UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA
EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

Tiago Leandro Coelho Coelho

O Método de Minimização Esférica e Aplicações

BELÉM - PA

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA
EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

Tiago Leandro Coelho Coelho

O Método de Minimização Esférica e Aplicações

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

BELÉM - PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C672m Coelho, Tiago Leandro Coelho.
O Método de Minimização Esférica e Aplicações / Tiago Leandro Coelho Coelho. — 2022.
ix, 65 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2022.

1. Método de minimização esférica. 2. Teorema do passo da montanha. 3. Equações elípticas não lineares. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Tiago Leandro Coelho Coelho

O Método de Minimização Esférica e Aplicações

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 24/02/2022.

Resultado: Aprovado

Banca Examinadora

João Rodrigues Dos Santos Junior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior - PPGME/PDM/UFPA - Orientador

Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Denilson da Silva Pereira

Prof. Dr. Denilson Pereira da Silva - UFCG

FCorrea

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa - UFCG

RGNascimento

Profa. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento - PPGME/PDM/UFPA

Dedicatória

À minha esposa, Valeska Coelho;

Aos meus pais, Djacir e Márcia;

À minha irmã, Tainá Coelho;

Aos meus irmãos e irmãs em Cristo.

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo, ao meu Senhor Jesus Cristo, o Deus que se fez Homem e morreu em meu lugar. É Ele quem me faz ter mais desejo pelo conhecimento e pela ciência e me motiva a continuar aprendendo mais deste universo divinamente estruturado. Quando eu estava perdido, em densas trevas, morto em meus delitos e pecados, Ele me salvou, transformou meu coração e me deu vida, vida em abundância. Hoje eu reconheço que somente em Jesus há salvação, paz e esperança para a alma. Portanto, ao Deus único e verdadeiro, soberano sobre tudo e sobre todos, ofereço honra e glória, agora e para sempre.

Agradeço à minha esposa, Valeska Santos Coelho, que me acompanhou desde o início da faculdade e esteve comigo em todas as circunstâncias. Ela é a mulher da minha vida, a amada de minha alma e a minha eterna rainha. Tenho desfrutado de um casamento maravilhoso ao lado dessa incrível mulher. Ela é o meu espelho e o meu exemplo de uma pessoa virtuosa. Sempre alegre e extrovertida, ela consegue me arrancar sorrisos em todos os momentos. Sei que esta conquista é nossa, pois cada página deste trabalho tem o perfume da mulher que é a minha inspiração. A ela dou meu eterno amor.

Agradeço ao meu pai, Djacir Coelho, por toda a dedidação e pelos ensinamentos preciosos. Ele tem se tornado cada vez mais um cristão piedoso e um sacerdote para toda a família e tem sido motivo de muito orgulho para o meu coração. Agradeço à minha mãe, Márcia Coelho, por todo o amor e cuidado e por ser uma mãe excepcional e guerreira, que nunca desistiu da família. Agradeço à minha irmã, Tainá Coelho, por todo o incentivo, por acreditar em mim e me proporcionar tantas alegrias.

Agradeço ao meu orientador, João Rodrigues, por compartilhar comigo não somente o conhecimento que foi indispensável para realizar este trabalho, mas também o amor pela matemática. Durante esses 4 anos, tive o privilégio de aprender com um grande e exímio matemático e um professor extraordinário e reconheço que levarei todos os ensinamentos para a minha vida profissional.

Agradeço à professora Cristina Vaz, que esteve comigo desde a graduação e acompanhou todo o meu progresso acadêmico. Com muita paciência e carinho, me ensinou a estudar matemática, me falou sobre a beleza dos números e abriu a minha mente para ser um questionador. Agradeço ao professor Claudianor Alves, que cooperou grandemente com este trabalho, dando sugestões valiosas e nos mostrando que este é apenas o início de uma próspera caminhada.

Agradeço ainda a todos os meus irmãos e irmãs em Cristo. Em especial, aos meus sogros, Verimar e Raquel, e à minha cunhada, Vitória, por todo o apoio e incentivo que me deram. Agradeço ao pastor Ciro pelos conselhos de suma importância e aos irmãos da Igreja Presbiteriana do Una pelas orações. Por fim, agradeço também aos jovens da União de Mocidade Presbiteriana pelos momentos tão divertidos e edificantes.

Epígrafe

Ainda que a minha carne e o meu coração desfaleçam,

Deus é a fortaleza do meu coração

e a minha herança para sempre.

Salmo 73, versículo 26.

Resumo

Neste trabalho, estabeleceremos um método que nos permite encontrar pontos críticos de funcionais diferenciáveis que pertencem a uma classe adequada. A ideia central do que está sendo proposto nesta tese consiste em associar pontos críticos de uma função real de variável real com pontos críticos de um funcional. Como consequência, somos capazes de resolver alguns problemas de equações diferenciais parciais, cujo funcional energia associado pertence à referida classe.

Em um primeiro momento, com o objetivo de evidenciar vantagens e desvantagens do método que estabelecemos, resolveremos alguns problemas clássicos, comparando os resultados do nosso método com métodos que são comumente utilizados para solucionar esses problemas. Faremos isso no Capítulo 1.

Posteriormente, também utilizaremos esse método para obter dois teoremas de existência, sendo um deles uma versão de um teorema de minimização local e o outro uma versão do Teorema do Passo da Montanha adequada para problemas que não exigem a condição de crescimento de Ambrosetti e Rabinowitz. Esses resultados serão usados para complementar o trabalho de Mawhin, Ward e Willem (ver [21]) no Capítulo 2, o trabalho de Miyagaki e Souto (ver [22]) no Capítulo 3 e o trabalho de Azzollini e Pomponio (ver [8]) no Capítulo 4.

Palavras-chave: Método de minimização esférica, teorema do passo da montanha, equações elípticas não lineares.

Abstract

In this work, we will establish a method that allows us to find critical points of differentiable functionals that belong to a suitable class. The central idea of what is being proposed in this thesis is to associate critical points of a real function of a real variable with critical points of a functional. As a consequence, we are able to solve some problems of partial differential equations, whose associated energy functional belongs to that class.

At first, with the objective of highlighting the advantages and disadvantages of the method we have established, we will solve some classic problems, comparing the results of our method with methods that are commonly used to solve these problems. We will do this in Chapter 1.

We will also use this method to obtain two existence theorems, one being a version of a local minimization theorem and the other a version of the Mountain Pass Theorem suitable for problems that do not require the growth condition of Ambrosetti and Rabinowitz. These results will be used to complement the work of Mawhin, Ward and Willem (see [21]) in Chapter 2, the work of Miyagaki and Souto (see [22]) in Chapter 3 and the work of Azzollini and Pomponio (see [8]) in Chapter 4.

Keywords: Spherical minimization method, mountain pass theorem, nonlinear elliptic equations.

Notação e Terminologia

Neste trabalho, faremos uso das seguintes notações e terminologias:

- S_r será uma esfera de centro 0 e raio r;
- B_r será uma bola fechada de centro 0 e raio r;
- Ω será um domínio limitado;
- $\partial\Omega$ será uma fronteira suave de Ω;
- V_λ será o autoespaço associado ao autovalor λ;
- $|\cdot|_p$ será a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$ ou $L^p(\mathbb{R}^N)$;
- $\|\cdot\|$ será a norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estabeleceremos um método que nos permite encontrar pontos críticos de funcionais diferenciáveis que pertencem a uma classe adequada. Este método, que chamaremos de Método de Minimização Esférica, foi desenvolvido porque, além de oferecer vantagens na forma como se resolve alguns problemas variacionais, também garante avanços significativos em trabalhos de grande relevância. Por exemplo, usando o método, obtemos uma versão do Teorema do Passo da Montanha adequada para problemas que não exigem a condição de crescimento de Ambrosetti e Rabinowitz e também conseguimos resolver problemas do tipo Berestycki-Lions.

Dado um problema elíptico variacional, escrevemos o funcional energia $J : E \to \mathbb{R}$ na forma

$$J = \Psi - \Phi,$$

onde E é um espaço de Banach reflexivo e $\Psi, \Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$. Dizemos que J é de classe $(\mathcal{J})$ quando Φ e Ψ satisfazem

(Φ_1) Φ e $u \mapsto \Phi'(u)u$ são fracamente semicontínuos superiormente;

(Φ_2) Se $\Phi'(u) = 0$, então $\Phi(u) = 0$;

(Φ_3) Existe uma sequência $\{u_n\} \subset E$ tal que $u_n \to 0$ e

$$\Phi(u_n) > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e

(Ψ_1) Ψ é radialmente simétrico;

(Ψ_2) Fixado $r \geq 0$, $\Psi'(u)u = r^p$ para todo $u \in S_r$ e para algum $p \geq 1$.

O método desenvolvido neste trabalho nos permite então relacionar um funcional J de classe $(\mathcal{J})$ a uma função real $\zeta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, a qual chamaremos de função energia, definida por

$$\zeta(r) = \Psi|_{S_r} - \max_{\|u\|=r} \Phi(u).$$

A segunda parcela de ζ está bem definida porque, devido às hipóteses de Φ, para cada $r > 0$, existe uma função u_r que atinge o máximo de Φ na esfera S_r.

Uma vantagem importante desse método é que ele nos mostra que a existência de pontos críticos para ζ implica a existência de pontos críticos para o funcional J. Ou seja, dependendo do problema, é possível reduzir o esforço de buscar pontos críticos em um espaço de dimensão infinita à tarefa mais simples de encontrar pontos críticos de uma função real de variável real a partir das ferramentas básicas do Cálculo I.

Por exemplo, no Capítulo 1, resolvemos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Considerando

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \int_\Omega f(x) u \, dx,$$

segue que

$$\zeta(r) = \frac{1}{2} r^2 - r \max_{\|u\|=1} \int_\Omega f(x) u \, dx.$$

Neste caso, obtemos um simples polinômio do segundo grau, cujo ponto de mínimo r_* é dado por

$$r_* = \max_{\|u\|=1} \int_\Omega f(x) u \, dx.$$

Logo, pelo Método de Minimização Esférica, existe uma solução u_{r_*} do problema e vale ressaltar que

$$\|u_{r_*}\| = r_*.$$

A ideia de tentar relacionar o funcional energia com uma função real foi inspirada no trabalho de Arcoya, Santos Júnior e Suárez (ver [7]), que estudaram um problema de Kirchhoff da forma

$$\begin{cases} -m(\|u\|)\Delta u = f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ e as funções $m : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas. Neste caso, assumindo que o termo de Kirchhoff tem k pontos degenerados, eles provaram que existem pelo menos k soluções positivas para o problema (2), além daquelas que foram encontradas no trabalho de Santos Júnior e Siciliano (ver [25]).

Ainda em [7], os autores definiram uma função $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(r) = \max_{\|u\|^2 \leq r} \int_\Omega F^*(u)dx,$$

onde

$$F^*(t) = \int_0^t f^*(s)ds, \text{ com } f^*(t) = \begin{cases} f(0) & \text{se} \quad t < 0, \\ f(t) & \text{se} \quad 0 \leq t < s_*, \\ 0 & \text{se} \quad s_* < t, \end{cases}$$

e demonstraram que α é diferenciável em $(0, \infty)$ e que

$$\alpha'(r) = \frac{1}{2r} \max_{u \in \mathbf{S}_r} \int_\Omega f^*(u)udx,$$

onde

$$\mathbf{S}_r := \left\{ u \in H_0^1(\Omega); \|u\|^2 \leq r \text{ e } \int_\Omega F^*(u)dx = \alpha(r) \right\}.$$

É crucial ressaltar que não é óbvio ou intuitivo pensar que α seja diferenciável. Na verdade, os autores se inspiraram em uma argumentação utilizada no artigo de Szulkin e Weth de 2010 (ver [27], Proposição 9). Outro detalhe importante é que, no trabalho [7], α foi utilizada para mostrar que a solução encontrada para o problema (2) era não trivial e, em nenhum momento, foi feita qualquer relação entre pontos críticos de uma função que incluísse α com os pontos críticos do funcional energia, sendo algo concebido nesta tese (ver Teorema 0.1).

Pensando, primeiramente, em resolver problemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

a função α tornou-se, com algumas adaptações, a segunda parcela da função energia e conseguimos mostrar que, dadas algumas condições sobre a função f, a existência de pontos críticos para a função

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - \max_{\|u\|=r} \int_\Omega F(u)dx$$

implica a existência de soluções para o problema (3). Esses foram os primeiros passos em direção ao nosso método.

Buscando aprimorar o resultado, tornando-o mais abstrato e abrangente, seguimos uma nova estratégia: ao invés de partir de uma classe de problemas, resolvemos definir, da forma mais geral possível, determinados conjuntos e funcionais, a fim de que, provando alguns resultados preliminares, fosse possível desenvolver um método. Esse novo caminho foi o que deu origem ao que chamamos de Método de Minimização Esférica, estabelecido no Capítulo 1 e representado no teorema abaixo.

Teorema 0.1. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe $(\mathcal{J})$. Fixado $r > 0$, uma função u_r é um ponto crítico do funcional J se, e somente se, r é um ponto crítico da função energia ζ.*

Uma vez demonstrado o teorema, com o intuito de comparar esse método com alguns métodos variacionais, estudamos diversos problemas já conhecidos na literatura, conhecendo, dessa forma, as vantagens e desvantagens entre eles. Problemas do tipo côncavo e convexo, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{s-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\lambda > 0$ e $1 < q < 2 < s < 2^*$ se $N \geq 3$ e $1 < q < 2 < s$ se $N = 1$ ou $N = 2$, e de autovalor perturbado, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\lambda > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$, são resolvidos no final do Capítulo 1.

