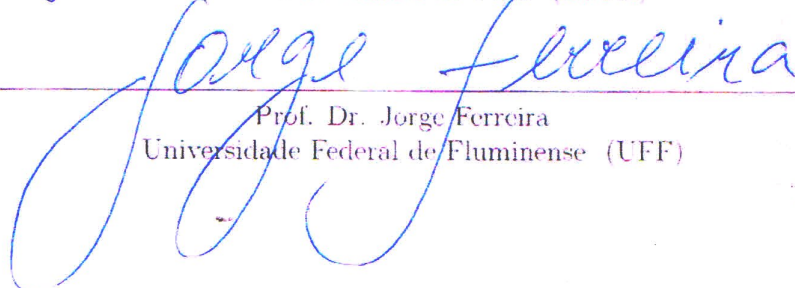
Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
Universidade Federal do Pará (UFPA)



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Universidade Federal do Pará (UFPA)



Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Universidade Federal do Pará (UFPA)



Prof. Dr. Jorge Ferreira
Universidade Federal de Fluminense (UFF)

Dedicatória

À minha Mãe Ana Celina.

Epígrafe

**“A fascinação pelo desconhecido é a verdadeira fonte
da arte e da ciência”. Albert Einstein**

Agradecimentos

Agradeço

- Ao meu Deus todo poderoso por ter me dado o dom da vida, preenchendo-a com situações que me engrandecem tanto espiritualmente quanto fisicamente.
- Às Nossas Senhoras, em especial a Nossa Senhora de Nazaré e à padroeira da minha comunidade Nossa Senhora da Conceição, por terem intercedido junto ao seu filho Jesus Cristo por mim, derramando bençãos e graças à minha família.
- À minha mãe Ana Celina, mulher guerreira, a quem dedico todo o meu amor e carinho e que também fez sempre o possível para que a minha caminhada se estendesse rumo à vitória. Mãe você é a **DOUTORA!**
- À minha filha Yasmin Chadad, por ser uma filha carinhosa e pela felicidade que me proporciona em todos os dias, muito obrigada por você com aquele sorriso me deixar disposta para realizar qualquer atividade.
- Ao meu marido Rezala Chadad, por ser meu companheiro nessa caminhada, por acreditar em mim, sempre me incentivando e mostrando que eu era capaz de chegar até aqui, o homem maravilhoso, o pai responsável, que ama a família que construiu.
- Ao Cristiano e Leonardo, meus irmãos, pelos momentos de descontração, conversas incentivadoras, por me salvarem em algum momento difícil e me confortarem quando eu mais precisei.
- Aos meus sobrinhos Chrystian e Bryan por me engradecerem como tia.
- Às minhas tias Raimunda, Marize e Ermelinda pelas conversas em casa, pelas perseguições, quase sempre minha, pelas risadas, pelos almoços, pela construção do meu caráter, pelo exemplo de vida, por me darem a honra de fazer parte dessa família, meu muito obrigada!
- Ao meu tio Mizinho pela convivência diária e exemplo de vida.
- Ao meu tio Ademir pelo açaí de todo dia, que me deu suporte energético para superar os cansaços da vida.
- Ao meu tio Paulo (em memória) que enquanto vivo não mediu esforços para me proporcionar meios e deixar uma boa educação.
- Aos meus primos Luciano, Osmar e Patricia Cunha, às minhas cunhadas Millene, Pâmela e Patrícia Viana, pela torcida a meu favor e pelas palavras incentivadoras e confortáveis.
- Ao meu orientador Professor Mauro, pela luz que me fez enxergar me mostrando o caminho a ser seguido, sempre com simplicidade e dedicação. Agradeço pela sua atenção, paciência, honestidade, respeito e amizade. Obrigada por tudo!

- Ao Professor Dilberto Júnior pelas sugestões que engrandeceram este trabalho, pelo aprendizado, pela paciência, generosidade e amizade.
- Aos meus colegas desta jornada: Anderson Ramos, Misael, Elaine, Renato, Jeremias, Solón, João, Sancho, Leonardo. Em especial: Anderson Campelo, pela disposição, paciência, apoio e sugestões que enalteceram este trabalho, Marcos Lima pelos momentos de descontração, por acreditar na minha capacidade, por sempre me incentivar e pelos almoços na “gaiola” e Abel que tanto me ajudou no aspecto físico de meu modelo.
- Ao Programa de Doutorado em Matemática da Universidade Federal do Pará pelo apoio de todos os professores e técnicos.
- À CAPES, pela concessão da bolsa de doutorado e apoio financeiro.

Lista de Figuras

1.1	Estrutura do Fulereno [47]	10
1.2	Nanotubo de múltiplas camadas [14]	10
1.3	Estrutura do nanotubo [47]	11
1.4	Double Walled Nanotubes (DCNTs) [47]	12
1.5	Nanotubo de parede dupla [14]	14
1.6	Modelo de Timoshenko simulado no software Hyperchem 7.5.	17
1.7	Força de Van der Waals versus Tempo.	18
1.8	Van der Waals	18
4.1	$\alpha_i = 0, i = 0, 1, 2, 3.$	72
4.2	$\alpha_i > 0, i = 0, 1, 2, 3.$	72
4.3	$G \neq E/K_1$ e $G \neq E/K_2$	73
4.4	$G = E/K_1$ e $G = E/K_2$	74
4.5	$\mathcal{C}\left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1}\right) \neq \frac{\kappa_1}{b_1}.$	75
4.6	$\rho_2/b_1 = \rho_1/\kappa_1$ e $\kappa_1/b_1 \neq 0.$	75

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática

Vigas de Timoshenko aplicadas para duplos nanotubos e Sistema Elástico Poroso Não Linear: Análise Assintótica e Numérica

por Marly dos Anjos Nunes

No presente trabalho, mostramos que existe um número que caracteriza a estabilização do sistema duplo nanotubo- Timoshenko. Introduzimos ao modelo dissipações do tipo atrito atuando nos declives dos tubos e no deslocamento lateral do tubo externo. Identificamos que o sistema de vigas de Timoshenko associado ao nanotubo de parede dupla possui as duas velocidades características do sistema clássico de Timoshenko $v_1^2 := \frac{\rho_2}{b_1}$ e $v_2^2 := \frac{\rho_1}{\kappa_1}$. Sendo assim, mostramos que o sistema é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\frac{\rho_2}{b_1} = \frac{\rho_1}{\kappa_1} \text{ e } \kappa_1^2 - \mathcal{C}\kappa_1 b_1 \left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} \right) = \frac{\kappa_1}{b_1} \neq 0.$$

Caso contrário, provamos que o modelo é polinomialmente estável com taxa ótima de decaimento. Para certificar nossos resultados analíticos realizamos um estudo numérico do sistema dissipativo utilizando o modelo totalmente discreto em diferenças finitas.

Paralelamente, estudamos a estabilidade assintótica de soluções para um sistema de evolução elástico poroso com dissipações localizadas não lineares atuando sobre o deslocamento e a fração de volume. Com ajuda do método introduzido por Daloutti [15] e algumas novas observações, provamos a estabilidade assintótica.

Palavras-chave: Sistemas Duplo Nanotubo- Timoshenko; estabilidade exponencial; decaimento polinomial; diferenças finitas; sistema elástico poroso.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática

Beams of Timoshenko applied for dual nanotubes and Systems Porous Elastic Nonlinear: Asymptotic and Numerical Analysis

by Marly dos Anjos Nunes

In this paper, we show that there is a number that characterizes the stabilization of the double nanotubo- Timoshenko system. We introduced the dissipation model type friction acting on the slopes of the pipes and the lateral displacement of the outer tube. We found that the Timoshenko beam system associated with the dual-wall nanotube has the two characteristics of the classical system speeds Timoshenko $v_1^2 := \frac{\rho_2}{b_1}$ e $v_2^2 := \frac{\rho_1}{\kappa_1}$. Thus, we show that the system is exponentially stable if, and only if,

$$\frac{\rho_2}{b_1} = \frac{\rho_1}{\kappa_1} \text{ e } \kappa_1^2 - \mathcal{C}\kappa_1 b_1 \left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} \right) = \frac{\kappa_1}{b_1} \neq 0.$$

Otherwise, we prove that the model is stable polynomially with optimal rate of decay. To make our analytical results conducted a numerical study of the dissipative system using fully discrete model in finite differences.

In addition, we studied the stability asymptotic solutions for a porous elastic evolution system with non-linear localized dissipation acting on the displacement and volume fraction. With the help of the method introduced by Daloutti [15] and some new observations, we prove the asymptotic stability.

Keywords: Double Nanotubo- Timoshenko systems; exponential estabilidad; polynomial decay; finite differences;porous elastic system.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Considerações Gerais e Motivações	3
1.2	O Valor e o sinal da força de Van der Waals	17
1.3	Objetivos da Tese	21
1.4	Organização da Tese	22
2	Modelo de Timoshenko para Nanotubos com Dupla Parede	24
2.1	Introdução	24
2.2	Funcional de Energia	25
2.3	O Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares	27
3	Duplo Nanotubo-Timoshenko: Dissipação nos declives do tubo e no deslocamento lateral do tubo externo	33
3.1	Introdução	33
3.2	Falta de estabilidade exponencial	34
3.3	Estabilidade Assintótica	39
3.4	Estabilidade Polinomial e Taxa Ótima	47
4	Modelo Espaço-Tempo em Diferenças Finitas	51
4.1	Introdução	51
4.2	Método Numérico Explícito em Diferenças Finitas de um modelo de nanotubo de parede dupla	51
4.3	A Energia Discreta	55
4.4	Simulações Numéricas	71
4.4.1	Casos conservativo e dissipação total	72
4.4.2	Dissipação nos declives do tubo e no deslocamento lateral do tubo externo: $\alpha_0 = 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$	73
4.4.3	Dissipação somente nos declives do tubo: $\alpha_0 = \alpha_2 = 0, \alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0$	75
5	Modelo elástico poroso com dissipação localizada não linear	76
5.1	Introdução	76
5.2	Existência e unicidade de solução integral do modelo	77
5.2.1	Hipótese sobre as funções g_i e a_i	77
5.2.2	A Energia do modelo	78
5.2.3	O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares e Não Lineares	79
5.3	Desigualdade de Observabilidade	84
5.4	Estabilidade Assintótica	90

6	Considerações Finais	101
	Referências Bibliográficas	104

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais e Motivações

Tecnologias modernas com aplicações à ciência requerem modelos matemáticos de sólidos que facilitem o cálculo das deformações e tensões com precisão e sem excessiva análise matemática. O modelo a ser utilizado, típico e fundamental na área da estrutura mecânica, torna possível atingir este objetivo.

A viga é um dos modelos fundamentais de pequenas oscilações em estruturas elásticas e pode ser definida estrutura delgada ou não-delgada. Uma viga ou barra delgada são sólidos homogêneos cujo comprimento é grande comparado com as dimensões de sua secção transversal. No caso em que a espessura é da mesma ordem de grandeza da altura e, estas são bem menores que o comprimento, as vigas são designadas vigas finas ou vigas não-delgadas.

Utilizada em uma variedade de aplicações na área da engenharia, as vigas não-delgadas são solicitadas essencialmente devido à flexão. Sejam elas usadas em hélices de helicópteros, asas de aviões, satélites flexíveis, trilhos de trens, etc.

Sistemas matemáticos que governam a dinâmica de estruturas flexíveis do tipo vigas são bem estabelecidos na literatura matemática e engenharias. Um relato histórico detalhado e interessante sobre o problema de flexão de vigas é dado por Timoshenko [56], tendo como suporte os trabalhos de Galileo Galilei (1564-1642), o qual descreve os refinamentos sofridos pelas teorias de vigas por Leonhard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli

(1700-1782), Augustin de Coulomb (1736-1806), Saint-Venant (1797-1886), Siméon-Denis Poisson (1781-1840), Gustav Kirchhoff (1824-1887), Rayleigh e pelo próprio Timoshenko (1878-1972).

No século XVIII, o modelo de Euler-Bernoulli incluiu a energia potencial devido a flexão, efeito esse reconhecido pelos primeiros pesquisadores ser o mais importante em uma viga vibrando transversalmente, e a energia cinética devido ao deslocamento lateral. Primeiramente, Jacob Bernoulli (1654-1705) descobriu que a curvatura de uma viga elástica em qualquer ponto é proporcional ao momento flexural naquele ponto. Daniel Bernoulli, sobrinho de Jacob, foi quem formulou a equação diferencial do movimento de vibração de uma viga. Posteriormente, a teoria de Jacob Bernoulli foi aceita por Leonhard Euler em suas investigações da forma das vigas elásticas sob diversas condições de carregamento. Muitos avanços sobre curvas elásticas foram obtidos por Euler, conforme discutido em Timoshenko [56].

A derivação das equações de campo para torção, extensão e flexão em vigas que utilizam conceitos da mecânica dos materiais está baseada sobre hipóteses cinemáticas e sobre a natureza do campo de deformação. Estas hipóteses básicas satisfazem os quatro modelos (Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko) que explicitaremos posteriormente.

A hipótese cinemática fundamental para a teoria clássica diz que a secção transversal planar mantém sua forma e permanece perpendicular ao eixo do centroide a medida que a viga é deformada. Com isso, a rotação é pequena, isto é, o ângulo de rotação é pequeno tal que as hipóteses para pequenos ângulos podem ser assumidas. Por outro lado, resulta que para vibrações flexurais, o momento fletor depende somente do deslocamento transversal e da força de cisalhamento. Além disso, a dimensão na direção axial é consideravelmente maior que nas outras duas e a área da secção transversal é simétrica, tal que os eixos neutro e central coincidam. O material é linear e elástico, desprezando o efeito de Poisson.

O movimento de estruturas com parâmetros distribuídos é descrito por variáveis dependendo tanto do tempo quanto do espaço. Desta forma, o movimento é governado por equações diferenciais parciais (EDPs) e por condições de contorno a serem satisfei-

tas. Estas equações governantes e/ou de movimento podem ser obtidas de duas maneiras: Formulação Newtoniana, através do balanço de forças ou com o uso da Formulação Hamiltoniana relativa à princípios variacionais. Neste trabalho, a derivação será feita segundo o Princípio extendido de Hamilton [17, 18, 43], o qual estabelece a estacionariedade da função

$$J = \int_{t_a}^{t_b} (\mathcal{K} - \mathcal{V} + \mathcal{W}) \, d\tau, \quad (1.1)$$

onde $\mathcal{K}$ é a energia cinética, $\mathcal{V}$ é a energia potencial e $\mathcal{W}$ é o trabalho realizado pelas forças externas. A integral assume um valor estacionário descrito pela função $\varphi = \varphi(t, x)$, isto é, a derivada de Gateaux do funcional J deve obedecer

$$\delta J(\varphi, \zeta) = \frac{\partial J(\varphi)}{\partial \zeta} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\varphi + \varepsilon \zeta) - J(\varphi)}{\varepsilon} = 0, \quad (1.2)$$

para perturbações ζ tais que $\zeta(t_a, x) = \zeta(t_b, x) = 0$. É comum encontrar na literatura o símbolo δ que indica variações infinitesimais de variáveis envolvidas. Assim, $\delta\varphi$ refere-se a variação ζ da variável φ .

A seguir veremos os quatro principais modelos para vibrações transversais de vigas uniformes: Euler-Bernoulli, Rayleigh, Vlasov e Timoshenko. Seguindo esta ordem, realizaremos uma discussão para se obter as equações de movimento para cada modelo derivadas por meio do princípio variacional de Hamilton, dando ênfase ao modelo de Timoshenko.

A teoria de Euler-Bernoulli, também conhecida por teoria clássica do estudo de vigas, é a mais comumente utilizada, por descrever respostas de vigas elásticas fornecendo aproximações razoáveis para muitos problemas. Esta teoria data do século XVIII e desconsidera o acoplamento entre o movimento transversal e o giro numa viga. Derivações detalhadas deste modelo podem ser encontradas em [19, 26, 32].

O modelo de Euler-Bernoulli inclui a energia potencial devido a flexão e a energia cinética referente ao deslocamento lateral. A equação de movimento do modelo usando o princípio de Hamilton é obtida utilizando a energia potencial de uma viga uniforme

devido a flexão

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (1.3)$$

onde E denota o módulo de elasticidade, I o momento de inércia da secção transversal sobre o eixo neutro, $\varphi = \varphi(t, x)$ a deflexão transversal em relação a posição axial x e ao tempo t e L o comprimento da viga.

A energia cinética devido ao deslocamento lateral é dada por

$$\mathcal{K}_{eb} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (1.4)$$

onde A representa a área da secção transversal e ρ a densidade da viga.

O Lagrangeano, definido por $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$ é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx. \quad (1.5)$$

O trabalho realizado por forças transversais não-conservativas por unidade de comprimento $f(t, x)$ na direção do deslocamento transversal $\varphi(t, x)$ é dado pela expressão

$$\mathcal{W} = \int_0^L f(t, x) \varphi(t, x) dx. \quad (1.6)$$

Substituindo as expressões (1.3), (1.4) e (1.6) em (1.1), com $\varepsilon \rightarrow 0$, integrando por partes e lembrando que $\zeta(t_a, x) = \zeta(t_b, x) = 0$. Como ζ é arbitrário, exceto onde as condições de contorno são dadas, obtemos à seguinte equação diferencial parcial de movimento

$$\rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(t, x) = f(t, x), \quad (1.7)$$

satisfazendo as condições de contorno

$$EI \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \zeta \Big|_0^L = 0 \quad \text{e} \quad -EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_0^L = 0. \quad (1.8)$$

Fisicamente, a variável φ denota o deslocamento, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ representa a inclinação ou curvatura, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ o momento fletor e $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}$ representa o cisalhamento. Além disso, $\zeta = 0$ ou $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ significa que o deslocamento ou a inclinação é zero.

A teoria de Rayleigh representa um avanço em termos de modelagem em relação à teoria de Euler-Bernoulli por adicionar o efeito de inércia rotatória da secção transversal [18]. A energia cinética referente a esta rotação é dada por

$$\mathcal{K}_r = \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} \right)^2 dx. \quad (1.9)$$

Somando a equação acima com (1.4) e usando (1.3) formaremos o Lagrangeano, e combinando com a equação (1.6), utilizando o princípio de Hamilton, obtemos a equação de movimento dada por

$$\rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) + EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(t, x) - \rho I \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^2 \partial x^2}(t, x) = f(t, x), \quad (1.10)$$

com as seguintes condições de contorno a serem satisfeitas

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_0^L = 0 \quad \text{e} \quad \left. EI \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x} \zeta \right|_0^L = 0,$$

onde fisicamente $EI \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial x}$ representa o cisalhamento.

O modelo de Vlasov adiciona o efeito da distorção de cisalhamento à teoria de Euler-Bernoulli, porém não inclui o efeito de rotação da secção transversal. Para isto, introduz-se novas variáveis ψ , o ângulo de rotação da secção transversal devido ao momento fletor e β , o ângulo de distorção referente ao cisalhamento. O ângulo total de rotação é aproximadamente a inclinação dada pela primeira derivada do deslocamento [19], isto é,

$$\psi(t, x) + \beta(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x). \quad (1.11)$$

Assim, a energia potencial devido a flexão, dada pela equação (1.3), é modificada de modo que

$$\mathcal{V}_{fl} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (1.12)$$

e a energia potencial referente ao cisalhamento é dada por

$$\mathcal{V}_{cis} = \frac{1}{2} \int_0^L kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right)^2 dx, \quad (1.13)$$

onde k é um fator de cisalhamento relacionado à forma da secção transversal da viga e G

é o modulo de cisalhamento.

O trabalho devido a forças e momentos não-conservativos é dado por

$$\mathcal{W} = \int_0^L f(t, x)\varphi(t, x)dx + \int_0^L g(t, x)\psi(t, x)dx. \quad (1.14)$$

Combinando a equação (1.4) com (1.12) - (1.13) formaremos o Lagrangeano e, usando a formulação hamiltoniana obtemos as equações de movimento

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) - kGA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) &= f(t, x), \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(t, x) - kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) - \psi(t, x) \right) &= g(t, x), \end{aligned} \quad (1.15)$$

com as seguintes condições de contorno

$$EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_0^L = 0 \quad \text{e} \quad kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right) \Big|_0^L = 0, \quad (1.16)$$

onde $EI \frac{\partial \psi}{\partial x}$ é o momento fletor, $kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right)$ o cisalhamento e Ψ e ζ representam variações infinitesimais das variáveis ψ e φ , respectivamente.

Daremos ênfase ao modelo de Timoshenko [54, 55], o qual propôs uma teoria de vigas que adiciona tanto o efeito de inércia rotatória quanto o efeito de cisalhamento ao modelo de Euler-Bernoulli.

A energia cinética de translação e rotação da viga de Timoshenko é dada pela expressão

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (1.17)$$

Substitui-se $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ por ψ no termo da energia cinética usado no modelo de Rayleigh (1.9) a fim de incluir apenas o ângulo de rotação devido a flexão, já que assume-se não haver energia cinética rotacional associada com a distorção de cisalhamento.

Combinando (1.17) com as equações (1.12) e (1.13) formaremos o Lagrangeano e este incluirá momento fletor, deslocamento lateral, inércia rotatória e distorção de cisalhamento. Para uma viga com carga transversal distribuída $f(t, x)$ e momento $g(t, x)$, o trabalho não conservativo é o mesmo do modelo de Vlasov (1.14). Dessa forma, usando

o princípio extendido de Hamilton, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right)^2 \right] dx \, d\tau \\ & + \int_{t_a}^{t_b} [f(t, x)\varphi(t, x) + g(t, x)\psi(t, x)] dx \, d\tau = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Lembrando que $\Psi(t_a, x) = \Psi(t_b, x) = \zeta(t_a, x) = \zeta(t_b, x) = 0$ e integrando por partes, encontramos

$$\begin{aligned} & \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left\{ -\rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right) \right] + f \right\} \zeta \, dx \, dt \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \int_0^L \left\{ -\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right) + g \right\} \Psi \, dx \, dt \\ & + \int_{t_a}^{t_b} \left[kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right) \zeta \right] \Big|_0^L dt - \int_{t_a}^{t_b} \left[\left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Psi \right] \Big|_0^L dt = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Como Ψ e ζ são arbitrários, exceto onde as condições de contorno são dadas, a equação acima pode ser reescrita como as seguintes equações diferenciais parciais acopladas de movimento

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right) \right] &= f, \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right) &= g, \end{aligned} \quad (1.20)$$

com as seguintes condições de contorno

$$EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \Psi \Big|_0^L = 0 \quad \text{e} \quad kGA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \psi \right) \zeta \Big|_0^L = 0.$$

Das condições de fronteira acima, podemos extrair quatro possíveis condições de contorno, porém utilizaremos vigas apoiadas em ambas as extremidades e/ou simplesmente apoiadas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad \varphi(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad \varphi(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

No presente trabalho faremos aplicação para o caso da nanotecnologia que envolve desenho, construção e utilização de estruturas em que ao menos uma dimensão característica é medida em nanômetros (10^{-9}m). Em particular consideremos aplicações para nanotu-

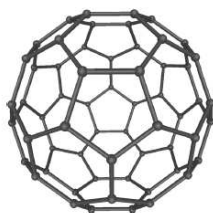


Figura 1.1: Estrutura do Fullereno [47]

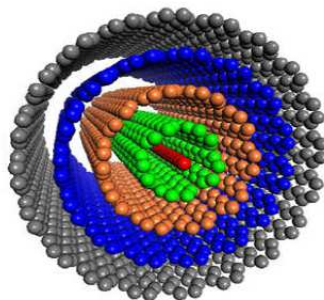


Figura 1.2: Nanotubo de múltiplas camadas [14]

bos de carbono (*Carbon Nanotubes*- CNTs). Pesquisas sobre nanotubos de carbono tem sido realizadas no campo da nanotecnologia desde que os mesmos foram descobertos em 1991 por Iijima [25]. Este apresentou os CNTs com múltiplas camadas (MWNTs- *Multiple Walled Nanotubes*) como produto colateral na obtenção experimental dos fullerenos obtidos em 1985. O fullereno é uma estrutura fechada de carbono com formato de bola de futebol (domo geodésico) composto por 12 pentágonos e 20 hexágonos, cuja fórmula molecular é C_{60} .

Devidos às propriedades eletrônicas e mecânicas superiores dos nanotubos de carbono, eles tornaram-se o material mais promissor. Uma das aplicações dos nanotubos com múltiplas paredes está voltada para o desenvolvimento de nanoatuadores sem atrito, nano-motores, nano-rolamentos e nano-molas [29]. Recentemente várias aplicações dos CNTs têm sido discutidas, dentre elas, emissores de campo, forças atômicas microscópicas, preenchimento de nanotubos para materiais compostos e dispositivos eletrônicos em nanoescala.

Os nanotubos de carbono são assim denominados devido a sua morfologia tubular, macromoléculas cilíndricas compostas de átomos de carbono em um arranjo hexagonal

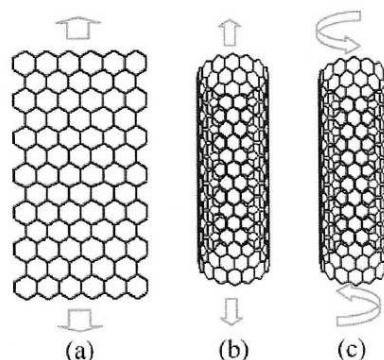


Figura 1.3: Estrutura do nanotubo [47]

periódico com hibridação sp^2 , semelhante ao grafite, em dimensões nanométricas ($1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$), podendo ter um único átomo de carbono de espessura [22]. Os CNTs podem ser construídos de uma única camada cilíndrica de grafite (SWNTs- *Single Walled Nanotubes*) ou de múltiplas camadas (MWNTs).

Devido ao fator escala, os CNTs exibem propriedades físicas, químicas e biológicas bastante vantajosas pelo fato de estar inserido entre a escala atômica e a escala macroscópica. Extensivos estudos sobre essas propriedades foram realizadas, visto que as experiências controladas na escala nano são difíceis devido ao amplo espalhamento (*wide scatter*) nos valores experimentais relatados e as simulações moleculares implicam em altíssimo custo, especialmente para problemas em grande escala. Por isso, os modelos elásticos contínuos se tornaram uma importante ferramenta no estudo de CNTs.

A maioria dos trabalhos nesta categoria estão voltados para aplicação de modelos de placas e vigas elásticas. No caso de vigas, destacamos o modelo de Euler-Bernoulli e o modelo de Timoshenko. Como bem sabemos o modelo de Euler-Bernoulli desconsidera os efeitos de cisalhamento e de rotação e pode ser utilizado para análise de um nanotubo de parede única ou de nanotubos de multicamadas em uma relação de aspecto elevado (proporção de comprimento para diâmetro). No entanto, é preferível os nanotubos de carbono mais curtos por evitar dobras indesejáveis e deformação, neste caso a teoria de Timoshenko pode ser mais exata. Por esta razão e pelo fato CNTs serem submetidos à frequências extremamente altas (acima de 1THz), Yoon [63] considera questionável o modelo de Euler-Bernoulli aplicados a CNTs.

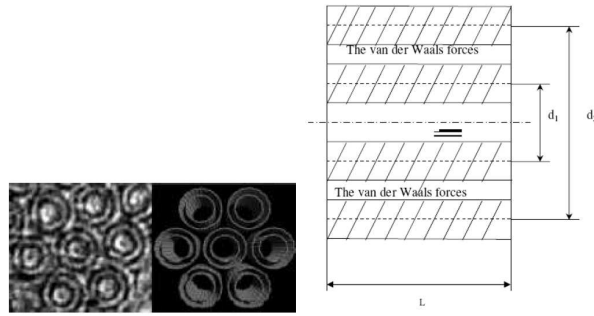


Figura 1.4: Double Walled Nanotubes (DCNTs) [47]

Para nanotubos com múltiplas paredes concêntricas (MWNTs), os modelos elásticos contínuos mais utilizados na literatura supõem que todos os tubos de MWNTs permaneçam coaxiais durante a deformação, podendo ser descrito por um único modelo de deflexão. Entretanto, considerando nanotubos duplos (DWNTs- *Double Walled Nanotubes*), onde os tubos são adjacentes, este modelo não pode ser usado para descrever a deflexão de estática entre os tubos.

Para o modelo de feixe duplo, os tubos interior e exterior são descritos por duas curvas de deflexão individuais e não coincidentes acopladas através de uma interação radial denominada força de Van der Waals [12, 13], atuando entre as camadas dos dois tubos. Em 2003, foi proposto por Yoon [64] que os encaixes dos tubos sejam considerados como vigas individuais, assim cada um dos tubos interno e externo de DWNTs são modelados como uma viga elástica. Uma vez que os tubos de um carbono duplo são concêntricos, a interação de Van der Waals é nula, pois os tubos compartilham a mesma curva de deflexão.

As equações de movimento governantes para o nanotubo de parede simples (SCNTs), seguindo a teoria de Timoshenko [54], são dadas por

$$\rho_1 \varphi_{tt} = S_x, \quad (1.21)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} = M_x + S, \quad (1.22)$$

onde x é a distância ao longo da linha central da estrutura de viga, t é o tempo, φ o deslocamento lateral, ψ é introduzido para medir a curvatura da secção transversal

devido a flexão. Aqui $\rho_1 = \rho A$ e $\rho_2 = \rho I$ onde ρ é a densidade, A é a área da secção transversal e I o momento de inércia da área da secção transversal. Por S denotamos a força de cisalhamento e M é o momento fletor.

