Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Existência de solução positiva para uma classe de equações de Schrödinger quasilineares em $\mathbb{R}^N$

por

Laila Conceição Fontinele

Belém - PA

Março/2022

Existência de solução positiva para uma classe de equações de Schrödinger quasilineares em $\mathbb{R}^N$

por

Laila Conceição Fontinele

sob orientação do

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

Co-orientadora: Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla - UFPA/UFAM - como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Belém - PA

Março/2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F684e Fontinele, Laila Conceição.
Existência de solução positiva para uma classe de equações de Schrödinger quasilineares em RN / Laila Conceição Fontinele. — 2022.
139 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
Coorientação: Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2022.

1. Equações de Schrödinger quasilinear; Sistemas de equações de Schrödinger; Métodos variacionais; Mudança de variável; Método de penalização; Teorema do Passo da Montanha; Método de iteração de Moser. I. Título.

CDD 515.353

Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática-UFPA-UFAM

Área de Concentração: Análise

Título: Existência de solução positiva para uma classe de equações de Schrödinger quasilineares em $\mathbb{R}^N$.

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla de-UFPA/UFAM, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Resultado: APROVADO

Data da Defesa: 15/03/2022

Banca Examinadora

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos - PPGME- PDM- UFPA-

Orientador

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UnB

Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento - PPGME- PDM- UFPA-

Coorientadora

Suellen Cristina Q. Arruda

Profª. Drª. Suellen Cristina Queiroz Arruda - CUBT - UFPA- Campus de Abaetetuba-Pa.

Tarcyana do S. F. de Sousa

Profª. Drª. Tarcyana do Socorro Figueiredo de Sousa - Pós-doutorado em andamento-UFPA.

Março/2022

Dedicatória

A Cristo, o Princípe da Paz.

Agradecimentos

- Agradeço a DEUS pelo seu plano de salvação, pelo seu amor incondicional e pela sua eterna misericórdia a qual me fizeram chegar até aqui;

- Agradeço a minha mãe Belmira por acreditar que a educação tem o poder de transformar todo o ambiente;

- Ao meu orientador Prof. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos, por seus ensinamentos, dedicação e extrema paciência na condução deste trabalho e por todos os "empurrões" para não desistir. Receba minha eterna gratidão e respeito!

- A minha coorientadora Prof. Rubia Gonçalves Nascimento, por suas contribuições e amizade;

- Aos professores Giovany Figueiredo, Tarcyana Figueiredo e Suellem Arruda por aceitarem o convite para compor a banca examinadora deste trabalho e contribuir para o enriquecimento do mesmo;

- Agradeço a Prof. Suellem Cristina Queiros Arruda, pelo apoio e suporte junto a FACET para que pudesse terminar este trabalho;

- Agradeço a Sociedade Beneficiente e Cooperativista Cristo Redentor, que me acolheu com apenas 18 meses de idade e me ofereceu a base da minha educação, valores e princípios;

- À Universidade Federal do Pará e em particular ao Campus de Abaetetuba por me conceder a oportunidade da concretização de um sonho, de ampliar meus objetivos e por todo conhecimento adquirido;

- Agradeço a Educação Pública Brasileira.

Resumo

Usando métodos variacionais, estudamos a existência de solução para o seguinte problema elíptico quasilinear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u - \kappa\varepsilon^2 \Delta(u^2)u = q(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

e para o seguinte sistema associado a (P),

$$(S) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + W(x)u - \kappa\varepsilon^2 \Delta(u^2)u = Q_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta v + V(x)v - \kappa\varepsilon^2 \Delta(v^2)v = Q_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$, $\varepsilon > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $W, V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que pertencem a duas classes de potenciais. No caso escalar, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma não linearidade contínua com condição de crescimento subcrítica ou crítica, e no caso do sistema, Q_u e Q_v denotam derivadas parciais da função $Q : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $p-$homogênea.

Palavras-chave: Equações de Schrödinger quasilinear; Sistemas de equações de Schrödinger; Métodos variacionais; Mudança de variável; Método de penalização; Teorema do Passo da Montanha; Método de iteração de Moser.

Abstract

Using variational methods, we study the existence of solution for the following quasilinear elliptical problem

$$(P) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u - \kappa\varepsilon^2\Delta(u^2)u = q(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ in } \mathbb{R}^N,\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

and for the following system associated with (P),

$$(S) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + W(x)u - \kappa\varepsilon^2\Delta(u^2)u = Q_u(u,v) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta v + V(x)v - \kappa\varepsilon^2\Delta(v^2)v = Q_v(u,v) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u, v > 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

where $N \geq 3$, $\varepsilon > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $W, V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are continuous functions that belong to two classes of potentials. In the scalar case, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous nonlinearity with subcritical or critical growth condition, and in the case of the system Q_u and Q_v denote partial derivatives of the function $Q : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ of class C^1 and $p-$homogeneous.

Key words: Quasilinear Schrödinger's equations; Schrödinger's systems of equations; Variational methods; Variable change; Penalty method, Mountain Pass Theorem; Moser's iteration Method.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos a existência de solução para o seguinte problema elíptico quasilinear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u - \varepsilon^2\kappa\Delta(u^2)u = q(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

e para o seguinte sistema associado com (P)

$$(S) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + W(x)u - \varepsilon^2\kappa\Delta(u^2)u = Q_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta v + V(x)v - \varepsilon^2\kappa\Delta(v^2)v = Q_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $W, V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que pertencem a duas classes de potenciais que serão detalhadas ao longo desta introdução. No caso escalar, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma não linearidade contínua com condição de crescimento subcrítica ou crítica, e no caso do sistema, $Q_u, Q_v : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ também são funções contínuas e denotam derivadas parciais da função $Q : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ que é de classe C^1 e $p-$homogênea.

Nas últimas décadas, vários pesquisadores tem estudado questões relacionadas à existência, não existência e multiplicidade de solução da seguinte equação elíptica quasilinear

$$-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u - \kappa\varepsilon^2\Delta(u^2)u = q(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $N \geq 3$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ são parâmetros reais, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfaz certas geometrias e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando hipóteses adequadas.

O conhecimento das soluções de (1) tem uma grande importância para estudar a existência de ondas estacionárias (standing wave) para equações de Schrödinger quasilineares

$$i\varepsilon\frac{\partial z}{\partial t} = -\varepsilon^2\Delta z + F(x)z - g(|z|^2)z - \kappa\varepsilon^2\left[\Delta\rho(|z|^2)\right]\rho'(|z|^2)z, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

onde $z : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, F é um potencial dado, κ é uma constante real e g, ρ são funções reais. Considerando $\rho(s) = s$, as soluções estacionárias da equação (2) são da forma

$$z(t,x) = exp\left(\frac{-iEt}{\varepsilon}\right)u(x), E \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

onde u é solução da equação (1) com $V(x) = F(x) - E$ e $q(u) = g(u^2)u$.

Equações quasilineares da forma (2) têm sido exaustivamente estudadas. Um dos motivos para este interesse deve-se ao fato que essas equações surgem como modelo de vários fenômenos físicos, dependendo da função ρ. Por exemplo, se $\rho(s) = \sqrt{1+s}$, a equação modela a propagação de um laser de alta irradiância em um plasma, bem como a auto-canalização de um laser ultracurto de alta potência na matéria. Quando $\rho(s) = s$, a equação surge da mecânica dos fluidos, física dos plasmas, mecânica quântica dissipativa e Teoria da Matéria Condensada. Para o leitor interessado em outras motivações físicas e desenvolvimento dos aspectos físicos, veja [18, 23, 24] e algumas de suas referências.

Além das aplicações, as várias questões matemáticas relacionados ao problema tem atraído o interesse dos pesquisadores. Por exemplo, como bem observado por Colin e Jeanjean em [27], o funcional natural associado a (1), a saber,

$$J(u) = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1+2\kappa u^2)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2 - \int_{\mathbb{R}^N}Q(u), \quad \text{onde} \quad Q(s) = \int_0^s q(t),$$

não está bem definido nos usuais espaços de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para $N \geq 2$, que são espaços naturais para encontar pontos críticos de J e assim obter solução de (1). Para contornar essa dificuldade e aplicar o Método variacional, os pesquisadores têm usados métodos como: mudança de variável combinada com aplicação do Teorema do Passo da Montanha, método de Nehari, minimização com vínculo via Teorema dos multiplicadores de Lagrange, etc.

Levando em consideração os possíveis valores de κ, o comportamento do potencial V e os tipos de não-linearidade, encontramos na literatura vários trabalhos que abordam a existência de soluções para a equação (1).

O caso semilinear, correspondente a $\kappa = 0$, tem sido bastante estudado nas últimas décadas, veja, por exemplo o famoso artigo de del Pino e Felmer [28], onde os autores estudam o problema

$$(P'_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = q(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\varepsilon > 0$, $N \geq 3$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma não linearidade subcrítica, V é um potencial localmente Hölder contínuo satisfazendo

$$(V_*) \ 0 < \alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq V_0 = \inf_{\Omega} V(x) < \min_{\partial\Omega} V(x).$$

Em [28], os autores introduziram o célebre *Método de Penalização* e provaram que se V satisfaz (V_*), então o problema (P'_ε) possui solução u_ε que se concentra em um mínimo de V. Em [5], Alves, do Ó e Souto também estudaram (P'_ε) e provaram o mesmo resultado de [28] para V satisfazendo (V_*), sendo a não linearidade subcrítica pertubada com um termo crítico.

Em [3], Alves estudou o problema (P'_ε) com a não linearidade $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e tendo crescimento subcrítico ou crítico. Em [3], Alves introduz pela primeira vez duas classes interessantes de potencial V, a saber:

Classe 1: O potencial V satisfazendo a condição Palais-Smale:

(V_0) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)$.

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $V, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^N$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$.

(V_2) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $(V(x_n))$ é limitada e

$\nabla V(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente.

Classe 2: O potencial V não possui ponto crítico na fronteira de algum domínio limitado.

Nesta classe de potenciais, V verifica $(V_0),(V_1)$ e a seguinte condição adicional:

(V_3) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

Supondo que V pertence a Classe 1 ou a Classe 2 e considerando que a não linearidade satisfaz algumas hipóteses, o autor provou um resultado de existência de solução positiva para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Em [34], veja também [20], dos Santos e Figueiredo, considerando uma não linearidade descontínua e as Classes 1 e 2 de potenciais introduzidas em [3], provaram resutado de existência de solução para o seguinte problema

$$(P'_{\varepsilon,\beta}) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = H(u-\beta)q(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N,\ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\varepsilon, \beta > 0$ são parâmetros, H é a função de Heaviside (que caracteriza a descontinuidade), isto é,

$$H(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad s > 0, \\ 0, & \text{se} \quad s \leq 0, \end{cases}$$

$1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$ ou $p \in (1,\infty)$ e $N = 1,2$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento subcrítico. Para outros trabalhos interessantes associados à equação (1) com $\kappa = 0$, veja, [7, 8, 9, 15] e algumas de suas referências.

Para o caso $\kappa > 0$ e a não linearidade do tipo subcrítica, veja as referências [25, 27, 35]. O caso onde $\kappa = 1, \varepsilon = 1$ e com não linearidade crítica, veja [30]. Mais precisamente, do Ó, Miyagaki e Soares estabeleceram a existência de solução clássica positiva para a seguinte classe de equação quasilinear

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda|u|^{q-1}u + |u|^{2.2^*} \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, $N \geq 3$, $3 < q < 2.2^* - 1$ (é importante ressaltar que 2.2^* é o expoente crítico na equação (4), isto é, associado ao operador $-\Delta u - \Delta(u^2)u$, veja [25, Remark 3.13]), o potencial V satisfaz a condição (V_0) e as hipóteses:

(V_4) Existe $V_\infty > 0$ tal que $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty$ e $V(x) \leq V_\infty$ em $\mathbb{R}^N$, onde a desigualdade é estrita em algum conjunto de medida positiva.

(V_5) A função V é periódica nas variáveis $x_1, ..., x_N$.

Veja também as referências [19, 36, 42] para trabalhos com equações quasilineares envolvendo não linearidade crítica e o operador em (4).

No caso em que $\kappa = 1$ e $\varepsilon = 1$, do Ó e Severo em [31], usaram a mudança de variável, introduzida em [27, 25], para mostrar a existência de solução positiva para o seguinte problema

$$-\Delta u + V(x)u - [\Delta(u^2)]u = \lambda h(x,u) + g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

onde $N \geq 3$, $\lambda > 0$ é um parâmetro, as funções $h(x,s)$ e $g(x,s)$ são não linearidades do tipo côncavo e convexo, respectivamente. Para contornar a falta de compacidade das imersões dos espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^N$, os autores usam (V_0) e uma condição de integrabilidade sobre V, a saber, $V(x)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ que os permite obter resultados de imersão compacta.

Em [1], veja também [2], Aires e Souto consideram uma não linearidade q com crescimento quasicrítico no infinito e estudam o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = q(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com o potencial V podendo anula-se no infinito. Mais precisamente, o potencial V satisfaz as seguintes condições:

(V_6) $V(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(V_7) $V(x) \leq V_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

(V_8) Existem $\Lambda > 0$ e $R > 1$ tais que $\dfrac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda$.

Recentemente, em [21] dos Santos e Muhassua consideraram (P) para o caso *"zero massa"*, isto é, $V(x) \equiv 0$ e mostraram resultados de existência via método variacional combinado com argumento de aproximação. Em [16], Gloss usa a mudança de variável introduzida por Colin e Jeanjean [27] com uma adaptação do método de del Pino e Felmer [28] para estudar existência e concentração de soluções positivas de energia mínima para (1) com a não linearidade não satisfazendo a famosa *condição de Ambrosetti–Rabinowitz* e o potencial V satisfazendo as geometrias de [28].

Motivados por todos esses trabalhos, principalmente por [3, 4, 9, 25, 27, 28, 30], nesta tese, estudamos o problema (P) e o sistema (S), ambos com $\kappa = 1$.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No Capítulo 1, utilizando a mudança de variável introduzida por Colin-Jeanjean [27], Liu-Wang-Wang [25], combinada com o método de Penalização de del Pino e Felmer [28], mostramos que é possível obter resultado de existência para o problema (P) considerando a Classe 1 e a Classe 2 de potencial V introduzidas por [3]. Nosso principal resultado, neste capítulo, é:

Teorema 0.1. *Suponha que V pertença a Classe 1 ou a Classe 2 e a não-linearidade q satisfaça:*

(q_0) $q(s) = 0, \forall s \leq 0$;

(q_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \sup \frac{q(s)}{s} = 0$.

(q_2) *Existe* $p \in (4, 2.2^*)$ *tal que* $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \sup \frac{q(s)}{s^{p-1}} = 0$, *onde* $2^* = \frac{2N}{N-2}$ *e* $N \geq 3$.

(q_3) *Existe* $\theta > 2$ *tal que*

$$0 < 2\theta Q(s) := 2\theta \int_0^s q(t)\, dt \leq sq(s),\ \forall s > 0.$$

Então, existe $\varepsilon_0 >$ *tal que o problema* (P) *possui solução* u_ε *para todo* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Além disso,* $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e existem constantes* $C_1, C_2 > 0$ *tais que*

$$u_\varepsilon(x) \leq C_1 \exp\left(- C_2 \left|\frac{x}{\varepsilon}\right|\right) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

O resultado presente no Teorema 0.1 generaliza, para o caso $\kappa \neq 0$, os resultados de Alves [3, Teorema 1.1].

No Capítulo 2, motivado por [3, 5, 25, 27, 28, 30], estudamos o problema (P) com não linearidade crítica. Mais precisamente, estudamos o problema

$$(P_*) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u - \varepsilon^2\Delta(u^2)u = q(u) + |u|^{2\cdot 2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

O principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 0.2. *Suponha que V pertença a Classe 1 ou a Classe 2 e a não-linearidade $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaça:*

(q_{0^*}) $q(s) = 0, \forall s \leq 0.$

(q_{1^*}) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \sup \frac{q(s)}{s} = 0.$

(q_{2^*}) *Existem $p, p_1 \in (4, 2.2^*)$ e $\lambda > 0$ tais que*

(i) $q(s) \geq \lambda s^{p_1-1}; \forall s > 0,$

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \sup \frac{q(s)}{s^{p-1}} = 0,$ *onde* $2^* = \frac{2N}{N-2}$ *e* $N \geq 3.$

(q_{3^*}) *Existe $\theta > 2$ tal que*

$$0 < 2\theta Q(s) := 2\theta \int_0^s q(t)\, dt \leq sq(s), \ \forall s > 0.$$

(q_{4^*}) *A função* $s \mapsto \dfrac{q(s)}{s^3}$ *é crescente* $\forall s > 0.$

Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema (P_*) possui uma solução ground state $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Além disso, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que,

$$u_\varepsilon(x) \leq C_1 \exp\left(-C_2\left|\frac{x}{\varepsilon}\right|\right), \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

O resultado presente no Teorema 0.2 generaliza, para o caso $\kappa \neq 0$, os resultados de Alves [3, Teorema 5.1].

O Capítulo 3, será destinado ao estudo do sistema (S). Sistema do tipo (S) estão relacionado a diversas aplicações em Hidrodinâmica, Ferromagnetismo de Heidelberg, Teoria de Magnus, Teoria da Matéria Condensada e Mecânica Quântica Dissipativa.

Em [4], Alves estuda a existência e concentração de solução para o sistema (S') derivado do sistema (S) com $\kappa = 0$, onde as funções $W, V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são Hölder contínuas satisfazendo (V_0) e a hipótese

($\mathcal{V}$) Existe um conjunto aberto e limitado $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \Lambda$ e $\rho > 0$ tal que $W(x), V(x) \geq \rho$, para todo $x \in \partial\Lambda$ e $W(x_0), V(x_0) < \rho$.

Em [9], Arruda, Figueiredo e Nascimento consideram as duas classes de potenciais V introduzidas por Alves em [3] e mostram resultado de existência de soluções para o sistema (S') considerado em [4].

Recentemente, em [13] Corrêa, dos Santos e Tavares usam a técnica de sub-supersolução e o método de Galerkin para provar resultados de um existência de solução para um sistema não variacional envolvendo o oprador $-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u - \varepsilon^2\Delta(u^2)u$ com $\varepsilon = 1$ e $V(x) \equiv 0$ em domínio limitado. Em [37], Severo e Silva usam o método variacional para estudar um sistema do tipo (S) com $\kappa = 1$ e as geometrias sobre V introduzidas por Bartsch e Wang [10].

Motivados por estes trabalhos, e principalmente por [3, 4, 9, 28], estudamos o sistema (S) para $\kappa = 1$ e com as geometrias sobre V introduzidas por Alves [3].

O principal resultado do Capítulo 3 é:

Teorema 0.3. *Suponha que W e V verificam (V_0) e que W ou V pertença a Classe 1 ou 2. Além disso, suponha que Q satisfaz:*

(Q_0) Existe $p \in (4, 2.2^*)$, tal que $Q(tu, tv) = t^pQ(u, v)$ para todo $t > 0, (u, v) \in \mathbb{R}^2_+$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $\mathbb{N} \geq 3$,

(Q_1) Existe $C > 0$, tal que $|Q_u(u, v)| + |Q_v(u, v)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$;

(Q_2) $Q_u(0, 1) = 0$, $Q_v(1, 0) = 0$;

(Q_3) $Q_u(1, 0) = 0$, $Q_v(0, 1) = 0$;

(Q_4) $Q(u, v) > 0$ para cada $u, v > 0$;

(Q_5) $Q_u(u, v)$, $Q_v(u, v) \geq 0$ para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$.

Então, existe $\varepsilon_0 > 0$, *tal que o sistema* (S) *possui uma solução para cada* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Além disso,* $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e existem constantes* $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ *satisfazendo*

$$u_\varepsilon(x) \leq C_1 \exp\left(- C_2 \left| \frac{x}{\varepsilon} \right| \right) \quad e \quad v_\varepsilon(x) \leq C_3 \exp\left(- C_4 \left| \frac{x}{\varepsilon} \right| \right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

O resultado presente no Teorema 0.3 generaliza os resultados de Arruda, Figueiredo e Nascimento [9, Teorema 1.1] em pelo menos dois aspectos: O primeiro é que consideramos $\kappa \neq 0$ que tornar as estimativas (sobre o funcional e a solução do problema auxiliar) totalmente diferente quando comparada ao caso $\kappa = 0$. E o segundo, que ao contrário de [9, Teorema 1.1], não exigimos que os dois potencias V e W estejam na mesma classe de potenciais, só exigimos que um dos potencias esteja na Classe 1 ou 2 e o outro satisfaça (V_0).

Notações

- $\square$: fim da demonstração.
- q.t.p: quase todo ponto.
- Δu: operador Laplaciano aplicado a função u.
- ∇u: gradiente de u.
- Ω: subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$.
- $|\Omega|$, $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$: medida de Lesbegue, fronteira e fecho do conjunto Ω, respectivamente.
- $B_R(0)$: bola aberta de centro em 0 e raio R.

Capítulo

1

Solução para equações de Schrödinger quasilinear envolvendo crescimento subcrítico

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para o seguinte problema elíptico quasilinear:

$$
(P) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u - \varepsilon^2 \Delta(u^2)u = q(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \; u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}
$$

que pela mudança de variável $v(x) = u(\varepsilon x)$ é equivalente ao problema

$$
(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(\varepsilon x)u - \Delta(u^2)u = q(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \; u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}
$$

onde $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ é o operador laplaciano, $N \geq 3$, $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Mais precisamente, consideramos que V pertence a pelo menos uma das duas classes de potenciais introduzidas por Alves [3], a saber:

Classe 1: O potencial V verifica a condição Palais-Smale:

(V_0) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)$.

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $V, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^N$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$.

(V_2) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $(V(x_n))$ é limitada e $\nabla V(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente.

Classe 2: O potencial V não possui ponto crítico na fronteira de algum domínio limitado:

Nesta classe de potenciais, V verifica $(V_0), (V_1)$ e a seguinte hipótese adicional:

(V_3) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla V(x) \neq 0, \forall\, x \in \partial\Lambda$.

As hipóteses sobre a não-linearidade q são as seguintes:

(q_0) $q(s) = 0, \forall s \leq 0;$

(q_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \sup \frac{q(s)}{s} = 0.$

(q_2) Existe $p \in (4, 2.2^*)$ tal que $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \sup \frac{q(s)}{s^{p-1}} = 0$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $N \geq 3$.

(q_3) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < 2\theta Q(s) := 2\theta \int_0^s q(t)\, dt \leq sq(s),\ \forall s > 0.$$

Um exemplo típico de uma função q satisfazendo as hipóteses $(q_0) - (q_3)$ é dada por

$$q(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 0, \\ s^{p-1}, & \text{se} \quad s > 0. \end{cases}$$

Definição 1.1. *Dizemos que $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma solução (distribucional) para o problema (P_ε) se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $u > 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1+2u^2)\nabla u \nabla\varphi + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 u\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)u\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} q(u)\varphi,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (1.1)$$

Agora iremos enunciar o resultado principal deste capítulo:

Teorema 1.1. *Suponha que V pertença a Classe 1 ou a Classe 2 e a não-linearidade q satisfaça $(q_0) - (q_3)$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema (P) possui uma solução u_ε para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Além disso, $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e existem constantes $C_1, C_2 > 0$ satisfazendo*

$$u_\varepsilon(x) \leq C_1 \exp\left(- C_2 \left| \frac{x}{\varepsilon} \right| \right) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que pretendemos usar o método variacional para provar o Teorema 1.1 e o natural funcional associado a (P_ε) não está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$, veja (1.1), usamos a mudança de variável $u = f(w)$ introduzida por Colin e Jeanjean em [27] e por Liu, Wang e Wang em [25] para reformular o problema (P_ε), obtendo um novo problema que possui estrutura variacional. E mostramos que se w é uma solução do problema reformulado, então $u = f(w)$ é uma solução do problema original (P_ε). Em seguida, exploramos algumas ideias desenvolvidas por del Pino e Felmer [28] para modificar o problema reformulado, de modo a aplicar uma versão do Teorema do Passo da Montanha para mostrar a existência de solução para o problema modificado. Por fim, obtemos estimativas em L^∞ a fim de provar que toda solução do problema modificado é uma solução do problema (P_ε).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: Na Seção 1.1, apresentamos a reformulação do problema (P_ε) e alguns resultados preliminares incluindo o espaço apropriado para encontar as soluções de (P_ε). Na Seção 1.2, faremos um truncamento na não-linearidade q com o intuito de definir um problema auxiliar cujo funcional associado também está bem definido e é de classe C^1 em um espaço de Sobolev apropriado. Na Seção 1.3, mostramos que este funcional satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha e provamos a limitação das sequências de Cerami ao nível minimax, contornando assim a dificuldade da não-limitação do domínio. Nas Seções 1.4 e 1.5, supondo que o potencial V pertence a Classe 1 ou Classe 2, respectivamente, mostraremos que, para $\varepsilon > 0$, as soluções do problema auxiliar são soluções do problema reformulado. A demonstração do resultado principal está na Seção 1.6.