No problema (4), o método apresentado obteve duas soluções não triviais distintas, sendo uma de energia positiva e outra de energia negativa, enquanto outros métodos só conseguem provar a existência de uma delas. De fato, para o mesmo problema, o Teorema do Passo da Montanha (ver [6]) obtém uma solução de energia positiva, enquanto o Princípio Variacional de Ekeland (ver [12]) obtém uma solução de energia negativa. Entretanto, não conseguimos obter o mesmo resultado de Ambrosetti, Brezis e Cerami, os quais demonstraram, em 1994, que (4) possui, na verdade, infinitas soluções (ver [4]).

No problema (5), obteve-se solução para intervalos específicos de λ sem precisar recorrer a resultados mais avançados da teoria espectral. Para mais informações sobre estas e outras aplicações, ver [19], [28] e [17].

No Capítulo 2, começamos a buscar resultados de existência que envolvessem o Método de Minimização Esférica, pois vincular o funcional associado a um problema à função ζ não significa que essa função real terá pontos críticos ou que será possível provar a existência deles. Sendo assim, demonstramos um teorema de minimização local, apresentado a seguir.

Teorema 0.2. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe $(\mathcal{J})$. Suponha que existam $\rho > 0$ e $w \in E$, com $\|w\| < \rho$, tais que*

$$J(w) < \min\left\{J(0), \min_{\|u\|=\rho} J(u)\right\}.$$

Então existe um mínimo do funcional J na bola aberta $B(0, \rho)$.

Com o objetivo de mostrar a importância do Teorema 0.2 e tendo sido inspirados nos artigos de Figueiredo (ver [14]), Hammerstein (ver [16]) e de Mawhin, Ward e Willem (ver [21]), estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$. Em 1982, Figueiredo, usando o método de sub e supersolução e assumindo que $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} < \lambda_1 < \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} \tag{7}$$

uniformemente em x, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador laplaciano, demonstrou que o problema (6) tem solução positiva.

Buscando enfraquecer a hipótese (7), pedimos uma condição similar para a primitiva

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds,$$

pois Hammerstein já havia provado, em 1930, que, se $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory de modo que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{2} \tag{8}$$

uniformemente em x, o problema (6) tem solução. Em 1986, Mawhin, Ward e Willem estudaram o mesmo problema permitindo a igualdade em (8), exceto em um conjunto de medida positiva. Em outras palavras, considerando que existe $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \leq \frac{\alpha(x)}{2} \leq \frac{\lambda_1}{2} \tag{9}$$

uniformemente em x, eles provaram que o problema (6) tem solução se $\alpha(x) < \lambda_1$ em um subconjunto de Ω de medida positiva.

No nosso caso, permitiremos a igualdade em (8) em todo o domínio Ω, mas assumindo que

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \leq \frac{\lambda_1}{2} < \liminf_{t\to 0^+} \frac{F(x,t)}{t^2} \tag{10}$$

uniformemente em x. Note que, apesar de adicionarmos uma nova desigualdade do lado direito, não estamos mais fazendo exigências para $t \to -\infty$, ou seja, estamos trabalhando com uma nova classe de funções. Considerando, por exemplo,

$$f(x,t) = C_1 + C_2|x| + \lambda_1 t,$$

com $C_1, C_2 \geq 0$, temos uma função que não satisfaz (9), mas que satisfaz (10). Além disso, usando o Teorema 0.2, provaremos que o problema (6) tem uma solução não trivial e também não negativa, contribuindo, desta forma, com o resultado de [21].

No Capítulo 3, motivados pelos famosos trabalhos de Willem (ver [28]), Ambrosetti e Rabinowitz (ver [6]) e outros (para mais referências, ver [17]), estudamos o Teorema do Passo da Montanha com o propósito de obter, usando o Método de Minimização Esférica, uma outra versão do teorema que não envolvesse a condição Palais-Smale (PS). O resultado é enunciado abaixo.

Teorema 0.3. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe $(\mathcal{J})$. Suponha que existam $\alpha, \rho > 0$ e $w \in E$, com $\|w\| = R$, tais que*

(H_1) *$J(u) \geq \alpha > J(0)$ para todo $u \in S_\rho$;*

(H_2) *$J(w) < \alpha$, com $R > \rho$.*

Então a constante

$$c_* = \max_{r\in[0,R]} \min_{\|u\|=r} J(u) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = c,$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = w\}$, é um valor crítico de J.

Observe que o Teorema 0.3 nos fornece uma nova caracterização para a constante c, igualando-a a uma constante c_* de nível maxmin. Um detalhe interessante e sobremodo importante é que o fato dessa versão do teorema do passo da montanha não utilizar a condição (PS) nos permite utilizá-la em aplicações que não têm a condição de Ambrosseti e Rabinowitz. Pensando nisso, decidimos atacar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ e f é uma função contínua em $\Omega \times \mathbb{R}$. Em [6], Ambrosetti e Rabinowitz provaram um resultado de existência de solução para o problema (11) considerando que existem constantes $\theta > 2$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,t) \leq f(x,t)t, \ |t| \geq t_0, \forall\, x \in \Omega. \tag{12}$$

A condição (12) é importante para mostrar que o funcional energia associado ao problema (11) assume a geometria do passo da montanha e que a sequência (PS) é limitada. Por outro lado, a mesma condição é bem restritiva. Devido a essa desvantagem, muitos pesquisadores buscaram condições alternativas. Vale lembrar que (12) implica que existem constantes $a, b > 0$ tais que

$$F(x,t) \geq a|t|^\mu - b, \forall\, x \in \Omega,$$

com $\mu > 2$, o que, por sua vez, implica a condição mais geral

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = \infty \tag{13}$$

uniformemente em x.

Sabendo disso, em 2004, Schechter e Zou (ver [26]) conseguiram obter um resultado de existência para o problema (11) usando a seguinte condição sobre F

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = \infty$$

ou

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = \infty$$

uniformemente em x. Porém, também assumiram que $H(x,t) := f(x,t)t - 2F(x,t)$ é uma função convexa em t, para todo $x \in \Omega$.

Em 2008, Miyagaki e Souto (ver [22]) resolveram o problema (11) assumindo a condição de superquadraticidade (13) e enfraquecendo a convexidade de H, trocando por uma condição de monotonicidade, isto é, de que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{f(x,t)}{t} \text{ é crescente em } (t_0, \infty) \text{ e decrescente em } (-\infty, -t_0),\ \forall\, x \in \Omega. \tag{14}$$

No nosso caso, consideramos as hipóteses enunciadas abaixo.

(f_1) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq C\left(1 + |t|^{p-1}\right),\ 1 < p < 2^*,\ \forall\, t \in (0,\infty),\ \forall\, x \in \Omega;$$

(f_2)

$$0 \leq \limsup_{t \to 0^+} \frac{F(x,t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{2} \leq \liminf_{t \to \infty} \frac{F(x,t)}{t^2}$$

uniformemente em x, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador laplaciano;

(f_3) $f(x,t) \neq 0$ no intervalo $t \in (0,\infty)$, para todo $x \in \Omega$.

Nos artigos citados, também aparece uma condição de crescimento do tipo (f_1). Agora, com relação às outras hipóteses, procuramos trazer diferenças significativas. Comparando com o trabalho de Miyagaki e Souto, observe que (f_2) traz uma condição mais fraca que (13) envolvendo o limite para $t \to \infty$ e (f_3) acaba substituindo a hipótese (14). Pelo fato de não pedirmos superquadraticidade e nem monotonicidade, estamos trabalhando com uma classe diferente de funções. Considerando, por exemplo, uma constante $k > 1$ e a função

$$f(x,t) = \begin{cases} \log(2)(\cos(1) + |x| + k)t^2 & \text{se} \quad t \in [0,1], \\ \log(t+1)(\cos(t) + |x| + k)t & \text{c.c.} \quad , \end{cases}$$

temos que f verifica, claramente, (f_1) e (f_3) e não satisfaz (14). Além disso,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(x,t)}{t^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{F(x,t)}{t^2} = \infty,$$

o que significa que (f_2) também ocorre. Portanto, nosso trabalho contribui com o resultado de [22]. Obtemos então o seguinte teorema

Teorema 0.4. *Assumindo as condições* (f_1)–(f_3), *o problema (11) tem uma solução fraca não trivial.*

No Capítulo 4, estudamos problemas do tipo Berestycki-Lions. Em 1983, Berestycki e Lions (ver [10]) foram os primeiros que resolveram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{15}$$

sem usar a condição de Ambrosseti e Rabinowitz. Entretanto, o método usado em [10] não é válido para problemas não autônomos, isto é, com g dependendo da variável x, ainda que a função $g(x,u)$ seja radialmente simétrica com relação a x. Devido a essa restrição, muitos pesquisadores têm buscado variantes para o problema (15).

Em 2009, Azzollini e Pomponio (ver [8]), considerando $g(x,u) = f(u) - V(x)u$ e $N \geq 3$, resolveram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{16}$$

assumindo que $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ verifica

(V_1') $V(x) = V(|x|)$;

(V_2') $V(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e a desigualdade é estrita em uma parte do domínio;

(V_3') $|(\nabla V(\cdot)|\cdot)^+|_{N/2} < 2S$, onde

$$S = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2} \setminus \{0\}} \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_{2^*}^2};$$

(V_4') $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = 0.$

Eles também consideraram que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é uma função ímpar satisfazendo

$$-\infty < \liminf_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} \leq \limsup_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} = -m < 0 \tag{17}$$

e

$$-\infty < \limsup_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^{2^*-1}} \leq 0. \tag{18}$$

Por último, assumiram que existe $t_0 > 0$ tal que

$$F(t_0) > 0. \tag{19}$$

Em 2010, Alves e Liu (ver [2]) resolveram o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + V(x)|u|^{p(x)-2}u = f(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \qquad u \in W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{20}$$

Entre outras hipóteses, eles pediram que V e f fossem funções contínuas tais que

(V) Existem $V_0, V_\infty > 0$ de modo que

$$V_0 \leq V(x) \leq V_\infty, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N;$$

(f) Existe $\theta \geq 1$ tal que

$$\theta \mathcal{F}(x,t) \geq \mathcal{F}(x,st)$$

para $s \in [0,1]$, onde

$$\mathcal{F}(x,t) = f(x,t)t - p_+ F(x,t)$$

e

$$p_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} p(x).$$

A condição (f) foi inspirada no trabalho de Jeanjean (ver [18]) e escolhida por ser mais fraca (ver [20]) do que a seguinte hipótese de monotonicidade

$$\frac{f(x,t)}{|t|^{p_+-1}} \text{ é crescente para cada } x \in \mathbb{R}^N. \tag{21}$$

No nosso caso, motivados por esses e outros trabalhos (ver também [3] e [1]), estudamos o problema (16), resolvido por Azzollini e Pomponio, trocando algumas hipóteses de f e V. Assumimos que V é uma função contínua tal que

(V_1) $V(x) = V(|x|)$;

(V_2) Existem $V_0, V_\infty > 0$ tais que

$$V_0 \leq V(x) \leq V_\infty, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Com relação a $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, consideramos que

(f_1)
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|t| \to \infty} \frac{|f(t)|}{|t|^{p-1}} < \infty,$$

onde $2 < p < 2^*$;

(f_2) Existe $t_0 > 0$ tal que
$$F(t_0) - \frac{V_\infty}{2} t_0^2 > 0;$$

(f_3) $f(t) \neq 0$ para todo $t > 0$.

Comparando com [8], nossa principal modificação foi retirar, por ser bem restritiva, a hipótese (V_3') do potencial. Trocando (V_2')–(V_4') por (V_2), é possível exibir funções que não satisfazem as condições de [8] e que satisfazem as nossas hipóteses, como, por exemplo, os potenciais

$$V_1(x) = \frac{|x| + k_1}{|x| + k_2}, \ \text{com} \ 0 < k_1 < k_2,$$

e

$$V_2(x) = \begin{cases} |x| \sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right) + k, & \text{se} \quad x \neq 0, \ \text{com} \ k > 1, \\ k, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Logo, nosso resultado contribui com o trabalho de Azzollini e Pomponio. Observe ainda que (V_2) é a mesma condição (V) que aparece no artigo [2]. O teorema principal do Capítulo 4 é enunciado abaixo.

Teorema 0.5. *Assumindo as condições* (V_1)–(V_2) *e* (f_1)–(f_3)*, o problema (16) tem uma solução fraca não trivial.*

Capítulo 1

O Método de Minimização Esférica

Neste capítulo, desenvolveremos a teoria do Método de Minimização Esférica. Na Seção 1.1, vamos apresentar as definições iniciais, estabelecer hipóteses e demonstrar algumas propriedades. Em seguida, faremos a demonstração do teorema principal. Na Seção 1.2, utilizaremos o Método de Minimização Esférica para resolver diversos problemas já conhecidos na literatura e obter vantagens significativas em comparação com outros métodos existentes.

1.1 O Teorema de Minimização Esférica

Seja E Banach reflexivo e considere um funcional $J : E \to \mathbb{R}$ de modo que

$$J = \Psi - \Phi,$$

com $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo as hipóteses

(Φ_1) Φ e $u \mapsto \Phi'(u)u$ são fracamente semicontínuos superiormente;

(Φ_2) Se $\Phi'(u) = 0$, então $\Phi(u) = 0$;

(Φ_3) Existe uma sequência $\{u_n\} \subset E$ tal que $u_n \to 0$ e

$$\Phi(u_n) > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, $\Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ verifica as condições

(Ψ_1) Ψ é radialmente simétrico;

(Ψ_2) Fixado $r \geq 0$, $\Psi'(u)u = r^p$ para todo $u \in S_r$ e para algum $p \geq 1$.

Definição 1.1. *Dizemos que o funcional $J : E \to \mathbb{R}$ pertence à classe $(\mathcal{J})$ se*

$$J = \Psi - \Phi$$

e $\Psi, \Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazem, respectivamente, (Ψ_1)–(Ψ_2) e (Φ_1)–(Φ_3).