As leis constitutivas que usaremos são

$$S = \kappa(\varphi_x - \psi), \quad (1.23)$$

$$M = b\psi_x. \quad (1.24)$$

Aqui b e κ são dados por $b = EI$ e $\kappa = kGA$ onde E é o módulo de Young, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ exprime o módulo de rigidez do cisalhamento, em que μ é a constante de Poisson ($0 < \mu < \frac{1}{2}$) e k é o fator de cisalhamento transversal. O valor de k depende de μ e varia entre $[0.6, 0.7]$ para paredes circulares delgadas e de $0,9$ para secções circulares transversais sólidas.

As equações constitutivas (1.23) e (1.24) podem ser substituídas nas equações de movimento (1.21) e (1.22), resultando no seguinte sistema unidimensional acoplado por duas equações diferenciais parciais hiperbólicas sem a presença de qualquer mecanismo dissipativo [54].

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x - \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.25)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x - \psi) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty). \quad (1.26)$$

Na análise de nanotubos de parede dupla (DWNTs) com o uso do modelo de viga de Timoshenko, assume-se que os dois tubos possuem diâmetros interno e externo d_1, d_2 , respectivamente, e são de comprimento L .

Ao contrário da modelagem a qual considera que os dois tubos permaneçam coaxiais durante a deformação, um modelo de dupla parede está sujeito à pressão axial e a interação de Van der Waals, sendo este último responsável pelo acoplamento quanto a deflexão dos tubos adjacentes [59, 62]. Assim, cada um dos tubos interno e externo de DWNTs são modelados como uma viga elástica de Timoshenko.

As equações governantes para o tubo interno e externo podem ser escritas via modelo de Timoshenko.

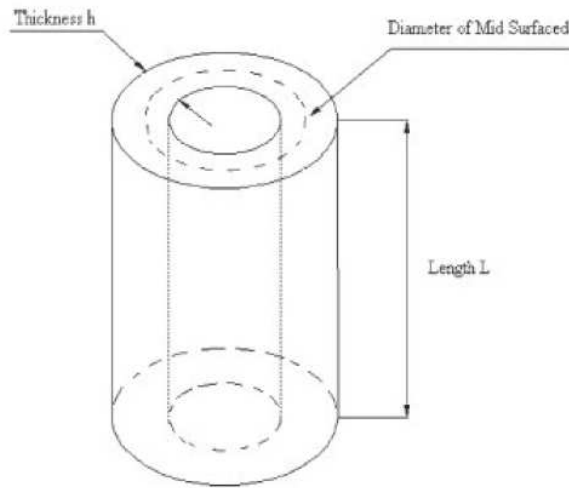


Figura 1.5: Nanotubo de parede dupla [14]

$$\rho_1 \varphi_{tt}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x - \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.27)$$

$$\rho_2 \psi_{tt}^{(1)} - b_1 \psi_{xx}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.28)$$

$$\rho_3 \varphi_{tt}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)})_x + \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.29)$$

$$\rho_4 \psi_{tt}^{(2)} - b_2 \psi_{xx}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.30)$$

onde os subíndices 1 e 2 referem-se as variáveis nos tubos interno e externo, respectivamente e $\mathcal{C}$ é o coeficiente de Van der Waals. É considerado que cada tubo possua o mesmo módulo de Young $E = 1TPa$, módulo de cisalhamento $G = 0,4TPa$, com razão de Poisson de 0,25 e densidade de $2,3g/cm^3$.

Diversos pesquisadores das áreas da engenharia, física e matemática têm alvejado estudos com estruturas elásticas, dentre elas vigas, placas e conchas, preocupando-se com as propriedades das equações diferenciais. O interesse no âmbito matemático incide sobre a existência, unicidade e estabilidade de solução, sendo este último voltado para modelos matemáticos dissipativos, isto é, modelos que dissipam energia durante o movimento do sistema.

O alvo do estudo da matemática se direciona a verificar se a dissipação induzida por algum mecanismo dissipativo é forte o suficiente a fim de estabilizar o sistema e além

disso, qual tipo de taxa de decaimento pode ser obtida. Sendo assim, estuda-se o comportamento assintótico afim de obter um controle das soluções do sistema, seja um controle do tipo exponencial ou polinomial.

O Modelo de vigas de Timoshenko vêm sendo amplamente estudado, sob a ótica da estabilidade exponencial em estruturas elásticas [2, 3, 27, 39, 44, 49]. Diante disto, mencionaremos agora alguns dos principais resultados presentes na literatura.

Considere abaixo as equações que regem as vibrações mecânicas em uma viga sem a presença de qualquer tipo de mecanismo dissipativo estabelecidas por Timoshenko [54].

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.31)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.32)$$

onde $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kGA$ e $b = EI$.

Em 1999, Soufyane [49] foi o primeiro a provar o decaimento exponencial de um modelo dissipativo de viga de Timoshenko com apenas um mecanismo dissipativo localmente distribuído e condições de contorno Dirichlet-Dirichlet, constatando que a propriedade de decaimento exponencial das soluções ocorre se, e somente se, as velocidades de propagação de ondas associadas ao sistema são iguais, isto é,

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0. \quad (1.33)$$

Um grande número de resultados interessantes sobre estabilidade exponencial de um modelo de Timoshenko com efeito dissipativo em apenas uma equação foram estabelecidos, desde $\chi = 0$. Muñoz Rivera e Racke [38], em 2003, consideraram um caso linear com dissipação $a\psi_t$ ($a > 0$), no qual constataram que a energia de soluções decresce exponencialmente se, e somente se $\chi = 0$.

Resultados análogos, foram obtidos por Rivera e Fernández [39], Khodja [3] e Almeida Júnior [2]. O primeiro em 2008, estudou o sistema de Timoshenko com história em condições adequadas sobre as funções de relaxamento. Em 2003, o segundo considerou um mecanismo dissipativo do tipo memória agindo na equação das rotações angulares, e o terceiro estudou o sistema com um efeito dissipativo linear atuando na equação do

deslocamento transversal. Para tais trabalhos, o decaimento exponencial está relacionado com a igualdade entre as velocidades de propagação de ondas do sistema.

Motivado pelos resultados presentes na literatura em estabilização de sistemas dissipativos unidimensionais de Timoshenko, consideremos as leis constitutivas dadas por (1.23) e (1.24), as equações de movimento governantes (1.21) e (1.22) e mantendo em mente o sistema (1.27)-(1.30) podemos reescrever as equações (1.27)-(1.30) como

$$\rho_1 \varphi_{tt}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x - \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.34)$$

$$\rho_2 \psi_{tt}^{(1)} - b_1 \psi_{xx}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) + \alpha_1 \psi_t^{(1)} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.35)$$

$$\rho_3 \varphi_{tt}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)})_x + \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) + \alpha_2 \varphi_t^{(2)} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.36)$$

$$\rho_4 \psi_{tt}^{(2)} - b_2 \psi_{xx}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}) + \alpha_3 \psi_t^{(2)} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.37)$$

Observe que no sistema acima, introduzimos dissipações lineares $\alpha_1 \psi_t^{(1)}$, $\alpha_2 \varphi_t^{(2)}$ e $\alpha_3 \psi_t^{(2)}$ com $\alpha_1 \psi_t^{(1)}$ e $\alpha_3 \psi_t^{(2)}$ atuando nas equações da curvatura e $\alpha_2 \varphi_t^{(2)}$ na equação referente ao deslocamento lateral do tubo interno. As funções positivas $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, satisfazem $\alpha_i \geq \alpha > 0$.

A partir disto, surgem diversas perguntas: existe um número que determine a assintótica de soluções? Qual? O que acontece em termos de estabilização do sistema (1.34)-(1.37) quando esse número a determinar for igual a zero? Sabe-se que dois mecanismos dissipativos no sistema clássico de Timoshenko, obtém-se estabilidade exponencial independente se as velocidades de propagação de ondas são iguais ou não. Qual o mínimo de dissipação que o sistema pode ter para se obter estabilidade exponencial?

Agora vamos mencionar alguns dos poucos resultados matemáticos que envolve estruturas elásticas do tipo vigas de Timoshenko aplicados à nanotubos de carbono. Em 2006, Costa em sua tese [14], desenvolveu um estudo a respeito das excitações harmônicas e variadas condições iniciais simuladas para vários tipos de vigas elásticas de Timoshenko, através da resposta fundamental, ou função de Green de valor inicial, e da análise modal. Aplicações são feitas para o caso de plataformas *off-shore* modeladas segundo as teorias de Euler-Bernoulli, e de Rayleigh e a lei de Morison, é proposta uma extensão à

teoria de Timoshenko. E para nanotubos de carbono, os modos de vibração do modelo de Vlasov são determinados através de limite dos modelos correspondentes ao modelo de Timoshenko.

Em 2009, Silva, C.M. abordou em sua dissertação [47] a questão das vibrações em um nanotubo de carbono com paredes duplas, sob a influência de forças intermoleculares, considerando o modelo estrutural da viga de Timoshenko sujeito ao efeito de Van der Waals.

1.2 O Valor e o sinal da força de Van der Waals

Os nanotubos de carbono (NTCs), constituindo o modelo de Timoshenko, foram submetidos à simulação de dinâmica molecular, onde as energias de interação entre os NTCs foram calculadas para 10 ps (pico segundos) de simulação. O método utilizado foi o da Mecânica Molecular + (MM+), a qual é fundamentada na mecânica newtoniana. Toda a simulação foi realizada no software Hyperchem 7.5 [24]. A figura apresenta a força de Van der Waals do sistema versus tempo, calculadas durante a simulação. Pode-se verificar que de 0 até 7 ps os resultados apresentam muitas flutuações, devido as nanoestruturas se encontrarem ainda em fase de ajuste térmico, buscando o comportamento vibracional natural do sistema. A partir de 7 ps, a força de Van der Waals fica consideravelmente mais estável, tendo valor médio de $-2,05 \cdot 10^{-10} N$ mostrando que o comportamento, após este instante, passa a ser próximo do que a literatura prevê.

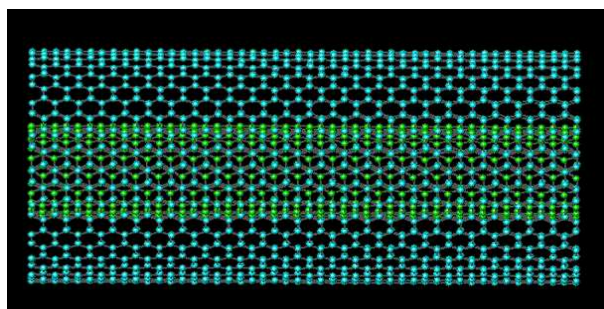


Figura 1.6: Modelo de Timoshenko simulado no software Hyperchem 7.5.

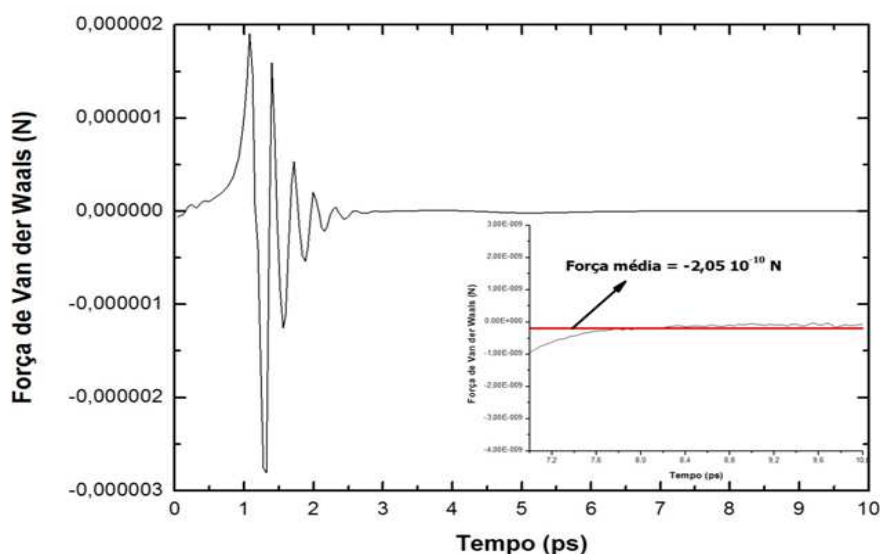


Figura 1.7: Força de Van der Waals versus Tempo.

Agora, analisaremos a seguinte equação e seu respectivo gráfico na figura 1.8 para verificar qual o sinal da força de Van der Waals.

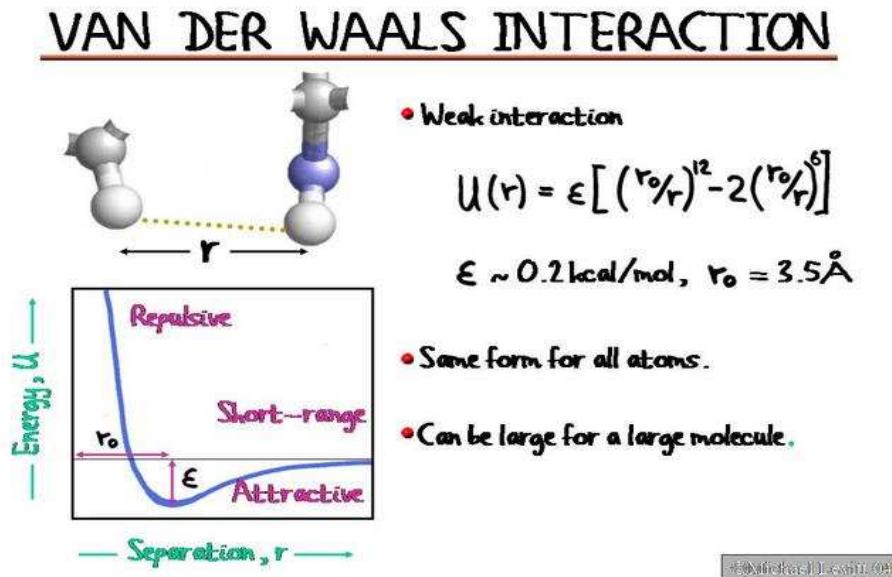


Figura 1.8: Van der Waals

$U(r)$ representa a força de Van der Waals e r a distância entre as paredes dos tubos. Analisando a equação observe que $\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}$ tende mais rápido para zero a que $\left(\frac{r_0}{r}\right)^6$ quando $r \rightarrow \infty$, sendo assim o gráfico na figura 2 fica abaixo de zero para depois estabilizar. Agora, observando o gráfico da figura 3, se tomarmos $r_1 < r_0$ teremos repulsão

entre as paredes e o sinal da força de Van der Waals será positivo, caso contrário escolhendo $r_1 < r_2$, $r_0 < r_2$ temos a atração dos tubos e a força admite sinal negativo.

Agora, iremos mencionar alguns resultados presentes na literatura em estabilização de sistemas porosos-elásticos dissipativos. Em [35] R. Quintanilla estudou o sistema (5.4) quando $g_1 = 0$ e $g_2(s) = \tau s$ com $a_2(x) = 1$. Usando as condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann, ele provou que o sistema resultante não é exponencialmente estável. Já [34] A. Magaña e R. Quintanilla consideraram o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x - \gamma u_{xxt} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \tau\phi_t = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)), \quad \text{em } (0, L) \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)), \quad \text{em } (0, L). \end{array} \right. \quad (1.38)$$

Eles provaram que o sistema (1.38) é exponencialmente estável usando os argumentos de semigrupo devido a Liu e Zheng [30]. Além disso, foi provado que quando $\tau = 0$ o sistema obtido não é exponencialmente estável. Em [40] J. Muñoz Rivera e R. Quintanilla provou que, quando $\tau = 0$ a energia é controlada por uma taxa de decaimento tipo $\frac{1}{t}$. Além disso usando um resultado em [42] melhoraram a taxa de decaimento polinomial tomando mais regular os dados iniciais. Outros problemas associados com os sistemas elásticos porosos podem ser encontradas nas referências [50, 51, 52, 57].

Sistemas com dissipações localizadas do tipo atrito foram estudados por diversos autores em uma ou mais dimensão, por exemplo [11, 20, 31, 33, 65, 66]. O resultado principal dos artigos acima é que a dissipação localizada de fricção produz decaimento exponencial. Um resultado mais geral ocorre no espaço unidimensional, onde a solução sempre decai exponencialmente para zero para qualquer dissipação localizada de atrito atuando ao longo de um subconjunto aberto do domínio. Este resultado já não é válido para materiais configurados sobre domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$ onde a posição do efeito de atrito é importante. Ver, por exemplo [5], onde as condições necessárias e suficientes são dadas para conseguir a estabilização da equação de onda com dissipação localizada de fricção. Ou seja, para obter a estabilidade exponencial, os mecanismos de dissipação devem estar presentes numa vizinhança suficientemente grande de um conjunto limitado, veja também [20].

Primeiro de tudo, é importante mencionar o caso $\mu = \xi = b$. Neste caso, (1.38) pode ser considerada como um sistema tipo Timoshenko, onde as variáveis u e ϕ representam,

respectivamente, o deslocamento transversal e o ângulo de rotação. Com as considerações acima, o sistema (1.38) torna-se

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} - \mu(u_x + \phi)_x + a_1(x)g_1(u_t) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + \mu(u_x + \phi) + a_2(x)g_2(\phi_t) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)), & \text{em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)), & \text{em } (0, L). \end{array} \right. \quad (1.39)$$

O sistema acima foi estudado por ML Santos em [46]. Nesse trabalho, os autores consideraram a hipótese:

- A função g_i , para cada $i = 1, 2$, é contínua, monótona crescente e ainda satisfaz o seguinte:

$$(1) \quad g_i(s)s > 0, \quad \forall s \neq 0,$$

$$(2) \quad m_i s \leq g_i(s) \leq M_i s, \quad \text{para } |s| > 1,$$

onde m_i, M_i são constantes positivas. Além disso, eles consideraram $a_i \in L^\infty(0, L)$ são funções não negativas tal que

$$a_i(x) \geq a_i > 0, \text{ in } I_i, \quad i = 1, 2, \text{ and } \tilde{I} = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$$

onde I_1 e I_2 são intervalos abertos contidos em $[0, L]$. Além disso, os autores assumiram que $\frac{\rho}{\mu}, \frac{J}{\delta} \leq 1$. Eles provaram a estabilidade assintótica para as soluções do problema (1.39) usando argumentos de contradição como considerado na [16] e [10] combinado com um método introduzido pela primeira vez por Lasiecka e Tataru [28]. O mesmo problema (1.39) com as hipóteses adicionais

$$(1) \quad g_i(s)s > 0, \quad \forall s \neq 0,$$

$$(2) \quad m_i s^2 \leq g_i(s) \leq M_i s^2, \quad \text{for } |s| > 1,$$

foi estudada por M. Cavalcanti em [10]. Há autores que utilizam argumentos de contradição como considerado em [16] e [10] combinado com um método introduzido pela primeira vez por Lasiecka e Tataru [28] e não assume nenhuma hipótese sobre a velocidade de propagação da onda, eles provaram a estabilidade assintótica para as soluções do problema (1.39).

Ao contrário do sistema de Timoshenko, onde uma única dissipação sob o ângulo de rotação ($g_1 \equiv 0$ e $g_2(\phi_t) = \phi_t$) gera estabilidade exponencial se, e somente se as

velocidades de propagação de ondas são iguais (ver A. Soufyane [49]), o sistema (1.38) carece de decaimento exponencial quando a dissipação atua apenas na fração de volume ($g_1 \equiv 0$ and $g_2(\phi_t) = \phi_t$, ver R. Quintanilla [35]), independente de qualquer relação entre os coeficientes. Isto significa que, em geral, o sistema (1.38) aqui estudado não se comporta como o sistema Timoshenko. Então, o problema aqui considerado traz novas contribuições para este modelo.

Motivados pelos resultados existentes, estudaremos a assintótica do seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + a_1(x)g_1(u_t) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + a_2(x)g_2(\phi_t) = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, & t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)), & \text{em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)), & \text{em } (0, L) \end{array} \right. \quad (1.40)$$

onde ρ , μ , J , δ , b e ξ são os coeficientes constitutivos e

$$\xi > 0, \delta > 0, \mu > 0, \rho > 0, J > 0, \mu\xi \geq b^2. \quad (1.41)$$

As funções regulares $a_i(x)$ são não negativas e as funções não lineares g_i , $i = 1, 2$, são contínuas e monótonas crescente.

1.3 Objetivos da Tese

Inspirados pelos vários resultados para o modelo de vigas de Timoshenko, em especial para os trabalhos que mostram a importância dos coeficientes do sistema, nas configurações da estabilização do modelo, o objetivo desta tese consiste em estudar o comportamento da energia de modelo dissipativo de vigas de Timoshenko associado ao nanotubo de parede dupla, limitando ao caso unidimensional. Buscaremos provar a teoria da estabilidade exponencial para o modelo de duplo nanotubo-Timoshenko, utilizando uma possível relação entre os coeficientes. Paralelamente, desenvolvemos métodos numéricos totalmente discretos no contexto das diferenças finitas, em que consideramos alguns aspectos da análise numérica e reproduzimos numericamente as propriedades de estabilidade alcançados no contínuo. Além disso, o nosso propósito ao estudar o sistema de evolução associado a um material elástico poroso submetido à dissipações localizadas não lineares colocadas em ambas as equações, é obter estimativas gerais e uniformes de taxa de decai-

mento da energia reduzida a uma estabilidade, a qual é obtida a partir da desigualdade de observabilidade.

1.4 Organização da Tese

No capítulo 2 apresentamos um modelo com dissipações do tipo atrito agindo sobre a função de deslocamento lateral do tubo externo e nos declives dos dois tubos no modelo dinâmico de vigas de Timoshenko associado ao nanotubo de carbono. Utilizando técnicas do cenário de semigrupo de operadores lineares, analisamos a existência e unicidade de soluções. Definamos a energia do modelo dissipativo, sendo ela decrescente e levantamos as questões relacionadas ao decaimento exponencial e polinomial.

No Capítulo 3 consideremos as dissipações nas quatro equações, com $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, respectivamente, sendo elas $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$. A importância deste capítulo versa sobre a propriedade da falta de estabilidade exponencial bem como na estabilidade assintótica. Usaremos as técnicas de semigrupos de operadores lineares, mais precisamente, o teorema de estabilização uniforme de Gearhart-Herbst-Püss-Huang para ambos os resultados. Para o problema da falta de estabilidade exponencial encontraremos um número ao qual relaciona os coeficientes do modelo e dentre eles as velocidades de propagação de ondas do sistema clássico de Timoshenko, sob a hipótese de igualdade entre elas, obtemos a propriedade de decaimento exponencial. Caso este número encontrado seja diferente de zero, obtemos um outro resultado importante deste Capítulo 3, a estabilidade polinomial cuja taxa de decaimento é ótima.

No Capítulo 4 utilizaremos o método numérico totalmente discreto, ou seja, uma discretização espaço-tempo em diferenças finitas do modelo de vigas de Timoshenko associado ao duplo nanotubo, considerando o mesmo problema exposto no contínuo, porém por simplicidade adotamos as condições do tipo Dirichlet Homogênea. Construímos a energia numérica correspondente e compatível com o análogo contínuo, preservando seu caráter conservativo, com $\alpha_i = 0$. Finalizamos o capítulo com as simulações numéricas das propriedades de conservação da energia, da dissipação total, da falta de estabilidade exponencial numérico e o decaimento exponencial numérico.

No Capítulo 5 apresentamos o sistema elástico poroso com dissipações localizadas não lineares atuando sobre o deslocamento e na fração de volume. Definimos a energia do modelo dissipativo e utilizando técnicas de semigrupos de operadores lineares e não lineares, analisamos a existência e unicidade de soluções. E ainda, com a utilização do método introduzido por Daloutti obtivemos a estabilidade assintótica de soluções, usando o resultado de observabilidade.

Capítulo 2

Modelo de Timoshenko para Nanotubos com Dupla Parede

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos o modelo de viga de Timoshenko aplicado para nanotubos de carbono de parede dupla (DWNT- Double Walled Nanotube), dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x - \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt}^{(1)} - b_1 \psi_{xx}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) + \alpha_1 \psi_t^{(1)} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.2)$$

$$\rho_3 \varphi_{tt}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)})_x + \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) + \alpha_2 \varphi_t^{(2)} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.3)$$

$$\rho_4 \psi_{tt}^{(2)} - b_2 \psi_{xx}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}) + \alpha_3 \psi_t^{(2)} = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.4)$$

onde os subíndices 1 e 2 referem-se aos tubos interno e externo, respectivamente, e $\mathcal{C}$ é a força de Van der Waals, determinada pelo espaço entre as camadas e responsável pelo acoplamento da deflexão dos tubos adjacentes. Aqui, consideramos: $\rho_1 = \rho A_1$, $\rho_2 = \rho I_1$, $\rho_3 = \rho A_2$, $\rho_4 = \rho I_2$, onde ρ indica a densidade, A_i , $i = 1, 2$ é a área de secção transversal, I_i é o momento de inércia, $\kappa_1 = K_1 G A_1$, $\kappa_2 = K_2 G A_2$, denota o fator de cisalhamento relacionado à forma da secção transversal da viga, G exprime o módulo de cisalhamento que relaciona o coeficiente de Poisson ($0 < \mu < \frac{1}{2}$), $b_1 = E I_1$, $b_2 = E I_2$ e E o módulo de Young. Além disso, α_i , $i = 1, 2, 3$, satisfazem $\alpha_i \geq 0$ são constantes positivas. As funções $\varphi^{(i)} = \varphi^{(i)}(x, t)$ e $\psi^{(i)} = \psi^{(i)}(x, t)$ representam o deslocamento lateral do tubo e o declive do tubo devido à flexão, respectivamente. Associamos ao sistema as seguintes condições de fronteira

$$\varphi^{(i)}(0, t) = \varphi^{(i)}(L, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall t > 0, \quad (2.5)$$

$$\psi_x^{(i)}(0, t) = \psi_x^{(i)}(L, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall t > 0, \quad (2.6)$$

e condições iniciais

$$\varphi^{(i)}(x, 0) = \varphi_0^{(i)}, \quad \varphi_t^{(i)}(x, 0) = \varphi_1^{(i)}, \quad (2.7)$$

$$\psi^{(i)}(x, 0) = \psi_0^{(i)}, \quad \psi_t^{(i)}(x, 0) = \psi_1^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad \forall x \in (0, L). \quad (2.8)$$

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2.2 estabelecemos a energia de soluções associada ao sistema (2.1)-(2.8), e verificamos que esta energia é decrescente ao longo do tempo t . Na Seção 2.3 discutiremos a existência e unicidade de soluções do sistema (2.1)-(2.8) usando o método de semigrupo de operadores lineares.

2.2 Funcional de Energia

Nesta seção encontramos a energia associada ao modelo (2.1)-(2.8), que sugere o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ a ser considerado à posteriori.