1.1 A estrutura variacional e reformulação do problema (P_ε)

Da condição (V_0) e (V_1), podemos considerar o seguinte subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$X = \left\{ w \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) w^2 < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert quando munido da norma

$$\|w\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) w^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.1. *A norma $\|\cdot\|$ é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois, pelas condições (V_0) e (V_1), existem constantes $V_\infty, V_0 > 0$, independentes de ε, tais que $V_0 \leq V(\varepsilon x) \leq V_\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$. Além disso, a imersão $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ é contínua para todo $2 \leq s \leq 2^*$.*

O funcional energia associado ao problema (P_ε) é dado por

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(u).$$

Observe que não podemos aplicar diretamente métodos varacionais para encontrar soluções de (P_ε) uma vez que o funcional J_ε não está bem definido sobre X. Isso se deve ao termo $\int_{\mathbb{R}^N} 2u^2 |\nabla u|^2$ não ser finito em todo espaço X, exceto quando $N = 1$, para mais detalhes veja [16]. Um exemplo deste fato é a função em $H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$u(x) = |x|^{\frac{(2-N)}{4}} \text{ para } x \in B_1 \backslash \{0\}, \text{ que verifica } \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 = +\infty.$$

Para contornar esta dificuldade, usaremos a mudança de variável dada por $w = f^{-1}(u)$, onde f é uma função definida como solução da seguinte EDO:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1 + 2f^2(t))^{1/2}} \text{ em } (0, +\infty), \\ f(t) &= -f(-t) \text{ em } (-\infty, 0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

O seguinte lema elenca as principais propriedades da função f que serão essenciais para encontrarmos uma solução do problema reformulado, cujas demonstrações podem ser encontradas em [27] e [31].

Lema 1.1. *A função f e sua derivada f' satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) *f é unicamente definida, é de classe C^∞ e inversível.*

(2) $|f'(t)| \leq 1$, *para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(3) $|f(t)| \leq |t|$, *para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(4) $\lim_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t} = 1$.

(5) $\lim_{t\to +\infty} \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}} = 2^{1/4}$.

(6) $\frac{f(t)}{2} \leq tf'(t) \leq f(t)$, *para todo $t \geq 0$; e ocorre a desigualdade contrária para $t < 0$.*

(7) $|f(t)| \leq 2^{1/4}|t|^{1/2}$, *para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(8) $\frac{f^2(t)}{2} \leq tf(t)f'(t) \leq f^2(t)$, *para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(9) *Existe uma constante positiva $C > 0$ tal que*

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & se \ |t| \leq 1, \\ C|t|^{1/2}, & se \, |t| \geq 1; \end{cases}$$

(10) $|f(t)f'(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, *para todo $t \in \mathbb{R}$.*

(11) *Para cada $\lambda > 1$, $f^2(\lambda t) \leq \lambda^2 f^2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Após a mudança de variável, a partir de $J_\varepsilon(u)$ obtemos o funcional reformulado

$$I_\varepsilon(w) := J_\varepsilon(f(w)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w) - \int_{\mathbb{R}^N} Q(f(w)),$$

o qual está bem definido em X e é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ cuja a derivada de Gateuax é dada por:

$$I'_\varepsilon(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f(w)f'(w)\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} q(f(w))f'(w)\varphi,$$

para quaisquer $w, \varphi \in X$. Note que $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é ponto crítico do funcional I_ε se, e somente se, w é solução fraca do problema reformulado:

$$\begin{cases} -\Delta w + V(\varepsilon x) f(w) f'(w) = q(f(w)) f'(w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ w \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{RP_ε}$$

Observe que a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional I_ε pode ser escrita da seguinte maneira:

$$-\Delta w = f'(w)[q(f(w)) - V(\varepsilon x) f(w)], \ w \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.3}$$

No próximo resultado relacionamos as soluções de (1.3) com as soluções de (P_ε). As demonstrações estão em [16] e serão apresentadas aqui para conveniência do leitor.

Proposição 1.1. *(i) Se $w \in X \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I_ε, então a função $u = f(w) \in X \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução do problema (P_ε).*
(ii) Se $w \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I_ε, então a função $u = f(w)$ é uma solução clássica do problema (P_ε).

Demonstração. Se $u = f(w)$ pelo Lemma 1.1 temos, $|u| \leq |w|$ e $|\nabla u| = f'(w)|\nabla w| \leq |\nabla w|$, consequentemente $u \in X \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Desde que w é um ponto crítico de I_ε, então w satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f'(w)[q(f(w)) - V(\varepsilon x) f(w)]\varphi, \forall \varphi \in X. \tag{1.4}$$

Como $(f^{-1})'(t) = [f'(f^{-1}(t))]^{-1}$, por (1.2) segue que

$$(f^{-1})'(t) = (1 + 2t^2)^{1/2} \ \text{ e } \ (f^{-1})''(t) = \frac{2t}{(1 + 2t^2)^{1/2}}.$$

Logo,

$$\nabla w = (f^{-1})'(u) \nabla u = (1 + 2u^2)^{1/2} \nabla u.$$

Para cada $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi := (f'(u))^{-1}\tilde{\varphi} = (f^{-1})'(u)\tilde{\varphi} \in X$ com

$$\nabla \varphi = \frac{2u\tilde{\varphi}}{(1 + 2u^2)^{1/2}} \nabla u + (1 + 2u^2)^{1/2} \nabla \tilde{\varphi}.$$

Da equação (1.4), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}[2|\nabla u|^2 v\tilde{\varphi} + (1+2u^2)\nabla u \nabla \tilde{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}^N}[q(u) - V(\varepsilon x)u]\tilde{\varphi}.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(1+2u^2)\nabla u \nabla \tilde{\varphi} + 2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 u\tilde{\varphi} + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)u\tilde{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^N} q(u)\tilde{\varphi}, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

o que mostra que u é uma solução de (P_ε)

Agora, iremos mostrar o item (ii). Seja $w \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ um ponto crítico I_ε. Note que $(f')^2(t)(1+2f^2(t)) = 1$, assim

$$-\Delta w = \frac{1}{\sqrt{1+2f^2(w)}} g(x, f(w)), \tag{1.5}$$

onde

$$g(x, f(w)) = f'(w)[q(x, f(w)) - V(\varepsilon x) f(w)].$$

Afirmamos que $u \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$. De fato, se considerarmos $u = f(w)$, isto é $w = f^{-1}(u)$, teremos

$$\nabla u = f'(w)\nabla w \text{ e } |f'(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Note que, $\nabla w = (f^{-1})'(u)\nabla u$ e

$$\Delta w = (f^{-1})''(u)|\nabla u|^2 + (f^{-1})'(u)\Delta u. \tag{1.6}$$

Como $(f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(t)]}$, segue que

$$(f^{-1})'(t) = \sqrt{1+2f^2(f^{-1}(t))} = \sqrt{1+2t^2} \text{ e } (f^{-1})''(t) = \frac{2t}{(1+2t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim, de (1.6), deduzirmos que

$$\Delta w = \frac{2u}{1+2u^2}|\nabla u|^2 + \sqrt{1+2u^2}\Delta u,$$

e consequentemente, de (1.5), segue

$$-\frac{2u}{\sqrt{1+2u^2}}|\nabla u|^2 - \sqrt{1+2u^2}\Delta u - \frac{1}{\sqrt{1+2u^2}}g(x,u) = 0.$$

Note que podemos reescrever,

$$\frac{1}{\sqrt{1+2u^2}}[(-1-2u^2)\Delta u - 2u|\nabla u|^2 - q(x,u) + V(\varepsilon x)] = 0,$$

o que implica,

$$-(1+2u^2)\Delta u - 2u|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u = q(u).$$

Logo,

$$-\Delta u - \big(2u|\nabla u|^2 + 2u^2\Delta u\big) + V(\varepsilon x)u = q(u).$$

Como $\Delta(u^2)u = 2u|\nabla u|^2 + 2u^2\Delta u$, concluimos que $u \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz (P_ε). $\square$

1.2 O problema auxiliar

Nesta seção, para contornar a falta de imersão compacta do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$ e encontar solução do problema (RP_ε), vamos adaptar o Método de penalização desenvolvido por del Pino e Felmer [28]. Mais precisamente, a ideia consiste em fazer uma modificação conveniente em $q(s)$ fora de um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e considerar um problema auxiliar, de modo que o novo funcional energia associado a este problema auxiliar, satisfaça as geometrias do Teorema do Passo da Montanha e a condição de Cerami. Para isto, fixamos as constantes $a > 0$ e $k = \frac{2\theta}{\theta-2} > 2$, satisfazendo

$$\frac{q(a)}{a} = \frac{V_0}{k}, \tag{1.7}$$

onde V_0 e θ são dados nas hipóteses (V_0) e (q_3), respectivamente. Agora, usando as constantes acima, definamos a função truncada $\tilde{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{q}(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 0, \\ q(s), & \text{se} \quad s \leq a, \\ \dfrac{V_0}{k} s, & \text{se} \quad s > a, \end{cases}$$

e a função penalizada $h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x,s) = \chi_\Omega(x) q(s) + (1 - \chi_\Omega(x))\tilde{q}(s), \ \forall \ (x,s) \ \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

onde χ_Ω denota a função característica associada a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ definida por

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

As hipótese $(q_0)-(q_3)$ sobre a função $q(s)$ mostram que a função $h_\varepsilon(x,s)$ está bem definida, é uma função Caracthéodory e verifica as seguintes condições:

(h_0) $h_\varepsilon(x,s) = 0$, $\forall \ s \leq 0$.

(h_1) Dado $\xi > 0$, existe uma constante $C_\xi > 0$ tal que

$$|h_\varepsilon(x,s)| \leq \xi |s| + C_\xi |s|^{p-1}, \ \forall \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

(h_2) Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\theta > 2$ e

(i) $0 < 2\theta H_\varepsilon(x,s) := 2\theta \displaystyle\int_0^s h_\varepsilon(x,s) \leq h_\varepsilon(x,s)s$, $\forall \ x \in \Omega_\varepsilon$ e $s > 0$;

(ii) $0 < 2H_\varepsilon(x,s) \leq h_\varepsilon(x,s)s \leq \dfrac{1}{k} V_0 s^2$, $\forall \ x \in \Omega_\varepsilon^c$ e $s > 0$.

Levando em consideração as funções $h_\varepsilon(x,s)$ e $\tilde{q}(s)$, o nosso objetivo agora é estudar a existência de solução positiva para o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta w + V(\varepsilon x) f(w) f'(w) = h_\varepsilon(x, f(w)) f'(w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ w \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{AP_ε}$$

onde denotamos

$$h_\varepsilon(x,s) := h(\varepsilon x, s),\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Observação 1.2. *Usando as definições de $\tilde{q}$ e h, as funções $q(s)$ e $h_\varepsilon(x,s)$ são iguais quando $s \leq a$ ou $x \in \Omega_\varepsilon$, onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x \in \Omega\}$. Assim, o problema truncado (AP_ε) está fortemente relacionado com o problema (RP_ε), pois se w é uma solução de (AP_ε) verificando $w(x) \leq f^{-1}(a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$, então w também será solução de (RP_ε). Assim, para encontar solução (RP_ε), nosso objetivo será encontar uma solução w de (AP_ε) que verifica $w(x) \leq f^{-1}(a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$.*

Associado ao problema (AP_ε) definimos, sobre X, o funcional de Euler-Lagrange

$$\Phi_\varepsilon(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w)] - \int_{\mathbb{R}^N} H_\varepsilon(x, f(w)), \tag{1.8}$$

onde

$$H_\varepsilon(x,s) = \int_0^s h_\varepsilon(x,t),\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Sob as condições da não linearidade $q(s)$ e (V_0), o funcional Φ_ε é de classe C^1 com derivada de Gateaux dada por

$$\Phi_\varepsilon^{'}(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + V(\varepsilon x) f(w) f'(w)\varphi] - \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(f(w)) f'(w)\varphi,\ \forall w, \varphi \in X.$$

Assim, os pontos críticos de Φ_ε são exatamente as soluções fracas para (AP_ε).

1.2.1 Resultado de existência para o problema (AP_ε) via Teorema do Passo da Montanha

Uma das dificuldades encontrada quando se trabalha com um problema no $\mathbb{R}^N$ é a falta das imersões compacta de Sobolev, o que causa dificuldade técnica em mostrar que o funcional satisfaz a condição de Palais-Smale ou de Cerami. Entretanto, nesta seção, mostraremos que o funcional penalizado Φ_ε satisfaz as geometrias de uma versão do Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz [7], veja também [32], que será uma ferramenta fundamental para obtenção de uma solução para o problema (AP_ε). Em seguida, mostraremos que o funcional Φ_ε, associado ao problema auxiliar, verifica a condição de Cerami $(Ce)_{c_\varepsilon}$. Recordemos a seguinte definição:

Definição 1.2. *Sejam X um espaço de Banach real e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$. Uma sequência $(w_n) \subset X$ é uma sequência de Cerami para Φ no nível c (denotado por $(Ce)_c$) se (w_n) satisfaz:*

$$\Phi(w_n) \to c \quad e \quad (1 + \|w_n\|)\|\Phi'(w_n)\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Dizemos que o funcional Φ verifica a condição de Cerami em c, se qualquer sequência de Cerami no nível c possui uma subsequência convergente.

Teorema 1.2. *Sejam X um espaço de Banach real, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $S \subset X$ um subconjunto fechado que desconecta (por caminhos) X em componentes conexas distintas X_1 e X_2. Suponha ainda que $\Phi(0) = 0$ e*

(Φ_1) *$0 \in X_1$ e existe $\alpha > 0$ tal que $\Phi(w) \geq \alpha$ $\forall w \in S$;*

(Φ_2) *Existe $e \in X_2$ tal que $\Phi(e) \leq 0$.*

Seja

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C\,([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) \in \Phi^{-1}((-\infty, 0]) \cap X_2\}.$$

Então, Φ possui uma sequência de Cerami no nível $c > 0$.

Com o intuito de aplicar o teorema acima para obter solução de (AP_ε), o primeiro passo é mostrar que o funcional Φ_ε satisfaz as condições geométricas (Φ_1) e (Φ_2). Para tanto, considere o conjunto

$$S_\rho = \{w \in X : \Psi(w) = \rho^2\},$$

onde $\rho > 0$ e $\Psi : X \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\Psi(w) = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w)].$$

Desde que Ψ é contínuo, S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço X em $X_1 = \{w \in X : \Psi(w) > \rho^2\}$ e $X_2 = \{w \in X : \Psi(w) < \rho^2\}$.

Observação 1.3. *Note que o funcional $\Psi : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e*

$$\Psi(w) \leq \|w\|^2, \ \forall\, w \in X.$$

Além disso, existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\beta\|w\|^2 \leq \Psi(w) + (\Psi(w))^{\frac{2}{2^*}}, \ \forall\, w \in X. \tag{1.9}$$

Lema 1.2. *O funcional Φ_ε satisfaz as seguintes condições:*

(Φ_1) *Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi_\varepsilon(w) \geq \alpha, \forall\, w \in S_\rho$.*

(Φ_2) *Para todo $\varepsilon \in (0,1]$, existem $e_0 \in X_2$ e $c_0 > 0$, independentes de ε, tal que $\Phi_\varepsilon(e_0) \leq 0$ e $\sup\limits_{s\in[0,1]} \Phi_\varepsilon(se_0) \leq c_0$.*

Demonstração. (Φ_1) Primeiramente, note que por (h_0) e $f(0) = 0$ temos $\Phi_\varepsilon(0) = 0$. Agora, decorre diretamente de (h_1) e da definição de h_ε que dado $\xi > 0$ existe uma constante $c_\xi > 0$ tal que

$$|H_\varepsilon(x,s)| \leq \frac{\xi}{2}|s|^2 + \frac{c_\xi}{p}|s|^p, \ \forall\, (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Assim, para cada $w \in S_\rho$, usamos (V_0), $(1.8), (1.10)$, a desigualdade de Hölder e a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ para obtermos

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon(w) &\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\xi}{2V_0}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w) - \frac{c_\xi}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |f(w)|^p \\
&\geq \frac{1}{2}\big(1 - \frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (f^2(w))^{\frac{p}{2}} \\
&\geq \frac{1}{2}\big(1 - \frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f^2(w)\right)^{\frac{\sigma p}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f^2(w)|^{2^*}\right)^{1-\frac{\sigma p}{2}} \\
&\geq \frac{1}{2}\big(1 - \frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p} c\rho^{\sigma p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\big(f^2(w)\big)|)^2\right)^{(1-\frac{\sigma p}{2})(\frac{2^*}{2})}
\end{aligned}$$

onde $\sigma = (2.2^* - p)/p(2^* - 1)$ e $c > 0$. Uma vez que para todo $w \in S_\rho$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\big(f^2(w)\big)|^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \leq 2\rho^2,$$

combinado as duas últimas desigualdades, obtemos

$$\Phi_\varepsilon(w) \quad \geq \quad \frac{1}{2}\big(1 - \frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}c\rho^{\frac{2N+2p}{N+2}}.$$

Desde que $p > 4$ e $N \geq 3$, temos $(2N + 2p)/(N + 2) > 2$, assim, para $\xi, \rho > 0$ suficientemente pequenos, podemos escolher $\alpha := \frac{1}{2}\big(1 - \frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}c\rho^{\frac{2N+2p}{N+2}} > 0$ tal que

$$\Phi_\varepsilon(w) \geq \alpha > 0\,, \forall\, w \in S_\rho.$$

(Φ_2) Agora, note que, pela condição (i) de (h_2), existem constantes $c_3, c_4 > 0$ tais que

$$H_\varepsilon(x, s) \geq c_3 s^{2\theta} - c_4,\ \forall\, x \in \Omega_\varepsilon \text{ e } s > 0. \tag{1.11}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $0 \in \Omega$. Fixemos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ tal que *supp* $\varphi \subset B_r(0) \subset \Omega$, para algum $r > 0$. Desde que $B_r(0) \subset \Omega_\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0, 1]$, $f(t\varphi) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $V(\varepsilon x) \leq V_\infty$ em $\mathbb{R}^N$, obtemos por (1.11),

$$\Phi_\varepsilon(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\int_{B_r(0)} [|\nabla\varphi|^2 + V_\infty\varphi^2] - c_3\int_{B_r(0)} |f(t\varphi)|^{2\theta} + c_4|B_r(0)|,\ \forall\, t > 0.$$

Em virtude da propriedade (6) do Lema 1.1, segue que a função $\dfrac{f(t)}{t}$ é decrescente para $t > 0$. Como $0 \leq t\varphi(x) \leq t$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$ e $t > 0$, obtemos $f(t)\varphi(x) \leq f(t\varphi(x))$. Logo, para todo $\varepsilon \in (0, 1]$, temos

$$\Phi_\varepsilon(t\varphi) \leq t^2\left[\frac{1}{2}\int_{B_r(0)} [|\nabla\varphi|^2 + V_\infty\varphi^2] - c_3\frac{f^{2\theta}(t)}{t^2}\int_{B_r(0)} |\varphi|^{2\theta}\right] + c_4|B_r(0)|. \tag{1.12}$$

Pela propriedade (5) do Lema 1.1 e desde que $\theta > 2$, concluímos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f^{2\theta}(t)}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\right)^{2\theta} t^{\theta-2} = +\infty, \tag{1.13}$$

por (1.12) e (1.13), podemos escolher $t_0, c_0 > 0$ independentes de ε, tal que

$$\Phi_\varepsilon(t_0\varphi) \leq 0 \ \text{ e } \sup_{t\in[0,t_0]} \Phi_\varepsilon(t\varphi) \leq c_0, \ \forall\, \varepsilon \in (0,1],$$

desde que $\sup_{t\in[0,t_0]} \Phi_\varepsilon(t\varphi) = \sup_{s\in[0,1]} \Phi_\varepsilon(st_0\varphi)$ a condição (Φ_2) é satisfeita. $\square$

Do Teorema 1.2 e do Lema 1.2, o funcional Φ_ε possui uma sequência de Cerami no nível c_ε, onde c_ε é o nível mini-max do Teorema do Passo da Montanha, dado por

$$c_\varepsilon := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi_\varepsilon(\gamma(t)) \geq \alpha, \tag{1.14}$$

onde

$$\Gamma_\varepsilon := \{\gamma \in C\,([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) \in \Phi^{-1}((-\infty, 0]) \cap X_2\}.$$

1.2.2 Condição de Cerami

Os próximos lemas serão necessários para mostrar que o funcional penalizado satisfaz a condição de Cerami.

Lema 1.3. *Assuma que as condições $(V_0), (V_1), (q_0) - (q_3)$ ocorrem, então toda sequência de Cerami para Φ_ε é limitada em X.*

Demonstração. Seja $(w_n) \subset X$ uma sequência de $(Ce)_{c_\varepsilon}$ para Φ_ε, isto é,

$$\Phi_\varepsilon(w_n) = c_\varepsilon + o_n(1) \ \text{ e } \ (1 + \|w_n\|)\|\Phi'_\varepsilon(w_n)\| = o_n(1). \tag{1.15}$$

Recorde que para todos $w, \varphi \in X$,

$$\Phi'_\varepsilon(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f(w) f'(w)\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(f(w)) f'(w)\varphi.$$

Definindo $\widetilde{\varphi}_n = f(w_n)/f'(w_n)$, pelo item (6) do Lema 1.1, obtemos $|\widetilde{\varphi}_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 2|w_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. Além disso, por (1.2) e cálculos padrões $f''(t) = -2f(t)(f'(t))^4$, assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_i} &= \frac{(f')^2(w_n) - f(w_n)f''(w_n)}{(f')^2(w_n)} \frac{\partial w_n}{\partial x_i} \\ &= \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right) \frac{\partial w_n}{\partial x_i}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

então, $|\nabla \widetilde{\varphi}_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 2|\nabla w_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, pois $2f(t)^2/(1+2f(t)^2) < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $\widetilde{\varphi}_n \in X$. Logo, por (1.15), temos $\Phi'_\varepsilon(w_n)\widetilde{\varphi}_n = o_n(1)$. Tomando $\widetilde{\varphi}_n$ como função teste e usando (1.16) segue que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right) |\nabla w_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) - \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(f(w_n))f(w_n) = o_n(1).$$

Desde que $\Phi_\varepsilon(w_n) - \frac{1}{2\theta}\Phi'_\varepsilon(w_n)\widetilde{\varphi}_n = c_\varepsilon + o_n(1)$, obtemos

$$\begin{aligned} c_\varepsilon + o_n(1) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)\right] |\nabla w_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \\ &+ \frac{1}{2\theta} \int_{\Omega\varepsilon} \big[h_\varepsilon(x, f(w_n))f(w_n) - 2\theta H_\varepsilon(x, f(w_n))\big] \\ &+ \frac{1}{2\theta} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega\varepsilon} \big[h_\varepsilon(x, f(w_n))f(w_n) - 2\theta H_\varepsilon(x, f(w_n))\big]. \end{aligned}$$

Notando que $1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)} \leq 2$, a última desigualdade e (i) da condição (h_2) implicam que

$$\begin{aligned} c_\varepsilon + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega\varepsilon} H_\varepsilon(x, f(w_n)), \end{aligned}$$

aplicando (ii) da condição (h_2), obtemos

$$\begin{aligned} c_\varepsilon + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2k}\right) \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{k}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)\big]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Note que $1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{k} > 0$, pela escolha de $k = \frac{2\theta}{\theta - 2}$. Assim, a desigualdade (1.17), o Lema 1.1,

(V_0) e (V_1) implicam que a sequência (w_n) é limitada em X. De fato, é suficiente provar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|w_n|^2 \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Note que pelo Lema 1.1 e (1.17) existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\{|w_n|\leq 1\}} V(\varepsilon x)|w_n|^2 \leq \frac{1}{C}\int_{\{|w_n|\leq 1\}} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \leq \frac{2c_\varepsilon}{C}\left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{k}\right)^{-1} + o_n(1). \tag{1.19}$$

Além disso, por (V_1) e a inclusão $H^1(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, obtemos constantes V_∞ e S positivas, tais que

$$\begin{aligned} \int_{\{|w_n|>1\}} V(\varepsilon x)|w_n|^2 &\leq V_\infty \int_{\{|w_n|>1\}} |w_n|^{2^*} \\ &\leq V_\infty S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2\right)^{\frac{2^*}{2}} \\ &\leq V_\infty S\left[2c_\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{k}\right)^{-1} + o_n(1)\right]^{\frac{2^*}{2}}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por (1.19) e (1.20) obtemos (1.18), o que conclui a prova do lema.