Exemplo 1.1. *No caso em que J é o funcional energia associado ao problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & em \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, $E = H_0^1(\Omega)$ e $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 1$ ou $N = 2$, veremos que J pertence à classe $(\mathcal{J})$ (ver Seção 1.2.3), sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad e \quad \Phi(u) = \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Proposição 1.1. *Para cada $r > 0$, o funcional Φ é limitado superiormente em B_r e seu valor máximo é atingido na fronteira. Em outras palavras, existe $u_r \in S_r$ tal que*

$$\Phi(u_r) = \max_{\|u\|=r} \Phi(u) = \max_{\|u\|\leq r} \Phi(u).$$

Demonstração:

Por (Φ_1), Φ é fracamente semicontínuo superiormente e, desde que E é um espaço de Banach reflexivo, B_r é um conjunto fracamente compacto. Portanto, aplicando o Teorema A.1, Φ é limitado superiormente em B_r e existe um ponto $u_r \in B_r$ tal que

$$\Phi(u_r) = \max_{\|u\|\leq r} \Phi(u).$$

Agora, vamos supor que u_r pertença ao interior de B_r. Neste caso, u_r seria um ponto crítico de Φ, isto é, $\Phi'(u_r) = 0$, e, por (Φ_3), existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{n_0} \in B_r$ e

$$0 < \Phi(u_{n_0}) \leq \max_{\|u\|\leq r} \Phi(u) = \Phi(u_r).$$

Entretanto, por (Φ_2), também teríamos que $\Phi(u_r) = 0$, o que seria um absurdo, provando que $u_r \in S_r$.

■

Observação 1.1. *Também podemos trocar* (Φ_2) *pela hipótese*

(Φ_2') *Fixado* $r > 0$, $\Phi(u) \leq \Phi'(u)u$ *para todo* $u \in \mathcal{G}_r$, *sendo*

$$\mathcal{G}_r := \left\{ u \in B_r;\ \Phi(u) = \max_{\|v\| \leq r} \Phi(v) \right\}.$$

Quando houver essa mudança ao longo do texto, o leitor será avisado.

De agora em diante, para $r > 0$, usaremos a notação u_r para nos referirmos ao máximo de Φ restrito a S_r. No caso em que $r = 0$, simplesmente teremos que

$$\max_{\|u\|=0} \Phi(u) = \Phi(0).$$

Fixado $r > 0$, por hipótese, temos que $\Phi, \Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'(u)u = r^p,\ \forall\, u \in S_r.$$

Além disso, pela Proposição 1.1, u_r é o máximo de Φ restrito a S_r. Logo, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Teorema A.2), existe uma constante $\lambda_r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi'(u_r)v = \lambda_r \Psi'(u_r)v,\ \forall\, v \in E.$$

Tomando $v = u_r$ e usando (Ψ_2), obtemos que

$$\lambda_r = \frac{1}{r^p} \Phi'(u_r)u_r. \tag{1.1}$$

Por outro lado, por (Ψ_1), o valor de Ψ não se altera para todo $u \in S_r$. Logo, note que u_r é também o mínimo do funcional J restrito a S_r. Em outras palavras,

$$J(u_r) = \Psi(u_r) - \max_{\|u\|=r} \Phi(u) = \min_{\|u\|=r} J(u).$$

Novamente, aplicando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, uma vez que $J, \Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e

$$\Psi'(u)u = r^p,\ \forall\, u \in S_r,$$

existe $\gamma_r \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_r)v = \gamma_r \Psi'(u_r)v,\ \ \forall\, v \in E,$$

ou ainda

$$\Psi'(u_r)v - \Phi'(u_r)v = \gamma_r \Psi'(u_r)v, \ \ \forall\, v \in E.$$

Escolhendo $v = u_r$ e usando (Ψ_2), segue que

$$r^p - \Phi'(u_r)u_r = r^p \gamma_r.$$

Por fim, dividindo a expressão por r^p e usando (1.1), obtemos a igualdade

$$\gamma_r = 1 - \lambda_r, \tag{1.2}$$

que será de grande importância mais adiante (ver Teorema 1.1).

A partir de agora, estabeleceremos a relação entre o funcional J e uma função real, a qual chamaremos de *função energia*, e provaremos o teorema que nos permitirá obter pontos críticos do funcional a partir do estudo da função energia.

Definição 1.2. *A função energia é a função $\zeta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\zeta(r) := \tau(r) - \varphi(r),$$

sendo

$$\tau(r) := \Psi|_{S_r}$$

e

$$\varphi(r) := \max_{\|u\|=r} \Phi(u).$$

Note que a função energia e o funcional J se relacionam pela igualdade

$$\zeta(r) = \min_{\|u\|=r} J(u) = J(u_r).$$

Além disso, fazendo uma mudança de variável, é possível escrever φ na forma

$$\varphi(r) = \max_{\|u\|=1} \Phi(ru),$$

o que nos auxiliará durante as aplicações.

O objetivo agora é mostrar que a existência de um ponto crítico para a função ζ implica a existência de um ponto crítico para o funcional J. Com o intuito de estabelecer essa relação, estudaremos a diferenciabilidade de τ e φ.

Proposição 1.2. *A função τ é contínua.*

Demonstração:

Provaremos primeiro que τ é contínua em 0. De fato, por (Ψ_1), podemos tomar qualquer representante na esfera S_r para calcular $\tau(r)$. Sendo assim, seja $\{r_n\}$ uma sequência de números positivos convergindo para zero e, para cada n, tome $u_n \in S_{r_n}$ arbitrário. Temos que $u_n \to 0$, pois

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Pela continuidade de Ψ, segue então que

$$\lim_{n\to\infty} \tau(r) = \lim_{n\to\infty} \Psi(u_n) = \Psi(0) = \tau(0).$$

Agora, demonstraremos a continuidade no intervalo $(0,\infty)$. Com efeito, fixe $r_0 > 0$ e seja $u_0 \in S_{r_0}$ arbitrário. Logo, por (Ψ_1) e pela continuidade de Ψ,

$$\lim_{r\to 0} \tau(r_0 + r) = \lim_{r\to 0} \Psi\left(u_0 + \frac{r}{r_0}u_0\right) = \Psi(u_0) = \tau(r_0).$$

■

Proposição 1.3. *A função τ é diferenciável em $(0,\infty)$ e*

$$\tau'(r) = r^{p-1}.$$

Demonstração:

Mais uma vez, devido à hipótese (Ψ_1), podemos tomar qualquer representante na esfera S_r para calcular $\tau(r)$. Assim, fixe $r_0 > 0$ e tome $u_0 \in S_{r_0}$ arbitrário. Considerando $r \in (-r_0, \infty)$, temos que

$$\frac{\tau(r_0 + r) - \tau(r_0)}{r} = \frac{1}{r}\left[\Psi\left(u_0 + \frac{r}{r_0}u_0\right) - \Psi(u_0)\right].$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante $0 < b_r < 1$ tal que

$$\frac{1}{r}\left[\Psi\left(u_0 + \frac{r}{r_0}u_0\right) - \Psi(u_0)\right] = \frac{1}{r_0}\Psi'\left(u_0 + b_r\frac{r}{r_0}u_0\right)u_0.$$

Consequentemente,

$$\tau'(r_0) = \lim_{r\to 0} \frac{\tau(r_0 + r) - \tau(r_0)}{r} = \frac{1}{r_0}\Psi'(u_0)u_0.$$

Pela hipótese (Ψ_2),

$$\tau'(r_0) = r_0^{p-1}.$$

■

Proposição 1.4. *A função φ é contínua.*

Demonstração:

Provaremos primeiro que φ é contínua em 0. De fato, note que

$$\lim_{r\to 0^+} \|u_r\| = \lim_{r\to 0^+} r = 0.$$

Pela continuidade de Φ,

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi(r) = \lim_{r\to 0^+} \Phi(u_r) = \Phi(0) = \varphi(0).$$

Agora, demonstraremos a continuidade em $(0,\infty)$. Com efeito, seja $\{r_n\}$ uma sequência de números positivos tal que $r_n \to r_0 > 0$. Pela Proposição 1.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função $u_n \in S_{r_n}$ tal que

$$\Phi(u_n) = \max_{\|u\|=r_n} \Phi(u) = \max_{\|u\|\leq r_n} \Phi(u).$$

Uma vez que a sequência $\{u_n\}$ é limitada em E e esse conjunto é um espaço de Banach reflexivo, obtemos, a menos de uma subsequência, que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } E.$$

Segue então que

$$\|u_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| = \liminf_{n\to\infty} r_n = r_0,$$

o que significa que $u_0 \in B_{r_0}$. Sendo assim, observe que

$$\Phi(u_0) = \liminf_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{r_n}{r_0} u_0\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(u_n). \tag{1.3}$$

Além disso,

$$\Phi(u_0) \leq \varphi(r_0). \tag{1.4}$$

Por outro lado, seja $u_* \in S_{r_0}$ tal que

$$\varphi(r_0) = \Phi(u_*).$$

Então

$$\Phi\left(\frac{r_n}{r_0}u_*\right) \leq \Phi(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pela hipótese (Φ_1), obtemos que

$$\varphi(r_0) = \limsup_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{r_n}{r_0}u_*\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u_0). \tag{1.5}$$

Usando (1.4) e (1.5), temos que

$$\Phi(u_0) = \varphi(r_0)$$

e, por (1.3) e (1.5),

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u_0).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(r_n) = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u_0) = \varphi(r_0).$$

$\blacksquare$

Proposição 1.5. *O funcional $u \mapsto \Phi'(u)u$ atinge o máximo no conjunto*

$$\mathcal{G}_r = \{u \in B_r;\ \Phi(u) = \varphi(r)\}.$$

Demonstração:

Por definição, $\mathcal{G}_r$ é um conjunto limitado, pois $\mathcal{G}_r \subset B_r$. Agora, provaremos que $\mathcal{G}_r$ é fracamente fechado. Com efeito, seja $\{u_n\} \subset \mathcal{G}_r$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } E.$$

Temos que

$$\|u_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\| = r,$$

o que significa que

$$\Phi(u_0) \leq \varphi(r).$$

Por outro lado, desde que (Φ_1) ocorre e $\{u_n\} \subset \mathcal{G}_r$, segue que

$$\varphi(r) = \limsup_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u_0).$$

Sendo assim, $u_0 \in \mathcal{G}_r$. Logo, $\mathcal{G}_r$ é fracamente fechado e limitado e, consequentemente, fracamente compacto. E, desde que $u \mapsto \Phi'(u)u$ é fracamente semicontínuo superiormente pela hipótese (Φ_1), o Teorema A.1 nos garante que o máximo desse funcional é atingido em $\mathcal{G}_r$.

■

Vale ressaltar que o conjunto $\mathcal{G}_r$ está bem definido, pois, pela Proposição 1.1, já mostramos que existe pelo menos um máximo para o funcional Φ restrito a B_r. Além disso, pela mesma proposição, também temos que $\mathcal{G}_r \subset S_r$.

Proposição 1.6. *A função φ é diferenciável em $(0, \infty)$ e*

$$\varphi'(r) = \frac{1}{r} \max_{u\in\mathcal{G}_r} \Phi'(u)u.$$

<u>Demonstração</u>:

Fixe $r_0 > 0$ e tome $u_{r_0} \in \mathcal{G}_{r_0}$ e $u_{r_0+r} \in \mathcal{G}_{r_0+r}$, com $r \in (-r_0, \infty)$. Por definição,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} &= \frac{1}{r}\left[\Phi(u_{r_0+r}) - \Phi(u_{r_0})\right] \\ &\geq \frac{1}{r}\left[\Phi\left(u_{r_0} + \frac{r}{r_0}u_{r_0}\right) - \Phi(u_{r_0})\right]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe uma constante $0 < c_r < 1$ tal que

$$\frac{1}{r}\left[\Phi\left(u_{r_0} + \frac{r}{r_0}u_{r_0}\right) - \Phi(u_{r_0})\right] = \frac{1}{r_0}\Phi'\left(u_{r_0} + c_r\frac{r}{r_0}u_{r_0}\right)u_{r_0}.$$

Consequentemente,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} \geq \frac{1}{r_0}\Phi'(u_{r_0})u_{r_0},\ \forall\, u_{r_0} \in \mathcal{G}_{r_0}.$$

Uma vez que u_{r_0} foi fixado arbitrariamente, a Proposição 1.5 nos permite escolher justamente a função que é um ponto de máximo no conjunto. Em outras palavras,

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\varphi(r_0+r) - \varphi(r_0)}{r} \geq \frac{1}{r_0} \max_{u\in\mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u. \tag{1.6}$$

Por outro lado, pela definição de $\mathcal{G}_r$, obtemos que

$$\frac{\varphi(r_0+r)-\varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{r}\left[\Phi(u_{r_0+r}) - \Phi\left(u_{r_0+r} - \frac{r}{r_0+r}u_{r_0+r}\right)\right].$$

Mais uma vez, existe uma constante $0 < d_r < 1$ tal que

$$\frac{\varphi(r_0+r)-\varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{r_0+r}\Phi'\left(u_{r_0+r} - d_r\frac{r}{r_0+r}u_{r_0+r}\right)u_{r_0+r}.$$

Note que

$$\Phi'\left(\left(1-d_r\frac{r}{r_0+r}\right)u_{r_0+r}\right)u_{r_0+r} = \frac{\Phi'\left(\left(1-d_r\frac{r}{r_0+r}\right)u_{r_0+r}\right)\left(\left(1-d_r\frac{r}{r_0+r}\right)u_{r_0+r}\right)}{\left(1-d_r\frac{r}{r_0+r}\right)}.$$

Ou seja,

$$\frac{\varphi(r_0+r)-\varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{(r_0+r)\left(1-d_r\frac{r}{r_0+r}\right)}\max_{u\in\mathcal{G}_{r_0+r(1-d_r)}}\Phi'(u)u.$$

Provaremos agora que

$$\limsup_{r\to 0}\left[\max_{u\in\mathcal{G}_{r_0+r(1-d_r)}}\Phi'(u)u\right] \leq \max_{u\in\mathcal{G}_{r_0}}\Phi'(u)u.$$

