UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA/UFAM

Tese de Doutorado

PROBLEMAS ELÍPTICOS QUASILINEARES COM FUNÇÕES PESO E CRESCIMENTO CRÍTICO

Gabriela Coêlho Rodrigues

Belém
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA/UFAM

Gabriela Coêlho Rodrigues

PROBLEMAS ELÍPTICOS QUASILINEARES COM FUNÇÕES PESO E CRESCIMENTO CRÍTICO

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM como pré-requisito para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva

Belém
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R696p Rodrigues, Gabriela Coêlho.
Problemas elípticos quasilineares com funções peso e crescimento crítico / Gabriela Coêlho Rodrigues. — 2022.
82 f.

Orientador(a): Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2022.

1. problema elíptico. 2. método variacional. 3. crescimento crítico. 4. p-laplaciano. I. Título.

CDD 515.355

PROBLEMAS ELÍPTICOS QUASILINEARES COM FUNÇÕES PESO E CRESCIMENTO CRÍTICO

Gabriela Coêlho Rodrigues

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA – UFPA/UFAM COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM MATEMÁTICA E APROVADA EM 28 DE JANEIRO DE 2022 POR

RGNascimento

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
(PPGME/PDM/UFPA) – Presidente

João Pablo Pinheiro da Silva

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
(PPGME/PDM/UFPA) – Orientador – Membro Interno

Julio Roberto Soares da Silva

Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva
(PDM/UFPA) – Membro Interno

Marcelo Fernandes Furtado

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado
(UnB) – Membro Externo

Fernando Bruno Martins Nunes

Prof. Dr. Fernando Bruno Martins Nunes
(UEAP) – Membro Externo

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu sabedoria para ingressar nesse doutorado e a força e capacidade necessárias para concluí-lo.

Ao meu orientador, o Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva pela paciência e dedicação, explorando meus limites e fazendo provar a mim mesma meu potencial.

Agradeço à minha família, em especial a meus pais, Carlos e Rosa, e ao meu irmão pelo apoio, pelas palavras de conforto em momentos em que a calma e esperança de conseguir quase iam embora e pelo incentivo de seguir em frente.

A todos os amigos que entenderam minhas eventuais ausências em passeios e festas e, mesmo durante a pandemia, sempre estiveram presentes, por mais que virtualmente, ouvindo minhas reclamações, me fazendo rir e me incentivando a continuar.

Posso dizer agora, finalmente e com certeza: Eu consegui!

Gabriela Coêlho Rodrigues

Resumo

Este trabalho é o estudo de algumas classes de problemas elípticos quasilineares com funções peso e crescimento crítico. Na primeira parte, estudamos o sistema

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)u^{q-1} + c(x)u^{\alpha-1}v^{\beta}, & \text{em } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu b(x)v^{p-1} + c(x)u^{\alpha}v^{\beta-1}, & \text{em } \Omega \\ 0 \not\equiv u \geq 0, \ 0 \not\equiv v \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

em que $1 < q < p \leq N - p^2$, $\alpha, \beta > 1$, $\lambda, \mu > 0$, a, b, c são funções peso que podem trocar de sinal e satisfazem $a^+ \not\equiv 0$, $b^+ \not\equiv 0$, $c^+ \not\equiv 0$ e $p < \alpha + \beta \leq p^*$. Nas condições impostas, obtemos existência e multiplicidade de soluções não negativas nos níveis subcrítico e crítico utilizando técnicas variacionais tais como Teorema do Passo da Montanha, Princípio Variacional de Ekeland, resultados de regularidade e Princípio de Máximo.

Na segunda parte do trabalho, usamos um método de minimização em conjuntos relacionados com a variedade de Nehari para provar a existência de solução que muda de sinal para o problema

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{p^*-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $2 \leq p < N$, $p^* = Np/(N-p)$, $g^+ := \max\{0, g\} \not\equiv 0$, $f^+ := \max\{0, f\} \not\equiv 0$, $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ e $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Palavras-chave: problema elíptico, método variacional, crescimento crítico, p-laplaciano.

Abstract

This work studies some classes of quasilinear elliptical problems with weight functions and critical growth. In the first part, we study the system

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x) u^{q-1} + c(x) u^{\alpha-1} v^{\beta}, & \text{in } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu b(x) v^{p-1} + c(x) u^{\alpha} v^{\beta-1}, & \text{in } \Omega \\ 0 \not\equiv u \geq 0, \ 0 \not\equiv v \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u = v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

where $1 < q < p \leq N - p^2$, $\alpha, \beta > 1$, $\lambda, \mu > 0$, $a,\ b,\ c$ are wheight functions that may change signs and satisfy $a^+ \not\equiv 0$, $b^+ \not\equiv 0$, $c^+ \not\equiv 0$ and $p < \alpha + \beta \leq p^*$. Under imposed conditions, we obtain existence and multiplicity of solutions at subcritical and critical levels using variational methods such as the Mountain Pass Theorem, Ekeland's Variational Principle, regularity results and Maximum Principle.

In the second part of this work, we use a minimization method on sets related to Nehari manifold to prove the existence of a sign-changing solution to problem

$$-\Delta_p u = \lambda g(x) |u|^{p-2} u + f(x) |u|^{p^*-2} u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N,$$

where $2 \leq p < N$, $p^* = Np/(N-p)$, $g^+ := \max\{0, g\} \not\equiv 0$, $f^+ := \max\{0, f\} \not\equiv 0$, $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ and $f, g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Key Words: elliptic problem, variational method, critical growth, p-laplacian.

Sumário

Notações

- $\partial\Omega$: Fronteira de Ω;
- $\rightarrow$: Convergência forte;
- $\rightharpoonup$: Convergência fraca;
- $\hookrightarrow$: Imersão contínua;
- $|u|_p$: Norma de u em $L^p(\Omega)$ ou em $L^p(\mathbb{R}^N)$;
- $|X|$: Medida do conjunto X.
- $B_r(0)$: Bola de centro em 0 e raio r;
- $o_n(1)$: Ordem pequena;
- $O(1)$: Ordem grande;
- $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N);\ \partial_i u \in L^p(\mathbb{R}^N),\ 1 \leq i \leq n\}$;
- $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^{\mathbb{N}});\ u\,\text{se anula fora de um compacto de}\,\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

Introdução

Neste trabalho, começaremos estudando o seguinte sistema:

$$
(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)u^{q-1} + c(x)u^{\alpha-1}v^{\beta}, & \text{em } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu b(x)v^{p-1} + c(x)u^{\alpha}v^{\beta-1}, & \text{em } \Omega \\ 0 \not\equiv u \geq 0,\ 0 \not\equiv v \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}
$$

No que tange ao operador p-laplaciano, diremos que uma não-linearidade do tipo $|u|^{r-2}u$ tem crescimento natural quando $r = p$ e subnatural quando $0 < r < p$. Equações elípticas semilineares e quasilineares com não-linearidades do tipo subnatural e outra supernatural são largamente estudadas no caso escalar, sendo a motivação deste estudo o problema

$$
(\mathcal{P}_{\lambda}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda m(x)u^{r-1} + n(x)u^{s-1}, & \text{em } \ \Omega, \\ u > 0, & \text{em } \ \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \ \partial\Omega \end{cases}
$$

onde $1 < r < 2 < s$ e $m(x),\ n(x) \in L^{\infty}(\Omega)$. Dentre os vários trabalhos que abordam este tema, é importante destacar o artigo pioneiro de A. Ambrosetti, H. Brézis e G. Cerami (veja [1]) onde os autores estudaram a seguinte classe de problemas elípticos semilineares:

$$
(ABC) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p, & \text{em } \ \Omega, \\ u > 0, & \text{em } \ \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}
$$

em que λ é um parâmetro real e Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 1$. Primeiramente eles mostraram, usando o método de sub e supersolução, que no caso $0 < q < 1 < p$ existe um valor real $\Lambda > 0$ que determina existência de solução para o problema (ABC), havendo uma solução mínima u_λ de energia negativa e crescente em relação a λ quando $\lambda \in (0, \Lambda)$, a existência de pelo menos uma solução fraca no caso $\lambda = \Lambda$ e não existência de solução se $\lambda > \Lambda$. Além disso, para o caso $\lambda \in (0, \Lambda)$, provam a existência de no máximo uma solução u tal que $|u|_\infty \leq A$, onde $A > 0$.

Ainda em [1], os autores provam a existência de uma segunda solução $v_\lambda > u_\lambda$ para o problema (ABC) quando $0 < q < 1 < p \leq 2^* - 1$ usando uma variante do Teorema do Passo da Montanha. Já quando $p = 2^* - 1$ e Ω é um domínio estrelado, argumentando por contradição eles mostram a existência de uma segunda solução w_λ distinta da solução mínima u_λ, onde $|w_\lambda|_\infty \to \infty$ quando $\lambda \to 0^+$.

O segundo resultado apresentado em [1] foi fortemente influenciado pelas ideias do famoso trabalho de Brezis e Niremberg (veja [9]), onde os autores consideraram em $(\mathcal{P}_\lambda)$ o caso $p = 2$ com $m(x) \equiv n(x) \equiv 1$, $r = 2$ e $s = 2N/(N-2)$ com $N \geq 3$. Neste artigo, os autores mostram a existência de uma solução positiva quando $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$ para $N \geq 4$ e não-existência de solução positiva para o caso $\lambda \geq \lambda_1(\Omega)$, onde $\lambda_1(\Omega)$ representa o primeiro autovalor do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Tanto [1] quanto [9] impulsionaram a pesquisa de problemas envolvendo o mesmo tipo de não-linearidade. Podemos mencionar [4], em que os autores estenderam estes resultados para o operador p-laplaciano estudando a existência de duas soluções positivas para o problema

$$(AA) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para obter tais resultados, mostraram que quando $\lambda > 0$ o funcional associado ao problema (AA) satisfaz a condição $(PS)_c$ para qualquer nível $c < \hat{c} := c_0 + (1/N)S^{N/p}$, sendo S a melhor constante de Sobolev. Em seguida, aplicaram o Teorema do Passo da Montanha e mostraram que o nível minimax está abaixo de $\hat{c}$.

Vale mencionar ainda os artigos [12] e [14] de Figueiredo, Gossez e Ubilla, onde os autores estenderam o resultado de [1] para o caso com condição de Dirichlet na fronteira:

$$-\Delta u = \lambda a(x) u^q + b(x) u^p, \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Em [12], foi considerado o caso $0 \leq q < 1 < p$ onde $p \leq 2^* - 1$ no caso $N \geq 3$ (ou $p < \infty$ se $N = 1$ ou 2), com $\lambda > 0$. Com relação às funções peso $a(x)$ e $b(x)$, estas podem mudar de sinal em Ω e desaparecer em partes do domínio. Neste artigo, foram mostrados resultados de existência e não-existência e foram usados métodos variacionais para provar multiplicidade de soluções. Além disso, os autores obtiveram uma estimativa por cima e por baixo para o parâmetro λ^* mostrando que, para tal λ^* limitado, as conclusões de [1] quanto à existência ou não de soluções continuam válidas para o caso em questão.

Já em [14], foi considerado apenas o caso $0 \leq q < 1 < p \leq 2^* - 1$ com $\lambda > 0$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e $N \geq 3$. Neste artigo, quanto às funções peso, apesar de $b(x)$ poder mudar de sinal no domínio, é exigido que $a(x)$ seja não-negativo, o que em particular permite o uso do Princípio de Máximo Forte. Essa exigência quanto a não negatividade do peso $a(x)$ vem a ser uma das principais diferenças em relação a [12]. Além disso, as noções de sub e superlinearidade locais introduzidas em [12] foram essenciais. Neste trabalho, para provar os resultados de existência, não existência e multiplicidade de soluções, foram usadas técnicas de sub e supersoluções bem como métodos variacionais.

A versão de sistemas relacionados para o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$, isto é, sistemas do tipo

$$(\mathcal{S}_{\lambda\mu}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)|u|^{r-1} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} c(x)|u|^{\alpha-1}|v|^{\beta}, & \text{em } \Omega, \\ -\Delta_p v = \mu b(x)|v|^{s-1} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} c(x)|u|^{\alpha}|v|^{\beta-1}, & \text{em } \Omega, \\ 0 \le u \not\equiv 0,\ 0 \le v \not\equiv 0, & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

foi considerado inicialmente por C. O. Alves, de Morais Filho e M. A. Souto (ver [5]), onde os autores estudaram o caso $a(x) \equiv b(x) \equiv 1$ com $p = r = s = 2$ e $\alpha,\ \beta > 1$ satisfazendo $\alpha + \beta \le 2N/(N-2)$, em cujo trabalho obtiveram resultados semelhantes aos de [9]. Quanto ao caso $a(x) \equiv b(x) \equiv 1$ com $1 < p = r = s < N$ e $\alpha,\ \beta > 1$ satisfazendo $\alpha + \beta \le Np/(N-p)$, este é estudado em [15].

Até onde sabemos, T.F. Wu (veja [29]) é o primeiro que estende alguns resultados de [1]. O autor considerou $p = 2$, um crescimento sublinear $r - 1 = s - 1 \in (0, 1)$ e um crescimento subcrítico $\alpha,\ \beta > 1$ satisfazendo $\alpha + \beta < 2N/(N-2)$. Impondo certas condições aos pesos $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$, Wu obteve um resultado de existência de soluções não-negativas desde que $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ sejam suficientemente pequenos, mostrando ainda a existência de um segundo par de soluções considerando hipótese $a(x) \ge 0$.

Ainda se tratando de sistemas elípticos, T. S. Hsu (ver[30]) estudou $(\mathcal{S}_{\lambda\mu})$ considerando $\lambda,\ \mu > 0$, $1 < p < N$, $r - 1 = s - 1 \in (0, p-1)$ e um crescimento crítico $\alpha,\ \beta > 1$ com $\alpha + \beta = p^*$. Impondo certas restrições aos pesos $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$, o autor usa uma divisão da Variedade de Nehari em uma adaptação ao método usado por Tarantello para obter resultados de existência e multiplicidade de soluções para valores pequenos de λ e μ.

No presente trabalho, em relação ao operador p-laplaciano, uma não linearidade do tipo $|u|^{r-2}u$ é dita ter crescimento natural quando $r = p$, e subnatural quando $0 < r < p$. Nossa atenção está voltada para o caso em que temos um sistema onde em uma equação há crescimento natural e na outra, subnatural. Este tipo de não-linearidade também foi considerada em [2], onde os autores investigaram a existência e multiplicidade de soluções positivas para

$$(AH) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{q-1} + \alpha u^{\alpha-1} v^{\beta}, & \text{em } \Omega \\ -\Delta_p v = \mu v^{p} + \beta u^{\alpha} v^{\beta-1}, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

A existência de solução foi mostrada assumindo $1 < q < p < N$, $p < \alpha + \beta < p^*$ em que as potências α e β são subcríticas e mais restritas (veja [2, hipóteses (1.3)-(1.5)]) e o método consistiu em extrair uma sequência Palais-Smale na variedade de Nehari para obter ao menos um par de soluções. Em nosso trabalho, estamos supondo o caso mais geral em que $\alpha,\ \beta > 1$ com $\alpha + \beta \le p^*$, e abordamos também a questão de multiplicidade de soluções, inclusive quando $\beta > p$.

A fim de estabelecer nosso primeiro resultado, apresentamos as hipóteses a serem consideradas e as definições necessárias. Assim, começaremos estudando o seguinte sistema:

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x)u^{q-1} + c(x)u^{\alpha-1}v^{\beta}, & \text{em } \Omega; \\ -\Delta_p v = \mu b(x)v^{p-1} + c(x)u^{\alpha}v^{\beta-1}, & \text{em } \Omega; \\ 0 \not\equiv u \geq 0, \ 0 \not\equiv v \geq 0, & \text{em } \Omega; \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $-\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-laplaciano com $1 < q < p < N$, e $\alpha, \beta > 1$ satisfazendo $p < \alpha + \beta \leq p^* = Np/(N-p)$. Consideraremos também λ e μ parâmetros positivos e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de fronteira suave. Para $g \in L^{\infty}(\Omega)$, definimos $g^+ := \max\{g, 0\}$ e $\Omega_g^+ := \{x \in \Omega;\ g(x) > 0\}$.

Os potenciais $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ satisfazem

(P_0) $a,\ b,\ c \in L^{\infty}(\Omega)$, $0 \not\equiv a^+$, $0 \not\equiv b^+$ e $0 \not\equiv c^+$;

(P_1) O conjunto $\Omega_a^+ \cap \Omega_c^+$ possui ponto interior;

(P_2) O conjunto $\Omega_b^+ \cap \Omega_c^+$ possui ponto interior.

Definimos ainda

$$0 < \frac{1}{\mu_{1b}} := \sup_{w \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} b(x)|w|^p dx}{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla w|^p dx},$$

para mais detalhes, veja [3]. Para este problema, trabalharemos no espaço de Banach $E = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ com norma $\|u, v\| := (\|u\|^p + \|v\|^p)^{1/p}$ onde

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}$$

e, a fim de obter soluções para o problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$, mostraremos a existência de pontos críticos para o funcional energia $I_{\lambda\mu} : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{\lambda\mu}(u, v) := \frac{1}{p}\|u, v\|^p - \frac{\mu}{p}\int_{\Omega} b(x)|v|^p - \frac{\lambda}{q}\int_{\Omega} a(x)(u^+)^q - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_{\Omega} c(x)(u^+)^{\alpha}(v^+)^{\beta}.$$

Nosso primeiro resultado pode ser enunciado como segue:

Teorema 0.1. *Suponha $N \geq p > \beta$ com $1 < q < p < \alpha + \beta \leq p^*$ onde $\alpha,\ \beta \in (1, \infty)$, e assuma que as hipóteses $(P_0) - (P_2)$ se verificam. Considerando $\overline{\mu} \in (0, \mu_{1b})$, então existe $\lambda^*(\mu)$ tal que, para qualquer $0 < \mu < \overline{\mu}$ e $\lambda \in (0, \lambda^*(\overline{\mu})]$ o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui pelo menos um par de soluções (u_1, v_1) com $I_{\lambda\mu}(u_1, v_1) < 0$.*

O ponto chave para provar este resultado é obter um ponto crítico que será solução de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$, o que será feito via Princípio Variacional de Ekeland combinado com estimativas técnicas que surgem devido aos pesos (que não têm sinal definido). Outro ponto sensível da demonstração está em distinguir a natureza dos pontos críticos obtidos. Diremos que um ponto crítico (u, v) é trivial se $u \equiv v \equiv 0$, e semitrivial quando das formas $(u, 0)$ com $u \not\equiv 0$ ou $(0, v)$ com $v \not\equiv 0$.

Soluções semitriviais não ocorrem em [5] nem em [15], pois as mesmas implicam a existência de autovalores menores que o autovalor principal do operador laplaciano e p-laplaciano, respectivamente. Em [29], usando argumentos sobre a variedade de Nehari, o autor também exclui soluções semitriviais (veja [29, Lema 2.3(ii)] e um argumento similar foi usado em [2], contudo tal estratégia não se aplica ao nosso caso. Neste trabalho, mostramos que se o ponto crítico for semitrivial, então será possível obter um par (u, v) com energia menor que a mínima, uma contradição.

Nosso segundo resultado aborda multiplicidade de soluções para o caso subcrítico:

Teorema 0.2. *Suponha que $N \geq p$ com $1 < q < p < \alpha + \beta < p^*$ onde α, $\beta \in (1, \infty)$, e assuma que as hipóteses $(P_0) - (P_2)$ se verificam. Então, para todo $0 < \lambda < \lambda^*(\overline{\mu})$ e $0 < \mu < \overline{\mu} < \mu_{1b}$ o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui pelo menos um par de soluções (u_0, v_0) com $I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) > 0$. Além disso, se $N \geq p > \beta$, então existe outro par de soluções (u_1, v_1) com $I_{\lambda\mu}(u_1, v_1) < 0$.*

Para mostrar este segundo resultado, usamos o Teorema do Passo da Montanha para obter uma segunda solução (u, v), esta com energia positiva, isto é, $I_{\lambda\mu}(u, v) > 0$. Diferente de [2], obtemos este par de soluções (u, v) sem exigir que $\beta < p$. Além das dificuldades técnicas impostas pelos pesos que mudam de sinal, usamos o fato que pontos críticos semitriviais possuem energia negativa para concluir que a solução obtida não é semitrivial.

No terceiro e último resultado para o problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ se refere à multiplicidade de soluções para o caso crítico:

Teorema 0.3. *Suponha que*

(c_1) Para alguma bola $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e $\theta > p$, temos

$$|c|_\infty - c(x) \leq M|x - x_0|^\theta, \quad x \in B_\delta(x_0),$$

(c_δ) e que

$$c_\delta := \inf_{x \in B_\delta(x_0)} \min\{a(x),\, b(x),\, c(x)\} > 0.$$

Suponha ainda que um dos casos abaixo se verifica:

(i) $N \geq p^2 + p$ (o que implica $N > p > \beta$), $2 \leq p < 3$ e $\theta > p$;

(ii) $p > p^* - 2/(p-1)$, $p \geq 3$ e $\theta > p$;

(iii) $\beta < p < N$, $2 \leq p < 3$ e $\theta > \frac{N-p}{p}$.

Se $1 < q < p < \alpha + \beta = p^*$ e as hipóteses $(P_0) - (P_2)$ se verificam, então para todo $0 < \mu < \mu_{1b}$ existe $\lambda^*(\mu)$ tal que, para qualquer $0 < \lambda \leq \lambda^*(\mu)$ e $0 < \mu < \mu_{1b}$ o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui pelo menos um par de soluções (u, v). Além disso, nos casos (ii) e (iii) o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui duas soluções e no caso (i) o sistema possui duas soluções desde que $\beta < p$.

Em [2], temos $a(x) \equiv b(x) \equiv c(x) \equiv 1$, deste modo nossas hipóteses $(P_0) - (P_2)$, (c_1) e (c_δ) são mais gerais. Dentre as principais dificuldades, lembramos que problemas com crescimento crítico (que, neste sistema, significa $\alpha + \beta = p^*$) acarretam perda de compacidade, assim o funcional $I_{\lambda\mu}$ não satisfaz a condição Palais-Smale em todos os níveis. Para superar este tipo de problema, utilizamos uma técnica introduzida em [9] (veja também [1, Lema 4.4]) de modo a calcular precisamente os níveis onde a condição de compacidade é válida, entretanto a presença dos pesos $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ (que podem mudar de sinal) impõem dificuldades adicionais a esta tarefa. Este mesmo tipo de dificuldade aparece em [12] e em [14], porém a hipótese (c_1) é mais geral que nestes dois trabalhos.

Outra dificuldade está relacionada à mudança de sinal das funções peso, o que não nos permite aplicar o Princípio de Máximo e excluir funções do tipo deadcore (isto é, que se anulam no interior de Ω). A hipótese (c_δ) nos assegura que os pesos têm sinal positivo em uma bola, portanto, nesta bola, pelo Princípio de Máximo as funções são positivas ou identicamente nulas. Esta última condição implica ainda mais dificuldade para estimar o nível mimimax do Teorema do Passo da Montanha. Outra contribuição deste trabalho está relacionada à desigualdade que aparece em [4, Lema A.4 (4)] e que desempenha papel fundamental na estimativa do nível minimax. Esta desigualdade para equação escalar não aparece em [1], [12] ou [14], pois é própria de problemas envolvendo o operador $-\Delta_p$, e não pode ser aplicada diretamente no contexto de sistemas. O Lema 2.1 (que foi provado em [24] e utilizado neste trabalho) é a extensão desta desigualdade para duas variáveis.

Na segunda parte deste trabalho, nosso objetivo é investigar existência de solução que muda de sinal para o seguinte problema:

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{p^*-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $-\Delta_p u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $2 \leq p < N$, $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, $g^+ := \max\{0, g\} \not\equiv 0$, $f^+ := \max\{0, f\} \not\equiv 0$, $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ e $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso, consideraremos $\lambda_1^+ > 0$ o autovalor principal de

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p dx > 0 \tag{2}$$

com $u_1^+ > 0$ a autofunção associada a λ_1^+ e assumindo, sem perda de generalidade, que para algum $R > 0$ as seguintes hipóteses sobre as funções f e g são satisfeitas:
(F_1) $f(0) = |f|_\infty$ e $f(x) > 0$ para todo $x \in B_{2R}(0)$;
(F_2) $f(x) = f(0) + o(|x|^{\frac{N-p}{p-1}})$ para todo $x \in B_{2R}(0)$;
(G_1) $g(x) > 0$ para todo $x \in B_{2R}(0)$.

O problema (1) foi estudado por Drábek e Huang em [19], complemento de [17] e é uma extensão de [9] para o operador p-laplaciano, considerando $\Omega = \mathbb{R}^N$ e funções peso. Em [19] foram mostrados resultados de existência e multiplicidade de solução positiva para o caso crítico e, em [17], para o caso subcrítico. Para obter tais resultados, no caso $\lambda < \lambda_1^+$ os autores usaram argumentos semelhantes aos de [9], considerando uma função *cut-off* e mostrando que a condição Palais-Smale é satisfeita para qualquer nível c positivo desde que

$c < (1/N)S^{N/p}|f|_\infty$.

Já para $\lambda \geq \lambda_1^+$, a ideia usada foi particionar a variedade de Nehari em três subconjuntos disjuntos, a saber, $\mathcal{N}_\lambda^+$, $\mathcal{N}_\lambda^-$ e $\mathcal{N}_\lambda^0$, e obter uma solução positiva em cada um dos dois primeiros. Para estes trabalhos, algumas dificuldades a serem mencionadas são as funções peso que podem mudar de sinal, o que requer algumas hipóteses adicionais, em particular sobre a função $f(x)$. Quanto ao caso crítico, podemos citar ainda a falta de compacidade da imersão, que em [19] foi contornada com uma versão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions (no caso $\lambda < \lambda_1^+$).

Em relação ao método, nos baseamos em [37], onde os autores estudaram o problema

$$(CSS) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado de fronteira suave. Em [37], os autores Solimini, Struwe e Cerami obtiveram solução que muda de sinal para o caso particular do problema (CSS) com $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ e $N \geq 6$. A ideia por trás foi construir um conjunto $\mathcal{M}_\lambda := \{u; \quad u^\pm \in \mathcal{N}_\lambda\}$ não-vazio, onde $\mathcal{N}_\lambda$ representa a variedade de Nehari que contém todos os pontos críticos não-nulos do funcional I_λ associado ao problema, para então obter em $\mathcal{M}_\lambda$ pontos críticos para I_λ cuja energia se encontre no intervalo em que a condição Palais-Smale se verifica. Assim, na segunda parte deste trabalho, nosso objetivo é mostrar o seguinte resultado:

Teorema 0.4. *Suponha que (1) satisfaz $2 \leq p < N$, com $N > p^2 + p$ e tome $\lambda_1^+ > 0$ o autovalor principal de (2). Se $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazem (F_1), (F_2) e (G_1) com $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$, então existe uma solução u para o problema (1) que muda de sinal.*

Para obter tal solução que muda de sinal, seguindo a ideia de [37], precisamos de um conjunto não-vazio $\mathcal{M}_\lambda := \{u; \quad u^\pm \in \mathcal{N}_\lambda\}$ limitado inferiormente, e tomando u_0 a solução positiva encontrada em [19] e v_ϵ uma função cut-off, garantimos a existência de uma sequência minimizante em $\mathcal{M}_\lambda$. Mostramos ainda que existe um elemento $z \in \mathcal{M}_\lambda$ da forma $z = \alpha u_0 + \beta v_\epsilon$ para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, contudo, ao contrário de [37], nosso problema estuda o operador p-laplaciano combinado com funções peso que podem mudar de sinal.

Deste modo, nosso primeiro obstáculo é o crescimento crítico que acarreta perda de compacidade nas imersões, então o funcional I_λ associado ao problema (1) não satisfaz a condição Palais-Smale em todos os níveis. A fim de calcular o intervalo de compacidade do funcional e garantir que a energia da sequência minimizante em $\mathcal{M}_\lambda$ esteja contida nele, utilizamos novamente a técnica introduzida em [9] de modo a calcular os níveis em que esta condição é válida, porém a presença dos pesos $f(x)$ e $g(x)$ não só tornam os cálculos mais técnicos como sua possível mudança de sinal ao longo do domínio impõe dificuldades adicionais, daí a importância das hipóteses (F_1), (F_2) e (G_1). Tais obstáculos não apenas justificam a pesquisa deste tipo de problema como a busca de uma solução para (1) que muda de sinal em Ω também complementa os trabalhos de Drábek e Huang.