$\square$

Segue do Lema 1.3 que existe $w \in X$ e uma subsequência, que ainda será denotada por (w_n), tais que

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w \text{ em } X, \\ w_n \to w \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para } s \in [1, 2^*) \\ w_n \to w \text{ q.t.p sobre } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Lema 1.4. *Assuma que as condições $(V_0), (V_1), (q_0) - (q_3)$ ocorrem. Então, para cada $\xi > 0$, existe $R = R(\xi) > 0$ tal que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} [|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)] < \xi,$$

onde (w_n) é uma sequência de Cerami para Φ_ε.

Demonstração. Considere uma função $\eta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_R^c(0), \\ 0, & \text{se} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0), \end{cases}$$

com $0 \leq \eta_R \leq 1$ e $|\nabla \eta_R| \leq \frac{C}{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, onde C é uma constante que não depende de R.

Afirmamos que a sequência $(\eta_R \varphi_n)$ é limitada em X, onde $\varphi_n = \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}$. De fato, por (6) do Lema 1.1, temos $|\varphi_n| \leq 2|w_n|$ e $|\nabla \varphi_n| \leq 2|\nabla w_n|$. Desde que

$$\nabla(\eta_R \varphi_n) = \varphi_n \nabla \eta_R + \eta_R \nabla \varphi_n,$$

temos

$$|\eta_R \varphi_n| \leq 2|w_n| \tag{1.21}$$

e

$$|\nabla(\eta_R \varphi_n)| \leq |\nabla \eta_R||\varphi_n| + |\eta_R||\nabla \varphi_n| \leq \frac{2C}{R}|w_n| + 2|\nabla w_n|. \tag{1.22}$$

Pelo Lema 1.3, sabemos que (w_n) é limitada em X. Assim, de (1.21), (1.22) e da limitação de (w_n), segue que $(\eta_R \varphi_n)$ é limitada em X. Logo,

$$\Phi'_\varepsilon(w_n)(\eta_R \varphi_n) = o_n(1),$$

isto é,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} [\nabla w_n \nabla(\eta_R \varphi_n) + V(\varepsilon x) f(w_n) f'(w_n) \eta_R \varphi_n] - \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w_n)) f'(w_n) \eta_R \varphi_n = o_n(1),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n (\nabla \eta_R \varphi_n + \eta_R \nabla \varphi_n) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f(w_n) f'(w_n) \eta_R \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} &- \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w_n)) f'(w_n) \eta_R \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} \\ &= o_n(1), \end{aligned}$$

assim,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \nabla w_n \nabla \eta_R + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta_R \nabla w_n \nabla \varphi_n + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta_R - \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w_n)) f(w_n)\eta_R = o_n(1).$$

Por simplicidade de notação, consideremos $\eta_R = \eta$. Desde que $\nabla\varphi_n = \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)\nabla w_n$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2\eta + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta &= -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w_n)) f(w_n)\eta + o_n(1). \end{aligned}$$

Escolhendo R de modo que $\Omega \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ teremos, por definição, $\eta = \eta_R = 0$ em Ω. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta\left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta V(\varepsilon x) f^2(w_n) &= -\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} h_\varepsilon(x, f(w_n)) f(w_n)\eta \\ &+ o_n(1). \end{aligned}$$

Pela condição (ii) de (h_2),

$$h_\varepsilon(x, f(w_n)) f(w_n)\eta \leq \frac{1}{k} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta,\ \forall\ \varepsilon x \in \Omega^c. \tag{1.23}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)] &= -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \left(\frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2\eta - \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} h_\varepsilon(x, f(w_n)) f(w_n)\eta + o_n(1). \end{aligned}$$

Por (1.23), obtemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \leq -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \left(\frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2\eta - \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta + \frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} V(\varepsilon x)f^2(w_n)\eta + o_n(1),$$

que implica em

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \leq -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta + \frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} V(\varepsilon x)f^2(w_n)\eta + o_n(1).$$

Observe que

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \left|\frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta\right| \leq 2\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} |w_n||\nabla w_n||\nabla \eta|,$$

e

$$\frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta V(\varepsilon x)f^2(w_n) \leq \frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)].$$

Portanto,

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \leq 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} |w_n||\nabla w_n||\nabla \eta| + o_n(1).$$

Assim, usando o fato que $|\nabla \eta| \leq \frac{C}{R}$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \leq \frac{2C}{R}|w_n|_2|\nabla w_n|_2 + o_n(1).$$

Como $\mathbb{R}^N\setminus B_R(0) \subset \mathbb{R}^N\setminus\Omega$ e $\eta_R = 1$ em $R^N\setminus B_R$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} [|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)].$$

Logo,
$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}[|\nabla w_n|^2+V(\varepsilon x)f^2(w_n)]\leq\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\frac{2C}{R}|w_n|_2|\nabla w_n|_2+o_n(1).$$
Portanto,
$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}[|\nabla w_n|^2+V(\varepsilon x)f^2(w_n)]\leq\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\frac{MC}{R}+o_n(1),$$
logo, escolhendo R suficientemente grande tal que $\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1}\frac{MC}{R}<\xi$, segue o resultado. $\square$

Lema 1.5. *Suponha que as condições* $(V_0),(V_1),(q_0)-(q_3)$ *ocorrem. Seja* (w_n) *uma sequência de Cerami para* Φ_ε. *Então,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)f^2(w_n)dx=\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)f^2(w)dx.$$

Demonstração. Do Lema 1.4, para cada $\xi>0$, existe $R>0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}V(\varepsilon x)f^2(w_n)<\frac{\xi}{4}.$$

Além disso, desde que $V(\varepsilon x)f^2(w)\in L^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}V(\varepsilon x)f^2(w)<\frac{\xi}{4}.$$

Portanto,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)[f^2(w_n)-f^2(w)]\right|\leq\frac{\xi}{2}+\left|\int_{B_R(0)}V(\varepsilon x)[f^2(w_n)-f^2(w)]\right|. \tag{1.24}$$

Desde que $w_n\to w$ em $L^2(B_R(0))$, e usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_R(0)}V(\varepsilon x)f^2(w_n)=\int_{B_R(0)}V(\varepsilon x)f^2(w). \tag{1.25}$$

Por (1.24) e (1.25), temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)[f^2(w_n)-f^2(w)]\right|\leq\frac{\xi}{2},$$

para cada $\xi > 0$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w).$$

□

Lema 1.6. *Se $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w),$$

então

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n - w) = 0.$$

Demonstração. Desde que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, do Lema de Fatou e da continuidade de função f^2, para todo $A \subset \mathbb{R}^N$, temos

$$\int_A V(\varepsilon x) f^2(w) \leq \liminf_{n\to\infty}\int_A V(\varepsilon x) f^2(w_n) \tag{1.26}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(\varepsilon x) f^2(w) \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(\varepsilon x) f^2(w_n). \tag{1.27}$$

Observe que a desigualdade estrita em (1.26) e (1.27) não pode ocorrer. De fato, se umas das desigualdades ocorre, então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w) &= \int_A V(\varepsilon x) f^2(w) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(\varepsilon x) f^2(w)\\
&< \liminf_{n\to\infty}\int_A V(\varepsilon x) f^2(w_n) + \liminf_{n\to\infty}\int_{R^N\setminus A} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\\
&< \liminf_{n\to\infty}\Big[\int_A V(\varepsilon x) f^2(w_n) + \int_{R^N\setminus A} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\Big]\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w) < \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n),$$

o que é um absurdo, pela nossa hipótese. Portanto,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A V(\varepsilon x) f^2(w_n) = \int_A V(\varepsilon x) f^2(w) \ \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(\varepsilon x) f^2(w) = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus A} V(\varepsilon x) f^2(w_n).$$

Afirmação 1.1. *Para todo $\xi > 0$, existem $\delta > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que, se $A \subset \mathbb{R}^N$ com $|A| < \delta$ e $n \geq N$, então*

$$\int_A V(\varepsilon x) f^2(w_n) \leq \xi.$$

Suponha que a Afirmação 1.1 é falsa para algum $\xi_0 > 0$, temos para $\delta_j = \frac{\delta}{2^j}, j = 1, 2, ...,$ existem $A_j \subset \mathbb{R}^N$ e $n_j \geq j$, com $|A_j| < \delta_j$, tais que

$$\int_{A_j} V(\varepsilon x) f^2(w_j) \geq \xi_0.$$

Sabemos, da Teoria da Medida e Integração, que existe $\delta > 0$ tal que, se $A \subset \mathbb{R}^N$, com $|A| < \delta$, então

$$\int_A V(\varepsilon x) f^2(w) < \frac{\xi_0}{2}. \tag{1.28}$$

Considerando $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$, resulta que

$$|A| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |A_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta.$$

Além disso,

$$\int_A V(\varepsilon x) f^2(w_{n_j}) \geq \int_{A_j} V(\varepsilon x) f^2(w_{n_j}) \geq \xi_0,$$

o que implica

$$\int_A V(\varepsilon x) f^2(w_{n_j}) \geq \xi_0.$$

Passando o limite de $n_j \to \infty$, teremos

$$\int_A V(\varepsilon x) f^2(w) \geq \xi_0,$$

o que contraria (1.28). Logo, a Afirmação 1.1 está provada.

Agora, tomemos um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^N$ verificando

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(w) \leq \xi.$$

Para n suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \leq \xi. \tag{1.29}$$

Desde que a função $f^2(t)$ é convexa, usando (11) do Lema 1.1 e 1.29, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(|w_n - w|) &\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(|w_n| + |w|) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(\frac{1}{2} 2|w_n| + \frac{1}{2} 2||w|) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(2|w_n|) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(2|w|) \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(|w_n|) + 2 \int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(|w|) \\
&\leq 2\xi + 2\xi \\
&= 4\xi,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash A} V(\varepsilon x) f^2(|w_n - w|) \leq 4\xi. \tag{1.30}$$

Dividindo o conjunto A em dois subconjuntos, a saber:

$$\begin{aligned}
A_n^1 &= \{x \in A; |w_n - w| \leq a\} \\
A_n^2 &= \{x \in A; |w_n - w| > a\},
\end{aligned}$$

onde $a > 0$ será escolhido convenientemente. Note que

$$\int_{A_n^1} V(\varepsilon x) f^2(|w_n - w|) = \int_A V(\varepsilon x) f^2(|w_n - w|) \mathcal{X}_{A_n^1}.$$

Visto que $(w_n(x) - w(x)) \to 0$ q.t.p em A e $f^2(t)$ é contínua, teremos

$$V(\varepsilon x)f^2(|w_n(x) - w(x)|)\mathcal{X}_{A_n^1}(x) \to 0 \text{ q.t.p em A.}$$

Além disso,

$$V(\varepsilon x)f^2(|w_n(x) - w(x)|)\mathcal{X}_{A_n^1}(x) \leq V(\varepsilon x)f^2(a),$$

e

$$V(\varepsilon x)f^2(a) \leq V_\infty f^2(a)|A| < +\infty.$$

Do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{A_n^1} V(\varepsilon x)f^2(|w_n - w|) \to 0.$$

Afirmação 1.2. *Existem* $\delta > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $|A_n^2| < \delta$ *para todo* $n \geq n_0$.

De fato, uma vez que (w_n) é limitada em X, temos que a integral $\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2^*}$ também é limitada. Então, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|w_n|^{2^*} + |w|^{2^*}] \leq C.$$

Por outro lado,

$$a^{2^*}|A_n^2| = \int_{A_n^2} a^{2^*} < \int_{A_n^2} |w_n - w|^{2^*} \leq C_1 \int_{R^N} [|w_n|^{2^*} + |w|^{2^*} \leq C_2,$$

ou seja,

$$|A_n^2| \leq \frac{C_2}{a^{2^*}}.$$

Para $a \approx +\infty$, temos $|A_n^2| \approx 0$. Escolhendo $a > 0$ tal que

$$|A_{n_0}^2| < \delta,$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Então,

$$|A_n^2| < \delta, \forall n \geq n_0.$$

Portanto, a Afirmação 1.2 está provada. Desde que $|A_n^2| < \delta$, para todo $n \geq n_0$, então pela Afirmação 1.1, deduzimos que

$$\int_{A_n^2} V(\varepsilon x) f^2(|w_n - w|) \leq C \int_{A_n^2} V(\varepsilon x)[f^2(w_n) + f^2(w)] \leq C\xi. \tag{1.31}$$

De (1.29), (1.30) e (1.31), concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n - w) = 0.$$

□

Lema 1.7. *Suponha que as condições* $(V_0), (V_1), (q_0) - (q_3)$ *sejam válidas. Seja* (w_n) *uma sequência de Cerami para* Φ_ε. *Então,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n)) f(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w)) f(w).$$

Demonstração. Usando (ii) da relação (h_2) e o Lema 1.1 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} h(x, f(w_n)) f(w_n) \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} V(\varepsilon x) f^2(w_n). \tag{1.32}$$

Segue de (1.32) e do Lema 1.5 que, para cada $\xi > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} h(x, f(w_n)) f(w_n) < \frac{\xi}{4},$$

além disso, como $h(x, f(w)) f(w) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} h(x, f(w)) f(w) < \frac{\xi}{4}.$$

Portanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} [h(x, f(w_n)) f(w_n) - h(x, f(w)) f(w)] \right| \leq \frac{\xi}{2} + \left| \int_{B_R(0)} [h(x, f(w_n)) f(w_n) - h(x, f(w)) f(w)] \right|. \tag{1.33}$$

Uma vez que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p sobre $B_R(0)$, da continuidade de f e h, segue que,

$$h(x, f(w_n))f(w_n) \to h(x, f(w))f(w) \text{ q.t.p sobre } B_R(0),$$

e

$$|h(x, f(w_n))f(w_n)| \leq \xi w_n^2 + c_\xi w_n^p \text{ q.t.p sobre } B_R(0),$$

onde $(\xi w_n^2 + c_\xi w_n^p) \in L^1(B_R(0))$. Do Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} h(x, f(w_n))f(w_n) = \int_{B_R(0)} h(x, f(w))f(w),$$

logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{B_R(0)} [h(x, f(w_n))f(w_n) - h(x, f(w))f(w)] \right| \leq \frac{\xi}{2}. \tag{1.34}$$

De (1.33) e (1.34), segue que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} [h(x, f(w_n))f(w_n) - h(x, f(w))f(w)] \right| \leq \xi, \ \forall\, n \geq n_0,$$

o que prova o lema. $\square$

Lema 1.8. *Suponha que as condições* $(V_0), (V_1), (q_0) - (q_3)$ *ocorram. O limite fraco* w *é um ponto crítico para o funcional* Φ_ε.

Demonstração. De maneira análoga ao que foi feito no Lema 1.7, deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f(w)f'(w)\varphi \tag{1.35}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w_n))f'(w_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(w))f'(w)\varphi, \tag{1.36}$$

para qualquer $\varphi \in X$. Além disso, desde que $w_n \rightharpoonup w$ em X, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(w_n - w)\nabla\varphi \to 0 \text{ quando } n \to +\infty. \tag{1.37}$$

De (1.35), (1.36), (1.37) e $\Phi'_\varepsilon(w_n)\varphi = o_n(1)$, segue que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \Phi'_\varepsilon(w_n)\varphi = \Phi'_\varepsilon(w)\varphi, \ \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em X, segue que $\Phi'_\varepsilon(w)\varphi = 0$, para todo $\varphi \in X$. $\square$

Proposição 1.2. *Assuma que as condições* $(V_0), (V_1), (q_0)-(q_3)$ *ocorrem. Então, o funcional* Φ_ε *satisfaz a condição* $(Ce)_c$.

Demonstração. Pelo lema anterior, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f(w) f'(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w)) f'(w)\varphi, \ \forall\, \varphi \in X. \tag{1.38}$$

Usando $\Phi'_\varepsilon(w_n)w_n = o_n(1)$, (1.36), (1.38) com $\varphi = w$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f(w_n) f'(w_n) w_n\big] &= \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w)) f'(w) w + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f(w) f'(w) w\big] + o_n(1).\end{aligned}$$

Usando (1.35), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + o_n(1). \tag{1.39}$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla w \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2, \tag{1.40}$$

por (1.39) e (1.40), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (w_n - w)|^2 \to 0. \tag{1.41}$$

Relembre que

$$\|w_n - w\|^2 \le C\left[\Psi(w_n - w) + \Psi(w_n - w)^{\frac{2^*}{2}}\right],$$

onde

$$\Psi(w_n - w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (w_n - w)|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|f^2(w_n - w)|,$$

portanto por (1.41) e pelo Lema 1.6, segue que

$$w_n \to w \text{ em } X,$$

assim a proprosição está provada. $\square$

O teorema a seguir garante a existência de solução w_ε do problema auxiliar (AP_ε) e nos fornece uma estimativa para essas soluções que nos ajudará a provar que a solução do problema auxiliar é também solução do problema reformulado (RP_ε) para $\varepsilon > 0$ pequeno.

Teorema 1.3. *Assuma que o potencial V satisfaz $(V_0), (V_1)$ e a função $q(s)$ satisfaz $(q_1)-(q_3)$. Então, para todo $\varepsilon \in (0,1)$ o problema auxiliar (AP_ε) possui uma solução w_ε. Além disso,*

$$\Phi_\varepsilon(w_\varepsilon) = c_\varepsilon \quad e \quad \|w_\varepsilon\|^2 \leq C(c_\varepsilon + c_\varepsilon^{\frac{2^*}{2}}), \tag{1.42}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de ε e c_ε é como em (1.14).

Demonstração. Usando o Lema 1.2, a Proposição 1.2 e o Teorema do Passo da Montanha (Teorema 1.2), concluímos que o funcional Φ_ε possui um ponto crítico no nível

$$c_\varepsilon := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi_\varepsilon(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) \in \Phi^{-1}((-\infty, 0] \cap X_2\}$ e α dado no Lema 1.2. Assim, existe $w_\varepsilon \in X$, tal que

$$\Phi_\varepsilon(w_\varepsilon) = c_\varepsilon \text{ e } \Phi'_\varepsilon(w_\varepsilon) = 0.$$

Portanto, w_ε é solução de (AP_ε).

Considerando w_ε^- como função teste e notando que $h_\varepsilon(x,s) = 0$ para todo $s \leq 0$ e

$V(\varepsilon x)f(w_\varepsilon)f'(w_\varepsilon)w_\varepsilon^- \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon^-\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon^-|^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_\varepsilon \nabla w_\varepsilon^- + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f(w_\varepsilon)f'(w_\varepsilon)w_\varepsilon^- \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))f'(w_\varepsilon)w_\varepsilon^- \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

portanto, $\|w_\varepsilon^-\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = 0$, logo $w_\varepsilon^- = 0$, e consequentemente, $w_\varepsilon = w_\varepsilon^+ \geq 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Por regularidade elíptica, temos $w_\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, veja prova do Lema 1.10, assim pelo Princípio do Máximo, temos $w_\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Agora, mostraremos que (1.42) ocorre. De fato, seja $\widetilde{w}_\varepsilon = f(w_\varepsilon)/f'(w_\varepsilon)$, uma vez que $\Phi_\varepsilon(w_\varepsilon) - \frac{1}{2\theta}\Phi'_\varepsilon(w_\varepsilon)\widetilde{w}_\varepsilon = c_\varepsilon$, por (i) de (h_2) temos

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon \;\; &\geq \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\left(1 + \frac{2f^2(w_\varepsilon)}{1+2f^2(w_\varepsilon)}\right)\right]|\nabla w_\varepsilon|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w_\varepsilon) \\
&+ \;\; \frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon} \big[h_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))f(w_\varepsilon) - 2\theta H_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))\big]
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade $1 + \frac{2f^2(w_\varepsilon)}{1+2f^2(w_\varepsilon)} \leq 2$ e (ii) da condição (h_2) obtemos

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon \;\; &\geq \;\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w_\varepsilon) \\
&+ \;\; \frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon} [h_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))f(w_\varepsilon) - 2\theta H_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))] \\
&\geq \;\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\left[\int_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w_\varepsilon|^2 dx + V(\varepsilon x)f^2(w_\varepsilon)\right] - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon} H_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Desde que $k = 2\theta/(\theta - 2)$, por (ii) de (h_2), o Lema 1.1 e a última desigualdade, temos

$$c_\varepsilon \;\; \geq \;\; \frac{1}{2k}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2 + C\int_{\{|w_\varepsilon|\leq 1\}} V(\varepsilon x)w_\varepsilon^2 + \int_{\{|w_\varepsilon|>1\}} V(\varepsilon x)f^2(w_\varepsilon)\right], \tag{1.43}$$

para alguma constante $C > 0$, independente de ε. Usando (1.43), (V_1) e a inclusão

$H^1(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, otemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{|w_\varepsilon|>1\}} V(\varepsilon x)|w_\varepsilon|^2 &\leq V_\infty \int_{\{|w_\varepsilon|>1\}} |w_\varepsilon|^{2^*} \\
&\leq V_\infty S\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2\Big)^{\frac{2^*}{2}} \\
&\leq V_\infty S(2kc_\varepsilon)^{\frac{2^*}{2}}. \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

Combinando (1.43) e (1.44), temos (1.42). □

Lema 1.9. *Seja w_ε a solução de (AP_ε) obtida no Teorema 1.3. Então, existe uma constante $M > 0$ independente de ε, tal que*

$$\|w_\varepsilon\| \leq M, \ \forall\, \varepsilon \in (0,1].$$

Demonstração. De fato, sejam e_0 e Γ como na prova do Teorema 1.3. Defina a curva $\gamma : [0,1] \to X$ por $\gamma_0(t) = te_0$, claramente $\gamma_0 \in \Gamma$, logo

$$c_\varepsilon \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi_\varepsilon(te_0) \leq c_0, \ \forall\, \varepsilon \in (0,1], \qquad (1.45)$$

onde $c_0 > 0$ é a constante dada no Lema 1.2.

Combinando (1.45) e (1.42), obtemos o resultado. □

Para mostrarmos o próximo resultado, usaremos o Método de iteração de Moser [29], o que nos permitirá mostrar que a sequência formada pelas soluções transladadas do problema auxiliar é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Lema 1.10. *Sejam w_ε a solução de (AP_ε) obtida no Teorema 1.3 e sequências $\varepsilon_n \subset (0,1)$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. A sequência $(v_n) \subset X$ definida por*

$$v_n(x) := w_{\varepsilon_n}(x + x_n)$$

pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ e possui uma subsequência que converge uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ para uma função $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$. Além disso, existem *constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que, $v(x) \leq C_1 \exp\big(-C_2|x|\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Demonstração. Seja w_{ε_n} a solução do problema auxiliar obtida no Teorema 1.3, então

$$\begin{cases} -\Delta w_{\varepsilon_n}(z) + V(\varepsilon_n z) f(w_{\varepsilon_n}) f'(w_{\varepsilon_n}) = h_{\varepsilon_n}(z, f(w_{\varepsilon_n})) f'(w_{\varepsilon_n}) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w_{\varepsilon_n} > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ w_{\varepsilon_n} \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{AP_{ε_n}}$$

onde $h_{\varepsilon_n}(z, f(w_{\varepsilon_n})) f'(w_{\varepsilon_n}) = h(\varepsilon_n z, f(w_{\varepsilon_n})) f'(w_{\varepsilon_n})$.