De fato, seja $\{r_n\}$ uma sequência de números positivos convergindo para zero. Para cada n, escolha $u_n \in \mathcal{G}_{r_0+r_n(1-d_{r_n})}$ tal que

$$\Phi'(u_n)u_n = \max_{u\in\mathcal{G}_{r_0+r_n(1-d_{r_n})}}\Phi'(u)u.$$

Desde que $\|u_n\| = r_0 + r_n(1-d_{r_n})$, $\{u_n\}$ é limitada em E, que é Banach reflexivo. Então existe, a menos de uma subsequência, uma função $u_0 \in E$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } E$$

e

$$\|u_0\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|u_n\| = r_0,$$

o que significa que

$$\Phi(u_0) \leq \varphi(r_0).$$

Por outro lado, pela continuidade de φ e por (Φ_1),

$$\varphi(r_0) = \limsup_{n\to\infty} \varphi(r_0 + r_n(1 - d_{r_n})) = \limsup_{n\to\infty} \Phi(u_n) \leq \Phi(u_0).$$

Ou seja, $u_0 \in \mathcal{G}_{r_0}$ e $\|u_0\| = r_0$. Por fim, usando novamente (Φ_1), provamos que

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{u\in\mathcal{G}_{r_0+r_n(1-d_{r_n})}} \Phi'(u)u = \limsup_{n\to\infty} \Phi'(u_n)u_n \leq \Phi'(u_0)u_0 \leq \max_{u\in\mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u.$$

Segue então que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\varphi(r_0 + r) - \varphi(r_0)}{r} \leq \frac{1}{r_0} \max_{u\in\mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u. \tag{1.7}$$

Usando (1.6) e (1.7), concluímos que φ é diferenciável em $(0, \infty)$ e

$$\varphi'(r_0) = \frac{1}{r_0} \max_{u\in\mathcal{G}_{r_0}} \Phi'(u)u.$$

■

Até aqui, a notação u_r referia-se apenas ao máximo de Φ restrito à esfera S_r, com $r > 0$. Entretanto, a partir de agora, consideraremos que a função u_r é também o máximo de $u \mapsto \Phi'(u)u$ restrito a $\mathcal{G}_r$.

Teorema 1.1 (Teorema de Minimização Esférica)**.** *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe $(\mathcal{J})$. Fixado $r > 0$, uma função u_r é um ponto crítico do funcional J se, e somente se, r é um ponto crítico da função energia ζ.*

Demonstração:

Suponha, primeiramente, que r é um ponto crítico da função energia ζ. Então

$$\varphi'(r) = \tau'(r).$$

Pela Proposição 1.3 e pela Proposição 1.6,

$$\frac{1}{r} \max_{u\in\mathcal{G}_r} \Phi'(u)u = r^{p-1}.$$

Em outras palavras,

$$\frac{1}{r}\Phi'(u_r)u_r = r^{p-1}.$$

Usando (1.1), segue que

$$\lambda_r = 1.$$

Consequentemente, pela igualdade (1.2),

$$\gamma_r = 0.$$

Portanto, u_r é ponto crítico de J, pois

$$J'(u_r)v = \gamma_r \Psi'(u_r)v = 0, \ \forall\, v \in E.$$

Agora, suponha que, para algum $r > 0$, u_r é um ponto crítico do funcional J. Pelas definições e resultados anteriores, já sabemos que

$$\zeta'(r) = r^{p-1} - \frac{1}{r}\Phi'(u_r)u_r$$

e

$$J'(u_r)v = \Psi'(u_r)v - \Phi'(u_r)v, \ \forall\, v \in E.$$

Sendo assim, escolhendo $v = u_r$, obtemos a relação

$$\zeta'(r)r = J'(u_r)u_r. \tag{1.8}$$

Logo, desde que u_r é um ponto crítico de J e $r > 0$, segue de (1.8) que

$$\zeta'(r) = 0.$$

■

Observação 1.2. *Vale ressaltar que* $u_r \not\equiv 0$*, pois* $\|u_r\| = r > 0$*. Isso significa que as soluções encontradas pelo Método de Minimização Esférica são não triviais.*

Note que o fato de ζ não ter pontos críticos não implica necessariamente que não existam soluções para um determinado problema, porque é possível que exista um ponto crítico de J sem que essa função seja do tipo u_r. Em alguns casos, faz sentido usar o Método de Minimização Esférica em um subconjunto de E, desde que sejamos capazes de mostrar, usando outro raciocínio, que o ponto crítico obtido para o funcional J restrito ao subconjunto é uma solução para o problema (ver Seção 1.2.2).

O próximo resultado nos mostra que o Método de Minimização Esférica também pode ser eficiente em encontrar mínimos globais.

Proposição 1.7. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe $(\mathcal{J})$. Se existe $r_0 > 0$ tal que*

$$\zeta(r_0) = \min_{r>0} \zeta(r),$$

então

$$J(u_{r_0}) = \min_{u \in E} J(u).$$

Demonstração:

Por hipótese, temos que existe $r_0 > 0$ tal que

$$J(u_{r_0}) = \zeta(r_0) = \min_{r>0} \zeta(r).$$

Suponha então que exista uma função $u_* \in E$, com $\|u_*\| = r_* > 0$, de modo que

$$J(u_*) < J(u_{r_0}).$$

Entretanto, neste caso, teríamos que

$$\zeta(r_*) \leq J(u_*) < J(u_{r_0}) = \min_{r>0} \zeta(r),$$

o que é um absurdo. Logo,

$$J(u_{r_0}) = \min_{u \in E} J(u).$$

■

1.2 Aplicações a problemas clássicos

Nesta seção, faremos diversas aplicações do Método de Minimização Esférica, considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, $E = H_0^1(\Omega)$ e

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2.$$

Claramente, Ψ satisfaz a hipótese (Ψ_1). Além disso, (Ψ_2) também ocorre, pois

$$\Psi'(u)u = r^2, \ \forall\, u \in S_r.$$

Logo, para demonstrar que J é de classe $(\mathcal{J})$, verificaremos apenas as hipóteses de Φ. As soluções denotadas por u_r serão funções do espaço $H_0^1(\Omega)$ que maximizam o funcional Φ na esfera S_r e o funcional $u \mapsto \Phi'(u)u$ no conjunto $\mathcal{G}_r$. Quando estivermos tratando de um subespaço de $H_0^1(\Omega)$, isto será especificado na resolução.

1.2.1 Um problema linear

Nesta aplicação, provaremos que o Método de Minimização Esférica, além de garantir a existência de solução a partir de uma função real, também nos fornece uma informação a mais sobre a norma da solução.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ e $f \not\equiv 0$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \int_\Omega f(x)u\,dx.$$

Lema 1.1. *O funcional J pertence à classe $(\mathcal{J})$.*

Demonstração:

Suponha que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas, a menos de uma subsequência,

$$u_n \to u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\left|\int_\Omega f(x)u_n dx - \int_\Omega f(x)u\,dx\right| \leq |u_n - u|_2 |f|_2 \to 0,$$

o que implica que Φ é fracamente contínuo. Uma vez que $\Phi(u) = \Phi'(u)u$, fica evidente que (Φ_1) e (Φ_2) ocorrem. Com relação à condição (Φ_3), suponha que

$$\int_\Omega f(x)v\,dx = 0, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Todavia, pelo Teorema A.3, teríamos que $f = 0$ q.t.p. em Ω, o que é uma contradição. Então existe uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(v) = \int_\Omega f(x)v\,dx > 0.$$

Tomando $u_n = \frac{1}{n}v$, demonstramos (Φ_3). Logo, J é de classe $\mathcal{J}$. Note que acabamos de provar também que

$$\max_{\|u\|=r} \int_\Omega f(x)u\,dx > 0.$$

■

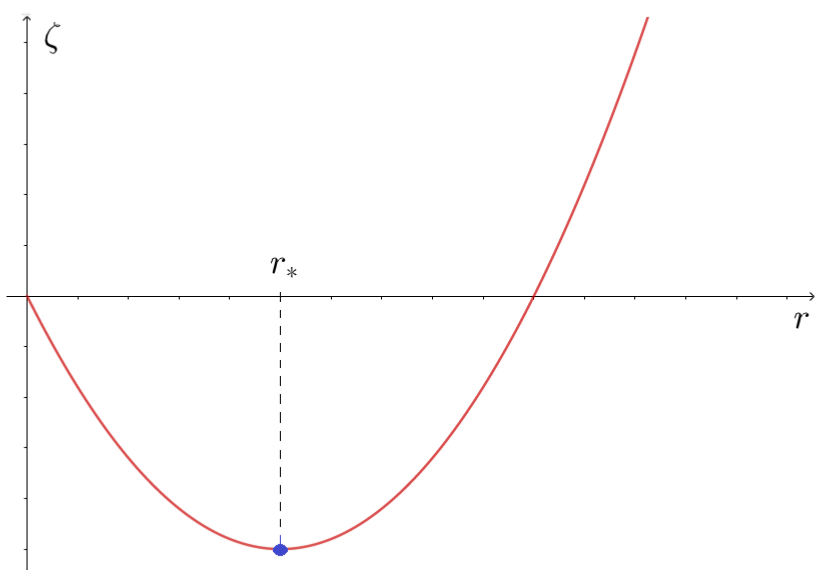
Teorema 1.2. *O problema (1.9) tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 1.1, fica bem definida a função energia, dada por

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - r \max_{\|u\|=1} \int_\Omega f(x)u\,dx.$$

Observe como foi possível, usando o Método de Minimização Esférica, ter a possibilidade de encontrar soluções para (1.9) a partir do estudo de pontos críticos de um simples polinômio do 2º grau. Neste caso, pelo fato do coeficiente de r ser negativo, temos uma parábola com concavidade para cima, conforme o gráfico abaixo.



Sendo assim, é evidente que há um ponto crítico (denotado no gráfico por r_*) para a função energia. Derivando ζ e igualando a 0, obtemos que

$$r_* = \max_{\|u\|=1} \int_\Omega f(x) u \, dx.$$

Portanto, pelo Teorema de Minimização Esférica (ver Teorema 1.1), u_{r_*} é um ponto crítico de J e, consequentemente, uma solução do problema (1.9). Na verdade, u_{r_*} é também um ponto de mínimo global de J (ver Proposição 1.7). Apesar do Método de Minimização Esférica não garantir unicidade, ele mostra quem é a norma da solução, pois $\|u_{r_*}\| = r_*$.

■

1.2.2 Um problema de autovalor

Nesta aplicação, mostraremos que o Método de Minimização Esférica consegue resolver o problema de autovalor do operador laplaciano sem precisar recorrer a resultados mais avançados da teoria espectral.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

onde $\lambda > 0$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{\lambda}{2}|u|_2^2.$$

Lema 1.2. *O funcional J pertence à classe $(\mathcal{J})$.*

Demonstração:

Suponha que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{em} \ H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas, a menos de uma subsequência,

$$u_n \to u \ \text{em} \ L^2(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\Phi(u_n) = \frac{\lambda}{2}|u_n|_2^2 \to \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 = \Phi(u).$$

Acabamos de provar que Φ é fracamente contínuo e, de forma análoga, é possível demonstrar o mesmo para $\Phi'(u)u$. Então Φ satisfaz (Φ_1) e fica evidente que (Φ_2) também ocorre, porque

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\Phi'(u)u.$$

Por fim, basta considerar uma função positiva $v \in H_0^1(\Omega)$ e a sequência $u_n = \frac{1}{n}v$ para que (Φ_3) ocorra. Logo, J é de classe $\mathcal{J}$.

■

Teorema 1.3. *O problema (1.10) tem solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 1.2, fica bem definida a função energia ζ_1, dada por

$$\zeta_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{2}r^2 \max_{u\in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Definindo a constante $\lambda_1 := 1/\max_{u\in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2$, temos que

$$\zeta_1(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) r^2.$$

Derivando a função ζ_1, segue que

$$\zeta_1'(r) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) r.$$

Logo, pelo Teorema de Minimização Esférica, se $\lambda \neq \lambda_1$, ζ_1 não admite ponto crítico para $r > 0$ e, assim, nenhuma função do tipo u_r é uma solução de (1.10). Por outro lado, se $\lambda = \lambda_1$, ζ_1 é a função nula e, desta forma, qualquer ponto do domínio é um ponto crítico. Neste caso, u_r é uma solução de (1.10) para todo $r > 0$. Este resultado também nos mostra que a constante λ_1 é um autovalor do operador laplaciano. Chamaremos então de e_1 às funções u_r que são autofunções de λ_1. Mais adiante, definiremos outros autovalores. Considere o espaço

$$E_1 := V_{\lambda_1}^{\perp} = \left\{u \in H_0^1(\Omega);\ u \perp V_{\lambda_1}\right\}.$$

Uma vez que $V_{\lambda_1}^{\perp}$ é um espaço de Banach reflexivo, ainda podemos aplicar o Método de Minimização Esférica e obter a função energia

$$\zeta_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{2}r^2 \max_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Definindo $\lambda_2 := 1/\max\limits_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2$, segue que

$$\zeta_2(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)r^2.$$

Logo, se $\lambda = \lambda_2$, para todo $r > 0$, u_r é um ponto crítico para o funcional J restrito a E_1. Desta vez, note que o Teorema de Minimização Esférica não foi suficiente para afirmarmos que as funções u_r são soluções do problema, pois J está restrito a E_1. Entretanto, usando alguns resultados conhecidos da teoria espectral (ver [11]), podemos provar que cada função $u_r \in E_1$ é também ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$. Sendo assim, λ_2 é mais um autovalor do laplaciano e chamaremos de e_2 suas autofunções. Por definição,

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2.$$

Repetindo os mesmos argumentos para o espaço

$$E_2 := (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2})^{\perp}$$

e definindo $\lambda_3 := 1/\max\limits_{u \in E_2, \|u\|=1} |u|_2^2$, é possível demonstrar que, se $\lambda = \lambda_3$, cada função $u_r \in E_2$ é ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, caracterizando as autofunções e_3.