Definamos

$$\begin{aligned} E(t) := & \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1 |\varphi_t^{(1)}|^2 + \rho_2 |\psi_t^{(1)}|^2 + \rho_3 |\varphi_t^{(2)}|^2 + \rho_4 |\psi_t^{(2)}|^2 + \kappa_1 |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 \\ & + \kappa_2 |\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}|^2 + b_1 |\psi_x^{(1)}|^2 + b_2 |\psi_x^{(2)}|^2 + \mathcal{C} |\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}|^2] dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Proposição 2.2.1. *Seja $(\varphi^{(1)}, \varphi_t^{(1)}, \psi^{(1)}, \psi_t^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi_t^{(2)}, \psi^{(2)}, \psi_t^{(2)})$ a solução de (2.1) – (2.8). Então, a taxa instantânea de variação de energia do sistema em relação ao tempo t é dada por*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha_1 \int_0^L |\psi_t^{(1)}|^2 dx - \alpha_2 \int_0^L |\varphi_t^{(2)}|^2 dx - \alpha_3 \int_0^L |\psi_t^{(2)}|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.10)$$

Prova. Primeiramente, multiplicamos a equação (2.1) por $\varphi_t^{(1)}$ e integramos por partes sobre $(0, L)$. Assim, temos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^{(1)} \varphi_t^{(1)} dx - \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x \varphi_t^{(1)} dx - \mathcal{C} \int_0^L (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \varphi_t^{(1)} dx = 0,$$

então, tem-se

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t^{(1)}|^2 dx + \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) \varphi_{xt}^{(1)} dx - \mathfrak{C} \int_0^L (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \varphi_t^{(1)} dx = 0. \quad (2.11)$$

Agora, multiplicamos a equação (2.2) por $\psi_t^{(1)}$ e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt}^{(1)} \psi_t^{(1)} dx - b_1 \int_0^L \psi_{xx}^{(1)} \psi_t^{(1)} dx - \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) \psi_t^{(1)} dx = -\alpha_1 \int_0^L |\psi_t^{(1)}|^2 dx,$$

de onde resulta

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t^{(1)}|^2 dx + \frac{b_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx - \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) \psi_t^{(1)} dx = \\ -\alpha_1 \int_0^L |\psi_t^{(1)}|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Neste momento, multiplicamos a equação (2.3) por $\varphi_t^{(2)}$ e integramos em $(0, L)$

$$\begin{aligned} \rho_3 \int_0^L \varphi_{tt}^{(2)} \varphi_t^{(2)} dx - \kappa_2 \int_0^L (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)})_x \varphi_t^{(2)} dx + \mathfrak{C} \int_0^L (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \varphi_t^{(2)} dx = \\ -\alpha_2 \int_0^L |\varphi_t^{(2)}|^2 dx, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t^{(2)}|^2 dx + \kappa_2 \int_0^L (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}) \varphi_{xt}^{(2)} dx + \mathfrak{C} \int_0^L (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \varphi_t^{(2)} dx = \\ -\alpha_2 \int_0^L |\varphi_t^{(2)}|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por fim, multiplicamos a equação (2.4) por $\psi_t^{(2)}$ e integramos em $(0, L)$, daí temos

$$\rho_4 \int_0^L \psi_{tt}^{(2)} \psi_t^{(2)} dx - b_2 \int_0^L \psi_{xx}^{(2)} \psi_t^{(2)} dx - \kappa_2 \int_0^L (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}) \psi_t^{(2)} dx = -\alpha_3 \int_0^L |\psi_t^{(2)}|^2 dx,$$

equivalente a,

$$\frac{\rho_4}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t^{(2)}|^2 dx + \frac{b_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x^{(2)}|^2 dx - \kappa_2 \int_0^L (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}) \psi_t^{(2)} dx = -\alpha_3 \int_0^L |\psi_t^{(2)}|^2 dx. \quad (2.14)$$

Então, somando as equações (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14), encontramos

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t^{(1)}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t^{(1)}|^2 dx + \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t^{(2)}|^2 dx \\
& + \frac{\rho_4}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t^{(2)}|^2 dx + \frac{b_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx + \frac{b_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x^{(2)}|^2 dx \\
& + \frac{\kappa_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx + \frac{\kappa_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}|^2 dx + \frac{\mathcal{C}}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}|^2 dx \\
& = -\alpha_1 \int_0^L |\psi_t^{(1)}|^2 dx - \alpha_2 \int_0^L |\varphi_t^{(2)}|^2 dx - \alpha_3 \int_0^L |\psi_t^{(2)}|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Portanto, concluímos que

$$\frac{d}{dt} E(t) := -\alpha_1 \int_0^L |\psi_t^{(1)}|^2 dx - \alpha_2 \int_0^L |\varphi_t^{(2)}|^2 dx - \alpha_3 \int_0^L |\psi_t^{(2)}|^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.16}$$

e desde que $\alpha_i > 0$ para qualquer $i = 1, 2, 3$ obtemos a lei de dissipação de energia

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.17}$$

É claro que se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ temos a lei de conservação de energia

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad \blacksquare \tag{2.18}$$

2.3 O Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, iremos estudar existência e unicidade de soluções para o modelo de viga de Timoshenko em um duplo nanotubo de carbono, utilizando a Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares [41]. Definimos

$$L_*^2(0, L) = \left\{ w \in L^2(0, L); \int_0^L w(x) dx = 0 \right\},$$

e

$$H_*^1(0, L) = \left\{ w \in H^1(0, L); \int_0^L w(x) dx = 0 \right\}.$$

Agora, consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L)$$

e

$$\mathcal{V} := \mathcal{V}_1 \times H_0^1(0, L) \times \mathcal{V}_2 \times H_*^1(0, L) \times \mathcal{V}_1 \times H_0^1(0, L) \times \mathcal{V}_2 \times H_*^1(0, L)$$

onde

$$\mathcal{V}_1 := H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \text{ e } \mathcal{V}_2 := H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L).$$

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ está equipado com o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} (\Psi, \Psi)_{\mathcal{H}} = & \rho_1 \int_0^L u^{(2)} \overline{v^{(2)}} dx + \kappa_1 \int_0^L (u_x^{(1)} - u^{(3)}) (\overline{v_x^{(1)} - v^{(3)}}) dx + \rho_2 \int_0^L u^{(4)} \overline{v^{(4)}} dx \\ & + b_1 \int_0^L u_x^{(3)} \overline{v_x^{(3)}} dx + \rho_3 \int_0^L u^{(6)} \overline{v^{(6)}} dx + \kappa_2 \int_0^L (u_x^{(5)} - u^{(7)}) (\overline{v_x^{(5)} - v^{(7)}}) dx \\ & + \rho_4 \int_0^L u^{(8)} \overline{v^{(8)}} dx + b_2 \int_0^L u_x^{(7)} \overline{v_x^{(7)}} dx + \mathcal{C} \int_0^L (u^{(5)} - u^{(1)}) (\overline{v^{(5)} - v^{(1)}}) dx, \end{aligned} \quad (2.19)$$

e norma

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 = & \rho_1 \int_0^L |u^{(2)}|^2 dx + \kappa_1 \int_0^L |u_x^{(1)} - u^{(3)}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |u^{(4)}|^2 dx \\ & + b_1 \int_0^L |u_x^{(3)}|^2 dx + \rho_3 \int_0^L |u^{(6)}|^2 dx + \kappa_2 \int_0^L |u_x^{(5)} - u^{(7)}|^2 dx \\ & + \rho_4 \int_0^L |u^{(8)}|^2 dx + b_2 \int_0^L |u_x^{(7)}|^2 dx + \mathcal{C} \int_0^L |u^{(5)} - u^{(1)}|^2 dx, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde $\Psi = (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}, u^{(5)}, u^{(6)}, u^{(7)}, u^{(8)}) \in \mathcal{H}$ e

$\Psi = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}, v^{(5)}, v^{(6)}, v^{(7)}, v^{(8)})$ são vetores de $\mathcal{H}$. Se denotarmos

$$\Psi = \{\varphi^{(1)}, \varphi_t^{(1)}, \psi^{(1)}, \psi_t^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi_t^{(2)}, \psi^{(2)}, \psi_t^{(2)}\}$$

e

$$\Psi_0 = \{\varphi_0^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \psi_0^{(1)}, \psi_1^{(1)}, \varphi_0^{(2)}, \varphi_1^{(2)}, \psi_0^{(2)}, \psi_1^{(2)}\}$$

então o sistema (2.1)-(2.8) pode ser reescrito como se segue

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{A}\Psi, & \text{para } t > 0 \\ \Psi(0) = \Psi_0 \end{cases} \quad (2.21)$$

onde o operador $\mathcal{A}$ satisfaz

$$\mathcal{A}\Psi = \begin{pmatrix} \varphi^{(2)} \\ \frac{\kappa_1}{\rho_1}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x + \frac{\mathcal{C}}{\rho_1}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) \\ \psi^{(2)} \\ \frac{b_1}{\rho_2}\psi_{xx}^{(1)} + \frac{\kappa_1}{\rho_2}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) - \frac{\alpha_1}{\rho_2}\psi^{(2)} \\ \varphi^{(4)} \\ \frac{\kappa_2}{\rho_3}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)})_x - \frac{\mathcal{C}}{\rho_3}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) - \frac{\alpha_2}{\rho_3}\varphi^{(4)} \\ \psi^{(4)} \\ \frac{b_2}{\rho_4}\psi_{xx}^{(3)} + \frac{\kappa_2}{\rho_4}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}) - \frac{\alpha_3}{\rho_4}\psi^{(4)} \end{pmatrix}$$

para

$$\Psi = \{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)}\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}.$$

Teorema 2.3.1. *O operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em $\mathcal{H}$. Portanto, para qualquer dado inicial $\Psi_0 \in \mathcal{H}$, o problema (2.1) – (2.8) tem uma única solução fraca $\Psi(t) \in C^0((0, \infty), \mathcal{H})$. Além disso, se $\Psi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $\Psi(t)$ é uma solução forte de (2.1) – (2.8), isto é, $\Psi(t) \in C^1((0, \infty), \mathcal{H}) \cap C^0((0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$.*

Prova. Para $\Psi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)})^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}$ e, de acordo com a definição do produto interno, temos

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\Psi, \Psi)_H = -\alpha_1 \int_0^L |\psi^{(2)}|^2 dx - \alpha_2 \int_0^L |\varphi^{(4)}|^2 dx - \alpha_3 \int_0^L |\psi^{(4)}|^2 dx \leq 0 \quad (2.22)$$

de onde segue que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Além disso temos que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

Agora, é suficiente mostrar que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, seguindo os resultados de Lummer-Phillips (ver [41]). Para isto, vamos tomar qualquer $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8)^T \in \mathcal{H}$ e mostrar que existe $\Psi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)})^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}$ tal que

$$\mathcal{A}(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)})^T = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8)^T, \quad (2.23)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= f^1, \\ +\frac{\kappa_1}{\rho_1}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x + \frac{\mathcal{C}}{\rho_1}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) &= f^2 \\ \psi^{(2)} &= f^3 \\ +\frac{b_1}{\rho_2}\psi_{xx}^{(1)} + \frac{\kappa_1}{\rho_2}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) - \frac{\alpha_1}{\rho_2}\psi^{(2)} &= f^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(4)} &= f^5 \\
 +\frac{\kappa_2}{\rho_3}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)})_x - \frac{\mathcal{C}}{\rho_3}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) - \frac{\alpha_2}{\rho_3}\varphi^{(4)} &= f^6 \\
 \psi^{(4)} &= f^7 \\
 +\frac{b_2}{\rho_4}\psi_{xx}^{(3)} + \frac{\kappa_2}{\rho_4}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}) - \frac{\alpha_3}{\rho_4}\psi^{(4)} &= f^8
 \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\varphi^{(2)} = f^1, \quad \psi^{(2)} = f^3, \quad \varphi^{(4)} = f^5, \quad \psi^{(4)} = f^7.$$

Das equações acima, temos que $\varphi^{(2)} \in H_0^1(0, L)$, $\psi^{(2)} \in H_*^1(0, L)$, $\varphi^{(4)} \in H_0^1(0, L)$ e $\psi^{(4)} \in H_*^1(0, L)$. Assim, podemos considerar o seguinte sistema elíptico

$$+\frac{\kappa_1}{\rho_1}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x + \frac{\mathcal{C}}{\rho_1}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) = f^2 \quad \text{em } L^2(0, L), \quad (2.24)$$

$$+\frac{b_1}{\rho_2}\psi_{xx}^{(1)} + \frac{\kappa_1}{\rho_2}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) - \frac{\alpha_1}{\rho_2}\psi^{(2)} = f^4 \quad \text{em } L_*^2(0, L), \quad (2.25)$$

$$+\frac{\kappa_2}{\rho_3}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)})_x - \frac{\mathcal{C}}{\rho_3}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) - \frac{\alpha_2}{\rho_3}\varphi^{(4)} = f^6 \quad \text{em } L^2(0, L), \quad (2.26)$$

$$+\frac{b_2}{\rho_4}\psi_{xx}^{(3)} + \frac{\kappa_2}{\rho_4}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}) - \frac{\alpha_3}{\rho_4}\psi^{(4)} = f^8 \quad \text{em } L_*^2(0, L). \quad (2.27)$$

Para resolver este problema, consideremos a seguinte forma bilinear

$$a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\Phi, \tilde{\Phi}) \longmapsto a(\Phi, \tilde{\Phi})$$

onde

$$\begin{aligned}
 a(\Phi, \tilde{\Phi}) &:= \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})(\tilde{\varphi}_x^{(1)} - \tilde{\psi}^{(1)})dx + b_1 \int_0^L \psi_x^{(1)}\tilde{\psi}_x^{(1)}dx \\
 &+ \kappa_2 \int_0^L (\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)})(\tilde{\varphi}_x^{(3)} - \tilde{\psi}^{(3)})dx + b_2 \int_0^L \psi_x^{(3)}\tilde{\psi}_x^{(3)}dx \\
 &+ \mathcal{C} \int_0^L (\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)})(\tilde{\varphi}^{(3)} - \tilde{\varphi}^{(1)})dx
 \end{aligned}$$

para $\Phi = (\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \psi^{(3)}) \in E$, $\tilde{\Phi} = (\tilde{\varphi}^{(1)}, \tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{\varphi}^{(3)}, \tilde{\psi}^{(3)}) \in E$ e $E = H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$.

A forma bilinear é coerciva e contínua. Além disso, definimos a aplicação linear e

contínua

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{\Phi} &\longmapsto h(\tilde{\Phi}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h := \int_0^L \rho_1 f^2 \overline{\varphi^{(1)}} dx &+ \int_0^L \alpha_1 f^3 \overline{\psi^{(1)}} dx + \int_0^L \rho_2 f^4 \overline{\psi^{(1)}} dx + \int_0^L \alpha_2 f^5 \overline{\varphi^{(3)}} dx \\ &+ \int_0^L \rho_3 f^6 \overline{\varphi^{(3)}} dx + \int_0^L \alpha_3 f^7 \overline{\psi^{(3)}} dx + \int_0^L \rho_4 f^8 \overline{\psi^{(2)}} dx. \end{aligned}$$

Segue, então, do Teorema de Lax-Milgran (ver [7]) que existe uma única função $(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \psi^{(3)}) \in E$ tal que

$$a(\Phi, \tilde{\Phi}) = h(\tilde{\Phi}), \quad \forall \tilde{\Phi} \in E.$$

Além disto, do problema (2.24)-(2.27) em $L^2(0, L)$, obtemos $(\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, \varphi^{(3)}, \psi^{(3)}) \in H^2(0, L)$. Portanto $\Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Desta forma, deduzimos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, onde $\rho(\mathcal{A})$ é o resolvente de $\mathcal{A}$. Então pela identidade do resolvente, para $\lambda > 0$ pequeno, temos $R(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Finalmente, usando o Teorema de Lumer-Phillips, o operador $\mathcal{A}$ é gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ em $\mathcal{H}$. ■

Nas seções que seguem, verificamos que a relação entre as velocidades de ondas do sistema (2.1) – (2.8) está intrinsecamente ligada a estabilidade exponencial do sistema. Com este propósito, descrevemos um resultado importante que será utilizado nas próximas seções.

O método usado para mostrar a falta de decaimento exponencial bem como a estabilidade exponencial é baseado no Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang para sistemas com dissipações [23]. Um resultado equivalente pode ser encontrado em Z. Liu e S. Zheng [30], o qual nos dá a seguinte versão que fornece uma condição necessária e suficiente para um C_0 -semigrupo ser exponencialmente estável.

Teorema 2.3.2. *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições*

$$i\mathbb{R} \equiv i\lambda : \lambda \in \mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad (2.28)$$

e

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad (2.29)$$

se verificam, onde $\varrho(\mathcal{A})$ é o resolvente de $\mathcal{A}$.

Capítulo 3

Duplo Nanotubo-Timoshenko: Dissipação nos declives do tubo e no deslocamento lateral do tubo externo

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos um modelo de vigas de Timoshenko associado ao nanotubo de parede dupla com dissipação nas três últimas equações, isto é, nas equações relacionadas ao declive dos tubos e no deslocamento lateral do tubo externo. Sendo assim, consideramos $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ no seguinte sistema.

$$\rho_1 \varphi_{tt}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x - \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) + \alpha_0 \varphi_t^{(1)} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt}^{(1)} - b_1 \psi_{xx}^{(1)} - \kappa_1 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) + \alpha_1 \psi_t^{(1)} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.2)$$

$$\rho_3 \varphi_{tt}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)})_x + \mathcal{C}(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) + \alpha_2 \varphi_t^{(2)} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.3)$$

$$\rho_4 \psi_{tt}^{(2)} - b_2 \psi_{xx}^{(2)} - \kappa_2 (\varphi_x^{(2)} - \psi^{(2)}) + \alpha_3 \psi_t^{(2)} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty). \quad (3.4)$$

Analizamos a assintótica de soluções para o modelo acima, associando ao sistema as seguintes condições de contorno

$$\varphi^{(i)}(0, t) = \varphi^{(i)}(L, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall t > 0, \quad (3.5)$$

$$\psi_x^{(i)}(0, t) = \psi_x^{(i)}(L, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall t > 0, \quad (3.6)$$

e condições iniciais

$$\varphi^{(i)}(x, 0) = \varphi_0^{(i)}, \quad \varphi_t^{(i)}(x, 0) = \varphi_1^{(i)}, \quad (3.7)$$

$$\psi^{(i)}(x, 0) = \psi_0^{(i)}, \quad \psi_t^{(i)}(x, 0) = \psi_1^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad \forall x \in (0, L). \quad (3.8)$$

O nosso principal objetivo consiste em determinar a assintótica de soluções do modelo, e com este propósito encontramos um número de extrema importância, que relaciona as velocidades de propagação de ondas do sistema clássico de Timoshenko com o fato do sistema ser exponencialmente estável, porém com uma particularidade $\frac{\kappa_1}{b_1} \neq 0$.

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira. Na Seção 3.2 mostramos a falta de decaimento exponencial para o sistema de Timoshenko associado ao duplo nanotubo de carbono com mecanismos dissipativos atuando nos declives dos tubos e no deslocamento lateral do tubo externo dado por (3.1) – (3.4) com condições de fronteira (3.5) – (3.6) e condições iniciais (3.7) – (3.8). Além disso encontramos um número que nos fornece a estabilidade exponencial ou polinomial, respectivamente. Na Seção 3.3 utilizamos de métodos multiplicativos para estudar o decaimento exponencial de soluções do sistema (3.1)–(3.8). Por fim, na Seção 3.4 mostramos que o sistema (3.1)–(3.8) é polinomialmente estável apresentando uma taxa ótima de decaimento.

3.2 Falta de estabilidade exponencial

Nesta seção, mostramos que o modelo de viga de Timoshenko para duplo nanotubo de carbono (3.1) – (3.8) perde estabilidade exponencial quando consideramos as velocidades de propagação de ondas distintas. Para isto, utilizamos o Teorema 2.3.2.

A essência do método consiste em supor por contradição que a hipótese do teorema é falsa, assim provamos que existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e uma sequência $\Psi_n \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, satisfazendo a equação resolvente

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})\Psi_n = F_n \quad (3.9)$$

para funções $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6, f_n^7, f_n^8) \in \mathcal{H}$, com $\|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, de modo que

$$\|\Psi_n\|_{\mathcal{H}} = \|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Ao analisarmos a equação (3.9), mostramos que a solução correspondente Ψ_n não é limitada em $\mathcal{H}$ quando F_n é limitada em $\mathcal{H}$.

Reescrevendo a equação resolvente em termos de seus componentes, obtemos o seguinte sistema

$$i\lambda_n\varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)} = f_n^1, \quad (3.11)$$

$$i\rho_1\lambda_n\varphi_n^{(2)} - \kappa_1(\varphi_{nx}^{(1)} - \psi_n^{(1)})_x - \mathcal{C}(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(1)}) = \rho_1 f_n^2, \quad (3.12)$$

$$i\lambda_n\psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)} = f_n^3, \quad (3.13)$$

$$i\rho_2\lambda_n\psi_n^{(2)} - b_1\psi_{nxx}^{(1)} - \kappa_1(\varphi_{nx}^{(1)} - \psi_n^{(1)}) + \alpha_1\psi_n^{(2)} = \rho_2 f_n^4, \quad (3.14)$$

$$i\lambda_n\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(4)} = f_n^5, \quad (3.15)$$

$$i\rho_3\lambda_n\varphi_n^{(4)} - \kappa_2(\varphi_{nx}^{(3)} - \psi_n^{(3)})_x + \mathcal{C}(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(1)}) + \alpha_2\varphi_n^{(4)} = \rho_3 f_n^6, \quad (3.16)$$

$$i\lambda_n\psi_n^{(3)} - \psi_n^{(4)} = f_n^7, \quad (3.17)$$

$$i\rho_4\lambda_n\psi_n^{(4)} - b_2\psi_{nxx}^{(3)} - \kappa_2(\varphi_{nx}^{(3)} - \psi_n^{(3)}) + \alpha_3\psi_n^{(4)} = \rho_4 f_n^8. \quad (3.18)$$

Agora, estamos em condições de estabelecer o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2.1. *Vamos supor que*

$$\frac{\rho_1}{\kappa_1} \neq \frac{\rho_2}{b_1} \quad e \quad \mathcal{C}\left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1}\right) \neq \frac{\kappa_1}{b_1}.$$

Então o semigrupo $(S(t))_{t \geq 0}$ associado ao sistema (3.1) – (3.8) não é exponencialmente estável.

Prova. Vamos provar que existe uma sequência λ_n e funções $F_n \in \mathcal{H}$, com $\|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ verificando (3.10). Para isto, vamos tomar $f_n^1 = f_n^3 = f_n^5 = f_n^7 = 0$ em (3.11), (3.13), (3.15) e (3.17), assim temos

$$-\rho_1\lambda_n^2\varphi_n^{(1)} - \kappa_1(\varphi_{nx}^{(1)} - \psi_n^{(1)})_x - \mathcal{C}(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(1)}) = \rho_1 f_n^2, \quad (3.19)$$

$$-\rho_2\lambda_n^2\psi_n^{(1)} - b_1\psi_{nxx}^{(1)} - \kappa_1(\varphi_{nx}^{(1)} - \psi_n^{(1)}) + i\alpha_1\lambda_n\psi_n^{(1)} = \rho_2 f_n^4, \quad (3.20)$$

$$-\rho_3\lambda_n^2\varphi_n^{(3)} - \kappa_2(\varphi_{nx}^{(3)} - \psi_n^{(3)})_x + \mathcal{C}(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(1)}) + i\alpha_2\lambda_n\varphi_n^{(3)} = \rho_3 f_n^6, \quad (3.21)$$

$$-\rho_4\lambda_n^2\psi_n^{(3)} - b_2\psi_{nxx}^{(3)} - \kappa_2(\varphi_{nx}^{(3)} - \psi_n^{(3)}) + i\alpha_3\lambda_n\psi_n^{(3)} = \rho_4 f_n^8. \quad (3.22)$$

Levando em conta as condições de contorno dadas em (3.5)-(3.6), vamos assumir que

$$\varphi_n^{(1)} = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad \psi_n^{(1)} = B \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad \varphi_n^{(3)} = C \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad \psi_n^{(3)} = D \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

onde A, B, C, D dependem de λ_n e serão determinados posteriormente. Sendo assim, encontrar a solução do sistema (3.19)-(3.22) é equivalente a encontrar coeficientes A, B, C e D para o seguinte sistema

$$\left(\left[-\rho_1 \lambda_n^2 + \kappa_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \mathfrak{C} \right] A - \kappa_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right) B - \mathfrak{C} C \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \rho_1 f_n^2, \quad (3.23)$$

$$\left(\left[-\rho_2 \lambda_n^2 + b_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \kappa_1 + i\alpha_1 \lambda_n \right] B - \kappa_1 \left(\frac{n\pi}{L} \right) A \right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \rho_2 f_n^4, \quad (3.24)$$

$$\left(\left[-\rho_3 \lambda_n^2 + \kappa_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \mathfrak{C} + i\alpha_2 \lambda_n \right] C - \kappa_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right) D - \mathfrak{C} A \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \rho_3 f_n^6, \quad (3.25)$$

$$\left(\left[-\rho_4 \lambda_n^2 + \kappa_2 + i\alpha_3 \lambda_n + b_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right] D - \kappa_2 \left(\frac{n\pi}{L} \right) C \right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \rho_4 f_n^8. \quad (3.26)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos f_n^2, f_n^4, f_n^6 e f_n^8 como

$$f_n^2 = c_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad f_n^4 = c_2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad f_n^6 = c_3 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad f_n^8 = c_4 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\lambda_n^2 + \frac{\kappa_1}{\rho_1} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1} \right) A - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \left(\frac{n\pi}{L} \right) B - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1} C = c_1, \\ \left(-\lambda_n^2 + \frac{b_1}{\rho_2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\kappa_1}{\rho_2} + \frac{i\alpha_1 \lambda_n}{\rho_2} \right) B - \frac{\kappa_1}{\rho_2} \left(\frac{n\pi}{L} \right) A = c_2, \\ \left(-\lambda_n^2 + \frac{\kappa_2}{\rho_3} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\mathfrak{C}}{\rho_3} + \frac{i\alpha_2 \lambda_n}{\rho_3} \right) C - \frac{\kappa_2}{\rho_3} \left(\frac{n\pi}{L} \right) D - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_3} A = c_3, \\ \left(-\lambda_n^2 + \frac{\kappa_2}{\rho_4} + \frac{i\alpha_3 \lambda_n}{\rho_4} + \frac{b_2}{\rho_4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) D - \frac{\kappa_2}{\rho_4} \left(\frac{n\pi}{L} \right) C = c_4. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Definimos

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}} \frac{n\pi}{L}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.28)$$

e

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 0.$$

Sendo assim, obtemos

$$+\frac{\mathfrak{C}}{\rho_1}A - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \left(\frac{n\pi}{L} \right) B - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1}C = 1, \quad (3.29)$$

$$-\frac{\kappa_1}{\rho_2} \left(\frac{n\pi}{L} \right) A + \left(\left(\frac{b_1}{\rho_2} - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\kappa_1}{\rho_2} + \frac{i\alpha_1}{\rho_2} \sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}} \frac{n\pi}{L} \right) B = 0, \quad (3.30)$$

$$-\frac{\mathfrak{C}}{\rho_3}A + \left(\left(\frac{\kappa_2}{\rho_3} - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\mathfrak{C}}{\rho_3} + \frac{i\alpha_2}{\rho_3} \sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}} \frac{n\pi}{L} \right) C - \frac{\kappa_2}{\rho_3} \left(\frac{n\pi}{L} \right) D = 0, \quad (3.31)$$

$$-\frac{\kappa_2}{\rho_4} \left(\frac{n\pi}{L} \right) C + \left(\left(\frac{b_2}{\rho_4} - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\kappa_2}{\rho_4} + \frac{i\alpha_3}{\rho_4} \sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}} \frac{n\pi}{L} \right) D = 0. \quad (3.32)$$

Agora, considere

$$P_1(n) := \frac{\kappa_1}{\rho_1} \left(\frac{n\pi}{L} \right), \quad P_2(n) := -\frac{\kappa_1}{\rho_2} \left(\frac{n\pi}{L} \right),$$

$$P_3(n) := \left(\frac{b_1}{\rho_2} - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\kappa_1}{\rho_2} + i\sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}} \frac{n\pi}{L} \frac{\alpha_1}{\rho_2},$$

$$P_4(n) := \left(\frac{\kappa_2}{\rho_3} - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\mathfrak{C}}{\rho_3} + i\sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}} \frac{n\pi}{L} \frac{\alpha_2}{\rho_3},$$

$$P_5 := \frac{\kappa_2}{\rho_3} \left(\frac{n\pi}{L} \right), \quad P_6 := -\frac{\kappa_2}{\rho_4} \left(\frac{n\pi}{L} \right),$$

$$P_7 := \left(\frac{b_2}{\rho_4} - \frac{\kappa_1}{\rho_1} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{\kappa_2}{\rho_4} + i\sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho_1}} \frac{n\pi}{L} \frac{\alpha_3}{\rho_4}.$$

Substituindo os $P_\mu(n)$'s em (3.29)-(3.32), temos

$$+\frac{\mathfrak{C}}{\rho_1}A - P_1(n)B - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1}C = 1, \quad (3.33)$$

$$P_2(n)A + P_3(n)B = 0 \implies B = -\frac{P_2(n)}{P_3(n)}A, \quad (3.34)$$

$$-\frac{\mathfrak{C}}{\rho_3}A + P_4(n)C - P_5(n)D = 0, \quad (3.35)$$

$$P_6(n)C + P_7(n)D = 0 \implies D = -\frac{P_6(n)}{P_7(n)}C. \quad (3.36)$$

Substituindo (3.34) em (3.33) e (3.36) em (3.35), obtemos

$$\begin{cases} +\frac{\mathfrak{C}}{\rho_1}A - P_1(n)\left(-\frac{P_2(n)}{P_3(n)}A\right) - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1}C = 1, \\ -\frac{\mathfrak{C}}{\rho_3}A + P_4(n)C - P_5(n)\left(-\frac{P_6(n)}{P_7(n)}C\right) = 0. \end{cases}$$

De onde segue que

$$C := C_n = -\frac{\mathfrak{C}}{\rho_3 \left[\left(\frac{P_5(n)P_6(n)}{P_7(n)} + P_4(n) \right) \left(\frac{P_1(n)P_2(n)}{P_3(n)} - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1} \right) - \frac{\mathfrak{C}^2}{\rho_1\rho_3} \right]}. \quad (3.37)$$

e

$$A := A_n = \frac{\left(\frac{P_5(n)P_6(n)}{P_7(n)} + P_4(n) \right)}{\left(\frac{P_5(n)P_6(n)}{P_7(n)} + P_4(n) \right) \left(\frac{P_1(n)P_2(n)}{P_3(n)} - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1} \right) - \frac{\mathfrak{C}^2}{\rho_1\rho_3}}. \quad (3.38)$$

Substituindo A dado por (3.38) em (3.34) e (3.37) em (3.36), obtemos

$$B := B_n = -\frac{P_2(n) \left(\frac{P_5(n)P_6(n)}{P_7(n)} + P_4(n) \right)}{P_3(n) \left[\left(\frac{P_5(n)P_6(n)}{P_7(n)} + P_4(n) \right) \left(\frac{P_1(n)P_2(n)}{P_3(n)} - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1} \right) - \frac{\mathfrak{C}^2}{\rho_1\rho_3} \right]}, \quad (3.39)$$

e

$$D := D_n = \frac{P_6(n)\mathfrak{C}}{\rho_3 P_7(n) \left[\left(\frac{P_5(n)P_6(n)}{P_7(n)} + P_4(n) \right) \left(\frac{P_1(n)P_2(n)}{P_3(n)} - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1} \right) - \frac{\mathfrak{C}^2}{\rho_1\rho_3} \right]}. \quad (3.40)$$

Consequentemente, tem-se que

$$A_n \longrightarrow \frac{\kappa_1 b_1 \left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} \right)}{\kappa_1^2 - \mathcal{C} \kappa_1 b_1 \left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} \right)}, \quad (3.41)$$

$$B_n \longrightarrow 0, \quad (3.42)$$

$$C_n \longrightarrow 0, \quad (3.43)$$

$$D_n \longrightarrow 0, \quad (3.44)$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto, desde que

$$\begin{aligned} \|\Psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_1 \int_0^L |\varphi_n^{(2)}|^2 dx \\ &= \rho_1 \int_0^L |\lambda_n \varphi_n^{(1)}|^2 dx \\ \|\Psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_1 \int_0^L \lambda_n^2 A_n^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \approx O(n^2). \end{aligned}$$

De onde vem que

$$\|\Psi_n\|_{\mathcal{H}} \geq \lambda_n A_n \sqrt{\frac{\rho_1 L}{2}} \approx O(n) \rightarrow \infty, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.45)$$

Desta forma, usando o Teorema (2.3.2) não temos estabilidade exponencial. ■

3.3 Estabilidade Assintótica

Nesta seção estudamos o decaimento exponencial do sistema (3.1) – (3.8) ao qual corresponde a viga de Timoshenko aplicada ao nanotubo de carbono com paredes duplas (DWNT), sujeito à uma força intermolecular, chamada força de Van der Waals, atuando no deslocamento lateral, com mecanismos dissipativos atuando nas três últimas equações. Nosso objetivo é mostrar que se

$$\chi = \frac{\kappa_1 \rho_2 - b_1 \rho_1}{\kappa_1^2 - \mathcal{C} \rho_2 \kappa_1 + \mathcal{C} b_1 \rho_1} = 0,$$

o que é equivale a dizer que

$$\frac{\rho_1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2}{b_1} \quad \text{e} \quad \kappa_1^2 - \mathcal{C} \kappa_1 b_1 \left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} \right) = \frac{\kappa_1}{b_1} \neq 0.$$

então, o semigrupo $S(t) := e^{At}$ é exponencialmente estável, isto é, a solução do sistema decai exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$. Sendo mais explícito, provaremos que a energia das soluções do problema pode ser controlada por uma função exponencial decrescente, a qual estabiliza rapidamente as soluções. Para obter essa propriedade faremos uso do Teorema 2.3.2. Por conseguinte, a fim de mostrar a estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema Nanotubo de Carbono-Timoshenko (3.1) – (3.8) é necessário e suficiente provar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ e

$$\exists C > 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|(i\lambda I - \mathcal{A})\Psi\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que corresponde a verificar se as condições (2.28) e (2.29) do Teorema de Gearhart são satisfeitas.