Fazendo a mudança de variável $z = x + x_n$ e definindo $v_n(x) := w_{\varepsilon_n}(x + x_n)$ e $h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) := h_{\varepsilon_n}(x + x_n, f(w_{\varepsilon_n})) f'(w_{\varepsilon_n}) = h(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n, f(v_n)) f'(v_n)$, temos

$$\begin{cases} -\Delta v_n(x) + V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) = h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v_n > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ v_n \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{AP_n}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $L > 0$ defina as funções

$$v_{L,n} = \begin{cases} v_n, & \text{se} \quad v_n \leq L, \\ L, & \text{se} \quad v_n \geq L, \end{cases}$$

$z_{L,n} = v_{L,n}^{2(\gamma-1)} v_n$ e $\overline{z}_{L,n} = v_{L,n}^{\gamma-1} v_n$, com $\gamma > 1$ a ser escolhido posteriormente. Note que

$$\nabla z_{L,n} = 2(\gamma - 1) v_{L,n}^{2\gamma-3} v_n \nabla v_{L,n} + v_{L,n}^{2(\gamma-1)} \nabla v_n,$$

e

$$\nabla \overline{z}_{L,n} = v_{L,n}^{\gamma-1} \nabla v_n + (\gamma - 1) v_{L,n}^{\gamma-2} v_n \nabla v_{L,n}.$$

Usando $z_{L,n}$ como função teste em (AP_n), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla z_{L,n} + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) z_{L,n} = \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x + x_n, f(v_n)) f'(v_n) z_{L,n},$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n [2(\gamma - 1) v_{L,n}^{2\gamma-3} v_n \nabla v_{L,n} + v_{L,n}^{2(\gamma-1)} \nabla v_n] \quad &+ \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) v_{L,n}^{2(\gamma-1)} v_n \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x + x_n, f(v_n)) f'(v_n) v_{L,n}^{2(\gamma-1)} v_n. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2(\gamma-1)\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n v_{L,n}^{2\gamma-3}v_n\nabla v_{L,n}+\int_{\mathbb{R}^N}v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2 &= -\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)f(v_n)f'(v_n)v_{L,n}^{2(\gamma-1)}v_n \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}h_\varepsilon(x+x_n,f(v_n))f'(v_n)v_{L,n}^{2(\gamma-1)}v_n. \end{aligned}$$

Usando (h_1), (V_0), $v_n>0$, a propriedade (6) do Lema 1.1 e considerando que a primeira parcela da igualdade anterior é não negativa, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2\le -V_0\int_{\mathbb{R}^N}f(v_n)f'(v_n)v_n v_{L,n}^{2(\gamma-1)}+\int_{\mathbb{R}^N}\left[\xi|f(v_n)|+C_\xi|f(v_n)|^{p-1}\right]f'(v_n)v_n v_{L,n}^{2(\gamma-1)},$$

assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2\le -V_0\int_{\mathbb{R}^N}f(v_n)\frac{f(v_n)}{2}v_{L,n}^{2(\gamma-1)} &+ \xi\int_{\mathbb{R}^N}f(v_n)f'(v_n)v_n v_{L,n}^{2(\gamma-1)} \\ &+ C_\xi\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n)|^{p-1}f'(v_n)v_n v_{L,n}^{2(\gamma-1)}, \end{aligned}$$

com isso,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2\le -\frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N}f^2(v_n)v_{L,n}^{2(\gamma-1)} &+ \xi\int_{\mathbb{R}^N}f^2(v_n)v_{L,n}^{2(\gamma-1)} \\ &+ C_\xi\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n)|^{p-1}f(v_n)v_{L,n}^{2(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Em particular, tomando $\xi\le\frac{V_0}{2}\Rightarrow\left(\xi-\frac{V_0}{2}\right)\le 0$. Consequentemente,

$$\left(\xi-\frac{V_0}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N}f^2(v_n)v_{L,n}^{2(\gamma-1)}\le 0.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2\le C\int_{\mathbb{R}^N}|f(v_n)|^p v_{L,n}^{2(\gamma-1)}.$$

Logo, pela propriedade (7) do Lema 1.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2 \leq C\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\frac{p}{2}} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}, \tag{1.46}$$

onde C é uma constante positiva.

Das imersões de Sobolev,

$$\|\overline{z}_{L,n}\|_{2^*}^2 \leq C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{z}_{L,n}|^2. \tag{1.47}$$

Por (1.2.2), temos

$$\begin{aligned} C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{z}_{L,n}|^2 &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2 + C(\gamma-1)^2\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-2)} v_n^2 |\nabla v_{L,n}|^2 \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2 + C\gamma^2\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-2)} v_n^2 |\nabla v_{L,n}|^2. \end{aligned}$$

Novamente pelo fato de $\nabla v_{L,n} = 0$ quando $v_n > L$, segue que

$$C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{z}_{L,n}|^2 \leq C\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2 + C\gamma^2\int_{[v_n\leq L]} v_{L,n}^{2(\gamma-2)} v_n^2 |\nabla v_{L,n}|^2.$$

Como $v_n = v_{L,n}$ no conjunto $[v_n \leq L]$, temos

$$\int_{[v_n\leq L]} v_{L,n}^{2(\gamma-2)} v_n^2 |\nabla v_{L,n}|^2 = \int_{[v_n\leq L]} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2,$$

logo,

$$C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{z}_{L,n}|^2 \leq C\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2 + C\gamma^2\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2,$$

o que implica,

$$C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{z}_{L,n}|^2 \leq 2C\gamma^2\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2. \tag{1.48}$$

Por (1.47) e (1.48), temos

$$\|\overline{z}_{L,n}\|_{2^*}^2 \leq 2C\gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}|\nabla v_n|^2. \tag{1.49}$$

Segue de (1.46) e (1.49) que

$$\|\overline{z}_{L,n}\|_{2^*}^2 \leq 2C^2\gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\frac{p}{2}} v_{L,n}^{2(\gamma-1)},$$

portanto,

$$\|\overline{z}_{L,n}\|_{2^*}^2 \leq 2C^2\gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\frac{p-4}{2}}(v_n v_{L,n}^{\gamma-1})^2 = 2C^2\gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\frac{p-4}{2}} \overline{z}_{L,n}^2.$$

Observe que $v_n^{\frac{p-4}{2}} \in L^{\frac{2.2^*}{p-4}}(\mathbb{R}^N)$, pois $v_n \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $(\overline{z}_n)^2 \in L^{\frac{2.2^*}{2.2^*-(p-4)}}(\mathbb{R}^N)$, pois $\overline{z}_n \in L^{\frac{4.2^*}{2.2^*-(p-4)}}(\mathbb{R}^N)$. De fato, basta notar que

$$2 \leq \frac{4.2^*}{2.2^*-(p-4)} \leq 2^* \Leftrightarrow 4 \leq p \text{ e } p \leq 2.2^*,$$

que ocorre pela hipótese (q_2).

Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $\frac{2.2^*}{p-4}$ e $\frac{2.2^*}{2.2^*-(p-4)}$, temos por (1.2.2),

$$\|\overline{z}_{L,n}\|_{2^*}^2 \leq 2C^2\gamma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\right)^{\frac{p-4}{2.2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{z}_{L,n}|^{\frac{4.2^*}{2.2^*-(p-4)}}\right)^{\frac{2.2^*-(p-4)}{2.2^*}}.$$

Desde que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois $v_n(x) := w_{\varepsilon_n}(x+x_n)$ e (w_{ε_n}) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando o fato que $\overline{z}_{L,n} \leq v_n^\gamma$ e a imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\|\overline{z}_{L,n}\|_{2^*}^2 \leq k\gamma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\frac{4.\gamma.2^*}{2.2^*-(p-4)}}\right)^{\frac{2.2^*-(p-4)}{2.2^*}}, \tag{1.50}$$

para alguma constante $k > 0$.

Usando o Lema de Fatou na variável L e notando que $\liminf\limits_{L\to\infty} \overline{z}_{L,n} = v_n$, por (1.50), temos

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^{\gamma.2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq k\gamma^2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\frac{4.\gamma.2^*}{2.2^*-(p-4)}}\right)^{\frac{2.2^*-(p-4)}{2.2^*}},$$

assim,

$$\|v_n\|_{\gamma.2*} \leq (k)^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v_n\|_{\gamma\cdot\alpha^*},$$

onde $\alpha^* := \frac{4\cdot 2^*}{2\cdot 2^*-(p-4)}$, ou seja,

$$\|v_n\|_{\gamma\cdot 2^*} \leq K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v_n\|_{\gamma\alpha^*}. \tag{1.51}$$

Considerando $\lambda = \dfrac{2^*}{\alpha^*}$, temos $2^* = \lambda\alpha^*$ e $\gamma\lambda\alpha^* = \gamma \cdot 2^*$, para todo $\gamma > 1$ verificando $v_n^\gamma \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$.

1º Passo Considere $\gamma = \dfrac{2^*}{\alpha^*}$ e observe que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{\gamma\alpha^*} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_n^{2^*} < +\infty$$

isto é, $v_n^\gamma \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$. Pela desigualdade (1.51),

$$\|v_n\|_{\frac{(2^*)^2}{\alpha}} = \|v_n\|_{\gamma\cdot 2^*} \leq K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v_n\|_{\gamma\cdot\alpha^*} = K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v_n\|_{2^*} \leq K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} M,$$

o que implica,

$$\|v_n\|_{\frac{(\lambda\alpha^*)^2}{\alpha^*}} \leq K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} M,$$

ou seja,

$$\|v_n\|_{\lambda^2\alpha^*} \leq K^{\frac{1}{2\cdot\lambda}} \lambda^{\frac{1}{\lambda}} M, \tag{1.52}$$

mostrando que

$$v_n^{\left(\frac{2^*}{\alpha^*}\right)^2} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N). \tag{1.53}$$

2º Passo Considerando $\gamma = \left(\dfrac{2^*}{\alpha^*}\right)^2$, temos por (1.53) que $v_n^\gamma \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$. Pela desigualdade (1.51),

$$\|v_n\|_{\frac{(2^*)^3}{(\alpha^*)^2}} = \|v_n\|_{\gamma \cdot 2^*} \le K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v_n\|_{\gamma\alpha^*} = K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v_n\|_{\frac{(2^*)^2}{\alpha^*}},$$

o que implica

$$\|v_n\|_{\frac{(\lambda\alpha^*)^3}{(\alpha^*)^2}} \le K^{\frac{1}{2\cdot\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} \|v_n\|_{\lambda^2\alpha^*}, \tag{1.54}$$

por (1.52) e (1.54),

$$\|v_n\|_{\lambda^3\alpha^*} \le K^{\frac{1}{\lambda^2}} (\lambda^2)^{\frac{1}{\lambda^2}} K^{\frac{1}{\lambda}} \lambda^{\frac{1}{\lambda}} \|v_n\|_{2^*} \le K^{\frac{1}{\lambda^2}} (\lambda^2)^{\frac{1}{\lambda^2}} C^{\frac{1}{\lambda}} \lambda^{\frac{1}{\lambda}} M,$$

ou seja,

$$\|v_n\|_{\lambda^3\alpha^*} \le K^{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}} \lambda^{\frac{2}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}} M.$$

Assim, $v_n^{\left(\frac{2^*}{\alpha^*}\right)^3} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$. Por indução, obtemos

$$\|v_n\|_{\lambda^{m+1}\alpha^*} \le K^{\sum_{i=1}^m \lambda^{-i}} \lambda^{\sum_{i=1}^m i\lambda^{-i}} M. \tag{1.55}$$

Então,

$$v_n \in L^{\lambda^{m+1}\alpha^*}(\mathbb{R}^N), \ \forall \ m \in \mathbb{N}. \tag{1.56}$$

Recorde que

$$\lambda = \frac{2^*}{\alpha^*} = \frac{2^* - p + 2}{2} > 1.$$

Logo,

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda^{m+1}\alpha^* = +\infty \tag{1.57}$$

De (1.56), (1.57) e da desigualdade de interpolação, $v_n \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para todo $r > 2^*$. Além disso, considere $\overline{C} = C_0^{\sigma_1} \lambda^{\sigma_2} M$, onde

$$C_0 = \max\{K, 1\}, \quad \sigma_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-i}, \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^{\infty} i\lambda^{-i}.$$

Então,

$$K^{\sum_{i=1}^m \lambda^{-i}} \lambda^{\sum_{i=1}^m i\lambda^{-i}} M \le C_0^{\sum_{i=1}^\infty \lambda^{-i}} \lambda^{\sum_{i=1}^\infty i\lambda^{-i}} M = \overline{C}. \tag{1.58}$$

Logo, de (1.55) e (1.58) segue que

$$\|v_n\|_{\lambda^{m+1}\alpha^*} \leq \overline{C},\ \forall\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Por [14], ∇v_n é localmente Hölder contínuo em $\mathbb{R}^N$ para cada $\overline{B}_k \subset \mathbb{R}^N$, isto é, existem constantes C_2 e α tais que

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial v_n}{\partial x_i}(y)\right| \leq C_2|x-y|^\alpha,\ \forall\ x, y \in \overline{B}_k,\ i = 1, 2, \ldots, N.$$

Então, $v_n \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_k)$. Ainda por [14], existem constantes C_3, C_4 e $\nu > 0$ tais que

$$\|\nabla v_n\|_{L\infty(\overline{B}_k)} \leq C_3 \text{ e } \frac{v_n(x) - v_n(y)}{|x-y|^\nu} \leq C_4,\ \forall x, y \in \overline{B}_k.$$

Assim,

$$\|v_n\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_k)} = \|v_n\|_{C^1(\overline{B}_k)} + \max_{0\leq|\gamma|\leq m} \sup_{\substack{x,y\in\overline{B}_k \\ x\neq y}} \frac{|D^\gamma v_n(x) - D^\gamma v_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C_2 + C_3 + C_4,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, (v_n) é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{B}_k)$ para todo raio $k \in \mathbb{N}$ fixado. Assim, dado o conjunto compacto $\overline{B}_1$, temos que (v_n) é limitada em $C^{1,\alpha_1}(\overline{B}_1)$, para algum $\alpha_1 > 0$. Pela imersão compacta de $C^{1,\alpha_1}(\overline{B}_1)$ em $C^1(\overline{B}_1)$, existe uma subsequência $(v_{1n})_n$ de (v_n) e $v_1 \in C^1(\overline{B}_1)$ tais que

$$\|v_{1n} - v_1\|_{C^1(\overline{B}_1)} \to 0,$$

o que implica,

$$v_{1n} \to v_1 \text{ uniformemente em } \overline{B}_1$$

e

$$\frac{\partial v_{1n}}{\partial x_i} \to \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \text{ uniformemente em } \overline{B}_1, \forall\ i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Dado o conjunto compacto $\overline{B}_2$, temos que (v_{1n}) é limitada em $C^{1,\alpha_2}(\overline{B}_2)$, para algum $\alpha_2 > 0$. Pela imersão compacta de $C^{1,\alpha_2}(\overline{B}_2)$ em $C^1(\overline{B}_2)$, existe uma subsequência $(v_{2n})_n$ de $(v_{1n})_n$ e $v_2 \in C^1(\overline{B}_2)$ tais que

$$\|v_{2n} - v_2\|_{C^1(\overline{B}_2)} \to 0,$$

o que implica,

$$v_{2n} \to v_2 \ \text{ uniformemente em } \ \overline{B}_2$$

e

$$\frac{\partial v_{2n}}{\partial x_i} \to \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \ \text{ uniformemente em } \ \overline{B}_2, \forall\ i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Continuando esse raciocínio, teremos que $(v_{kn})_n$ é limitada em $C^{1,\alpha_{k+1}}(\overline{B}_{k+1})$ para algum $\alpha_{k+1} > 0$. Pela imersão compacta de $C^{1,\alpha_{k+1}}(\overline{B}_{k+1})$ em $C^1(\overline{B}_{k+1})$, existe uma subsequência $(v_{k+1,n})_n$ de $(v_{k,n})_n$ e $v_{k+1} \in C^1(\overline{B}_{k+1})$ tais que

$$\|v_{k+1,n} - v_{k+1}\|_{C^1(\overline{B}_{k+1})} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

consequentemente,

$$v_{k+1,n} \to v_{k+1} \ \text{ uniformemente em } \ \overline{B}_{k+1}, \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

e

$$\frac{\partial v_{k+1,n}}{\partial x_i} \underset{n}{\to} \frac{\partial v_{k+1}}{\partial x_i} \text{ uniformemente em } \overline{B}_{k+1}, \forall\ i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Afirmamos que

$$v_k = v_{k+j}, \ \forall j \in \mathbb{N},$$

em $\overline{B}_k$. De fato, dado $x \in \overline{B}_k$, temos

$$v_{k,n}(x) \to v_k(x) \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Uma vez que $(v_{k+j,n})_n \subset (v_{k,n})_n$, segue que

$$v_{k+j,n}(x) \to v_k(x) \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Logo, pela unicidade do limite,

$$v_k(x) = v_{k+j}(x), \ \forall\ x \in \overline{B}_k.$$

Além disso, dado $x \in \mathbb{R}^N$, pelo Princípio da Boa Ordenação, podemos considerar

$$k_x = \min\{m \in \mathbb{N}; x \in \overline{B}_m\}.$$

Assim, podemos definir a função

$$\begin{aligned} \tilde{v} : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tilde{v}(x) = v_{k_x}(x). \end{aligned}$$

Considerando a sequência diagonal (v_{nn}), temos $(v_{nn}) \subset (v_n)$, então (v_{nn}) converge uniformemente para $\tilde{v}$ em conjuntos compactos, pois, dado $\overline{K} \subset \mathbb{R}^N$ compacto, existe uma bola $\overline{B}_k$ tal que $\overline{K} \subset \overline{B}_k$. Daí, para $n \geq k, (v_{nn}) \subset (v_{kn})$ implicando que (v_{nn}) converge uniformemente para $\tilde{v}$ em $\overline{B}_k$. Pela unicidade do limite, $v = \tilde{v}$.

Note que $v_{nn} \to v$ e $\nabla v_{nn} \to \nabla v$ pontualmente. De fato, dado $x \in \mathbb{R}^N$,

$$v_{nn}(x) \to v_{k_x}(x) = v(x)$$

e

$$\frac{\partial v_{nn}}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial v_{k_x}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x), \forall\ i \in \{1, \dots, N\}.$$

Desde que $\|v_{nn}\| \leq M$. Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + v^2)\chi_{\overline{B}_m} dx = \lim_n \int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_{nn}|^2 + v_{nn}^2)\chi_{\overline{B}_m} dx \leq M,\ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema da convergência monótona,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + v^2)\ dx = \lim_m \int\limits_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + v^2)\chi_{\overline{B}_m}\ dx \leq M,$$

deste modo $v \in X$. Concluímos que, a menos de subsequência, $v_n \to v$ uniformemente sobre $\overline{K}$, para cada compacto $\overline{K} \subset \mathbb{R}^N$. Portanto,

$$v \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Note que v tende a zero, quando $|x|$ tende ao infinito. De fato, segue de (V_0), (6) do Lema 1.1, de (h_1) e do fato de v é uma solução do problema (AP_ε), que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} v\varphi,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \varphi \geq 0$. Assim, usando [22, Teorema 8.17] concluímos que para $t > \frac{N}{2}$ e toda bola $B_r(x)$ centrada em qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\sup_{y \in B_r(x)} v(y) \leq C\big(\|v\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v\|_{L^t(B_{2r}(x))}\big).$$

Portanto,

$$v(x) \leq C\big(\|v\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v\|_{L^t(B_{2r}(x))}\big),$$

desde que

$$\|v\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v\|_{L^t(B_{2r}(x))} \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty,$$

segue que

$$v(x) \to 0 \text{ quando } |x| \to \infty.$$

Agora mostraremos que v tem decaimento exponencial e consequentemente w_ε também terá decaimento exponencial. De (h_1) e do limite $\lim_{s\to 0} f(s)f'(s)/s = 1$, podemos escolher $r_0 > 0$ tal que, para todo $|x| \geq r_0$,

$$f(v(x))f'(v(x)) \geq \frac{3}{4}v(x) \;\text{ e }\; h\big(x, f(v(x))\big) \leq \frac{V_0}{2} f(v(x)). \tag{1.59}$$

Considerando

$$\phi(x) = C_1 \exp\big(-C_2|x|\big),$$

onde C_1 e C_2 são tais que

$$4(C_2)^2 < V_0 \text{ e } C_2 \exp\big(-C_2 r_0\big) \geq v(x), \;\; \text{para todo } \; |x| = r_0.$$

Segue que, para todo $x \neq 0$,

$$\Delta \phi \leq (C_2)^2 \phi. \tag{1.60}$$

Defina, $\varrho = \phi - v$. De (1.59), (1.60) e do fato de v ser solução do problema (AP_ε), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \varrho + \frac{V_0}{4} \varrho &\geq 0 \;\; \text{em} \;\; |x| \geq r_0, \\ \varrho &\geq 0 \;\; \text{em} \;\; |x| = r_0, \\ \lim_{|x| \to \infty} \varrho(x) &= 0. \end{aligned}$$

Pelo Princípio do máximo, segue que $\varrho(x) \geq 0$ para todo $|x| \geq r_0$. Assim,

$$v(x) \leq C_1 \exp\big(-C_2 |x|\big) \text{ para todo } |x| \geq r_0,$$

então,

$$u_\varepsilon(x) = f(v(x)) \leq v(x) \leq C_1 \exp\big(-C_2|x|\big), \;\; \text{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}^N,$$

o que conclui a demonstração do lema. □

1.3 Existência de solução para (RP_ε) com V na Classe 1

Nesta seção, assumimos que o potencial V pertence a Classe 1, isto é, V satisfaz $(V_0), (V_1)$ e (V_2). Mostraremos que a solução do problema auxiliar (AP_ε) é também solução do problema (RP_ε). Mais precisamente, além das hipóteses (V_0) e (V_1), a hipóteses adicional (V_2) sobre V, nos permitirá provar que a solução do problema (AP_ε), encontrada no Teorema 1.3, verifica $w_\varepsilon(x) \leq f^{-1}(a)$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$ e então concluir que w_ε também é uma solução de (RP_ε).

Assumiremos, nesta seção, que

$$\Omega_\varepsilon = B_{R_\varepsilon}(0) \;\; \text{onde} \;\; R_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Desde que $w_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^N)$, pelo Princípio do máximo, temos

$$m_\varepsilon := \max_{\partial B_{R_\varepsilon}(0)} w_\varepsilon(x) > 0.$$

Lema 1.11. *Assuma que V satisfaz as condições $(V_0), (V_1)$ e (V_2). Além disso, que a função $q(s)$ satisfaz as condições (q_1), (q_2) e (q_3). Então,*

$$m_\varepsilon \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0^+.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existiriam $\delta_0 > 0$ e uma sequência $(\varepsilon_n) \subset (0,1)$ tais que

$$m_{\varepsilon_n} \geq \delta_0 > 0 \ \text{ e } \ \varepsilon_n \to 0.$$

Por simplicidade de notação, denotaremos $m_n := m_{\varepsilon_n}$ e $w_n := w_{\varepsilon_n}$. Desde que $w_n \in C(\mathbb{R}^N)$, existe $x_n \in \partial B_{R_{\varepsilon_n}}(0)$, tal que

$$w_n(x_n) = \max_{\partial B_{R_{\varepsilon_n}}(0)} w_n(x).$$

Assim, $w_n(x_n) \geq \delta_0$. Usando o Lema 1.9 e a invariancia do $\mathbb{R}^N$ por translação, concluímos que a função $v_n := w_n(. + x_n)$ satisfaz $v_n \in C(\mathbb{R}^N) \cap X$ e $\|v_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, (v_n) é limitada em X, assim, a menos de subsequência, obtemos

$$v_n \rightharpoonup v \ \text{ in } \ X.$$

Além disso, pelo Lema 1.10, a menos de subsequência, v_n converge uniformente para v sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ e $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$v(0) = \lim v_n(0) = \lim w_n(x_n) \geq \delta_0,$$

o que mostra que $v \not\equiv 0$.