De um modo geral, para $n \geq 3$, consideramos o espaço

$$E_{n-1} := \left(V_{\lambda_{n-2}} \oplus V_{\lambda_{n-1}}\right)^{\perp}$$

e a constante $\lambda_n := 1/\max\limits_{u \in E_{n-1}, \|u\|=1} |u|_2^2$. Se $\lambda = \lambda_n$, cada função $u_r \in E_{n-1}$ é ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, caracterizando as autofunções e_n. Vale ressaltar que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$$

$\blacksquare$

1.2.3 Uma não linearidade do tipo potência

Nesta aplicação, provaremos que o Método de Minimização Esférica, além de facilitar a resolução de um problema superlinear com crescimento subcrítico, também nos fornece uma informação a mais sobre a norma da solução.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $2 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $p > 2$ se $N = 1$ ou $N = 2$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{1}{p}|u|_p^p.$$

Lema 1.3. *O funcional J pertence à classe $(\mathcal{J})$.*

Demonstração:

Ver Lema 1.2.

■

Teorema 1.4. *O problema (1.11) tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 1.3, fica bem definida a função energia, dada por

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{p}r^p \max_{\|u\|=1} |u|_p^p.$$

Definindo a constante $C_p := 1/\max_{\|u\|=1} |u|_p^p$, a qual é a melhor constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, obtemos que

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{pC_p}r^p.$$

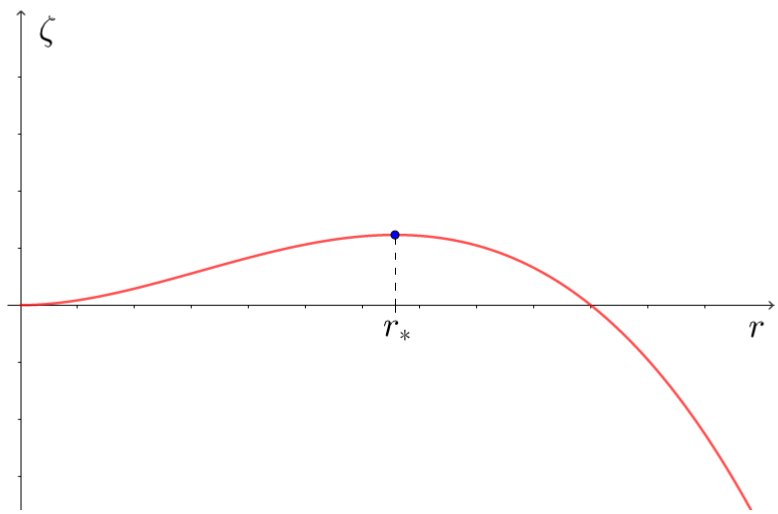
Derivando a função ζ e igualando a 0, temos que

$$r - \frac{1}{C_p}r^{p-1} = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos um ponto crítico r_* da função energia, dado por

$$r_* = C_p^{\frac{1}{p-2}}.$$

Logo, pelo Teorema de Minimização Esférica, a função u_{r_*} é uma solução de (1.11), sendo $\|u_{r_*}\| = r_*$. Um possível gráfico para a função energia é esboçado abaixo.



■

1.2.4 Um problema do tipo côncavo e convexo

Nesta aplicação, provaremos que o Método de Minimização Esférica obtém duas soluções não triviais distintas para um problema do tipo côncavo e convexo, sendo uma de energia positiva e outra de energia negativa, enquanto outros métodos só conseguem provar a existência de uma delas (ver Introdução).

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{s-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

onde $\lambda > 0$ e $1 < q < 2 < s < 2^*$ se $N \geq 3$ e $1 < q < 2 < s$ se $N = 1$ ou $N = 2$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{\lambda}{q}|u|_q^q + \frac{1}{s}|u|_s^s.$$

Lema 1.4. *O funcional J pertence à classe $(\mathcal{J})$.*

Demonstração:

Usando as imersões compactas de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ e em $L^s(\Omega)$, é possível provar (Φ_1). Além disso, é evidente que (Φ_2) também ocorre, porque

$$0 \leq \Phi(u) \leq \Phi'(u)u, \; \forall \, u \in H_0^1(\Omega).$$

Por último, considerando qualquer função positiva $v \in H_0^1(\Omega)$ e a sequência $\frac{1}{n}v$, demonstramos (Φ_3).

■

Teorema 1.5. *O problema (1.12) tem duas soluções fracas não triviais.*

Demonstração:

Devido ao Lema 1.4, fica bem definida a função energia, dada por

$$\zeta(r) = \frac{1}{2}r^2 - \max_{\|u\|=1}\left(\frac{\lambda}{q}r^q|u|_q^q + \frac{1}{s}r^s|u|_s^s\right).$$

Para este problema, também definiremos algumas funções que nos auxiliarão a encontrar pontos críticos para a função energia, limitando ζ por baixo e por cima. Para o primeiro caso, seja $\underline{\zeta} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{\zeta}(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{q}r^q \max_{\|u\|=1}|u|_q^q - \frac{1}{s}r^s \max_{\|u\|=1}|u|_s^s.$$

Por definição, é evidente que $\underline{\zeta} \leq \zeta$. Agora, com o intuito de limitar a função energia por cima, considere as funções $\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tais que

$$\overline{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{q}r^q \max_{\|u\|=1}|u|_q^q$$

e

$$\overline{\zeta}_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{s}r^s \max_{\|u\|=1}|u|_s^s.$$

Definindo as constantes $C_q := 1/\max\limits_{\|u\|=1}|u|_q^q$ e $C_s := 1/\max\limits_{\|u\|=1}|u|_s^s$, as quais são, respectivamente, as melhores constantes das imersões de $H_0^1(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$ e de $H_0^1(\Omega)$ em $L^s(\Omega)$, obtemos que

$$\overline{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{qC_q}r^q$$

e

$$\overline{\zeta}_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{sC_s}r^s.$$

Desde que $\zeta \leq \overline{\zeta}_1$, $\zeta \leq \overline{\zeta}_2$ e $q < 2 < s$, note que a função energia atinge valores negativos para r suficientemente pequeno e suficientemente grande, além de que $\zeta(0) = 0$. Resta então verificar se $\underline{\zeta}$ atinge valores não negativos em algum ponto do domínio. Com efeito, fixando

$$r_* = \left(\frac{sC_s}{4}\right)^{1/s-2},$$

observe que

$$\underline{\zeta}(r_*) = \frac{1}{2}r_*^2 - \frac{1}{sC_s}r_*^s - \frac{\lambda}{qC_q}r_*^q = \frac{1}{4}r_*^2 - \frac{\lambda}{qC_q}r_*^q.$$

Desta forma, para que ocorra a desigualdade

$$\underline{\zeta}(r_*) = \frac{1}{4}r_*^2 - \frac{\lambda}{qC_q}r_*^q \geq 0,$$

devemos ter

$$\lambda \leq \left(\frac{qC_q}{4}\right)r_*^{2-q} = \left(\frac{qC_q}{4}\right)\left(\frac{sC_s}{4}\right)^{\frac{2-q}{s-2}}.$$

Sendo assim, definindo

$$\lambda_* := \left(\frac{qC_q}{4}\right)\left(\frac{sC_s}{4}\right)^{\frac{2-q}{s-2}},$$

acabamos de provar que, para $\lambda \in (0, \lambda_*]$, ζ assume um valor não negativo em pelo menos um ponto do seu domínio, possuindo então dois pontos críticos.

Portanto, pelo Método de Minimização Esférica, podemos afirmar que o problema (1.12) tem, pelo menos, duas soluções não triviais para $\lambda \in (0, \lambda_*]$.

$\blacksquare$

1.2.5 Um problema de autovalor perturbado

Nesta aplicação, mostraremos que o Método de Minimização Esférica consegue resolver o problema de autovalor perturbado sem precisar recorrer a resultados mais avançados da teoria espectral.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.13}$$

onde $\lambda > 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. O funcional J é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

sendo

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 + \int_\Omega f(x)u\,dx.$$

Lema 1.5. *O funcional J pertence à classe $(\mathcal{J})$.*

<u>Demonstração</u>:

Suponha que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas, a menos de uma subsequência,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Consequentemente,

$$\left| \int_\Omega f(x)u_n dx - \int_\Omega f(x)u\,dx \right| \leq |u_n - u|_2 |f|_2 \to 0.$$

Sendo assim,

$$\Phi(u_n) = \frac{\lambda}{2}|u_n|_2^2 + \int_\Omega f(x)u_n dx \to \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 + \int_\Omega f(x)u\,dx = \Phi(u).$$

Esse mesmo resultado é obtido para $\Phi'(u)u$, então Φ satisfaz (Φ_1). Além disso,

$$\Phi(u) = \frac{\lambda}{2}|u|_2^2 + \int_\Omega f(x)u\,dx \leq \lambda|u|_2^2 + \int_\Omega f(x)u\,dx = \Phi'(u)u, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Em outras palavras, Φ satisfaz (Φ_2') (ver Observação 1.1). Agora, provaremos que (Φ_3) ocorre. De fato, note que é possível obter uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi(v) = |v|_2^2 + \int_\Omega f(x) v \, dx \neq 0.$$

Neste caso, ainda que $\Phi(v) < 0$, teremos que $\Phi(-v) > 0$. Escolhendo $u_n = \frac{1}{n} v$, demonstramos a condição (Φ_3).

■

Teorema 1.6. *Se λ for diferente dos autovalores do laplaciano, o problema (1.13) tem solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Devido ao Lema 1.5, fica bem definida a função energia ζ_1, dada por

$$\zeta_1(r) = \frac{1}{2} r^2 - \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \left(\frac{\lambda}{2} r^2 |u|_2^2 + r \int_\Omega f(x) u \, dx \right).$$

Mais uma vez, definiremos algumas funções que nos auxiliarão a encontrar pontos críticos para a função energia, limitando ζ por cima e por baixo. Para o primeiro caso, seja $\overline{\zeta}_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2} r^2 - r \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \int_\Omega f(x) u \, dx.$$

Por definição, $\zeta_1 \leq \overline{\zeta}_1$. Outro fato importante é que

$$\max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=r} \int_\Omega f(x) u \, dx > 0,$$

pois, usando (Φ_3), para cada $r > 0$, é possível obter uma função $v \in B_r$ tal que

$$0 < \int_\Omega f(x) v \, dx \leq \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=r} \int_\Omega f(x) u \, dx.$$

Logo, a função energia assume valores negativos para r suficientemente pequeno. Agora, buscando limitar ζ_1 por baixo, considere $\underline{\zeta}_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{\zeta}_1(r) = \frac{1}{2} r^2 - \frac{\lambda}{2} r^2 \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2 - r \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \int_\Omega f(x) u \, dx.$$

Então

$$\zeta_1(r) \geq \underline{\zeta}_1(r) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\frac{1}{2}r^2 - r \max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} \int_\Omega f(x)u\,dx,$$

sendo λ_1 o primeiro autovalor do operador laplaciano, caracterizado como

$$\lambda_1 = 1/\max_{u \in H_0^1(\Omega), \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Se assumirmos que $0 < \lambda < \lambda_1$, a desigualdade acima nos garante que ζ_1 assume valores positivos para r suficientemente grande e, com isso, possui um ponto crítico r_1, o que significa, pelo Teorema de Minimização Esférica, que u_{r_1} é solução do problema.

Agora, com o intuito de obter soluções com outros valores de λ, considere o espaço $E_1 = V_{\lambda_1}^{\perp}$, o qual é um espaço de Banach reflexivo e, assim, ainda podemos aplicar o Método de Minimização Esférica e obter a função energia

$$\zeta_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \max_{u \in E_1, \|u\|=1} \left(\frac{\lambda}{2}r^2|u|_2^2 + r\int_\Omega f(x)u\,dx\right).$$

Seja $\underline{\zeta}_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\underline{\zeta}_2(r) = \frac{1}{2}r^2 - \frac{\lambda}{2}r^2 \max_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2 - r \max_{u \in E_1, \|u\|=1} \int_\Omega f(x)u\,dx.$$

Recorde que λ_2 é o segundo autovalor do laplaciano, caracterizado como

$$\lambda_2 = 1/\max_{u \in E_1, \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Então

$$\zeta_2(r) \geq \underline{\zeta}_2(r) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)\frac{1}{2}r^2 - r \max_{u \in E_1, \|u\|=1} \int_\Omega f(x)u\,dx.$$

Logo, para $0 < \lambda < \lambda_2$, o Método de Minimização Esférica nos permite concluir que existe um ponto crítico r_2 de ζ_2, o que significa que u_{r_2} é um ponto crítico do funcional J restrito a E_1. Em outras palavras, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_{r_2} \nabla v dx = \lambda \int_\Omega u_{r_2} v dx + \int_\Omega f(x)v\,dx, \ \forall\, v \in E_1.$$

Agora, considerando e_1 uma autofunção associada a λ_1, demonstraremos que, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, a função $u_{r_2} + \alpha e_1$ é um ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, ou seja, queremos que

$$\int_\Omega \nabla(u_{r_2} + \alpha e_1)\nabla v dx = \lambda \int_\Omega (u_{r_2} + \alpha e_1) v dx + \int_\Omega f(x)v\,dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Com efeito, tomando $v = e + \gamma e_1$, com $e \in E_1$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, a igualdade acima se escreve da forma

$$\int_\Omega \nabla(u_{r_2} + \alpha e_1)\nabla(e + \gamma e_1)dx = \lambda \int_\Omega (u_{r_2} + \alpha e_1)(e + \gamma e_1)dx + \int_\Omega f(x)(e + \gamma e_1)dx.$$