Primeiramente, consideremos o produto interno em $\mathcal{H}$ de $\Psi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)})^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com a equação resolvente de $\mathcal{A}$, isto é

$$i\lambda \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}\Psi, \Psi)_{\mathcal{H}} = (F, \Psi)_{\mathcal{H}}.$$

Então, tomando a parte real e usando a desigualdade (2.22), obtemos

$$\alpha_1 \int_0^L |\psi^{(2)}|^2 dx + \alpha_2 \int_0^L |\varphi^{(4)}|^2 dx + \alpha_3 \int_0^L |\psi^{(4)}|^2 dx \leq \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (3.46)$$

Agora, vamos mostrar que o resolvente de $\mathcal{A}$ é uniformemente limitado ao longo do eixo imaginário. Logo, estabelecemos o seguinte Lema.

Lema 3.3.1. *Sob as considerações acima, o operador $\mathcal{A}$ verifica a seguinte propriedade*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}).$$

Prova. Desde que $(I - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto em H , para verificar que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ é suficiente mostrar que $\mathcal{A}$ não possui autovalor imaginário puro. Deste modo, suponhamos que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que $i\lambda_0$ é um autovalor e $\Psi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)})$ seja um autovetor normalizado. Provaremos que

$$\mathcal{A}\Psi = i\lambda_0\Psi \Rightarrow \Psi = 0. \quad (3.47)$$

De fato, escrevendo a relação acima em termos de seus componentes, temos

$$\varphi^{(2)} = i\lambda_0\varphi^{(1)} \quad (3.48)$$

$$\frac{\kappa_1}{\rho_1}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x + \frac{\mathfrak{C}}{\rho_1}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) = i\lambda_0\varphi^{(2)} \quad (3.49)$$

$$\psi^{(2)} = i\lambda_0\psi^{(1)} \quad (3.50)$$

$$\frac{b_1}{\rho_2}\psi_{xx}^{(1)} + \frac{\kappa_1}{\rho_2}(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) - \frac{\alpha_1}{\rho_2}\psi^{(2)} = i\lambda_0\psi^{(2)} \quad (3.51)$$

$$\varphi^{(4)} = i\lambda_0\varphi^{(3)} \quad (3.52)$$

$$\frac{\kappa_2}{\rho_3}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)})_x - \frac{\mathfrak{C}}{\rho_3}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) - \frac{\alpha_2}{\rho_3}\varphi^{(4)} = i\lambda_0\varphi^{(4)} \quad (3.53)$$

$$\psi^{(4)} = i\lambda_0\psi^{(3)} \quad (3.54)$$

$$\frac{b_2}{\rho_4}\psi_{xx}^{(3)} + \frac{\kappa_2}{\rho_4}(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}) - \frac{\alpha_3}{\rho_4}\psi^{(4)} = i\lambda_0\psi^{(4)} \quad (3.55)$$

Usando (2.22) em (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^L |\psi^{(2)}|^2 dx + \alpha_2 \int_0^L |\varphi^{(4)}|^2 dx + \alpha_3 \int_0^L |\psi^{(4)}|^2 dx \\ = -Re(A\Psi, \Psi)_{\mathcal{H}} = -Re(i\lambda_0 \|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Desde $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, então

$$\psi^{(2)} = \varphi^{(4)} = \psi^{(4)} = 0 \text{ em } (0, L). \quad (3.57)$$

Recordando que $\psi^{(1)}, \psi^{(3)} \in H^2(0, L) \subseteq C^1([0, L])$ e usando (3.57) em (3.50) e (3.54), obtemos

$$\psi^{(1)} = \psi^{(3)} = 0 \text{ em } (0, L) \text{ e } \psi^{(1)}|_{0,L} = \psi^{(3)}|_{0,L} = 0 \quad (3.58)$$

Daí segue que

$$\psi_x^{(1)} = \psi_x^{(3)} = 0 \text{ em } (0, L) \text{ e } \psi_x^{(1)}|_{0,L} = \psi_x^{(3)}|_{0,L} = 0 \quad (3.59)$$

Inserindo (3.57), (3.58) e (3.59) em (3.48)-(3.55), podemos concluir que

$$\Psi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)}) \equiv 0.$$

Logo não existem autovalores imaginários e, o nosso resultado está provado. ■

Observação 1. *Em particular esse resultado implica que o semigrupo é fortemente estável, isto é,*

$$S(t)\Psi_0 \longrightarrow 0,$$

onde $S(t) := e^{At}$ é o C_0 -semigrupo de contrações de Hilbert $\mathcal{H}$ e Ψ_0 é o dado inicial.

A seguir, mostraremos que se

$$\frac{\rho_1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2}{b_1} \quad (3.60)$$

então o semigrupo $S(t) = e^{At}$ associado ao problema (3.1) – (3.8) satisfaz a condição (2.29) do Teorema (2.3.2) e assim concluir que o sistema é exponencialmente estável.

Observação 2. *Desde que $\frac{\rho_1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2}{b_1}$, então*

$$\kappa_1^2 - \mathcal{C}\kappa_1 b_1 \left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} \right) = \frac{\kappa_1}{b_1} \neq 0.$$

Para isso, vamos considerar a equação resolvente

$$i\lambda\Psi - \mathcal{A}\Psi = F \text{ em } \mathcal{H},$$

a qual pode ser reescrito em termos de suas componentes como

$$i\lambda\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} = f_1 \quad (3.61)$$

$$i\lambda\rho_1\varphi^{(2)} - \kappa_1(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x - \mathcal{C}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) = \rho_1 f_2 \quad (3.62)$$

$$i\lambda\psi^{(1)} - \psi^{(2)} = f_3 \quad (3.63)$$

$$i\lambda\rho_2\psi^{(2)} - b_1\psi_{xx}^{(1)} - \kappa_1(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) + \alpha_1\psi^{(2)} = \rho_2 f_4 \quad (3.64)$$

$$i\lambda\varphi^{(3)} - \varphi^{(4)} = f_5 \quad (3.65)$$

$$i\lambda\rho_3\varphi^{(4)} - \kappa_2(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)})_x + \mathcal{C}(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) + \alpha_2\varphi^{(4)} = \rho_3 f_6 \quad (3.66)$$

$$i\lambda\psi^{(3)} - \psi^{(4)} = f_7 \quad (3.67)$$

$$i\lambda\rho_4\psi^{(4)} - b_2\psi_{xx}^{(3)} - \kappa_2(\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}) + \alpha_3\psi^{(4)} = \rho_4 f_8 \quad (3.68)$$

onde $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8) \in \mathcal{H}$ e $\Psi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \varphi^{(4)}, \psi^{(3)}, \psi^{(4)}) \in D(\mathcal{A})$.

A prova envolve a utilização de dois lemas auxiliares.

Lema 3.3.2. *Supondo $\frac{\rho_1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2}{b_1}$, então existe uma constante positiva M de tal modo que qualquer solução do sistema (3.1) – (3.2) satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1}{2} \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx &\leq \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(4)}\|_{L^2} + \frac{M}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(2)}\|_{L^2} + M \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

onde $|\lambda| > 1$ é suficientemente grande.

Prova. Multiplicando a equação (3.64) por $\overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})}$, integrando por partes sobre $(0, L)$ e observando as condições de contorno em (2.5)-(2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \kappa_1 \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx &= i\lambda\rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})} dx + b_1 \underbrace{\int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x} dx}_{:=I_1} \\ &+ \alpha_1 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})} dx - \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})} dx. \end{aligned}$$

Substituindo $\overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x}$ dado por (3.62) em I_1 , temos

$$\begin{aligned} \kappa_1 \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx &= \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})} dx}_{:=I_2} - i\lambda \frac{b_1\rho_1}{\kappa_1} \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{\varphi^{(2)}} dx \\ &- \frac{b_1\mathcal{C}}{\kappa_1} \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{(\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)})} dx - \frac{b_1\rho_1}{\kappa_1} \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{f_2} dx \\ &+ \alpha_1 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})} dx - \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{(\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})} dx \quad (3.69) \end{aligned}$$

Analisaremos o termo I_2 . Usando-se (3.61) e (3.63) em I_2 e realizando algumas integrações por partes, encontramos

$$\begin{aligned} I_2 &= i\lambda\rho_2 \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{\varphi^{(2)}} dx - \rho_2 \int_0^L f_3 \overline{\varphi_x^{(2)}} dx - \rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{f_{1x}} dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L |\psi^{(2)}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{f_3} dx. \end{aligned}$$

Substituindo I_2 na equação (3.69), temos

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx &= i\lambda \left(\rho_2 - \frac{b_1 \rho_1}{\kappa_1} \right) \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{\varphi^{(2)}} dx - \rho_2 \int_0^L \overline{f_3 \varphi_x^{(2)}} dx \\
 &- \rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{f_{1x}} dx + \rho_2 \int_0^L |\psi^{(2)}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{f_3} dx \\
 &- \underbrace{\frac{b_1 \mathcal{C}}{\kappa_1} \int_0^L \psi_x^{(1)} (\overline{\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}}) dx}_{:= I_3} - \frac{b_1 \rho_1}{\kappa_1} \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{f_2} dx \\
 &+ \alpha_1 \int_0^L \psi^{(2)} (\overline{\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}}) dx - \rho_2 \int_0^L \overline{f_4 (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})} dx \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

Agora vamos analisar o termo I_3 . Das equações (3.61) e (3.65), obtemos

$$|\varphi^{(1)}| \leq \frac{1}{|\lambda|} (|\varphi^{(2)}| + |f_1|)$$

e

$$|\varphi^{(3)}| \leq \frac{1}{|\lambda|} (|\varphi^{(4)}| + |f_5|).$$

Substituindo as desigualdades acima em I_3 e usando a desigualdade de Hölder, encontramos

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(4)}\|_{L^2} + \frac{M}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
 &+ \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(2)}\|_{L^2} + \frac{M}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Substituindo I_3 em (3.70), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\kappa_1}{2} \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx &\leq i\lambda \left(\rho_2 - \frac{b_1 \rho_1}{\kappa_1} \right) \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{\varphi^{(2)}} dx + M \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
 &+ \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(4)}\|_{L^2} + \frac{M}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
 &+ \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(2)}\|_{L^2}, \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande. Desde que $\frac{\rho_1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2}{b_1}$ seguem nossas conclusões. ■

Lema 3.3.3. *Sob as considerações acima, existe uma constante positiva M_ε de tal modo*

que qualquer solução forte do sistema (3.1) – (3.8) satisfaz

$$\begin{aligned} & \left(\rho_1 - \frac{M}{|\lambda|} \right) \int_0^L |\varphi^{(2)}|^2 dx + \left(b_1 - \frac{M}{|\lambda|} - \varepsilon b_1 \right) \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx \\ & + \kappa_2(1 - \varepsilon) \int_0^L |\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}|^2 dx + b_2(1 - \varepsilon) \int_0^L |\psi_x^{(3)}|^2 dx \\ & + \mathfrak{C} \int_0^L |\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}|^2 dx \leq \frac{M}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + M_\varepsilon \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

onde ε é uma pequena constante positiva e $|\lambda| > 1$ é suficientemente grande.

Prova. Multiplicando a equação (3.62) por $\overline{\varphi^{(1)}}$ e integrando em $(0, L)$, temos

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_0^L \varphi^{(2)} \overline{\varphi^{(1)}} dx - \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)})_x \overline{\varphi^{(1)}} dx - \mathfrak{C} \int_0^L (\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) \overline{\varphi^{(1)}} dx}_{:=I_4} = \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi^{(1)}} dx.$$

Usando (3.61) em I_4 e realizando algumas integrações por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^L |\varphi^{(2)}|^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi^{(2)} \overline{f_1} dx + \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) \overline{\varphi_x^{(1)}} dx \\ & - \mathfrak{C} \int_0^L (\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) \overline{\varphi^{(1)}} dx = \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi^{(1)}} dx. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Da mesma forma, multiplicando a equação (3.64) por $\overline{\psi^{(1)}}$, integrando por partes em $(0, L)$ e usando (3.63), encontramos

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_0^L |\psi^{(2)}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{f_3} dx + b_1 \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx - \kappa_1 \int_0^L (\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}) \overline{\psi^{(1)}} dx \\ & + \alpha_1 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{\psi^{(1)}} dx = \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{\psi^{(1)}} dx. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Por conseguinte, multiplicaremos a equação (3.66) por $\overline{\varphi^{(3)}}$, integrando em $(0, L)$ e usando (3.65) temos

$$\begin{aligned} & \rho_3 \int_0^L |\varphi^{(4)}|^2 dx + \rho_3 \int_0^L \varphi^{(4)} \overline{f_5} dx + \kappa_2 \int_0^L (\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}) \overline{\varphi_x^{(3)}} dx + \mathfrak{C} \int_0^L (\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}) \overline{\varphi^{(3)}} dx \\ & + \alpha_2 \int_0^L \varphi^{(4)} \overline{\varphi^{(3)}} dx = \rho_3 \int_0^L f_6 \overline{\varphi^{(3)}} dx. \end{aligned} \quad (3.74)$$

De modo análogo, multiplicamos a equação (3.68) por $\overline{\psi^{(3)}}$, integramos sobre $(0, L)$ e

usamos (3.67), assim

$$\begin{aligned} \rho_4 \int_0^L |\psi^{(4)}|^2 dx + \rho_4 \int_0^L \psi^{(4)} \overline{f_7} dx + b_2 \int_0^L |\psi_x^{(3)}|^2 dx - \kappa_2 \int_0^L (\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}) \overline{\psi^{(3)}} dx \\ + \alpha_3 \int_0^L \psi^{(4)} \overline{\psi^{(3)}} dx = \rho_4 \int_0^L f_8 \overline{\psi^{(3)}} dx \end{aligned} \quad (3.75)$$

Somando as equações (3.72), (3.73), (3.74) e (3.75), resulta

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L |\varphi^{(2)}|^2 dx + b_1 \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx + \kappa_2 \int_0^L |\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}|^2 dx \\ + b_2 \int_0^L |\psi_x^{(3)}|^2 dx + \mathfrak{C} \int_0^L |\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}|^2 dx = \kappa_1 \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx \\ + \rho_1 \int_0^L \varphi^{(2)} \overline{f_1} dx + \rho_2 \int_0^L |\psi^{(2)}|^2 dx - \alpha_1 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{\psi^{(1)}} dx \\ + \rho_2 \int_0^L \psi^{(2)} \overline{f_3} dx + \rho_3 \int_0^L |\varphi^{(4)}|^2 dx - \alpha_2 \int_0^L \varphi^{(4)} \overline{\varphi^{(3)}} dx \\ + \rho_3 \int_0^L \varphi^{(4)} \overline{f_5} dx + \rho_4 \int_0^L |\psi^{(4)}|^2 dx - \alpha_3 \int_0^L \psi^{(4)} \overline{\psi^{(3)}} dx \\ + \rho_4 \int_0^L \psi^{(4)} \overline{f_7} dx + \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi^{(1)}} dx + \rho_2 \int_0^L f_4 \overline{\psi^{(1)}} dx \\ + \rho_3 \int_0^L f_6 \overline{\varphi^{(3)}} dx + \rho_4 \int_0^L f_8 \overline{\psi^{(3)}} dx. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Das desigualdades de Poincaré e Young e observando a desigualdade (3.46) e o Lema 3.3.2, temos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L |\varphi^{(2)}|^2 dx + b_1 \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx + \frac{\kappa_2}{2} \int_0^L |\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}|^2 dx \\ + b_2 \int_0^L |\psi_x^{(3)}|^2 dx + \mathfrak{C} \int_0^L |\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}|^2 dx \leq \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(4)}\|_{L^2} \\ + \frac{M}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{M}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(2)}\|_{L^2} + M \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ + \varepsilon b_1 \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx + \varepsilon \kappa_2 \int_0^L |\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}|^2 dx + \varepsilon b_2 \int_0^L |\psi_x^{(3)}|^2 dx \\ + M_\varepsilon \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Consequentemente, usando mais uma vez a desigualdade de Young, segue a conclusão do Lema. ■

Agora, estamos em condições de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.3.1. *Suponha que $\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} = 0$. Então o semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ gerado por $\mathcal{A}$ em $\mathcal{H}$ é exponencialmente estável, isto é, existem constantes $M > 0, K > 0$*

tal que

$$\|S(t)\| \leq M e^{-Kt}, \quad \forall t > 0.$$

Prova. Dos Lemas 3.3.2 e 3.3.3, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\rho_1 - \frac{M}{|\lambda|} \right) \int_0^L |\varphi^{(2)}|^2 dx + \left(b_1 - \frac{M}{|\lambda|} - \varepsilon b_1 \right) \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx + \frac{\kappa_1}{2} \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx \\ & + \kappa_2 (1 - \varepsilon) \int_0^L |\varphi_x^{(3)} - \psi^{(3)}|^2 dx + b_2 (1 - \varepsilon) \int_0^L |\psi_x^{(3)}|^2 dx \\ & + \mathcal{C} \int_0^L |\varphi^{(3)} - \varphi^{(1)}|^2 dx \leq \frac{M}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + M_\varepsilon \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Da desigualdade (3.46), escolhendo $|\lambda| > 1$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ bastante pequeno, segue-se que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Consequentemente,

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Usando o resultado de Gearhart (ver Teorema 2.3.2) segue a conclusão do Teorema. ■

3.4 Estabilidade Polinomial e Taxa Ótima

Nesta seção usaremos um resultado devido a Borichev e Tomilov [6] que nos fornece condições equivalentes para se obter decaimento do tipo polinomial. Além disso, mostraremos que a taxa é ótima.

Teorema 3.4.1. *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo limitado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$ tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Então, para alguma constante fixada $\beta > 0$ e $x \in \mathcal{H}$, temos*

$$\|(R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^\beta), \quad \lambda \rightarrow \infty \iff \|S(t)\mathcal{A}^{-1}x\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-\frac{1}{\beta}}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (3.78)$$

Provaremos que, se a relação $\frac{\rho_1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2}{b_1}$ não é satisfeita, a energia $E(t)$ de soluções do modelo duplo nanotubo de carbono, dada por (2.9) é controlada por um polinômio, isto é,

$$\|S(t)\Psi_0\|_{\mathcal{H}} \leq g(t)\|\Psi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

onde $S(t) := e^{At}$ é o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ e $g(t)$ é uma função polinomial positiva de modo que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, ou seja, mostraremos que as soluções do sistema nanotubo com múltiplas paredes dada por (3.1)-(3.8) decaem polinomialmente para zero ao longo do tempo, para qualquer dado inicial sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Para isto, usaremos o Teorema de Borichev e Tomilov dado em (3.4.1).

Novamente consideremos a equação resolvente em termos de seus componentes dada por (3.61)-(3.68).

Agora, estamos em condições de estabelecer o principal resultado desta seção.

Teorema 3.4.2. *Vamos supor que*

$$\frac{\rho_1}{\kappa_1} \neq \frac{\rho_2}{b_1} \text{ e } \mathfrak{C}\left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1}\right) \neq \frac{\kappa_1}{b_1}.$$

Então o semigrupo de contrações $(S(t))_{t \geq 0}$ gerado por $\mathcal{A}$ em $\mathcal{H}$ satisfaz

$$\|S(t)\Psi_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|\Psi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, \quad \forall \Psi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Além disso, esta taxa é ótima.

Prova. Da desigualdade (3.71), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1}{2} \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx &\leq i\lambda \left(\rho_2 - \frac{b_1 \rho_1}{\kappa_1} \right) \int_0^L \psi_x^{(1)} \overline{\varphi^{(2)}} dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(4)}\|_{L^2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(2)}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, podemos reescrever a desigualdade acima como

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1}{2} \int_0^L |\varphi_x^{(1)} - \psi^{(1)}|^2 dx &\leq C_\varepsilon |\lambda|^2 \left| \left(\rho_2 - \frac{b_1 \rho_1}{\kappa_1} \right) \right|^2 \int_0^L |\psi_x^{(1)}|^2 dx \\ &+ \varepsilon \rho_1 \int_0^L |\varphi^{(2)}|^2 dx + C \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(4)}\|_{L^2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\lambda|} \|\psi_x^{(1)}\|_{L^2} \|\varphi^{(2)}\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Escolhendo $|\lambda| > 1$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ bastante pequeno, segue-se do Lema

3.3.3 e das desigualdades (3.46) e (3.79) que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M|\lambda|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

o que implica em

$$\|\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq M|\lambda|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a equação resolvente $(\lambda I - A)\Psi = F$, temos que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M|\lambda|^2.$$

Isto quer dizer que a equivalência do Teorema 3.4.1 é válida para $\beta = 2$, ou seja,

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\Psi\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-\frac{1}{2}}),$$

isto é, existe uma constante positiva M tal que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}}.$$

Desde que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, temos que $\mathcal{A}$ é sobrejetivo em $\mathcal{H}$, então considerando $A\Psi_0 = F$, da desigualdade acima obtemos

$$\|S(t)\Psi_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|\mathcal{A}\Psi_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Note que $\|\mathcal{A}\Psi_0\|_{\mathcal{H}} = \|\Psi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, logo

$$\|S(t)\Psi_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{t}} \|\Psi_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}.$$

Assim, podemos concluir que a solução tem estabilidade polinomial.

Utilizaremos argumentos de contradição, para provar que a taxa de decaimento é ótima.

Suponha que $O(|\lambda|^2)$ não é ótima. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq O(|\lambda|^{2-\varepsilon}) \quad \text{quando} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (3.80)$$

isto implica que, para todo $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-\varepsilon}} \|\Psi\|_{\mathcal{H}} \leq C_1 \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

onde $\Psi \in \mathcal{H}$ é a solução da equação resolvente $\lambda\Psi - \mathcal{A}\Psi = F$ in $\mathcal{H}$. Do Teorema 5.3 em [37], operador

$$|\lambda|^{-2+\frac{\varepsilon}{2}} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

deve ser limitado quando $\lambda \rightarrow \infty$, mas isto não acontece. De fato, levando em conta o Teorema 3.2.1 podemos construir sequências

$$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset i\mathbb{R}, \quad (\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad (F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H},$$

tal que

$$\|\Psi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C_1 |\lambda_n|^2 \|F_n\|_{\mathcal{H}}^2,$$

isto implica que

$$\frac{1}{|\lambda_n|^{2-\varepsilon}} \|R(\lambda_n, \mathcal{A})\| \geq C_1 |\lambda_n|^\varepsilon \rightarrow \infty \quad (\text{quando } n \rightarrow \infty),$$

contradizendo (3.80) e isto conclui a prova. ■

Capítulo 4

Modelo Espaço-Tempo em Diferenças Finitas

4.1 Introdução

Neste capítulo nos dedicamos aos aspectos numéricos-computacionais do modelo dissipativo de viga de Timoshenko aplicado para nanotubos de carbono de parede dupla, com o principal objetivo de reproduzir numericamente o decaimento exponencial e a falta de decaimento exponencial das respectivas soluções numéricas. Em particular, optamos pelo método explícito de diferenças finitas centradas espaço-tempo e a reprodução dos resultados de decaimento exponencial e polinomial com base na energia discreta associada.

No presente trabalho é de nosso interesse reproduzimos os resultados obtidos no contínuo, bem como o decaimento exponencial, a perda de estabilidade exponencial e o decaimento polinomial em dimensão finita.

4.2 Método Numérico Explícito em Diferenças Finitas de um modelo de nanotubo de parede dupla

Descreveremos nesta seção o uso do método explícito de diferença central no espaço e no tempo.

Para nossos propósitos, considere o intervalo $[0, L]$ e para $J, N \in \mathbb{N}$ definimos a seguinte malha computacional:

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_j = J\Delta x < x_{J+1} = L, \quad (4.1)$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_n = N\Delta t < t_{N+1} = T, \quad (4.2)$$

em que $\Delta x = \frac{L}{J}$ e $\Delta t = \frac{T}{N}$. Naturalmente $x_j = j\Delta x$ e $t_n = n\Delta t$ tais que $j = 0, 1, 2, \dots, J$ e $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Consideremos também os seguintes operadores de diferenças finitas no espaço e no tempo:

- Esquema Progressivo (primeira ordem):

$$\partial_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad , \quad \partial_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

- Esquema Atrasado (primeira ordem):

$$\bar{\partial}_x u_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad , \quad \bar{\partial}_t u_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

- Diferença Central (segunda ordem):

$$\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad , \quad \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (4.5)$$

- Esquema de Diferença Central (segunda ordem):

$$\bar{\partial}_x \partial_x u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad , \quad \bar{\partial}_t \partial_t u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (4.6)$$

Em todos os caso u_j^n corresponde a solução numérica nos pontos nodais (x_j, t_n) da discretização, e estas equações numéricas são construídas com base na aplicação da série de Taylor para $u(x_j, t_n)$.