Este trabalho, então, se divide da seguinte forma: no Capítulo 1 estudaremos existência de solução com energia negativa para o problema $(\mathcal{P}_{\lambda\gamma})$. Para isso, começaremos definindo nossas hipóteses sobre os potenciais $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ e alguns resultados de convergência, mostraremos que dentro de uma bola o ínfimo do funcional associado ao problema é negativo e, para determinado intervalo de λ, na fronteira da bola o ínfimo é positivo. Ainda no primeiro capítulo, provamos que as soluções obtidas numa bola são do tipo (u, v) com $u \not\equiv 0$ e $v \not\equiv 0$ quando $p > \beta$ e demonstramos o Teorema 0.1. Em seguida, provamos que o funcional satisfaz a segunda geometria do passo da montanha, apresentamos o intervalo em que a condição Palais-Smale se verifica no caso subcrítico e concluímos o primeiro capítulo com a demonstração do Teorema 0.2 onde mostramos a existência de uma segunda solução.

No Capítulo 2, estudamos o caso crítico do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\gamma})$ começando com a generalização da desigualdade que aparece em [4, pg. 947] (cuja demonstração pode ser encontrada em [24]), concluímos via princípios de máximo que em uma bola é possível obter soluções não-semitriviais e definimos uma função *cut-off* seguindo a ideia apresentada em [1]. Em seguida, fazemos uma estimativa para o decaimento de nível no caso crítico e estabelecemos o intervalo em que a condição Palais-Smale se verifica, concluindo o segundo capítulo com a demonstração do Teorema 0.3.

O terceiro capítulo deste trabalho estuda existência de solução que muda de sinal para o problema (1) quando $N > p^2 + p$. Começamos com a caracterização variacional do problema e usamos a versão do Lema de Brézis-Lieb apresentada em [12, Lema 3.6] para contornar a falta de compacidade das imersões. A próxima etapa é definir a variedade de Nehari e o conjunto $\mathcal{M}_\lambda$, conforme a ideia apresentada em [37], estudando o intervalo de compacidade do funcional quando $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$. Usaremos então o Princípio Variacional de Ekeland para obter uma sequência Palais-Smale em $\mathcal{M}_\lambda$ e mostraremos que tal nível pertence ao intervalo de compacidade obtido. Para isso, são necessárias algumas hipóteses sobre os potenciais $f(x)$ e $g(x)$ (a saber, (F_1), (F_2) e (G_1)). Por fim, utilizamos Teorema de Miranda (veja [20]) e provamos que existe $z \in \mathcal{M}_\lambda$ que é solução do problema 1.

Acrescentamos ainda três apêndices, o primeiro com alguns resultados usados ao longo deste trabalho e os outros com os cálculos de algumas estimativas presentes nos capítulos 2 e 3 para não sobrecarregar o corpo do texto.

Capítulo 1

Sistema com crescimento subcrítico

Ao longo deste capítulo, estudaremos o seguinte sistema:

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x) u^{q-1} + c(x) u^{\alpha-1} v^{\beta}, & \text{em } \Omega; \\ -\Delta_p v = \mu b(x) v^{p-1} + c(x) u^{\alpha} v^{\beta-1}, & \text{em } \Omega; \\ 0 \not\equiv u \geq 0, \ 0 \not\equiv v \geq 0, & \text{em } \Omega; \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $-\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-laplaciano com $1 < q < p < N$, e $\alpha, \beta > 1$ satisfazendo $p < \alpha + \beta \leq p^* = Np/(N-p)$. Consideraremos também λ e μ parâmetros positivos e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de fronteira suave. No que segue, para $g \in L^\infty(\Omega)$, definimos $g^+ := \max\{g, 0\}$ e $\Omega_g^+ := \{x \in \Omega;\ g(x) > 0\}$.

Os potenciais $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ satisfazem

(P_0) $a,\ b,\ c \in L^\infty(\Omega)$, $0 \not\equiv a^+$, $0 \not\equiv b^+$ e $0 \not\equiv c^+$;

(P_1) O conjunto $\Omega_a^+ \cap \Omega_c^+$ possui ponto interior;

(P_2) O conjunto $\Omega_b^+ \cap \Omega_c^+$ possui ponto interior.

Observe que as hipóteses (P_0)-(P_2), bem como as hipóteses (c_1) e (c_δ) que aparecem no enunciado do Teorema 0.3, são satisfeitas se tomarmos, por exemplo, $a(x) = b(x) = \sin(|x|)$ e $c(x) = \cos(|x|)$.

Começaremos este estudo fazendo a caracterização variacional do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ e demonstrando alguns resultados auxiliares que garantirão a existência de uma primeira solução com energia negativa e a demonstração do Teorema 0.1. Em seguida, mostramos que o funcional verifica as duas geometrias do passo da montanha e, no caso subcrítico, satisfaz a condição Palais-Smale em qualquer nível $c > 0$. Usaremos isso para mostrar a existência de uma segunda solução para $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$, esta com energia positiva, provando o Teorema 0.2.

Definimos ainda

$$0 < \frac{1}{\mu_{1b}} := \sup_{w \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega b(x)|w|^p dx}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^p dx},$$

e, como a parte positiva do peso $b(x)$ é não nula, o valor acima é positivo (para mais detalhes, veja [3]). Para este problema, buscaremos soluções no espaço de Banach $E = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ com norma $\|u,v\| := (\|u\|^p + \|v\|^p)^{1/p}$ onde

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definimos o funcional energia $I_{\lambda\mu} : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_{\lambda\mu}(u,v) := \frac{1}{p}\|u,v\|^p - \frac{\mu}{p}\int_\Omega b(x)|v|^p - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega a(x)(u^+)^q - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega c(x)(u^+)^\alpha (v^+)^\beta$$

Além disso, pelas hipóteses $(P_0) - (P_2)$ conseguimos mostrar que $I_{\lambda\mu}$ está bem definido e $I_{\lambda\mu} \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Observação 1.1. *Se o par (u,v) é ponto crítico de $I_{\lambda\mu}$, então para algum $t > 0$ e $s > 0$ o par (tu, sv) é uma solução fraca para o problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$.*

De fato, se $(u,v) \in E$ é ponto crítico do funcional $I_{\lambda\mu}$, então (u,v) satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda a(x) u^{q-1} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} c(x) u^{\alpha-1} v^\beta \\[2ex] -\Delta_p v = \mu b(x) v^{p-1} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} c(x) u^\alpha v^{\beta-1}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Considere agora o par $(z,w) \in E$ solução do problema $(\mathcal{S})$ com $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu} > 0$ dado por

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} -\Delta_p z = \hat{\lambda} a(x) z^{q-1} + c(x) z^{\alpha-1} w^\beta \\[1ex] -\Delta_p w = \hat{\mu} b(x) w^{p-1} + c(x) z^\alpha w^{\beta-1}. \end{cases}$$

Tomaremos agora $z = tu$ e $w = sv$. Nosso objetivo é definir valores para t e s de modo que o par $(tu, sv) \in E$ seja uma solução fraca do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$. Pela equação anterior, temos

$$\begin{cases} -\Delta_p z = \hat{\lambda} a(x) t^{q-1} u^{q-1} + c(x) t^{\alpha-1} s^\beta u^{\alpha-1} v^\beta \\[1ex] -\Delta_p w = \hat{\mu} b(x) s^{p-1} v^{p-1} + c(x) t^\alpha s^{\beta-1} u^\alpha v^{\beta-1}, \end{cases} \tag{1.2}$$

e ainda, por (1.1), temos

$$\begin{cases} -\Delta_p z = t^{p-1}(-\Delta_p u) = t^{p-1}\left[\lambda a(x) u^{q-1} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} c(x) u^{\alpha-1} v^\beta \right] \\[2ex] -\Delta_p w = s^{p-1}(-\Delta_p v) = s^{p-1}\left[\mu b(x) v^{p-1} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} c(x) u^\alpha v^{\beta-1} \right]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Assim, por (1.2) e (1.3), o par (tu, sv) será solução fraca de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ desde que

$$\begin{cases} \hat{\lambda} a(x) t^{q-1} u^{q-1} + c(x) t^{\alpha-1} s^{\beta} u^{\alpha-1} v^{\beta} = t^{p-1} \left[\lambda a(x) u^{q-1} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} c(x) u^{\alpha-1} v^{\beta} \right] \\ \hat{\mu} b(x) s^{p-1} v^{p-1} + c(x) t^{\alpha} s^{\beta-1} u^{\alpha} v^{\beta-1} = s^{p-1} \left[\mu b(x) v^{p-1} + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} c(x) u^{\alpha} v^{\beta-1} \right], \end{cases}$$

onde as equações serão satisfeitas tomando-se

$$t^{\alpha-1} s^{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} t^{p-1} \ \text{ e } \ t^{\alpha} s^{\beta-1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} s^{p-1}, \tag{1.4}$$

isto é, se

$$t^{\alpha} s^{\beta} = \frac{\alpha t^p}{\alpha+\beta} = \frac{\beta s^p}{\alpha+\beta} \Rightarrow 1 = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{s}{t} \right)^p,$$

de modo que

$$s = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/p} t. \tag{1.5}$$

Substituindo (1.5) na primeira equação de (1.4), como α, $\beta > 1$, obtemos

$$t^{\alpha-p} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/p} t \right]^{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \Rightarrow t = \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{p}} \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-p}} > 0,$$

e substituindo este valor em (1.5), concluímos que se (u, v) é ponto crítico de $I_{\lambda\mu}$, então o par (tu, sv) é solução fraca do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ desde que se tome $t > 0$ e $s > 0$ satisfazendo

$$t = \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{p}} \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-p}} \quad \text{e} \quad s = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/p} \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\beta}{p}} \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-p}}.$$

Ao longo deste estudo, diremos que uma solução (u, v) é trivial se $(u, v) = (0, 0)$ e semitrivial quando é da forma $(u, 0)$ com $u \not\equiv 0$ ou $(0, v)$ com $v \not\equiv 0$.

Seja S a melhor constante de Sobolev, isto é,

$$S := \inf_{\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*} \right)^{p/p^*}} \tag{1.6}$$

e por [15] (ver Seção 3) podemos definir

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}(\Omega) &:= \inf_{\varphi,\phi\in W^{1,p}(\Omega)}\left\{\int_\Omega (|\nabla\varphi|^p+|\nabla\phi|^p)\,dx;\ \int_\Omega |\varphi|^\alpha|\phi|^\beta dx=1\right\}\\
&= \inf_{\varphi,\phi\in W^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}}\left\{\frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla\varphi|^p+|\nabla\phi|^p)\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |\varphi|^\alpha|\phi|^\beta dx}\right\}. \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

Lema 1.2. *Seja Ω um domínio (não necessariamente limitado) e $\alpha+\beta\le p^*$. Então existem $A,B>0$ tais que*

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega)=\frac{A^p+B^p}{(A^\alpha B^\beta)^{\frac{p}{\alpha+\beta}}}S.$$

Demonstração. Seja (z_n) uma sequência minimizante para S e tome $A,B>0$ a serem escolhidos posteriormente. Tomando $u_n=Az_n$ e $v_n=Bz_n$, pela definição de $S_{\alpha\beta}$ concluímos que

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega)\le\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^p+|\nabla v_n|^p)\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx}=\frac{A^p+B^p}{(A^\alpha B^\beta)^{\frac{p}{\alpha+\beta}}}\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla z_n|^p}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|z_n|^{p^*}\right)^{p/\alpha+\beta}}$$

de modo que, tomando o limite quando $n\to\infty$, temos

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega)\le\frac{A^p+B^p}{(A^\alpha B^\beta)^{\frac{p}{\alpha+\beta}}}S.$$

Resta mostrarmos a desigualdade contrária. Para isso, observe que podemos escrever

$$\frac{A^p+B^p}{(A^\alpha B^\beta)^{\frac{p}{\alpha+\beta}}}=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{p\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{-p\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Defina a função $g(x)=x^{p\beta/(\alpha+\beta)}+x^{-p\alpha/(\alpha+\beta)}$, $x>0$. Note que g atinge seu mínimo em $x=\sqrt[p]{\alpha/\beta}$ com

$$g\left(\sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Seja (u_n,v_n) uma sequência minimizante para $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ e defina $w_n=s_nv_n$ para alguma sequência $s_n>0$ de tal forma que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha+\beta}dx=\int_{\mathbb{R}^N}|w_n|^{\alpha+\beta}dx$$

Pela desigualdade de Young, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^\alpha|w_n|^\beta dx\le\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{\alpha+\beta}dx+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_{\mathbb{R}^N}|w_n|^{\alpha+\beta}dx=\int_{\mathbb{R}^N}|w_n|^{\alpha+\beta}dx$$

de tal forma que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |w_n|^\beta dx\right)^{\frac{p}{\alpha+\beta}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{\alpha+\beta} dx\right)^{\frac{p}{\alpha+\beta}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\alpha+\beta} dx\right)^{\frac{p}{\alpha+\beta}}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla v_n|^p)\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx} &= \frac{s_n^{p\beta/(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla v_n|^p)\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |w_n|^\beta dx} \\
&\geq \frac{s_n^{p\beta/(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p)\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\alpha+\beta} dx} + \frac{s_n^{-p\alpha/(\alpha+\beta)} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^p)\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{\alpha+\beta} dx,}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla v_n|^p)\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx} \geq g(s_n) S \geq g\left(\sqrt[p]{\alpha/\beta}\right) S.$$

Escolhendo $A, B > 0$ tais que $A/B = \sqrt[p]{\alpha/\beta}$, concluímos que

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |\nabla v_n|^p)\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx} \geq \frac{A^p + B^p}{(A^\alpha B^\beta)^{\frac{p}{\alpha+\beta}}} S$$

e tomando o limite quando $n \to \infty$ na desigualdade acima, a demonstração está concluída. $\square$

No que segue, consideraremos $B_R := \{(u, v) \in E;\ \|(u, v)\| < R\}$.

Lema 1.3. *Seja $1 < q < p < N$ e $\operatorname{int}(\Omega_a^+) \neq \emptyset$. Então, para quaisquer $\lambda, \mu > 0$*

$$m(\lambda, \mu, R) := \inf_{\overline{B_R}} I_{\lambda\mu}(u, v) < 0$$

Demonstração. Como $I_{\lambda\mu} \in C^1(E, \mathbb{R})$, então $I_{\lambda\mu}$ leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, portanto, $m(\lambda, \mu, R) > -\infty$. Desde que $\operatorname{int}(\Omega_a^+) \neq \emptyset$, existem $x_0 \in \operatorname{int}(\Omega_a^+)$ e $r > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \Omega_a^+$. Tomando $\varphi \in C_c^\infty(B_r(x_0))$ com $\varphi > 0$ em $B_r(x_0)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi)}{t^q} &= \frac{2t^{p-q}}{p}\|\varphi\|^p - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega a(x)|\varphi|^q dx - \frac{t^{p-q}\mu}{p}\int_\Omega b(x)|\varphi|^p dx - \frac{t^{\alpha+\beta-q}}{\alpha+\beta}\int_\Omega c(x)|\varphi|^{\alpha+\beta} dx \\
&= \frac{2t^{p-q}}{p}\|\varphi\|^p - \frac{\lambda}{q}\int_{B_r(x_0)} a(x)|\varphi|^q dx - \frac{t^{p-q}\mu}{p}\int_{B_r(x_0)} b(x)|\varphi|^p dx - \frac{t^{\alpha+\beta-q}}{\alpha+\beta}\int_{B_r(x_0)} c(x)|\varphi|^{\alpha+\beta} dx.
\end{aligned}$$

De modo que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi)}{t^q} = -\frac{\lambda}{q}\int_{B_r(x_0)} a(x)|\varphi|^q dx < 0.$$

Portanto, para $t > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que $(t\varphi, t\varphi) \in B_R$ e $I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi) < 0$, logo $m(\lambda,\mu,R) := \inf_{\overline{B_R}} I_{\lambda\mu}(u,v) \leq I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi) < 0$. $\square$

O próximo lema garante que o par (u, v) que minimiza o funcional $I_{\lambda\mu}$ não é solução semitrivial de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$.

Lema 1.4. *Suponha que* (P_0) *e* (P_1) *se verificam,* $N > p > \beta$ *e* $0 < \mu < \mu_{1b}$*. Seja* $(u_0, v_0) \in B_R$ *tal que* $I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) = m(\lambda,\mu,R)$*. Então* $u_0 \not\equiv 0$ *e* $v_0 \not\equiv 0$*.*

Demonstração. Suponha $u_0 \equiv 0$. Neste caso, teríamos $I_{\lambda\mu}(0, v_0) = m(\lambda,\mu,R) < 0$, e como $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}$, pela definição de μ_{1b},

$$\|v_0\|^p \geq \mu_{1b}\int_\Omega b(x)|v_0|^p dx.$$

Por outro lado, sendo $I_{\lambda\mu}(0, v_0) < 0$, teríamos

$$\|v_0\|^p < \mu\int_\Omega b(x)|v_0|^p dx < \mu_{1b}\int_\Omega b(x)|v_0|^p dx,$$

uma contradição, portanto $u_0 \not\equiv 0$. Suponha agora que $v_0 \equiv 0$ de modo que

$$m(\lambda,\mu,R) = I_{\lambda\mu}(u_0, 0) = \frac{1}{p}\|u_0\|^p - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega a(x)(u_0^+)^q dx.$$

Por (P_1), uma vez que $\Omega_a^+ \cap \Omega_c^+$ possui ponto interior, existe uma bola $B_r \subset \Omega_a^+ \cap \Omega_c^+$. Afirmamos que $c(x)(u_0^+)^\alpha \not\equiv 0$ em B_r. Assumindo isto como verdadeiro, podemos tomar $0 < \varphi \in C_c^\infty(B_r)$ de modo que $\int_\Omega c(x)(u_0^+)^\alpha\varphi^\beta > 0$ e definir

$$J_\mu(\epsilon,\varphi) := \frac{1}{p}\|\epsilon\varphi\|^p - \frac{\mu\epsilon^p}{p}\int_\Omega b(x)|\varphi|^p dx - \frac{\epsilon^\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega c(x)(u_0^+)^\alpha\varphi^\beta dx.$$

Desde que $\beta < p$, temos $J_\mu(\epsilon,\varphi) < 0$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $I_{\lambda\mu}(u_0, \epsilon\varphi) = m(\lambda,\mu,R) + J_\mu(\epsilon,\varphi)$. Assim, tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, teremos $(u_0, \epsilon\varphi) \in B_R$ com $I_{\lambda\mu}(u_0, \epsilon\varphi) < m(\lambda,\mu,R)$, um absurdo. Portanto, $v_0 \not\equiv 0$.

Resta apenas provar a afirmação. Caso a afirmação seja falsa, então teríamos $u_0 \equiv 0$ em B_r e, como antes, poderíamos tomar $0 < \varphi \in C_c^\infty(B_r)$ de modo que

$$\int_\Omega a(x)\varphi^q dx > 0.$$

Observe que, uma vez que estamos assumindo $u_0 \equiv 0$ em B_r e $\text{supp}(\varphi) = B_r$, temos

$$\begin{aligned}
\|u_0 + \epsilon\varphi\|^p &= \int_\Omega |\nabla(u_0 + \epsilon\varphi)|^p dx \\
&= \int_{B_r} |\nabla(u_0 + \epsilon\varphi)|^p dx + \int_{\Omega\setminus B_r} |\nabla(u_0 + \epsilon\varphi)|^p dx \\
&= \int_{B_r} |\nabla(\epsilon\varphi)|^p dx + \int_{\Omega\setminus B_r} |\nabla u_0|^p dx \\
&= \epsilon^p \|\varphi\|^p + \|u_0\|^p.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)[(u_0 + \epsilon\varphi)^+]^q dx &= \int_{B_r} a(x)[(u_0 + \epsilon\varphi)^+]^q dx + \int_{\Omega\setminus B_r} a(x)[(u_0 + \epsilon\varphi)^+]^q dx \\
&= \int_{B_r} a(x)(\epsilon\varphi^+)^q dx + \int_{\Omega\setminus B_r} a(x)(u_0^+)^q dx \\
&= \epsilon^q \int_{B_r} a(x)\varphi^q dx + \int_{\Omega\setminus B_r} a(x)(u_0^+)^q dx.
\end{aligned}$$

Assim, $I_{\lambda\mu}(u_0 + \epsilon\varphi, 0) = I_{\lambda\mu}(u_0, 0) + I_{\lambda\mu}(\epsilon\varphi, 0) = m(\lambda, \mu, R) + I_{\lambda\mu}(\epsilon\varphi, 0)$. Uma vez que $q < p$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$I_{\lambda\mu}(\epsilon\varphi, 0) = \frac{\epsilon^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{\epsilon}{q}\int_\Omega a(x)\varphi^q dx < 0,$$

logo, quando $\epsilon \to 0^+$, temos $(u_0 + \epsilon\varphi, 0) \in B_R$ com $I_{\lambda\mu}(u_0 + \epsilon\varphi, 0) < m(\lambda, \mu, R)$, um absurdo. Portanto, a afirmação é verdadeira. $\square$

Até o momento, não foi necessário impor quaisquer hipóteses sobre o parâmetro λ além da positividade do mesmo, mas para o lema a seguir precisaremos assumir que tanto λ quanto μ são pequenos.

Lema 1.5. *Seja $\overline{\mu} \in (0, \mu_{1b})$. Então existe $\lambda^*(\overline{\mu})$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*(\overline{\mu}))$ e $0 < \mu < \overline{\mu}$, existe $R > 0$ satisfazendo $\inf\limits_{\|u,v\|=R} I_{\lambda\mu}(u, v) > 0$. Além disso, $\lim\limits_{\overline{\mu}\to\mu_{1b}} \lambda^*(\overline{\mu}) = 0$.*

Demonstração. Tomando $0 < \mu < \overline{\mu}$ com $\overline{\mu} \in (0, \mu_{1b})$, pelas imersões de Sobolev e por (1.7) existem constantes $C_1 = C_1(a(x), q) > 0$ e $C_2 = C_2(c(x), S_{\alpha\beta}) > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda\mu}(u, v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{1b}}\right)\|v\|^p - \frac{\lambda C_1}{q}\|u\|^q - C_2\|u, v\|^{\alpha+\beta} \\
&\geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{1b}}\right)\|u, v\|^p - \frac{\lambda C_1}{q}\|u, v\|^q - C_2\|u, v\|^{\alpha+\beta} \\
&\geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\overline{\mu}}{\mu_{1b}}\right)\|u, v\|^p - \frac{\lambda C_1}{q}\|u, v\|^q - C_2\|u, v\|^{\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

então, se $\|u,v\| = R$, temos

$$I_{\lambda\mu}(u,v) \geq f(R) := \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\overline{\mu}}{\mu_{1b}}\right) R^p - \frac{\lambda C_1}{q} R^q - C_2 R^{\alpha+\beta}.$$

Como $q < p < \alpha + \beta$, teremos $f(R) > 0$ desde que

$$\frac{1}{p}\left(1 - \frac{\overline{\mu}}{\mu_{1b}}\right) R^p > \frac{2\lambda C_1}{q} R^q \quad \text{e} \quad \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\overline{\mu}}{\mu_{1b}}\right) R^p > 2C_2 R^{\alpha+\beta}, \tag{1.8}$$

isto é, desde que consigamos obter $R > 0$ satisfazendo

$$A_1(\lambda, \overline{\mu}) := \left(\frac{2p\lambda C_1}{q\left(1 - \dfrac{\overline{\mu}}{\mu_{1b}}\right)}\right)^{\frac{1}{p-q}} < R < \left[\frac{1}{2pC_2}\left(1 - \frac{\overline{\mu}}{\mu_{1b}}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-p}} =: A_2(\overline{\mu}).$$

Vale observar que desigualdade é possível para $\lambda > 0$ que satisfaz

$$\left[\frac{1}{2pC_2}\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{1b}}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-p}} > \left(\frac{2p\lambda C_1}{q\left(1 - \dfrac{\mu}{\mu_{1b}}\right)}\right)^{\frac{1}{p-q}}. \tag{1.9}$$

Assim, (1.8) é valido para algum $R \in (A_1(\lambda, \overline{\mu}), A_2(\overline{\mu}))$, e por (1.9) conclui-se a demonstração do lema tomando

$$\lambda^*(\overline{\mu}) = \frac{q}{C_1}\left[2p\left(1 - \frac{\overline{\mu}}{\mu_{1b}}\right)\right]^{\frac{\alpha+\beta-q}{\alpha+\beta-p}} C_2^{\frac{p-q}{\alpha+\beta-p}}.$$

□

Observação 1.6. *Note que na demonstração do Lema 1.5 a constante $C_1 := C_1(a(x), q) > 0$ satisfaz*

$$\int_\Omega a(x)|u|^q dx \leq C_1\|u\|^q, \;\; \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e, definindo $g(t) := (|t|^p/p) - (\lambda C_1|t|^q/q)$, temos $g(R) \geq f(R) > 0$. Além disso, temos

$$g'(t) = |t|^{p-2}t - \lambda C_1|t|^{q-2}t,$$

de modo que $g'(t) > 0$ se, e somente se, $|t|^{p-q} > \lambda C_1$. Tomando $|t| = R$, onde $R > 0$ é o mesmo obtido no lema anterior, por (1.8) vemos que

$$R^{p-q} > \lambda C_1 \frac{2p}{\left(1 - \dfrac{\mu}{\mu_{1b}}\right)} > \lambda C_1 2p > \lambda C_1,$$

pois $1 < p$ e $\mu \in (0, \mu_{1b})$. Assim, g é crescente no intervalo $[R, +\infty)$ e, tomando $\|u\| \geq R$, *obtemos $I_{\lambda\mu}(u,0) \geq g(\|u\|) \geq g(R) > 0$. Isto nos permite escrever*

$$\inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} I_{\lambda\mu}(u,0) = \inf_{\|u\| \leq R} I_{\lambda\mu}(u,0) < 0,$$

mostrando que soluções semitriviais apresentam energia negativa.

Recordamos que $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das medidas positivas de Radon, que pode ser caracterizado como um funcional linear contínuo positivo sobre $C_c(\mathbb{R}^N)$ usando o Teorema da Representação de Riez (veja o Teorema 1 da seção 1.8 de [27]). Diremos que $\mu_n \rightharpoonup \mu$ fracamente em $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ quando

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi d\mu, \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^N).$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, definimos a medida positiva de Radon como

$$\mu_f(X) := \int_X |f| dx,$$

deste modo, quando $f_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$, dizer que $f_n \rightharpoonup \mu$ fracamente em $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ significa que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \phi |f_n| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \phi d\mu_{f_n} \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi d\mu, \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^N).$$

Para mais detalhes sobre a convergência fraca em $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$, consulte as seções 1.8 e 1.9 de [27] e o capítulo 1 de [25].

Definição 1.7. *Dizemos que uma função $H \in C^1(E, \mathbb{R})$ é k-homogênea quando para todo $t > 0$ e $(x, y) \in E$ a igualdade $H(tx, ty) = t^k H(x, y)$ se verifica.*

A seguir, mostraremos dois resultados auxiliares (cujas demonstrações podem ser encontradas em [15]) que serão usados para provar uma versão do Segundo Lema de Concentração e Compacidade de Lions . No que segue, consideraremos $H(u, v) : \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ uma função $(\alpha + \beta)$-homogênea de classe C^1.