Note que, pela ortogonalidade e pelo fato de u_{r_2} ser um ponto crítico em E_1, muitos termos da igualdade serão anulados, restando apenas

$$\alpha\|e_1\|^2 = \alpha\lambda|e_1|_2^2 + \int_\Omega f(x)e_1 dx.$$

Desde que e_1 é uma autofunção do laplaciano, segue que

$$\alpha\lambda_1|e_1|_2^2 = \alpha\lambda|e_1|_2^2 + \int_\Omega f(x)e_1 dx.$$

Isolando α, temos que

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)e_1 dx}{(\lambda_1 - \lambda)|e_1|_2^2}.$$

Logo, para $0 < \lambda < \lambda_1$ e para $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, o problema tem solução. Seguindo o mesmo raciocínio, aplicamos o Método de Minimização Esférica para o espaço vetorial $E_2 = (V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2})^\perp$ e obtemos, quando $0 < \lambda < \lambda_3$, que existe um ponto crítico r_3 de ζ_3, o que significa que u_{r_3} é ponto crítico do funcional J restrito a E_2, sendo

$$\lambda_3 = 1/\max_{u \in E_2, \|u\|=1} |u|_2^2.$$

Considerando as autofunções e_1 e e_2, demonstraremos que, para algumas constantes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, a função $u_{r_3} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ é um ponto crítico de J no espaço $H_0^1(\Omega)$, isto é, queremos que

$$\int_\Omega \nabla(u_{r_3} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\nabla v dx = \lambda \int_\Omega (u_{r_3} + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) v dx + \int_\Omega f(x) v dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Mais uma vez, tomando $v = e + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, com $e \in E_2$ e $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, usando a ortogonalidade entre os espaços e sabendo que u_{r_3} é um ponto crítico do funcional J restrito a E_2, concluímos que

$$\alpha_i = \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)e_i dx}{(\lambda_i - \lambda)|e_i|_2^2}, \ \text{com } i = 1, 2.$$

Acabamos de provar que, para

$$\lambda \in (0, \lambda_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2) \cup (\lambda_2, \lambda_3),$$

o problema tem solução. Por fim, para $n \geq 3$, considerando o espaço

$$E_{n-1} = \left(V_{\lambda_{n-2}} \oplus V_{\lambda_{n-1}}\right)^{\perp},$$

com

$$\lambda_n = 1/\max_{u \in E_{n-1}, \|u\|=1} |u|_2^2,$$

e escolhendo

$$v = e + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i e_i,$$

é possível demonstrar que existe uma constante $r_n > 0$ de modo que u_{r_n} é ponto crítico do funcional J restrito a E_{n-1} e a função

$$u_{r_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$$

é uma solução para o problema (1.13), desde que

$$\alpha_i = \frac{\displaystyle\int_\Omega f e_i dx}{(\lambda_i - \lambda)|e_i|_2^2}, \text{ com } i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

e

$$\lambda \in (0, \lambda_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2) \cup \cdots \cup (\lambda_{n-1}, \lambda_n).$$

■

Capítulo 2

Um método de minimização local

Anteriormente, mostramos que um funcional energia de classe $(\mathcal{J})$ nos permite buscar pontos críticos a partir da função energia ζ. Entretanto, note que isso não significa que ζ tenha pontos críticos ou que será possível provar a existência deles.

Pensando nisso, na Seção 2.1, desenvolveremos um teorema de minimização local envolvendo o Método de Minimização Esférica, o qual nos permitirá garantir a existência de solução. Na Seção 2.2, com o objetivo de mostrar a importância desse teorema, aplicaremos esse resultado a uma classe de problemas elípticos semilineares, contribuindo com o trabalho [21] (ver Introdução).

2.1 Um teorema de existência

A partir da teoria desenvolvida no Capítulo 1, provaremos o teorema abaixo.

Teorema 2.1. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe $(\mathcal{J})$. Suponha que existam $\rho > 0$ e $w \in E$, com $\|w\| < \rho$, tais que*

$$J(w) < \min \left\{ J(0), \min_{\|u\|=\rho} J(u) \right\}.$$

Então existe um mínimo do funcional J na bola aberta $B(0, \rho)$.

Demonstração:

Desde que J é de classe $(\mathcal{J})$, fica bem definida a função energia $\zeta \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ de modo que

$$\zeta(r) = \min_{\|u\|=r} J(u).$$

Seja $\|w\| = \underline{\rho}$. Por hipótese, temos que

$$\zeta(\underline{\rho}) = \min_{\|u\|=\underline{\rho}} J(u) \leq J(w) < \min\left\{J(0), \min_{\|u\|=\rho} J(u)\right\}.$$

Ou ainda

$$\zeta(\underline{\rho}) < \min\left\{\zeta(0), \zeta(\rho)\right\}.$$

Desde que ζ é uma função contínua, a desigualdade acima nos garante que ela assume um mínimo local em $(0,\rho)$. Portanto, pelo Teorema 1.1, existe um mínimo do funcional J na bola aberta $B(0,\rho)$.

■

2.2 Aplicação a um problema semilinear

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory verificando

(f_1) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq C\left(1 + |t|^{p-1}\right), \; \forall\, t \in (0,\infty), \; \forall\, x \in \Omega,$$

com $1 < p < 2^*$ se $N \geq 3$ e $p > 1$ se $N = 2$;

(f_2)

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2} \leq \frac{\lambda_1}{2} < \liminf_{t\to 0^+} \frac{F(x,t)}{t^2}$$

uniformemente em x, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador laplaciano e

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds;$$

(f_3) $f(x,t) \neq 0$ no intervalo $t \in (0,\infty)$, para todo $x \in \Omega$.

Com o intuito de achar uma solução para (2.1), resolveremos, primeiramente, o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u = f^*(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde f^* satisfaz as mesmas condições de f e é definida por

$$f^*(x,t) = \begin{cases} f(x,0), & \text{se} \quad t < 0, \\ f(x,t), & \text{se} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Observe que, devido à hipótese (f_3), F^* não muda de sinal quando $t \in (0,\infty)$. Sabendo disso, usamos a condição (f_2) para provar que F^* é positiva para todo $t > 0$. Na verdade, F^* é crescente nesse intervalo.

O funcional J associado ao problema (2.2) é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

onde

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \int_\Omega F^*(x,u)dx.$$

Definido o funcional, provaremos que J é de classe ($\mathcal{J}$). Na verdade, só precisamos provar as condições para Φ, pois as de Ψ são, neste caso, imediatas. Posteriormente, demonstraremos o teorema de existência de solução.

Lema 2.1. *O funcional* Φ *satisfaz a hipótese* (Φ_1).

Demonstração:

Suponha que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas, a menos de uma subsequência, temos que

$$u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Usando o Teorema A.4 e a continuidade de F^*,

$$F^*(x,u_n(x)) \to F^*(x,u(x)) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.3}$$

De (f_1), segue que

$$|F^*(x, u_n(x))| \leq C \left(|u_n(x)| + \frac{1}{p}|u_n(x)|^p \right) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Mais uma vez, pelo Teorema A.4, existe uma função $g \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|F^*(x, u_n(x))| \leq C \left(|g(x)| + \frac{1}{p}|g(x)|^p \right) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.4}$$

Por (2.3) e (2.4), F^* satisfaz as condições do Teorema A.5. Então

$$\Phi(u_n) = \int_\Omega F^*(x, u_n)dx \to \int_\Omega F^*(x, u)dx = \Phi(u).$$

Logo, Φ é fracamente contínuo e, de forma análoga, é possível demostrar o mesmo para $u \mapsto \Phi'(u)u$.

■

Lema 2.2. *O funcional* Φ *satisfaz a hipótese* (Φ_2).

Demonstração:

Suponha que $\Phi'(u) = 0$, isto é,

$$\int_\Omega f^*(x, u)vdx = 0, \; \forall \, v \in H_0^1(\Omega).$$

Pelo Teorema A.3, temos que $f^*(x, u) = 0$ q.t.p. em Ω e, pela hipótese (f_3), $u \leq 0$. Logo, $F^*(x, u) = 0$ e Φ satisfaz (Φ_2).

■

Lema 2.3. *O funcional* Φ *satisfaz a hipótese* (Φ_3).

Demonstração:

Desde que $F^*(x, t)$ é positiva quando $t \in (0, \infty)$, basta tomar $v \in H_0^1(\Omega)$ positiva e $u_n = \frac{1}{n}v$ para que (Φ_3) ocorra.

■

O próximo resultado será usado para garantir que a solução encontrada para o problema (2.2) é também uma solução de (2.1).

Lema 2.4. *Fixado $r > 0$, se*

$$u_0 \in \mathcal{G}_r = \left\{ u \in B_r;\ \Phi(u) = \max_{\|u\|=r} \int_\Omega F^*(x,u)dx \right\},$$

então $u_0 \geq 0$ q.t.p. em Ω.

Demonstração:

Suponha que $u_0 \not\equiv |u_0|$, onde $u_0 \in \mathcal{G}_r$. Entretanto, uma vez que a função F^* é crescente quando $t \in (0,\infty)$, teríamos que $\|u_0\| = \||u_0|\|$ e

$$\max_{\|u\|=r} \int_\Omega F^*(x,u)dx = \int_\Omega F^*(x,u_0)dx < \int_\Omega F^*(x,|u_0|)dx,$$

o que seria um absurdo, provando que $u_0 = |u_0|$, isto é, $u_0 \geq 0$.

■

Teorema 2.2. *Assumindo as condições (f_1)–(f_3), o problema (2.1) tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Como já foi mencionado, resolveremos, primeiramente, o problema auxiliar (2.2). Uma vez demonstrado que J é de classe $(\mathcal{J})$, provaremos que as demais hipóteses do Teorema 2.1 também ocorrem. Com efeito, seja $e_1 \in S_1$ a autofunção positiva de λ_1. Temos que

$$\frac{J(re_1)}{r^2} = \frac{1}{2} - \int_\Omega \frac{F^*(x,re_1)}{(re_1)^2} e_1^2 dx.$$

Uma vez que F^* é positiva quando $t \in (0,\infty)$, pelo Teorema A.6 e por (f_2), temos

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{J(re_1)}{r^2} = \frac{1}{2} - \liminf_{r\to 0^+} \int_\Omega \frac{F^*(x,re_1)}{(re_1)^2} e_1^2 dx < \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}|e_1|_2^2$$

ou ainda

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{J(re_1)}{r^2} < \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}|e_1|_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2}\frac{\|e_1\|^2}{\lambda_1} = 0.$$

Assim, existe uma constante $\underline{\rho} > 0$ suficientemente pequena tal que

$$J(\underline{\rho} e_1) < 0 = J(0). \tag{2.5}$$

Por outro lado, considere $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $r_n \to \infty$ e $\{v_n\} \subset S_1$. Temos que

$$\frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} = \frac{1}{2} - \int_\Omega \frac{F^*(x,r_n v_n)}{(r_n v_n)^2} v_n^2 dx$$

ou ainda

$$\frac{J(r_nv_n)}{r_n^2} = \frac{1}{2} - \int_{[v_n>0]} \frac{F^*(x,r_nv_n)}{(r_nv_n)^2}v_n^2dx - \int_{[v_n\leq 0]} \frac{F^*(x,r_nv_n)}{r_n^2}dx.$$

Note que a última parcela é não negativa para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$-\int_{[v_n\leq 0]} \frac{F^*(x,r_nv_n)}{r_n^2}dx = -\frac{f(x,0)}{r_n}\int_{[v_n\leq 0]} v_ndx$$

e $f(x,0) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Segue então que

$$\frac{J(r_nv_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \int_{[v_n>0]} \frac{F^*(x,r_nv_n)}{(r_nv_n)^2}v_n^2dx.$$

Em outras palavras,

$$\frac{J(r_nv_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \int_{\Omega} \frac{F^*(x,r_nv_n)}{(r_nv_n)^2}v_n^2\chi_{[v_n>0]}dx. \tag{2.6}$$

Desde que a sequência $\{v_n\}$ é limitada, temos que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$v_n \to v_0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

e, pelo Teorema A.4,

$$v_n(x) \to v_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que significa que, no conjunto para quase todo x em $[v_0 > 0]$, $r_nv_n \to \infty$. Além disso, note que

$$0 \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{F^*(x,t)}{t^2}$$

uniformemente em x, pois F^* é não negativo. Por (f_2),

$$0 \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{F^*(x,t)}{t^2} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{F^*(x,t)}{t^2} \leq \frac{\lambda_1}{2}$$

uniformemente em x. Então existe $k > 0$ de modo que, para t suficientemente grande,

$$\left|\frac{F^*(x,t)}{t^2}\right| \leq k. \tag{2.7}$$

Ainda pelo Teorema A.4, existe uma função positiva $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$v_n^2(x) \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8), para n suficientemente grande,

$$\left| \frac{F^*(x, r_n v_n(x))}{(r_n v_n(x))^2} v_n^2(x) \chi_{[v_n > 0]}(x) \right| \leq h(x)k \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.9}$$

Usando (2.9) e aplicando os Teoremas A.7 e A.8 em (2.6), obtemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F^*(x, r_n v_n)}{(r_n v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n>0]} dx \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \int_{[v_0>0]} v_0^2 dx.$$

Uma vez que $v_0^+ \leq |v_0|$, sendo $v_0^+ = \max\{0, v_0\}$, observe que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \int_{[v_0>0]} v_0^2 dx \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} |v_0|_2^2.$$

Desde que a função norma é fracamente semicontínua inferiormente,

$$\|v_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\| = 1,$$

o que implica que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} |v_0|_2^2 \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \frac{\|v_0\|^2}{\lambda_1} \geq 0.$$

Assim, dado $\alpha > 0$ tal que

$$-\alpha > J(\underline{\rho} e_1),$$

existe $\rho > 0$ suficientemente grande de modo que

$$J(\rho v) \geq -\alpha > J(\underline{\rho} e_1), \ \forall\, v \in S_1. \tag{2.10}$$

De (2.5) e (2.10),

$$J(\underline{\rho} e_1) < \min \left\{ J(0), \min_{\|u\|=\rho} J(u) \right\}.$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, existe $r_* \in (0, \rho)$ tal que u_{r_*} é um mínimo do funcional J e, pelo Lema 2.4, $u_{r_*} \geq 0$ q.t.p. em Ω. Em outras palavras, u_{r_*} é uma solução não trivial de (2.2) e, uma vez que f e f^* coincidem para funções $u \in H_0^1(\Omega)$ não negativas, concluímos que u_{r_*} é também uma solução do problema (2.1).