Nas configurações do esquema em diferenças finitas, consideremos o seguinte procedimento explícito de discretização total em diferenças finitas, que consiste em determinar os valores $(\varphi^{(i)})_j^{n+1}, (\psi^{(i)})_j^{n+1}$, $i = 1, 2$, satisfazendo as seguintes equações numéricas

$$\begin{aligned} \rho_1 \bar{\varphi}_t (\varphi^{(1)})_j^n - \kappa_1 \bar{\partial}_x \partial_x (\varphi^{(1)})_j^n + \kappa_1 \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} (\psi^{(1)})_j^n - \mathcal{C}((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n) \\ + \alpha_0 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} (\varphi^{(1)})_j^n = 0; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \bar{\partial}_t \partial_t (\psi^{(1)})_j^n - b_1 \bar{\partial}_x \partial_x (\psi^{(1)})_j^n - \kappa_1 \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} (\varphi^{(1)})_j^n + \frac{\kappa_1}{2} (\psi^{(1)}_{j-\frac{1}{2}}^n + \psi^{(1)}_{j+\frac{1}{2}}^n) \\ + \alpha_1 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} (\psi^{(1)})_j^n = 0; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \rho_3 \bar{\varphi}_t \varphi_t (\varphi^{(2)})_j^n - \kappa_2 \bar{\partial}_x \partial_x (\varphi^{(2)})_j^n + \kappa_2 \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} (\psi^{(2)})_j^n + \mathcal{C}((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n) \\ + \alpha_2 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} (\varphi^{(2)})_j^n = 0; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \rho_4 \bar{\partial}_t \partial_t (\psi^{(2)})_j^n - b_2 \bar{\partial}_x \partial_x (\psi^{(2)})_j^n - \kappa_2 \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} (\varphi^{(2)})_j^n + \frac{\kappa_2}{2} (\psi^{(2)})_{j-\frac{1}{2}}^n + \psi_{j+\frac{1}{2}}^{(2)n} \\ + \alpha_3 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} (\psi^{(2)})_j^n = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

para todo $j = 1, 2, \dots, J$ e $n = 1, 2, \dots, N$. Aqui, $(\psi^{(i)})_{j-\frac{1}{2}}^n$ e $(\psi^{(i)})_{j+\frac{1}{2}}^n$ para $i = 1, 2$, indicam as médias de $\psi^{(i)}$ nos pontos (x_{j-1}, t_n) , (x_j, t_n) e (x_{j+1}, t_n) , (x_j, t_n) , respectivamente. Então, a exemplo do modelo semidiscreto, motivados por [1], temos a seguinte aproximação

$$\psi^{(i)}(x_j, t_n) \approx \frac{(\psi^{(i)})_{j+1}^n + 2(\psi^{(i)})_j^n + (\psi^{(i)})_{j-1}^n}{4}, \quad i = 1, 2. \quad (4.11)$$

É importante ressaltar que este tipo de discretização evita a anomalia numérica, conhecida como trancamento no cortante, isto é, evita-se uma sobrestimação no coeficiente de rigidez. Desse modo, temos que:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} &= \kappa_1 \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ &- \kappa_1 \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{C}((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n) \\ &- \alpha_0 \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{2\Delta t}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} &= b_1 \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ &+ \kappa_1 \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ &- \kappa_1 \frac{(\psi^{(1)})_{j-1}^n + 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j+1}^n}{4} \\ &- \alpha_1 \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2\Delta t}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
\rho_3 \frac{(\varphi^{(2)})_j^{n+1} - 2(\varphi^{(2)})_j^n + (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} &= \kappa_2 \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - 2(\varphi^{(2)})_j^n + (\varphi^{(2)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\
&- \kappa_2 \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_{j-1}^n}{2\Delta x} - \mathcal{C}((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n) \\
&- \alpha_2 \frac{(\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{2\Delta t}, \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_4 \frac{(\psi^{(2)})_j^{n+1} - 2(\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} &= b_2 \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - 2(\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\
&+ \kappa_2 \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_{j-1}^n}{2\Delta x} \\
&- \kappa_2 \frac{(\psi^{(2)})_{j-1}^n + 2(\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_{j+1}^n}{4} \\
&- \alpha_3 \frac{(\psi^{(2)})_j^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{2\Delta t}, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

para todo $j = 1, 2, \dots, J$ e $n = 1, 2, \dots, N$. Associamos ao sistema condições de contorno Dirichlet homogênea discretizadas por

$$\begin{aligned}
(\varphi^{(i)})_0^n &= (\varphi^{(1)})_J^n = 0, \quad \forall i = 1, 2 \text{ e } \forall n = 1, 2, \dots, N, \\
(\psi^{(i)})_0^n &= (\psi^{(i)})_J^n = 0, \quad \forall i = 1, 2 \text{ e } \forall n = 1, 2, \dots, N, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned}
(\varphi^{(i)})_j^0 &= \varphi^{(i)}(x_j, 0), \quad (\varphi^{(i)})_{1j} = (\varphi^{(i)})_t(x_j, 0), \quad \forall i = 1, 2 \text{ e } \forall j = 1, 2, \dots, J, \\
(\psi^{(i)})_j^0 &= \psi^{(i)}(x_j, 0), \quad (\psi^{(i)})_{1j} = (\psi^{(i)})_t(x_j, 0), \quad \forall i = 1, 2 \text{ e } \forall j = 1, 2, \dots, J. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Explicitamente, temos o seguinte procedimento recursivo de resolução para todo $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
(\varphi^{(1)})_j^{n+1} &= \frac{4\rho_1 - 4\kappa_1\mu^2 - 2\mathcal{C}\Delta t^2}{\alpha_0\Delta t + 2\rho_1}(\varphi^{(1)})_j^n + \frac{\alpha_0\Delta t - 2\rho_1}{\alpha_0\Delta t + 2\rho_1}(\varphi^{(1)})_j^{n-1} \\
&+ 2\frac{\kappa_1\mu^2}{\alpha_0\Delta t + 2\rho_1}((\varphi^{(1)})_{j+1}^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n) - \frac{\kappa_1\mu\Delta t}{\alpha_0\Delta t + 2\rho_1}((\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_{j-1}^n) \\
&+ 2\frac{\mathcal{C}\Delta t^2}{\alpha_0\Delta t + 2\rho_1}(\varphi^{(2)})_j^n, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\psi^{(1)})_j^{n+1} &= \frac{4\rho_2 - 4b_1\mu^2 - \kappa_1\Delta t^2}{\alpha_1\Delta t + 2\rho_2}(\psi^{(1)})_j^n + \frac{\alpha_1\Delta t - 2\rho_2}{\alpha_1\Delta t + 2\rho_2}(\psi^{(1)})_j^{n-1} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{4b_1\mu^2 - \kappa_1\Delta t^2}{\alpha_1\Delta t + 2\rho_2}((\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) + \frac{\kappa_1\mu\Delta t}{\alpha_1\Delta t + 2\rho_2}((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_{j-1}^n), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi^{(2)})_j^{n+1} &= \frac{4\rho_3 - 4\kappa_2\mu^2 - 2\mathcal{C}\Delta t^2}{\alpha_2\Delta t + 2\rho_3}(\varphi^{(2)})_j^n + \frac{\alpha_2\Delta t - 2\rho_3}{\alpha_2\Delta t + 2\rho_3}(\varphi^{(2)})_j^{n-1} \\
&+ 2\frac{\kappa_2\mu^2}{\alpha_2\Delta t + 2\rho_3}((\varphi^{(2)})_{j+1}^n + (\varphi^{(2)})_{j-1}^n) - \frac{\kappa_2\mu\Delta t}{\alpha_2\Delta t + 2\rho_3}((\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_{j-1}^n) \\
&+ 2\frac{\mathcal{C}\Delta t^2}{\alpha_2\Delta t + 2\rho_3}(\varphi^{(1)})_j^n,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
(\psi^{(2)})_j^{n+1} &= \frac{4\rho_4 - 4b_2\mu^2 - \kappa_2\Delta t^2}{\alpha_3\Delta t + 2\rho_4}(\psi^{(2)})_j^n + \frac{\alpha_3\Delta t - 2\rho_4}{\alpha_3\Delta t + 2\rho_4}(\psi^{(2)})_j^{n-1} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{4b_2\mu^2 - \kappa_2\Delta t^2}{\alpha_3\Delta t + 2\rho_4}((\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_{j-1}^n) + \frac{\kappa_2\mu\Delta t}{\alpha_3\Delta t + 2\rho_4}((\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_{j-1}^n),
\end{aligned} \tag{4.21}$$

para todo $j = 1, 2, \dots, J$ e $n = 1, 2, \dots, N$, em que $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

O esquema numérico apresentado aqui é explícito e estas equações de diferenças totais (4.12) – (4.17) são as discretizações mais usuais no cenário discreto espaço-tempo para o modelo unidimensional de vigas de Timoshenko.

Para a construção da energia discreta espaço-tempo que denotamos por E^n , utilizaremos uma adaptação do método de energia no contínuo $E(t)$ permitindo-nos representar seus termos discretizados.

4.3 A Energia Discreta

Os métodos de integração explícito no tempo à problemas de evolução é vantajoso por nos permitir construir a versão discreta espaço-tempo para a energia de soluções. Um dos primeiros trabalhos que explorou a versão discreta espaço-tempo para a energia de um problema de evolução, foi efetuado por Strauss e Vazquez [53]. Aqui, em particular, procedemos a construção da versão discreta espaço-tempo para a energia contínua do modelo de viga de Timoshenko aplicado para um duplo nanotubo de carbono, bem como para a respectiva lei de conservação de energia. Definimos então a energia total para o sistema de equações numéricas (4.12) – (4.17) no passo de tempo t_n

$$E^n := \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_3 \left(\frac{(\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_4 \left(\frac{(\psi^{(2)})_j^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \kappa_1 \left(\frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} - \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} \right) \\
& \times \left(\frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} - \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{2} \right) \\
& + \kappa_2 \left(\frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} - \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} \right) \\
& \times \left(\frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} - \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{2} \right) \\
& + b_1 \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& + b_2 \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& + \mathcal{C} \left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right)^2 \Bigg], \tag{4.22}
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Note que E^n é a versão discreta da energia no contínuo $E(t)$ (2.9). Esta energia discreta é um importante instrumento numérico para certificar nossos resultados analíticos relativos à estabilização de vigas de Timoshenko associado ao duplo nanotubo de carbono estabelecidas no capítulo anterior. Além disso E^n é decrescente para qualquer $\alpha_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$ e é conservativa para $\alpha_i = 0, i = 0, 1, 2, 3$. A fim de que possamos construir a conservação da energia discreta E^n , isto é, $E^n = E^{n-1}$ consideremos ao modelo (4.12)–(4.15) que as dissipações $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Temos então para E^n a seguinte proposição:

Proposição 4.3.1. *Sejam $((\varphi^{(1)})_j^n, (\psi^{(1)})_j^n, (\varphi^{(2)})_j^n, (\psi^{(2)})_j^n)$ soluções das equações discretas (4.12)–(4.17) com $\alpha_i = 0, i = 0, 1, 2, 3$. Então, para quaisquer Δt e Δx pertencentes ao intervalo $(0, 1)$, a taxa instantânea de variação discreta da energia do esquema numérico (4.12)–(4.17) no instante tempo t_n é dada por*

$$E^n - E^{n-1} = 0 \tag{4.23}$$

para todo $n = 1, 2, \dots, N$.

Prova. Faremos uso dos multiplicadores discretizados das velocidades associadas às

propagações das ondas $\varphi^{(i)}, \psi^{(i)}, i = 1, 2$. Então, multiplicamos a equação (4.12) por $\frac{1}{2} \{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}\}$ e somamos o resultado sobre o domínio discreto $j = 1, \dots, J$. Segue então que

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& - \kappa_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& + \kappa_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_{j-1}^n}{2\Delta x} \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& - \mathcal{C} \sum_{j=1}^J (\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

No que segue, primeiramente faremos uma estimativa no primeiro termo da equação acima referente à discretização para a equivalente aproximação para $\int_0^L (\varphi^{(1)})_{tt} (\varphi^{(1)})_t dx$ o que conduzirá a expressão discretizada equivalente para a componente cinética $\int_0^L (\varphi^{(1)})_t^2 dx$ do funcional de energia $E(t)$. Sendo assim, verifique que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J [(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_j^{n-1}] [(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}] = \\
& = \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left((\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \right] \\
& = \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n \right)^2 - \left((\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) - \left((\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n \right)}_{=0} \right].
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& = \frac{\rho_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\rho_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Agora, o passo a seguir é proceder na construção de uma aproximação dos termos que dizem respeito à discretização da componente potencial $\int_0^L (\varphi^{(1)})_x^2 dx$. Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} \right) = \\
& = \sum_{j=1}^J \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n \right) \\
& \times \left((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} \right) \\
& = \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} \right) \right. \\
& \left. - \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \right] \\
& + \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \right. \\
& \times \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} \right) \left(-(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n \right) \\
& + \left((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} \right) - \left((\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n \right) \\
& \left. + \left((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \right].
\end{aligned}$$

De onde podemos concluir que

$$\begin{aligned}
& \kappa_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - 2(\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{(\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}}{2} = \\
& \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right. \\
& \left. - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right] + I_{j1}^n
\end{aligned}$$

com

$$I_{j1}^n = \frac{\kappa_1}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^J \left[\begin{aligned} &(\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} (\varphi^{(1)})_{j-1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} \\ &+ (\varphi^{(1)})_{j+1}^n (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} (\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \\ &+ (\varphi^{(1)})_j^{n-1} (\varphi^{(1)})_{j-1}^n + (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} (\varphi^{(1)})_j^n \end{aligned} \right].$$

Para os termos de contorno em I_{j1}^n , façamos as seguintes simplificações

$$\begin{aligned} I_{j1}^n &= \frac{\kappa_1}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^J \left[(\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(1)})_j^{n-1} (\varphi^{(1)})_{j-1}^n - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} (\varphi^{(1)})_{j-1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right. \\ &\quad \left. - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\varphi^{(1)})_{j+1}^n (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} (\varphi^{(1)})_{j+1}^n + (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} (\varphi^{(1)})_j^n \right] \\ &= \frac{\kappa_1}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^J \left[(\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(1)})_j^{n-1} (\varphi^{(1)})_{j-1}^n - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} (\varphi^{(1)})_{j-1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right. \\ &\quad \left. - (\varphi^{(1)})_{j-1}^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} (\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_j^{n+1} (\varphi^{(1)})_{j-1}^n \right] \\ &\quad + \frac{\kappa_1}{2\Delta x^2} \left[-(\varphi^{(1)})_J^n (\varphi^{(1)})_{J+1}^{n-1} + (\varphi^{(1)})_0^n (\varphi^{(1)})_1^{n-1} + (\varphi^{(1)})_{J+1}^n (\varphi^{(1)})_{J+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_1^n (\varphi^{(1)})_1^{n-1} \right. \\ &\quad \left. - (\varphi^{(1)})_{J+1}^n (\varphi^{(1)})_{J+1}^{n+1} + (\varphi^{(1)})_1^n (\varphi^{(1)})_1^{n+1} + (\varphi^{(1)})_{J+1}^{n+1} (\varphi^{(1)})_J^n - (\varphi^{(1)})_1^{n+1} (\varphi^{(1)})_0^n \right] \\ &= \kappa_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\varphi^{(1)})_1^n - (\varphi^{(1)})_0^n}{\Delta x} \frac{(\varphi^{(1)})_1^{n+1} - (\varphi^{(1)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\varphi^{(1)})_{J+1}^n - (\varphi^{(1)})_J^n}{\Delta x} \frac{(\varphi^{(1)})_{J+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right] \end{aligned}$$

A equação acima corresponde à discretização do termo de contorno $(\varphi^{(1)})_x (\varphi^{(1)})_t \Big|_0^L$.

Por outro lado, encontraremos a discretização correspondente à componente

$$\kappa_1 \int_0^L (\psi^{(1)})_x (\varphi^{(1)})_t dx$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^J \left((\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_{j-1}^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^J \left((\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n - (\psi^{(1)})_j^n - (\psi^{(1)})_{j-1}^n \right) \\ &\quad \times \left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^J \left[\left((\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left((\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1} \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^J \left[\left((\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1} \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \right. \\
& + \left((\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} \right) \\
& - ((\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) ((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1}) \\
& \left. - ((\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) ((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}) \right]. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_1}{4\Delta x} \sum_{j=1}^J \left((\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_{j-1}^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) = \\
& = \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} \right. \\
& \left. - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \right] + I_{j2}^n, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
I_{j2}^n = \frac{\kappa_1}{4\Delta x} \sum_{j=1}^J \left[\right. & \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1} \right) \\
& + \left((\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} \right) \\
& - ((\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) ((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1}) \\
& \left. - ((\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) ((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}) \right].
\end{aligned}$$

Para o equivalente discreto da componente $\mathcal{C} \int_0^L (\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \varphi_t^{(1)}$, teremos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^J \left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) = \\
& \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \times (\varphi^{(1)})_j^{n+1} - \left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \times (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right] \tag{4.28} \\
& = -\frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right].
\end{aligned}$$

Contudo reescrevemos (4.24) como

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\rho_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[-(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right] \\
& + I_{j1}^n + I_{j2}^n = 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Dando continuidade, com procedimento análogo multiplicaremos a equação que governa o declive do tubo devido à flexão $(\psi^{(1)})_j^n$ em (4.13) por $\frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2}$, e efetuando o somatório sobre o domínio discreto $j = 1, \dots, J$, temos que

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& - b_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& - \kappa_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_{j-1}^n}{2\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& + \kappa_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n}{4} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

As expressões a partir daqui serão semelhantes àsquelas obtidas no caso anterior para a equação discreta que rege a função $(\varphi^{(1)})_j^n$. Assim, a aproximação para o equivalente discreto da componente cinética $\rho_2 \int_0^L (\psi^{(1)})_t^2 dx$ é

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
& = \frac{\rho_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\rho_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^n - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

No desenvolvimento do análogo discreto a componente potencial $b_1 \int_0^L (\psi^{(1)})_x^2 dx$ e para

a componente $\kappa_1 \int_0^L (\varphi^{(1)})_x (\psi^{(1)})_t dx$, obtemos, respectivamente, as expressões abaixo

$$\begin{aligned}
 & b_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
 &= \frac{b_1}{2} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right] + I_{j3}^n
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \kappa_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_{j-1}^n}{2\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \\
 &= \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{2} \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right] + I_{j4}^n,
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde I_{j3}^n e I_{j4}^n são dados por

$$\begin{aligned}
 I_{j3}^n = \frac{b_1}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^J \left[\right. & (\psi^{(1)})_j^n (\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n+1} (\psi^{(1)})_{j-1}^n - (\psi^{(1)})_j^n (\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} \\
 & + (\psi^{(1)})_{j+1}^n (\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} (\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n (\psi^{(1)})_j^{n-1} \\
 & \left. + (\psi^{(1)})_j^{n-1} (\psi^{(1)})_{j-1}^n + (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} (\psi^{(1)})_j^n \right]
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 I_{j4}^n &= \frac{\kappa_1}{4\Delta x} \sum_{j=1}^J \left[\left((\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \right. \\
 &+ \left((\varphi^{(1)})_{j+1}^n + (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\psi^{(1)})_j^{n-1} - (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} \right) \\
 &\left. - \left((\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n \right) \left((\psi^{(1)})_j^{n-1} - (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$- \left((\varphi^{(1)})_j^n + (\varphi^{(1)})_{j-1}^n \right) \left((\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n+1} \right).$$

Da mesma maneira em que encontramos I_{j1}^n , simplificaremos I_{j3}^n

$$I_{j3}^n = b_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\psi^{(1)})_1^n - (\psi^{(1)})_0^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_1^{n+1} - (\psi^{(1)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^n - (\psi^{(1)})_J^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right]$$

Na sequência, procedemos com a discretização referente a integral dada por $\kappa_1 \int_0^L \psi^{(1)} \psi_t^{(1)}$.

Segue então

$$\begin{aligned} & + \kappa_1 \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n}{4} \frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} = \\ & = \frac{\kappa_1}{8} \sum_{j=1}^J ((\psi^{(1)})_{j+1}^n + 2(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) ((\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}) \\ & = \frac{\kappa_1}{8} ((\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) \\ & \times ((\psi^{(1)})_j^{n+1} + (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}) \\ & = \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \left[\frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} + (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1}}{2} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} \right. \\ & \left. - \frac{(\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j+1}^n}{2} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} \right] + I_{j5}^n, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} I_{j5}^n &= \frac{\kappa_1}{8} \sum_{j=1}^J \left[((\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}) ((\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j+1}^n) \right. \\ & - ((\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n) ((\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}) \\ & + ((\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) ((\psi^{(1)})_j^{n+1} + (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1}) \\ & \left. - ((\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j-1}^n) ((\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}) \right]. \end{aligned}$$

Efetuiremos para I_{j5}^n as seguintes simplificações:

$$\begin{aligned} I_{j5}^n &= \frac{\kappa_1}{8} \sum_{j=1}^J \left[(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} (\psi^{(1)})_j^n + (\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} (\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_{j+1}^n (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^n (\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} \right. \\ & + (\psi^{(1)})_j^n (\psi^{(1)})_j^{n+1} + (\psi^{(1)})_{j-1}^n (\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1} (\psi^{(1)})_{j-1}^n - (\psi^{(1)})_j^{n-1} (\psi^{(1)})_j^n \left. \right] \\ & = \frac{\kappa_1}{8} \sum_{j=1}^J \left[(\psi^{(1)})_j^{n-1} (\psi^{(1)})_{j-1}^n + (\psi^{(1)})_j^{n-1} (\psi^{(1)})_j^n - (\psi^{(1)})_j^n (\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_{j-1}^n (\psi^{(1)})_j^{n+1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((\psi^{(1)})_j^n (\psi^{(1)})_j^{n+1} + (\psi^{(1)})_{j-1}^n (\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1} (\psi^{(1)})_{j-1}^n - (\psi^{(1)})_j^{n-1} (\psi^{(1)})_j^n \right) \\
& = \frac{\kappa_1}{8} \left[(\psi^{(1)})_{J+1}^{n-1} (\psi^{(1)})_J^n - (\psi^{(1)})_1^{n-1} (\psi^{(1)})_0^n + (\psi^{(1)})_{J+1}^{n-1} (\psi^{(1)})_{J+1}^n - (\psi^{(1)})_1^{n-1} (\psi^{(1)})_1^n \right. \\
& \quad \left. - (\psi^{(1)})_{J+1}^n (\psi^{(1)})_{J+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_1^n (\psi^{(1)})_1^{n+1} - (\psi^{(1)})_J^n (\psi^{(1)})_{J+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_0^n (\psi^{(1)})_1^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

Sendo assim, simplificando a última igualdade da expressão acima, concluímos

$$I_{j5}^n = \kappa_1 \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{(\psi^{(1)})_1^n + (\psi^{(1)})_0^n}{2} \frac{(\psi^{(1)})_1^{n+1} - (\psi^{(1)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^n + (\psi^{(1)})_J^n}{2} \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right]$$

Do que realizamos em relação as simplificações para o termo $(\psi^{(1)})_j^n$, temos que (4.30) resulta em

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{b_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \\
& + \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{2} \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\rho_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^n - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{b_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \\
& - \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + I_{j3}^n + I_{j4}^n + I_{j5}^n = 0. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Considerando os resultados (4.29) e (4.34), obtemos

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\rho_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{b_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \\
& + \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{2} + \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\rho_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\rho_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^n - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& - \frac{b_1}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\kappa_1}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} + \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[-(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right] \\
& + I_{j1}^n + I_{j2}^n + I_{j3}^n + I_{j4}^n + I_{j5}^n = 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

E da mesma maneira que encontramos (4.29) e (4.34) podemos multiplicar as equações (4.14) e (4.15) por $\frac{1}{2}\{(\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}\}$ e $\frac{1}{2}\{(\psi^{(2)})_j^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n-1}\}$, respectivamente e somando o resultado sobre o domínio discreto $j = 1, \dots, J$, obtemos

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_3}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\rho_3}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{\kappa_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\kappa_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \right] \\
& + I_{j6}^n + I_{j7}^n = 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

e

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_4}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(2)})_j^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{b_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \\
& + \frac{\kappa_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{2} \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\rho_4}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(2)})_j^n - (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{b_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta x} \\
& - \frac{\kappa_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + I_{j8}^n + I_{j9}^n + I_{j10}^n = 0,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde

$$I_{j6}^n = \frac{\kappa_2}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^J \left[\begin{aligned} &(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n+1} (\varphi^{(2)})_{j-1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_{j+1}^{n-1} \\ &+ (\varphi^{(2)})_{j+1}^n (\varphi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} (\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \\ &+ (\varphi^{(2)})_j^{n-1} (\varphi^{(2)})_{j-1}^n + (\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} (\varphi^{(2)})_j^n \end{aligned} \right]$$

ou

$$I_{j6}^n = \kappa_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\varphi^{(2)})_1^n - (\varphi^{(2)})_0^n}{\Delta x} \frac{(\varphi^{(2)})_1^{n+1} - (\varphi^{(2)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\varphi^{(2)})_{J+1}^n - (\varphi^{(2)})_J^n}{\Delta x} \frac{(\varphi^{(2)})_{J+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right],$$

$$\begin{aligned} I_{j7}^n &= \frac{\kappa_2}{4\Delta x} \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n \right) \left((\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1} \right) \right. \\ &+ \left((\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n \right) \left((\varphi^{(2)})_j^{n-1} - (\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} \right) \\ &- \left((\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_{j-1}^n \right) \left((\varphi^{(2)})_j^{n-1} - (\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} \right) \\ &\left. - \left((\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_{j-1}^n \right) \left((\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n+1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$I_{j8}^n = \frac{b_2}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^J \left[\begin{aligned} &(\psi^{(2)})_j^n (\psi^{(2)})_j^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n+1} (\psi^{(2)})_{j-1}^n - (\psi^{(2)})_j^n (\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} \\ &+ (\psi^{(2)})_{j+1}^n (\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} (\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n (\psi^{(2)})_j^{n-1} \\ &+ (\psi^{(2)})_j^{n-1} (\psi^{(2)})_{j-1}^n + (\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} (\psi^{(2)})_j^n \end{aligned} \right]$$

ou

$$I_{j8}^n = b_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\psi^{(2)})_1^n - (\psi^{(2)})_0^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_1^{n+1} - (\psi^{(2)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^n - (\psi^{(2)})_J^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right],$$

$$\begin{aligned} I_{j9}^n &= \frac{\kappa_2}{4\Delta x} \sum_{j=1}^J \left[\left((\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n \right) \left((\varphi^{(2)})_{j+1}^{n-1} + (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \right) \right. \\ &+ \left((\varphi^{(2)})_{j+1}^n + (\varphi^{(2)})_j^n \right) \left((\psi^{(2)})_j^{n-1} - (\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} \right) \\ &\left. - \left((\varphi^{(2)})_j^n + (\varphi^{(2)})_{j-1}^n \right) \left((\psi^{(2)})_j^{n-1} - (\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} \right) \right. \\ &\left. - \left((\varphi^{(2)})_j^n + (\varphi^{(2)})_{j-1}^n \right) \left((\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n+1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left((\varphi^{(2)})_j^n + (\varphi^{(2)})_{j-1}^n \right) \left((\psi^{(2)})_j^{n-1} - (\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} \right) \\
& - \left((\varphi^{(2)})_j^n + (\varphi^{(2)})_{j-1}^n \right) \left((\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n+1} \right) \Big],
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_{j10}^n = & \frac{\kappa_2}{8} \sum_{j=1}^J \left[((\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1})((\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_{j+1}^n) \right. \\
& - ((\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n)((\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1}) \\
& + ((\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_{j-1}^n)((\psi^{(2)})_j^{n+1} + (\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1}) \\
& \left. - ((\psi^{(2)})_j^n + (\psi^{(2)})_{j-1}^n)((\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1}) \right].
\end{aligned}$$

ou

$$I_{j10}^n = \frac{\kappa_2}{2} \Delta t \left[\frac{(\psi^{(2)})_1^n + (\psi^{(2)})_0^n}{2} \frac{(\psi^{(2)})_1^{n+1} - (\psi^{(2)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^n + (\psi^{(2)})_J^n}{2} \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right]$$

Combinando (4.36) e (4.37), encontramos

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_3}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\rho_4}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(2)})_j^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{b_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \\
& + \frac{\kappa_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{2} + \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{\rho_3}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\rho_4}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(2)})_j^n - (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& - \frac{b_2}{2} \sum_{j=1}^J \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta x} \\
& - \frac{\kappa_2}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} + \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \right] \\
& + I_{j6}^n + I_{j7}^n + I_{j8}^n + I_{j9}^n + I_{j10}^n = 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[-(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right] \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \right] = \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[-(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n+1} \right] \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[(\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(2)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} + (\varphi^{(1)})_j^n (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \right] = \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(2)})_j^n \right) \times (\varphi^{(1)})_j^{n+1} + \left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \times (\varphi^{(2)})_j^{n+1} \right] \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \times (\varphi^{(1)})_j^{n-1} + \left((\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(2)})_j^n \right) \times (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \right] = \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} \right) \right] \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(1)})_j^{n-1} - (\varphi^{(2)})_j^{n-1} \right) \right] = \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1} \right) \right] \\
& - \frac{\mathcal{C}}{2} \sum_{j=1}^J \left[\left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right) \left((\varphi^{(2)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Dos resultados em (4.35), (4.38) e (4.39), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\frac{\rho_1}{2} \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\rho_2}{2} \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{\rho_3}{2} \left(\frac{(\varphi^{(2)})_j^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\rho_4}{2} \left(\frac{(\psi^{(2)})_j^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta t} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_1}{2} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \\
& + \frac{b_2}{2} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \\
& + \frac{\kappa_1}{2} \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(1)})_j^{n+1}}{2} + \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\kappa_2}{2} \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n+1} + (\psi^{(2)})_j^{n+1}}{2} + \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \left((\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^n \right)^2 + I_{j1}^n + I_{j2}^n + I_{j3}^n + I_{j4}^n + I_{j5}^n + I_{j6}^n + I_{j7}^n + I_{j8}^n + I_{j9}^n + I_{j10}^n \Big] \\
& - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left[\frac{\rho_1}{2} \left(\frac{(\varphi^{(1)})_j^n - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\rho_2}{2} \left(\frac{(\psi^{(1)})_j^n - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
& + \frac{\rho_3}{2} \left(\frac{(\varphi^{(2)})_j^n - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\rho_4}{2} \left(\frac{(\psi^{(2)})_j^n - (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& + \frac{b_1}{2} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n - (\psi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \\
& + \frac{b_2}{2} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n - (\psi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta x} \\
& + \frac{\kappa_1}{2} \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^n + (\psi^{(1)})_j^n}{2} + \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^n - (\varphi^{(1)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(1)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(1)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(1)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\kappa_2}{2} \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^n + (\psi^{(2)})_j^n}{2} + \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^n - (\varphi^{(2)})_j^n}{\Delta x} \right) \\
& \times \left(\frac{(\psi^{(2)})_{j+1}^{n-1} + (\psi^{(2)})_j^{n-1}}{2} - \frac{(\varphi^{(2)})_{j+1}^{n-1} - (\varphi^{(2)})_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{\mathcal{C}}{2} \left((\varphi^{(2)})_j^{n-1} - (\varphi^{(1)})_j^{n-1} \right)^2 + I_{j1}^n + I_{j2}^n + I_{j3}^n + I_{j4}^n + I_{j5}^n + I_{j6}^n + I_{j7}^n + I_{j8}^n + I_{j9}^n + I_{j10}^n \Big] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.40}$$

com $I^n = \sum_{i=1}^{10} I_{ji}^n$. Procedendo com as mesmas técnicas algébricas nos somatórios I_{j2}^n , I_{j4}^n , I_{j7}^n e I_{j9}^n construímos as seguintes expressões

$$I_{j2}^n + I_{j4}^n + I_{j7}^n + I_{j9}^n =$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_1 \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{(\varphi^{(1)})_1^n - (\varphi^{(1)})_0^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_1^{n+1} - (\psi^{(1)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\varphi^{(1)})_{J+1}^n - (\varphi^{(1)})_J^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right] \\
&+ \kappa_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\psi^{(1)})_1^n + (\psi^{(1)})_0^n}{2} \frac{(\varphi^{(1)})_1^{n+1} - (\varphi^{(1)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^n + (\psi^{(1)})_J^n}{2} \frac{(\varphi^{(1)})_{J+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right] \\
&+ \kappa_2 \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{(\varphi^{(2)})_1^n - (\varphi^{(2)})_0^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_1^{n+1} - (\psi^{(2)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\varphi^{(2)})_{J+1}^n - (\varphi^{(2)})_J^n}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right] \\
&+ \kappa_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\psi^{(2)})_1^n + (\psi^{(2)})_0^n}{2} \frac{(\varphi^{(2)})_1^{n+1} - (\varphi^{(2)})_1^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^n + (\psi^{(2)})_J^n}{2} \frac{(\varphi^{(2)})_{J+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right].
\end{aligned}$$