Lema 1.8. *Dado $\epsilon > 0$, existe C_ϵ tal que*

$$|H(u+s, v+t) - H(u, v)| \leq \epsilon(|u|^{\alpha+\beta} + |v|^{\alpha+\beta}) + C_\epsilon(|s|^{\alpha+\beta} + |t|^{\alpha+\beta}). \tag{1.10}$$

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, para algum $\theta \in (0, 1)$ podemos escrever

$$|H(w+s, z+t) - H(w, z)| = |\langle \nabla H(w + \theta s, z + \theta t), (s, t) \rangle|.$$

Usando as propriedades de funções $(\alpha + \beta)$-homogêneas, concluímos que ∇H é uma função $(\alpha + \beta - 1)$-homogênea e existe $M_H > 0$ tal que $|\nabla H(s, t)| \leq M_H$, onde

$$M_H := \max\{\nabla H(s, t),\ s, t \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N);\ |s|^{\alpha+\beta-1} + |t|^{\alpha+\beta-1} = 1\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}|H(w+s,z+t)-H(w,z)| &\leq |\nabla H(w+\theta s, z+\theta t)|.|(s,t)|\\ &\leq M_H\left(|w+\theta s|^{\alpha+\beta-1}+|z+\theta t|^{\alpha+\beta-1}\right)(|s|+|t|).\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $|A+\theta B|^k \leq C_k(|A|^k+|B|^k)$ válida para todo $k>1$, $\theta\in(0,1)$ e $A,B\in\mathbb{R}$, obtemos $C>0$ tal que

$$|H(w+s,z+t)-H(w,z)| \leq C\left(|w|^{\alpha+\beta-1}+|s|^{\alpha+\beta-1}+|z|^{\alpha+\beta-1}+|t|^{\alpha+\beta-1}\right)(|s|+|t|).$$

Finalmente, aplicando a desigualdade de Young na última desigualdade, obtemos o resultado desejado. □

Lema 1.9. *Seja ν uma medida sobre Ω, e considere (u_n), (v_n) sequências tais que $u_n(x)\to u(x)$ e $v_n(x)\to v(x)$ quase sempre em Ω e $\|u_n\|_{L^{\alpha+\beta}(\Omega,d\nu)}$, $\|v_n\|_{L^{\alpha+\beta}(\Omega,d\nu)}$ são limitadas. Então*

$$\int_\Omega H(u_n,v_n)d\nu-\int_\Omega H(u_n-u,v_n-u)d\nu=\int_\Omega H(u,v)d\nu+o_n(1).$$

Demonstração. Fixando $\epsilon>0$, tomaremos C_ϵ como no Lema 1.8. Definiremos também a função

$$f_n := |H(u_n,v_n)-H(u_n-u,v_n-u)-H(u,v)|.$$

Aplicando (1.10) em f_n com $w=u_n-u$, $z=v_n-v$, $s=u$ e $t=v$, temos

$$\begin{aligned}f_n &\leq |H(u_n,v_n)-H(u_n-u,v_n-u)|+|H(u,v)|\\ &\leq |H(u,v)|+\epsilon\left(|u_n-u|^{\alpha+\beta}+|v_n-v|^{\alpha+\beta}\right)+C_\epsilon\left(|u|^{\alpha+\beta}+|v|^{\alpha+\beta}\right).\end{aligned}$$

Como H é uma função $(\alpha+\beta)$-homogênea, então $H(u,v)\leq M\left(|u|^{\alpha+\beta}+|v|^{\alpha+\beta}\right)$, onde $M:=\max\left\{H(u,v),\ u,v\in\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N);\ |u|^{\alpha+\beta}+|v|^{\alpha+\beta}=1\right\}>0$. Assim,

$$W_{n,\epsilon}:=f_n-\epsilon\left(|u_n-u|^{\alpha+\beta}+|v_n-v|^{\alpha+\beta}\right)\leq (M+C_\epsilon)\left(|u|^{\alpha+\beta}+|v|^{\alpha+\beta}\right)\in L^1(\Omega,d\nu)$$

e $W_{n,\epsilon}\to 0$ quase sempre em Ω quando $n\to\infty$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega W_{n,\epsilon}d\nu\to 0.$$

Desde que $f_n=W_{n,\epsilon}+\epsilon\left(|u_n-u|^{\alpha+\beta}+|v_n-v|^{\alpha+\beta}\right)$ e, por hipótese, $\|u_n\|_{L^{\alpha+\beta}(\Omega,d\nu)}$, $\|v_n\|_{L^{\alpha+\beta}(\Omega,d\nu)}$ são limitadas, obtemos

$$\limsup\int_\Omega f_n d\nu\leq\epsilon\limsup\int_\Omega\left(|u_n-u|^{\alpha+\beta}+|v_n-v|^{\alpha+\beta}\right)d\nu\leq C\epsilon.$$

Uma vez que $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$o_n(1) = \int_\Omega f_n d\nu = \int_\Omega |H(u_n, v_n) - H(u_n - u, v_n - u) - H(u, v)| d\nu,$$

de onde segue o resultado desejado. $\square$

O resultado seguinte é uma versão do Segundo Lema de Concentração e Compacidade de P.L. Lions ([31], Lemma I.1) cuja demonstração seguirá a ideia proposta no Lema 2.1 de [38] (veja também o Lema 2.1 de [10]).

Lema 1.10. *Suponha que a sequência $(u_n, v_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz*

$$\begin{array}{ll} (u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) & \text{fracamente em } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ (u_n(x), v_n(x)) \to (u(x), v(x)) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u_n|^p \rightharpoonup \omega & \text{fracamente em } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N), \\ |\nabla v_n|^p \rightharpoonup \sigma & \text{fracamente em } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N), \\ |u_n|^\alpha |v_n|^\beta \rightharpoonup \nu & \text{fracamente em } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N). \end{array}$$

Então existem um conjunto J no máximo enumerável, uma família $\{x_j\}_{j \in J} \subset \mathbb{R}^N$ de pontos distintos e $\{\omega\}_{j\in J}$, $\{\sigma\}_{j\in J}$, $\{\nu\}_{j\in J} \subset [0, +\infty)$ tais que

$$\nu = |u|^\alpha |v|^\beta + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \tag{1.11}$$

$$\omega \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{1.12}$$

$$\sigma \geq |\nabla v|^p + \sum_{j\in J} \sigma_j \delta_{x_j}, \tag{1.13}$$

onde δ_x representa a medida de Dirac no ponto x. Além disso, $\omega_j + \sigma_j \geq S_{\alpha\beta}(\nu_j)^{\frac{p}{p^*}}$.

Demonstração. Considere $\tilde{u}_n = u_n - u$ e $\tilde{v}_n = v_n - v$ de modo que $\tilde{u}_n(x)$, $\tilde{v}_n(x) \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Usando (1.7) e a desigualdade $(A+B)^p \leq A^p + C_p B^p$ válida para quaisquer A, $B \geq 0$ e $p > 1$, vemos que

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\beta} |\tilde{u}_n|^\alpha |\tilde{v}_n|^\beta dx\right]^{\frac{p}{\alpha+\beta}} &\leq S_{\alpha\beta}^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\phi\tilde{u}_n)|^p + |\nabla(\phi\tilde{v}_n)|^p)\, dx \\ &\leq S_{\alpha\beta}^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} (|\phi\nabla\tilde{u}_n + \tilde{u}_n\nabla\phi|^p + |\phi\nabla\tilde{v}_n + \tilde{v}_n\nabla\phi|^p)\, dx \\ &\leq C\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p (|\nabla\tilde{u}_n|^p + |\nabla\tilde{v}_n|^p)\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p (|\tilde{u}_n|^p + |\tilde{v}_n|^p)\, dx\right], \end{aligned} \tag{1.14}$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p (|\tilde{u}_n|^p + |\tilde{v}_n|^p)\, dx = o_n(1)$$

uma vez que $\tilde{u}_n(x)$, $\tilde{v}_n(x) \to 0$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Assumindo as convergências $|\nabla\tilde{u}_n|^p \rightharpoonup \tilde{\omega}$, $|\nabla\tilde{v}_n|^p \rightharpoonup \tilde{\sigma}$ e $|\tilde{u}_n|^\alpha |\tilde{v}_n|^\beta \rightharpoonup \tilde{\nu}$ no sentido de medidas e tomando o limite na desigualdade anterior, concluímos que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\beta} d\tilde{\nu}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leq C\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p (d\tilde{\omega}+d\tilde{\sigma})\right]^{\frac{1}{p}}, \ \forall\, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Lema 1.2 de [31], existe um conjunto J no máximo enumerável, uma família $\{x_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}^N$ de pontos distintos e $\{\nu\}_{j\in J} \subset [0,+\infty)$ tais que

$$\tilde{\nu} = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}. \tag{1.15}$$

Note que podemos considerar a função $(\alpha+\beta)$-homogênea $H(u,v) = |u|^\alpha |v|^\beta$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ de modo que, aplicando o Lema 1.9, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\beta}|u_n|^\alpha |v_n|^\beta dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\beta}|u|^\alpha|v|^\beta dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{\alpha+\beta}|u_n-u|^\alpha|v_n-v|^\beta dx + o_n(1).$$

Assim, temos $\nu = |u|^\alpha|v|^\beta + \tilde{\nu}$ e por (1.15) obtemos (1.11). Para mostrar o restante do lema, vamos escolher $\eta \in C_c^\infty(B_1)$, com $\eta(0)=1$, $0 \leq \eta \leq 1$ satisfazendo

$$\phi(x) = \eta\left(\frac{x-x_j}{\epsilon}\right).$$

Por (1.11), (1.14) e as convergências em medida dadas na hipótese, vemos que

$$\int_{B_\epsilon(x_j)} |\phi|^{\alpha+\beta}|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx \to \int_{B_\epsilon(x_j)} |\phi|^{\alpha+\beta}|u|^\alpha|v|^\beta dx + \nu_j \text{ quando } n\to\infty. \tag{1.16}$$

Usando novamente (1.7) e a desigualdade $(A+B)^p \leq A^p + C_p B^p$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left[\int_{B_\epsilon(x_j)} |\phi|^{\alpha+\beta}|u_n|^\alpha|v_n|^\beta dx\right]^{\frac{p}{\alpha+\beta}} &\leq S_{\alpha\beta}^{-1}\int_{B_\epsilon(x_j)} \left(|\nabla(\phi u_n)|^p + |\nabla(\phi v_n)|^p\right) dx \\
&\leq S_{\alpha\beta}^{-1}\int_{B_\epsilon(x_j)} \left(|\phi\nabla u_n + u_n\nabla\phi|^p + |\phi\nabla v_n + v_n\nabla\phi|^p\right) dx \\
&\leq S_{\alpha\beta}^{-1} C_p \int_{B_\epsilon(x_j)} |\phi|^p \left(|\nabla u_n|^p + |\nabla v_n|^p\right) dx \\
&\qquad + S_{\alpha\beta}^{-1} C_p \int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla\phi|^p \left(|u_n|^p + |v_n|^p\right) dx.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n\to\infty$, por (1.16) concluímos que

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}\left[\int_{B_\epsilon(x_j)} |\phi|^{\alpha+\beta}|u|^\alpha|v|^\beta dx + \nu_j\right]^{\frac{p}{\alpha+\beta}} &\leq C_p\left[\int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla\phi|^p\left(|u|^p+|v|^p\right) dx + \int_{B_\epsilon(x_j)} |\phi|^p (d\omega + d\sigma)\right] \\
&= C_p \int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla\phi|^p \left(|u|^p + |v|^p\right) dx + \omega(B_\epsilon(x_j)) + \sigma(B_\epsilon(x_j))
\end{aligned}$$

onde
$$\int_{B_\epsilon(x_j)} |\phi|^{\alpha+\beta}|u|^\alpha|v|^\beta dx = \int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla\phi|^p \left(|u|^p + |v|^p\right) dx = o_\epsilon(1).$$

Finalmente, tomando o limite quando $\epsilon \to 0$, obtemos
$$S_{\alpha\beta}(\nu_j)^{\frac{p}{\alpha+\beta}} \leq \lim_{\epsilon\to 0}\omega(B_\epsilon(x_j)) + \lim_{\epsilon\to 0}\sigma(B_\epsilon(x_j)),$$
e considerando
$$\omega = \lim_{\epsilon\to 0}\omega(B_\epsilon(x_j)) \text{ e } \sigma = \lim_{\epsilon\to 0}\sigma(B_\epsilon(x_j))$$
verifica-se a desigualdade $\omega_j + \sigma_j \geq S_{\alpha\beta}(\nu_j)^{\frac{p}{\alpha+\beta}}$. Consequentemente,
$$\omega \geq \sum_{j\in J}\omega_j\delta_{x_j} \text{ e } \sigma \geq \sum_{j\in J}\sigma_j\delta_{x_j}$$
e as convergências fracas implicam que $\omega \geq |\nabla u|^p$ e $\sigma \geq |\nabla v|^p$. Desde que $|\nabla u|^p$ e $|\nabla v|^p$ são ortogonais a $\sum_{j\in J}\omega_j\delta_{x_j}$ e $\sum_{j\in J}\sigma_j\delta_{x_j}$, respectivamente, vemos que (1.12) e (1.13) se verificam. □

Lema 1.11. *Supondo $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$ e definindo $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, u_n e v_n se anulando em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, sob as condições do Lema 1.10 o conjunto J é no máximo finito.*

Demonstração. Para cada $\epsilon > 0$, definimos $\phi_\epsilon(x) = \phi((x - x_j)/\epsilon)$ onde $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ com $\phi(x) = 1$ em $B_1(0)$ e $\phi(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N\setminus B_2(0)$. Desde que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos (u_n, v_n) limitado e, pela definição de ϕ_ϵ, concluímos que $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n\phi_\epsilon, v_n\phi_\epsilon) \to 0$. Assim,
$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n\phi_\epsilon) + |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla(v_n\phi_\epsilon) &= \int_\Omega \left(\lambda a(x)|u_n|^q + \mu b(x)|v_n|^p\right)\phi_\epsilon dx \\ &+ \int_\Omega c(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta\phi_\epsilon^{\alpha+\beta}dx + o_n(1).\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e considerando o suporte de ϕ_ϵ, temos
$$\left|\int_\Omega u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\phi_\epsilon\right| \leq \left(\int_{B_\epsilon(x_j)}|\nabla u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{B_\epsilon(x_j)}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}|\nabla\phi_\epsilon|_\infty|B_\epsilon(x_j)| \leq O\left(\epsilon^{\frac{N-p}{p}}\right).$$

Analogamente,
$$\left|\int_\Omega v_n|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla\phi_\epsilon\right| \leq O\left(\epsilon^{\frac{N-p}{p}}\right),$$
de modo que, considerando as convergências $|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \omega$ e $|\nabla v_n|^p \rightharpoonup \sigma$, obtemos
$$\lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n\phi_\epsilon) + |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla(v_n\phi_\epsilon)\right) = \omega_j + \sigma_j.$$

Por outro lado, como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ é compacta para $1 \leq s < p^*$, vemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\lambda a(x)|u_n|^q + \mu b(x)|v_n|^p\right)\phi_\epsilon = 0$$

e, como $|u_n|^\alpha|v_n|^\beta \rightharpoonup \nu$ fracamente em $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$, então

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega c(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta\phi_\epsilon^{\alpha+\beta} = \int_{\mathbb{R}^N} c(x)\phi_\epsilon^{\alpha+\beta}d\nu \le |c|_\infty\int_{\mathbb{R}^N}\phi_\epsilon^{\alpha+\beta}d\nu = |c|_\infty\nu_j + o_\epsilon(1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\omega_j + \sigma_j &= \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_n\phi_\epsilon) + |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla(v_n\phi_\epsilon)\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \left(\lambda a(x)|u_n|^q + \mu b(x)|v_n|^p\right)\phi_\epsilon + \int_\Omega c(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta\phi_\epsilon^{\alpha+\beta}\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \left(\lambda a(x)|u_n|^q + \mu b(x)|v_n|^p\right)\phi_\epsilon + \int_\Omega c(x)|u_n|^\alpha|v_n|^\beta\phi_\epsilon^{\alpha+\beta}\right)\\
&\ge |c|_\infty\nu_j.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.10, concluímos que $|c|_\infty\nu_j \ge S_{\alpha\beta}\nu_j^{\frac{p}{\alpha+\beta}}$. Assim, temos $\nu_j \ge M > 0$ para todo $j \in J$ e algum $M = M(S_{\alpha\beta}, p, |c|_\infty)$. Além disso, como $\sum_{j\in J}\nu_j \le \nu(\mathbb{R}^N) < +\infty$, então o conjunto J é vazio ou finito. $\square$

Lema 1.12. *Suponha que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ fracamente em E e $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$ em E^*, então*

$$|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ fracamente em } \left[L^{p/(p-1)}(\Omega)\right]^*.$$

$$|\nabla v_n|^{p-2}\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \rightharpoonup |\nabla v|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ fracamente em } \left[L^{p/(p-1)}(\Omega)\right]^*.$$

Demonstração. Seja $K \subset \Omega\backslash\{x_j\}_{j\in J}$ um conjunto compacto fixado. Como

$$|u_n|^\alpha|v_n|^\beta \rightharpoonup |u|^\alpha|v|^\beta + \sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j},$$

por [27, Teorema 1 (ii), pg. 54] e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{K}}|u_n|^\alpha|v_n|^\beta = \int_{\mathcal{K}}|u|^\alpha|v|^\beta \text{ para todo } \mathcal{K} \subset \Omega\backslash\{x_j\}_{j\in J} \text{ compacto.} \tag{1.17}$$

Considerando $P(x,y) := (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2})\cdot(x-y)$, por [39, pg. 210] existe $C_p > 0$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$

$$P(x,y) \ge \begin{cases} C_p|x-y|^p & , \text{ se } p \ge 2;\\ C_p|x-y|^2(|x|+|y|)^{p-2} & , \text{ se } 1 < p < 2.\end{cases} \tag{1.18}$$

Como J é um conjunto finito (ou vazio), podemos tomar $\phi \in C_c^\infty(\Omega, [0,1])$ de modo que

$\phi = 1$ em K e $K_1 := \text{supp}\phi \subset \Omega \backslash \{x_j\}_{j\in J}$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_K P(\nabla u_n, \nabla u) &\leq \langle I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n), ((u_n - u)\phi, 0)\rangle - \langle I'_{\lambda\mu}(u, v), ((u_n - u)\phi, 0)\rangle \\ &+ \lambda \int_\Omega a(x) \left[|u_n|^{q-1}(u_n - u) - |u|^{q-1}(u_n - u)\right] \phi \\ &+ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \int_\Omega c(x)(|u_n|^{\alpha-1}|v_n|^\beta - |u|^{\alpha-1}|v|^\beta)(u_n - u)\phi \\ &= o_n(1) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \int_{K_1} c(x)(|u_n|^{\alpha-1}|v_n|^\beta - |u|^{\alpha-1}|v|^\beta)(u_n - u) \\ &\leq o_n(1) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}|c|_\infty \int_{K_1} (|u_n|^\alpha|v_n|^\beta - |u|^\alpha|v|^\beta) = o_n(1), \end{aligned}$$

onde usamos (1.17) com $\mathcal{K} = K_1$ na última desigualdade. Como $\displaystyle\int_K P(\nabla u_n, \nabla u) = o_n(1)$, por (1.18) e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\mathcal{K}} |\nabla u_n - \nabla u|^p dx = o_n(1) \text{ para todo } \mathcal{K} \subset \Omega\backslash\{x_j\}_{j\in J} \text{ compacto,}$$

desta forma podemos supor $\nabla u_n \to \nabla u$ quase sempre em $\mathcal{K} \subset \Omega\backslash\{x_j\}_{j\in J}$. Portanto, por um argumento diagonal, a menos de subsequência temos $\nabla u_n \to \nabla u$ q.t.p. em Ω. Como (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então existe $w \in \left[L^{p/(p-1)}(\Omega)\right]^*$, tal que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup w.$$

Pela unicidade do limite, concluímos que $w = |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, o que finaliza a demonstração da primeira afirmação. A segunda convergência é mostrada da mesma maneira trocando-se u_n por v_n e u por v. □

Estamos agora em condições de demonstrar nosso primeiro resultado:

Teorema 0.1. *Suponha $N \geq p > \beta$ com $1 < q < p < \alpha + \beta \leq p^*$ onde α, $\beta \in (1, \infty)$, e assuma que as hipóteses $(P_0) - (P_2)$ se verificam. Considerando $\overline{\mu} \in (0, \mu_{1b})$, então existe $\lambda^*(\mu)$ tal que, para qualquer $0 < \mu < \overline{\mu}$ e $\lambda \in (0, \lambda^*(\overline{\mu})]$ o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui pelo menos um par de soluções (u_1, v_1) com $I_{\lambda\mu}(u_1, v_1) < 0$.*

Demonstração. Seja $0 < \mu < \overline{\mu} < \mu_{1b}$ e $0 < \lambda < \lambda^*(\overline{\mu})$, onde $\lambda^*(\overline{\mu})$ é o mesmo obtido no Lema 1.5. Tomando $R > 0$ como na demonstração do Lema 1.5, considere $\|(u_n, v_n)\| \leq R$ de modo que $I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to m(\lambda, \mu, R) < 0$ (note ainda que, pelo Lema 1.5, podemos admitir $\|u_n, v_n\| < R$). Assim, pelo Princípio Variacional de Ekeland, podemos supor $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$. Usando a reflexividade do espaço E, existe um par $(u_0, v_0) \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ e $v_n \rightharpoonup v_0$ fracamente em E.

Além disso, como $\max\{p - 1, q - 1, \alpha + \beta - 1\} < p^*$ e a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ é compacta para $s \in [1, p^*)$, existe $w \in L^1(\Omega)$ que satisfaz

$$|u_n|^q + |u_n|^{\alpha+\beta-1} + |v_n|^p + |v_n|^{\alpha+\beta-1} \leq w \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
&|u_n|^q \leq |u_n|^p + 1 \leq w + 1 \in L^1(\Omega),\\
&|v_n|^{p-1} \leq |v_n|^p + 1 \leq w + 1 \in L^1(\Omega),\\
&|u_n|^{\alpha-1}|v_n|^\beta + |u_n|^\alpha |v_n|^{\beta-1} \leq 2\left(|u_n|^{\alpha+\beta-1} + |v_n|^{\alpha+\beta-1}\right) \leq 4w \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Assim, para quaisquer $\varphi, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q-1}\varphi = \int_\Omega a(x)(u_0^+)^{q-1}\varphi,\\
&\lim_{n\to\infty} \int_\Omega b(x)|v_n|^{p-1}\phi = \int_\Omega b(x)|v_0|^{p-1}\phi,\\
&\lim_{n\to\infty} \int_\Omega c(x)(u_n^+)^{\alpha-1}(v_n^+)|^\beta\varphi = \int_\Omega c(x)(u_0^+)^{\alpha-1}(v_0^+)^\beta\varphi,\\
&\lim_{n\to\infty} \int_\Omega c(x)(u_n^+)^{\alpha}(v_n^+)^{\beta-1}\phi = \int_\Omega c(x)(u_0^+)^{\alpha}(v_0^+)^{\beta-1}\phi.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Deste modo, definindo $J(u,v) := \frac{\|(u,v)\|^p}{p}$ e usando as convergências em (1.19), para quaisquer $\varphi, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0) - J'(u_0,v_0), (\varphi,\phi)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle I'_{\lambda\mu}(u_n,v_n) - J'(u_n,v_n), (\varphi,\phi)\rangle\\
&= -J'(u_0,v_0).(\varphi,\phi),
\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese $I'_{\lambda\mu}(u_n,v_n) \to 0$ e o resultado obtido no Lema 1.12. Assim, concluímos que

$$\langle I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0), (\varphi,\phi)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle I'_{\lambda\mu}(u_n,v_n), (\varphi,\phi)\rangle = 0$$

para quaisquer $\varphi, \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e, por densidade, temos $I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0) = 0$. Além disso, por hipótese, $I'_{\lambda\mu}(u_n,v_n) = o_n(1)$ e $I_{\lambda\mu}(u_n,v_n) \to m(\lambda,\mu,R)$, então

$$\begin{aligned}
m(\lambda,\mu,R) &= \liminf_{n\to\infty} \left(I_{\lambda\mu}(u_n,v_n) - \frac{1}{\alpha+\beta}\langle I'_{\lambda\mu}(u_n,v_n)(u_n,v_n)\rangle\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\left(\|(u_n,v_n)\|^p - \mu\int_\Omega b(x)|v_n|^p\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. -\lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega a(x)(u_n^+)^q\right].
\end{aligned}$$

Das propriedades de convergência fraca, obtemos $\|(u_0,v_0)\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|(u_n,v_n)\|$. Por outro lado, a imersão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ com $s \in [1, p^*)$ garante que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega a(x)(u_n^+)^q = \int_\Omega a(x)(u_0^+)^q \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega b(x)|v_n|^p = \int_\Omega b(x)|v_0|^p,$$

logo,

$$\begin{aligned} m(\lambda,\mu,R) &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\left(\|(u_0,v_0)\|^p - \mu\int_\Omega b(x)|v_0|^p\right) - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega a(x)(u_0^+)^q \\ &= I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) - \frac{1}{\alpha+\beta} I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0)(u_0,v_0) \\ &= I_{\lambda\mu}(u_0,v_0). \end{aligned}$$

Portanto, $m(\lambda,\mu,R) = I_{\lambda\mu}(u_0,v_0)$ e pelo Lema 1.5 concluímos que $\|u_0,v_0\| < R$. Note agora que

$$\begin{aligned} 0 = \langle I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0),(0,v_0^-)\rangle &= \int_\Omega |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \nabla v_0^- - \mu\int_\Omega b(x)|v_0|^{p-2}v_0 v_0^- \\ &= -\|v_0^-\|^p + \mu\int_\Omega b(x)(v_0^-)^p, \end{aligned}$$

logo $v_0^- \equiv 0$, pois $0 < \mu < \mu_{1b}$, portanto, $v_0 \geq 0$. Além disso,

$$0 = \langle I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0),(u_0^-,0)\rangle = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla u_0^- - \lambda\int_\Omega a(x)(u_0^+)^{q-1}u_0^- = -\|u_0^-\|^p,$$

de modo que $u_0^- \equiv 0$, implicando $u_0 \geq 0$.

Por fim, como $I_{\lambda\mu} = m(\lambda,\mu,R) < 0$, temos $(u_0,v_0) \not\equiv (0,0)$ e ainda, o Lema 1.4 garante que (u_0,v_0) é solução não semitrivial para o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$. □

Observação 1.13. *Da mesma maneira, podemos concluir que para* $R > 0$ *obtido no Lema 1.5 o ínfimo* $m(\lambda,\mu,R) < 0$ *é atingido em um ponto não-trivial* (u_0,v_0) *para quaisquer* $0 < \lambda < \lambda^*(\overline{\mu})$, $0 < \mu < \overline{\mu} < \mu_{1b}$ *com* $p < N$ *e* $p \leq \beta$*, mas neste caso, apesar de conseguirmos garantir que* $u_0 \not\equiv 0$*, os argumentos anteriores não nos permitem afirmar também que* $v_0 \not\equiv 0$*. Assim, o ponto de mínimo pode ser da forma* $(u_0, 0)$ *com* $u_0 \not\equiv 0$*.*

O resultado anterior mostra a existência de uma primeira solução para o problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$, esta com energia negativa. A partir deste ponto, nosso objetivo é obter um segundo par de soluções para o mesmo problema, agora com energia positiva. Nosso próximo lema prova que o funcional $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.14. *Suponha que* $c(x)$ *satisfaz* (P_1) *e considere* $B_\delta \subset \Omega_c^+$*. Se* $\varphi \in C_c^\infty(B_\delta)$ *é uma função não-trivial e não negativa, então* $\lim_{t\to\infty} I_{\lambda\mu}(u_0 + t\varphi, v_0 + t\varphi) = -\infty$*.*

Demonstração. Primeiramente, sendo $\varphi > 0$ e $t > 0$, temos $\varphi^+ \equiv \varphi$ e $\varphi^- \equiv 0$. Assim, $(u_0 + t\varphi)^+ = (u_0^+ + t\varphi)$. Como $\varphi \equiv 0$ fora da bola $B_\delta \subset \Omega_c^+$, usando a desigualdade

$$(x+y)^r \geq x^r + y^r$$

válida para todo $x,\ y \geq 0$ e $r > 1$, e a desigualdade de normas

$$\|x+y\|^p \leq (\|x\| + \|y\|)^p \leq 2^p(\|x\|^p + \|y\|^p),$$

obtemos constantes $C_1,\ C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda\mu}(u_0+t\varphi, v_0+t\varphi) \leq \frac{2^p}{p}(\|u_0\|^p + \|v_0\|^p + 2\|t\varphi\|^p) - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega a(x)(u_0^+ + t\varphi)^q \\
- \frac{\lambda}{p}\int_\Omega b(x)\left[|v_0|^p + t^p|\varphi|^p\right] \\
- \frac{1}{\alpha+\beta}\int_{B_\delta} c^+(x)(u_0^+ + t\varphi)^\alpha (v_0^+ + t\varphi)^\beta \\
\leq C_1(t^p + t^q + 1) - \frac{1}{\alpha+\beta}\int_{B_\delta} c^+(x)\left((u_0^+)^\alpha + t^\alpha\varphi^\alpha\right)\left((v_0^+)^\beta + t^\beta\varphi^\beta\right) \\
\leq C_2(t^p + t^q + t^\alpha + t^\beta + 1) - \frac{t^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\int_{B_\delta} c^+(x)\varphi^{\alpha+\beta},
\end{aligned}$$

e o resultado segue pela última desigualdade e pelo fato de $\alpha + \beta > p > q$. $\square$

Dizemos que o funcional $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a condição Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, denotado por $(PS)_c$, se qualquer sequência $(u_n, v_n) \in E$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) = 0.$$

possui uma subsequência convergente.