■

Capítulo 3

Uma versão do Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo, motivados pelos trabalhos [6], [28] e [17], buscaremos mais um resultado de existência usando o Método de Minimização Esférica. Na Seção 3.1, demonstraremos que, partindo do Teorema 1.1, é possível obter uma versão do Teorema do Passo da Montanha que não envolve a condição Palais-Smale (PS). Na Seção 3.2, utilizaremos essa versão para resolver um problema não linear sem a condição de crescimento de Ambrosetti e Rabinowitz. É importante lembrar que a resolução desse problema contribui com o trabalho [22] (ver Introdução).

3.1 Demonstração do teorema principal

Para desenvolver uma versão do Teorema do Passo da Montanha, consideramos um funcional J de classe $(\mathcal{J})$ e assumimos as geometrias do passo da montanha. Usando o Método de Minimização Esférica, foi possível obter o resultado de existência abaixo.

Teorema 3.1. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e J um funcional de classe $(\mathcal{J})$. Suponha que existam $\alpha, \rho > 0$ e $w \in E$, com $\|w\| = R$, tais que*

(H_1) $J(u) \geq \alpha > J(0)$ para todo $u \in S_\rho$;

(H_2) $J(w) < \alpha$, com $R > \rho$.

Então a constante

$$c_* = \max_{r\in[0,R]} \min_{\|u\|=r} J(u) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = c,$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = w\}$, *é um valor crítico de* J.

<u>Demonstração</u>:

Desde que J é de classe $(\mathcal{J})$, fica bem definida a função energia $\zeta \in C([0,\infty), \mathbb{R})$, onde

$$\zeta(r) = \min_{\|u\|=r} J(u)$$

e

$$\zeta(0) = J(0).$$

Pela hipótese (H_1), obtemos que

$$\zeta(\rho) = \min_{\|u\|=\rho} J(u) > J(0).$$

Por outro lado, por (H_2),

$$\zeta(R) = \min_{\|u\|=R} J(u) \leq J(w) < \min_{\|u\|=\rho} J(u) = \zeta(\rho).$$

Assim, devido à geometria de ζ, observe que existe $r_* \in (0, R)$ tal que

$$\zeta(r_*) = \max_{r\in(0,R)} \zeta(r) = \max_{r\in[0,R]} \zeta(r).$$

Em outras palavras, existe uma constante c_* tal que

$$c_* = \max_{r\in(0,R)} \zeta(r) = \max_{r\in[0,R]} \zeta(r) = \max_{r\in[0,R]} \min_{\|u\|=r} J(u).$$

Logo, pelo Teorema de Minimização Esférica, c_* também é um valor crítico de J. Provaremos agora que

$$c_* = \max_{r\in[0,R]} \min_{\|u\|=r} J(u) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = c.$$

De fato, suponha, sem perda de generalidade, que $w = u_R$ e considere o caminho $\gamma_* : [0,1] \to E$ tal que $\gamma_*(0) = 0$ e

$$\gamma_*(t) = u_{tR}.$$

Note que $\gamma_* \in \Gamma$. Então

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} J(\gamma_*(t)) = \max_{t\in[0,1]} J(u_{tR}) = \max_{t\in[0,1]}\min_{\|u\|=tR} J(u).$$

Tomando $r = tR$, segue que

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]}\min_{\|u\|=tR} J(u) = \max_{r\in[0,R]}\min_{\|u\|=r} J(u) = c_*.$$

Por outro lado, considere um caminho $\gamma \in \Gamma$ e o ponto crítico $r_* \in (0, R)$. Uma vez que $\gamma(0) = 0 \in B_{r_*}$, $\gamma(1) = u_R \notin B_{r_*}$ e $\gamma([0,1])$ é conexo, temos que $\gamma([0,1]) \cap S_{r_*}$ é um conjunto não vazio. Assim,

$$\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \geq \min_{\|u\|=r_*} J(u) = \zeta(r_*) = \max_{r\in[0,R]} \zeta(r),\ \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Ou ainda

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \geq \max_{r\in[0,R]} \zeta(r) = \max_{r\in[0,R]}\min_{\|u\|=r} J(u) = c_*.$$

Portanto,

$$c_* = \max_{r\in[0,R]}\min_{\|u\|=r} J(u) = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) = c.$$

■

Note que, a partir da geometria da função energia ζ, foi possível obter a constante c_*, que é uma nova caracterização para a constante c, mas agora de nível maxmin.

3.2 Aplicação a um problema sem a condição de Ambrosseti e Rabinowitz

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ e f é uma função contínua em $\Omega \times \mathbb{R}$ verificando as condições

(f_1) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq C\left(1 + |t|^{p-1}\right),\ 1 < p < 2^*,\ \forall\, t \in (0,\infty),\ \forall\, x \in \Omega;$$

(f_2)

$$0 \leq \limsup_{t\to 0^+} \frac{F(x,t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{2} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{F(x,t)}{t^2}$$

uniformemente em x, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador laplaciano e

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds;$$

(f_3) $f(x,t) \neq 0$ no intervalo $t \in (0,\infty)$, para todo $x \in \Omega$.

Como já foi mencionado (ver Introdução), as hipóteses acima são de grande importância porque substituem a condição de crescimento de Ambrosseti e Rabinowitz (ver [6]) na resolução do problema (3.1). Observe ainda que as condições exigidas para f são bem próximas às hipóteses do problema (2.1). Sendo assim, usaremos o mesmo raciocínio da Seção 2.2, provando, primeiramente, a existência de solução para o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u = f^*(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde f^* satisfaz as mesmas condições de f e é definida por

$$f^*(x,t) = \begin{cases} f(x,0), & \text{se} \quad t < 0, \\ f(x,t), & \text{se} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Mais uma vez, devido à hipótese (f_3), F^* não muda de sinal quando $t \in (0,\infty)$. Sabendo disso, usamos a condição (f_2) para provar que F^* é positiva para todo $t > 0$. Na verdade, F^* é crescente nesse intervalo.

Teorema 3.2. *Assumindo as condições* (f_1)–(f_3), *o problema (3.1) tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

O funcional J associado ao problema (3.2) é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

onde

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \int_\Omega F^*(x,u)dx.$$

De forma análoga ao que foi feito na Seção 2.2, é possível provar que J é de classe $(\mathcal{J})$ e que as funções u_r são não negativas. Resta então provar que J satisfaz (H_1) e (H_2). Com efeito, considere $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ tal que $r_n \to 0$ e $\{v_n\} \subset S_1$. Temos que

$$\frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} = \frac{1}{2} - \int_\Omega \frac{F^*(x, r_n v_n)}{(r_n v_n)^2} v_n^2 dx$$

ou ainda

$$\frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} = \frac{1}{2} - \int_{[v_n>0]} \frac{F^*(x, r_n v_n)}{(r_n v_n)^2} v_n^2 dx - \int_{[v_n \leq 0]} \frac{F^*(x, r_n v_n)}{r_n^2} dx.$$

Note que a última parcela é não negativa para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$-\int_{[v_n \leq 0]} \frac{F^*(r_n v_n)}{r_n^2} dx = -\frac{f(x,0)}{r_n} \int_{[v_n \leq 0]} v_n dx$$

e $f(x,0) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$. Segue então que

$$\frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \int_{[v_n>0]} \frac{F^*(x, r_n v_n)}{(r_n v_n)^2} v_n^2 dx.$$

Em outras palavras,

$$\frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \int_\Omega \frac{F^*(x, r_n v_n)}{(r_n v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n>0]} dx. \tag{3.3}$$

Desde que a sequência $\{v_n\}$ é limitada, temos que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$,

$$v_n \to v_0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

e, pelo Teorema A.4,

$$v_n(x) \to v_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que significa que, no conjunto para quase todo x em $[v_0 > 0]$, $r_n v_n \to 0^+$. Além disso, note que

$$0 \leq \liminf_{t \to 0^+} \frac{F^*(x,t)}{t^2}$$

uniformemente em x, pois F^* é não negativo. Por (f_2),

$$0 \leq \liminf_{t \to 0^+} \frac{F^*(x,t)}{t^2} \leq \limsup_{t \to 0^+} \frac{F^*(x,t)}{t^2} < \frac{\lambda_1}{2}$$

uniformemente em x. Então existe $k > 0$ tal que, para t suficientemente pequeno,

$$\left| \frac{F^*(x,t)}{t^2} \right| \leq k. \tag{3.4}$$

Ainda pelo Teorema A.4, existe uma função positiva $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$v_n^2(x) \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5), para n suficientemente grande,

$$\left| \frac{F^*(x, r_n v_n(x))}{(r_n v_n(x))^2} v_n^2(x) \chi_{[v_n > 0]}(x) \right| \leq h(x)k \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.6}$$

Usando (3.6) e aplicando os Teoremas A.7 e A.8 em (3.3), obtemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} \geq \frac{1}{2} - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F^*(x, r_n v_n)}{(r_n v_n)^2} v_n^2 \chi_{[v_n>0]} dx > \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \int_{[v_0>0]} v_0^2 dx.$$

Uma vez que $v_0^+ \leq |v_0|$, sendo $v_0^+ = \max\{0, v_0\}$, observe que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} > \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \int_{[v_0>0]} v_0^2 dx \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} |v_0|_2^2.$$

Desde que a função norma é fracamente semicontínua inferiormente,

$$\|v_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\| = 1,$$

o que implica que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J(r_n v_n)}{r_n^2} > \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} |v_0|_2^2 \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} \frac{\|v_0\|^2}{\lambda_1} \geq 0.$$

Assim, para ρ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ de modo que

$$J(\rho v) \geq \alpha, \ \forall \, v \in S_1,$$

provando (H_1). Agora, seja $e_1 \in S_1$ a autofunção positiva de λ_1. Temos que

$$\frac{J(re_1)}{r^2} = \frac{1}{2} - \int_\Omega \frac{F^*(x, re_1)}{(re_1)^2} e_1^2 dx.$$

Sendo F^* uma função positiva quando $t \in (0, \infty)$, pelo Teorema A.6, segue que

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{J(re_1)}{r^2} = \frac{1}{2} - \liminf_{r\to\infty} \int_\Omega \frac{F^*(x, re_1)}{(re_1)^2} e_1^2 dx \leq \frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} |e_1|_2^2$$

ou ainda

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{J(re_1)}{r^2}\leq\frac{1}{2}-\frac{\lambda_1}{2}|e_1|_2^2=\frac{1}{2}-\frac{\lambda_1}{2}\frac{\|e_1\|^2}{\lambda_1}=0.$$

Sendo assim, dado $\underline{\alpha}>0$ tal que $\underline{\alpha}<\alpha$, existe $R>0$ suficientemente grande de modo que

$$J(Re_1)\leq\underline{\alpha}<\alpha,$$

provando (H_2). Portanto, pelo Teorema 3.1, J atinge um valor crítico em

$$c_*=\max_{r\in[0,R]}\min_{\|u\|=r}J(u).$$

Em outras palavras, existe $r_*\in(0,R)$ tal que u_{r_*} é uma solução não trivial do problema (3.2). Desde que f e f^* coincidem para valores não negativos, concluímos que u_{r_*} é também uma solução do problema (3.1).

■

Capítulo 4

Um problema do tipo Berestycki-Lions

Como já foi mencionado (ver Introdução), estudaremos neste capítulo um importante problema do tipo Berestycki-Lions. Em especial, motivados por [8], consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $N \geq 3$ e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

(V_1) $V(x) = V(|x|)$;

(V_2) Existem $V_0, V_\infty > 0$ tais que

$$V_0 \leq V(x) \leq V_\infty, \; \forall \, x \in \mathbb{R}^N.$$

Além disso, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando

(f_1)
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{|t| \to \infty} \frac{|f(t)|}{|t|^{p-1}} < \infty,$$

onde $2 < p < 2^*$;

(f_2) Existe $t_0 > 0$ tal que
$$F(t_0) - \frac{V_\infty}{2} t_0^2 > 0,$$

onde $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$;

(f_3) $f(t) \neq 0$ para todo $t > 0$.

Resolveremos o problema (4.1) usando a versão do teorema do passo da montanha que foi desenvolvida anteriormente (ver Teorema 3.1). Desta forma, uma vez definido o funcional J, precisaremos provar que ele é de classe $(\mathcal{J})$. Em particular, provaremos a hipótese (Φ_1), ou seja, que Φ e $u \mapsto \Phi'(u)u$ são funcionais fracamente semicontínuos superiormente. Vale lembrar que, nos capítulos anteriores, usávamos uma condição de crescimento e a imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), \tag{4.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 < s < 2^*$ se $N \geq 3$ e $s > 1$ se $N = 1$ ou $N = 2$, e demonstrávamos que os funcionais eram, na verdade, fracamente contínuos.

Entretanto, neste capítulo, uma vez que estamos estudando um problema no espaço $\mathbb{R}^N$, não podemos mais usar (4.2). Pensando nisso, vamos, inicialmente, restringir o funcional J ao subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, pois, pelo Lema de Strauss (ver Teorema A.9), temos a imersão compacta

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \tag{4.3}$$

onde $2 < p < 2^*$. Vale ressaltar que, pela definição de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, que é o subespaço formado pelas funções radialmente simétricas, a hipótese (V_1) é necessária.

Sendo assim, vamos, primeiramente, estudar o problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f^*(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{4.4}$$

onde f^* satisfaz as mesmas condições de f e é definida por

$$f^*(t) = \begin{cases} f(0), & \text{se} \quad t < 0, \\ f(t), & \text{se} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Estamos considerando a função f^* porque vamos seguir o mesmo raciocínio da Seção 3.2. Mais uma vez, devido à hipótese (f_3), F^* não muda de sinal no intervalo

$(0, \infty)$. Sabendo disso, usamos a condição (f_2) para provar que F^* é positiva para todo $t > 0$. Na verdade, F^* é crescente nesse intervalo.