Todavia, I^n corresponde aos termos de fronteira que surgem a partir desses procedimentos multiplicativos. Explicitamente temos que

$$\begin{aligned}
I^n &= \\
&= \kappa_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\varphi^{(1)})_1^n - (\varphi^{(1)})_0^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(1)})_1^n + (\psi^{(1)})_0^n}{2} \right] \frac{(\varphi^{(1)})_1^{n+1} - (\varphi^{(1)})_1^{n-1}}{2\Delta t} \\
&- \kappa_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\varphi^{(1)})_{J+1}^n - (\varphi^{(1)})_J^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^n + (\psi^{(1)})_J^n}{2} \right] \frac{(\varphi^{(1)})_{J+1}^{n+1} - (\varphi^{(1)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
&+ \kappa_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\varphi^{(2)})_1^n - (\varphi^{(2)})_0^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(2)})_1^n + (\psi^{(2)})_0^n}{2} \right] \frac{(\varphi^{(2)})_1^{n+1} - (\varphi^{(2)})_1^{n-1}}{2\Delta t} \\
&- \kappa_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{(\varphi^{(2)})_{J+1}^n - (\varphi^{(2)})_J^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^n + (\psi^{(2)})_J^n}{2} \right] \frac{(\varphi^{(2)})_{J+1}^{n+1} - (\varphi^{(2)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
&+ \left[b_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_1^n - (\psi^{(1)})_0^n}{\Delta x} + \kappa_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{(\varphi^{(1)})_1^n - (\varphi^{(1)})_0^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(1)})_1^n + (\psi^{(1)})_0^n}{2} \right) \right] \\
&\times \frac{(\psi^{(1)})_1^{n+1} - (\psi^{(1)})_1^{n-1}}{2\Delta t} \\
&- \left[b_1 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^n - (\psi^{(1)})_J^n}{\Delta x} + \kappa_1 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{(\varphi^{(1)})_{J+1}^n - (\varphi^{(1)})_J^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^n + (\psi^{(1)})_J^n}{2} \right) \right] \\
&\times \frac{(\psi^{(1)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(1)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
&+ \left[b_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_1^n - (\psi^{(2)})_0^n}{\Delta x} + \kappa_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{(\varphi^{(2)})_1^n - (\varphi^{(2)})_0^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(2)})_1^n + (\psi^{(2)})_0^n}{2} \right) \right] \\
&\times \frac{(\psi^{(2)})_1^{n+1} - (\psi^{(2)})_1^{n-1}}{2\Delta t} \\
&- \left[b_2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^n - (\psi^{(2)})_J^n}{\Delta x} + \kappa_2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{(\varphi^{(2)})_{J+1}^n - (\varphi^{(2)})_J^n}{\Delta x} + \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^n + (\psi^{(2)})_J^n}{2} \right) \right] \\
&\times \frac{(\psi^{(2)})_{J+1}^{n+1} - (\psi^{(2)})_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t}
\end{aligned}$$

Então, levando em conta as condições de contorno Dirichlet Homogêneas em (4.16), segue que $I^n = 0$. Agora, considerando a definição da energia discreta dada por (4.22), concluímos que

$$E^n - E^{n-1} = 0 \quad (4.41)$$

para todo $n = 1, \dots, N$. Portanto o modelo discreto é conservativo para todo $n \geq 0$.

É claro que, se $\alpha_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$, é possível verificar que

$$E^n \leq E^{n-1}, \quad \forall n \geq 0, \quad (4.42)$$

de onde utilizando a recursividade, obtemos

$$E^n \leq E^0, \quad \forall n \geq 0. \quad \blacksquare \quad (4.43)$$

4.4 Simulações Numéricas

Nesta seção, nosso objetivo é estudar o esquema numérico (4.12) – (4.17) e sua energia E^n (4.22) exibindo os resultados de simulações numéricas que efetuamos com o uso do método explícito (4.18) – (4.21) em diferenças finitas a fim de ilustrar por meio das simulações os resultados analíticos estabelecidos nas seções anteriores.

Para nossos experimentos numéricos, consideramos as seguintes configurações: $L = 1.0m$ de comprimento, $T = 0.2s$. Especificidades do tubo 1: $0.025m$ de espessura e $0.04m$ de largura. Especificidades do tubo 2: $0.015m$ de espessura e $0.02m$ de largura. Para tanto, usaremos as seguintes constantes físicas: $E = 21 \times 10^4 N/m^2$, $G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 8.1395 \times 10^4 N/m^2$, $\rho = 7850 kg/m^3$, $k = 5/6$, $\mu = 0.29$, $\mathcal{C} = 10^{-9}$. Para os dados iniciais, assumimos que

$$\varphi^{(i)}(x_j, 0) = \psi^{(i)}(x_j, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.44)$$

$$\varphi_t^{(i)}(x_j, 0) = \sin\left(\nu \frac{\pi x_j}{L}\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \quad (4.45)$$

$$\psi_t^{(i)}(x_j, 0) = \sin\left(\nu \frac{\pi x_j}{L}\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \quad (4.46)$$

levando em conta as condições de contorno Dirichlet Homogêneas. Na malha computacional, usamos $\Delta x = 0.0313$ e $\Delta t = 9.7656 \times 10^{-5}$ de maneira que $\Delta t/\Delta x = 0.003125$.

4.4.1 Casos conservativo e dissipação total

Para nossos resultados iniciais, consideremos os casos conservativo e com dissipação total, sejam eles $\alpha_i = 0$ e $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, respectivamente. Observe que de acordo com a Figura (4.1), vemos que a energia discreta E^n reproduz um caráter conservativo das soluções para todo tempo discreto t_n . Enquanto que na figura (4.2), E^n é monótona e decrescente para zero ao longo do tempo.

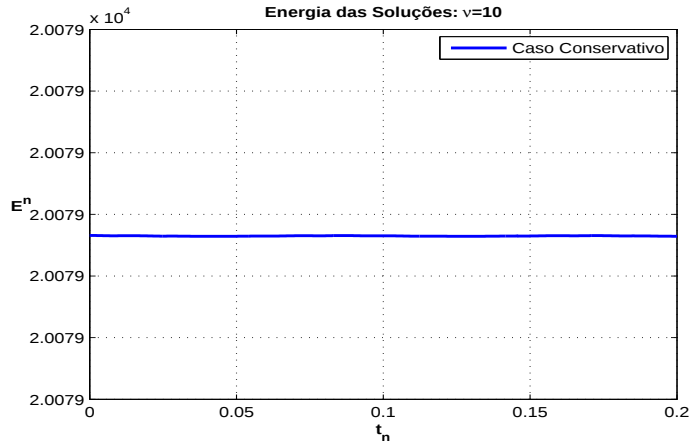


Figura 4.1: $\alpha_i = 0, i = 0, 1, 2, 3$.

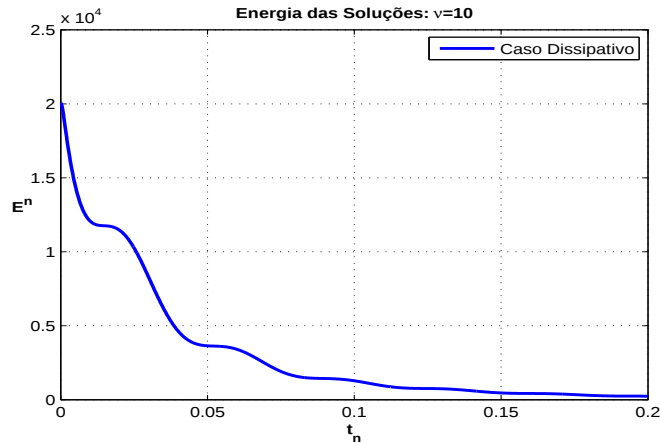


Figura 4.2: $\alpha_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$.

Aqui, estamos falando em concordância qualitativa: a lei de conservação de energia e sua equivalente discreta são compatíveis, podendo ser observada na figura (4.1). Por

outro lado, tal como no caso contínuo, a figura (4.2) mostram que a energia se caracteriza como uma função exponencial $e^{-\omega t_n}$ para $\omega > 0$.

4.4.2 Dissipação nos declives do tubo e no deslocamento lateral do tubo externo: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$

Nesta subseção nossos experimentos numéricos comprovam os resultados analíticos para o modelo de vigas de Timoshenko associado ao duplo nanotubo de carbono, o qual mostram que este modelo perde estabilidade exponencial quando consideramos as velocidades de propagação distintas. Isto quer dizer que se $\rho_1/\kappa_1 \neq \rho_2/b_1$, isto é,

$$\chi = \frac{\kappa_1 \rho_2 - b_1 \rho_1}{\kappa_1^2 - \mathcal{C} \rho_2 \kappa_1 + \mathcal{C} b_1 \rho_1} \neq 0,$$

$G \neq E/K_1$, e $G \neq E/K_2$. Portanto

$$\frac{\rho_1}{\kappa_1} - \frac{\rho_2}{b_1} \neq 0 \text{ e } \frac{\kappa_1}{b_1} \neq \mathcal{C} \left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1} \right). \quad (4.47)$$

Sendo assim, obtemos um decaimento do tipo polinomial e a figura (4.3) mostra esta propriedade.

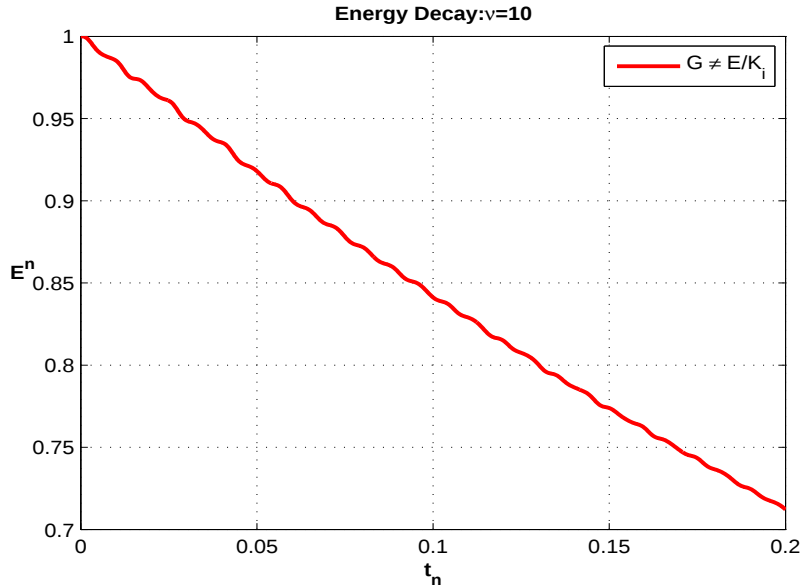


Figura 4.3: $G \neq E/K_1$ e $G \neq E/K_2$

Observe que os valores discretos da energia são praticamente uma reta constante ao longo do tempo, comprovando um decaimento polinomial.

Agora, considerando os mesmos mecanismos de dissipação atuando nos declives do

tubo e no deslocamento lateral do tubo externo, o decaimento exponencial ocorre se, e somente se, as velocidades de propagação de ondas iguais. Para este caso sugerimos a leitura [38, 49]. Para vigas de Timoshenko associado ao duplo nanotubo de carbono, podemos ver a partir das simulações numéricas que estes resultados são preservados, acrescentando apenas uma particularidade, o fato de $\kappa_1^2 \neq 0$. Isto é, se

$$\frac{\rho_1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2}{b_1},$$

então

$$\kappa_1^2 - \mathcal{C}_{\kappa_1} b_1 \left(\frac{\rho_1}{\kappa_1} - \frac{\rho_2}{b_1} \right) = \kappa_1^2 \neq 0.$$

Dessa forma, podemos escolher o valor $G = K_1$ e $G = K_2$ para obtermos a estabilidade exponencial.

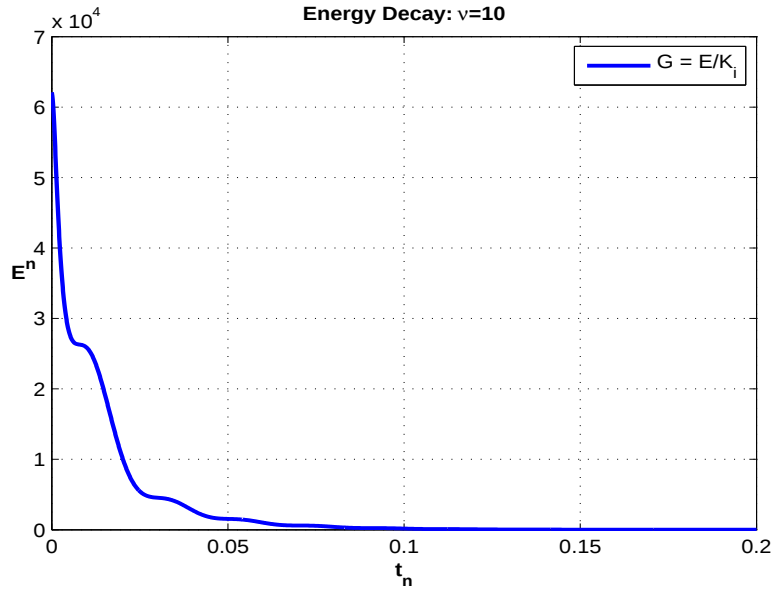


Figura 4.4: $G = E/K_1$ e $G = E/K_2$

Observe que no decaimento exponencial obtemos um decaimento melhor comparado a dissipação total.

4.4.3 Dissipação somente nos declives do tubo: $\alpha_0 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 > 0$

Neste experimento numérico sugerimos outro problema. Para vigas de Timoshenko, quando a dissipação do tipo atrito atua somente na equação referente ao ângulo de rotação, o decaimento ocorre se, e somente se, houver uma igualdade entre as velocidades de propagação de ondas. Para duas vigas de Timoshenko associada ao nanotubo de parede dupla, observamos que a partir das simulações numéricas, estes resultados são preservados desde que $\frac{\rho_2}{b_1} = \frac{\rho_1}{\kappa_1}$ e $\frac{\kappa_1}{b_1} \neq 0$.

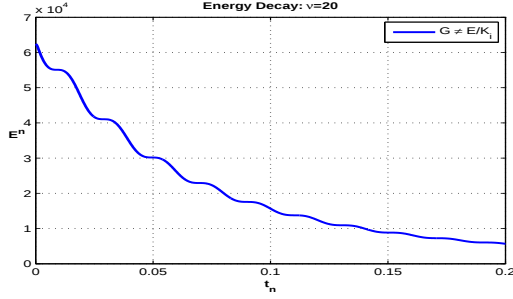


Figura 4.5: $\mathcal{C}\left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1}\right) \neq \frac{\kappa_1}{b_1}$.

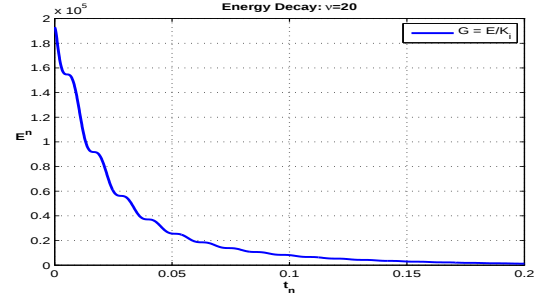


Figura 4.6: $\rho_2/b_1 = \rho_1/\kappa_1$ e $\kappa_1/b_1 \neq 0$.

Capítulo 5

Modelo elástico poroso com dissipação localizada não linear

5.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos o sistema elástico poroso unidimensional e homogêneo com dissipações localizadas não lineares. Para começar, vamos considerar as seguintes equações de evolução no caso unidimensional

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_x + F_1, \\ J\phi_{tt} = H_x + G + F_2. \end{cases} \quad (5.1)$$

Aqui T é o tensão, H é o equilíbrio na tensão, G é a força corporal equilibrada, F_1 é a dissipação localizada não linear elástica e F_2 é dissipação localizada não linear porosa. As variáveis u e ϕ representam o deslocamento de um material sólido elástico e a fração de volume, respectivamente. As equações constitutivas são

$$\begin{cases} T = \mu u_x + b\phi, \\ H = \delta\phi_x, \\ G = -bu_x - \xi\phi. \end{cases} \quad (5.2)$$

Assumimos também que os termos dissipativos localizados arbitrários não-lineares são definidos sob a forma

$$\begin{cases} F_1 = a_1(x)g_1(u_t), \\ F_2 = a_2(x)g_2(\phi_t). \end{cases} \quad (5.3)$$

Então, substituindo (5.2) e (5.3) em (5.1), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + a_1(x)g_1(u_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + a_2(x)g_2(\phi_t) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)), \quad \text{em } (0, L), \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)), \quad \text{em } (0, L) \end{array} \right. \quad (5.4)$$

onde ρ , μ , J , δ , b e ξ são os coeficientes constitutivos cujo significado físico é bem conhecido. Os coeficientes constitutivos, em caso unidimensional, satisfazem

$$\xi > 0, \delta > 0, \mu > 0, \rho > 0, J > 0, \mu\xi \geq b^2. \quad (5.5)$$

As funções localizadas $a_i(x)$ são regulares e não negativas, enquanto que as funções não-lineares g_i , $i = 1, 2$, são contínuas e monótona crescente.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma. Antes de discutirmos a existência e unicidade de soluções na subseção 5.2.3, levantaremos algumas hipótese na subseção 5.2.1 e definiremos a energia de soluções que é decrescente ao longo do tempo na subseção 5.2.2. Na seção 5.2 encontraremos a observabilidade do modelo elástico poroso e por fim em 5.3 determinamos a estabilidade assintótica do sistema.

5.2 Existência e unicidade de solução integral do modelo

5.2.1 Hipótese sobre as funções g_i e a_i

Assumiremos as seguintes hipóteses sobre as funções g_i e a_i , $i = 1, 2$:

- As funções g_i , $i = 1, 2$, são contínuas, monótonas crescentes e satisfaz:

$$\begin{aligned} (1) \quad & g_i(s)s > 0, \quad \forall s \neq 0, \\ (2) \quad & m_i s^2 \leq g_i(s) \leq M_i s^2, \quad \text{para } |s| > 1, \end{aligned}$$

- Assumimos que $a_i \in L^\infty(0, L)$ são funções não negativas tal que

$$a_i(x) \geq a_i > 0, \quad \text{em } I_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{e } \tilde{I} = I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \quad (5.6)$$

Observe que as funções localizadas nos permite considerar que os termos de dissipação atuem em uma pequena região do intervalo $(0, L)$.

5.2.2 A Energia do modelo

Nesta subseção encontraremos a energia associada ao modelo (5.4).

Definamos o funcional energia por

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{\rho}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{J}{2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L u_x^2 dx \\ &+ \frac{\delta}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\xi}{2} \int_0^L \phi^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L (u_x \phi - u \phi_x) dx. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por hipótese, temos $\mu\xi - b^2 \geq 0$. Tomando $\xi_1 \in (0, \xi]$ tal que $\mu\xi - b^2 = 0$. Então, temos que

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{\rho}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{J}{2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left| \mu^{\frac{1}{2}} u_x^2 - \xi_1^{\frac{1}{2}} \phi \right|^2 dx \\ &+ \frac{\delta}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{1}{2} (\xi - \xi_1) \int_0^L \phi^2 dx \geq 0, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Proposição 5.2.1. *O funcional energia associado a solução forte do sistema (5.4) satisfaz*

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L (a_1(x) g_1(u_t) u_t + a_2(x) g_2(\phi_t) \phi_t) dx \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (5.8)$$

Prova. Multiplicaremos a equação (5.4)₁ e (5.4)₂ por u_t e ϕ_t , respectivamente, e integramos por partes em $L^2(0, L)$.

Na equação (5.4)₁ temos

$$\begin{aligned} \rho \int_0^L u_{tt} u_t dx - \mu \int_0^L u_{xx} u_t dx - b \int_0^L \phi_x u_t dx + a_1(x) \int_0^L g_1(u_t) u_t dx &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mu \int_0^L |u_x|^2 dx - b \int_0^L \phi_x u_t dx &= -a_1(x) \int_0^L g_1(u_t) u_t dx. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} J \int_0^L \phi_{tt} \phi_t dx - \delta \int_0^L \phi_{xx} \phi_t dx &+ b \int_0^L u_x \phi_t dx + \xi \int_0^L \phi \phi_t dx \\ &+ a_2(x) \int_0^L g_2(\phi_t) \phi_t dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} J \int_0^L |\phi_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta \int_0^L |\phi_x|^2 dx - b \int_0^L u_x \phi_t dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \xi \int_0^L |\phi|^2 dx \\ = -a_2(x) \int_0^L g_2(\phi_t) \phi_t dx. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Note que

$$\int_0^L b \phi u_{tx} dx + \int_0^L u_x \phi_t dx = \int_0^L b(u_x \phi)_t dx = \frac{d}{dt} \int_0^L b(u_x \phi) dx$$

Somando 5.9 e 5.10 e usando as hipóteses sobre as funções g_i e a_i , $i = 1, 2$, segue a conclusão da proposição. ■

Podemos notar que a desigualdade (5.8) continua a ser válida para as soluções fracas do sistema (5.4) pelo simples argumento de densidade.

A identidade (5.8) permite-nos concluir que

$$E(t) - E(0) = - \int_0^t \int_0^L (a_1(x) g_1(u_t) u_t + a_2(x) g_2(\phi_t) \phi_t) dx ds, \quad t \geq 0, \quad (5.11)$$

onde

$$\begin{aligned} E(0) &:= \frac{\rho}{2} \int_0^L u_1^2 dx + \frac{J}{2} \int_0^L \phi_1^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L u_{0x}^2 dx \\ &+ \frac{\delta}{2} \int_0^L \phi_{0x}^2 dx + \frac{\xi}{2} \int_0^L \phi_0^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L (u_{0x} \phi_0 - u_0 \phi_{0x}) dx \end{aligned}$$

denota a energia inicial.

5.2.3 O Cenário de Semigrupo de Operadores Lineares e Não Lineares

Consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$$

e

$$\mathcal{V} := H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$$

com produto interno em $\mathcal{H}$ dado por

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^L (\rho \varphi \Phi + \mu u_x v_x + J \psi \Psi + \delta \phi_x w_x + \xi \phi w + b(u_x w - u w_x)) dx \quad (5.12)$$

para $U = (u, \varphi, \phi, \psi)'$, $V = (v, \Phi, w, \Psi)'$, onde $'$ indica a transposta dos vetores U, V . Por hipótese, temos que $\mu\xi \geq b^2$. Tomando $\xi_1 \in (0, \xi]$ tal que $\mu\xi_1 - b^2 = 0$. Então, obtemos

$$\begin{aligned} \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} &\geq \rho \int_0^L \varphi^2 dx + J \int_0^L \psi^2 dx + \delta \int_0^L \phi_x^2 dx + \int_0^L \left| \mu^{\frac{1}{2}} u_x - \xi_1^{\frac{1}{2}} \phi \right|^2 dx \\ &+ (\xi - \xi_1) \int_0^L \phi^2 dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Isto nos permite ver claramente que $\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}}$ define um produto interno em $\mathcal{H}$, e a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ associada é equivalente a norma usual.

Se denotarmos $\Psi = \{u, u_t, \phi, \phi_t\}$ e $\Psi_0 = \{u_0, u_1, \phi_0, \phi_1\}$ então o sistema (5.4) pode ser reescrito

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dt} + \mathcal{C}\Psi = 0, & \text{para } t > 0 \\ \Psi(0) = \Psi_0 \end{cases} \quad (5.14)$$

onde o operador $\mathcal{C} = -(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ e os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\{u, \varphi, \phi, \psi\} &= \left\{ \varphi, \frac{\mu}{\rho} u_{xx} + \frac{b}{\rho} \phi_x, \psi, \frac{\delta}{J} \phi_{xx} - \frac{b}{J} u_x - \frac{\xi}{J} \phi \right\}, \text{ para } \{u, \varphi, \phi, \psi\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{V}, \\ \mathcal{B}\{u, \varphi, \phi, \psi\} &= \{0, -a_1(x)g_1(\varphi), 0, -a_2(x)g_2(\psi)\}, \text{ for } \{u, \varphi, \phi, \psi\} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Veremos a seguir o significado de solução para o problema de valor inicial (PVI)(5.14), segundo V. Barbu [4].

Definição 1. Diremos que $\Psi : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{H}$ é uma **solução forte** para o problema de valor inicial (5.14), se Ψ é contínua em $[0, \infty[$ e Lipschitziana em cada subconjunto compacto de $]0, \infty[$, $\Psi(t)$ é diferenciável em $]0, \infty[$ e

$$\frac{d\Psi}{dt}(t) = \mathcal{A}\Psi(t) + \mathcal{B}\Psi(t), \text{ para quase todo } t \in]0, \infty[.$$

Definição 2. A função $\Psi : [0, \infty[\rightarrow \mathcal{H}$, será chamada de **solução integral** para o problema de valor inicial (5.14), se $\Psi(t)$ é contínua em $[0, \infty[$, $\Psi(0) = \Psi_0$ e satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2} \|\Psi(t) - \Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2} \|\Psi(s) - \Phi\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_s^t (\mathcal{A}\Phi + \mathcal{B}\Psi(r), \Psi(r) - \Phi)_{\mathcal{H}} dr,$$

para todo $\Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $0 \leq s \leq t < \infty$, onde $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ é o produto interno de $\mathcal{H}$.

Com base nessas hipóteses e fazendo o uso do método de semigrupo não-linear (veja

[4]), podemos enunciar o seguinte resultado relativo a existência e unicidade de soluções do sistema (5.14).

Teorema 5.2.1. *Para qualquer dado inicial $\Psi_0 = \{u_0, u_1, \phi_0, \phi_1\} \in \mathcal{H}$, o problema (5.14) admite uma única solução fraca. Além disso, se $\Psi_0 \in \mathcal{V}$ a respectiva solução será forte.*

Prova. A ideia da prova é mostrar que o operador $\mathcal{C} = -(A + B)$ é um operador maximal monótono em $\mathcal{H}$, para tanto usaremos a mesma técnica desenvolvida em [46]. Dividiremos a demonstração do teorema em duas partes. Na primeira parte usaremos o corolário 1.1 de Barbu, V. [4] com o objetivo de concluir que:

(i) O operador A é maximal monótono.

A seguir usando o teorema 3.1 em Brezis [7], mostraremos que

(ii) O operador B é monótono, hemicontínuo e limitado.

Prova de (i) Mostraremos que $-A$ é monótono e que $Im(I - A) = \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, o resultado segue da proposição 2.2 em [7]. Na verdade, o fato de ser monótono decorre de:

$$(-A\Psi, \Psi)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall \Psi \in \mathcal{V}$$

Tomemos, agora a função vetorial $F = (f1, f2, f3, f4) \in \mathcal{H}$ e resolveremos o seguinte problema espectral:

$$\Psi - A\Psi = F \tag{5.15}$$

para algum $\Psi \in \mathcal{V}$, onde $\Psi = (u, u_t, \phi, \phi_t)$. Reescrevendo termo a termo a equação 5.15 temos

$$u - u_t = f1 \in H_0^1(0, L) \tag{5.16}$$

$$\rho u_t - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho f2 \in L^2(0, L) \tag{5.17}$$

$$\phi - \phi_t = f3 \in H_0^1(0, L) \tag{5.18}$$

$$J\phi_t - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = Jf4 \in L^2(0, L) \tag{5.19}$$

Isolando u_t e ϕ_t em 5.16 e 5.18, respectivamente e substituindo em 5.17 e 5.19, temos

$$\rho u - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho(f2 + f1) \in L^2(0, L) \quad (5.20)$$

$$J\phi - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = J(f4 + f3) \in L^2(0, L) \quad (5.21)$$

Realizando algumas multiplicações podemos encontrar a forma bilinear

$$a : \left[H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \right]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\begin{aligned} a(\Psi, \tilde{\Psi}) := & \rho \int_0^L u\varphi dx + \mu \int_0^L u_x\varphi_x dx + J \int_0^L \phi\eta dx + \delta \int_0^L \phi_x\eta_x dx \\ & + \xi \int_0^L \phi\eta dx + b \int_0^L (u_x\eta - \phi_x\varphi) dx \end{aligned}$$

onde $\Psi = (u, \phi) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ e $\tilde{\Psi} = (\varphi, \eta) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$.