Proposição 1.15. *Se $p < \alpha+\beta < p^*$, então o funcional $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para qualquer $c \geq 0$.*

Demonstração. Seja $(u_n, v_n) \in E$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda\mu}$. Assim, por resultados de imersão, existe $C_1 = C_1(a(x), q) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
c + o_n(1)\|u_n, v_n\| &= I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) - \frac{1}{\alpha+\beta}\langle I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n), (u_n, v_n)\rangle \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\left[\|u_n, v_n\|^p - \mu\int_\Omega b(x)|v_n|^p\right] - \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{\alpha+\beta}\right)\int_\Omega a(x)(u_n^+)^q \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{1b}}\right)\|u_n, v_n\|^p - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)C_1\|u_n\|^q.
\end{aligned}$$

Tomando

$$C_2 = \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)C_1 > 0 \ \text{ e } \ C_3 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha+\beta}\right)\left(1 - \frac{\mu}{\mu_{1b}}\right) > 0,$$

temos

$$c + o_n(1)\|u_n, v_n\| + C_2\|u_n\|^q \geq C_3\|u_n, v_n\|^p,$$

e como $q < p < \alpha + \beta$, concluímos pela última desigualdade que a sequência (u_n, v_n) é limitada. Logo, a menos de subsequência, temos $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ fracamente em E para algum par $(u,v) \in E$. Uma vez que a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ é compacta para todo $s \in [1, p^*)$, pela desigualdade de Hölder temos

$$\left| \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q-1}(u_n - u) \right| \le |a|_\infty |u_n|_q^{q-1} |u_n - u|_q = o_n(1) \tag{1.20}$$

e

$$\left| \int_\Omega c(x)(u_n^+)^{\alpha-1}(u_n - u)(v_n^+)^\beta \right| \le |c|_\infty |u_n|_{\alpha+\beta}^{\alpha-1} |u_n - u|_{\alpha+\beta} |v_n|_{\alpha+\beta}^\beta = o_n(1). \tag{1.21}$$

Além disso, pelo Lema 1.12, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u = \|u\|^p + o_n(1). \tag{1.22}$$

Desde que $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$ e (u_n, v_n) é limitado, concluímos que

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n - u, 0) \\ &= \|u_n\|^p - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u - \lambda \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q-1}(u_n - u) \\ &\qquad - \alpha \int_\Omega c(x)(u_n^+)^{\alpha-1}(u_n - u)(v_n^+)^\beta. \end{aligned}$$

A expressão acima combinada com (1.20), (1.21) e (1.22) implica $\|u_n\|^p - \|u\|^p \to 0$. Por reflexividade, obtemos $u_n \to u$ forte em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De maneira análoga, obtemos também $v_n \to v$ forte em $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Estamos agora em condições de demonstrar nosso segundo resultado:

Teorema 0.2. *Suponha que $N \ge p$ com $1 < q < p < \alpha + \beta < p^*$ onde $\alpha, \beta \in (1, \infty)$, e assuma que as hipóteses $(P_0) - (P_2)$ se verificam. Então, para todo $0 < \lambda < \lambda^*(\overline{\mu})$ e $0 < \mu < \overline{\mu} < \mu_{1b}$ o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui pelo menos um par de soluções (u_0, v_0) com $I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) > 0$. Além disso, se $N \ge p > \beta$, então existe outro par de soluções (u_1, v_1) com $I_{\lambda\mu}(u_1, v_1) < 0$.*

Demonstração. A Observação 1.13 garante a existência de um par $(u_0, v_0) \in E$ tal que $I'_{\lambda\mu}(u_0, v_0) = 0$ com $I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) < 0$. Por outro lado, pelo Lema 1.5 e Lema 1.14 vemos que

$$\inf_{\|u,v\| = R} I_{\lambda\mu}(u,v) = \rho > 0$$

e que existe um par (e_1, e_2) tal que $\|e_1, e_2\| > R > \|u_0, v_0\|$ com $I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) > I_{\lambda\mu}(e_1, e_2)$. Defina

$$\widetilde{c}_{\lambda\mu} := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I_{\lambda\mu}(\gamma(t))$$

com $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = (u_0, v_0),\ \gamma(1) = (e_1, e_2)\}$. Afirmamos que $\widetilde{c}_{\lambda\mu} \ge \rho > 0$.

Por definição, temos $\rho \le I_{\lambda\mu}(u,v)$ para todo $(u,v) \in E$ com $\|u,v\| = R$. Considerando $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \|\gamma(t)\|$, vemos que h é a composição de duas funções contínuas ($\|.\|$ e γ), portanto, h é contínua. Note ainda que $h(0) = \|\gamma(0)\| = \|u_0, v_0\| < R$ e $h(1) = \|\gamma(1)\| = \|e_1, e_2\| > R$. Assim, $h(0) < R < h(1)$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $s \in (0,1)$ tal que $h(s) = \|\gamma(s)\| = R$, isto é, existe $\gamma(s) := (\overline{u}, \overline{v}) \in E$ de modo que $\|\overline{u}, \overline{v}\| = R$. Deste modo, por definição, $\rho \leq I_{\lambda\mu}(\overline{u}, \overline{v})$, portanto,

$$0 < \rho \leq I_{\lambda\mu}(\overline{u}, \overline{v}) = I_{\lambda\mu}(\gamma(s)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda\mu}(\gamma(t)).$$

Sendo $\gamma \in \Gamma$ arbitrário, pela definição de ínfimo, temos

$$\rho \leq \widetilde{c}_{\lambda\mu} := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I_{\lambda\mu}(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I_{\lambda\mu}(\gamma(t)),$$

o que prova a afirmação. Assim, $0 < \rho \leq \widetilde{c}_{\lambda\mu}$ e podemos então usar o Teorema do Passo da Montanha para garantir a existência de uma sequência $(u_n, v_n) \in E$ tal que $I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to \widetilde{c}_{\lambda\mu}$ e $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$.

Segue da Proposição 1.15 que o funcional $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a condição Palais-Smale no nível $\widetilde{c}_{\lambda\mu}$, então existe um par $(u_1, v_1) \in E$ satisfazendo $I'_{\lambda\mu}(u_1, v_1) = 0$ e $I_{\lambda\mu}(u_1, v_1) = \widetilde{c}_{\lambda\mu}$. Uma vez que $\widetilde{c}_{\lambda\mu} > 0$, concluímos que $(u_1, v_1) \not\equiv (0,0)$. Mostraremos agora que o par (u_1, v_1) não é solução semitrivial de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$. Se $u_1 \equiv 0$, então $I'_{\lambda\mu}(0, v_1) = 0$ com $I_{\lambda\mu}(0, v_1) = \widetilde{c}_{\lambda\mu} > 0$, isto é,

$$0 = \langle I'_{\lambda\mu}(0, v_1), (0, v_1)\rangle = \|v_1\|^p - \mu \int_\Omega b(x)|v_1|^p,$$

o que implicaria $v_1 \equiv 0$ uma vez que $0 < \mu < \mu_{1b}$. Assim, $(u_1, v_1) \equiv (0,0)$, uma contradição. Por outro lado, se $v_1 \equiv 0$, então $I'_{\lambda\mu}(u_1, 0) = 0$ com $I_{\lambda\mu}(u_1, 0) = \widetilde{c}_{\lambda\mu} > 0$, isto é,

$$0 = \langle I'_{\lambda\mu}(u_1, 0), (u_1, 0)\rangle = \|u_1\|^p - \lambda \int_\Omega a(x)(u_1^+)^q,$$

de modo que, sendo $q < p$,

$$0 < \widetilde{c}_{\lambda\mu} = I_{\lambda\mu}(u_1, 0) = \frac{1}{p}\|u_1\|^p - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega a(x)(u_1^+)^q = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u_1\|^p < 0,$$

um absurdo. Assim, $v_1 \not\equiv 0$. $\square$

Capítulo 2

Sistema com crescimento crítico

Neste capítulo, mostraremos a existência de um segundo par de soluções para o problema $\mathcal{P}_{\lambda\gamma}$ estudado no capítulo anterior, considerando agora o caso crítico $\alpha + \beta = p^*$. A partir deste ponto, consideraremos $(u_0, v_0) \in E$ satisfazendo $m(\lambda, \mu, R) := I_{\lambda\mu}(u_0, v_0)$ e tomaremos $\beta > 1$. Se $p > \beta$, então $v_0 \not\equiv 0$, caso contrário poderemos ter soluções semitriviais da forma $(u, 0)$ (veja o Lema 1.4 e a Observação 1.13). O próximo resultado pode ser encontrado em [24] e é uma generalização de [4, Lema A.4 (4)].

Lema 2.1. *Para $\alpha, \beta > 1$ a seguinte desigualdade se verifica*

$$(1+t)^\alpha (1+s)^\beta \geq 1 + t^\alpha s^\beta + \alpha t + \beta s, \ \ \forall t,\, s \geq 0. \tag{2.1}$$

Além disso, para $\gamma \in (1, \alpha + \beta - 1)$, existe $C_\gamma > 0$ tal que, para todo $t,\, s \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}(1+t)^\alpha (1+s)^\beta \geq 1 + t^\alpha s^\beta + \alpha t + \beta s &+ (\alpha + \beta - 2) \min\{t, s\}^{\alpha+\beta-1} \\ &- C_\gamma \max\{t, s\}^\gamma.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Demonstração. Defina $f(t,s) = (1+t)^\alpha (1+s)^\beta - 1 - t^\alpha s^\beta - \alpha t - \beta s$. Desde que $\alpha,\, \beta > 1$, temos

$$\frac{f_t(t,s)}{\alpha(1+t)^{\alpha-1}} \geq (1+s)^\beta - 1 - s^\beta \geq 0,$$

então $f(t,s) \geq f(0,s) \geq 0$ e (2.1) se verifica.

Para mostrar (2.2), é suficiente provar que $\inf\limits_{t,s>0} g(t,s) > -\infty$, onde

$$g(t,s) = \frac{(1+t)^\alpha (1+s)^\beta - 1 - t^\alpha s^\beta - \alpha t - \beta s - (\alpha+\beta-2)\min\{t,s\}^{\alpha+\beta-1}}{\max\{t,s\}^\gamma}.$$

Caso contrário, teríamos $g(t_n, s_n) \to -\infty$ para alguma sequência (t_n, s_n) o que implicaria $\max\{t_n, s_n\} \to 0$ ou $\max\{t_n, s_n\} \to +\infty$. Se $\max\{t_n, s_n\} \to 0$, por (2.1) vemos que

$$g(t_n, s_n) \geq -(\alpha+\beta-2)\frac{\min\{t_n, s_n\}^{\alpha+\beta-1}}{\max\{t_n, s_n\}^\gamma} = o_n(1),$$

então $\liminf g(t_n, s_n) > -\infty$, contradizendo $g(t_n, s_n) \to -\infty$. Agora, assumindo $\max\{t_n, s_n\} \to +\infty$, afirmamos que

$$\overline{f}(t,s) = (1+t)^\alpha(1+s)^\beta - 1 - t^\alpha s^\beta - (\alpha+\beta-2)\min\{t,s\}^{\alpha+\beta-1} \geq 0, \;\; \forall t, s \geq 0.$$

Considerando verdadeira a afirmação, temos

$$g(t_n, s_n) = \frac{\overline{f}(t_n, s_n) - \alpha t_n - \beta s_n}{\max\{s_n, t_n\}^\gamma} \geq -\frac{\alpha t_n + \beta s_n}{\max\{t_n, s_n\}^\gamma} = o_n(1)$$

e ainda não temos $g(t_n, s_n) \to -\infty$, logo (2.2) se verifica.

Para concluir a demonstração, resta apenas provar a afirmação. Primeiro, note que

$$(1+x)^{\alpha+\beta} \geq 1 + x^{\alpha+\beta} + (\alpha+\beta-2)x^{\alpha+\beta-1}, \;\; \forall x \geq 0, \; \forall \alpha, \beta > 1. \tag{2.3}$$

Definindo $h(t,s) = (1+t)^\alpha(1+s)^\beta - 1 - t^\alpha s^\beta$, temos $h_s(t,s) \geq 0$ e $h_t(t,s) \geq 0$ para quaisquer s, t positivos, então $h(\cdot, s)$ e $h(t, \cdot)$ são crescentes. Suponha $\min\{s,t\} = t$. Por (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} s \geq t \;\; &\Rightarrow \;\; h(t,s) \geq h(t,t) = (1+t)^{\alpha+\beta} - 1 - t^{\alpha+\beta} \geq (\alpha+\beta-2)t^{\alpha+\beta-1} \\ &\Rightarrow \;\; \overline{f}(t,s) \geq 0 \end{aligned}$$

e, se $\min\{s,t\} = s$, por argumentos análogos concluímos que $\overline{f}(t,s) \geq 0$, provando a afirmação. □

Nos resultados anteriores já foi mostrado que as soluções u_0 e v_0 são não-nulas em Ω, mas até então não há garantias de que, em pequenas bolas do domínio, u_0 e v_0 permaneçam não-nulas.

Lema 2.2. *Suponha que $\Omega_{a^+} \cap \Omega_{b^+} \cap \Omega_{c^+}$ possui ponto interior e $\beta < p$. Então, para alguma bola $B_r(x_0) \subset \Omega$, temos $\inf\limits_{x \in B_r(x_0)} u_0(x) > 0$. Além disso, se $v_0 \not\equiv 0$, então $\inf\limits_{x \in B_r(x_0)} v_0(x) > 0$.*

Demonstração. A primeira parte, quando $u_0 \not\equiv 0$, já foi mostrada na demonstração do Lema 1.4, então vamos considerar apenas o caso $v_0 \not\equiv 0$. Pela teoria padrão de regularidade elíptica do operador $-\Delta_p$, temos $u_0, v_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ (veja Teorema A.6). Assim, para algum $x_0 \in \Omega$ e $r_0 > 0$, temos $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega_{a^+} \cap \Omega_{b^+} \cap \Omega_{c^+}$ e, no sentido fraco,

$$-\Delta_p u_0 = \lambda a(x) u_0^{q-1} + c(x) u_0^{\alpha-1} v_0^\beta \geq 0$$

$$-\Delta_p v_0 = \mu b(x) v_0^{p-1} + c(x) u_0^\alpha v_0^{\beta-1} \geq 0$$

em $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega_{a^+} \cap \Omega_{b^+} \cap \Omega_{c^+}$.

Usando o Teorema A.7, concluímos que cada uma dessas funções é nula ou positiva em $B_r(x_0)$. Se $u_0 \equiv 0$ em $B_{r_0}(x_0)$, então tomando $\varphi \in C_c^\infty(B_r(x_0))$, vemos que u_0 se anula no suporte de φ de modo que

$$I_{\lambda\mu}(u_0+\epsilon\varphi,v_0)=I_{\lambda\mu}(u_0,v_0)+\frac{\epsilon^p}{p}\|\varphi\|^p-\frac{\lambda\epsilon^q}{q}\int a(x)|\varphi|^q-\frac{\epsilon^\alpha}{p^*}\int c(x)|\varphi|^\alpha v_0^\beta,$$

e, desde que $q<p$, podemos ver que para $\epsilon>0$ pequeno, obtemos $(u_0+\epsilon\varphi,v_0)\in B_r(x_0)$ e $I_{\lambda\mu}(u_0+\epsilon\varphi,v_0)<I_{\lambda\mu}(u_0,v_0)=m(\lambda,\mu,R)$, uma contradição. Portanto, $u_0>0$ em $B_{r_0}(x_0)$.

Suponhamos agora que $v_0\equiv 0$ em $B_{r_0}(x_0)$. Tomando $\varphi\in C_c^\infty(B_r(x_0))$, vemos que v_0 se anula no suporte de φ de modo que

$$I_{\lambda\mu}(u_0,v_0+\epsilon\varphi)=I_{\lambda\mu}(u_0,v_0)+\frac{\epsilon^p}{p}\left[\|\varphi\|^p-\mu\int b(x)|\varphi|^p\right]-\frac{\epsilon^\beta}{p^*}\int c(x)u_0^\alpha|\varphi|^\beta,$$

e, desde que estamos considerando $\beta<p$, podemos ver que para $\epsilon>0$ pequeno, obtemos $(u_0,v_0+\epsilon\varphi)\in B_r(x_0)$ e $I_{\lambda\mu}(u_0+\epsilon\varphi,v_0)<I_{\lambda\mu}(u_0,v_0)=m(\lambda,\mu,R)$, uma contradição. Portanto, $v_0>0$ em $B_{r_0}(x_0)$. □

Para os próximos resultados introduziremos as seguintes funções *cut-off*. Defina $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$ dada por

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & , \ |x|\le\rho\\ 0 & , \ |x|\ge 2\rho,\end{cases}$$

onde $\phi(x)>0$ quando $|x|<2\rho$. Para $x_0\in\mathbb{R}^N$, considere

$$u_{\epsilon,x_0}(x):=\frac{\phi(x-x_0)\epsilon^{\frac{N-p}{p(p-1)}}}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}}+|x-x_0|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}},$$

então, utilizando os mesmos argumentos de [28, pg. 892-3], (veja a Proposição B.1) obtemos contantes $K_1>0$, $d_1>0$ tais que

$$\|u_\epsilon\|^p = K_1+O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}), \tag{2.4}$$

$$\frac{\|u_\epsilon\|^p}{|u_\epsilon|_{p^*}^p} = S+O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}), \tag{2.5}$$

$$|u_\epsilon|_p^p = \begin{cases}\epsilon^p d_1+O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}) & , \ N>p^2>1,\\ \epsilon^p d_1|\log\epsilon|+O(\epsilon^p) & , \ N=p^2>1.\end{cases} \tag{2.6}$$

Usando a mudança de variáveis $x\to(x-x_0)/\epsilon$, vemos que

$$\int_\Omega u_\epsilon^s=\epsilon^{N-\frac{(N-p)s}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\phi^s(\epsilon x)dx}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)s}{p}}} \tag{2.7}$$

Sem perda de generalidade, no que segue, consideramos x_0 (obtido no Lema 2.2) como $x_0=0$ e $0<2\rho=r=1$.

Lema 2.3. *Suponha* $\inf\limits_{x\in B_\delta(x_0)}\min\{a(x),b(x),c(x)\}=c_\delta>0$ *para algum* $\delta>0$. *Definindo*

$c^* := \frac{\|c\|_\infty^{\frac{p-N}{p}}}{N} S_{\alpha\beta}^{\frac{N}{p}}$, *suponha que uma das afirmações abaixo se verifique*

(i) $N \geq p^2 + p$, $2 \leq p < 3$ *e* $\theta > p$,

(ii) $p > p^* - 2/(p-1)$ *e* $\theta > p \geq 3$,

(iii) $\beta < p < N$, $2 \leq p < 3$ *e* $\theta > \frac{N-p}{p}$.

Então, $\max_{t>0} I_{\lambda\mu}(u_0 + tAu_\epsilon, v_0 + tBu_\epsilon) < I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^*$ *para algum* $\epsilon > 0$.

Demonstração. Seja $\sigma_\epsilon(t) = I_{\lambda\mu}(u_0 + tAu_\epsilon, v_0 + tBu_\epsilon)$. Então, para algum $t_\epsilon > 0$, temos $\sigma_\epsilon(t_\epsilon) = \max_{t>0} \sigma_\epsilon(t)$. Se $\liminf_{\epsilon\to 0} t_\epsilon = 0$, por (2.4) obtemos $\lim_{\epsilon\to 0^+} \sigma_\epsilon(t) = I_{\lambda\mu}(u_0, v_0)$ e o lema se verifica.

Por outro lado, se $\liminf_{\epsilon\to 0} t_\epsilon = +\infty$, então $\lim_{\epsilon\to 0^+} \sigma_\epsilon(t) = -\infty$, uma contradição, uma vez que o nível $c_{\lambda\mu}$ do passo da montanha é um valor positivo. Portanto, consideraremos $0 < t_1 < t_\epsilon < t_2$ para todo $\epsilon > 0$.

Caso 1: $\mathbf{2 \leq p < 3}$, $\mathbf{N \geq p^2 + p}$ (o que implica $\mathbf{N > p > \beta}$) e $\mathbf{\theta > p}$

Por , temos a seguinte estimativa para o gradiente

$$\left\{ \begin{aligned} \|u_0 + tAu_\epsilon, v_0 + tBu_\epsilon\|^p \;\leq\;& \|u_0, v_0\|^p + t^p(A^p + B^p)\|u_\epsilon\|^p \\ & + pt\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla(Au_\epsilon) \\ & + pt\int_\Omega |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \nabla(Bu_\epsilon) + O(\epsilon^{\overline{\beta}}). \end{aligned} \right. \tag{2.8}$$

Além disso, por (2.1), obtemos

$$\left\{ \begin{aligned} \int_\Omega c(x)(u_0 + tAu_\epsilon)^\alpha (v_0 + tBu_\epsilon)^\beta \;\geq\;& \int_\Omega c(x) u_0^\alpha v_0^\beta + \\ & + t^{\alpha+\beta} A^\alpha B^\beta \int_\Omega c(x) u_\epsilon^{\alpha+\beta} + \\ & + \alpha t \int_\Omega c(x) u_0^{\alpha-1} v_0^\beta (Au_\epsilon) \\ & + \beta t \int_\Omega c(x) u_0^\alpha v_0^{\beta-1} (Bu_\epsilon). \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

Como $(1+t)^r \geq 1 + rt$, $\forall t \geq 0$, $\forall r \geq 1$, vemos que

$$\int_\Omega a(x)(u_0 + tAu_\epsilon)^q \geq \int_\Omega a(x) u_0^q + tq\int_\Omega a(x) u_0^{q-1}(Au_\epsilon), \tag{2.10}$$

$$\int_\Omega b(x)(v_0 + tAu_\epsilon)^p \geq \int_\Omega b(x) v_0^p + t^p B^p \int_\Omega b(x) u_\epsilon^p + tp\int_\Omega b(x) v_0^{p-1}(Bu_\epsilon). \tag{2.11}$$

Observe ainda que podemos escrever

$$\int_\Omega c(x)u_\epsilon^{p^*} = \int_\Omega |c|_\infty u_\epsilon^{p^*} - \int_\Omega (|c|_\infty - c(x))\, u_\epsilon^{p^*}.$$

Assim, usando (2.8)-(2.11) e $I'_{\lambda\mu}(u_0, v_0)(Au_\epsilon, Bu_\epsilon) = 0$, temos

$$\sigma_\epsilon(t_\epsilon) \leq I(u_0, v_0) + O(\epsilon^{\overline{\beta}}) + h_\epsilon(t_\epsilon) - d_2|u_\epsilon|_p^p + \frac{t_2^{p^*} A^\alpha B^\beta}{p^*} \int_\Omega (|c|_\infty - c(x))u_\epsilon^{p^*} \tag{2.12}$$

onde $d_2 := t_1^p \mu B^p c_\delta / p > 0$ e

$$h_\epsilon(t) = \frac{t^p(A^p + B^p)}{p}\|u_\epsilon\|^p - \frac{t^{p^*} A^\alpha B^\beta |c|_\infty}{p^*}|u_\epsilon|_{p^*}^{p^*}.$$

Nosso objetivo agora é estimar $h_\epsilon(t)$. Por (2.5) e (1.7), temos

$$\begin{aligned} h_\epsilon(t) &\leq \frac{1}{N}\left(\frac{(A^p + B^p)\|u_\epsilon\|^p}{|c|_\infty A^\alpha B^\beta |u_\epsilon|_{p^*}^p}\right)^{\frac{N}{p}} \\ &\leq \frac{1}{N}\left(\frac{A^p + B^p}{|c|_\infty A^\alpha B^\beta}(S + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}))\right)^{\frac{N}{p}} \leq c^* + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tomando $\Sigma_\epsilon := \int_\Omega (|c|_\infty - c(x))u_\epsilon^{p^*}$, pela Proposição B.2 temos

$$0 \leq \Sigma_\epsilon \leq \begin{cases} \epsilon^{\frac{N}{p-1}} \displaystyle\int_{B_r(0)} M|x|^{\theta - \frac{Np}{p-1}} = O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}}) & , \quad \theta > \frac{N}{p-1}; \\ \epsilon^\theta \displaystyle\int_{|x| \leq \epsilon^{-1}} M|x|^{\theta - \frac{Np}{p-1}} = O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}})|\log \epsilon| & , \quad \theta = \frac{N}{p-1}; \\ \epsilon^\theta \left[\displaystyle\int_{|x| \leq 1} M|x|^\theta (1 + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{-N} + \right. & \\ \left. + \displaystyle\int_{1 < |x| \leq \epsilon^{-1}} |x|^{\theta - \frac{Np}{p-1}}\right] = O(\epsilon^\theta) & , \quad 0 < \theta < \frac{N}{p-1}. \end{cases}$$

Note ainda que

$$N \geq p^2 \text{ e } \theta > p \;\Rightarrow\; \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{-p}\Sigma_\epsilon = 0 \tag{2.14}$$

e

$$N > p \text{ e } \theta > \frac{N-p}{p} \;\Rightarrow\; \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon^{-\frac{N-p}{p}}\Sigma_\epsilon = 0. \tag{2.15}$$

Considerando $\hat{\beta} := \min\{\overline{\beta}, (N-p)/(p-1)\}$, sendo $\overline{\beta} > \frac{N-p}{p}$, usando (2.6), (2.12) e

(2.13), sendo $N \geq p^2 + p > p^2$, para algum $d_3 > 0$ temos

$$\begin{aligned}\sigma_\epsilon(t_\epsilon) &\leq I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^* + O(\epsilon^{\hat{\beta}}) + d_4\Sigma_\epsilon - \epsilon^p d_3 \\ &= I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^* + \epsilon^p \left[O(\epsilon^{\hat{\beta}-p}) + d_4\epsilon^{-p}\Sigma_\epsilon - d_3\right]\end{aligned}$$

onde $d_4 = t_2^{p^*} A^\alpha B^\beta / p^* > 0$. Note que

$$N \geq p^2 + p \Rightarrow \frac{N-p}{p} \geq p \Rightarrow \overline{\beta} > p.$$

Assim, se $\hat{\beta} = \overline{\beta}$, então $\hat{\beta} - p > 0$. Por outro lado, se $\hat{\beta} = (N-p)/(p-1)$, como por hipótese $N \geq p^2 + p$, temos

$$\hat{\beta} - p = \frac{N-p}{p-1} - p = \frac{N-p^2}{p-1} > 0.$$

Finalmente, por (2.14), vemos que para $\epsilon > 0$ pequeno obtemos $\sigma_\epsilon(t_\epsilon) < I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^*$.

Caso 2: $\mathbf{p > p^* - 2/(p-1)}$ e $\theta > \mathbf{p \geq 3}$
Observe que

$$\begin{aligned}p > p^* - 2/(p-1) &\Leftrightarrow p(p-1) > \frac{Np}{N-p}(p-1) - 2 \\ &\Leftrightarrow (p^2-p)(N-p) > Np(p-1) - 2(N-p) \\ &\Leftrightarrow N > \frac{p^3 - p^2 + 2p}{2} \\ &\Leftrightarrow 2N - 2p > p^3 - p^2 \\ &\Leftrightarrow 2(N-p) > p^2(p-1) \\ &\Leftrightarrow \frac{2(N-p)}{p(p-1)} > p.\end{aligned}$$

Além disso, como $p \geq 3$, vemos que

$$p^2 \leq \frac{p^3 - p^2 + 2p}{2} \leq N.$$

Neste caso, de acordo com [4, pg. 949], temos $\overline{\beta} = 2(N-p)/[p(p-1)]$ em (2.8), logo

$$\sigma_\epsilon(t_\epsilon) \leq \begin{cases} I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^* + O(\epsilon^{\overline{\beta}}) + d_4\Sigma_\epsilon - \epsilon^p d_3 & , \quad N > p^2 \\ I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^* + O(\epsilon^{\overline{\beta}}) + d_4\Sigma_\epsilon - \epsilon^p |\log \epsilon| d_3 & , \quad N = p^2. \end{cases}$$

Como $\overline{\beta} > p$, o lema se verifica novamente. Vale notar ainda que este é o único caso em que não se exige a condição $\beta < p$.