Note que pela definição de w_n e v_n, fazendo a mudança de variável $z = x + x_n$ no problema (AP_ε), temos

$$\begin{cases} -\Delta v_n + V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) = h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v_n > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ v_n \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde denotamos $h_n(x,s) := h_{\varepsilon_n}(x,s)$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Pela condição (V_1), a sequência $(V(\epsilon_n x_n))$ é limitada em $\mathbb{R}$, logo, a menos de subsequência,

$$V(\varepsilon_n x_n) \to \alpha_1 \ \text{ em } \ \mathbb{R}, \tag{1.61}$$

para algum $\alpha_1 \geq V_0 > 0$.

Para cada $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n)\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} h_n(x, f(v_n)) f'(v_n)\varphi = o_n(1). \tag{1.62}$$

Passando o limite de $n \to \infty$, concluímos que v é solução não trivial de

$$\begin{cases} \Delta v - \alpha_1 f(v) f'(v) + \widetilde{h}(x, f(v)) f'(v) = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ v \geq 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \ \text{ e } \ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1.63}$$

onde $\widetilde{h}(x,s) = \widetilde{\chi}(x) q(s) + (1 - \widetilde{\chi}(x))\widetilde{q}(s)$ para alguma função $\widetilde{\chi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Por um argumento similar ao da prova do Lema 1.10 concluímos que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, assim, desde que (por uma cálculo direto e (1.2)) $\nabla[(ff')(v)] = (f')^2(v)\nabla v + f(v) f''(v)\nabla v$ e $f''(v) = -2f(v)[f'(v)]^4$, por (2) e (3) do Lema 1.1 temos $(ff')(v) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, por densidade, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, existe $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\varphi_j - f(v) f'(v)\| \leq \frac{1}{j},$$

ou seja,

$$\|\varphi_j - f(v) f'(v)\| = o_j(1). \tag{1.64}$$

Escolhendo $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ como função teste em (1.62), otemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \ &- \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\ &= \ o_n(1). \end{aligned} \tag{1.65}$$

Desde que $v_n \rightharpoonup v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ e *supp* φ é compacto, usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla\big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla\big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big) + o_n(1) \tag{1.66}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{h}(x, f(v)) f'(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + o_n(1). \tag{1.67}$$

Agora, mostraremos que

$$\limsup_{n\to\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} \big[V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) - V(\varepsilon_n x_n)\big] f(v_n) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big| = 0. \tag{1.68}$$

De fato, observe que por (1.61), (1.65) e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \big[V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) - V(\varepsilon_n x_n)\big] f(v_n) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} &= \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla\big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 f(v) f'(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo v solução de (1.63), temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \alpha_1 f(v) f'(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla\big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big) - \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{h}(x, f(v)) f'(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]f(v_n)f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} = & -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)\\ & +\int_{\mathbb{R}^N}h_n(x,f(v_n))f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\\ & -\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{h}(x,f(v))f'(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+o_n(1).\end{aligned}$$

Combinado (1.66), (1.67) e a igualdade acima, concluímos que a afirmação (1.68) é verdadeira.

Note que usando (1.68), o fato de φ_j ter suporte compacto, $f(v)f'(v) = (f(v)f'(v) - f(v_n)f'(v_n)) + f(v_n)f'(v_n)$ e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, conluímos que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]f(v)f'(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|=0, \tag{1.69}$$

assim, notando também que $\varphi_j = (\varphi_j - f(v)f'(v)) + f(v)f'(v)$, usando (1.64), (1.69) e a desigualdade

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|\\ \leq &\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\big(V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big]^2\right)^{\frac{1}{2}}\times|\varphi_j - f(v)f'(v)|_{L^2(\mathbb{R}^N)}+o_n(1),\end{aligned}$$

segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n+)-V(\varepsilon_n x_n)\big)\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|=o_j(1). \tag{1.70}$$

Seja $r>0$ tal que *supp* $\varphi_j\subset B_r(0)$, pela fórmula de integração por partes,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)\varphi_j^2dx=\int_{B_r(0)}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)\varphi_j^2dx=-\int_{B_r(0)}V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)2\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,$$

então, por (1.70) obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)\varphi_j^2\Big|= o_j(1). \tag{1.71}$$

Agora, mostraremos que (V_1) e (1.71), implicam em

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\Big|= o_j(1). \tag{1.72}$$

De fato, note que

$$\Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\Big|=\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\Big]|\varphi_j|^2-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)|\varphi_j|^2\Big|.$$

Pela hipótese (V_1), a sequência $\big(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\big)$ é limitada em $\mathbb{R}$, logo, existe $\alpha_i'\in\mathbb{R}$, tal que, a menos de subsequência,

$$\alpha_i'=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n),$$

com isso,

$$\Big[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\Big]|\varphi_j(x)|^2\to 0 \quad \text{q.t.p em } \ \mathbb{R}^N \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Desde que a função $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, segue pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\Big]|\varphi_j|^2=0,$$

assim, usando este limite e (1.71) obtemos (1.72).

Por (1.64), $|\varphi_j|_{L^2(\mathbb{R}^N)}=|f(v)f'(v)|_{L^2(\mathbb{R}^N)}+o_j(1)$, assim, uma vez que $v>0$ em $\mathbb{R}^N$ e $(ff')(t)>0$ para todo $t>0$, existe $j_0\in\mathbb{N}$, tal que

$$|\varphi_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\geq\frac{1}{2}|f(v)f'(v)|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},\ \forall\, j\geq j_0.$$

Notando que

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n) = \frac{1}{|\varphi_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\Big),$$

obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\Big| \leq \frac{2}{|f(v)f'(v)|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\Big|, \ \ \forall\, j \geq j_0,$$

assim, de (1.72) segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\Big| = o_j(1). \tag{1.73}$$

Dessa igualdade e (1.61), obtemos

$$\nabla V(\varepsilon_n x_n) \to 0 \ \text{ e } \ V(\varepsilon_n x_n) \to \alpha_1. \tag{1.74}$$

Assim, conluímos que $(\varepsilon_n x_n) \subset \mathbb{R}^N$ é uma sequência $(PS)_{\alpha_1}$ para V, o que gera uma contradição já que por (V_2) deveria existir uma subsequência convergente de $(\varepsilon_n x_n)$, entretanto,

$$|\varepsilon_n x_n| = R_{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \to \infty \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Portanto, o lema é verdadeiro. □

Agora, estamos em condição de enunciar e provar o primeiro resultado principal desse capítulo.

Proposição 1.3. *Suponha que o potencial V pertença a Classe 1 e a função $q(s)$ satisfaz $(q_1)-(q_3)$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que, o problema (RP_ε) possui uma solução fraca w_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Demonstração. Desde que o potencial V satisfaz (V_0) e (V_1), segue do Teorema 1.3 que existe uma solução fraca w_ε do problema auxiliar (AP_ε). Uma vez que V também satisfaz (V_2), pelo Lema 1.11, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$\max_{x\in\partial B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} w_\varepsilon(x) < f^{-1}(a), \ \ \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

onde a é dado na definição de (1.7).

Assim, está bem definida a função mensurável

$$\widetilde{w}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0), \\ (w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0), \end{cases}$$

além disso, $\widetilde{w}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Escolhendo $\widetilde{w}_\varepsilon$ como função teste e notando que $\nabla w_\varepsilon \nabla (w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+ \geq 0$ porque

$$\nabla(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) = \begin{cases} \nabla w_\varepsilon & \text{se } w_\varepsilon > f^{-1}(a), \\ 0 & \text{se } w_\varepsilon \leq f^{-1}(a), \end{cases}$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} V(\varepsilon x) f(w_\varepsilon) f'(w_\varepsilon)(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+ \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} h_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon)) f'(w_\varepsilon)(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+.$$

Desde que por construção $h_\varepsilon(x,s) \leq \dfrac{V_0}{k} s$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} \left[V(\varepsilon x) - \frac{V_0}{k} \right] f(w_\varepsilon) f'(w_\varepsilon)(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+ \leq 0,$$

sendo $k > 1$, temos $\big[V(\varepsilon x) - V_0/k\big] > 0$ e $f(w_\varepsilon) f'(w_\varepsilon) > 0$, assim, concluímos que

$$(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) = 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0),$$

logo,

$$w_\varepsilon(x) \leq f^{-1}(a) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0).$$

Portanto, a solução w_ε do problema auxiliar truncado (AP_ε), obtida pelo Teorema 1.3, é solução do problema (RP_ε) para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, veja a Observação 1.2. $\square$

1.4 Existência de solução para (RP_ε) com V na Classe 2

Nesta seção, assumiremos que o potencial V pertence a Classe 2, isto é, V satisfaz $(V_0), (V_1)$ e (V_3) e mostraremos que a solução do problema auxiliar (AP_ε) é também solução do problema (RP_ε). Mais precisamente, a hipótese adicional (V_3) sobre V nos permitirá provar que a solução do problema (AP_ε), encontrada no Teorema 1.3, verifica $w_\varepsilon(x) < f^{-1}(a)$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$ e então, w_ε será também uma solução de (RP_ε).

Seja o domínio Λ da condição (V_3). Assumiremos que

$$\Omega = \Lambda$$

e que w_ε é a solução do problema auxiliar (AP_ε) obtida no Teorema 1.3.

Lema 1.12. *Suponha que V satisfaz $(V_0), (V_1)$ e (V_3), além disso, que a função $q(s)$ satisfaz $(q_1), (q_2)$ e (q_3). Definindo*

$$m_\varepsilon = \max_{x \in \partial\Lambda_\varepsilon} w_\varepsilon(x) > 0,$$

temos

$$m_\varepsilon \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ \varepsilon \to 0.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existiriam $\delta_0 > 0$ e uma sequência $(\varepsilon_n) \subset (0,1)$, tais que

$$m_\varepsilon \geq \delta_0 > 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_n \to 0,$$

ou seja,

$$\max_{x \in \partial\Lambda_{\varepsilon_n}} w_{\varepsilon_n}(x) \geq \delta_0 > 0,$$

onde $w_{\varepsilon_n} \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $w_{\varepsilon_n} \in C(\mathbb{R}^N)$ e $\partial\Lambda_{\epsilon_n}$ um compacto de $\mathbb{R}^N$, existe $x_n \in \partial\Lambda_{\varepsilon_n}$ tal que

$$w_{\varepsilon_n}(x_n) = \max_{x \in \partial\Lambda_{\varepsilon_n}} w_{\varepsilon_n}(x).$$

Podemos usar argumentos semelhantes aos da demonstração do Lema 1.11, para obter uma sequência $(\varepsilon_n x_n) \subset \partial\Lambda$, tal que

$$\nabla V(\varepsilon_n x_n) \to 0.$$

Sendo $\partial\Lambda$ compacto de $\mathbb{R}^N$, existe $x_0 \in \partial\Lambda$, tal que, a menos de subsequência,

$$\varepsilon_n x_n \to x_0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Desde que V é de classe $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, temos

$$x_0 \in \partial\Lambda \ \text{ e } \ \nabla V(x_0) = 0,$$

o que contradiz a condição (V_3), isto é, o fato de V não possui ponto crítico em $\partial\Lambda$. $\square$

Agora, estamos em condições de enunciar e provar o segundo resultado principal desse capítulo.

Proposição 1.4. *Suponha que V pertença a Classe 2 e a função $q(s)$ satisfaz $(q_1) - (q_3)$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que, o problema (RP_ε) possui uma solução fraca w_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Demonstração. Assumindo (V_0), (V_1), $(q_1) - (q_3)$, segue do Teorema 1.3 que existe uma solução fraca w_ε do problema auxiliar (AP_ε). Desde que (V_3) ocorre, pelo Lema 1.12, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$\max_{x \in \partial B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} w_\varepsilon(x) < f^{-1}(a), \ \ \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

onde a é dado na definição de (1.7).

Assim, está bem definida a função mensurável

$$\widetilde{w}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } \ \Lambda_\varepsilon, \\ (w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) & \text{em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon, \end{cases}$$

além disso, $\widetilde{w}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Os mesmos argumentos da demonstração da Proposição 1.3, mostram que $w_\varepsilon(x) \leq f^{-1}(a)$

em $\mathbb{R}^N \backslash \Lambda_\varepsilon$. Portanto, a solução w_ε do problema auxiliar truncado (AP_ε), obtida pelo Teorema 1.3, é solução do problema (RP_ε), para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Veja Observação 1.2. □

1.5 Demonstração do Teorema 1.1

Demonstração. Segue das Proposições 1.3 e 1.4 e do Lema 1.10. □

Capítulo

2

Solução para equações de Schrödinger quasilinear envolvendo crescimento crítico

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para o seguinte problema elíptico quaselinear com não linearidade envolvendo crescimento crítico:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u - \kappa\varepsilon^2\Delta(u^2)u = q(u) + |u|^{2\cdot 2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \; u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \qquad (P_*),$$

o qual é equivalente ao problema,

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\varepsilon x)u - \kappa\Delta(u^2)u = q(u) + |u|^{2\cdot 2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \; u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \qquad (P_{\varepsilon^*})$$

onde $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ é o operador laplaciano, $N \geq 3$, ε é um parâmetro real positivo suficientemente pequeno, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Neste capítulo estamos interessados em estudar a versão crítica do probema (P) estudado no Capítulo 1. Recorde que dizemos que o potencial V pertence a **Classe 1** quando verifica $(V_0), (V_1)$ e (V_2) e que pertence a **Classe 2** quando verifica $(V_0), (V_1)$ e (V_3), onde essas hipóteses são as mesmas do Capítulo 1. Para facilitar a leitura vamos enunciar novamente tais propriedades:

(V_0) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)$.

(V_1) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $V, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^N$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$.

(V_2) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $(V(x_n))$ é limitada e $\nabla V(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente.

(V_3) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

As hipóteses sobre a não-lineridade $q \in C^1$ são as seguintes:

(q_{0^*}) $q(s) = 0, \forall s \leq 0$;

(q_{1^*}) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \sup \frac{q(s)}{s} = 0$.

(q_{2^*}) Existem $p, p_1 \in (4, 2.2^*)$ e $\lambda > 0$ tais que

(i) $q(s) \geq \lambda s^{p_1 - 1}; \forall s > 0$,

(ii) $\displaystyle\lim_{s\to +\infty} \sup \frac{q(s)}{s^{p-1}} = 0$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $N \geq 3$.

(q_{3^*}) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < 2\theta Q(s) := 2\theta \int_0^s q(t)\, dt \leq sq(s),\ \forall s > 0.$$

(q_{4^*}) A função $s \mapsto \dfrac{q(s)}{s^3}$ é crescente $\forall s > 0$.

Observação 2.1. *A condição $q(s) \geq \lambda s^{p_1-1}$ será utilizada para mostrar uma desigualdade envolvendo os níveis do passo da montamha e a melhor constante da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. A hipótese (q_{4^*}) será usada para caracterizar os níveis do passo da montanha com o da variedade de Nehari.*

O principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 2.1. *Suponha que V pertença a Classe 1 ou a Classe 2 e a não-linearidade q satisfaça $(q_{0^*}) - (q_{4^*})$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema (P_*) possui uma solução positiva de energia mínima $u_\varepsilon \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Além disso, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$u_\varepsilon(x) \leq C_1 \exp\left(-C_2 \left|\frac{x}{\varepsilon}\right| \right).$$

2.1 A estrutura variacional e reformulação do problema (P_{ε^*})

Assim como no Capítulo 1, iremos considerar o seguinte subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$X = \left\{ w \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) w^2 < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert quando munido da norma

$$\|w\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) w^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O funcional de Euler-Lagrange associado a (P_{ε^*}) é dado por:

$$J_{\varepsilon^*}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2)|\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} Q(u) - \frac{1}{2.2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2 \cdot 2^*}.$$

Note que J_{ε^*} não está bem definido sobre X, desta maneira não podemos aplicar diretamente os métodos variacionais para encontrarmos soluções de (P_{ε^*}) como pontos críticos de J_{ε^*}. Baseado nos artigos [27, 25], utilizaremos a mudança de variável $w = f^{-1}(u)$, com a qual a partir de J_{ε^*} obtemos o funcional bem definido em X de classe C^1 dado por:

$$I_{\varepsilon^*}(w) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w) - \int_{\mathbb{R}^N} Q(f(w)) - \frac{1}{2.2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |f(w)|^{2 \cdot 2^*},$$

cuja a derivada de Gateuax é definida da seguinte maneira:

$$I'_{\varepsilon^*}(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + V(\varepsilon x) f(w) f'(w) \varphi] - \int_{\mathbb{R}^N} [q(f(w)) + |f(w)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(w)] f'(w) \varphi,$$

para quaisquer $w, \varphi \in X$. Note que $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é ponto crítico do funcional I_{ε^*} se, e somente se, w é solução do problema reformulado:

$$\begin{cases} -\Delta w + V(\varepsilon x) f(w) f'(w) = q(f(w)) f'(w) + |f(w)|^{2 \cdot 2^* - 2} f(w) f'(w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \ w \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{RP_{ε^*}}$$

A seguir, enunciamos um resultado semelhante ao que foi feito no Capítulo 1 que relaciona a solução do problema reformulado (RP_{ε^*}) com a solução do problema original (P_{ε^*}).

Proposição 2.1. *(i) Se $w \in X \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I_{ε^*}, então a função $u = f(w) \in X \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca do problema (P_{ε^*}).*
(ii) Se $w \in X \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I_{ε^*}, então a função $u = f(w)$ é uma solução clássica do problema (P_{ε^*}).

Demonstração. Análogo ao que foi feito na Proposição 1.1. □

2.2 O problema auxiliar

Devido a falta de compacidade do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$ nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$, temos dificuldade em provar que o funcional associado ao problema (RP_{ε^*}) satisfaz a condição de Cerami e assim aplicar o Teorema do Passo da Montanha para obter a solução de (P_{ε^*}). Para contornar essa dificuldade, usaremos uma adaptaçãoo Método de penalização de Del Pino e Felmer.

Fixado o número $k = \frac{2\theta}{\theta-2} > 2$, existe uma constante $a > 0$ tal que

$$a = \min\left\{ s > 0; \frac{q(s) + s^{2\cdot 2^*-1}}{s} = \frac{V_0}{k} \right\}, \tag{2.1}$$

onde V_0 e θ são como nas hipóteses (V_0) e (q_{3^*}), respectivamente. Definamos a função truncada $\tilde{q}_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{q}_*(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq 0, \\ q(s) + s^{2\cdot 2^*-1}, & \text{se} \quad s \leq a, \\ \dfrac{V_0}{k} s, & \text{se} \quad s > a, \end{cases}$$

e a função penalizada $h_* : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h_*(x,s) = \chi_\Omega(x)(q(s) + s^{2\cdot 2^*-1}) + (1 - \chi_\Omega(x))\tilde{q}_*(s), \ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

onde χ_Ω denota a função característica associada a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ definida por

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \Omega. \end{cases}$$

As hipóteses $(q_{0^*}) - (q_{3^*})$ sobre a função $q(s)$ mostram que a função $h_*(x,s)$ está bem definida, é uma função Caracthéodory e verifica as seguintes condições:

(h_{0^*}) $h_*(x,s) = 0$, $\forall\ s \leq 0$;

(h_{1^*}) $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \sup \frac{h_*(x,s)}{s} = 0.$

(h_{2^*}) Dado $\xi > 0$, existe uma constante $c_\xi > 0$ tal que

$$|h_*(x,s)| \leq \xi|s| + c_\xi|s|^{p-1} + |s|^{2\cdot 2^*-1},\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

(h_{3^*}) Existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\theta > 2$ e

(i) $\displaystyle 0 < 2\theta H_*(x,s) := 2\theta \int_0^s h_*(x,t) \leq h_*(x,s)s$, $\forall\ x \in \Omega, s > 0$ ou $x \in \Omega^c$ e $s \leq a$;

(ii) $\displaystyle 0 < 2H_*(x,s) \leq h_*(x,s)s \leq \frac{1}{k}V_0 s^2$, $\forall\ x \in \Omega^c, s > 0.$

(h_{4^*}) A função $\displaystyle s \mapsto \frac{h_*(s)}{s^3}$ é crescente para todo $s > 0$ e $x \in \Omega$ fixado.

Para mostrar a existência de solução para (P_*), nosso objetivo agora é encontrar solução positiva para o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta w + V(\varepsilon x)f(w)f'(w) = h_{\varepsilon^*}(x, f(w))f'(w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N,\ w \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{AP_{ε^*}}$$

onde denotamos

$$h_{\varepsilon^*}(x,s) := h_*(\varepsilon x, s),\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Observação 2.2. *Usando as definições de $\tilde{q}_*$ e h_*, as funções $q(s)$ e $h_{\varepsilon^*}(x,s)$ são iguais quando $s \leq a$ ou $x \in \Omega_\varepsilon$, onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x \in \Omega\}$. Assim, o problema auxiliar (AP_{ε^*}) está fortemente relacionado com o problema (RP_{ε^*}), pois se w é uma solução de (AP_{ε^*}) verificando $w(x) \leq f^{-1}(a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$, então w também será solução de (RP_{ε^*}). Assim, para encontar solução (RP_{ε^*}), nosso objetivo será encontar uma solução w de (AP_{ε^*}) que verifica $w(x) \leq f^{-1}(a)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$.*

Associado ao problema (AP_{ε^*}) definimos sobre X, o funcional energia

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w)] - \int_{\mathbb{R}^N} H_{\varepsilon^*}(x, f(w)), \tag{2.2}$$

onde

$$H_{\varepsilon^*}(x,s) = \int_0^s h_{\varepsilon^*}(x,t), \ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Sob as hipóteses do potencial V e da não linearidade $q(s)$, mostra-se que o funcional Φ_{ε^*} é de classe C^1 com derivada de Gateaux dada por:

$$\Phi'_{\varepsilon^*}(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + V(\varepsilon x) f(w) f'(w)\varphi] - \int_{\mathbb{R}^N} h_{\varepsilon^*}(x, f(w)) f'(w)\varphi, \ \forall\ w, \varphi \in X.$$

Deste modo, os pontos críticos de Φ_{ε^*} são exatamente as soluções fracas para (AP_{ε^*}).

2.2.1 Resultado de existência para o problema (AP_{ε^*}) via Teorema do Passo da Montanha

Nosso objetivo é mostrar que o problema modificado (AP_{ε^*}) possui uma solução, para isso, a princípio utilizaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha, sem a condição de compacidade, afim de obter uma sequência de Cerami no nível c_{ε^*}, onde c_{ε^*} é o nível minimax do funcional penalizado obtido pela aplicação do Teorema do Passo da Montanha e que está definido em (2.2).

Enumciaremos a seguir a versão do Teorema do passo da montanha que será utilizado para mostrarmos que o funcional Φ_{ε^*} possui um ponto crítico:

Teorema 2.2. *Sejam X um espaço de Banach real, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $S \subset X$ um subconjunto fechado que desconecta (por caminhos) X em componentes conexas distintas X_1 e X_2. Suponha ainda que $\Phi(0) = 0$ e*

(Φ_1) *$0 \in X_1$ e existe $\alpha > 0$ tal que $\Phi(w) \geq \alpha\ \forall\ w \in S$;*

(Φ_2) *Existe $e \in X_2$ tal que $\Phi(e) \leq 0$.*

Seja

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) \in \Phi^{-1}((-\infty, 0]) \cap X_2\}.$$

Então, Φ possui uma sequência de Cerami no nível $c > 0$.