A forma bilinear $a(., .)$ é contínua e coerciva, sobre o espaço de Hilbert $E = [H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)]^2$, logo pelo Lema de Lax-Milgram, temos que existe uma única solução $(u, \phi) \in E$ tal que

$$a(\Psi, \tilde{\Psi}) = h(\tilde{\Psi}), \quad \forall \tilde{\Psi} \in E.$$

Além disto, do problema (5.20)-(5.21) em $L^2(0, L)$, obtemos $(u, \phi) \in H^2(0, L)$.

Prova de (ii) Tendo como referência a subseção 5.2.1, temos que o operador $-B$ satisfaz a seguinte desigualdade:

$$(-B\Psi, \Psi)_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

o que prova a monotonia de $-B$. Agora, seja $\Psi_i = \{u_i, v_i, \phi_i, \psi_i\}^T \in \mathcal{H}$, com $i = 1, 2$. Consideremos a seguinte expressão

$$(-B(\Psi_1 + t\Psi_2), \Psi)_{\mathcal{H}} = (a_1(x)g_1(v_1 + tv_2), v)_{L^2} + (a_2(x)g_2(\psi_1 + t\psi_2), \psi)_{L^2}$$

para $t > 0$. Queremos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (a_1(x)g_1(v_1 + tv_2), v)_{L^2} = (a_1(x)g_1(v_1), v)_{L^2} \quad (5.22)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} (a_2(x)g_2(\psi_1 + t\psi_2), \psi)_{L^2} = (a_2(x)g_2(\psi_1), \psi)_{L^2} \quad (5.23)$$

Para isto, consideremos a função $f \in L^1(0, L)$ dado por

$$f(x) = a_1(x)g_1(v_1(x))v(x)$$

e definimos a seguinte sequência $(f_n) \subset L^1(0, L)$ dado por

$$f_n(x) = a_1(x)g_1\left(v_1(x) + \frac{1}{n}v_2(x)\right)v(x), \quad (5.24)$$

assim, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad q.s. \text{ em } (0, L). \quad (5.25)$$

Com efeito, definindo o conjunto

$$\sum_n = \left\{ x \in [0, L] : \left| v_1(x) + \frac{1}{n}v_2(x) \right| < 1 \right\}, \quad (5.26)$$

temos que

$$|f_n(x)| \leq c_1 |v(x)| \quad (5.27)$$

para cada $x \in \sum_n$, onde c_1 é uma constante positiva. De fato, observe que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| a_1 g_1\left(v_1(x) + \frac{1}{n}v_2(x)\right) \right| |v(x)| \\ &\leq c_1 \left| v_1(x) + \frac{1}{n}v_2(x) \right| |v(x)| \\ &\leq c_1 |v(x)|. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos concluir que

$$|f_n(x)| \leq c_2 (|v_1(x)| + |v_2(x)|) |v(x)| \quad (5.28)$$

para cada $x \in [0, L] - \sum_n$, onde c_2 é uma constante positiva. De fato, segue de 5.2.1 que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| a_1 \left(v_1(x) + \frac{1}{n}v_2(x) \right) \right| |v(x)| \\ &\leq c_2 \left| v_1(x) + \frac{1}{n}v_2(x) \right| |v(x)| \end{aligned}$$

$$\leq c_2(|v_1(x)| + |v_2(x)|) |v(x)|$$

Segue de 5.27 e 5.28 que (f_n) é limitada por uma função integrável em $[0, L]$. Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos passar o limite e concluir que $-B$ é hemicontínuo.

Finalmente, concluímos a partir das hipóteses 5.2.1 que $-B$ é limitado em subconjuntos limitados. E portanto, concluímos a prova. ■

Nosso próximo resultado nos fornece uma relação entre as soluções integral e forte de (5.14). O Lema abaixo nos diz que toda solução integral pode ser obtida como limite de soluções fortes.

Lema 5.2.1. *Dado $\Psi_0 = \{u_0, u_1, \phi_0, \phi_1\} \in \mathcal{H}$ e $\Psi = \{u, u_t, \phi, \phi_t\} \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ a única solução integral respectiva de (5.14). Então, existe uma sequência de soluções fortes $\{\Psi_n\}$ de (5.14), tal que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = \Psi \text{ em } C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}).$$

5.3 Desigualdade de Observabilidade

Nesta seção estudaremos a observabilidade do seguinte modelo elástico poroso conservativo unidimensional

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = 0 & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \phi(0, t) = \phi(L, t) = 0, & t > 0, \\ (u(x, 0), \phi(x, 0)) = (u_0(x), \phi_0(x)), & \text{em } (0, L) \\ (u_t(x, 0), \phi_t(x, 0)) = (u_1(x), \phi_1(x)), & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (5.29)$$

Reescrevendo o problema (5.29) como um problema de Cauchy, obtemos

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{dt} = \mathcal{A}\Psi, & \text{para } t > 0 \\ \Psi(0) = \Psi_0 \end{cases} \quad (5.30)$$

onde $\mathcal{A}$ e Ψ_0 foram definidas anteriormente.

Então, usando a técnica de semigrupo de operadores lineares [41] aplicada ao sistema (5.30) podemos garantir a existência e unicidade de soluções fortes e fracas nas classes

$$u, \phi \in C^0(\mathbb{R}_+, H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H_0^1(0, L))$$

$$u, \phi \in C^0(\mathbb{R}_+, H_0^1(0, L)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(0, L)).$$

Definiremos a energia usual associada ao sistema (5.29) por

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{\rho}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{J}{2} \int_0^L \phi_t^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L u_x^2 dx \\ &+ \frac{\delta}{2} \int_0^L \phi_x^2 dx + \frac{\xi}{2} \int_0^L \phi^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L (u_x \phi - u \phi_x) dx, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

e por $E(0)$ a energia inicial. Observe que a energia é conservada para todo $t \geq 0$.

Em geral, desigualdades de observabilidade (ou desigualdades inversas) são importantes do ponto de vista matemático, pela equivalência que existe com o problema da Teoria do Controle e da Teoria de Estabilização.

Nesta seção iremos estabelecer uma desigualdade de observabilidade para o sistema (5.29) e para isto enunciaremos o resultado principal desta seção.

Teorema 5.3.1. *Seja $\Lambda := (\alpha_1, \alpha_2)$ um intervalo aberto contido em $(0, L)$. Para $T > 0$ suficientemente grande, então existe uma constante positiva C tal que, qualquer solução $\{u, \phi\}$ de (5.29) satisfaça*

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\Lambda} (u_t^2 + \phi_t^2) dx dt. \quad (5.32)$$

Prova. Pelo argumento de densidade, é suficiente provar este resultado para soluções fortes. Tome $|\Lambda| = \alpha_2 - \alpha_1$. Considere ϵ_0 , suficientemente pequeno, tal que $0 < \epsilon_0 < \frac{|\Lambda|}{2}$ e defina a seguinte função auxiliar, como em [20],

$$h_{\lambda}(x) = \begin{cases} (\lambda - 1)x, & x \in [0, \alpha_1 + \epsilon_0], \\ \lambda(x - \alpha_1 - \epsilon_0) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + 2\epsilon_0}{L}(\alpha_1 + \epsilon_0), & x \in [\alpha_1 + \epsilon_0, \alpha_2 - \epsilon_0], \\ (\lambda - 1)(x - L), & x \in (\alpha_2 - \epsilon_0, L] \end{cases} \quad (5.33)$$

com $\lambda := \frac{L - (\alpha_2 - \alpha_1 - 2\epsilon_0)}{L} \in [0, 1[$ e $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq L$.

Seja $\{u, \phi\}$ soluções forte de (5.29). Multiplicaremos a primeira e a segunda equação do sistema (5.29) pelos multiplicadores $u_x h_{\lambda}$ e $\phi_x h_{\lambda}$, respectivamente, e integramos por partes em $(0, L) \times (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^L \left(\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\mu}{2} u_x^2 + \frac{J}{2} \phi_t^2 + \frac{\delta}{2} \phi_x^2 + \frac{\xi}{2} \phi^2 + b u_x \phi \right) h'_{\lambda} dx dt \\ &= - \left[\rho \int_0^L u_t u_x h_{\lambda} dx \right]_0^T - \left[J \int_0^L \phi_t \phi_x h_{\lambda} dx \right]_0^T \end{aligned}$$

$$+\xi \int_0^T \int_0^L \phi^2 h'_\lambda \, dx \, dt + b \int_0^T \int_0^L u_x \phi h'_\lambda \, dx \, dt. \quad (5.34)$$

Como

$$h'_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in [\alpha_1 + \epsilon_0, \alpha_2 - \epsilon_0], \\ (\lambda - 1), & x \in [0, \alpha_1 + \epsilon_0) \cup (\alpha_2 - \epsilon_0, L] \end{cases} \quad (5.35)$$

temos da igualdade acima que

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) \, dt &= - \left[\int_0^L (\rho u_t u_x + J \phi_t \phi_x) h_\lambda \, dx \right]_0^T \\ &+ \xi \int_0^T \int_0^L \phi^2 h'_\lambda \, dx \, dt + b \int_0^T \int_0^L u_x \phi h'_\lambda \, dx \, dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha_1 + \epsilon_0}^{\alpha_2 - \epsilon_0} (\rho u_t^2 + J \phi_t^2) \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha_1 + \epsilon_0}^{\alpha_2 - \epsilon_0} (\mu u_x^2 + \delta \phi_x^2) \, dx \, dt \\ &+ \frac{\xi}{2} \int_0^T \int_{\alpha_1 + \epsilon_0}^{\alpha_2 - \epsilon_0} \phi^2 \, dx \, dt + b \int_0^T \int_{\alpha_1 + \epsilon_0}^{\alpha_2 - \epsilon_0} u_x \phi \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Vamos estimar o lado direito de (5.36). Usando a equivalência entre a norma da energia e a norma usual em $\mathcal{H}$, obtemos

$$- \left[\int_0^L (\rho u_t u_x + J \phi_t \phi_x) h_\lambda \, dx \right]_0^T \leq CE(0). \quad (5.37)$$

Depois, usando a desigualdade de Young com o fato de que $|h'_\lambda| \leq 1$, obtemos

$$b \int_0^T \int_0^L u_x \phi h'_\lambda \, dx \, dt + b \int_0^T \int_{\alpha_1 + \epsilon_0}^{\alpha_2 - \epsilon_0} u_x \phi \, dx \, dt \leq 2\epsilon T E(0) + C_\epsilon \int_0^T \int_0^L \phi^2 \, dx \, dt. \quad (5.38)$$

Finalmente, vamos considerar uma função corte $\eta \in C_0^\infty(0, L)$ tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \alpha_1) \cup (\alpha_2, L], \\ 1, & x \in [\alpha_1 + \epsilon_0, \alpha_2 - \epsilon_0], \\ 0 \leq \eta(x) \leq 1, & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (5.39)$$

Assim, multiplicando-se as primeira e segunda equações de (5.29) por $u\eta$ e $\phi\eta$, respectivamente e integrando po partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (\mu u_x^2 + \delta \phi_x^2 + \xi \phi^2) \eta \, dx \, dt &= - \left[\int_0^L (\rho u_t u + J \phi_t \phi) \eta \, dx \right]_0^T \\ &+ \int_0^T \int_0^L (\rho u_t^2 + J \phi_t^2) \eta \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (\mu u^2 + \delta \phi^2) \eta_{xx} \, dx \, dt \\ &+ b \int_0^T \int_0^L (\phi_x u - u_x \phi) \eta \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Consequentemente, por cálculos análogos que fizemos anteriormente, nós inferimos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (\mu u_x^2 + \delta \phi_x^2 + \xi \phi^2) \eta \, dx \, dt &\leq CE(0) + C \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\rho u_t^2 + J \phi_t^2) \, dx \, dt \\ + C_\epsilon \int_0^T \int_0^L (\mu u^2 + \delta \phi^2) \, dx \, dt &+ 2\epsilon TE(0) \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde a constante positiva C não depende da solução de (5.29).

Segue de (5.36)-(5.41) e usando o fato de que η tem suporte contido em $[\alpha_1, \alpha_2]$, obtemos

$$\begin{aligned} (1 - \lambda - 4\epsilon)TE(0) &\leq CE(0) + C \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\rho u_t^2 + J \phi_t^2) \, dx \, dt \\ &+ C_\epsilon \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u^2 + \phi^2) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Assim, para $\epsilon < \frac{1-\lambda}{4}$, temos que

$$\begin{aligned} TE(0) &\leq CE(0) + C \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\rho u_t^2 + J \phi_t^2) \, dx \, dt \\ &+ C_\epsilon \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u^2 + \phi^2) \, dx \, dt \end{aligned}$$

e finalmente, tomando $T > C$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} E(0) &\leq C \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\rho u_t^2 + J \phi_t^2) \, dx \, dt \\ &+ C \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u^2 + \phi^2) \, dx \, dt \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde C é uma constante positiva que não dependem da solução de (5.29).

Nosso principal objetivo aqui é estimar a segunda integral no lado direito da (5.42) em termos de u_t e ϕ_t .

Para isto, é suficiente demonstrar que existe uma constante positiva C , que não dependem da solução de (5.29), de tal forma que a seguinte desigualdade seja verdadeira para cada solução de (5.29):

$$\int_0^T \int_0^L (u^2 + \phi^2) \, dx \, dt \leq C \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u_t^2 + \phi_t^2) \, dx \, dt. \quad (5.43)$$

Para provar esta afirmação, vamos supor por contradição que (5.43) não seja verdade. Assim, podemos encontrar uma sequência de soluções não-nulas de (5.29), isto é

$\{u_\mu, \phi_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$, satisfazendo

$$\int_0^T \int_0^L (u_\mu^2 + \phi_\mu^2) dx dt \geq \mu \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u_{\mu t}^2 + \phi_{\mu t}^2) dx dt, \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (5.44)$$

o que implica que

$$\frac{\int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u_{\mu t}^2 + \phi_{\mu t}^2) dx dt}{\int_0^T \int_0^L (u_\mu^2 + \phi_\mu^2) dx dt} \rightarrow 0, \quad \text{quando } \mu \rightarrow \infty.$$

Denotando por

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\mu &:= \frac{u_\mu}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (u_\mu^2 + \phi_\mu^2) dx dt}}, \\ \tilde{\phi}_\mu &:= \frac{\phi_\mu}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (u_\mu^2 + \phi_\mu^2) dx dt}} \end{aligned}$$

podemos verificar que

$$\frac{1}{\mu} > \int_0^T \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\tilde{u}_{\mu t}^2 + \tilde{\phi}_{\mu t}^2) dx dt \rightarrow 0, \quad \text{quando } \mu \rightarrow \infty$$

e também

$$\int_0^T \int_0^L (\tilde{u}_\mu^2 + \tilde{\phi}_\mu^2) dx dt = 1, \quad \text{para todo } \mu \in \mathbb{N}.$$

Sendo assim, podemos concluir que,

$$\begin{cases} \{\tilde{u}_{\mu t}\}, \{\tilde{\phi}_{\mu t}\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; L^2(\Lambda)), \\ \{\tilde{u}_\mu\}, \{\tilde{\phi}_\mu\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases} \quad (5.45)$$

Utilizando a desigualdade (5.42) para as soluções $\{\tilde{u}_\mu, \tilde{\phi}_\mu\}$ de (5.29), obtemos

$$\tilde{E}_\mu(t) = \tilde{E}_\mu(0) \leq C \int_0^T \int_0^L (\tilde{u}_\mu^2 + \tilde{\phi}_\mu^2) dx dt + C \int_0^T \int_\Lambda (\tilde{u}_{\mu t}^2 + \tilde{\phi}_{\mu t}^2) dx dt$$

e usando (5.45) e a desigualdade de Poincaré, podemos concluir o seguinte

$$\begin{cases} \{\tilde{u}_{\mu t}\}, \{\tilde{\phi}_{\mu t}\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \{\tilde{u}_\mu\}, \{\tilde{\phi}_\mu\} & \text{são limitadas em } L^2(0, T; H_0^1(0, L)). \end{cases} \quad (5.46)$$

Empregando o teorema Aubin-Lions, deduzimos que

$$\begin{cases} \tilde{u}_\mu \rightarrow \tilde{u} & \text{forte } L^2(0, T; L^2(0, L)), \\ \tilde{\phi}_\mu \rightarrow \tilde{\phi} & \text{forte } L^2(0, T; L^2(0, L)). \end{cases} \quad (5.47)$$

A forte convergência em (5.47) implica que

$$1 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L (\tilde{u}_\mu^2 + \tilde{v}_\mu^2) dx dt = \int_0^T \int_0^L (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) dx dt. \quad (5.48)$$

Por outro lado, a partir das convergências fracas para as derivadas em (5.46), temos que

$$\int_0^T \int_\Lambda (\tilde{u}_t^2 + \tilde{\phi}_t^2) dx dt \leq \liminf_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Lambda (\tilde{u}_{\mu t}^2 + \tilde{\phi}_{\mu t}^2) dx dt = 0,$$

o que implica que

$$\tilde{u}_t = \tilde{\phi}_t = 0, \quad \text{em } \Lambda \times (0, T).$$

Além disso, desde $\{\tilde{u}, \tilde{\phi}\}$ é uma solução de

$$\begin{cases} \rho \tilde{u}_{tt} - \mu \tilde{u}_{xx} - b \tilde{\phi}_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J \tilde{\phi}_{tt} - \delta \tilde{\phi}_{xx} + b \tilde{u}_x + \xi \tilde{\phi} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \tilde{u}_t = \tilde{\phi}_t = 0, & \text{em } \Lambda \times (0, T). \end{cases} \quad (5.49)$$

Tomando a derivada de (5.49) em relação à variável t em sentido distributivo e denotando $\varphi = \tilde{u}_t$, $\psi = \tilde{\phi}_t$ temos que $\{\varphi, \psi\}$ é solução de

$$\begin{cases} \rho \varphi_{tt} - \mu \varphi_{xx} - b \psi_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J \psi_{tt} - \delta \psi_{xx} + b \varphi_x + \xi \psi = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \varphi = \psi = 0, & \text{em } \Lambda \times (0, T) \end{cases} \quad (5.50)$$

e usando o teorema de unicidade de Holmgren's (ver [21]), deduzimos que $\varphi = \psi = 0$, ou equivalentemente,

$$\tilde{u}_t = \tilde{\phi}_t = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T). \quad (5.51)$$

Agora, voltando a (5.49), temos

$$\begin{cases} -\mu \tilde{u}_{xx} - b \tilde{\phi}_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ -\delta \tilde{\phi}_{xx} + b \tilde{u}_x + \xi \tilde{\phi} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T). \end{cases} \quad (5.52)$$

Multiplicando as primeira e segunda equações de (5.52) por $\tilde{u}$ e $\tilde{\phi}$ respectivamente, e integrando por partes em $(0, L) \times (0, T)$, obtemos

$$0 = \int_0^T \int_0^L (\mu \tilde{u}_x^2 + \delta \tilde{\phi}_x^2 + 2b \tilde{u}_x \tilde{\phi} + \xi \tilde{\phi}^2) dx dt. \quad (5.53)$$

Usando a desigualdade de Young e observando que $\mu \xi \geq b^2$, e em seguida, aplicando a desigualdade de Poincaré, concluímos que $\tilde{u} = \tilde{\phi} = 0$ em $(0, L) \times (0, T)$, contradizendo

(5.48). Portanto, concluirmos que (5.43) é verdadeira.

Combinando (5.43) e (5.42), deduzimos, para T suficientemente grande, que

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\Lambda} (u_t^2 + v_t^2) \, dx \, dt.$$

■

É importante ressaltar que essa constante positiva C não depende da solução de (5.29).

5.4 Estabilidade Assintótica

O principal objetivo desta seção está em determinar a estabilidade assintótica do sistema (5.4). Para isto, utilizaremos o método introduzido em Daloutli [15] que reduz a estabilização não linear estabelecida a um problema linear de observabilidade associado. Neste contexto, vamos utilizar o resultado de observabilidade obtido na seção anterior.

Primeiro, vamos considerar uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(s) = h_1(s) + h_2(s), \quad s \in \mathbb{R} \tag{5.54}$$

onde $h_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, ambos são contínuos, côncavos, estritamente crescentes e que satisfaçam

$$h_i(g_i(s)s) \geq s^2 + g_i(s)^2, \quad |s| \leq 1. \tag{5.55}$$

Note que h tem as mesmas propriedades das suas funções de composição. Com isto, podemos definir a função auxiliar r por

$$r(s) = h\left(\frac{s}{|\mathbf{Q}|}\right), \quad s \in \mathbb{R} \tag{5.56}$$

onde $\mathbf{Q} = (0, L) \times (0, T)$ e $|\mathbf{Q}| := \text{meas}(\mathbf{Q})$.

Desde que r é monótona crescente, a função $cI + r$ é invertível para qualquer constante $c \geq 0$, onde I é a função identidade. Desta forma, para constantes não negativas c e M definamos

$$p(s) = (cI + r)^{-1}(Ms), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{5.57}$$

Observe que p é uma função contínua, positiva e estritamente crescente. Também,

$p(0) = 0$. Finalmente, definimos

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (5.58)$$

Neste contexto, admitiremos utilizar a seguinte técnica devido a Lasiecka e Tataru (ver [28]).

Lema 5.4.1. *Sejam as funções p, q definidas como acima. Para qualquer sequência (s_n) de números positivos satisfazendo*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m,$$

temos que $s_n \leq S(m)$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$, onde $S(t)$ é uma solução da equação diferencial.

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}(t) + q(S(t)) = 0, & t > 0 \\ S(0) = s_0. \end{cases} \quad (5.59)$$

Além disso, se p satisfaz $p(s) > 0$ para $s > 0$ então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0.$$

Considerando as notações da seção anterior e as definições acima, agora estamos prontos para enunciar o principal resultado desta seção referente a estabilidade.

Teorema 5.4.1. *Assuma as hipóteses sobre as funções g_i e a_i dadas em 5.2.1. Então existe uma constante positiva $T_0 > 0$ tal que, para cada $K > 0$, se $\Psi = \{u, u_t, \phi, \phi_t\}$ é uma solução de problema (5.14) cuja energia inicial satisfaz $E(0) < K$ então*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0,$$

com $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, onde $S(t)$ é a solução da equação diferencial (5.59).

Antes de fazer a demonstração do teorema acima, demonstraremos um lema auxiliar.

Lema 5.4.2. *Assuma as hipóteses sobre as funções g_i e a_i dadas em 5.2.1. Então para $T > 0$ e $K > 0$ existe uma constante positiva $\tilde{C}$, tal que*

$$E(T) \leq \tilde{C} \left(\int_0^T \int_0^L [a_1(x)(u_t^2 + g_1^2(u_t)) + a_2(x)(\phi_t^2 + g_2^2(\phi_t))] dx dt \right), \quad (5.60)$$

para qualquer solução forte $\{u, u_t, \phi, \phi_t\}$ de (5.4) satisfazendo $E(0) \leq K$.

Prova. A fim de provar o lema 5.4.2 argumentamos por contradição. Vamos supor que (5.60) não é verdade e seja $\{u_k(0), u_{kt}(0), \phi_k(0), \phi_{kt}(0)\}$ uma sequência de dados iniciais em que o correspondente soluções $\{u_k, \phi_k\}$ de (5.4) com energia inicial $(E_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$, que se supõe ser uniformemente limitado em k , verifica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_k(0)}{\int_0^T \int_0^L [a_1(x)(u_{kt}^2 + g_1^2(u_{kt})) + a_2(x)(\phi_{kt}^2 + g_2^2(\phi_{kt}))] dx dt} \rightarrow \infty,$$

ou equivalentemente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \int_0^L [a_1(x)(u_{kt}^2 + g_1^2(u_{kt})) + a_2(x)(\phi_{kt}^2 + g_2^2(\phi_{kt}))] dx dt}{E_k(0)} \rightarrow 0. \quad (5.61)$$

Desde que $(E_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$ seja limitada, a ultima desigualdade implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L a_1(x)(u_{kt}^2 + g_1^2(u_{kt})) dx dt = 0, \quad (5.62)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^L a_2(x)(\phi_{kt}^2 + g_2^2(\phi_{kt})) dx dt = 0. \quad (5.63)$$

De (5.62), (5.63) e assumindo a hipótese sobre a_i , $i = 1, 2$ dada em 5.2.1, deduzimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_1} u_{kt}^2 dx dt = 0, \quad (5.64)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{I_2} \phi_{kt}^2 dx dt = 0. \quad (5.65)$$

Assim, uma vez que a família de energia $(E_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$, associada com u_k, ϕ_k , também é limitada de modo uniforme em $(0, T)$, temos as seguintes convergências

$$u_{kt} \rightarrow u_t \text{ fraco estrela } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.66)$$

$$\phi_{kt} \rightarrow \phi_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.67)$$

$$u_{kx} \rightarrow u_x \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.68)$$

$$\phi_{kx} \rightarrow \phi_x \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.69)$$

$$u_k \rightarrow u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.70)$$

$$\phi_k \rightarrow \phi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.71)$$

onde a convergência (5.70) vem de (5.68) e da desigualdade de Poincaré.

Devido à seção anterior empregando a desigualdade de Poincaré e o resultado de compacidade e uma vez que os dados iniciais são limitados, também podemos deduzir que

$$u_k \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.72)$$

$$\phi_k \rightarrow \phi \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \quad (5.73)$$

Neste ponto, vamos dividir nossa prova em dois casos:

Primeiro Caso: $u \neq 0$ ou $\phi \neq 0$.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \rho u_{ktt} - \mu u_{kxx} - b\phi_{kx} + a_1(x)g_1(u_{kt}) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J\phi_{ktt} - \delta\phi_{kxx} + bu_{kx} + \xi\phi_k + a_2(x)g_2(\phi_{kt}) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T). \end{cases} \quad (5.74)$$

Passando o limite em (5.74) e usando os limites (5.62)-(5.65), (5.72) e (5.73), obtemos

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + a_1(x)g_1(u_t) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + a_2(x)g_2(\phi_t) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ u_t = 0, & \text{em } I_1 \times (0, T), \\ \phi_t = 0, & \text{em } I_2 \times (0, T). \end{cases} \quad (5.75)$$

Tomando a derivada de (5.75) com respeito ao tempo em sentido distributivo, substituindo $\varphi = u_t$ e $\psi = \phi_t$, tendo em vista a hipótese sobre a_i , $i = 1, 2$ dada em 5.2.1, podemos concluir que $\{\varphi, \psi\}$ é solução de

$$\begin{cases} \rho\varphi_{tt} - \mu\varphi_{xx} - b\psi_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J\psi_{tt} - \delta\psi_{xx} + b\varphi_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \varphi = \psi = 0, & \text{em } \tilde{I} \times (0, T). \end{cases} \quad (5.76)$$

Então, utilizando o teorema de unicidade de Holmgreen (ver [21]) deduzimos que $\varphi = \psi = 0$ em $(0, L) \times (0, T)$ ou equivalentemente

$$u_t = \phi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T). \quad (5.77)$$

Agora, voltando ao (5.75) obtemos

$$\begin{cases} -\mu u_{xx} - b\phi_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ -\delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T). \end{cases} \quad (5.78)$$

Multiplicando a primeira e a segunda equações de (5.78) por u e ϕ , respectivamente, e integrando por partes em $(0, L) \times (0, T)$, temos

$$\int_0^T \int_0^L (\mu u_x^2 + \delta \phi_x^2 + 2b u_x \phi + \xi \phi^2) dx dt = 0.$$

Por hipótese, temos $\mu\xi - b^2 \geq 0$. Tome $\xi_1 \in (0, \xi]$ tal que $\mu\xi_1 - b^2 = 0$. Em seguida, temos

$$\int_0^T \int_0^L (\mu u_x^2 + \delta \phi_x^2 + 2b u_x \phi + \xi \phi^2) dx dt \geq \int_0^T \int_0^L (\delta \phi_x^2 + \left| \mu^{\frac{1}{2}} u_x - \xi_1^{\frac{1}{2}} \phi \right|^2 + (\xi - \xi_1) \phi^2) dx dt.$$

Portanto, usando a desigualdade de Poincaré concluímos que $u = \phi = 0$ em $(0, L) \times (0, T)$ que é uma contradição.

Segundo Caso: $u = 0$ e $v = 0$.