Caso 3: $\mathbf{2 \leq p < 3}$, $\beta < \mathbf{p < N}$ e $\theta > \frac{\mathbf{N-p}}{\mathbf{p}}$

Definimos

$$C_\epsilon = \int_\Omega c(x)\left[(u_0+tAu_\epsilon)^\alpha (v_0+tBu_\epsilon)^\beta - u_0^\alpha v_0^\beta - \alpha u_0^{\alpha-1}v_0^\beta(tAu_\epsilon) - \beta u_0^\alpha v_0^{\beta-1}(tBu_\epsilon)\right].$$

Como $\beta < p$, pelo Lema 2.2 temos $v_0 \not\equiv 0$. Assim, podemos definir

$$C_1 := \min_{B_1(0)}\left[c_\delta(p^*-2)u_0^\alpha v_0^\beta \min\left\{\frac{A}{u_0}, \frac{B}{v_0}\right\}^{2^*-1}\right] > 0,$$

$$C_2 := \min_{B_1(0)}\left[c_\delta C_\gamma u_0^\alpha v_0^\beta \max\left\{\frac{A}{u_0}, \frac{B}{v_0}\right\}^{\gamma}\right] > 0.$$

Por (2.2) vemos que

$$C_\epsilon \geq t_\epsilon^{p^*}\int_\Omega A^\alpha B^\beta c(x) u_\epsilon^{p^*} + C_1 t_\epsilon^{p^*-1}\int_\Omega u_\epsilon^{p^*-1} - C_2 t_\epsilon^\gamma \int_\Omega u_\epsilon^\gamma. \tag{2.16}$$

Usando (2.8), (2.10), (2.11), (2.16) e $I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0)(Au_\epsilon, Bu_\epsilon) = 0$, obtemos

$$\sigma_\epsilon(t_\epsilon) \leq I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) + O(\epsilon^{\overline{\beta}}) + h_\epsilon(t_\epsilon) + d_4\Sigma_\epsilon + C_2 t_2^\gamma \int_\Omega u_\epsilon^\gamma - C_1 t_1^{p^*-1}\int_\Omega u_\epsilon^{p^*-1}$$

e por (2.13), considerando $\hat{\beta} := \max\{\overline{\beta}, (N-p)/(p-1)\}$, sendo $\overline{\beta} > \frac{N-p}{p}$, vemos que

$$\sigma_\epsilon(t_\epsilon) \leq I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) + c^* + O(\epsilon^{\hat{\beta}}) + d_4\Sigma_\epsilon + C_2 t_2^\gamma \int_\Omega u_\epsilon^\gamma - C_1 t_1^{p^*-1}\int_\Omega u_\epsilon^{p^*-1}. \tag{2.17}$$

Usando (2.7) com $s = p^*-1$, para $\epsilon > 0$ pequeno, obtemos

$$\int_\Omega u_\epsilon^{p^*-1} = \epsilon^{\frac{N-p}{p}}\int_{\mathrm{supp}\varphi} \frac{\varphi^{p^*-1}}{(1+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p(N+1)}{p}}} \geq \epsilon^{\frac{N-p}{p}}\int_{B_{1/2}(0)} (1+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p(N+1)}{p}} := d_5\epsilon^{\frac{N-p}{p}},$$

Fixemos $\gamma \in \left(\frac{N(p-1)}{N-p}, p^*-1\right)$ e considere $\gamma^* := \frac{N-(N-p)\gamma}{p} > \frac{N-p}{p}$. Então, por (2.7), tomando $s=\gamma$, temos

$$\int_\Omega u_\epsilon^\gamma \leq d_6\epsilon^{\gamma^*},$$

onde $d_6 := \int_{\mathbb{R}^N}(1+|x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{-(N-p)\gamma}{p}}$ é finito desde que

$$\frac{-(N-p)\gamma}{p-1} < -N \Rightarrow N(p-1) < (N-p)\gamma \Rightarrow \gamma > \frac{N(p-1)}{N-p}.$$

As três últimas desigualdades implicam que

$$\sigma_\epsilon(t_\epsilon) \leq I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) + c^* + \epsilon^{\frac{N-p}{p}}\left[O(\epsilon^{\hat{\beta}-\frac{N-p}{p}}) + d_4\epsilon^{-\frac{N-p}{p}}\Sigma_\epsilon + d_7\epsilon^{\gamma^*-\frac{N-p}{p}} - d_8\right].$$

Note que, se $\hat{\beta} = \overline{\beta}$, então $\hat{\beta} > \frac{N-p}{p}$. Por outro lado, se $\hat{\beta} = \frac{N-p}{p-1}$, como $N > p$ e $p \geq 2$, ainda teremos $\hat{\beta} > \frac{N-p}{p}$ e o resultado segue de (2.15). $\square$

Proposição 2.4. *Suponha que $I'_{\lambda\mu}(u,v) = 0$ implica que (u,v) é trivial, semitrivial, ou que $(u,v) = (u_0, v_0)$. Se $\alpha + \beta = p^*$, então $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $0 \leq c < I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^*$*

Demonstração. Procedendo da mesma forma que fizemos no Lema 1.15, se (u_n, v_n) é uma sequência Palais-Smale, concluímos que (u_n, v_n) é limitado em E e existe um par $(u,v) \in E$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ fraco em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Precisamos mostrar que essas convergências são fortes.

Definindo $z_n = u_n - u$ e $w_n = v_n - v$, passando para uma subsequência se necessário, mostraremos que $(z_n, w_n) \to (0,0)$ forte em E. Pelo Lema de Brézis-Lieb, [15, Lemma 5] e pelas imersões compactas de Sobolev, temos

$$\begin{cases} \|z_n, w_n\|^p = \|u_n, v_n\|^p - \|u,v\|^p + o_n(1); \\ o_n(1) = \displaystyle\int_\Omega a(x)(z_n^+)^q = \int_\Omega a(x)(u_n^+)^q - \int_\Omega a(x)(u^+)^q + o_n(1); \\ o_n(1) = \displaystyle\int_\Omega b(x)|w_n|^p = \int_\Omega b(x)|v_n|^p - \int_\Omega b(x)|v|^p + o_n(1); \\ \displaystyle\int_\Omega c(x)(z_n^+)^\alpha (w_n^+)^\beta = \int_\Omega c(x)(u_n^+)^\alpha (v_n^+)^\beta - \int_\Omega c(x)(u^+)^\alpha (v^+)^\beta + o_n(1). \end{cases}$$

Pelas expressões anteriores e sendo $c = I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) + o_n(1)$, obtemos

$$c - I_{\lambda\mu}(u,v) = \frac{1}{p}\|z_n, v_n\|^p - \frac{1}{p^*}\int_\Omega c(x)(z_n^+)^\alpha (w_n^+)^\beta + o_n(1). \tag{2.18}$$

Usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 0.1, obtemos $I'_{\lambda\mu}(u,v) = 0$ e, pelas hipóteses desta proposição, concluímos que (u,v) é trivial, semitrivial ou que $(u,v) = (u_0, v_0)$. Como

$$o_n(1) = I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n, v_n) - I_{\lambda\mu}(u,v)(u,v),$$

usando o Lema de Brézis-Lieb e as imersões compactas outra vez, temos

$$o_n(1) = \|z_n, w_n\|^p - \int_\Omega c(x)(z_n^+)^\alpha (w_n^+)^\beta. \tag{2.19}$$

Seja $l := \liminf_{n\to+\infty} \|z_n, w_n\|^p = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega c(x)(z_n^+)^\alpha (w_n^+)^\beta$ e suponha $l > 0$. Por (2.18) e (2.19), obtemos

$$c - I_{\lambda\mu}(u,v) = l/N$$

e por (1.7), temos $l^{p/p^*} \leq |c|_\infty^{p/p^*} S_{\alpha\beta}^{-1} l$. Como estamos supondo $l > 0$, obtemos então $l \geq S_{\alpha\beta}^{N/p} |c|_\infty^{(p-N)/p} = Nc^*$. Portanto, $c \geq I_{\lambda\mu}(u,v) + c^*$.

Pelo Lema 2.3, vemos que $0 > I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) > I_{\lambda,\mu}(u, v)$, de onde concluímos que (u, v) é não-trivial e $(u, v) \neq (u_0, v_0)$. Pela demonstração do Lema 1.4 temos ainda $u \not\equiv 0$. Suponha $v \equiv 0$. Neste caso,

$$I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) > I_{\lambda\mu}(u, 0) \geq \inf \left\{ I_{\lambda\mu}(w, 0) \ : \ w \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

Contudo, pela Observação 1.6 vemos que

$$\begin{aligned} \inf \left\{ I_{\lambda\mu}(w, 0) \ : \ w \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} &= \inf \left\{ I_{\lambda\mu}(w, 0) \ : \ \|w\| \leq R \right\} \\ &\geq I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) \\ &= \inf \left\{ I_{\lambda\mu}(w, z) \ : \ \|w, z\| \leq R \right\}, \end{aligned}$$

uma contradição. Portanto, $l = 0$. Assim, a menos de subsequência, temos $(u_n, v_n) \to (u, v)$ forte em E, então $I_{\lambda\mu}(u, v) = c > 0$ e $I'_{\lambda\mu}(u, v) = 0$. □

Finalmente, podemos demonstrar nosso terceiro e último resultado referente ao sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$:

Teorema 0.3. *Suponha que para alguma bola $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e $\theta > p$, temos*

(c_1) $|c|_\infty - c(x) \leq M|x - x_0|^\theta, \quad x \in B_\delta(x_0),$

(c_δ) *e que* $c_\delta := \inf\limits_{x \in B_\delta(x_0)} \min\{a(x),\, b(x),\, c(x)\} > 0.$

Suponha ainda que um dos casos abaixo se verifica:

(i) $N \geq p^2 + p$, $2 \leq p < 3$ *e* $\theta > p$;

(ii) $p > p^* - 2/(p-1)$, $p \geq 3$ *e* $\theta > p$;

(iii) $\beta < p < N$, $2 \leq p < 3$ *e* $\theta > \frac{N-p}{p}$.

Se $1 < q < p < \alpha + \beta = p^*$ e $(P_0) - (P_2)$ se verificam, então para todo $0 < \mu < \mu_{1b}$ existe $\lambda^*(\mu)$ tal que, para qualquer $0 < \lambda \leq \lambda^*(\mu)$ e $0 < \mu < \mu_{1b}$ o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui pelo menos um par de soluções (u, v). Além disso, nos casos (ii) e (iii) o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ possui duas soluções e no caso (i) o sistema possui duas soluções desde que $\beta < p$.

Demonstração. Suponha (por contradição) que não existe um ponto crítico para o funcional $I_{\lambda\mu}$ que não seja trivial, semitrivial ou (u_0, v_0) (lembrando que nós podemos garantir que este ponto crítico não é semitrivial apenas quando $\beta < p$). Os lemas 1.5 e 1.14 garantem as hipóteses necessárias para aplicarmos o Teorema do Passo da Montanha (veja [36]). Pela Proposição 2.4, o funcional $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a condição Palais-Smale para todo $0 \leq c < I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^*$ e o Lema 2.3 garante que $c_{\lambda\mu} \in (0, I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) + c^*)$, onde $c_{\lambda\mu}$ é o nível do passo da montanha. Assim, O Teorema do Passo da Montanha provê um ponto crítico

(u, v) satisfazendo $I_{\lambda\mu}(u, v) > 0$, logo, tal ponto não pode ser trivial ou (u_0, v_0). Portanto, (u, v) é semitrivial, uma contradição visto que pontos críticos semitriviais necessariamente apresentam energia negativa. $\square$

Capítulo 3

Existência de solução nodal para um problema quasilinear com pesos

Neste capítulo, buscamos solução que muda de sinal para o problema (1) dado por

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{p^*-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

onde $-\Delta_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $2 \leq p < N$, $N > p^2 + p$, $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev, $g^+ := \max\{0, g\} \not\equiv 0$, $f^+ := \max\{0, f\} \not\equiv 0$, $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ e $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Além disso, consideraremos $\lambda_1^+ > 0$ o autovalor principal de

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \qquad \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p dx > 0$$

com $u_1^+ > 0$ a autofunção associada a λ_1^+ e assumindo, sem perda de generalidade, que para algum $R > 0$ as seguintes hipóteses sobre as funções f e g são satisfeitas:
(F_1) $f(0) = |f|_\infty$ e $f(x) > 0$ para todo $x \in B_{2R}(0)$;
(F_2) $f(x) = f(0) + o(|x|^{\frac{N-p}{p-1}})$ para todo $x \in B_{2R}(0)$;
(G_1) $g(x) > 0$ para todo $x \in B_{2R}(0)$.

3.1 Caracterização Variacional

O objetivo desta seção é definir nossas hipóteses básicas e relembrar alguns resultados conhecidos. Ao longo deste estudo, assumiremos $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ onde $g^+, g^- \geq 0$ são, respectivamente, a parte positiva e a parte negativa da função g.

Para referências posteriores, lembramos a desigualdade de Hardy

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{(1+|x|)^p} dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \|u\|_{1,p}^p, \quad \forall\, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3.1}$$

em que $\|.\|_{1,p}$ denota a norma usual sobre $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Observação 3.1. *Considerando*

$$w(x) := \max\left\{\frac{1}{(1+|x|)^p}, g^-(x)\right\} > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

por (3.1), podemos definir a norma

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} w(x)|u|^p dx\right)^{1/p}$$

Consideraremos $\mathcal{V}_g$ o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação à norma $\|.\|$. Além disso, $\mathcal{V}_g$ é um espaço de Banach uniformemente convexo.

Lema 3.2. *Para qualquer $c_1 > 0$ e $(u_n) \subset \mathcal{V}_g$, temos $\|u_n\| \to 0$ em $\mathcal{V}_g$ se, e somente se,*

$$\lim_{n\to\infty} \int (|\nabla u_n|^p + c_1 g^-(x)|u_n|^p) = 0 \tag{3.2}$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $(u_n) \subset \mathcal{V}_g$ e $\|u_n\| \to 0$, então

$$\int (|\nabla u_n|^p + w(x)|u_n|^p)dx \to 0.$$

Como ambas as parcelas da integral são positivas, temos

$$\int |\nabla u_n|^p dx \to 0 \ \text{ e } \ \int w(x)|u_n|^p dx \to 0.$$

Assim, para qualquer $c_1 > 0$, por (3.1), vemos que

$$0 \leq \int (|\nabla u_n|^p + c_1 g^-(x)|u_n|^p)dx \leq \int (|\nabla u_n|^p + c_1 w(x)|u_n|^p)dx \to 0,$$

de onde concluímos que

$$\int (|\nabla u_n|^p + c_1 g^-(x)|u_n|^p)dx \to 0.$$

($\Leftarrow$) Suponha que para qualquer $c_1 > 0$ (3.2) se verifique. Então,

$$\int |\nabla u_n|^p dx \to 0 \ \text{ e } \ \int g^-(x)|u_n|^p dx \to 0.$$

Como $w(x) \leq g^-(x) + \dfrac{1}{(1+|x|)^p}$, pela desigualdade de Hardy dada em (3.1), temos

$$0 \leq \int w(x)|u_n|^p dx \leq \int \frac{|u_n|^p}{(1+|x|)^p}dx + \int g^-(x)|u_n|^p dx \leq C_N \int |\nabla u_n|^p dx + \int g^-(x)|u_n|^p dx.$$

Por fim, passando o limite com $n \to \infty$, concluímos que

$$\int w(x)|u_n|^p dx \to 0,$$

portanto, $\|u_n\| \to 0$. $\square$

A partir deste ponto, todas as integrais serão tomadas sobre $\mathbb{R}^N$ a menos que esteja de outra forma especificado. Consideraremos ainda S a melhor constante de Sobolev, isto é,

$$S := \inf \left\{ \frac{|\nabla u|_p^p}{|u|_{p^*}^p}, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\} \right\} \tag{3.3}$$

De acordo com [18, Lema 2.3], temos

Proposição 3.3. *Assuma $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $0 \not\equiv g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$. Então existe um único autovalor $\lambda_1^+ > 0$, simples e isolado, tal que o problema de autovalor (2) possui uma autofunção positiva $u_1^+ \in \mathcal{V}_g$ associada a λ_1^+. Além disso, para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_1^+]$*

$$\int (|\nabla u|^p - \lambda g(x)|u|^p) dx \geq 0$$

A igualdade se verifica apenas se $u \equiv 0$ ou $\lambda = \lambda_1^+$ com $u = \alpha u_1^+$ para alguma constante α.

Note que, quando $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$, para algum $a > 0$ temos

$$\int (|\nabla u|^p - \lambda g(x)|u|^p) dx \geq a \int |\nabla u|^p dx = a\|u\|_{1,p}^p$$

caso contrário, para todo $a > 0$ teríamos

$$a \int |\nabla u|^p dx > \int (|\nabla u|^p - \lambda g(x)|u|^p) dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^+}\right) \int |\nabla u|^p dx,$$

uma contradição, uma vez que podemos escolher $a \in \left(0, 1 - \lambda/\lambda_1^+\right)$.

O resultado seguinte é uma versão do Lema de Brezis-Lieb (veja [8]) cuja demonstração pode ser encontrada em [41, p. 21, Lema 1.32].

Lema 3.4. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Considere $F_n : \Omega \to \mathbb{R}^k$ com $F_n \in [L^s(\Omega)]^k$, $1 \leq s < \infty$ satisfazendo*
(A)F_n é limitada em $[L^s(\Omega)]^k$;
(B) $F_n \to F$ quase sempre em Ω.
Então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |F_n(x)|^s dx - \int_\Omega |F_n(x) - F(x)|^s dx \right) = \int_\Omega |F(x)|^s dx$$

onde $|z|^2 = \langle z, z\rangle$ e $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^k z_i w_i$ para todo $z, w \in \mathbb{R}^k$.

Demonstração. Sejam $1 < s < \infty$ e $\phi(\alpha) := ||z + \alpha w|^s - |z|^s|$. Note que $\phi(0) = 0$ e $\phi'(\alpha) = s|z + \alpha w|^{s-2}\langle z + \alpha w, w\rangle$. Pelo Teorema do Valor Médio, exite $t \in (0, 1)$ tal que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(t)$, isto é,

$$||z + w|^s - |z|^s| = s|z + tw|^{s-2}\langle z + tw, w\rangle \leq s|z + tw|^{s-1}|w|$$

Observe agora que s e $s/(s-1)$ são expoentes conjugados. Assim, pela desigualdade de Young, dado $\epsilon > 0$, existe $C(\epsilon) > 0$ tal que

$$|z + tw|^{s-1}|w| \leq \epsilon \left(|z + tw|^{s-1}\right)^{s/(s-1)} + C(\epsilon)|w|^s = \epsilon|z + tw|^s + C(\epsilon)|w|^s \tag{3.4}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
||z + w|^s - |z|^s| &\leq s\left[\epsilon|z + tw|^s + C(\epsilon)|w|^s\right] \\
&\leq s\epsilon(|z|^s + t^s|w|^s) + C(\epsilon, s)|w|^s \\
&\leq \hat{\epsilon}(|z|^s + |w|^s) + C(\epsilon, s)|w|^s
\end{aligned}$$

onde na penúltima linha utilizamos a desigualdade $(1+x)^s \leq 1+x^s$, válida para todo $x > 0$ e $s > 1$. Portanto, para todo $z, w \in \mathbb{R}^k$, temos $||z + w|^s - |z|^s| \leq \hat{\epsilon}|z|^s + C(s, \epsilon)|w|^s$. Note também que, se $s = 1$, (3.4) permanece válida tanto com $|z| = 0$ como para $|z| \neq 0$.

Considere agora $z = F_n(x) - F(x)$ e $w = F(x)$ e defina

$$f_n^\epsilon(x) := \left(||F_n(x)|^s - |F_n(x) - F(x)|^s - |F(x)|^s| - \hat{\epsilon}|F_n(x) - F(x)|^s\right)^+$$

Pelas hipóteses sobre (F_n), vemos que $f_n^\epsilon(x) \to 0$ quase sempre em Ω e $f_n^\epsilon(x) \leq (1 + C(s, \epsilon))|F(x)|^s \in \left[L^1(\Omega)\right]^k$. Estamos então nas condições de usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, de onde obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n^\epsilon(x)dx = 0$$

Note que $||F_n(x)|^s - |F_n(x) - F(x)|^s - |F(x)|^s| \leq f_n^\epsilon(x) + \hat{\epsilon}|F_n(x) - F(x)|^s$. Assim,

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega ||F_n(x)|^s - |F_n(x) - F(x)|^s - |F(x)|^s|\, dx \leq c\hat{\epsilon}$$

onde $c := \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |F_n(x) - F(x)|^s dx < \infty$. A demonstração termina ao fazer $\hat{\epsilon} \to 0$. $\square$

Agora, introduzimos o funcional $I_\lambda : \mathcal{V}_g \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int |\nabla u|^p - \frac{\lambda}{p}\int g(x)|u|^p - \frac{1}{p^*}\int f(x)|u|^{p^*} \tag{3.5}$$

O funcional I_λ está bem definido sobre $\mathcal{V}_g$ e cada ponto crítico de I_λ em $\mathcal{V}_g$ é uma solução fraca de (1). Além disso, podemos sempre assumir que os pontos críticos de I_λ são funções não-negativas.

3.2 Condição Palais-Smale

Nesta seção construiremos o conjunto $\mathcal{M}_\lambda$ dos pontos críticos de I_λ que mudam de sinal em $\mathcal{V}_g$. Devido à falta de compacidade das imersões, precisamos verificar ainda os níveis em que a condição Palais-Smale se verifica. Para isso, faremos um estudo do decaimento de nível e mostraremos que a energia do ponto crítico obtido em $\mathcal{M}_\lambda$ encontra-se neste intervalo de compacidade, sendo este ponto crítico, portanto, a solução que muda de sinal que estamos procurando.

Defina os conjuntos $\mathcal{N}_\lambda^\pm := \{u \in \mathcal{V}_g;\ u^\pm \in \mathcal{N}_\lambda\}$, onde $\mathcal{N}_\lambda := \{u \in \mathcal{V}_g \backslash \{0\};\ I'_\lambda(u)u = 0\}$ é o conjunto de todas as soluções não-triviais do problema (1), e $\mathcal{M}_\lambda := \mathcal{N}_\lambda^+ \cap \mathcal{N}_\lambda^-$. Note que, se $u \in \mathcal{N}_\lambda$, temos

$$\int |\nabla u|^p - \lambda \int g(x)|u|^p = \int f(x)|u|^{p^*}$$

então, para $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$, a Proposição 3.3 garante que para todo $u \in \mathcal{N}_\lambda$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{N}\left[\int |\nabla u|^p - \lambda \int g(x)|u|^p\right] \geq \frac{1}{N}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^+}\right)\|u\|^p$$

Assim, I_λ é coercivo em $\mathcal{N}_\lambda$ e, desde que $I_\lambda(u) = I_\lambda(u^+) + I_\lambda(u^-)$, concluímos que I_λ é coercivo em $\mathcal{M}_\lambda$. Além disso, se $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ e $u \in \mathcal{N}_\lambda$, então usando (3.3), vemos que

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^+}\right)\|u\|^p &\leq \int (|\nabla u|^p + \lambda g(x)|u|^p)dx \\ &= \int f(x)|u|^{p^*}dx \\ &\leq |f|_\infty \int |u|^{p^*}dx \\ &\leq |f|_\infty S^{-\frac{p^*}{p}}\|u\|^{p^*},\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\|u\|^{p^*-p} \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^+}\right)|f|_\infty^{-1} S^{\frac{p^*}{p}}.$$

Logo, existe $\alpha > 0$ tal que $\|u\| \geq \alpha > 0$ e podemos definir

$$c_\lambda := \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(u) \ \text{ e } \ d_\lambda := \inf_{u \in \mathcal{M}_\lambda} I_\lambda(u).$$

Definição 3.5. *Dizemos que $(u_n) \subset \mathcal{V}_g$ é uma sequência Palais-Smale para o funcional I_λ no nível c, ou, de forma reduzida, uma sequência $(PS)_c$, se $I_\lambda(u_n) \to c$ e $I'_\lambda(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Como nosso problema apresenta crescimento crítico, o próximo lema é necessário para estudar os níveis em que o funcional I_λ associado satisfaz a condição Palais-Smale.

Lema 3.6. *Sejam $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ e $(u_n) \in \mathcal{V}_g$ uma sequência $(PS)_c$. Se*

$$c < c_\lambda + \frac{1}{N}|f|_\infty^{(p-N)/p} S^{N/p}$$

então existe uma subsequência de (u_n), que ainda denotaremos por (u_n), e $u \in \mathcal{V}_g$ tais que $u_n^+ \to u^+$ e $u_n^- \to u^-$ em $\mathcal{V}_g$

Demonstração. Se $(u_n) \in \mathcal{V}_g$ é uma sequência $(PS)_c$ para I_λ, temos

$$I_\lambda(u_n) = \frac{1}{p}\int (|\nabla u_n|^p - \lambda g(x)|u_n|^p)dx - \frac{1}{p^*}\int f(x)|u_n|^{p^*}dx$$

e, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, como $|I'_\lambda(u_n)\varphi| \leq |I'_\lambda(u_n)|\|\varphi\|$, então $I'_\lambda(u_n)\varphi = o_n(1)\|\varphi\|$.

Queremos mostrar primeiramente que (u_n) é limitado em $\mathcal{V}_g$. Note que pelas duas expressões anteriores podemos escrever

$$\begin{aligned} c + o_n(1) + o_n(1)\|u_n\| &= I_\lambda(u_n) - \frac{1}{p^*}I'_\lambda(u_n)u_n \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int (|\nabla u_n|^p - \lambda g(x)|u_n|^p)dx \\ &= \frac{1}{N}\int (|\nabla u_n|^p - \lambda g(x)|u_n|^p)dx. \end{aligned}$$

Suponha por contradição que $\|u_n\| \to \infty$ e considere $v_n := u_n/\|u_n\|$ de tal forma que $\|v_n\| = 1$. Uma vez que (v_n) é limitada, podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{V}_g$ para algum $v \in \mathcal{V}_g$. Dividindo a equação anterior por $\|u_n\|^p$, obtemos

$$\frac{c}{\|u_n\|^p} + \frac{o_n(1)}{\|u_n\|^{p-1}} + \frac{o_n(1)}{\|u_n\|^p} = \frac{1}{N}\int (|\nabla v_n|^p - \lambda g(x)|v_n|^p)dx. \tag{3.6}$$

Além disso, a Proposição C.3 garante a continuidade do operador $G : \mathcal{V}_g \to \mathbb{R}^N$ dado por

$$G(z) := \int g^+(x)|z|^p dx,$$

logo

$$\int g^+(x)|v_n|^p dx \to \int g^+(x)|v|^p dx.$$

Assim, por propriedades de convergência fraca, temos

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int (|\nabla v|^p - \lambda g(x)|v|^p)dx \\
&= \int (|\nabla v|^p + \lambda g^-(x)|v|^p)dx - \lambda \int g^+(x)|v|^p dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left[\int (|\nabla v_n|^p + \lambda g^-(x)|v_n|^p)dx - \lambda \int g^+(x)|v_n|^p dx \right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int (|\nabla v_n|^p - \lambda g(x)|v_n|^p)dx,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

e, por (3.6) concluímos que

$$\int (|\nabla v|^p - \lambda g(x)|v|^p)dx = 0.$$

Deste modo, temos

$$\int |\nabla v|^p = \lambda g(x)|v|^p dx$$

e a caracterização variacional de λ_1^+ (veja a Proposição 3.3) implica que $v \equiv 0$. Assim, temos

$$\int g^+(x)|v_n|^p dx \to \int g^+(x)|v|^p dx = 0$$

e, por (3.7), concluímos que

$$\int |\nabla v_n|^p + \lambda g^-(x)|v_n|^p dx \to 0.$$

O Lema (3.2) garante então que $\|v_n\| \to 0$, uma contradição, pois $\|v_n\| = 1$. Logo, (u_n) é limitada e existe $u \in \mathcal{V}_g$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{V}_g$.

Seja $R > 0$ e tome $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ de modo que $\varphi \equiv 1$ em $B_R(0)$ e $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{2R}(0)$. Assim, $\varphi u_n \to \varphi u$ em $W_0^{1,p}(B_R(0))$ e, a menos de subsequência, $u_n \to u$ quase sempre em $B_R(0)$.

Por um argumento diagonal, obtemos (a menos de subsequência) $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo ponto x em $\mathbb{R}^N$. Mostraremos apenas que $u_n^+ \to u^+$ em $\mathcal{V}_g$. Note que

$$
\begin{aligned}
(I_\lambda'(u_n) - I_\lambda'(u))(u_n^+ - u^+) = {} & |\nabla u_n^+|_p^p - |\nabla u^+|_p^p - \int |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u^+ + \int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n^+ \\
& - \lambda \int g(x)|u_n^+|^p + \lambda \int g(x)|u^+|^p - \lambda \int g(x)|u|^{p-2}u u_n^+ \\
& + \lambda \int g(x)|u_n|^{p-2}u_n u^+ - \int f(x)|u_n^+|^{p^*} + \int f(x)|u^+|^{p^*} \\
& - \int f(x)|u|^{p^*-2}u u_n^+ + \int f(x)|u_n|^{p^*-2}u_n u^+.
\end{aligned}
$$

Por [19, Proposição 2.3] e por [19, (2.3)], temos

$$(I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u))(u_n^+ - u^+) = |\nabla u_n^+|_p^p - |\nabla u^+|_p^p - \lambda \int g(x)(|u_n^+|^p - |u^+|^p)$$
$$- \int f(x)(|u_n^+|^{p^*} - |u^+|^{p^*}) + o_n(1)$$

A expressão anterior combinada com o Lema 3.4 e a convergência $u_n \to u$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ garante que

$$o_n(1) = (I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u))(u_n^+ - u^+) = |\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p - \lambda \int g(x)|u_n^+ - u^+|^p$$
$$- \int f(x)|u_n^+ - u^+|^{p^*} + o_n(1). \quad (3.8)$$

Pelo Lema 3.4 e pela continuidade do operador $G : \mathcal{V}_g \to \mathbb{R}^N$ previamente definido, obtemos

$$\int g^+(x)|u_n^+|^p - \int g^+(x)|u_n^+ - u^+|^p = \int g^+(x)|u^+|^p + o_n(1),$$

de modo que

$$\int g^+(x)|u_n^+ - u^+|^p \to 0. \quad (3.9)$$

Então, por (3.8) e (3.9), temos

$$o_n(1) = (I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u))(u_n^+ - u^+) = |\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p + \lambda \int g^-(x)|u_n^+ - u^+|^p$$
$$- \int f(x)|u_n^+ - u^+|^{p^*} + o_n(1). \quad (3.10)$$

Afirmamos que $|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p \to 0$. De fato, suponha $|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p \to d > 0$. Pelo Lema (3.2), existe $\hat{d} > 0$ tal que

$$A_n := \int (|\nabla(u_n^+ - u^+)|^p + \lambda g^-(x)|u_n^+ - u^+|^p) \to \hat{d}.$$

Como $|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p \leq A_n$, por (3.3) e (3.10), temos

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= |\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p + \lambda \int g^-(x)|u_n^+ - u^+|^p - \int f(x)|u_n^+ - u^+|^{p^*} + o_n(1) \\
&= A_n - \int f(x)|u_n^+ - u^+|^{p^*} + o_n(1) \\
&\geq A_n - |f|_\infty S^{-\frac{p^*}{p}} |\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^{p^*} + o_n(1) \\
&\geq A_n - |f|_\infty S^{-\frac{p^*}{p}} A_n^{\frac{p^*}{p}} + o_n(1) \\
&= A_n \left(1 - |f|_\infty S^{-\frac{p^*}{p}} A_n^{\frac{p^*}{p} - 1}\right) + o_n(1)
\end{aligned}$$

e, desde que $\hat{d} > 0$, a expressão anterior implica que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \geq |f|_\infty^{\frac{p-N}{p}} S^{\frac{N}{p}}. \tag{3.11}$$

Como estamos supondo que $(u_n) \subset \mathcal{V}_g$ é uma sequência $(PS)_c$ para I_λ, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$o_n(1) = I'_\lambda(u_n)\varphi = \int |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi - \lambda \int g(x)|u_n|^{p-2}u_n\varphi - \int f(x)|u_n|^{p^*-2}u_n\varphi.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, usando as convergências dadas em [19, Proposição 2.3] e [19, (2.3)], vemos que

$$0 = \int |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi - \lambda\int g(x)|u|^{p-2}u\varphi - \int f(x)|u|^{p^*-2}u\varphi = I'_\lambda(u)\varphi$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, por densidade, concluímos que $I'_\lambda(u) = 0$.