Para aplicarmos o Teorema 2.2, considere o conjunto

$$S_\rho = \left\{w \in X : \Psi(w) = \rho^2\right\},$$

onde $\rho > 0$ e $\Psi : X \to \mathbb{R}$ é dado por

$$\Psi(w) = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w)].$$

Desde que Ψ é contínuo, S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço X em $X_1 = \{w \in X : \Psi(w) > \rho^2\}$ e $X_2 = \{w \in X : \Psi(w) < \rho^2\}$.

Lema 2.1. *O funcional Φ_{ε^*} satisfaz as seguintes condições:*

(Φ_{1^*}) *Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi_{\varepsilon^*}(w) \geq \alpha, \forall\, w \in S_\rho$.*

(Φ_{2^*}) *Para todo $\varepsilon > 0$, existem $e_0 \in X_2$ tal que $\Phi_{\varepsilon^*}(e_0) \leq 0$.*

Demonstração. (Φ_{1^*}) De (h_{0^*}) e $f(0) = 0$ temos $\Phi_{\varepsilon^*}(0) = 0$. Decorre de (h_{2^*}) e da definição de h_{ε^*} que dado $\xi > 0$ existe uma constante $c_\xi > 0$ tal que

$$|H_{\varepsilon^*}(x,s)| \leq \frac{\xi}{2}|s|^2 + \frac{c_\xi}{p}|s|^p + \frac{1}{2.2^*}|s|^{2.2^*},\ \forall\, (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Assim, para cada $w \in S_\rho$, usamos (V_0), (2.2), (2.3), a desigualdade de Hölder e a imersão

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ para obtermos

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\varepsilon^*}(w) &\geq \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{\xi}{2V_0}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w) - \frac{c_\xi}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^p - \frac{1}{2.2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^{2.2^*}\\
&\geq \frac{1}{2}\big(1-\frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(f^2(w))^{\frac{p}{2}} - \frac{1}{2.2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^{2.2^*}\\
&\geq \frac{1}{2}\big(1-\frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} f^2(w)\bigg)^{\frac{\sigma p}{2}}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N}|f^2(w)|^{2^*}\bigg)^{1-\frac{\sigma p}{2}} - \frac{1}{2.2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^{2.2^*}\\
&\geq \frac{1}{2}\big(1-\frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}c\rho^{\sigma p}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\big(f^2(w)\big)|)^2\bigg)^{(1-\frac{\sigma p}{2})(\frac{2^*}{2})} - \frac{1}{2.2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^{2.2^*}
\end{aligned}
$$

onde $\sigma = (2.2^* - p)/p(2^* - 1)$ e $c > 0$. Uma vez que para todo $w \in S_\rho$, existe $c_1 > 0$ tal que

$$
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\big(f^2(w)\big)|^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2 \leq 2\rho^2,
$$

e

$$
\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^{2.2^*} \leq c_1\bigg(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\bigg)^{\frac{2^*}{2}} \leq c_1\rho^{2^*}.
$$

Combinado as três últimas desigualdades, obtemos

$$
\Phi_{\varepsilon^*}(w) \;\; \geq \;\; \frac{1}{2}\big(1-\frac{\xi}{V_0}\big)\rho^2 - \frac{c_\xi}{p}c\rho^{\frac{2N+2p}{N+2}} - \frac{c_1}{2.2^*}\rho^{2^*}. \tag{2.4}
$$

Definindo $c_2 = \max\{\frac{c_\xi}{p}c, \frac{c_1}{2.2^*}\}$, de (2.4) temos

$$
\Phi_{\varepsilon^*}(w) \geq \rho^2\bigg[\frac{1}{2}(1-\frac{\xi}{V_0}) - c_2\bigg(\rho^{\frac{2N+2p}{N+2}-2} + \rho^{2^*-2}\bigg)\bigg].
$$

Desde que $p > 4$ e $N \geq 3$, temos $(2N+2p)/(N+2) - 2 > 0$, assim,

$$
\lim_{\rho\to 0} c_2\big(\rho^{\frac{2N+2p}{N+2}-2} + \rho^{2^*-2}\big) = 0.
$$

Assim, para $\xi, \rho > 0$ suficientemente pequenos, podemos escolher

$$
\alpha := \rho^2\bigg[\frac{1}{2}(1-\frac{\xi}{V_0}) - c_2\bigg(\rho^{\frac{2N+2p}{N+2}-2} + \rho^{2^*-2}\bigg)\bigg]
$$

tal que

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w) \geq \alpha > 0\,, \forall\, w \in S_\rho.$$

(Φ_{2^*}) Agora, note que por (i) de (h_{3^*}), existem constantes $c_3, c_4 > 0$ tais que

$$H_{\varepsilon^*}(x,s) \geq c_3 s^{2\theta} - c_4 + \frac{1}{2.2^*}|s|^{2.2^*},\ \forall\, x \in \Omega_\varepsilon \text{ e } s > 0. \tag{2.5}$$

Fixemos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que *supp* $\varphi \subset B_r(x_0) \subset \Omega_\varepsilon$, para algum $r > 0$ e algum $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Desde que $f(t\varphi) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $V(\varepsilon x) \leq V_\infty$ em $\mathbb{R}^N$, obtemos por (2.5)

$$\Phi_{\varepsilon^*}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\int_{B_r(x_0)}[|\nabla\varphi|^2 + V_\infty\varphi^2] - c_3\int_{B_r(x_0)}|f(t\varphi)|^{2\theta} + c_4|B_r(x_0)| - \frac{1}{2.2^*}\int_{B_r(x_0)}|f(t\varphi)|^{2.2^*}.$$

Em virtude da propriedade (6) do Lema 1.1, veja o Capítulo 1, segue que a função $\dfrac{f(t)}{t}$ é decrescente para $t > 0$. Como $0 \leq t\varphi(x) \leq t$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$ e $t > 0$, obtemos $f(t)\varphi(x) \leq f(t\varphi(x))$. Logo,

$$\begin{aligned}\Phi_{\varepsilon^*}(t\varphi) &\leq t^2\left[\frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)}[|\nabla\varphi|^2 + V_\infty\varphi^2] - c_3\frac{f^{2\theta}(t)}{t^2}\int_{B_r(x_0)}|\varphi|^{2\theta} - c_5\frac{f^{2.2^*}(t)}{t^2}\int_{B_r(x_0)}|\varphi|^{2.2^*}\right]\\ &+ c_4|B_r(x_0)|.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pela propriedade (5) do Lema 1.1 e desde que $\theta > 2$ e $2^* > 2$, concluímos que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f^{2\theta}(t)}{t^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\right)^{2\theta} t^{\theta-2} = +\infty, \tag{2.7}$$

e

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f^{2.2^*}(t)}{t^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\right)^{2.2^*} t^{2^*-2} = +\infty, \tag{2.8}$$

por (2.6), (2.7) e (2.8), podemos escolher $t_0 > 0$ tal que $e = t_0\varphi$ satisfaz (Φ_{2^*}). □

Como consequência do Teorema 2.2 e do Lema 2.1, o funcional Φ_{ε^*} possui uma sequência de Cerami $(w_n) \subset X$ no nível c_{ε^*}, onde c_{ε^*} é caracterizado por:

$$c_{\varepsilon^*} := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi_{\varepsilon^*}(\gamma(t)) \geq \alpha, \tag{2.9}$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) \in \Phi^{-1}((-\infty, 0]) \cap X_2\}.$$

2.2.2 Caracterização do nível do Passo da Montanha

Nesta secão faremos uma importante caracterização do nível minimax c_{ε^*} definido em (2.9) que será importante em nossos argumentos para "baixar"o nível minimax e provar que o problema (AP_{ε^*}) tem solução. Para isso, considere a variedade de Nehari associada ao funcional $\Phi_{\varepsilon^*} : X \to \mathbb{R}$, isto é, o conjunto:

$$\mathcal{N} = \{w \in X \setminus \{0\} : \Phi'_{\varepsilon^*}(w)w = 0\}.$$

Dizemos que um ponto crítico w é de energia mínima quando $\Phi_{\varepsilon^*}(w) = \inf_{\mathcal{N}} \Phi_{\varepsilon^*}$ e $\Phi'_{\varepsilon^*}(w) = 0$.

Para o nosso próximo resultado, utilizaremos o corolário a seguir:

Corolário 2.1. *(i) A função* $\dfrac{f(s)f'(s)}{s}$ *é decrescente para* $s > 0$*;*

(ii) A função $\dfrac{f^t(s)f'(s)}{s}$ *é crescente para* $t \geq 3$ *e* $s > 0$.

Demonstração. Pelo item (6) do Lema 1.1, veja o Capítulo 1, a função $f(s)/s$ é decrescente para $s > 0$. Portanto, notando que $f''(t) = -2f(t)(f'(t))^4$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{f(s)f'(s)}{s}\right) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{f(s)}{s}\right) f'(s) - \frac{f(s)}{s} 2f(s)(f'(s))^4 \\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{f(s)}{s}\right) f'(s) - 2\frac{f^2(s)}{s(1+2f^2(s))^2} < 0 \quad \text{para} \quad s > 0. \end{aligned}$$

Para provarmos (ii), calculamos a derivada abaixo para concluirmos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{f^t(s)f'(s)}{s}\right) &= \frac{tf^{t-1}(s)(f'(s))^2 s - 2f^{t+1}(s)(f'(s))^4 s - f^t(s)f'(s)}{s^2} \\ &= f^{t-1}(s)f'(s)\frac{tf'(s)s - 2f^2(s)(f'(s))^3 s - f(s)}{s^2}. \end{aligned}$$

Note que,

$$-2f^2(s)(f'(s))^3 s = -[\sqrt{2}f(s)f'(s)]^2 f'(s)s.$$

Pelo item (10) do Lema 1.1,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{f^t(s)f'(s)}{s}\right) \geq f^{t-1}(s)f'(s)\frac{tf'(s)s - f'(s)s - f(s)}{s^2}.$$

Logo,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{f^t(s)f'(s)}{s}\right) \geq f^{t-1}(s)f'(s)\frac{(t-1)f'(s)s - f(s)}{s^2} > 0.$$

□

Lema 2.2. *Para cada $w \in X, w \neq 0$, existe um único $t_w > 0$ tal que $t_w w \in \mathcal{N}$. Além disso, o valor máximo de $\Phi_{\varepsilon^*}(tw)$ para $t \geq 0$ é atingido em $t = t_w$, isto é $\Phi_{\varepsilon^*}(t_w w) = \max_{t\geq 0} \Phi_{\varepsilon^*}(tw)$.*

Demonstração. Considere $w \in X\backslash\{0\}$ fixo e defina a seguinte função

$$k(t) = \Phi_{\varepsilon^*}(tw),\ \forall\, t \geq 0.$$

Note que, $k'(t) = \Phi'_{\varepsilon^*}(tw)w = 0 \Leftrightarrow tw \in \mathcal{N}$. Assim, $k'(t) = 0$ é equivalente a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{h_{\varepsilon^*}(x, f(tw))f'(tw)}{tw} - \frac{V(\varepsilon x)f(tw)f'(tw)}{tw}\right] w^2. \tag{2.10}$$

Afirmamos que o lado direito de (2.10) é uma função crescente com relação a t. De fato, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, considere a função $z : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$z(s) = \frac{h_{\varepsilon^*}(x, f(s))f'(s)}{s} - \frac{V(\varepsilon x)f(s)f'(s)}{s}.$$

Se $x \in \Omega$, temos

$$z(s) = \frac{[q(f(s)) + f^{2.2^*-1}(s)]}{f^3(s)}\frac{f^3(s)f'(s)}{s} + V(\varepsilon x)\left(-\frac{f(s)f'(s)}{s}\right).$$

Se $x \notin \Omega$, temos

$$z(s) = \frac{[q(f(s)) + f^{2.2^*-1}(s)]}{f^3(s)} \frac{f^3(s)f'(s)}{s} + V(\varepsilon x)\left(-\frac{f(s)f'(s)}{s}\right), \quad s = f^{-1}(a),$$

e

$$z(s) = \frac{\alpha f(s)f'(s)}{sk} + V(\varepsilon x)\left(-\frac{f(s)f'(s)}{s}\right), \quad s > f^{-1}(a),$$

ou seja,

$$z(s) = \frac{kV(\varepsilon x) - \alpha}{k}\left(-\frac{f(s)f'(s)}{s}\right), \quad s > f^{-1}(a).$$

Portanto, do Corolário 2.1 e (h_{4^*}) segue que $z'(s) > 0$ em ambos os casos, o que prova a afirmação.

Como w é fixado e $w \neq 0$, podemos escolher $\xi > 0$ de maneira que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 - \xi \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 > 0.$$

Usando a definição de $h_*(x,s)$, as hipóteses (h_{2^*}), (h_{1^*}) e (q_{2^*}), obtemos uma constante $C_\xi > 0$ tal que

$$h_*(x,s) \leq \xi|s| + C_\xi|s|^{2.2^*-1}, \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\frac{h_*(x, f(tw))f(tw)}{t^2} \leq \xi\frac{f^2(tw)}{t^2} + C_\xi\frac{f^{2.2^*}(tw)}{t^2},$$

assim,

$$\frac{h_*(x, f(tw))f(tw)}{t^2} \leq \xi\frac{f^2(tw)w^2}{t^2w^2} + C_\xi\frac{f^{2.2^*}(tw)}{t^2}.$$

Do Lema 1.1, obtemos

$$\frac{h_*(x, f(tw))f(tw)}{t^2} \leq \xi w^2 + C_\varepsilon t^{2.2^*-2}w^{2.2^*}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{h_*(x,f(tw))f(tw)}{t^2} &\leq \xi\int\limits_{\mathbb{R}^N} w^2 + C_\xi \lim_{t\to 0^+} t^{2.2^*-2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} w^{2.2^*}\\ &\leq \xi\int\limits_{\mathbb{R}^N} w^2 \end{aligned}\tag{2.11}$$

Por (h_{3^*}), obtemos

$$\begin{aligned} k(t) &= t^2\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{V(\varepsilon x)f^2(tw)}{t^2}-\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{H_*(x,f(tw))}{t^2}\right) \qquad (2.12)\\ &\geq \frac{1}{2}t^2\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2-\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{h_*(x,f(tw))f(tw)}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Segue de (2.11) e (2.12) que $k(t) > 0$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, $k(0) = 0$ e $k(t) < 0$ para t grande. Portanto, existe um único $t_w > 0$ tal que $k'(t_w) = 0$, isto é, $t_w w \in \mathcal{N}$, e $k(t_w) = \max\limits_{t\geq 0} k(t)$. $\square$

Defina

$$c_{\varepsilon^{**}} := \inf_{w\in\mathcal{N}}\Phi_{\varepsilon^*}(w) \ \text{ e } \ c_\varepsilon := \inf_{w\in X\setminus\{0\}}\max_{t\geq 0}\Phi_{\varepsilon^*}(tw). \tag{2.13}$$

O próximo resultado mostra a igualdade entre os números $c_\varepsilon, c_{\varepsilon^*}, c_{\varepsilon^{**}}$

Lema 2.3. *Os números $c_{\varepsilon^*}, c_{\varepsilon^{**}}$ e c_ε, definidos em* (2.9) *e* (2.13) *respectivamente, verificam*

$$c_{\varepsilon^*} = c_{\varepsilon^{**}} = c_\varepsilon.$$

Demonstração. De fato, seja $w \in \mathcal{N}$, então recordando que $\tilde{w} := \frac{f(w)}{f'(w)} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ com

$$\nabla\tilde{w} = \left(1+\frac{2f^2(w)}{1+2f^2(w)}\right)\nabla w,$$

e notando que,

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w) = \Phi_{\varepsilon^*}(w) - \frac{1}{2\theta}\Phi'_{\varepsilon^*}(w)\tilde{w},$$

podemos argumentar como na prova do Lema 1.3 e obter

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w) \geq \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{k}\big) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w)\big] > 0,$$

logo, Φ_{ε^*} é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$ e o número $c_{\varepsilon^{**}} = \inf_{w \in \mathcal{N}} \Phi_{\varepsilon^*}(w)$ está bem definido.

Note pelo Lema 2.2, para cada $w_\varepsilon \in X; w \neq 0$, existe um único $t_w > 0$, tal que $t_w w \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$c_{\varepsilon^{**}} \leq \Phi_{\varepsilon^*}(t_w w) = \max_{t \geq 0} \Phi_{\varepsilon^*}(tw), \ \forall \ w \in X \backslash \{0\},$$

com isso,

$$c_{\varepsilon^{**}} \leq c_\varepsilon.$$

Por outro lado, para cada $w \in \mathcal{N}$, temos

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w) = \max_{t \geq 0} \Phi_{\varepsilon^*}(tw) \geq c_\varepsilon, \ \forall \ w \in \mathcal{N},$$

então,

$$c_{\varepsilon^{**}} \geq c_\varepsilon.$$

Assim, $c_{\varepsilon^{**}} = c_\varepsilon$.

Finalmente, provaremos que $c_{\varepsilon^{**}} = c_{\varepsilon^*}$.

Como $\Phi_{\varepsilon^*}(t_0 w) < 0$ para $w \in X \backslash \{0\}$ e $t_0 > 0$ suficientemente grande. É claro que a curva $\gamma_0(t) = t.t_0 w, t \in [0,1]$ pertence a Γ. Então,

$$c_{\varepsilon^*} \leq \max_{t \in [0,1]} \Phi_{\varepsilon^*}(\gamma_0(t)) = \max_{t \in [0,1]} \Phi_{\varepsilon^*}(t.t_0 w) \leq \max_{s \leq 0} \Phi_{\varepsilon^*}(sw),$$

consequentemente, $c_{\varepsilon^*} \leq c_\varepsilon = c_{\varepsilon^{**}}$.

Agora, observe que a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ separa X em duas componentes e que

$$\Phi'_{\varepsilon^*}(w)w = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f(w) f'(w) w] - \int_{\mathbb{R}^N} h_{\varepsilon^*}(f(w)) f'(w) w.$$

Desde que dado $\xi > 0$, existe $C_\xi > 0$, tal que

$$h_{\varepsilon^*}(x,s) \leq \xi|s| + C_\xi|s|^{2.2^*-1},\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

usando as propriedades (6) e (7) do Lema 1.1, temos

$$\begin{aligned}\Phi'_{\varepsilon^*}(w)w &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w) - \frac{\xi}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^2 - \frac{C_\varepsilon}{2.2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|f(w)|^{2.2^*} \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2 + (V(\varepsilon x) - \xi)f^2(w) - C.C_\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2^*}.\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2^*} \leq C\bigg(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2\bigg)^{\frac{2^*}{2}},\ \forall\ w \in X,$$

temos

$$\Phi'_{\varepsilon^*}(w)w \geq \frac{1}{2}\|w\|^2_{D^{1,2}} - \tilde{C}C_\varepsilon\|w\|^{2^*}_{D^{1,2}} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(V(\varepsilon x) - \xi)f^2(w).$$

Então, tomando $\xi > 0$ suficientemente pequeno tal que $V_0 - \xi > 0$, obtemos

$$\Phi'_{\varepsilon^*}(w)w \geq \frac{1}{2}\|w\|^2_{D^{1,2}} - \tilde{C}C_\varepsilon\|w\|^{2^*}_{D^{1,2}},\ \forall\ w \in X.$$

Portanto, existe $\delta > 0$, tal que

$$\Phi'_{\varepsilon^*}(w)w > 0,\ \forall\ 0 < \|w\|^2_{D^{1,2}} \leq \delta,\ w \in X,$$

o que é possível pois, $X \subset H^1(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, a componente que inclui a origem 0 contém uma pequena bola de centro 0.

Desde que $\Phi'_{\varepsilon^*}(\gamma(1))\gamma(1) < 0$, pois $\Phi'_{\varepsilon^*}(\gamma(1)) < 0$, concluímos que $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ estão em componentes distintas para cada $\gamma \in \Gamma$. Desta maneira, existe $\bar{t} \in [0,1]$ tal que $\gamma(\bar{t}) \in \mathcal{N}$, logo,

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi_{\varepsilon^*}(\gamma(t)) \geq \Phi_{\varepsilon^*}(\gamma(\bar{t}) \geq c_{\varepsilon^{**}},\ \forall\ \gamma \in \Gamma,$$

com isso, $c_{\varepsilon^*} \geq c_{\varepsilon^{**}}$. $\square$

Note que podemos reescrever o funcional Φ_{ε^*} da seguinte maneira:

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x)w^2] - \frac{4^{\frac{1}{N-2}}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,w), \tag{2.14}$$

onde

$$G(x,w) := H_{\varepsilon^*}(x, f(w)) + \frac{1}{2}V(\varepsilon x)w^2 - \frac{1}{2}V(\varepsilon x)f^2(w) - \frac{4^{\frac{1}{N-2}}}{2^*}|w|^{2^*}$$

é a primitiva de

$$g(x,w) := f'(w)[h_{\varepsilon^*}(x, f(w)) - V(\varepsilon x)f(w)] + V(\varepsilon x)w - 4^{\frac{1}{N-2}}|w|^{2^*-2}w.$$

Observe que as funções G e g satisfazem

(G_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{G(x,s)}{s^2} = 0$ em $\mathbb{R}^N$;

(G_2) $\displaystyle\lim_{s\to \infty}\frac{G(x,s)}{s^{2^*}} = 0$ em Ω;

(g_1) $\displaystyle\lim_{s\to 0}\frac{g(x,s)}{s} = 0$ em $\mathbb{R}^N$;

(g_2) $\displaystyle\lim_{s\to \infty}\frac{g(x,s)}{s^{2^*-1}} = 0$ em Ω.

Antes de enunciarmos nosso próximo resultado, que nos dará uma estimativa para o nível mini-max, lembramos que a melhor constante para a imersão de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é dada por

$$S = \inf_{0\neq w\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w|^2}{(\int_{\mathbb{R}^N}|w|^{2^*})^{\frac{2}{2^*}}}. \tag{2.15}$$

Lema 2.4. *Existe uma função $w \in X\backslash\{0\}$, tal que* $\max_{t\geq 0}\Phi_{\varepsilon^*}(tw) < \frac{1}{2N}S^{\frac{N}{2}}$.

Demonstração. Como é bem conhecido, veja o famoso artigo de Talenti [39], o ínfimo S definido em (2.15), é atingido pela família de funções

$$U_\zeta(x) = \frac{C\zeta^{(N-2)/4}}{[\zeta + |x|^2]^{(N-2)/2}},$$

onde $C = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}$ e $\zeta > 0$.

Considere a função $\beta_\zeta(x) = \varphi(x)U_\zeta(x)$, onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$ é uma função cut-off verificando

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B_{R_\zeta}, \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R}^N \backslash B_{2R_\zeta}, \end{cases}$$

onde B_{R_ζ} e B_{2R_ζ} são bolas concêntricas centradas na origem 0, com $R_\zeta = \zeta^\alpha$, $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ e $\Omega \subset B_{2R_\zeta}(0)$.