Consideremos

$$\nu_k := \sqrt{E_k(0)}, \quad \tilde{u}_k := \frac{u_k}{\nu_k} \text{ e } \tilde{\phi}_k := \frac{v_k}{\nu_k}.$$

Desde $\{\nu_k\}$ é limitada temos dos limites (5.62) e (5.63) que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L \left\{ a_1(x) \left(\tilde{u}_{kt}^2 + \frac{g_1^2(\nu_k \tilde{u}_{kt})}{\nu_k^2} \right) + a_2(x) \left(\tilde{\phi}_{kt}^2 + \frac{g_2^2(\nu_k \tilde{\phi}_{kt})}{\nu_k^2} \right) \right\} dx dt \\ &= \frac{1}{\nu_k^2} \int_0^T \int_0^L \left\{ a_1(x) (u_{kt}^2 + g_1^2(u_{kt})) + a_2(x) (\phi_{kt}^2 + g_2^2(\phi_{kt})) \right\} dx dt \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.79)$$

onde k vai para o infinito. Por outro lado, para cada K , define-se $\tilde{E}_k(t)$ a energia normalizada do problema

$$\tilde{E}_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho \tilde{u}_{kt}^2 + \mu \tilde{u}_{kx}^2 + J \tilde{\phi}_{kt}^2 + \delta \tilde{\phi}_{kx}^2 + 2b \tilde{u}_{kx} \tilde{\phi}_k + \xi \tilde{\phi}_k^2 \right) dx.$$

Então,

$$\tilde{E}_k(0) = \frac{E_k(0)}{\nu_k^2} = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esta limitação implica as seguintes convergências

$$\tilde{u}_{kt} \rightarrow \tilde{u}_t, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.80)$$

$$\tilde{\phi}_{kt} \rightarrow \tilde{\phi}_t, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.81)$$

$$\tilde{u}_{kx} \rightarrow \tilde{u}_x, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.82)$$

$$\tilde{\phi}_{kx} \rightarrow \tilde{\phi}_x, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.83)$$

$$\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u}, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.84)$$

$$\tilde{\phi}_k \rightarrow \tilde{\phi}, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.85)$$

onde as convergências (5.84) é obtida da (5.82) e da desigualdade de Poincaré . Usando o teorema de Aubin-Lions, deduzimos que

$$\tilde{u}_k \rightarrow \tilde{u} \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.86)$$

$$\tilde{\phi}_k \rightarrow \tilde{\phi} \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(0, L)). \quad (5.87)$$

Considerando-se as convergências acima e passando ao limite no sistema

$$\begin{cases} \rho \tilde{u}_{ktt} - \mu \tilde{u}_{kxx} - b \tilde{\phi}_{kx} + a_1(x) \frac{g_1(\nu_k \tilde{u}_{kt})}{\nu_k} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J \tilde{\phi}_{ktt} - \delta \tilde{\phi}_{kxx} + b \tilde{u}_{kx} \tilde{\phi}_k + \xi \tilde{\phi}_k + a_2(x) \frac{g_2(\nu_k \tilde{\phi}_{kt})}{\nu_k} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (5.88)$$

podemos concluir que $\{\tilde{u}, \tilde{\phi}\}$ é solução de

$$\begin{cases} \rho \tilde{u}_{tt} - \mu \tilde{u}_{xx} - b \tilde{\phi}_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J \tilde{\phi}_{tt} - \delta \tilde{\phi}_{xx} + b \tilde{u}_x \tilde{\phi} + \xi \tilde{\phi} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \tilde{u}_t = \tilde{\phi}_t = 0, & \text{em } \tilde{I} \times (0, T). \end{cases} \quad (5.89)$$

Analogamente ao **Primeiro Caso** deduzimos que

$$\tilde{u} = \tilde{\phi} = 0.$$

Por outro lado, consideremos

$$\tilde{v}_k = \tilde{u}_k - \tilde{\omega}_k \text{ e } \tilde{z}_k = \tilde{\phi}_k - \tilde{y}_k,$$

onde $\{\tilde{\omega}_k, \tilde{y}_k\}$ é uma solução do seguinte sistema homogêneo

$$\begin{cases} \rho \tilde{\omega}_{ktt} - \mu \tilde{\omega}_{kxx} - b \tilde{y}_k = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ J \tilde{y}_{ktt} - \delta \tilde{y}_{kxx} + b \tilde{\omega}_{kx} + \xi \tilde{y}_k = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \tilde{\omega}_k(0, t) = \tilde{\omega}_k(L, t) = \tilde{y}_k(0, t) = \tilde{y}_k(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ \tilde{\omega}_k(x, 0) = \tilde{u}_k(x, 0), \tilde{\omega}_{kt}(x, 0) = \tilde{u}_{kt}(x, 0), & \text{em } (0, L), \\ \tilde{y}_k(x, 0) = \tilde{\phi}_k(x, 0), \tilde{y}_{kt}(x, 0) = \tilde{\phi}_{kt}(x, 0), & \text{em } (0, L) \end{cases} \quad (5.90)$$

com energia $E(t)$. Neste caso, é possível verificar que $\{\tilde{v}_k, \tilde{z}_k\}$ é uma solução de seguinte sistema não homogêneo

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \tilde{v}_{ktt} - \mu \tilde{v}_{kxx} - b \tilde{z}_k = -a_1(x) \frac{g_1(\nu_k \tilde{u}_{kt})}{\nu_k}, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ J \tilde{z}_{ktt} - \delta \tilde{z}_{kxx} + b \tilde{v}_{kx} + \xi \tilde{z}_k = -a_2(x) \frac{g_2(\nu_k \tilde{\phi}_{kt})}{\nu_k}, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \\ \tilde{v}_k(0, t) = \tilde{v}_k(L, t) = \tilde{z}_k(0, t) = \tilde{z}_k(L, t) = 0, \text{ em } (0, T), \\ \tilde{v}_k(x, 0) = \tilde{v}_{kt}(x, 0) = 0, \text{ em } (0, L), \\ \tilde{z}_k(x, 0) = \tilde{z}_{kt}(x, 0) = 0, \text{ em } (0, L). \end{array} \right. \quad (5.91)$$

Notando que a energia associada à solução $\{\tilde{v}_k, \tilde{z}_k\}$ é dada por

$$\mathbb{E}_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho \tilde{v}_{kt}^2 + \mu \tilde{v}_{kx}^2 + J \tilde{z}_{kt}^2 + \delta \tilde{z}_{kx}^2 + 2b \tilde{v}_{kx} \tilde{z}_k + \tilde{z}_k^2) dx,$$

temos

$$2\mathbb{E}_k(t) \geq \int_0^L (\tilde{v}_{kt}^2 + \tilde{z}_{kt}^2) dx. \quad (5.92)$$

A partir da definição $\tilde{v}_k, \tilde{z}_k$ e de (5.92) obtemos

$$2\mathbb{E}_k(t) \geq \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 dx + \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 dx + \int_{\tilde{I}} \tilde{u}_{kt}^2 dx + \int_{\tilde{I}} \tilde{\phi}_{kt}^2 dx + B_1, \quad (5.93)$$

para todo $t \in [0, T]$, onde

$$B_1 := -2 \int_{\tilde{I}} (\tilde{u}_{kt} \tilde{\omega}_{kt}) dx - 2 \int_{\tilde{I}} (\tilde{\phi}_{kt} \tilde{y}_{kt}) dx.$$

Estimativa para B_1 :

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$B_1 \leq \left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{u}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{\phi}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uma vez que a energia associada à $\tilde{\omega}_k, \tilde{y}_k$ combina com a energia inicial de $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$, solução de (5.89), ou seja

$$\mathcal{E}(t) = \tilde{E}(0) = 1, \quad t \in [0, T], \quad (5.94)$$

obtemos

$$\left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \{2\mathcal{E}(0)\}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}},$$

assim como

$$\left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \{2\mathcal{E}(0)\}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

De (5.93) e da desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}_k(t) &\geq \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 dx + \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 dx \\ &- 2^{\frac{3}{2}} \left[\left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{u}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{\phi}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 dx + \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 dx &\leq 2 \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_k(t) \\ &+ 2^{\frac{3}{2}} \left[\left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{u}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\tilde{I}} \tilde{\phi}_{kt}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Integrando de ambos os lados (5.96) em $(\varepsilon, T - \varepsilon)$ e usando a desigualdade de Young, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 dx dt + \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 dx dt &\leq 2(T - 2\varepsilon) \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_k(t) \\ &+ 2^{\frac{3}{2}}(T - 2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left[\left\{ \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{u}_{kt}^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{\phi}_{kt}^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Usando (5.79) observamos que cada integral do segundo membro da desigualdade acima, converge para zero quando k vai pro infinito. Por outro lado, a energia funcional $\mathbb{E}_k$ também satisfaz

$$\mathbb{E}_k(t) = - \int_0^t \int_0^L \left\{ a_1(x) \frac{g_1(\nu_k \tilde{u}_{kt})}{\nu_k} \tilde{v}_k + a_2(x) \frac{g_2(\nu_k \tilde{\phi}_{kt})}{\nu_k} \tilde{z}_{kt} \right\} dx dt,$$

para $t \in [0, T]$, de onde podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}_k(t) &\leq C_1 \int_0^T \left(\int_0^L a_1(x) (x) \frac{g_1^2(\nu_k \tilde{u}_{kt})}{\nu_k^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &+ C_1 \int_0^T \left(\int_0^L a_2(x) \frac{g_2^2(\nu_k \tilde{\phi}_{kt})}{\nu_k^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$ é uma constante, que vem de limitação de $\tilde{v}_k$ e $\tilde{z}_k$ em $L^\infty(0, T; L^2(0, L))$. Mais uma vez, por (5.79) cada termo no lado direito dessa desigualdade converge para zero quando k vai para o infinito.

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 dx dt + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 dx dt = 0. \quad (5.98)$$

Usando (5.94) e o resultado de observabilidade provado na seção anterior, temos

$$1 = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) \leq C_2 \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{\omega}_{kt}^2 dx dt + \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{I}} \tilde{y}_{kt}^2 dx dt, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

onde $C_2 = C_2(\varepsilon, \tilde{C})$. Passando para o limite quando vai para o infinito na desigualdade anterior e tendo em mente (5.98) concluirmos a contradição. A prova do lema agora está completa. ■

Agora, faremos a demonstração do teorema principal desta seção.

Prova. [Prova do Teorema 5.4.1]] Seja $\Phi = \{u, u_t, \phi, \phi_t\}$ solução forte de (5.14) e definamos os seguintes conjuntos

$$\Sigma_u = \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T); |u_t(x, t)| > 1\} \text{ e } \Gamma_u = (0, L) \times (0, T) \setminus \Sigma_u,$$

$$\Sigma_\phi = \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T); |\phi_t(x, t)| > 1\} \text{ e } \Gamma_\phi = (0, L) \times (0, T) \setminus \Sigma_\phi.$$

Nossa estratégia é estimar as integrais no lado direito de (5.60). Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L a_1(x) (u_t^2 + g_1^2(u_t)) dx dt &= \int_{\Sigma_u} a_1(x) (u_t^2 + g_1^2(u_t)) dx dt \\ &+ \int_{\Gamma_u} a_1(x) (u_t^2 + g_1^2(u_t)) dx dt. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Da hipótese sobre a g_i , $i = 1, 2$ dada em (5.2.1) temos

$$\int_{\Sigma_u} a_1(x)(u_t^2 + g_1^2(u_t)) \, dx \, dt \leq (m_1^{-1} + M_1) \int_{\Sigma_u} a_1(x)g_1(u_t)u_t \, dx \, dt. \quad (5.100)$$

Agora, usando (5.55) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} a_1(x)(u_t^2 + g_1^2(u_t)) \, dx \, dt &\leq \int_{\Gamma_u} a_1(x)h_1\left(g_1(u_t)u_t\right) \, dx \, dt \\ &\leq \int_{\Gamma_u} (1 + \|a_1\|_\infty)h_1\left(\frac{a_1}{1 + \|a_1\|_\infty}g_1(u_t)u_t\right) \, dx \, dt \\ &\leq (1 + \|a_1\|_\infty) \int_{\Gamma_u} h_1\left(a_1(x)g_1(u_t)u_t\right) \, dx \, dt \\ &\leq (1 + \|a_1\|_\infty)|\mathbf{Q}|h_1\left(\frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_0^T \int_0^L a_1(x)g_1(u_t)u_t \, dx \, dt\right), \end{aligned} \quad (5.101)$$

onde a última desigualdade é obtida usando a desigualdade de Jensen's. Portanto, segue de (5.100) e (5.101),

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L a_1(x)(u_t^2 + g_1^2(u_t)) \, dx \, dt &\leq (m_1^{-1} + M_1) \int_0^T \int_0^L a_1(x)g_1(u_t)u_t \, dx \, dt \\ &\quad + (1 + \|a_1\|_\infty)|\mathbf{Q}|h_1\left(\frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_0^T \int_0^L a_1(x)g_1(u_t)u_t \, dx \, dt\right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

Analogamente, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L a_2(x)(\phi_t^2 + g_2^2(\phi_t)) \, dx \, dt &\leq (m_2^{-1} + M_2) \int_0^T \int_0^L a_2(x)g_2(\phi_t)\phi_t \, dx \, dt \\ &\quad + (1 + \|a_2\|_\infty)|\mathbf{Q}|h_2\left(\frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_0^T \int_0^L a_2(x)g_2(\phi_t)\phi_t \, dx \, dt\right). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Uma vez que h_i é uma função crescente, e combinando (5.60), (5.102) e (5.103) temos

$$\begin{aligned} E(T) &\leq \tilde{C} \sum_{i=1}^2 (m_i^{-1} + M_i) \int_0^T \int_0^L (a_1(x)g_1(u_t)u_t + a_2(x)g_2(\phi_t)\phi_t) \, dx \, dt \\ &\quad + \tilde{C}|\mathbf{Q}| \sum_{i=1}^2 (1 + \|a_i\|_\infty)r \int_0^T \int_0^L (a_1(x)g_1(u_t)u_t + a_2(x)g_2(\phi_t)\phi_t) \, dx \, dt \end{aligned}$$

onde r foi definida em (5.56). Sendo assim,

$$M = \frac{1}{\tilde{C}|\mathbf{Q}| \sum_{i=1}^2 (1 + \|a_i\|_\infty)} \quad \text{e} \quad c = \frac{\sum_{i=1}^2 (m_i^{-1} + M_i)}{|\mathbf{Q}| \sum_{i=1}^2 (1 + \|a_i\|_\infty)}$$

e usando (5.8) concluimos que

$$ME(T) \leq c \int_0^T \int_0^L (a_1(x)g_1(u_t)u_t + a_2(x)g_2(\phi_t)\phi_t) dx dt \\ + r \left(\int_0^T \int_0^L (a_1(x)g_1(u_t)u_t + a_2(x)g_2(\phi_t)\phi_t) dx dt \right) = (cI + r)(E(0) - E(T)).$$

Usando a notação do início desta seção, a desigualdade anterior pode ser reescrita como

$$p(E(T)) \leq E(0) - E(T). \quad (5.104)$$

Para concluir a prova, substituímos T por $(m+1)T$ (respectivamente, 0 por mT) em (5.104), $m \in \mathbb{N}$, com o propósito de obter

$$E((m+1)T) + p(E((m+1)T)) \leq E(mT), \text{ para } m = 0, 1, \dots.$$

Finalmente, usando o Lema 5.4.1 com $s_m = E(mT)$ concluimos que

$$E(mT) \leq S(m), m = 0, 1, \dots.$$

Por fim, de (5.8) temos para $t = mT + \tau$, com $\tau \in [0, T]$, que

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) \leq S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \text{ para } t > T.$$

onde foi utilizado o fato de $S(\cdot)$ de (5.59) ser dissipativo. E isto conclui a prova do teorema. ■

Capítulo 6

Considerações Finais

Iniciamos nossas pesquisas estimulados pelos trabalhos realizados na área de análise matemática, em especial, estabilização exponencial para modelos dinâmicos de Timoshenko, envolvendo estruturas flexíveis de vigas de Timoshenko associada ao duplo nanotubo de carbono. Nos sentimos fortemente motivados, principalmente pela falta de resultados contínuos e numéricos que esclarecesse alguns questionamentos.

Ao analisarmos alguns trabalhos estabelecidos na literatura em se tratando de vigas planas de Timoshenko, sabemos que o principal resultado diz respeito a estabilidade exponencial que esta condicionada a uma relação entre os coeficientes do sistema. Considerando um único mecanismo dissipativo atuando na equação de rotação e utilizando técnicas da teoria de semigrupo de operadores lineares, surge uma relação entre as velocidades de propagação de ondas do sistema, ao qual fornece uma condição necessária e suficiente para se obter o decaimento exponencial, caso haja igualdade entre essas velocidades.

Sendo assim, considerando o modelo de vigas de Timoshenko associado ao nanotubo de parede dupla, surgem nossos questionamentos:

Qual a quantidade mínima de mecanismos de dissipação que o sistema dissipativo de vigas de Timoshenko associado ao duplo nanotubo pode ter, para se obter o decaimento exponencial?

Existe uma relação entre os coeficientes do modelo que nos forneça uma

condição necessária e suficiente para obtermos taxas de decaimento exponencial?

Com o propósito de responder a estas questões decidimos investigar analiticamente se, de fato, há uma relação entre os coeficientes do modelo de vigas de Timoshenko associada ao duplo nanotubo que forneça condições para se obter a estabilidade exponencial. E a posteriori reproduzimos numericamente as propriedades realizadas no contínuo, com o objetivo de comprovar os resultados.

Mantendo a ordem cronológica da pesquisa, com respeito a primeira parte (contínuo), analisamos as questões concernentes a falta de estabilidade exponencial, a estabilidade assintótica e o decaimento polinomial com taxa ótima do modelo duplo nanotubo- Timoshenko para os casos em que termos de dissipação do tipo atrito atuam nos declives do tubo e no deslocamento lateral do tubo externo. Nos certificamos que existe um número dado por $\chi := \frac{\kappa_1 \rho_2 - b_1 \rho_1}{\kappa_1^2 - \mathcal{C}(\rho_2 \kappa_1 + b_1 \rho_1)}$. Se $\chi = 0$, é satisfeita as seguintes relações $\frac{\rho_2}{b_1} = \frac{\rho_1}{\kappa_1}$ e $\kappa_1 \neq 0$ mostramos que o decaimento exponencial é sensível a igualdade entre as velocidades do sistema. Caso contrário, se as velocidades de propagação de ondas são diferentes e $\mathcal{C}\left(\frac{\rho_2}{b_1} - \frac{\rho_1}{\kappa_1}\right) \neq \frac{\kappa_1}{b_1}$, a situação nos permitiu analisar o decaimento polinomial.

No segundo momento de nossas pesquisas, efetuamos as comprovações numéricas para o modelo dissipativo de vigas de Timoshenko associado ao duplo nanotubo com base no método numérico espaço-tempo de diferenças finitas e livre de termos de sobre-estimação. As simulações numéricas que realizamos estão coerentes com a parte analítica desenvolvida, ou seja, conseguimos comprovar numericamente a estabilidade exponencial bem como a falta de decaimento exponencial. Além disso, comprovamos que se introduzirmos dois termos de dissipação atuando somente nas equações relacionada aos declives dos tubos, a estabilidade exponencial também está condicionada à igualdade das velocidades.

E por fim, trazemos novas contribuições no que diz respeito ao modelo elástico poroso, associando ao sistema dissipações localizadas não lineares com o intuito de obter estimativas de taxa de decaimento da energia. Nossa contribuição foi de grande valia tanto à nível de resultado quanto ao método utilizado. Pois, de acordo com o resultado esta é a

primeira vez que os termos dissipativos localizados (em ambas equações) agem em uma pequena região arbitrária do intervalo $(0, L)$. E a nível técnico, a dificuldade surge ao encontrar a desigualdade de observabilidade para o sistema conservador.

Referências Bibliográficas

- [1] Almeida Júnior,D.S.: *Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse*. PhDthesis, Laboratório Nacional de Computação Científica,Petrópolis,RJ,2009.
- [2] Almeida Júnior,D.S., Santos, M.L. and Muñoz Rivera,J.E.: *Stability to weakly dissipative Timoshenko systems*.Mathematical Methods in the Applied Sciences,36:1965-1976,2013.
- [3] Ammar-Khodja,F,Benabdallah,A.,Muñoz Rivera,J.E. and Racke,R.:*Energy decay for Timoshenko systems of memory type*.Journal of Differential Equation,194(1):82-115,2003.
- [4] Barbu,V. *Analysis and Control of Nonlinear Infinite-Dimensional Systems, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1993*.
- [5] Bardos,C., Lebeau,G. e Rauch,J.: *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control optim.* 30(5), 1024–1065, (1992).
- [6] Borichev,A.,Tomilov,Y.:*Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups*.Math.Ann.347(2),455-478,2000.
- [7] Brezis,H.:*Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*.Springer-Vetag, Masson,1992.

-
- [8] Brezis,H.: *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co./ American Elsevier Publishing Co., Inc., Amsterdam, London / New York, Masson, 1973.
- [9] Campelo,A.D.S.: *Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Fracamente Dissipativos de Mindlin-Timoshenko*.UFPA, Belém-Pará,2014.
- [10] Cavalcanti,M.M., Domingos Cavalcanti V.N. e Nascimento F.A.F.: *Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally viscoelastic distributed dissipation*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141 (2013), 3183–3193.
- [11] Chen,G., Fulling,S. A., Narcowich,F. J. e Sun,S.: *Exponential decay of energy of evolution equations with locally distributed damping*, *SIAM J. Appl. Math.* 51(1), 267–301 (1991).
- [12] Claeysen,J.,ET AL.: *Eigenanalysis of multi-walled carbon nanotubes by using the impulse response*.Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics,John Wiley,2008.
- [13] Claeysen,J.R.,Copetti,R.D. and Tsukazan,T.: *Free vibrations in Euler-Bernoulli multi-span with interaction forces in carbon nanotubes continuum modeling*.Proceedings de 6th Brazilian Conference on Dynamics, control and their applications,2007.
- [14] Costa,J.N.S.: *O Modelo de Timoshenko em vigas elásticas, Estruturas Offshore e Nanotubos de Carbono através da Resposta Fundamental de Valor Inicial*.UFRGS, Porto Alegre,2006.
- [15] Daloutli,M., Lasiecka,I., Toundykov,D.: *Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions*. *Discret. Contin. Dyn. Syst.* **2**(1), 67–94 (2009).

-
- [16] Dehman,B., Lebeau,G. e E. Zuazua. *Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation*, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 36 (2003), 525–551.
- [17] Ginsberg,J.:*Mechanical and Structural Vibrations*, John Wiley e Sons,2002.
- [18] Han,S.M.,Beranoya,H.,Wei,T.:*Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*, *Journal of Sound and Vibration* 225(5), pp.935-988,1999.
- [19] Han,S.M. and Beranoya,H.:*Nonlinear and Stochastic Dynamics of Compliant Offshore Structures*, vol.1.Kluwer Academic Publishers, The Netherlands,2002.
- [20] Ho,L.F. *Exact controllability of the one dimensional wave equation with locally distributed control*, *SIAM J. Control Optim.* 28(3), 733–748 (1990).
- [21] Hörmander,L. *Linear Partial Differential Operators. Die Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 116.*, Academic PressInc., Publishers, New York, 1963.
- [22] Hornayak,G.L.,Dutta,J.,Tibbals,H. and Rao,A.K.:*Introduction to Nanoscience*, CRC,Boca Raton,2008.
- [23] Huang,F.L.:*Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces*. *Annals of Differential Equations*,1:43-56,1985.
- [24] HYPERCHEM(TM):*Hypercube*, Inc., 1115 NW 4th Street, Gainesville, Florida 32601; www.hyper.com.
- [25] Iijima,S.:*Helical microtubes of graphitic carbon nature*, Vol.354,pp.1-8,1991.
- [26] Inman,D.J.: *Engineering Vibration*. Prentice Hall, New Jersey,1994.
- [27] Kim,J.U. and Renardy,Y.:*Boundary control of the Timoshenko beam*.*SIAM Journal on Control and Optimization*,25(6):1417-1429,1987.

-
- [28] Lasiecka, I. and Tataru, D.: *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, *Differential and Integral Equations*, 6 (1993), 507-533.
- [29] Lau, K.T.: *Interfacial bonding characteristics of nanotube/polymer composites*. Chemical Physics Letters 370 399 405, 2003.
- [30] Liu, Z. and Zheng, S.: *Semigroups associated with dissipative systems*. In CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman e Hall, 1999.
- [31] Martinez, P. *Decay of solutions of the wave equation with a local highly degenerate dissipation*, *Asymptotic Anal.* 19(1), 1-17 (1999).
- [32] Meirovitch, L.: *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [33] Nakao, M. *Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation*, *Math. Ann.* 305(3), 403-417 (1996).
- [34] Quintanilla, R. e Magaña, A.: *On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials*. *International Journal of Solids and Structures* 43 (2006), 3414-3427.
- [35] Quintanilla, R. *Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity*. *Applied Mathematics Letters* 16 (2003), 487-491.
- [36] Muñoz Rivera, J.E.: *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Academia de Contas, Rio de Janeiro, 2008.
- [37] Muñoz Rivera, J.E. and Fatori, L.H.: *Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system*. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 75(6):881-904, 2010.
- [38] Muñoz Rivera, J.E. and Racke, R.: *Global stability for damped Timoshenko systems*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, B9:1625-1639, 2003.

- [39] Muñoz Rivera, J.E. and Fernández Sare, H.D.: *Stability of Timoshenko systems with past history*. Journal Math. Anal. Appl. 339(1), 482-502, 2008.
- [40] Muñoz Rivera, J. E. e Quintanilla, R.: *On the time polynomial decay in elastic solids with voids*. J. Math. Anal. Appl. 338 (2008), 1296–1309.
- [41] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [42] Prüss, J.: *On the spectrum of C_0 -semigroups*. Transactions of the American Mathematical Society, 284:847-857, 1984.
- [43] Rao, S.: *Mechanical Vibrations*. Addison-Wesley. Publishing Company, New York, 1990.
- [44] Santos, M.L., Almeida Junior, D.S. and Muñoz Rivera, J.E.: *The Stability number of the Timoshenko system with second sound*. J. Differential Equations, 253:2715-2733, 2012.
- [45] Santos, M.L.: *Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary*. Abstract and Applied Analysis, 7(10):531-546, 2002.
- [46] Santos, M.L., Almeida Júnior, D.S., Rodrigues, J.H. e Flávio A. Falcão Nascimento. *DECAY RATES FOR TIMOSHENKO SYSTEM WITH NONLINEAR ARBITRARY LOCALIZED DAMPING*, Differential and Integral Equations, Volume 27, Numbers 1-2 (2014) , 1–26.
- [47] Silva, C.M.: *O Modelo de Timoshenko em Nanotubos de Carbono Duplos e o Efeito de Van der Waals*. UFRGS. Porto Alegre, 2009.

-
- [48] Smith,G.D.:*Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*.1985.
- [49] Soufyane,A.:*Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. Compters Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I-Mathematics,328(8):731-734,1999.
- [50] A. Soufyane, *Energy decay for porous-thermo-elasticity systems of memory type*. *Appl. Anal.* 87 (2008) 451–464.
- [51] A. Soufyane, M. Afilal, M. Chacha, *General decay of solutions for a linear one-dimensional porous-thermoelasticity system with a boundary control of memory type*. *Nonlinear Anal.* 72 (2010) 3903-3910.
- [52] A. Soufyane, M. Afilal, M. Chacha, *Boundary stabilization of memory type for the porous-thermo-elasticity system*, *Abstr. Appl. Anal.* 2009 (2009), article number: 280790.
- [53] Strauss,W. e Vazquez,L.:*Numerical Solution of a Nonlinear Klein-Gordon Equation*. Journal of Computational Physics, 28(2):271-278,1978.
- [54] Timoshenko,S.P.:*On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine,41:744-746,1921.
- [55] Timoshenko,S.P.:*On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*. Philosophical Magazine 43,125-131,1922.
- [56] Timoshenko,S.P.:*History of Strength of Materials*. Dover Publications, New York, 1953.
- [57] Xavier Pamplona,P., Muñoz Rivera, J. E. e Quintanilla,R.: *Stabilization in elastic solids with voids*.

- [58] Wang,Q.,Varadan,V.K.:*Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics*. Smart Mater. Struct.,15,pp. 659-666,2006.
- [59] Wang,Q.,Zhou,G.Y.,Lin,K.C.:*Scale effect on wave propagation of double-walled carbon nanotubes*. Int. Journal of Solids and Structures, Vol.43,pp. 6071-6084,2006.
- [60] Wang,Q.:*Effect of the Van der Waals interaction on analysis of double-walled carbon nanotubes*. The 2nd International.
- [61] Wang,Q. and Varadan,V.K.:*Stability analysis of carbon nanotubes via conyinium models*. Smart Materials and Structures 14, 1-2, 281286, 2005.
- [62] Yoon,J.,Ru,C.Q. and Miuduchowski,A.:*Noncoaxial resonance of an isolated multiwalled carbon nanotube*. Physical Review B, Vol.66, 233-402, 2002.
- [63] Yoon,J. and Miuduchowski,A.:*Terahertz Vibration of Short Carbon Nanotubes Modelled as Timoshenko Beams*. Journal of Applied Mechanics, Vol.72, 10-17, 2005.
- [64] Yoon,J.,Ru,C.Q. and Miuduchowski,A.:*Vibration of an embedded multiwall carbon nanotube*. Composites Science and Tecnology, Vol.63,pp. 1533-1542, 2003.
- [65] Zuazua,E.: *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, *Commun. Partial Differ. Equations* 15(2), 205–235 (1990).
- [66] Zuazua,E.: *Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains*, *J. Math. Pures Appl.* 70(4), 513–529 (1991).