Observe ainda que $I'_\lambda(u)u^+ = I'_\lambda(u)u_n^+ = 0$. Isso e (3.8) garantem que

$$|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p = \lambda\int g|u_n^+ - u^+|^p + \int f|u_n^+ - u^+|^{p^*} + o_n(1), \tag{3.12}$$

e pelo Lema 3.4 concluímos que

$$I_\lambda(u_n^+) = I_\lambda(u_n^+ - u^+) + I_\lambda(u^+) + o_n(1). \tag{3.13}$$

Por (3.12), (3.13) e pela definição de A_n, vemos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u^+) &= I_\lambda(u_n^+) - I_\lambda(u_n^+ - u^+) + o_n(1)\\
&= \frac{1}{p}\left[|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p - \lambda\int g(x)|u_n^+ - u^+|^p\right] - \frac{1}{p^*}\int f(x)|u_n^+ - u^+|^{p^*}\\
&\qquad\qquad - I_\lambda(u_n^+ - u^+) + o_n(1)\\
&= \frac{1}{N}\left[|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p - \lambda\int g(x)|u_n^+ - u^+|^p\right] - I_\lambda(u_n^+ - u^+) + o_n(1)\\
&= \frac{1}{N}\left[|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p^p + \lambda\int g^-(x)|u_n^+ - u^+|^p\right] - \frac{1}{N}\lambda\int g^+(x)|u_n^+ - u^+|^p\\
&\qquad\qquad - I_\lambda(u_n^+ - u^+) + o_n(1)\\
&= \frac{1}{N}A_n - \frac{1}{N}\lambda\int g^+(x)|u_n^+ - u^+|^p - I_\lambda(u_n^+ - u^+) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Usando (3.11), (3.9) e a definição de c_λ, como $u_n^+ \in \mathcal{N}_\lambda$, então

$$I_\lambda(u_n^+) = \frac{1}{N}A_n + I_\lambda(u^+) + o_n(1) \geq \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{p-N}{p}} S^{\frac{N}{p}} + c_\lambda + o_n(1) \tag{3.14}$$

Note ainda que

$$o_n(1) = I'_\lambda(u_n)u_n^- = -\left[\|u_n^-\|_{1,p}^p - \lambda\int g(x)|u_n^-|^p\right] + \int f(x)|u_n^-|^{p^*}$$

e, como $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$, temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n^-) &= \frac{1}{p}\left[\|u_n^-\|_{1,p}^p - \lambda\int g(x)|u_n^-|^p\right] + \frac{1}{p^*}\int f(x)|u_n^-|^{p^*} \\ &= \frac{1}{N}\|u_n^-\|_{1,p}^p - \lambda\int g(x)|u_n^-|^p \geq 0, \end{aligned}$$

então

$$c + o_n(1) = I_\lambda(u_n) = I_\lambda(u_n^+) + I_\lambda(u_n^-) \geq I_\lambda(u_n^+).$$

Isso, combinado com (3.14) implica que

$$c \geq c_\lambda + \frac{1}{N}|f|_\infty^{(p-N)/p} S^{N/p},$$

uma contradição. Portanto, $d = 0$, isto é, $|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p \to 0$. Queremos mostrar agora que $A_n \to 0$. Se isso for verdade, então pelo Lema 3.2 teremos $\|u_n^+ - u^+\| \to 0$. Note que, pelo Lema 3.4, temos

$$\lambda\int g^-(x)|u_n^+ - u^+|^p = \lambda\int g^-(x)(|u_n^+|^p - |u^+|^p) + o_n(1).$$

Como $|\nabla(u_n^+ - u^+)|_p \to 0$, então $u_n^+ \to u^+$ forte em $L^p(\mathbb{R}^N)$, de modo que $|u_n^+|^p \to |u^+|^p$ forte em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, como $g^- \in L^\infty$, por Hölder temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda\int g^-(x)|u_n^+ - u^+|^p &= \lambda\int g^-(x)(|u_n^+|^p - |u^+|^p) + o_n(1) \\ &\leq \lambda\int g^-(x)||u_n^+|^p - |u^+|^p| + o_n(1) \\ &\leq \lambda|g^-|_\infty \left||u_n^+|^p - |u^+|^p\right| \end{aligned}$$

e, tomando o limite quando $n \to \infty$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\int g^-(x)|u_n^+ - u^+|^p = 0.$$

Portanto, $A_n \to 0$, o que implica $u_n^+ \to u^+$ forte em $\mathcal{V}_g$. O mesmo argumento é usado para mostrar que $u_n^- \to u^-$ forte em $\mathcal{V}_g$, o que conclui a demonstração. □

Precisamos agora mostrar que existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$ satisfazendo $I'_\lambda(u_n) = o_n(1)$ para que depois consigamos garantir a existência de uma sequência $(PS)_{d_\lambda}$ no conjunto $\mathcal{M}_\lambda$.

Lema 3.7. *Suponha*
(A) $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$
(B) $0 < \alpha \leq \|u_n^\pm\| \leq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(C) $I_\lambda(z) \geq I_\lambda(u_n) - \epsilon\|z - u_n\|$ *para todo* $z \in \mathcal{M}_\lambda$.
Então existe uma constante $K > 0$ *que não depende de* n *tal que* $\|I'_\lambda(u_n)\| \leq K\epsilon$.

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in \mathcal{V}_g$ com $\varphi > 0$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$. Tome $\delta > 0$ e observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $(u_n^\pm - \delta\varphi) \to u_n^\pm$ quando $\delta \to 0$, então para δ suficientemente pequeno, como $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$, concluímos que $\phi_{\delta,n}^\pm := (u_n - \delta\varphi)^\pm \not\equiv 0$.

Para não sobrecarregar a notação, uma vez que n está fixado, podemos omiti-lo. Defina

$$\phi_\delta := u - \delta\varphi = (u - \delta\varphi)^+ - (u - \delta\varphi)^-.$$

Note que, uma vez que $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$, temos

$$I_\lambda(t\phi_\delta^\pm) = \frac{t^p}{p}\int(|\nabla\phi_\delta^\pm|^p - \lambda g(x)|\phi_\delta^\pm|^p) - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int f(x)|\phi_\delta^\pm|^{p^*},$$

onde

$$\int(|\nabla\phi_\delta^\pm|^p - \lambda g(x)|\phi_\delta^\pm|^p) = \int f(x)|\phi_\delta^\pm|^{p^*} > 0,$$

logo $I_\lambda(t\phi_\delta^\pm)$ atinge seu máximo em

$$t_\delta^\pm = t_\pm(\delta) := \left[\frac{\|\phi_\delta^\pm\|_{1,p}^p - \lambda\displaystyle\int g(x)|\phi_\delta^\pm|^p}{\displaystyle\int f(x)|\phi_\delta^\pm|^{p^*}}\right]^{\frac{1}{p^*-p}} > 0.$$

Em particular, $t_\pm(0) = 1$. Além disso, $I'_\lambda(t_+(\delta)\phi_\delta^+) = I'_\lambda(t_-(\delta)\phi_\delta^-) = 0$. Uma vez que $\phi_\delta^\pm \not\equiv 0$ e $t_\pm(\delta) \neq 0$, temos $t_+(\delta)\phi_\delta^+$, $t_-(\delta)\phi_\delta^- \not\equiv 0$. Assim, $t_+(\delta)\phi_\delta^+$, $t_-(\delta)\phi_\delta^- \in \mathcal{N}_\lambda$ e

$$z_\delta = z_\delta^+ - z_\delta^- = t_+(\delta)\phi_\delta^+ - t_-(\delta)\phi_\delta^- \in \mathcal{M}_\lambda.$$

Por (C) e pelo Teorema do Valor Médio, concluímos que

$$I'_\lambda(u)(z_\delta - u) + o_\delta(\|z_\delta - u\|) = I_\lambda(z_\delta) - I_\lambda(u) \geq -\epsilon\|z_\delta - u\|,$$

onde

$$\begin{aligned}(t_+(\delta) - 1)\phi_\delta^+ - (t_-(\delta) - 1)\phi_\delta^- &= t_+(\delta)\phi_\delta^+ - t_-(\delta)\phi_\delta^- - \phi_\delta \\ &= z_\delta - \phi_\delta \\ &= z_\delta - u + \delta\varphi,\end{aligned}$$

de modo que

$$z_\delta - u = (t_+(\delta) - 1)\phi_\delta^+ - (t_-(\delta) - 1)\phi_\delta^- - \delta\varphi. \tag{3.15}$$

Assim,

$$\varphi = \frac{(t_+(\delta)-1)\phi_\delta^+}{\delta} - \frac{(t_-(\delta)-1)\phi_\delta^-}{\delta} - \frac{z_\delta - u}{\delta}.$$

Além disso, por (3.15), usando o Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned}\frac{z_\delta - u}{\delta} &= \frac{(t_+(\delta)-1)\phi_\delta^+}{\delta} - \frac{(t_-(\delta)-1)\phi_\delta^-}{\delta} - \varphi \\ &= t_+(0)\phi_\delta^+ - t_-(0)\phi_\delta^- - \varphi + o_\delta(1) \\ &< t_+(0)\phi_\delta^+ - t_-(0)\phi_\delta^- + o_\delta(1).\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\delta \to 0^+$, vemos que

$$\frac{\|z_\delta - u\|}{\delta} \leq \|t_+(0)\phi_\delta^+ - t_-(0)\phi_\delta^-\| + o_\delta(1). \tag{3.16}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}I'_\lambda(u)\varphi &= \frac{I'_\lambda(u)\big((t_+(\delta)-1)\phi_\delta^+ - (t_-(\delta)-1)\phi_\delta^- - (z_\delta - u)\big)}{\delta} \\ &\leq \frac{\epsilon\|z_\delta - u\| + o_\delta(\|z_\delta - u\|)}{\delta} + \left(\frac{t_+(\delta) - t_+(0)}{\delta}\right) I'_\lambda(u)\phi_\delta^+ \\ &\qquad - \left(\frac{t_-(\delta) - t_-(0)}{\delta}\right) I'_\lambda(u)\phi_\delta^-.\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, concluímos então que

$$I'_\lambda(u)\varphi \leq \frac{\epsilon\|z_\delta - u\| + o_\delta(\|z_\delta - u\|)}{\delta} + t'_+(0)I'_\lambda(u)\phi_\delta^+ - t'_-(0)I'_\lambda(u)\phi_\delta^- + o_\delta(1),$$

onde $I'_\lambda(u)\phi_\delta^\pm = I'_\lambda(u)(u^\pm + o_\delta(1)) = o_\delta(1)$. Precisamos mostrar agora que $t'_\pm(0)$ é limitado. De fato, derivando $t_\pm(\delta)$, como $t_\pm(0) = 1$, concluímos que

$$t'_\pm(0) = \frac{-p\left(\displaystyle\int |\nabla u^\pm|^{p-2}\nabla u^\pm \nabla\varphi - \lambda\int g|u^\pm|^{p-2}u^\pm\varphi\right) + p^*\displaystyle\int f|u^\pm|^{p^*-2}u^\pm\varphi}{(p^*-p)\displaystyle\int f|u^\pm|^{p^*}}.$$

Pelas hipóteses (A) e (B), calculamos

$$\int f|u^\pm|^{p^*} = \int (|\nabla u^\pm|^p - \lambda g|u^\pm|^p) \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^+}\right)\|u^\pm\|^p \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1^+}\right)\alpha^p,$$

deste modo,

$$t'_\pm(0) = \frac{-p\left(\displaystyle\int |\nabla u^\pm|^{p-2}\nabla u^\pm \nabla\varphi - \lambda\int g|u^\pm|^{p-2}u^\pm\varphi\right) + p^*\displaystyle\int f|u^\pm|^{p^*-2}u^\pm\varphi}{\alpha^p(p^*-p)\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1^+}\right)}.$$

Tomando o módulo e usando desigualdade triangular, vemos que

$$|t'_{\pm}(0)| \leq \frac{p\displaystyle\int \big(|\nabla u^{\pm}|^{p-1}|\nabla\varphi| + \lambda g(x)|u^{\pm}|^{p-1}|\varphi|\big) + p^{*}\displaystyle\int f(x)|u^{\pm}|^{p^{*}-1}|\varphi|}{\alpha^{p}(p^{*}-p)\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_1^{+}}\right)}.$$

Como $\|u^{\pm}\| \leq \beta$, pela desigualdade de Hölder e por (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
|t'_{\pm}(0)| &\leq \frac{\left(p|\nabla u^{\pm}|_{p}^{p-1} + \lambda p|g|_{\infty}|u^{\pm}|_{p}^{p-1} + p^{*}|f|_{\infty}|u^{\pm}|_{p^{*}}^{p^{*}-1}\right)\|\varphi\|}{(p^{*}-p)\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda_1^{+}}\right)\alpha^{p}} \\
&\leq \frac{1}{(p^{*}-p)\alpha^{p}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1^{+}}\right)^{-1}\left[(1+\lambda|g|_{\infty})p\beta^{p-1} + p^{*}|f|_{\infty}S^{-\frac{p^{*}}{p}}\beta^{p^{*}-1}\right] \\
&:= K_0,
\end{aligned}$$

onde $K_0 > 0$ é uma constante que não depende de n. Deste modo, por (3.15) e (3.16) temos

$$\begin{aligned}
I'_{\lambda}(u)\varphi &\leq \epsilon\|t'_{+}(0)\phi_{\delta}^{+} - H'_{-}(0)\phi_{\delta}^{-}\| + \frac{o_{\delta}(\|z_{\delta}-u\|)}{\delta} + \big(t'_{+}(0) - t'_{+}(0)\big)\,o_{\delta}(1) \\
&\leq \epsilon\|t'_{+}(0)\phi_{\delta}^{+} - t'_{-}(0)\phi_{\delta}^{-}\| + o_{\delta}(1) \\
&\leq \epsilon\max\{|t'_{+}(0)|, |t'_{-}(0)|\}\|\phi_{\delta}\| + o_{\delta}(1),
\end{aligned}$$

onde $\|\phi_{\delta,n}\| \leq \|u_n\| + \delta$. Como já mostramos que toda sequência Palais-Smale para o funcional I_{λ} é limitada, vemos que $I'_{\lambda}(u)\varphi \leq 2\epsilon K_0\beta = K\epsilon$, onde $K = 2K_0\beta > 0$. Uma vez que φ é uma função arbitrária satisfazendo $\|\varphi\| \leq 1$, concluímos que $\|I'_{\lambda}(u_n)\| \leq K\epsilon$.

□

Lema 3.8. *Existe uma sequência $(PS)_{d_{\lambda}}$ em $\mathcal{M}_{\lambda}$.*

Demonstração. Seja $(z_n) \in \mathcal{M}_{\lambda}$ uma sequência minimizante para d_{λ}. Como $\mathcal{M}_{\lambda}$ é fechado em $\mathcal{V}_g$, usando o Princípio Variacional de Ekeland, obtemos uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}_{\lambda}$ tal que

(A) $d_{\lambda} \leq I_{\lambda}(u_n) \leq I_{\lambda}(z_n) \leq d_{\lambda} + \dfrac{1}{n}$;

(B) $\|u_n - z_n\| \leq \dfrac{1}{n}$;

(C) $I_{\lambda}(z) \geq I_{\lambda}(u_n) - \dfrac{1}{n}\|z - u_n\|$ para todo $z \in \mathcal{M}_{\lambda}$.

Desde que $\mathcal{M}_{\lambda} \subset \mathcal{N}_{\lambda}$, nós já mostramos que existe $\alpha > 0$ satisfazendo $\|u_n\| \geq \alpha > 0$, e lembrando que I_{λ} é coercivo sobre $\mathcal{M}_{\lambda}$, obtemos $\beta > \alpha$ tal que $0 < \alpha \leq \|u_n\| \leq \beta$.

Isto, combinado com (C) e o Lema 3.7 garantem a existência de uma constante $K > 0$ que não depende de n satisfazendo

$$\|I'_{\lambda}(u_n)\| \leq \frac{K}{n}$$

e assim, $I'_\lambda(u_n) \to 0$. Por (A), temos $I_\lambda(u_n) \to d_\lambda$ o que conclui a demonstração. $\square$

Como o Lema 3.8 garante a existência de uma sequência $(PS)_{d_\lambda}$ para o problema (1), precisamos mostrar apenas que d_λ pertence ao intervalo de compacidade de I_λ.

A partir deste ponto, consideraremos u_0 a solução positiva do problema (1) obtida usando o Teorema do Passo da Montanha (veja [19]), então $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda$. Além disso, para $\epsilon > 0$, definimos as funções

$$u_\epsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\epsilon + |x|^{p/(p-1)})^{\frac{N-p}{p}}}, \qquad v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{|u_\epsilon(x)|_{p^*}}$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(B_{2R}(0))$ é tal que $0 \le \varphi(x) \le 1$ e $\varphi \equiv 1$ in $B_R(0)$. Observe que para $R > 0$ pequeno o suficiente, podemos assumir

$$\int (|\nabla v_\epsilon|^p - \lambda g(x)|v_\epsilon|^p) > 0$$

Isto segue da dependência contínua do autovalor principal sobre o domínio e do fato de quando $|\Omega| \to 0$, o autovalor principal sobre Ω tende a $+\infty$.

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)} f(x)|u_0|^{p^*} > 0 \tag{3.17}$$

De fato, podemos escrever

$$\zeta(R) := \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)} f(x)|u_0|^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u_0|^{p^*} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)}(x) dx$$

onde $\chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)} : \mathbb{R}^N \to \{0, 1\}$ é a função característica. Assim, nosso problema se reduz a mostrar que

$$\lim_{R \to 0^+} \zeta(R) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u_0|^{p^*} dx > 0$$

Para provar isto, consideraremos a sequência $(R_n) \to 0$ e definiremos

$$h_n(x) := f(x)|u_0|^{p^*} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)}(x)$$

Observe que, como $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos $|h_n(x)| \le |f|_\infty |u_0|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Desde que $h_n(x) \to f(x)|u_0|^{p^*}$ quase sempre, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_n(x) dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u_0|^{p^*} dx > 0$$

A seguir, queremos garantir que existe $z \in \mathcal{M}_\lambda$ da forma $z = \alpha_* u_0 + \beta_* v_\epsilon$, de modo que restará apenas mostrar que qualquer elemento da forma $\alpha u_0 + \beta v_\epsilon$ possui energia dentro do intervalo de compacidade do funcional I_λ.

Lema 3.9. *Existe $z \in \mathcal{M}_\lambda$ da forma $z = \alpha_* u_0 + \beta_* v_\epsilon$*

Demonstração. Defina $\gamma : \mathcal{V}_g \to \mathbb{R}$ dado por $\gamma(0) = 0$ e

$$\gamma(u) := \frac{\displaystyle\int f(x)|u|^{p^*}}{\|u\|_{1,p}^p - \lambda \displaystyle\int g(x)|u|^p}, \quad u \neq 0$$

Como $0 < \lambda < \lambda_1^+$, usando a imersão contínua $\mathcal{V}_g \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos $0 \leq \gamma(u) \leq C_0\|u\|^{p^*-p}$, então γ é contínua.

Agora, definimos $\sigma(r, s, t) := rt((1-s)u_0 - sv_\epsilon)$ para todo $r \geq 0$ e $s, t \in [0, 1]$. Considere

$$\Gamma(r) = \inf_{s\in[0,1]} \gamma(\sigma(1, s, 1)), \quad \forall\, r > 0$$

Se $\Gamma(1) = 0$, então existiria algum $s_0 \in [0, 1]$ tal que $\gamma(\sigma(1, s_0, 1)) = 0$, isto é,

$$\int f(x)|(1 - s_0)u_0 - s_0 v_\epsilon|^{p^*} = 0$$

Como v_ϵ e $f(x)$ são positivos em $B_{2R}(0)$ e v_ϵ desaparece em $\mathbb{R}^N \backslash B_{2R}(0)$, por (3.17) concluímos que $s_0 \in (0, 1)$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int f(x)|(1 - s_0)u_0 - s_0 v_\epsilon|^{p^*} \\
&= (1 - s_0)^{p^*} \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{2R}(0)} f(x)|u_0|^{p^*} + \int_{B_{2R}(0)} f(x)|(1 - s_0)u_0 - s_0 v_\epsilon|^{p^*} \\
&\geq (1 - s_0)^{p^*} \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_{2R}(0)} f(x)|u_0|^{p^*}
\end{aligned}$$

o que é uma contradição por (3.17), logo $\Gamma(1) > 0$.

Consequentemente, $\gamma(\sigma(r, s_0, 1)) = r^{p^*-p}\gamma(\sigma(1, s_0, 1)) \geq r^{p^*-p}\Gamma(1)$, então $\lim\limits_{r\to\infty} \Gamma(r) = \infty$.

Escolha $r_0 > 0$ tal que

$$\gamma(\sigma(r_0, s_0, 1)) \geq \Gamma(r_0) > 2, \quad \forall\, s \in [0, 1] \tag{3.18}$$

e defina funções $w, z : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ como segue:

$$z(s, t) := \gamma(\sigma^+(r_0, s, t)) + \gamma(\sigma^-(r_0, s, t)) - 2$$

$$w(s, t) := \gamma(\sigma^-(r_0, s, t)) - \gamma(\sigma^+(r_0, s, t))$$

Note ainda que

$$
\begin{aligned}
\gamma(u) &= \gamma(u^+ - u^-)\\
&= \frac{\displaystyle\int f(x)|u^+ - u^-|^{p^*}}{\|u\|_{1,p}^p - \lambda \displaystyle\int g(x)|u|^p}\\
&\leq \frac{\displaystyle\int f(x)(|u^+|^{p^*} + |u^-|^{p^*})}{\|u\|_{1,p}^p - \lambda \displaystyle\int g(x)|u|^p}\\
&= \frac{\displaystyle\int f(x)|u^+|^{p^*}}{\|u\|_{1,p}^p - \lambda \displaystyle\int g(x)|u|^p} + \frac{\displaystyle\int f(x)|u^-|^{p^*}}{\|u\|_{1,p}^p - \lambda \displaystyle\int g(x)|u|^p}\\
&= \frac{\displaystyle\int f(x)|u^+|^{p^*}}{\|u^+\|_{1,p}^p - \lambda \displaystyle\int g(x)|u^+|^p} + \frac{\displaystyle\int f(x)|u^-|^{p^*}}{\|u^-\|_{1,p}^p - \lambda \displaystyle\int g(x)|u^-|^p}\\
&= \gamma(u^+) + \gamma(u^-)
\end{aligned}
$$

Observe que $\sigma(r_0, s, 0) = 0$, então $z(s, 0) = -2 < 0$ e $\sigma(r_0, s, 1) = r_0((1-s)u_0 - sv_\epsilon)$. Assim, por (3.18), usando $\gamma(u) \leq \gamma(u^+) + \gamma(u^-)$, temos

$$z(s,1) = \gamma(\sigma^+(r_0, s, 1)) + \gamma(\sigma^-(r_0, s, 1)) - 2 \geq \gamma(\sigma(r_0, s, 1)) - 2 > 0$$

Além disso, $\sigma^+(r_0, 0, t) = \sigma(r_0, 0, t)$ e $\sigma^-(r_0, 1, t) = \sigma(r_0, 1, t)$, então para qualquer $t \in [0, 1]$ a função w satisfaz

$$w(0,t) = -\gamma(\sigma^-(r_0, 0, t)) \leq 0, \quad w(1,t) = \gamma(\sigma^+(r_0, 1, t)) \geq 0$$

Usando as desigualdades anteriores e o Teorema de Miranda (veja [20]), existem $s_0, t_0 \in [0, 1]$ tais que $w(s_0, t_0) = 0 = z(s_0, t_0)$, o que implica

$$\gamma(\sigma^+(r_0, s_0, t_0)) = \gamma(\sigma^-(r_0, s_0, t_0)) = 1,$$

logo, $I'_\lambda(\sigma^\pm(r_0, s_0, t_0))\sigma^\pm(r_0, s_0, t_0) = 0$. Ainda, desde que $\gamma(0) = 0$, concluímos que $\sigma^\pm(r_0, s_0, t_0) \neq 0$, então $\sigma^\pm(r_0, s_0, t_0) \in \mathcal{M}_\lambda$ e o lema se verifica para $\alpha_* = r_0 t_0 (1 - s_0)$ e $\beta_* = r_0 t_0 s_0$. □

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o último resultado deste trabalho:

Teorema 0.4. *Suponha que (1) satisfaz $2 \leq p < N$, com $N > p^2 + p$ e tome $\lambda_1^+ > 0$ o autovalor principal de (2). Se $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazem (F_1), (F_2) e (G_1) com $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$, então existe uma solução u para o problema (1) que* *muda de sinal.*

Demonstração. Pelo Lema 3.9, existe $z \in \mathcal{M}_\lambda$ da forma $z = \alpha_* u_0 + \beta_* v_\epsilon$. Assim, é suficiente mostrar que para algum $\epsilon > 0$

$$\sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} I_\lambda(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon) < c_\lambda + \frac{1}{N}|f|_\infty^{(p-N)/p} S^{N/p} \tag{3.19}$$

Se a expressão anterior é verdadeira, então

$$d_\lambda \leq I_\lambda(\alpha_* u_0 + \beta_* v_\epsilon) \leq \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} I_\lambda(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon) < c_\lambda + \frac{1}{N}|f|_\infty^{(p-N)/p} S^{N/p}$$

e pelos lemas 3.6 e 3.8, obtemos uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}_\lambda$ tal que $u_n \to u$ fortemente em $\mathcal{V}_g$. Como $\mathcal{M}_\lambda$ é fechado, temos $u \in \mathcal{M}_\lambda$, então $u^\pm \neq 0$. Além disso, $\mathcal{M}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda$, assim $I'_\lambda(u) = 0$ e u é uma solução que muda de sinal para o problema (1).