Usando argumentos bem conhecidos, veja [39], temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_\zeta|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |U_\zeta|^{2^*} = S^{\frac{N}{2}},$$

$$\int\limits_{B_{R_\zeta}} |\nabla U_\zeta|^2 \leq \int\limits_{B_{R_\zeta}} |U_\zeta|^{2^*} = S^{\frac{N}{2}},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash B_{R_\zeta}} |\nabla U_\zeta|^2 = O\left(\zeta^{\frac{N-2}{2}}\right), \text{ quando } \zeta \to 0.$$

Considere

$$X_\zeta = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\zeta|^2, \text{ onde } w_\zeta(x) = \frac{\beta_\zeta(x)}{\left(\int\limits_{B_{2R_\zeta}} \beta_\zeta^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}} = \frac{\beta_\zeta(x)}{\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \beta_\zeta^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}},$$

temos

$$X_\zeta = S + O\left(\zeta^{\frac{N-2}{N}}\right).$$

Desde que $\lim_{t\to+\infty} \Phi_{\varepsilon^*}(tw_\zeta) = -\infty$, existe $t_\zeta > 0$, tal que $\Phi_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta) = \max_{t>0} \Phi_{\varepsilon^*}(tw_\zeta)$. Note que $t_\zeta > k$ para algum $k > 0$. De fato, pois caso contrário, existiria uma sequência $\zeta_n \to 0^+$ quando $t_{\zeta_n} \to 0$. Passando a uma subsequência, se nescessário, teríamos

$$0 < \alpha \leq c_\varepsilon < \max \Phi_{\varepsilon^*}(tw_\zeta) = \Phi_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta) \to 0 \text{ quando } \zeta \to 0,$$

o que gera uma contradição, assim, $t_\zeta \geq k > 0$. Além disso, como $\Phi'_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta)w_\zeta = 0$, temos

$$t_\zeta\Bigg(X_\zeta + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)w_\zeta^2\Bigg) = \int\limits_{\Omega} g(x, t_\zeta w_\zeta)w_\zeta + 4^{\frac{1}{N-2}} t_\zeta^{2^*-1} \geq 4^{\frac{1}{N-2}} t_\zeta^{2^*-1},$$

onde na última desigualdade usamos o fato que $g(x, w) \geq 0$ em Ω e *supp* $w_\zeta \subset \Omega$. Assim,

$$0 < t_\zeta \leq t_0(\zeta) = \frac{1}{4^{\frac{1}{N-2}}}\Bigg(X_\zeta + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)w_\zeta^2\Bigg)^{\frac{1}{2^*-2}},$$

logo, usando a expressão de Φ'_{ε^*} em (2.14), temos

$$\Phi_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta) = \frac{t_\zeta^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_\zeta|^2 + V(\varepsilon x)w_\zeta^2] - \frac{4^{\frac{1}{N-2}}}{2^*} t_\zeta^{2^*} - \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(x, t_\zeta w_\zeta).$$

Note que a função

$$l(t) = \frac{t^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_\zeta|^2 + V(\varepsilon x)w_\zeta^2] - \frac{4^{\frac{1}{N-2}}}{2^*} t^{2^*}$$

possui um ponto de máximo em $t_0 = t_0(\zeta) > 0$ que verifica

$$l'(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \Bigg[\frac{1}{4^{\frac{1}{N-2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_\zeta|^2 + V(\varepsilon x)w_\zeta^2]\Bigg]^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Além disso, como l é crescente em $(0, t_0)$, temos

$$\Phi_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta) \leq l(t_0) - \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(x, t_\zeta w_\zeta). \tag{2.16}$$

Uma substituição direta revela que

$$l(t_0) = \frac{1}{2N}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_\zeta|^2 + V(\varepsilon x)w_\zeta^2]\Bigg)^{\frac{2^*}{2^*-2}}.$$

Assim, por (2.16), temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta) &\leq \frac{1}{2N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_\zeta|^2 + V(\varepsilon x)w_\zeta^2]\right)^{\frac{2^*}{2^*-2}} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, t_\zeta w_\zeta)\\
&= \frac{1}{2N}\left(S + O(\zeta^{\frac{N-2}{2}}) + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)w_\zeta^2\right)^{\frac{N}{2}} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, t_\zeta w_\zeta)\\
&= \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N}\left(1 + O(\zeta^{\frac{N-2}{2}}) + \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)w_\zeta^2\right)^{\frac{N}{2}} - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, t_\zeta w_\zeta)\\
&\leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N} + O(\zeta^{\frac{N-2}{2}}) + C\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)w_\zeta^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, t_\zeta w_\zeta),
\end{aligned}$$

como já sabemos $t_\zeta \geq k > 0$, para todo $\zeta \in (0, \zeta^*)$ e algum $k > 0$. Assim, notando que em Ω, temos

$$G(x, t_\zeta w_\zeta) \geq G(x, k w_\zeta).$$

Por simplicidade, vamos assumir $k = 1$. Então,

$$\Phi_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta) \leq \frac{S^{N/2}}{2N} + O(\zeta^{\frac{N-2}{2}}) + C\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)w_\zeta^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, w_\zeta).$$

Agora, desde que $V_0 \leq V(x) \leq V_\infty$, usando a hipótese (q_{2^*}), as condições $(G_1), (G_2), (g_1), (g_2)$, o fato que

$$G(x, w_\zeta) = Q(w_\zeta) + \frac{1}{2.2^*}f^{2.2^*}(w_\zeta) + \frac{1}{2}V(\varepsilon x)w_\zeta^2 - \frac{1}{2}V(\varepsilon x)f(w_\zeta) - 4^{\frac{1}{N-2}}|w_\zeta|^{2^*},$$

pois *supp* $w_\zeta \subset \Omega$, e os mesmos argumentos de do Ó, Miyagaki e Soares [30, Lema 3.4], concluímos que

$$\lim_{\zeta \to 0^+} \frac{1}{\zeta^{\frac{N-2}{2}}} \int_{B_{2R_\zeta}} [CV(\varepsilon x)w_\zeta^2 - G(x, w_\zeta)] = -\infty.$$

Assim, podemos escolher $\zeta > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$O(\zeta^{\frac{N-2}{2}}) + C\int_{B_{2R_\zeta}} V(\varepsilon x)w_\zeta^2 - \int_{B_{2R_\zeta}} G(x, w_\zeta) < 0,$$

logo,

$$\sup_{t\geq 0}\Phi_{\varepsilon^*}(tw_\zeta)=\Phi_{\varepsilon^*}(t_\zeta w_\zeta)<\frac{S^{N/2}}{2N},$$

como queriamos provar. $\square$

Pelo Lema 2.1 e Teorema 2.2 existe uma sequência $(w_n)\subset X$, tal que

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w_n)=c_{\varepsilon^*}+o_n(1)\ \text{ e }\ (1+\|w_n\|)\|\Phi'_{\varepsilon^*}(w_n)\|=o_n(1), \tag{2.17}$$

onde c_{ε^*} é o nível minimax definido em (2.9).

Usando a caracterização de c_ε dada no Lema 2.3, e o Lema 2.4, concluímos que

$$c_{\varepsilon^*}<\frac{1}{2N}S^{N/2}.$$

2.2.3 Condição de Cerami

O próximo resultado será essencial na prova de que o funcional associado ao problema auxiliar (AP_{ε^*}) satisfaz a condição de Cerami $(Ce)_{c_{\varepsilon^*}}$.

Lema 2.5. *Assuma que as condições $(V_0),(V_1),(q_{0^*})-(q_{3^*})$ ocorrem. Então,*

(i) Toda sequência de Cerami para Φ_{ε^*} é limitada em X.

(ii) Para cada $\xi>0$, existe $R=R(\xi)>0$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}[|\nabla w_n|^2+V(\varepsilon x)f^2(w_n)]<\xi;$$

(iii)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)f^2(w_n)=\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)f^2(w);$$

(iv)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n=\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon x)f(w)f'(w)w.$$

Demonstração. (i) Seja $(w_n)\subset X$ uma sequência de $(Ce)_{c_{\varepsilon^*}}$ para Φ_{ε^*} e defina $\widetilde{\varphi}_n=f(w_n)/f'(w_n)$, pelo item (6) do Lema (1.1), obtemos $|\widetilde{\varphi}_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq 2|w_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, além disso, por (1.2) e cálculos padrões $f''(t) = -2f(t)(f'(t))^4$, assim

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_i} = \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}, \tag{2.18}$$

então, $|\nabla \widetilde{\varphi}_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 2|\nabla w_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, pois $2f(t)^2/(1+2f(t)^2) < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $\widetilde{\varphi}_n \in X$. Logo, por (2.17), temos $\Phi'_{\varepsilon^*}(w_n)\widetilde{\varphi}_n = o_n(1)$. Além disso, tomando $\widetilde{\varphi}_n$ como função teste e usando (2.18) temos,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) - \int_{\mathbb{R}^N} h_{\varepsilon^*}(f(w_n))f(w_n) = o_n(1).$$

Desde que $\Phi_{\varepsilon^*}(w_n) - \frac{1}{2\theta}\Phi'_{\varepsilon^*}(w_n)\widetilde{\varphi}_n = c_{\varepsilon^*} + o_n(1)$, temos

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon^*} + o_n(1) &= \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)\right]|\nabla w_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \\ &+ \frac{1}{2\theta}\int_{\Omega\varepsilon}\big[h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n))f(w_n) - 2\theta H_{\varepsilon^*}(x, f(w_n))\big] \\ &+ \frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon}\big[h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n))f(w_n) - 2\theta H_{\varepsilon^*}(x, f(w_n))\big]. \end{aligned}$$

Notando que $1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)} \leq 2$, e utilizando a relação (i) de (h_{3^*}) na igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon} + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon} H_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)), \end{aligned}$$

aplicando (ii) da relação (h_{3^*}) juntamente com a hipótese (V_0), obtemos

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon} + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2k}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\big[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)\big]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Note que $1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{k} > 0$, pela escolha de $k = \frac{2\theta}{\theta - 2}$. A desigualdade (2.19), o Lema 1.1 e (V_1) implica que a sequência (w_n) é limitada em X. De fato, é suficiente argumentar como na prova do Lema 1.3, veja o Capítulo 1.

(ii) Considere uma função $\eta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_R^c(0), \\ 0, & \text{se} \quad x \in B_{\frac{R}{2}}(0), \end{cases}$$

com $0 \leq \eta_R \leq 1$ e $|\nabla \eta_R| \leq \frac{C}{R}$ em $x \in \mathbb{R}^N$, onde C é uma constante que não depende de R. Desde que a sequência $(\eta_R \varphi_n)$ é limitada em X e $(1 + \|w_n\|)\|\Phi'_\varepsilon(w_n)\| = o_n(1)$, temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi_n \nabla w_n \nabla \eta_R + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \eta_R \nabla w_n \nabla \varphi_n + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta_R - \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)) f(w_n)\eta_R = o_n(1).$$

Por simplicidade de notação, considerando $\eta_R = \eta$. Desde que $\nabla \varphi_n = \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right) \nabla w_n$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right) |\nabla w_n|^2 \eta + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta &= -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} \nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)) f(w_n)\eta + o_n(1). \end{aligned}$$

Escolhendo R de modo que $\Omega \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ teremos, por definição, $\eta = 0$ em Ω. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \eta \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right) |\nabla w_n|^2 &+ \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \eta V(\varepsilon x) f^2(w_n) = -\int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} \nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)) f(w_n)\eta + o_n(1). \end{aligned}$$

Pela relação (ii) de (h_{2^*}), temos

$$h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)) f(w_n)\eta \leq \frac{1}{k} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta, \ \forall\, x \in \ \Omega_\varepsilon^c.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)] &= -\int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \left(\frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right) |\nabla w_n|^2 \eta - \int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} \nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash \Omega} h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)) f(w_n)\eta + o_n(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)] &\leq -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \left(\frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2\eta - \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta + o_n(1),\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)] &\leq -\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta \\ &+ \frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\eta + o_n(1).\end{aligned}$$

Observe que

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \left|\frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n \nabla \eta\right| \leq 2\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} |w_n||\nabla w_n||\nabla \eta|,$$

e,

$$\frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta V(\varepsilon x) f^2(w_n) \leq \frac{1}{k}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)].$$

Assim,

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)] \leq 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} |w_n||\nabla w_n||\nabla \eta| + o_n(1),$$

usando o fato que $|\nabla \eta| \leq \frac{C}{R}$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f^2(w_n)] \leq \frac{2C}{R}|w_n|_2|\nabla w_n|_2 + o_n(1).$$

Como $\mathbb{R}^N\backslash B_R(0) \subset \mathbb{R}^N\backslash\Omega$ e $\eta_R = 1$, em $\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} [|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] &= \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega} \eta[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)].\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} [|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1} \frac{2C}{R} |w_n|_2 |\nabla w_n|_2 + o_n(1).$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} [|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x)f^2(w_n)] \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1} \frac{MC}{R} + o_n(1),$$

escolhendo R suficientemente grande tal que $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1} \frac{MC}{R} < \xi$ segue o resultado.

(iii) Pelo item (ii), para cada $\xi > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} V(\varepsilon x)f^2(w_n) < \frac{\xi}{4},$$

consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R(0)} V(\varepsilon x)f^2(w_n) < \frac{\xi}{4}.$$

Portanto,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)[f^2(w_n) - f^2(w)] \right| \leq \frac{\xi}{2} + \left| \int_{B_R(0)} V(\varepsilon x)[f^2(w_n) - f^2(w)] \right|. \tag{2.20}$$

Desde que $w_n \to w$ em $L^2(B_R(0))$, e usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} V(\varepsilon x)f^2(w_n) = \int_{B_R(0)} V(\varepsilon x)f^2(w). \tag{2.21}$$

Por (2.20) e (2.21), temos

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)[f^2(w_n) - f^2(w)] \right| \leq \frac{\xi}{2},$$

para cada $\xi > 0$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w),$$

o que conclui a prova de (iii).

(iv) Pela propriedade (8) do Lema 1.1, temos $f(w_n)f'(w_n)w_n \leq f^2(w_n)$, assim

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n < \xi. \tag{2.22}$$

Como $w_n \to w$ em $L^s(B_R(0))$ para todo $s \in [1, 2^*)$, utilizando o Lema 1.1 e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_R(0)} V(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n = \int_{B_R(0)} V(\varepsilon x)f(w)f'(w)w. \tag{2.23}$$

Desde que,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(\varepsilon x)f(w)f'(w)w \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(\varepsilon x)f(w)f'(w)w = o_R(1), \tag{2.24}$$

onde $o_R(1) \to 0$ quando $R \to +\infty$. Notando que,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)[f(w_n)f'(w_n)w_n - f(w)f'(w)w]\right| \leq{}& \left|\int_{B_R(0)} V(\varepsilon x)[f(w_n)f'(w_n)w_n - f(w)f'(w)w]\right| \\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n\right| \\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(\varepsilon x)f(w)f'(w)w\right|,\end{aligned}$$

usando a desigualdade acima, (2.22), (2.23) e (2.24), concluímos a prova de (iv). $\square$

Lema 2.6. *Se* $w_n(x) \to w(x)$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w_n) = \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w),$$

então,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(w_n-w)=0.$$

Demonstração. Usando os mesmos argumentos da prova do Lema 1.6, concluímos que lema é verdadeiro. □

Proposição 2.2. *Assuma que as condições* $(V_0),(V_1),(q_{0^*})-(q_{3^*})$ *ocorrem. Então, o funcional* $\Phi_{\varepsilon*}$ *satisfaz a condição de Cerami no nível*

$$c_{\varepsilon^*}<\frac{1}{2N}S^{\frac{N}{2}}. \tag{2.25}$$

Demonstração. Seja $(w_n)\subset X$ uma sequência de Cerami, segue do Lema 2.5 que (w_n) é limitada em X. Assim, a menos de subsequência, $w_n\rightharpoonup w$ em X, $w_n(x)\to w(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$.

Desde que a sequência $\tilde{w}_n:=f^2(w_n)$ é limitada em X, podemos concluir que

$$\tilde{w}_n:=f^2(w_n)\rightharpoonup f^2(w):=\tilde{w}\ \text{ em }\ X.$$

Assim,

$$|\nabla f^2(w_n)|^2\overset{*}{\rightharpoonup}|\nabla f^2(w)|^2+\mu\ \text{ e }\ |f(w_n)|^{2.2^*}\overset{*}{\rightharpoonup}|f(w)|^{2.2^*}+\nu, \tag{2.26}$$

no sentido das medidas de Radon, veja Willem [43, Seção 1.9, pag 26] para mais detalhes.

Usando o Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, veja [26], obtemos um conjunto J de índices, no máximo enumerável, sequências $(x_i)\subset\mathbb{R}^N$, (μ_i), $(\nu_i)\subset[0,+\infty)$, tais que

$$\nu=\sum_{i\in J}\nu_i\delta_{x_i},\ \mu\geq\sum_{i\in J}\mu_i\delta_{x_i},\ \text{e } S\nu_i^{\frac{2}{2^*}}\leq\mu_i,\ \forall i\in J \tag{2.27}$$

onde δ_{x_i} é a delta de Dirac de massa 1 em x_i.

Afirmamos que $J=\emptyset$. De fato, suponha por contradição que $J\neq\emptyset$ e fixemos $i\in J$. Seja $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$, tal que $\varphi\equiv1$ em B_1, $\varphi\equiv0$ em $\mathbb{R}^N\backslash B_2$ e $|\nabla\varphi|_{L^\infty}\leq2$. Defina,

$$\varphi_\rho=\varphi\left(\frac{x-x_i}{\rho}\right),\ \text{ com }\ \rho>0.$$

Sabemos que $\big(f(w_n)\varphi_\rho/f'(w_n)\big)$ é limitada em X, logo, $\Phi'_{\varepsilon^*}(w_n)\big(f(w_n)\varphi_\rho/f'(w_n)\big)=o_n(1)$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2 \quad &+ \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(w_n)}{f'(w_n)} \nabla w_n \nabla \varphi_\rho + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\varphi_\rho \\
&= \quad \int_{\Omega_\varepsilon} [q(f(w_n))f(w_n) + |f(w_n)|^{2.2^*}]\varphi_\rho \\
&+ \quad \int_{\Omega_\varepsilon^c} h(x, f(w_n))f(w_n)\varphi_\rho. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

De (q_{1^*}), (ii) de (q_{2^*}) e argumentos padrões, concluímos que

$$
\lim_{\rho \to 0^+} \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{f(w_n)}{f'(w_n)} \nabla w_n \varphi_\rho \right) = \lim_{\rho \to 0^+} \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\varphi_\rho = 0, \qquad (2.29)
$$

e

$$
\lim_{\rho \to 0^+} \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} q(f(w_n))f(w_n)\varphi_\rho = 0. \qquad (2.30)
$$

Similarmente, como $0 \leq h(x,s)s \leq \frac{1}{k} V(\varepsilon x)s^2$ em Ω_ε^c, temos

$$
\lim_{\rho \to 0^+} \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega_\varepsilon^c} h(x, f(w_n))f(w_n)\varphi_\rho = 0. \qquad (2.31)
$$

Assim, usando (2.28), (2.29), (2.30), (2.31) e o fato que $|\nabla f^2(w_n)|^2 \leq \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2$, obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (f^2(w_n))|^2 \varphi_\rho \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(w_n)|^{2.2^*}\varphi_\rho + o_{n,\rho}(1), \qquad (2.32)
$$

onde $o_{n,\rho}(1) \to 0$ quando $n \to +\infty$ e $\rho \to 0^+$.

Passando o limite de $n \to +\infty$ em (2.32) e depois com $\rho \to 0^+$, usando (2.26) e (2.27), concluímos que $\mu_i \leq \nu_i$. Note que por essa desigualdade e (2.27), podemos supor que $\mu_i > 0$, portanto $\nu_i > 0$. Desde que $S\nu_i^{\frac{2}{2^*}} \leq \mu_i$, temos $\nu_i \geq S^{\frac{N}{2}}$. Note que

$$\begin{aligned}
c_{\varepsilon^*} &= \Phi'_{\varepsilon^*}(w_n) - \frac{1}{4}\Phi'_{\varepsilon^*}(w_n)\Big(\frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\Big) + o_n(1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\Big)\Big]|\nabla w_n|^2\\
&+ \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n)\\
&+ \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\big[h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n))f(w_n) - 4H_{\varepsilon^*}(x, f(w_n))\big].
\end{aligned}$$

Recordando que $\Big(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\Big) \leq 2$, segue que

$$\begin{aligned}
c_{\varepsilon^*} &\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2.2^*}\Big)\int_{\Omega_\varepsilon} |f(w_n)|^{2.2^*}\\
&+ \frac{1}{4}\int_{\Omega_\varepsilon}\big[q(f(w_n))f(w_n) - 4Q(f(w_n))\big] - \int_{\Omega_\varepsilon^c} H_*(x, f(w_n)).
\end{aligned}$$

Por (q_{3^*}), (ii) de (h_{3^*}) e $k > 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
c_{\varepsilon^*} &\geq \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2k}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n) + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2.2^*}\Big)\int_{\Omega_\varepsilon} |f(w_n)|^{2.2^*} + o_n(1)\\
&\geq \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2.2^*}\Big)\int_{\Omega_\varepsilon} |f(w_n)|^{2.2^*} + o_n(1). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Afirmamos que $x_i \in \Omega_\varepsilon$. De fato, sem perda de generalidade suponha que, $x_i \in int(\Omega_\varepsilon^c)$. Escolhendo $\rho > 0$ suficientemente pequeno, tal que $supp\ \varphi_\rho \subset B_\rho(x_i) \subset \Omega_\varepsilon^c$, concluímos de (2.28), (2.29) e (2.30), que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\rho\Big(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\Big)|\nabla w_n|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon^c} h(x, f(w_n))f(w_n)\varphi_\rho + o_{n,\rho}(1),$$

passando o limite e usando (2.26) obtemos $\mu_i \leq 0$, o que é uma contradição. Assim, $x_i \in \Omega_\varepsilon$.

Lembrando que $\varphi_\rho \in [0,1]$ por (2.27), segue que

$$c_{\varepsilon^*} \geq \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2.2^*}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} |f(w_n)|^{2.2^*}\varphi_\rho + o_n(1).$$

Assim, fazendo $n \to +\infty$ e em seguida $\rho \to 0^+$, de (2.26) e (2.27) segue que

$$c_{\varepsilon^*} \geq \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2.2^*}\right)\nu_i \geq \frac{1}{2N} S^{\frac{N}{2}},$$

o que contradiz (2.25). Assim, concluímos que $J = \emptyset$. Por (2.26),

$$|f(w_n)|^{2.2^*} \to |f(w)|^{2.2^*} \text{ em } L^1_{Loc}(\mathbb{R}^N),$$

logo,

$$f(w_n) \to f(w) \text{ em } L^{2.2^*}_{Loc}(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $w_n \to w$ em $L^s_{Loc}(\mathbb{R}^N)$, para todo $s \in [1, 2^*)$, usando o crescimento subcrítico de $q(s)$ e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{B_R} h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)) f'(w_n) w_n \to \int_{B_R} h_{\varepsilon^*}(x, f(w)) f'(w) w.$$

Pelo item (ii) do Lema 2.5 e desde que $f'(w_n)w_n \leq f^2(w_n)$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} h_{\varepsilon^*}(x, f(w_n)) f'(w_n) w_n = 0,$$

assim,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h_*(x, f(w_n)) f'(w_n) w_n = \int_{\mathbb{R}^N} h_*(x, f(w)) f'(w) w. \tag{2.34}$$

Recorde que pelo item (iv) do Lema 2.5,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f(w_n) f'(w_n) w_n = \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f(w) f'(w) w. \tag{2.35}$$

Desde que $\Phi'_\varepsilon(w_n)\varphi = o_n(1)$, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, usando passagem ao limite e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f(w) f'(w) \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w)) f'(w) \varphi, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

por densidade, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f(w) f'(w) \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w)) f'(w) \varphi, \ \forall\, \varphi \in X. \tag{2.36}$$

Agora, usando (2.34), (2.36) com $\varphi = w$ e $\Phi'_\varepsilon(w_n) w_n = o_n(1)$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon x) f(w_n) f'(w_n) w_n \big] &= \int_{\mathbb{R}^N} h_\varepsilon(x, f(w)) f'(w) w + o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w|^2 + V(\varepsilon x) f(w) f'(w) w \big] + o_n(1), \end{aligned}$$

por (2.35), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + o_n(1). \tag{2.37}$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla w \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2, \tag{2.38}$$

por (2.37) e (2.38), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (w_n - w)|^2 \to 0. \tag{2.39}$$

Relembre que

$$\|w_n - w\|^2 \leq C \bigg[\Psi(w_n - w) + \Psi(w_n - w)^{\frac{2^*}{2}} \bigg],$$

onde

$$\Psi(w_n - w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (w_n - w))|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) |f^2(w_n - w)|,$$

portanto por (2.39) e pelo Lema 2.6, segue que

$$w_n \to w \ \text{ em } \ X,$$

assim a proprosição está provada. $\square$

O teorema a seguir garante a existência de solução do problema auxiliar (AP_{ε^*}) e nos fornece uma estimativa para tais soluções que nós ajudará a provar que a solução do problema auxiliar é também solução do problema reformulado (RP_{ε^*}) para $\varepsilon > 0$ pequeno.