O funcional $J : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é dado por

$$J(u) = \Psi(u) - \Phi(u),$$

onde

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\right) dx \quad \text{e} \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F^*(u)dx.$$

4.1 Resultados preliminares

Nesta seção, demonstraremos que J é de classe $(\mathcal{J})$.

Lema 4.1. *O funcional* Ψ *satisfaz as hipóteses* (Ψ_1) *e* (Ψ_2).

Demonstração:

Seja $\|\cdot\|_* : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|u\|_* = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\right) dx.$$

Observe que, devido à hipótese (V_2), $\|\cdot\|_*$ define uma norma e esta é equivalente à norma usual do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, considerando uma esfera S_r com a norma $\|\cdot\|_*$, (Ψ_1) e (Ψ_2) ocorrem.

■

De agora em diante, consideraremos que

$$S_r = \left\{u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N);\ \|u\|_* = r\right\}.$$

.

Lema 4.2. *O funcional* Φ *satisfaz a hipótese* (Φ_1).

Demonstração:

Por (f_1), dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f^*(t)| \leq \varepsilon|t| + C|t|^{p-1}.$$

A partir dessa desigualdade, obtemos que

$$|F^*(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + \frac{C}{p}|t|^p, \tag{4.5}$$

onde $2 < p < 2^*$. Considere agora as funções $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$P(t) = F^*(t) \quad \text{e} \quad Q(t) = t^2 + |t|^{2^*}.$$

Desde que F^* é uma função não negativa,

$$0 \leq \lim_{|t| \to \infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \leq \lim_{|t| \to \infty} \frac{P(t)}{|t|^{2^*}}.$$

Usando (4.5), segue que

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{P(t)}{Q(t)} = 0. \tag{4.6}$$

Além disso,

$$0 \leq \lim_{t \to 0} \frac{P(t)}{Q(t)} \leq \lim_{t \to 0} \frac{P(t)}{t^2}.$$

Usando a Regra de l'Hôspital e (f_1), obtemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{F^*(t)}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{f^*(t)}{2t} = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(t)}{Q(t)} = 0. \tag{4.7}$$

Por fim, supondo que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))| dx < \infty. \tag{4.8}$$

Portanto, desde que (4.6), (4.7) e (4.8) ocorrem, pelo Teorema A.10,

$$\Phi(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F^*(u_n) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} F^*(u_0) dx = \Phi(u_0),$$

provando que Φ é fracamente contínuo. De forma análoga, é possível obter o mesmo resultado para $u \mapsto \Phi'(u)u$.

$\blacksquare$

Lema 4.3. *O funcional* Φ *satisfaz a hipótese* (Φ_2).

Demonstração:

Ver Lema 2.2.

■

Lema 4.4. *O funcional* Φ *satisfaz a hipótese* (Φ_3).

Demonstração:

Ver Lema 2.3.

■

O próximo resultado será usado para garantir que a solução encontrada para o problema (4.4) é também uma solução de (4.1).

Lema 4.5. *Fixado* $r > 0$, *se*

$$u_0 \in \mathcal{G}_r = \left\{ u \in B_r;\ \Phi(u) = \max_{\|u\|_* = r} \int_{\mathbb{R}^N} F^*(u)dx \right\},$$

então $u_0 \geq 0$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$.

Demonstração:

Ver Lema 2.4.

■

4.2 Demonstração do teorema principal

Teorema 4.1. *Assumindo as condições* (V_1)–(V_2) *e* (f_1)–(f_3), *o problema (4.1) tem uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Na seção anterior, provamos que o funcional $J : H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é de classe $(\mathcal{J})$. Com o intuito de aplicarmos o Teorema 3.1, precisamos ainda provar que J satisfaz (H_1) e (H_2). Com efeito, usando novamente (4.5), temos que

$$J(u) \geq \|u\|_*^2 - \frac{\varepsilon}{2}|u|_2^2 - \frac{C}{p}|u|_p^p.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ pequeno e usando as imersões contínuas de Sobolev, obtemos constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$J(u) \geq C_1 \|u\|_*^2 - C_2 \|u\|_*^p.$$

Desde que $p > 2$, para ρ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ de modo que

$$J(u) \geq \alpha, \; \forall\, u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \; \text{ com } \; \|u\|_* = \rho,$$

provando (H_1). Por outro lado, usando (f_2), note que existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi)dx - \frac{V_\infty}{2} |\varphi|_2^2 > 0. \tag{4.9}$$

Tomando $w_t(x) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$, com $t > 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_t|^2 dx = \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla \varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx = t^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(x)|^2 dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) \left|\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2 dx = t^N \int_{\mathbb{R}^N} V(xt) |\varphi(x)|^2 dx.$$

Em outras palavras, definindo $R_t = \|w_t\|_*$, temos que

$$R_t^2 = t^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(x)|^2 dx + t^N \int_{\mathbb{R}^N} V(xt) |\varphi(x)|^2 dx.$$

Segue então que

$$J(w_t) \leq \frac{t}{2}^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{t}{2}^N \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty |\varphi|^2 dx - t^N \int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi) dx$$

ou ainda

$$J(w_t) \leq \frac{t}{2}^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 dx - t^N \left(\int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi) dx - \frac{V_\infty}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 dx \right).$$

Assim, por (4.9), $J(w_t) < 0$ para t suficientemente grande. Observe ainda que $R_t \to \infty$ se, e somente se, $t \to \infty$, pois

$$|\nabla w_t|_2^2 + V_0 |w_t|_2^2 \leq \|w_t\|_*^2 \leq |\nabla w_t|_2^2 + V_\infty |w_t|_2^2,$$

ou seja,

$$t^{N-2} |\nabla \varphi|_2^2 + V_0 t^N |\varphi|_2^2 \leq R_t^2 \leq t^{N-2} |\nabla \varphi|_2^2 + V_\infty t^N |\varphi|_2^2.$$

Logo, (H_2) também ocorre e, pelo Teorema 3.1, J atinge um valor crítico em

$$c_* = \max_{r\in[0,R]} \min_{\|u\|_*=r} J(u).$$

Em outras palavras, existe $r_* \in (0, R)$ de modo que u_{r_*} é uma solução não trivial do problema (4.4). Além disso, u_{r_*} é uma função não negativa (ver Lema 4.5). Agora, provaremos que u_{r_*} é também solução de (4.1). De fato, seja $g \in O(N)$, onde $O(N)$ é o grupo das rotações em $\mathbb{R}^N$. Segue que

$$J(g(u)) = \frac{1}{2}\|g(u)\|_*^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F^*(g(u))dx = \frac{1}{2}\|u\|_*^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F^*(u(g(x)))dx.$$

Considerando $T(x) = g^{-1}(x)$ e usando mudança de variáveis, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F^*(u(g(x)))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F^*(u(x))|\mathrm{det}T|dx = \int_{\mathbb{R}^N} F^*(u)dx.$$

Ou seja,

$$J(g(u)) = J(u),\ \forall\, g \in O(N).$$

Portanto, pelo Princípio de Criticalidade de Palais (ver [28]), u_{r_*} também é ponto crítico de J em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, desde que f e f^* coincidem para valores não negativos, concluímos que u_{r_*} é uma solução do problema (4.1).

■

Apêndice A

Resultados Importantes

Teorema A.1. *Sejam E um espaço topológico compacto e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo superiormente. Então Φ é limitado superiormente e o supremo é atingido em um ponto $u \in E$.*

Demonstração:

Basta considerar o funcional $-\Phi$ na demonstração de [13], Teorema 1.1.

■

Teorema A.2. *Sejam E um espaço de Banach, $\Phi, \Psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e u_0 um extremo do funcional Φ restrito ao conjunto*

$$\mathcal{A} = \{u \in E;\ \Psi(u) = 0\}.$$

Se $\Psi'(u) \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{A}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Phi'(u_0)v = \lambda \Psi'(u_0)v,\ \forall\, v \in E.$$

Demonstração:

Ver [19], Proposição 14.3 e Observação 14.4.

■

Teorema A.3. *Se* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega fv\,dx = 0,\ \forall\, v \in C_c^\infty(\Omega),$$

então $f = 0$ *q.t.p. em* Ω.

Demonstração:

Ver [11], Corolário 4.24.

■

Teorema A.4. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções em* $L^p(\Omega)$ *tal que*

$$f_n \to f \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Então existe uma subsequência $\{f_n\}$ *e uma função* $g \in L^p(\Omega)$ *tais que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega$$

e

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Demonstração:

Ver [11], Teorema 4.9.

■

Teorema A.5. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

$$f_n(x) \to f(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Se existir uma função $g \in L^1(\Omega)$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Demonstração:

Ver [11], Teorema 4.2.

■

Teorema A.6. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ não negativas. Então*

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Demonstração:

Ver [9], Lema 4.8.

■

Teorema A.7. *Considere $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis e $g \in L^1(\Omega)$ uma função não negativa de modo que $f_n \le g$ para cada n. Então*

$$\int_\Omega \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right) dx \ge \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

Demonstração:

Basta aplicar o Teorema A.6 na sequência não negativa $g - f_n$.

■

Teorema A.8. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f_n(x) \to f_0(x) \ \ q.t.p. \ em \ \Omega.$$

Então

$$\chi_{[f_0>0]}(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \chi_{[f_n>0]}(x) \ \ q.t.p. \ em \ [f_0 > 0].$$

Demonstração:

Por hipótese, existe um conjunto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ com medida nula tal que

$$f_n(x) \to f_0(x), \forall\, x \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}.$$

Assim, para cada $x \in (\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \cap [f_0 > 0]$, existe $n(x)$ de modo que, se $n \ge n(x)$,

$$f_n(x) > 0.$$

Equivalentemente,

$$\chi_{[f_n>0]}(x) = 1, \forall\, n \ge n(x).$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{[f_n>0]}(x) = 1 = \chi_{[f_0>0]}(x), \forall\, x \in (\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \cap [f_0 > 0].$$

■

Teorema A.9. *Existe uma imersão compacta*

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),$$

onde $2 < p < 2^*$ *se* $N \geq 3$ *e* $p > 2$ *se* $N = 1$ *ou* $N = 2$.

Demonstração:

Ver [19], Capítulo 6, Teorema 1.2.

$\blacksquare$

Teorema A.10. *Sejam* $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções contínuas satisfazendo*

$$\lim_{|t| \to \infty} \frac{P(t)}{Q(t)} = 0.$$

Seja $\{u_n\}$ *uma sequência de funções mensuráveis* $u_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))| dx < \infty$$

e

$$P(u_n(x)) \to v(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\mathbb{R}^N.$$

Então, para qualquer conjunto de Borel limitado B*, temos que*

$$\int_B |P(u_n(x)) - v(x)| dx \to 0.$$

Se assumirmos também que

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(t)}{Q(t)} = 0$$

e

$$\lim_{|x| \to \infty} u_n(x) = 0,$$

uniformemente com relação a n*, então* $P(u_n)$ *converge para* v *em* $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração:

Ver [10], Teorema A.I.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] C. O. Alves, R. C. Duarte, M. A. Souto, *A Berestycki-Lions type result and applications*, Rev. Mat. Iberoam. 35(6) (2019), 1859-1884.

[2] C. O. Alves, S. Liu, *On superlinear $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$*, Nonlinear Analysis 73 (2010), 2566-2579.

[3] C. O. Alves, M. Montenegro, M. A. Souto, *Existence of a ground state solution for a nonlinear scalar field equation with critical growth*, Calc. Var. 43 (2012), 537-554.

[4] A. Ambrosett, H. Brezis, G. Cerami, *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*, Journal of Functional Analysis 122(2) (1994), 519-543.

[5] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[6] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[7] D. Arcoya, J. R. Santos Júnior, A. Suárez, *Positive solutions for a degenerate Kirchhoff problem*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 64(3) (2021), 675-688.

[8] A. Azzollini, A. Pomponio, *On the Schroedinger equation in $\mathbb{R}^N$ under the effect of a general nonlinear term*, Indiana University Mathematics Journal 58(3) (2009), 1361-1378.

[9] R. G. Bartle, *The elements of integration*, John Wiley & Sons, 1966.

[10] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 82 (1983), 313-345.

[11] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[12] I. Ekeland, *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 47 (1974), 324-353.

[13] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics 81 (1989).

[14] D. G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Lecture Notes in Math. 947 (1982), 34-87.

[15] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 2001.

[16] A. Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Math. 54 (1930), 117-176.

[17] Y. Jabri, *The mountain pass theorem: variants, generalizations and some applications*, Cambridge University Press, 2003.

[18] L. Jeanjean, *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 129 (1999), 787-809.

[19] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer, 1994.

[20] S. B. Liu, S. J. Li, *Infinitely many solutions for a superlinear elliptic equation*, Acta Math. Sinica 46 (2003), 625-630.

[21] J. Mawhin, J. R. Ward, M. Willem, *Variational methods and semi-linear elliptic equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 95 (1986), 269-277.

[22] O. H. Miyagaki, M. A. S. Souto, *Superlinear problems without Ambrosetti and Rabinowitz growth condition*, J. Differential Equations 245 (2008), 3628-3638.

[23] Z. Nehari, *Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations*, Acta Math. 105 (1961), 141-175.

[24] Z. Nehari, *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101-123.

[25] J. R. Santos Júnior, G. Siciliano, *Positive solutions for a Kirchhoff problem with vanishing nonlocal term*, J. Differential Equations 265 (2018), 2034-2043.

[26] M. Schechter, W. Zou, *Superlinear problems*, Pacific J. Math. 214 (2004), 145-160.

[27] A. Szulkin, T. Weth, *The method of Nehari manifold*, Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, 597-632, International Press, Somerville, 2010.

[28] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.