Observação 3.10. *α e β são valores reais limitados, caso contrário, uma vez que $p < p^*$, teríamos $I_\lambda(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon) \to -\infty$, um absurdo, pois já mostramos que o funcional I_λ restrito a $\mathcal{M}_\lambda$ é limitado inferiormente.*

Observe que

$$I_\lambda(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon) = \frac{1}{p}\int |\nabla(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon)|^p - \frac{\lambda}{p}\int g(x)|\alpha u_0 + \beta v_\epsilon|^p - \frac{1}{p^*}\int f(x)|\alpha u_0 + \beta v_\epsilon|^{p^*}$$

Pela demonstração de [21, Lema 4.2], para $p \geq 2$ (consequentemente, $p^* \geq 2$), temos

$$\int |\nabla(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon)|^p \leq \int \left(|\alpha||\nabla \alpha u_0|^{p-2}\nabla u_0 + |\beta||\nabla \beta v_\epsilon|^{p-2}\nabla v_\epsilon\right)\left(|\alpha|\nabla u_0 + |\beta|\nabla v_\epsilon\right) \tag{3.20}$$

$$\int g(x)|\alpha u_0 + \beta v_\epsilon|^p \geq \int g(x)|\alpha u_0|^p + \int g(x)|\beta v_\epsilon|^p + \theta_1 \int g(x)|\alpha u_0||\beta v_\epsilon|^{p-1} \tag{3.21}$$

$$\int f(x)|\alpha u_0 + \beta v_\epsilon|^{p^*} \geq \int f(x)|\alpha u_0|^{p^*} + \int f(x)|\beta v_\epsilon|^{p^*} + \theta_2 \int f(x)|\alpha u_0||\beta v_\epsilon|^{p^*-1} \tag{3.22}$$

onde θ_1 e θ_2 são constantes positivas. Além disso, note que as funções f e g são positivas sobre o suporte de v_ϵ, logo

$$I_\lambda(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon) \leq I_\lambda(\alpha u_0) + I_\lambda(|\beta| v_\epsilon) + \Phi(\epsilon, \alpha, \beta) - \frac{\theta_2|\alpha||\beta|^{p^*-1}}{p^*}\int f(x)|u_0||v_\epsilon|^{p^*-1} \tag{3.23}$$

onde

$$\Phi(\epsilon, \alpha, \beta) = \frac{1}{p}\left[|\alpha|^{p-1}|\beta|\int |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v_\epsilon + |\alpha||\beta|^{p-1}\int |\nabla v_\epsilon|^{p-2}\nabla v_\epsilon \nabla u_0\right]$$

Começaremos estimando $I_\lambda(|\beta|v_\epsilon)$. Como

$$\int (|\nabla v_\epsilon|^p - \lambda g(x)|v_\epsilon|^p) > 0$$

e $f(x)$ e $g(x)$ são positivas no suporte de v_ϵ, vemos que

$$I_\lambda(tv_\epsilon) = \frac{t^p}{p}\int (|\nabla v_\epsilon|^p - \lambda g(x)|v_\epsilon|^p) - \frac{t^{p^*}}{p^*}\int f(x)|v_\epsilon|^{p^*}$$

atinge seu máximo em

$$0 < t_\epsilon = \left[\frac{\displaystyle\int (|\nabla v_\epsilon|^p - \lambda g(x)|v_\epsilon|^p)}{\displaystyle\int f(x)|v_\epsilon|^{p^*}}\right]^{\frac{1}{p^*-p}} \leq \left[\frac{\displaystyle\int |\nabla v_\epsilon|^p}{f(0)\displaystyle\int |v_\epsilon|^{p^*}}\right]^{\frac{1}{p^*-p}}.$$

Além disso, podemos escrever

$$I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) = \sup_{t\geq 0} I_\lambda(tv_\epsilon) = E(\epsilon) - F(\epsilon),$$

onde

$$E(\epsilon) := \frac{t_\epsilon^p}{p}\int |\nabla v_\epsilon|^p - \frac{f(0)t_\epsilon^{p^*}}{p^*}\int |v_\epsilon|^{p^*}$$

$$F(\epsilon) := \frac{\lambda t_\epsilon^p}{p}\int g(x)|v_\epsilon|^p - \frac{t_\epsilon^{p^*}}{p^*}\int (f(0) - f(x))|v_\epsilon|^{p^*}.$$

Observe que $E(\epsilon)$ atinge seu máximo em

$$\hat{\epsilon} = \left[\frac{\displaystyle\int |\nabla v_\epsilon|^p}{f(0)\displaystyle\int |v_\epsilon|^{p^*}}\right]^{\frac{1}{p^*-p}},$$

logo, por (3.3), temos

$$E(\epsilon) \leq E(\hat{\epsilon}) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)[f(0)]^{\frac{p-N}{p}}\left[\int |\nabla v_\epsilon|^p\right]^{\frac{N}{p}}\left[\int |v_\epsilon|^{p^*}\right]^{-\frac{N}{p^*}} = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{p}}|f|_\infty^{(p-N)/p}.$$

Para estimar $F(\epsilon)$, consideraremos $V_\epsilon := \displaystyle\int (f(0) - f(x))|v_\epsilon|^{p^*}$. Assim, por (F_2) e sendo

$\varphi(x) \leq 1$, vemos que

$$
\begin{aligned}
V_\epsilon &= \frac{1}{|u_\epsilon|_{p^*}^{p^*}} \int_{B_{2R}(0)} |x|^{\frac{N-p}{p-1}} \frac{\varphi^{p^*}(x)}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^N} dx \\
&\leq \frac{1}{|u_\epsilon|_{p^*}^{p^*}} \int_{B_{2R}(0)} \frac{|x|^{\frac{N-p}{p-1}}}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^N} dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variável $x = \epsilon^{\frac{p-1}{p}} y$, temos $|y| \leq 2R\epsilon^{\frac{1-p}{p}} := \overline{R}$ e $dx = \epsilon^{\frac{(p-1)N}{p}} dy$. Assim,

$$
V_\epsilon \leq \frac{\epsilon^{\frac{N-p^2}{p(p-1)}}}{|u_\epsilon|_{p^*}^{p^*}} \int_{B_{\overline{R}}(0)} \frac{|y|^{\frac{N-p}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^N} dx \leq \frac{\epsilon^{\frac{N-p^2}{p(p-1)}}}{|u_\epsilon|_{p^*}^{p^*}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{\frac{N-p}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^N} dx,
$$

onde a última integral é finita desde que

$$
\frac{N-p}{p-1} - \frac{Np}{p-1} < -N,
$$

o que ocorre para qualquer $p > 1$. Usando a estimativa para $|u_\epsilon|_{p^*}$ obtida na Proposição C.2, concluímos que $V_\epsilon = O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}})$.

Além disso, por (G_1) e (C.2), temos

$$
\lambda \int g(x)|v_\epsilon|^p \geq \begin{cases} K\lambda g(0)\epsilon^{p-1} & , \ p^2 < N; \\ K\lambda g(0)|\log \epsilon|\epsilon^{p-1} & , \ p^2 = N; \\ K\lambda g(0)\epsilon^{\frac{N-p}{p}} & , \ p^2 > N. \end{cases}
$$

Note agora que, para $p^2 \leq N$, temos

$$
\frac{N-p}{p-1} \geq \frac{p^2-p}{p-1} = p > p-1
$$

e ainda, para qualquer $p > 1$ vale

$$
\frac{N-p}{p-1} > \frac{N-p}{p},
$$

desta forma, concluímos que

$$
F(\epsilon) \geq \begin{cases} O(\epsilon^{p-1}) & , \ p^2 < N; \\ O(|\log \epsilon|\epsilon^{p-1}) & , \ p^2 = N; \\ O(\epsilon^{\frac{N-p}{p}}) & , \ p^2 > N. \end{cases}
$$

Portanto,

$$I_\lambda(|\beta|v_\epsilon) \leq I_\lambda(t_\epsilon v_\epsilon) \leq \begin{cases} \dfrac{1}{N}|f|_\infty^{(p-N)/p}S^{N/p} - O(\epsilon^{p-1}), & \text{se } p^2 < N \\ \dfrac{1}{N}|f|_\infty^{(p-N)/p}S^{N/p} - O(\epsilon^{p-1}|\ln\epsilon|), & \text{se } p^2 = N \\ \dfrac{1}{N}|f|_\infty^{(p-N)/p}S^{N/p} - O(\epsilon^{(N-p)/p}), & \text{se } p^2 > N. \end{cases}$$

E ainda, como $u_0 \in \mathcal{N}_\lambda$, o funcional $I_\lambda(\alpha u_0)$ atinge seu máximo em

$$\alpha_0 = \left[\frac{\|u_0\|_{1,p}^p - \lambda\displaystyle\int g(x)|u_0|^p}{\displaystyle\int f(x)|u_0|^{p^*}}\right]^{\frac{N-p}{p^2}} = 1$$

assim, $I_\lambda(\alpha u_0) \leq I_\lambda(u_0) = c_\lambda$.

Usando a Proposição C.1 e a Proposição C.2, podemos calcular:

$$\int |v_\epsilon|^t = \begin{cases} K\epsilon^{\frac{[N(p-t)+tp](p-1)}{p^2}} & , \ t > \dfrac{N(p-1)}{N-p}; \\ K\epsilon^{\frac{N(p-1)}{p^2}}|\log\epsilon| & , \ t = \dfrac{N(p-1)}{N-p}; \\ K\epsilon^{\frac{t(N-p)}{p^2}} & , \ 0 < t < \dfrac{N(p-1)}{N-p}. \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\int |\nabla v_\epsilon|^t = \begin{cases} K'\epsilon^{\frac{N(p-t)(p-1)}{p^2}} & , \ t > \dfrac{N(p-1)}{N-1}; \\ K'\epsilon^{\frac{t(N-p)}{p^2}}|\log\epsilon| & , \ t = \dfrac{N(p-1)}{N-1}; \\ K'\epsilon^{\frac{t(N-p)}{p^2}} & , \ 0 < 0 < t < \dfrac{N(p-1)}{N-1}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Em particular, quando $t = p-1$, temos

$$\int |\nabla v_\epsilon|^{p-1} = \frac{1}{|u_\epsilon|_{p^*}^{p-1}}\int |\nabla u_\epsilon|^{p-1}.$$

onde, para todo $N > 1$,

$$0 < p-1 < \frac{N(p-1)}{N-1},$$

logo

$$\int |\nabla v_\epsilon|^{p-1} = K'\epsilon^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}}. \tag{3.26}$$

Assim,

$$\left|\int |\nabla v_\epsilon|^{p-2}\nabla v_\epsilon \nabla u_0\right| \leq \max_{B_{2R}(0)} |u_0| \int |\nabla v_\epsilon|^{p-1} \leq C_1 \epsilon^{(N-p)(p-1)/p^2}.$$

Além disso, por (3.25), como $p \geq 2$, para $t = 1$ vemos que

$$t = 1 < \frac{N}{N-1} \leq \frac{N(p-1)}{N-1},$$

logo,

$$\int |\nabla v_\epsilon| = K' \epsilon^{\frac{N-p}{p^2}}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\left|\int |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v_\epsilon\right| &= \left|\int \left[|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 - (|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0)_{2R}\right] \nabla v_\epsilon\right| \\ &\leq \max_{B_{2R}(0)} \left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 - (|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0)_{2R}\right| \int |\nabla v_\epsilon| \\ &\leq \max_{B_{2R}(0)} \left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 - (|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0)_{2R}\right| K' \epsilon^{\frac{N-p}{p^2}},\end{aligned}$$

onde estamos considerando

$$(z)_{2R} := \frac{1}{|B_{2R}(0)|} \int_{B_{2R}(0)} z.$$

Pela teoria padrão de regularidade (veja [34]), $|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \in C^{0,\alpha}$ localmente para algum $\alpha > 0$, então podemos escolher $R > 0$ tão pequeno de modo que, para qualquer $\epsilon_1 > 0$, tenhamos

$$\left||\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 - (|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0)_{2R}\right| \leq \epsilon_1,$$

e então

$$\left|\int |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v_\epsilon\right| \leq K' \epsilon_1 \epsilon^{\frac{N-p}{p^2}}.$$

Por fim, como $N > p$ e $p \geq 2$, quando $t = 1$ temos

$$t = 1 < \frac{N}{N-p} \leq \frac{N(p-1)}{N-p}$$

e, por (3.24), podemos estimar ainda

$$\int f(x)|u_0|^{p^*-1}|v_\epsilon| \geq \min_{B_{2R}(0)} f(x)|u_0|^{p^*-1} \int |v_\epsilon| \geq C_3 \epsilon^{(N-p)/p^2},$$

onde $C_3 > 0$, pois f é positiva em $B_{2R}(0)$.

Finalmente, por (3.23), considerando $S_0 := (1/N)|f|_\infty^{\frac{p-N}{p}} S^{\frac{N}{p}}$, podemos calcular

$$I_\lambda(\alpha u_0+\beta v_\epsilon) \leq c_\lambda+S_0+C_1\epsilon^{(N-p)(p-1)/p^2}+K'\epsilon_1\epsilon^{N-p/p^2}-C_3\epsilon^{(N-p)/p^2}-\begin{cases} O(\epsilon^{p-1}) & , \ p^2 < N; \\ O(\epsilon^{p-1}|\log\epsilon|) & , \ p^2 = N; \\ O(\epsilon^{(N-p)/p}) & , \ p^2 > N. \end{cases}$$

Tomando $R > 0$ pequeno, podemos escolher ϵ_1 de modo que $K'\epsilon_1 = C_3/2$. Assim,

$$I_\lambda(\alpha u_0 + \beta v_\epsilon) \leq c_\lambda + S_0 + C_1\epsilon^{(N-p)(p-1)/p^2} - \frac{C_3}{2}\epsilon^{(N-p)/p^2} - \begin{cases} O(\epsilon^{p-1}) & , \ p^2 < N; \\ O(\epsilon^{p-1}|\log\epsilon|) & , \ p^2 = N; \\ O(\epsilon^{(N-p)/p}) & , \ p^2 > N. \end{cases}$$

Sendo $N > p$ e $p \geq 2$, vemos que $\epsilon^{(N-p)/p^2}$ domina $\epsilon^{(N-p)(p-1)/p^2}$. Além disso, $\epsilon^{(N-p)/p} \to 0$, $\epsilon^{(N-p)/p^2} \to 0$ e $\epsilon^{p-1} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, portanto (3.19) se verifica e a demonstração está concluída. $\square$

Apêndice A

Alguns resultados utilizados

Neste capítulo exibiremos alguns dos resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

Teorema A.1 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Considere* (X, d) *um espaço métrico completo e* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *um funcional limitado inferiormente e semicontínuo inferiormente. Sejam* $\epsilon > 0$ *e* $x \in X$ *tais que*

$$\Phi(x) < \inf_X \Phi + \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, para cada $\delta > 0$*, existe* $y = y(\delta) \in X$ *tal que*

- $\Phi(y) \leq \Phi(x)$,
- $d(x, y) \leq \delta$,
- $\Phi(y) < \Phi(u) + \frac{\epsilon}{\delta} d(u, y)$ *para todo* $u \in X$ *com* $u \neq y$.

Demonstração. □

Observação A.2. *O Princípio Variacional de Ekeland garante a existência de uma sequência minimizante de um tipo particular (sequência quase-crítica).*

Sob as hipótese do teorema acima (com $\delta = 1$), suponha que X seja um espaço de Banach e que Φ seja Gateaux-diferenciável. Então, para cada $v \in X$ com $\|v\| = 1$ e $t > 0$, temos

$$\Phi(y + tv) - \Phi(y) = t \cdot D\Phi(y) \cdot v + o(t).$$

Tomando $u = y + tv$ em *(ii)* concluímos que

$$\Phi(y + tv) > \Phi(y) - \epsilon t.$$

Deste modo, $tD\Phi(y) \cdot v + o(t) \geq -\epsilon t$, isto é, $D\Phi(y) \cdot v \geq -\epsilon$. Trocando v por $-v$ obtemos

$$|D\Phi(y) \cdot v| \leq \epsilon.$$

Como isto vale para qualquer $v \in X$ com $\|v\| = 1$, obtemos $\|D\Phi(y)\| \leq \epsilon$. Assim, podemos resumir esse resultado como no corolário que segue:

Corolário A.3. *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional limitado inferiormente e semicontínuo inferiormente. Se Φ é Gateaux-diferenciável então, para cada $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $\|D\Phi(x_\epsilon)\| < \epsilon$ e*

$$\inf_X \Phi \leq \Phi(x_\epsilon) \leq \inf_X \Phi + \epsilon.$$

O resultado acima garante a existência de uma sequência (x_n) em X satisfazendo $\Phi(x_n) \to c := \inf_X \Phi$ e $D\Phi(x_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Teorema A.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre para uma função mensurável de valores reais f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [22] p.44. □

O próximo teorema é o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz. Esta versão não faz uso da condição Palais-Smale e pode ser encontrada em [41] ou [36].

Teorema A.5 (Teorema do Passo da Montanha)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $\rho > 0$ e $e \in X$ satisfazendo $\|e\| > \rho$ e*

$$b = \inf_{\|u\|=\rho} I(u) > I(0) = 0 \geq I(e)$$

Então para cada $\varepsilon \in \left(0, \frac{c}{2}\right)$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que:
(A) $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$,
(B) $\|I'(u_\varepsilon)\| < 2\varepsilon$,
onde

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \quad \text{e} \quad \Gamma = \{g \in C([0,1], X)\,; \quad g(0) = 0 \quad \text{e} \quad g(1) = e\}.$$

Observe, porém, que tomando $\epsilon = 1/n$ no teorema anterior, concluímos a existência de uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$. Assim, se o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale no nível $c > 0$ existe $u \in X$ e $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tais que $u_{n_j} \to u$ em X, e pela continuidade do funcional I, temos $I(u) = c > 0$ e $I'(u) = 0$, isto é, $u \in X$ é valor crítico de I.

O próximo teorema está demonstrado em [34] e é um resultado de regularidade na fronteira para soluções de equações elípticas da forma

$$\text{div}A(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0,$$

com constantes $\Lambda \geq \lambda > 0$, $k > 0$ e $m > -1$ tais que

$$\lambda(k + |p|)^m |\xi|^2 \leq a^{ij}(x, z, p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(k + |p|)^m |\xi|^2,$$

para todos os valores apropriados de (x, z, p) e $\xi \in \mathbb{R}^N$, onde $(a^{ij}) = (\partial A^i/\partial p_j)$ e z e p são variáveis fictícias representando u e Du, respectivamente.

Teorema A.6. *Sejam α, γ, Γ e M_0 constantes positivas com $\Gamma \geq \gamma$ e $\hat{\alpha} \leq 1$. Sejam k e ϕ constantes não negativas e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de fronteira $C^{1,\hat{\alpha}}$. Suponha A e B satisfazendo:*

(i) $\gamma(k + |r|)^m |\xi|^2 \leq a^{ij}(x, z, r)\xi_i\xi_j$;

(ii) $|a^{ij}(x, z, r)| \leq \Gamma(k + |r|)^m$;

(iii) $|A(x, z, r) - A(y, w, r)| \leq \Gamma(1 + |r|)^{m+1} \left[|x - y|^{\hat{\alpha}} + |z - w|^{\hat{\alpha}}\right]$;

(iv) $|B(x, z, r)| \leq \Gamma(1 + |r|)^{m+2}$,

para todo $(x, z, r) \in \partial\Omega \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$, todo $(y, w) \in \Omega \times [-M_0, M_0]$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$. Se $\varphi \in C^{1,\hat{\alpha}}(\partial\Omega)$ com $|\varphi|_{1+\hat{\alpha}} \leq \phi$ e se u é solução fraca do problema

$$\mathrm{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0 \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad u = \varphi \text{ sobre } \partial\Omega$$

com $|u| \leq M_0$ em Ω, então existe uma constante positiva $\hat{\beta} = \hat{\beta}(\hat{\alpha}, \Gamma/\gamma, m, N)$ tal que $u \in C^{1,\hat{\beta}}(\overline{\Omega})$. Além disso, $|u|_{1+\hat{\beta}} \leq C(\hat{\alpha}, \Gamma/\gamma, m, M_0, N, \phi, \Omega)$.

Cabe observar que, tanto no Capítulo 2 quanto no Capítulo 3 deste trabalho, estamos tomando $A(x, z, r) = |r|^m r$, onde $m = p - 2 \geq 0$, $z = u$ e $r = \nabla u$. Além disso, temos

$$a^{ij}(x, z, r) = \frac{\partial A^i}{\partial r_j} = m|r|^{m-2} r_i r_j + |r|^m \delta_{ij}.$$

A seguir, verificamos que $A(x, z, r) = |r|^m r$ satisfaz (i)-(iii). Para mostrar (ii), note que

$$\begin{aligned}
|a^{ij}(x, z, r)| &\leq \sum_{i,j=1}^{N} \left[m|r|^{m-2}|r_i||r_j| + |r|^m \delta_{ij}\right] \\
&= |r|^m + m|r|^{m-2} \sum_{i=1}^{N} |r_i| \sum_{j=1}^{N} |r_j| \\
&= (1 + m)|r|^m,
\end{aligned}$$

mostrando que (ii) é válido considerando-se $\Gamma_1 = 1 + m > 0$ e $k = 0$. O item (iii) é imediato uma vez que A depende apenas de r. Assim, $A(x, z, r) = A(y, w, r)$, de modo que para quaisquer $\Gamma > 0$ e $\hat{\alpha} \leq 1$, temos

$$0 = |A(x, z, r) - A(y, w, r)| \leq \Gamma(1 + |r|)^{m+1} \left[|x - y|^{\hat{\alpha}} + |z - w|^{\hat{\alpha}}\right].$$

Por fim, dado $\xi \in \mathbb{R}^N$ qualquer, considerando $1 = \gamma < \Gamma_1 = 1 + m$ e $k = 0$, obtemos

$$|r|^m |\xi|^2 = |r|^m \sum_{i,j=1}^{N} \xi_i \xi_j \delta_{ij} \leq \sum_{i,j=1}^{N} \left[m|r|^{m-2} r_i r_j + |r|^m \delta_{ij}\right] \xi_i \xi_j = a^{ij}(x, z, r)\xi_i\xi_j.$$

Com relação à hipótese (iv), lembremos que $-M_0 \leq z \leq M_0$, isto é, z é limitado. Começaremos tomando $B(x,z,r) = \lambda a(x)|z|^{q-2}z + c(x)|z|^{p^*-2}z$, onde $\lambda > 0$ e $a(x),\ c(x) \in L^\infty(\Omega)$ são, respectivamente, o parâmetro e as funções peso do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ trabalhados no Capítulo 2. Neste caso,

$$|B(x,z,r)| \leq \lambda|a|_\infty|z|^{q-1} + |c|_\infty|z|^{p^*-1} \leq \Gamma_2 \leq \Gamma_2(1+|r|)^{m+2}.$$

Tomando agora $B(x,z,r) = \mu b(x)|z|^{p-2}z + c(x)|z|^{p^*-2}z$, onde $\mu > 0$ e $b(x),\ c(x) \in L^\infty(\Omega)$ são, respectivamente, o parâmetro e as funções peso do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ trabalhados no Capítulo 2, obtemos

$$|B(x,z,r)| \leq \mu|b|_\infty|z|^{p-1} + |c|_\infty|z|^{p^*-1} \leq \Gamma_3 \leq \Gamma_3(1+|r|)^{m+2}.$$

Assim, considerando $\Gamma = \max\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$, o Teorema A.6 é aplicável para o sistema estudado no Capítulo 2. Já para o problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ estudado no Capítulo 3, o Teorema A.6 também pode ser usado uma vez que, para este caso, temos $B(x,z,r) = \lambda g(x)|z|^{p-2}z + f(x)|z|^{p^*-2}z$, onde $\lambda > 0$ e $f(x),\ g(x) \in L^\infty(\Omega)$. Assim,

$$|B(x,z,r)| \leq \lambda|g|_\infty|z|^{p-1} + |f|_\infty|z|^{p^*-1} \leq \Gamma_4 \leq \Gamma_4(1+|r|)^{m+2},$$

e basta considerar $\Gamma = \max\{\Gamma_1, \Gamma_4\}$.

O teorema seguinte está em [35] e é um Princípio de Máximo Forte.

Teorema A.7. *Seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, $u \geq 0$ quase sempre em Ω, $\Delta_p u \leq \beta(u)$ quase sempre em Ω, onde $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua, não-decrescente, $\beta(0) = 0$ e:*

(A) $\beta(s) = 0$ para algum $s > 0$ ou

(B) $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$, mas $\displaystyle\int_0^1 (\beta(s)s)^{-1/p}ds = \infty$.

Então, se u não se anula em todo o domínio Ω, u é positiva em todos os pontos de Ω. Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ para $x_0 \in \partial\Omega$ satisfazendo uma condição de esfera interior e $u(x_0) = 0$, então, sendo ν a normal interior no ponto x_0, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Apêndice B

Aproximações e estimativas do Capítulo 2

A fim de não sobrecarregar o corpo do texto, dispusemos neste apêndice os cálculos de algumas aproximações e estimativas utilizadas no Capítulo 2 deste trabalho. Assim, ao longo deste apêndice, consideraremos u_ϵ a função definida no Capítulo 2 dada por

$$u_{\epsilon,x_0}(x) := \frac{\phi(x-x_0)\epsilon^{\frac{N-p}{p(p-1)}}}{(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x-x_0|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}}$$

para $x_0 \in \mathbb{R}^N$, onde $\phi(x) > 0$ com $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le \rho \\ 0 & , \quad |x| \ge 2\rho. \end{cases}$$

Proposição B.1. *São válidas as seguintes estimativas*

$$\|u_\epsilon\|^p = K_1 + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}) \tag{B.1}$$

$$\frac{\|u_\epsilon\|^p}{|u_\epsilon|_{p^*}^p} = S + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}) \tag{B.2}$$

$$|u_\epsilon|_p^p = \begin{cases} \epsilon^p d_1 + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}) & , \quad N > p^2 > 1 \\ \epsilon^p d_1 |\log \epsilon| + O(\epsilon^p) & , \quad N = p^2 > 1 \end{cases} \tag{B.3}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar $x_0 = 0$ de modo que

$$\nabla u_\epsilon(x) = \frac{\nabla\phi(x)\epsilon^{\frac{N-p}{p(p-1)}}}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}} - \left(\frac{N-p}{p}\right)\frac{\phi(x)\epsilon^{\frac{N-p}{p(p-1)}}|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N}{p}}}.$$

Assim, pela definição de ϕ, teremos

$$\nabla u_\epsilon(x) = \begin{cases} C_N \dfrac{\phi(x)\epsilon^{\frac{N-p}{p(p-1)}}|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N}{p}}} & , \quad |x| \leq \rho, \\ 0 & , \quad |x| \geq 2\rho \end{cases}$$

Logo,

$$\|u_\epsilon\|^p = \epsilon^{\frac{N-p}{p-1}} C_N^p \left[\int_{|x|<\rho} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}dx}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} + \int_{\rho\leq|x|\leq 2\rho} \frac{|\phi(x)|^p \epsilon^{\frac{N-p}{(p-1)}}|x|^{\frac{p}{p-1}}dx}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} \right].$$

Como ϕ é uma função teste e $0 < \rho \leq |x| \leq 2\rho$, a segunda integral é limitada. Assim, podemos escrever

$$\|u_\epsilon\|^p = \epsilon^{\frac{N-p}{p-1}} C_N^p \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}dx}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} - \int_{|x|>\rho} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}dx}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} + O(1) \right],$$

onde

$$\left| - \int_{|x|>\rho} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}dx}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} \right| \leq \int_{|x|>\rho} |x|^{\frac{p(1-N)}{p-1}}dx = O(1)$$

desde que $N > p$. Por fim, fazendo $x = \epsilon y$, temos $dx = \epsilon^N dy$ de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{\frac{p}{p-1}}dx}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\epsilon y|^{\frac{p}{p-1}}\epsilon^N}{\epsilon^{\frac{Np}{p-1}}\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} \\ &= \epsilon^{\frac{p-N}{p-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{\frac{p}{p-1}}}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N}, \end{aligned}$$

onde a última integral é limitada desde que

$$\frac{p}{p-1} - \frac{Np}{p-1} < -N \Rightarrow N > p.$$

Assim, para constantes positivas K_1 e K_2 que não dependem de ϵ, temos

$$\|u_\epsilon\|^p = \epsilon^{\frac{N-p}{p-1}} C_N^p \left[K_2 + K_1 \epsilon^{\frac{p-N}{p-1}} \right] = K_1 + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}).$$

Portanto, (B.1) se verifica. Para mostrar (B.2), note que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_\epsilon|^{p^*} &= \int_{|x|<R} |u_\epsilon|^{p^*} + \int_{R\le|x|\le 2R} |u_\epsilon|^{p^*} + \int_{|x|>2R} |u_\epsilon|^{p^*} \\
&= \epsilon^{\frac{N}{p-1}} \int_{|x|<R} \frac{dx}{(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}})^N} + \int_{R\le|x|\le 2R} |u_\epsilon|^{p^*},
\end{aligned}$$

onde a segunda integral é limitada, pois estamos longe da singularidade, em um intervalo compacto e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\int_{\Omega} |u_\epsilon|^{p^*} = \epsilon^{\frac{N}{p-1}} \int_{|x|<R} \frac{dx}{(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}})^N} + O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}}).$$

Faremos a estimativa dessa integral e, para isso, usaremos a mudança de variável $x = \epsilon y$, de modo que $dx = \epsilon^N dy$ e $|x| \le R$ implica $|y| \le R\epsilon^{-1} := \overline{R}$. Assim,

$$\epsilon^{\frac{N}{p-1}} \int_{|x|<R} \frac{dx}{(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}})^N} = \int_{|y|<\overline{R}} \frac{dy}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^N} \le \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^N}$$

que é finito para qualquer $p > 1$ e $N > 0$. Portanto, temos $|u_\epsilon|_{p^*}^{p^*} = K + O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}})$ de modo que $|u_\epsilon|_{p^*}^p = \overline{K} + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}})$. Combinando esta última equação com (B.1), vemos que (B.1) se verifica com $S = K_1/\overline{K}$.

Para mostrar (B.3), observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u_\epsilon|^{p} &= \int_{|x|<R} |u_\epsilon|^{p} + \int_{R\le|x|\le 2R} |u_\epsilon|^{p} + \int_{|x|>2R} |u_\epsilon|^{p} \\
&= \epsilon^{\frac{N-p}{p-1}} \int_{|x|<R} \frac{dx}{(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}} + \int_{R\le|x|\le 2R} |u_\epsilon|^{p},
\end{aligned}$$

onde a segunda integral é limitada, pois estamos longe da singularidade, em um intervalo compacto e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\int_{\Omega} |u_\epsilon|^{p} = \epsilon^{\frac{N-p}{p-1}} \int_{|x|<R} \frac{dx}{(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}} + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}}).$$

Devemos estimar a última integral e para isso usaremos a mudança de variável $x = \epsilon y$, de modo que $dx = \epsilon^N dy$ e $|x| \le R$ implica $|y| \le R\epsilon^{-1} := \overline{R}$. Assim,

$$\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}} \int_{|x|<R} \frac{dx}{(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}} = \epsilon^p \int_{|y|<\overline{R}} \frac{dy}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}}.$$

Analisaremos dois casos:

Caso 1: $N > p^2 > 1$

Note que, como $1 < p$, temos

$$\int_{|y|<\overline{R}} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}} = O(1)$$

desde que

$$-\frac{(N-p)p}{p-1} < -N \Rightarrow -(N-p)p < -N(p-1) \Rightarrow p^2 < N.$$

Assim, para algum $d_1 > 0$, concluímos que quando $p^2 < N$, então $|u_\epsilon|_p^p = \epsilon^p d_1 + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p-1}})$.

Caso 2: $N = p^2 > 1$

Podemos escrever

$$\int_{|y|<\overline{R}} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}} = \underbrace{\int_{|y|<1} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}}}_{A} + \underbrace{\int_{1<|y|<\overline{R}} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}}}_{B}.$$

Para estimar A, note que

$$\int_{|y|<1} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{N-p}} = \int_{|y|<1} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{p(p-1)}} \leq \int_{|y|<1} |y|^{-p} dy = O(1)$$

desde que $-p > -N = -p^2$, o que é válido para qualquer $p > 1$. Logo, $A = O(1)$. Além disso,

$$0 \leq B \leq \int_{1<|y|<\overline{R}} |y|^{\frac{p(p-N)}{p-1}} dy = \int_{1<|y|<\overline{R}} |y|^{-N} dy = \int_1^{\overline{R}} z^{-N} \int_{|y|=z} dS dz,$$

onde

$$\int_1^{\overline{R}} z^{-N} \int_{|y|=z} dS dz = \int_1^{\overline{R}} z^{-N} z^{N-1} \omega_N dz = \int_1^{\overline{R}} z^{-1} dz = \log z|_1^{\overline{R}} = d_1 |\log \epsilon|,$$

em que d_1 é uma constante positiva e ω_N representa o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Assim, quando $N = p^2 > 1$, obtemos $|u_\epsilon|_p^p = d_1 \epsilon^p |\log \epsilon| + O(\epsilon^p)$. $\square$

Proposição B.2. *Considerando u_ϵ a função definida no Capítulo 2, a seguinte estimativa* *é verdadeira*

$$0 \leq \Sigma_\epsilon \leq \begin{cases} \epsilon^{\frac{N}{p-1}} \displaystyle\int_{B_r(0)} M|x|^{\theta - \frac{Np}{p-1}} = O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}}) & , \quad \theta > \frac{N}{p-1}; \\ \epsilon^{\theta} \displaystyle\int_{|x| \leq \epsilon^{-1}} M|x|^{\theta - \frac{Np}{p-1}} = O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}})|\log \epsilon| & , \quad \theta = \frac{N}{p-1}; \\ \epsilon^{\theta} \left[\displaystyle\int_{|x| \leq 1} M|x|^{\theta}(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{-N} + \right. & \\ \left. + \displaystyle\int_{1 < |x| \leq \epsilon^{-1}} |x|^{\theta - \frac{Np}{p-1}} \right] = O(\epsilon^{\theta}) & , \quad 0 < \theta < \frac{N}{p-1}. \end{cases}$$

Demonstração. Usando a definição de u_ϵ e sendo $|c|_\infty - c(x) \leq M|x|^\theta$, onde $\theta > p$, temos

$$0 \leq \Sigma_\epsilon \leq \int_{B_1(0)} M|x|^\theta \frac{\varphi^{p^*}(x)\epsilon^{\frac{N}{p-1}}}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dx.$$

Analisaremos três casos.

Caso 1: $\theta > N/(p-1)$.

Como $\varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\epsilon > 0$, vemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \Sigma_\epsilon &\leq M\epsilon^{\frac{N}{p-1}} \int_{B_1(0)} \frac{|x|^\theta}{\left(\epsilon^{\frac{p}{p-1}} + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dx \\ &\leq M\epsilon^{\frac{N}{p-1}} \int_{B_1(0)} \frac{|x|^\theta}{\left(|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dx \\ &= M\epsilon^{\frac{N}{p-1}} \int_{B_1(0)} |x|^{\theta - \frac{Np}{p-1}} dx, \end{aligned}$$

onde a última integral é finita desde que

$$\theta - \frac{Np}{p-1} > -N \Rightarrow \theta > \frac{N}{p-1}.$$

Assim, quando $\theta > N/(p-1)$, temos $0 \leq \Sigma_\epsilon \leq Mk_1\epsilon^{\frac{N}{p-1}} = O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}})$.

Caso 2: $\theta = N/(p-1)$.

Fazendo a mudança de variável $x = \epsilon y$, temos $dx = \epsilon^N dy$. Além disso, $x \in B_1(0)$ implica

$|y| < \epsilon^{-1}$. Assim, como $\varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \Sigma_\epsilon &\leq \int_{|y|<\epsilon^{-1}} \frac{M|\epsilon y|^\theta \epsilon^{\frac{N}{p-1}} \epsilon^N}{\epsilon^{\frac{Np}{p-1}} \left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy \\
&\leq M\epsilon^\theta \int_{|y|<\epsilon^{-1}} \frac{|y|^\theta}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy \\
&= M\epsilon^\theta \left[\int_{1\leq|y|<\epsilon^{-1}} \frac{|y|^\theta}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy + \int_{|y|<1} \frac{|y|^\theta}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy \right].
\end{aligned}
$$

Estimaremos separadamente cada uma das integrais acima. Note que

$$
\int_{|y|<1} \frac{|y|^\theta}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy \leq \int_{|y|<1} \frac{dy}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^\theta}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy,
$$

onde a última integral é finita para qualquer $N > 0$. Além disso, como $\theta = N/(p-1)$, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_{1\leq|y|<\epsilon^{-1}} \frac{|y|^\theta}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy &\leq \int_{1\leq|y|<\epsilon^{-1}} |y|^{\theta - \frac{Np}{p-1}} dy \\
&= \int_{1\leq|y|<\epsilon^{-1}} |y|^{-N} dy \\
&= \int_0^{1/\epsilon} \int_{|y|=t} |y|^{-N} dS dt \\
&= \int_0^{1/\epsilon} t^{-N} t^{N-1} \omega_N dt \\
&= \omega_N \int_0^{1/\epsilon} t^{-1} dt,
\end{aligned}
$$

em que ω_N representa o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Assim,

$$
0 \leq \int_{1\leq|y|<\epsilon^{-1}} \frac{|y|^\theta}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy \leq \omega_N \left[\log t\right]_1^{1/\epsilon} = k_2 |\log \epsilon|.
$$

Assim, quando $\theta = N/(p-1)$, concluímos que

$$
0 \leq \Sigma_\epsilon \leq M\epsilon^\theta \left(k_2 |\log \epsilon| + k_3\right) = \epsilon^{\frac{N}{p-1}} k_4 |\log \epsilon| + O(\epsilon^{\frac{N}{p-1}}).
$$

Caso 3: $\theta < N/(p-1)$.

De modo análogo ao caso anterior, fazendo a mudança de variável $x = \epsilon y$, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \le \Sigma_\epsilon &\le \int_{|y|<\epsilon^{-1}} \frac{M|\epsilon y|^\theta \epsilon^{\frac{N}{p-1}} \epsilon^N}{\epsilon^{\frac{Np}{p-1}} \left(1+|y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy \\
&= M\epsilon^\theta \int_{|y|<\epsilon^{-1}} \frac{|y|^\theta}{\left(1+|y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy \\
&\le M\epsilon^\theta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^\theta}{\left(1+|y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dy,
\end{aligned}
$$

onde a última integral é finita desde que

$$\theta - \frac{Np}{p-1} < -N \Rightarrow \theta < \frac{N}{p-1}.$$

Assim, quando $\theta < N/(p-1)$, temos $0 \le \Sigma_\epsilon \le Mk_5\epsilon^\theta = O(\epsilon^\theta)$. $\square$

Apêndice C

Aproximações e estimativas do Capítulo 3

A fim de não sobrecarregar o corpo do texto, dispusemos neste apêndice os cálculos de algumas aproximações e estimativas utilizadas no Capítulo 3 deste trabalho. Assim, ao longo deste apêndice, dado $\epsilon > 0$ consideraremos u_ϵ a função definida no Capítulo 3 dada por

$$u_\epsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\epsilon + |x|^{p/(p-1)})^{\frac{N-p}{p}}}, \qquad v_\epsilon(x) = \frac{u_\epsilon(x)}{|u_\epsilon(x)|_{p^*}},$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(B_{2R}(0))$ é tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ e $\varphi \equiv 1$ in $B_R(0)$.

Proposição C.1. *Considere u_ϵ como definido no Capítulo 3. Nestas condições, podemos estimar*

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^t = \begin{cases} K_3 \epsilon^{\frac{t+N(p-1)-tN}{p}} + O(1) & , \quad t > \dfrac{N(p-1)}{N-1}; \\ K_3 |\log \epsilon| + O(1) & , \quad t = \dfrac{N(p-1)}{N-1}; \\ O(1) & , \quad 0 < t < \dfrac{N(p-1)}{N-1}. \end{cases}$$

E, em particular, quando $t = p$ tem-se $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^p = K_1 \epsilon^{\frac{p-N}{p}} + O(1).$

Demonstração. Uma vez que estamos usando u_ϵ como definida no Capítulo 3, então para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\varphi(x) \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$, $\varphi \equiv 1$ em $B_R(0)$ e $\varphi \equiv 0$ quando $|x| > 2R$, temos

$$u_\epsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}}.$$

Derivando, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_\epsilon(x) = \frac{1}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) - \left(\frac{N-p}{p}\right) \frac{\varphi(x) |x|^{\frac{2-p}{p-1}} x_i}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N}{p}}}.$$

Assim,

$$\nabla u_\epsilon = \frac{\nabla\varphi(x)}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}} - \left(\frac{N-p}{p}\right)\frac{\varphi(x)|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N}{p}}}.$$

Note que, pela definição de φ, temos

$$\nabla u_\epsilon = \begin{cases} C_N\dfrac{|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N}{p}}} & , \quad |x| < R; \\ \dfrac{\nabla\varphi(x)}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}} - \left(\dfrac{N-p}{p}\right)\dfrac{\varphi(x)|x|^{\frac{2-p}{p-1}}x}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N}{p}}} & , \quad R \le |x| \le 2R; \\ 0 & , \quad |x| > 2R. \end{cases}$$

Podemos então calcular

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^t &= \int_{|x|<R} |\nabla u_\epsilon|^t + \int_{R\le|x|\le 2R} |\nabla u_\epsilon|^t + \int_{|x|>2R} |\nabla u_\epsilon|^t \\ &= C_N^t \int_{|x|<R} \frac{|x|^{\frac{t}{p-1}}}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} + \int_{R\le|x|\le 2R} |\nabla u_\epsilon|^t, \end{aligned}$$

onde a segunda integral é limitada, pois estamos longe da singularidade, em um intervalo compacto e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^t = C_N^t \int_{|x|<R} \frac{|x|^{\frac{t}{p-1}}}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} + O(1).$$

Faremos a estimativa dessa integral e, para isso, consideraremos três casos.

Caso 1: $t < N(p-1)/(N-1)$.

Observe que

$$C_N^t \int_{|x|<R} \frac{|x|^{\frac{t}{p-1}}}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dx \le C_N^t \int_{|x|<R} |x|^{\frac{t(1-N)}{p-1}} dx$$

e esta integral é finita desde que

$$\frac{t(1-N)}{p-1} > -N \Rightarrow -\frac{t(N-1)}{p-1} > -N \Rightarrow t < \frac{N(p-1)}{(N-1)}.$$

Portanto, quando $t < N(p-1)/(N-1)$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^t = O(1).$$

Para os próximos dois casos consideraremos a mudança de variável $x = \epsilon^{\frac{p-1}{p}} y$, de modo que $dx = \epsilon^{\frac{N(p-1)}{p}} dy$ e $|x| \leq R$ implica $|y| \leq 2R\epsilon^{\frac{1-p}{p}} := \overline{R}$. Assim,

$$\int_{|x|<R} \frac{|x|^{\frac{t}{p-1}}}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dx = \epsilon^{\frac{t(1-N)+N(p-1)}{p}} \int_{|y|<\overline{R}} \frac{|y|^{\frac{t}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dy.$$

Caso 2: $t > N(p-1)/(N-1)$.

Observe que

$$\int_{|y|<\overline{R}} \frac{|y|^{\frac{t}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{\frac{t}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dy = O(1)$$

desde que

$$\frac{t(1-N)}{p-1} < -N \Rightarrow -\frac{t(N-1)}{p-1} < -N \Rightarrow t > \frac{N(p-1)}{(N-1)}.$$

Portanto, quando $t > N(p-1)/(N-1)$, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^t = C_N^t.K\epsilon^{\frac{t(1-N)+N(p-1)}{p}} + O(1) = K_3\epsilon^{\frac{t(1-N)+N(p-1)}{p}} + O(1).$$

Caso 3: $t = N(p-1)/(N-1)$.

Observe que

$$\int_{|y|<\overline{R}} \frac{|y|^{\frac{t}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dy = \underbrace{\int_{|y|\leq 1} \frac{|y|^{\frac{t}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dy}_{A} + \underbrace{\int_{1<|y|<\overline{R}} \frac{|y|^{\frac{t}{p-1}}}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} dy}_{B}.$$

Estimaremos cada uma dessas integrais separadamente.

$$0 \leq A \leq \int_{|y|\leq 1} \frac{dy}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{Nt}{p}}},$$

onde a última integral é finita desde que

$$-\frac{Nt}{p-1} < -N \Rightarrow \frac{t}{p-1} > 1.$$

Como estamos considerando $t = N(p-1)/(N-1)$, temos

$$\frac{t}{p-1} = \frac{N}{N-1} > 1, \quad \forall\, N > 0,$$

logo $A = O(1)$. Resta estimar B.

$$0 \leq B \leq \int_{1<|y|<\overline{R}} |y|^{\frac{t(1-N)}{p-1}} dy = \int_{1<|y|<\overline{R}} |y|^{-N} dy = \int_1^{\overline{R}} z^{-N} \int_{|y|=z} dS dz,$$

onde

$$\int_1^{\overline{R}} z^{-N} \int_{|y|=z} dS dz = \int_1^{\overline{R}} z^{-N} z^{N-1} \omega_N dz = \int_1^{\overline{R}} z^{-1} dz = \log z|_1^{\overline{R}} = k|\log \epsilon|,$$

em que k é uma constante positiva e ω_N representa o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Assim, quando $t = N(p-1)/(N-1)$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^t = k|\log \epsilon| + O(1).$$

Em particular, quando $t = p$, como $p < N$, temos

$$Np - p > Np - N \Rightarrow t(N-1) = p(N-1) > N(p-1) \Rightarrow t > \frac{N(p-1)}{(N-1)},$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^p = K_1 \epsilon^{\frac{p(1-N)+N(p-1)}{p}} + O(1) = K_1 \epsilon^{\frac{p-N}{p}} + O(1).$$

□

Proposição C.2. *Considere u_ϵ como definido no Capítulo 3. Nestas condições, podemos estimar*

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^t \leq \begin{cases} K_3 \epsilon^{\frac{N(p-1)-t(N-p)}{p}} + O(1) & , \quad t > \dfrac{N(p-1)}{N-p}; \\ K_3 |\log \epsilon| + O(1) & , \quad t = \dfrac{N(p-1)}{N-p}; \\ O(1) & , \quad 0 < t < \dfrac{N(p-1)}{N-p};. \end{cases}$$

E, em particular, quando $t = p$ tem-se $|u_\epsilon|_{p^*}^p = K_2 \epsilon^{\frac{p-N}{p}} + O(1)$.

Demonstração. Uma vez que estamos usando u_ϵ como definida no Capítulo 3, então para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\varphi(x) \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$, $\varphi \equiv 1$ em $B_R(0)$ e $\varphi \equiv 0$ quando $|x| > 2R$, temos

$$u_\epsilon(x) = \frac{\varphi(x)}{(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}}.$$

Podemos então calcular

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_\epsilon|^t &= \int_{|x|<R} |u_\epsilon|^t + \int_{R\leq|x|\leq 2R} |u_\epsilon|^t + \int_{|x|>2R} |u_\epsilon|^t \\ &= C_N^t \int_{|x|<R} \frac{dx}{\left(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)t}{p}}} + \int_{R\leq|x|\leq 2R} |u_\epsilon|^t,\end{aligned}$$

onde a segunda integral é limitada, pois estamos longe da singularidade, em um intervalo compacto e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^t = C_N^t \int_{|x|<R} \frac{dx}{\left(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)t}{p}}} + O(1).$$

Faremos a estimativa dessa integral e, para isso, consideraremos três casos.

Caso 1: $t < N(p-1)/(N-p)$.

Observe que

$$C_N^t \int_{|x|<R} \frac{dx}{\left(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)t}{p}}} \leq C_N^t \int_{|x|<R} |x|^{-\frac{(N-p)t}{p-1}} dx$$

e esta integral é finita desde que

$$-\frac{(N-p)t}{p-1} > -N \Rightarrow t < \frac{N(p-1)}{N-p}.$$

Portanto, quando $t < N(p-1)/(N-p)$, temos

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^t = O(1).$$

Para os próximos dois casos consideraremos a mudança de variável $x = \epsilon^{\frac{p-1}{p}} y$, de modo que $dx = \epsilon^{\frac{N(p-1)}{p}} dy$ e $|x| \leq R$ implica $|y| \leq 2R\epsilon^{\frac{1-p}{p}} := \overline{R}$. Assim,

$$\int_{|x|<R} \frac{dx}{\left(\epsilon + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)t}{p}}} = \epsilon^{\frac{N(p-1)-t(N-p)}{p}} \int_{|y|<\overline{R}} \frac{dy}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)t}{p}}} dy.$$

Caso 2: $t > N(p-1)/(N-p)$.

Observe que

$$\int_{|y|<\overline{R}} \frac{dy}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)t}{p}}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dy}{\left(1 + |y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(N-p)t}{p}}} = O(1)$$

desde que

$$-\frac{(N-p)t}{p-1} < -N \Rightarrow t > \frac{N(p-1)}{(N-p)}.$$

Portanto, quando $t > N(p-1)/(N-p)$, temos

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^t = C_N^t.K\epsilon^{\frac{N(p-1)-t(N-p)}{p}} + O(1) = K_3\epsilon^{\frac{N(p-1)-t(N-p)}{p}} + O(1).$$

Caso 3: $t = N(p-1)/(N-p)$.

Observe que

$$\int_{|y|<\overline{R}} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)t}{p}}} dy = \underbrace{\int_{|y|\le 1} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)t}{p}}} dy}_{A} + \underbrace{\frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{(N-p)t}{p}}} dy}_{B}.$$

Estimaremos cada uma dessas integrais separadamente. Como estamos considerando $t = N(p-1)/(N-p)$ e $p < N$, temos

$$0 \le A \le \int_{|y|\le 1} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N(p-1)}{p}}} \le \int_{|y|\le 1} \frac{dy}{(1+|y|^{\frac{p}{p-1}})^{p-1}} \le \int_{|y|\le 1} |y|^{-p},$$

onde a última integral é finita desde que $p < N$. Logo, $A = O(1)$. Resta estimar B.

$$0 \le B \le \int_{1<|y|<\overline{R}} |y|^{-\frac{(N-p)t}{p-1}} dy = \int_{1<|y|<\overline{R}} |y|^{-N} dy = \int_1^{\overline{R}} z^{-N} \int_{|y|=z} dSdz,$$

onde

$$\int_1^{\overline{R}} z^{-N} \int_{|y|=z} dSdz = \int_1^{\overline{R}} z^{-N} z^{N-1} \omega_N dz = \int_1^{\overline{R}} z^{-1} dz = \log z|_1^{\overline{R}} = k|\log\epsilon|,$$

em que k é uma constante positiva e ω_N representa o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$. Assim, quando $t = N(p-1)/(N-1)$, obtemos

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^t = K|\log\epsilon| + O(1).$$

Em particular, quando $t = p^*$, temos

$$t = \frac{Np}{N-p} > \frac{N(p-1)}{N-p}$$

para qualquer $p \ge 1$. Assim,

$$\int_\Omega |u_\epsilon|^{p^*} = K_3\epsilon^{\frac{N(p-1)-p^*(N-p)}{p}} + O(1) = K_3\epsilon^{-\frac{N}{p}} + O(1),$$

logo, $|u_\epsilon|_{p^*}^p = K_2\epsilon^{\frac{p-N}{p}} + O(1)$. □

Definindo $v_\epsilon := u_\epsilon/|u_\epsilon|_{p^*}$ e sendo $S = K_1/K_2$ pela Proposição (C.1) e Proposição (C.2), concluímos que

$$\int |\nabla v_\epsilon|^p = \frac{\displaystyle\int |\nabla u_\epsilon|^p}{|u_\epsilon|_{p^*}^p} = S + O(\epsilon^{\frac{N-p}{p}}).$$

Além disso, observe que , se $t = p$, temos

$$p = t \leq \frac{N(p-1)}{N-p} \Leftrightarrow p^2 \geq N.$$

Assim, pela Proposição (C.2), temos

$$|u_\epsilon|_p^p = \begin{cases} K_3 \epsilon^{\frac{p^2-N}{p}} + O(1) & , \quad p^2 < N; \\ K_3 |\log \epsilon| + O(1) & , \quad p^2 = N; \\ O(1) & , \quad p^2 > N. \end{cases} \tag{C.1}$$

Por fim, usando (C.1) e a Proposição (C.2) podemos estimar ainda

$$|v_\epsilon|_p^p = \frac{|u_\epsilon|_p^p}{|u_\epsilon|_{p^*}^p} = \begin{cases} K\epsilon^{p-1} & , \quad p^2 < N; \\ K|\log \epsilon|\epsilon^{p-1} & , \quad p^2 = N; \\ K\epsilon^{\frac{N-p}{p}} & , \quad p^2 > N. \end{cases} \tag{C.2}$$

Proposição C.3. *Considere $g^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$. Então o funcional $G : \mathcal{V}_g \to \mathbb{R}$ dado por $G(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)|u|^p$ é contínuo.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \mathcal{V}_g$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{V}_g$. Pela imersão contínua $\mathcal{V}_g \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, temos $u_n \to u$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e, pelo Teorema de Vainberg, existem $h \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência de (u_n) que ainda denotaremos por (u_n) tais que

$$\begin{cases} u_n(x) \to u(x) & , \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N, \\ |u_n(x)| \leq h(x) & , \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Note ainda que, como convergência forte implica convergência fraca, temos

$$|u(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n| \leq h(x).$$

Assim, $g^+(x)|u_n|^p \to g^+(x)|u|^p$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e ainda

$$\left|g^+(x)|u_n|^p - g^+(x)|u|^p\right| \leq |g^+(x)| \left(|u_n|^p + |u|^p\right) \leq 2|g^+(x)|h^p(x).$$

Como $h \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, então $h^p \in L^{p^*/p}(\mathbb{R}^N)$, onde

$$\frac{p}{N} + \frac{p}{p^*} = \frac{p^* - p}{p^*} + \frac{p}{p^*} = 1,$$

logo $2|g^+|h^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Podemos então usar o Teorema da Convergência Dominada de

Lebesgue, de onde segue que

$$\left|g^+(x)|u_n|^p - g^+(x)|u|^p\right|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Deste modo, quando $n \to \infty$, temos

$$|G(u_n) - G(u)| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} [g^+(x)|u_n|^p - g^+(x)|u|^p]\right| \leq \left|g^+(x)|u_n|^p - g^+(x)|u|^p\right|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

Portanto, G é contínuo em $\mathcal{V}_g$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti, H. Brézis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems* J. Funct. Anal. 122 (1994), 519-543.

[2] K. Adriouch, A. El Hamidi, *The Nehari manifold for systems of nonlinear elliptic equations. Nonlinear Anal.* 64 (2006), no. 10, 2149-2167.

[3] W. Allegretto, Y. X. Huang, *Eigenvalues of the indefinite-weight p-Laplacian in weighted spaces.* Funkcial. Ekvac. 38 (1995), no. 2, 233-242.

[4] J. G. Azorero, I. P. Alonso, *Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem.* Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), no. 3, 941-957.

[5] C.O. Alves; D. C. de Morais Filho, M. A. Souto, *On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents.* Nonlinear Anal. 42 (2000), no. 5, Ser. A: Theory Methods, 771-787.

[6] A. Ambrosetti; P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[7] G. Bianchi, J. Chabrowski, A. Szulkin, *On symmetric solutions of elliptic equations with a nonlinearity involving critical Sobolev exponent,* Nonlinear Anal. 25 (1995) 41-59

[8] H. Brézis; E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486-490.

[9] H. Brézis; L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983) 437-477.

[10] P. C. Carrião, O.H. Miyagaki *Existence of non-trivial solutions of elliptic variational systems in unbounded domains.* Nonlinear Anal. 51 (2002), no. 1, Ser. A: Theory Methods, 155-169.

[11] J. Chabrowski, *Concentration-compactness principle at infinity and semilinear elliptic equations involving critical and subcritical Sobolev exponents,* Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995) 493-512.

[12] D.G. De Figueiredo, J.P. Gossez, P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems.* J. Funct. Anal. 199 (2003), no. 2, 452-467.

[13] D.G. De Figueiredo, J.P. Gossez, P. Ubilla, *Nonhomogeneous Dirichlet problems for the p-Laplacian* Calc. Var. Partial Differential Equations, 56 (2) (2017) Article 32.

[14] D. G. de Figueiredo, J.P. Gossez, P. Ubilla *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity* J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 8 (2) (2006) 269-286.

[15] D. C. De Morais Filho; M. A. Souto, *Systems of p-Laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees.* Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no. 7-8, 1537-1553

[16] J.P.P. Da Silva, M.F. Furtado *Multiplicity of solutions for homogeneous elliptic systems with critical growth.* J. Math. Anal. Appl. 385 (2012), no. 2, 770-785.

[17] P. Drábek, Y.X. *Multiple positive solutions of quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$*, Nonlin. Anal. 37 (1999) 457-466.

[18] P. Drábek, Y.X. Huang, *Bifurcation problems for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$.* Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 1, 171-188.

[19] P. Drábek, Y.X. Huang, *Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent.* J. Differential Equations 140 (1997), no. 1, 106-132.

[20] C. Miranda, *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **3** (1940), 5-7 (French).

[21] J. Yang, *Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents*, Nonlin. Anal. 25 (1995), 1283-1306.

[22] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Willey Classics Library, New York, 1995.

[23] I. Ekeland *On the variational principle*, J. Anal. Appl. 17 (1974), 324-353.

[24] J.P.P. da Silva, *Global results for a concave-convex elliptic system with indefinite potentials*, PREPRINT.

[25] L. C. Evans, *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 74. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. viii+80 pp.

[26] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley. Canadá, 1989.

[27] L. C. Evans; R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992. viii+268 pp. ISBN: 0-8493-7157-0

[28] M. Guedda; L. Véron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Nonlinear Anal. 13 (1989), no. 8, 879-902.

[29] T. F. Wu, *The Nehari manifold for a semilinear elliptic system involving sign-changing weight functions.* Nonlinear Anal. 68 (2008), no. 6, 1733-1745.

[30] T. S. Hsu, *Multiple positive solutions for a critical quasilinear elliptic system with concave-convex nonlinearities.* Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 7-8, 2688-2698.

[31] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations.* The limit case. I. Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), no. 1, 145-201.

[32] H. Fan, *Multiple positive solutions for a critical elliptic system with concave and convex nonlinearities*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 18 (2014) 14-22.

[33] H. Fan, X. Liu, *Multiple positive solutions for semi-linear elliptic systems involving sign-changing weight*, Willey Online Library (2014).

[34] G. M. Lieberman, M. Gary, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal. 12 (1988), no. 11, 1203-1219.

[35] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.* Appl. Math. Optim. 12 (1984), no. 3, 191-202.

[36] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. viii+100 pp. ISBN: 0-8218-0715-3

[37] G. Cerami, S. Solimini, M. Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. 69 (1986), 289-306.

[38] D. Smets *A concentration-compactness lemma with applications to singular eigenvalue problems.* J. Funct. Anal. 167 (1999), no. 2, 463-480.

[39] J. Simon *Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans RN.* (French) Journées d'Analyse Non Linéaire (Proc. Conf., Besançon, 1977), pp. 205-227, Lecture Notes in Math., 665, Springer, Berlin, 1978.

[40] W. Willem, *Lectures on critical point theory*, Trabalho de Math. 199, Fundação Univ. Brasilia, 1983.

[41] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.