Teorema 2.3. *Assuma que V satisfaz $(V_0), (V_1)$ e a função $q(s)$ satisfaz $(q_1^*) - (q_3^*)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ o problema auxiliar (AP_{ε^*}) possui uma solução w_ε. Além disso, e*

$$\Phi_{\varepsilon^*}(w_\varepsilon) = c_{\varepsilon^*} \quad e \quad \|w_\varepsilon\|^2 \le C(c_{\varepsilon^*} + c_{\varepsilon^*}^{\frac{2^*}{2}}), \tag{2.40}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de ε e c_ε^* é como em (2.9).

Demonstração. Usando o Lema 2.1, a Proposição 2.2 e o Teorema do Passo da Montanha, concluímos que o funcional Φ_ε^* possui um ponto crítico no nível

$$c_{\varepsilon^*} := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi_{\varepsilon^*}(\gamma(t)) < \frac{1}{2N} S^{\frac{N}{2}},$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) \in \Phi^{-1}((-\infty, 0]) \cap X_2\},$$

isto é, existe $w_\varepsilon \in X$, tal que $\Phi_{\varepsilon*}(w_\varepsilon) = c_\varepsilon$ e $\Phi'_{\varepsilon*}(w_\varepsilon) = 0$. Assim w_ε é solução de $(AP_{\varepsilon*})$.

Agora, mostraremos que a segunda relação em (2.40) ocorre. De fato, seja $\widetilde{w}_\varepsilon = f(w_\varepsilon)/f'(w_\varepsilon)$, uma vez que $\Phi_\varepsilon(w_\varepsilon) - \frac{1}{2\theta}\Phi'_\varepsilon(w_\varepsilon)\widetilde{w}_\varepsilon = c_{\varepsilon^*}$, por (i) de (h_{2^*}) temos

$$\begin{aligned} c_{\varepsilon^*} \quad &\ge \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\left(1 + \frac{2f^2(w_\varepsilon)}{1+2f^2(w_\varepsilon)}\right)\right]|\nabla w_\varepsilon|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_\varepsilon) \\ &+ \quad \frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon} \big[h_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))f(w_\varepsilon) - 2\theta H_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))\big]. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $1 + \frac{2f^2(w_\varepsilon)}{1+2f^2(w_\varepsilon)} \le 2$ e (ii) da relação (h_{2^*}) obtemos

$$\begin{aligned} c_\varepsilon^* \quad &\ge \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_\varepsilon) \\ &+ \quad \frac{1}{2\theta}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon} [h_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))f(w_\varepsilon) - 2\theta H_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon))] \\ &\ge \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\left[\int_{\mathbb{R}^N} \big[|\nabla w_\varepsilon|^2 dx + V(\varepsilon x) f^2(w_\varepsilon)\right] - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega\varepsilon} H_\varepsilon(x, f(w_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Desde que $k = 2\theta/(\theta - 2)$, por (ii) de (h_{2^*}), o Lema 1.1 e a última desigualdade, temos

$$c_{\varepsilon^*} \quad \ge \quad \frac{1}{2k}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2 + C\int_{\{|w_\varepsilon|\le 1\}} V(\varepsilon x) w_\varepsilon^2 + \int_{\{|w_\varepsilon|>1\}} V(\varepsilon x) f^2(w_\varepsilon)\right], \tag{2.41}$$

para alguma constante $C > 0$. Usando (2.41), (V_2) e a inclusão $H^1(\mathbb{R}^N) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, otemos

$$\begin{aligned}
\int_{\{|w_\varepsilon|>1\}} V(\varepsilon x)|w_\varepsilon|^2 &\leq V_\infty \int_{\{|w_\varepsilon|>1\}} |w_\varepsilon|^{2*} \\
&\leq V_\infty S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_\varepsilon|^2\right)^{\frac{2^*}{2}} \\
&\leq V_\infty S(2kc_{\varepsilon^*})^{\frac{2^*}{2}}. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Combinado (2.41) e (2.42), obemos (2.40).

$\square$

Lema 2.7. *Seja w_ε a solução de $(AP_{\varepsilon*})$ obtida no Teorema 2.3. Então, existe uma constante $M > 0$ independente de ε, tal que*

$$\|w_\varepsilon\| \leq M, \ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Demonstração. De fato, é suficiente notar que da Proposição 2.2 temos,

$$c_{\varepsilon^*} < \frac{1}{2N} S^{\frac{N}{2}}, \ \forall\, \epsilon > 0,$$

assim, o resultado segue de (2.40). $\square$

Lema 2.8. *Sejam w_ε a solução de $(AP_{\varepsilon*})$ obtida no Teorema 2.3 e sequências ε_n 0 e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. A sequência $(v_n) \subset X$ definida por*

$$v_n(x) := w_{\varepsilon_n}(x + x_n)$$

pertence a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ e possui uma subsequência que converge uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ para uma função $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$. Além disso, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que, $v(x) \leq C_1 \exp\big(-C_2|x|\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração. Similar à prova do Lema 1.10.

$\square$

2.3 Existência de solução para (RP_{ε^*}) com V na Classe 1

Nesta seção, assumiremos que o potencial V pertence a Classe 1, isto é, V satisfaz $(V_0)-(V_2)$ e mostraremos que a solução do problema auxiliar (AP_{ε^*}) é também solução do problema $(RP_{\varepsilon *})$. Mais precisamente, assumindo as hipóteses $(V_0),(V_1)$ e a hipótese adicional (V_2) sobre V que nos permitirá provar que a solução do problema (AP_{ε^*}), encontrada no Teorema 2.3, verifica $w_\varepsilon(x)\leq f^{-1}(a)$ em $\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\varepsilon$ e então, w_ε será também uma solução de (RP_{ε^*}).

Assumiremos, nesta seção, que

$$\Omega_\varepsilon = B_{R_\varepsilon}(0) \ \text{ onde } \ R_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Desde que $w_\varepsilon\in C(\mathbb{R}^N)$, pelo Princípio do máximo, temos

$$m_\varepsilon := \max_{\partial B_{R_\varepsilon}(0)} w_\varepsilon(x) > 0$$

Lema 2.9. *Assuma que V satisfaz as condições $(V_0)-(V_2)$ e a função $q(s)$ satisfaz as condições $(q_{1^*})-(q_{3^*})$. Então,*

$$m_\varepsilon \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ \varepsilon\to 0^+.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existiriam $\delta_0>0$ e uma sequência $(\varepsilon_n)\subset(0,1)$ tais que

$$m_{\varepsilon_n}\geq\delta_0>0 \ \text{ e } \ \varepsilon_n\to 0.$$

Por simplicidade de notação, denotaremos $m_n := m_{\varepsilon_n}$ e $w_n := w_{\varepsilon_n}$. Desde que $w_n\in C(\mathbb{R}^N)$, existe $x_n\in\partial B_{R_{\varepsilon_n}}(0)$, tal que

$$w_n(x_n) = \max_{\partial B_{R_{\varepsilon_n}}(0)} w_n(x),$$

assim, $w_n(x_n)\geq\delta_0$. Usando o Lema 2.7 e a invariancia do $\mathbb{R}^N$ por translação, concluímos que a função $v_n := w_n(. + x_n)$ satisfaz $v_n \in C(\mathbb{R}^N) \cap X$ e

$$\|v_n\| \leq M, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

logo, (v_n) é limitada em X, assim, a menos de subsequência, obtemos

$$v_n \rightharpoonup v \;\; \text{in} \;\; X.$$

Além disso, pelo Lema 2.8, a menos de subsequência, v_n converge uniformente para v sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ e $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$v(0) = \lim v_n(0) = \lim w_n(x_n) \geq \delta_0,$$

o que mostra que $v \not\equiv 0$.

Note que pela definição de w_n e v_n, fazendo a mudança de variável $z = x + x_n$ no problema $(AP_{\varepsilon *})$, temos

$$\begin{cases} -\Delta v_n + V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) = h_n^*(x, f(v_n)) f'(v_n) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v_n > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \; v_n \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{AP_{ε_n}}$$

onde denotamos $h_n^*(x, s) := h_{\varepsilon_n}^*(x, s)$ para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Pela condição (V_1), a sequência $V(\epsilon_n x_n)$ é limitada em $\mathbb{R}$, logo, a menos de subsequência,

$$V(\varepsilon_n x_n) \to \alpha_1 \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}, \tag{2.43}$$

para algum $\alpha_1 \geq V_0 > 0$.

Desde que (v_n) é solução de (AP_{ε_n}), para cada $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} h_n^*(x, f(v_n)) f'(v_n) \varphi = o_n(1). \tag{2.44}$$

Passando o limite de $n \to \infty$, por um argumento de densidade , concluímos que v é solução não trivial de

$$\begin{cases} \Delta v - \alpha_1 f(v)f'(v) + \widetilde{h}^*(x, f(v))f'(v) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ v \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ e } v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{2.45}$$

onde $\widetilde{h}^*(x, s) = \widetilde{\chi}(x)q(s) + (1 - \widetilde{\chi}(x))\widetilde{q}(s)$ para alguma $\widetilde{\chi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Por um argumento similar ao da prova do Lema 2.8 concluímos que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, assim, desde que (por uma cálculo direto e (1.2)) $\nabla[(ff')(v)] = (f')^2(v)\nabla v + f(v)f''(v)\nabla v$ e $f''(v) = -2f(v)[f'(v)]^4$, por (2) e (3) do Lema 1.1 temos $(ff')(v) \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, por densidade, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, existe $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\varphi_j - f(v)f'(v)\| \leq \frac{1}{j},$$

ou seja,

$$\|\varphi_j - f(v)f'(v)\| = o_j(1). \tag{2.46}$$

Escolhendo $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ como função teste em (2.44), otemos

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(v_n) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} &- \int\limits_{\mathbb{R}^N} h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\ &= o_n(1). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Desde que $v_n \rightharpoonup v$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ e *supp* φ é compacto, usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) + o_n(1) \tag{2.48}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_n(x, f(v_n)) f'(v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{h}(x, f(v)) f'(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + o_n(1). \tag{2.49}$$

Agora, mostraremos que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]f(v_n)f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|=0. \tag{2.50}$$

De fato, observe que por (2.43), (2.47) e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]f(v_n)f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} &= \int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)f(v_n)f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon_n x_n)f(v_n)f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}h_n(x,f(v_n))f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\alpha_1 f(v)f'(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+o_n(1).\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo v solução de (2.45), temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N}\alpha_1 f(v)f'(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)-\int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{h}(x,f(v))f'(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i},$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]f(v_n)f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} &= - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}h_n(x,f(v_n))f'(v_n)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\widetilde{h}(x,f(v))f'(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+o_n(1).\end{aligned}$$

Combinado (2.48), (2.49) e a igualdade acima, concluímos que a afirmação (2.50) é verdadeira.

Note que usando (2.50), o fato de φ_j ter suporte compacto, $f(v)f'(v)=(f(v)f'(v)-f(v_n)f'(v_n))+f(v_n)f'(v_n)$ e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, conluímos que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]f(v)f'(v)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|=0, \tag{2.51}$$

assim, notando também que $\varphi_j=(\varphi_j-f(v)f'(v))+f(v)f'(v)$, usando (2.46), (2.51) e a desigualdade

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big[V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big]\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|\leq &\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\big(V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-V(\varepsilon_n x_n)\big)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big]^2\right)^{\frac{1}{2}}\times\\ &\times\ |\varphi_j-f(v)f'(v)|_{L^2(\mathbb{R}^N)}+o_n(1),\end{aligned}$$

segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n+)-V(\varepsilon_n x_n)\big)\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|=o_j(1). \tag{2.52}$$

Seja $r>0$ tal que *supp* $\varphi_j\subset B_r(0)$, pela fórmula de integração por partes,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)\varphi_j^2dx=\int_{B_r(0)}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)\varphi_j^2dx=-\int_{B_r(0)}V(\varepsilon_n x_n+\varepsilon_n x_n)2\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,$$

então, por (2.52) obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)\varphi_j^2\Big|=o_j(1). \tag{2.53}$$

Agora, mostraremos que (V_1) e (2.53), implicam em

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\Big|=o_j(1). \tag{2.54}$$

De fato, note que

$$\Big|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\Big|=\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\Big]|\varphi_j|^2-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)|\varphi_j|^2\Big|,$$

Pela hipótese (V_1), a sequência $\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)$ é limitada em $\mathbb{R}$, logo, existe $\alpha_i'\in\mathbb{R}$, tal que, a menos de subsequência,

$$\alpha_i' = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n),$$

com isso,

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\right]|\varphi_j(x)|^2 \to 0 \quad \text{q.t.p em} \quad \mathbb{R}^N \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Desde que a função $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, segue pelo Teorema da convergência dominada de lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\right]|\varphi_j|^2 = 0,$$

assim, usando este limite e (2.53) obtemos (2.54).

Por (2.46), $|\varphi_j|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = |f(v)f'(v)|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + o_j(1)$, assim, uma vez que $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e $(ff')(t) > 0$ para todo $t > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|\varphi_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq \frac{1}{2}|f(v)f'(v)|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ \forall\, j \geq j_0.$$

Notando que

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n) = \frac{1}{|\varphi_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_j|^2\Big),$$

obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\right| \leq \frac{2}{|f(v)f'(v)|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_j|^2\right|, \ \ \forall\, j \geq j_0,$$

assim, de (2.54) segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x_n)\right| = o_j(1).$$

Usando essa convergência e (2.43), obtemos

$$\nabla V(\varepsilon_n x_n) \to 0 \ \text{ e } \ V(\varepsilon_n x_n) \to \alpha_1. \tag{2.55}$$

Portanto, de (2.55), conluímos que $(\varepsilon_n x_n) \subset \mathbb{R}^N$ é uma sequência $(PS)_{\alpha_1}$ para V, o que gera uma contradição já que por (V_2) deveria existir uma subsequência convergente de $(\varepsilon_n x_n)$, entretanto,

$$|\varepsilon_n x_n| = R_{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \to \infty \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Portanto, o lema é verdadeiro. $\square$

Agora, estamos em condição de enunciar e provar o primeiro resultado principal desse capítulo.

Proposição 2.3. *Suponha que V pertença a Classe 1 e a função $q(s)$ satisfaz $(q_{1^*}) - (q_{3^*})$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que, o problema (RP_{ε^*}) possui uma solução fraca w_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Demonstração. Desde que o potencial V satisfaz (V_0), (V_1) pelo Teorema 2.3 existe uma solução fraca w_ε do problema auxiliar (AP_{ε^*}). Uma vez que V também satisfaz (V_2), pelo Lema 2.9, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$\max_{x \in \partial B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} w_\varepsilon(x) < f^{-1}(a) \ \ \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

onde a é dado na definição de (2.1).

Assim, está bem definida a função mensurável

$$\widetilde{w}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } \ B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0), \\ (w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) & \text{em } \ \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0), \end{cases}$$

além disso, $\widetilde{w}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Escolhendo $\widetilde{w}_\varepsilon$ como função teste e notando que $\nabla(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+ \nabla w_\varepsilon > 0$ porque

$$\nabla(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) = \begin{cases} \nabla w_\varepsilon \ \text{ se } \ w_\varepsilon > f^{-1}(a), \\ 0 \qquad \text{ se } \ w_\varepsilon \leq f^{-1}(a), \end{cases}$$

então,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} V(\varepsilon x) f(w_\varepsilon) f'(w_\varepsilon)(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+ \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} h_\varepsilon^*(x, f(w_\varepsilon)) f'(w_\varepsilon)(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+.$$

Desde que por construção $h_\varepsilon^*(x,s) \leq \dfrac{V_0}{k}s$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} \left[V(\varepsilon x) - \frac{V_0}{k}\right] f(w_\varepsilon) f'(w_\varepsilon)(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+ \leq 0,$$

sendo $k > 1$, temos $\big[V(\varepsilon x) - V_0/k\big] > 0$ e $f(w_\varepsilon)f'(w_\varepsilon) > 0$, assim, concluímos que

$$(w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) = 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0),$$

logo,

$$w_\varepsilon(x) \leq f^{-1}(a) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0).$$

Portanto, a solução w_ε do problema auxiliar truncado (AP_{ε^*}), obtida pelo Teorema 2.3, é solução do problema (RP_{ε^*}) para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. □

2.4 Existência de solução para (RP_{ε^*}) com V na Classe 2

Assumindo que o potencial V pertence a Classe 2, isto é, V satisfaz $(V_0), (V_1)$ e (V_3), mostraremos que a solução do problema auxiliar (AP_{ε^*}) é também solução do problema (RP_{ε^*}). Mais precisamente, a hipótese adicional (V_3) sobre V nos permitirá provar que a solução do problema (AP_{ε^*}), encontrada no Teorema 2.3, verifica $w_\varepsilon(x) < f^{-1}(a)$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$ e então, w_ε será também uma solução de (RP_{ε^*}).

Seja o domínio Λ da condição (V_3). Assumiremos que

$$\Omega = \Lambda$$

e que w_ε é a solução do problema auxiliar (AP_{ε^*}) obtida no Teorema 2.3.

Semelhante a seção anterior, nosso objetivo é provar que existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$w_\varepsilon(x) \leq f^{-1}(a) \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon, \;\forall\; \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

pois isso mostra que w_ε é solução de (RP_{ε^*}).

Lema 2.10. *Suponha que V satisfaz $(V_0),(V_1),(V_3)$ e a função $q(s)$ satisfaz $(q_{1^*})-(q_{3^*})$. Definindo*

$$m_\varepsilon = \max_{x\in\partial\Lambda_\varepsilon} w_\varepsilon(x) > 0,$$

temos

$$m_\varepsilon \to 0 \ \ \textit{quando} \ \ \varepsilon \to 0.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existiriam $\delta_0 > 0$ e uma sequência $(\varepsilon_n) \subset (0,1)$, tais que

$$m_\varepsilon \geq \delta_0 > 0 \quad \text{e} \quad \varepsilon_n \to 0,$$

ou seja,

$$\max_{x\in\partial\Lambda_{\varepsilon_n}} w_{\varepsilon_n}(x) \geq \delta_0 > 0,$$

onde $w_{\varepsilon_n} \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $w_{\varepsilon_n} \in C(\mathbb{R}^N)$ e $\partial\Lambda_{\epsilon_n}$ um compacto de $\mathbb{R}^N$, existe $x_n \in \partial\Lambda_{\varepsilon_n}$ tal que

$$w_{\varepsilon_n}(x_n) = \max_{x\in\partial\Lambda_{\varepsilon_n}} w_{\varepsilon_n}(x).$$

Podemos usar argumentos semelhantes aos da demonstração do Lema 2.9, para obter uma sequência $(\varepsilon_n x_n) \subset \partial\Lambda$, tal que

$$\nabla V(\varepsilon_n x_n) \to 0.$$

Sendo $\partial\Lambda$ compacto de $\mathbb{R}^N$, existe $x_0 \in \partial\Lambda$, tal que, a menos de subsequência,

$$\varepsilon_n x_n \to x_0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Desde que V é de classe $C^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, temos

$$x_0 \in \partial\Lambda \ \text{ e } \ \nabla V(x_0) = 0,$$

o que contradiz a condição (V_3), isto é, o fato de V não possui ponto crítico em $\partial\Lambda$. □

Agora, estamos em condições de enunciar e provar o segundo resultado principal desse capítulo.

Proposição 2.4. *Suponha que V pertença a Classe 2 e a função $q(s)$ satisfaz $(q_{1^*}) - (q_{3^*})$. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que, o problema (RP_{ε^*}) possui uma solução fraca w_ε para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Demonstração. Assumindo (V_0), (V_1), $(q_{1^*}) - (q_{3^*})$, segue do Teorema 2.3 que existe uma solução fraca w_ε do problema auxiliar (AP_{ε^*}). Desde que (V_3) ocorre, pelo Lema 2.10, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que

$$\max_{x \in \partial B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}(0)} w_\varepsilon(x) < f^{-1}(a), \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

onde a é dado na definição de (2.1).

Assim, está bem definida a função mensurável

$$\widetilde{w}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } \Lambda_\varepsilon, \\ (w_\varepsilon - f^{-1}(a))_+(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon, \end{cases}$$

além disso, $\widetilde{w}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Os mesmos argumentos da demonstração da Proposição 2.3, mostram que $w_\varepsilon(x) \leq f^{-1}(a)$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon$. Portanto, a solução w_ε do problema auxiliar truncado (AP_{ε^*}), obtida pelo Teorema 2.3, é solução do problema (RP_{ε^*}), para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. $\square$

Capítulo

3

Existência de solução positiva para um sistema de equações de Schrödinger

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para o seguinte sistema de equações de Schrödinger quasilineares

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + W(x)u - \kappa\varepsilon^2\Delta(u^2)u = Q_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta v + V(x)v - \kappa\varepsilon^2\Delta(v^2)v = Q_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u,v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, u,v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{S}$$

onde $\mathbb{N} \geq 3$, $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$, $W, V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que pertencem a duas classes de potenciais que serão detalhadas a seguir, $Q_u, Q_v : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ são funções contínuas que denotam derivadas parciais da função $Q : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ que é de classe C^1 e $p-$homogênea.

Note que por uma simples mudança de variável, o sistema (S) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + W(\varepsilon x)u - \kappa\Delta(u^2)u = Q_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(\varepsilon x)v - \kappa\Delta(v^2)v = Q_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u,v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{S_ε}$$

Essa classe de sistema está relacionado a diversas aplicações em Hidrodinâmica, Ferromagnetismo de Heidelberg, Teoria de Magnus, Teoria da Matéria Condensada e Mecânica Quântica Dissipativa.

Levando em consideração os possíveis valores de κ as hipóteses sobre os potenciais e os tipos de não-linearidades, encontramos na literatura vários trabalhos que abordam a existência de solução para o sistema (S), veja por exemplo [11, 12, 13, 17, 37] para $\kappa \neq 0$.

Em [4], Alves estuda a existência e concentração de solução para o seguinte sistema derivado de (S) com $\kappa = 0$,

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + W(x)u = Q_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta v + V(x)v = Q_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{S'}$$

onde as funções $W, V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são Hölder contínuas satisfazendo $W(x), V(x) \geq \alpha > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e a hipótese:

($\mathcal{V}$) Existe um conjunto aberto e limitado $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \Lambda$ e $\rho > 0$ tal que $W(x), V(x) \geq \rho$, para todo $x \in \partial\Lambda$ e $W(x_0), V(x_0) < \rho$.

Em [37], Severo e Silva usam o método variacional em um adequado espaço de Orlicz para estudar um sistema do tipo (S) com $\kappa = 1$ e as geometrias sobre os potenciais W e V introduzidas por Bartsch e Wang [10], que permite contornar a falta de compacidade do problema.

Recentemente, em [9] Arruda-Figueiredo e Nascimento consideram as duas classes de potenciais introduzidas por Alves em [3] e mostram um resultado de existência de solução para o sistema (S').

Motivados por estes trabalhos, e principalmente por [3], [4], [9], [28] e [37], nós estudamos o sistema (S) para $\kappa = 1$ e com as geometrias sobre os potenciais consideradas nos Capítulos 1 e 2, que foram introduzidas por Alves [3] no estudo do caso escalar com $\kappa = 0$. Diremos que o potencial $\mathcal{V}$ pertence a **Classe 1** quando verifica $(\mathcal{V}_0), (\mathcal{V}_1)$ e $(\mathcal{V}_2)$ e que pertence a **Classe 2** quando verifica $(\mathcal{V}_0), (\mathcal{V}_1)$ e $(\mathcal{V}_3)$. Mais precisamente:

($\mathcal{V}_0$) Existem $\mathcal{V}_\infty, \mathcal{V}_0 > 0$ tal que $\mathcal{V}_0 \leq \mathcal{V}(x) \leq \mathcal{V}_\infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, onde $\mathcal{V}_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V}(x)$.

$(\mathcal{V}_1)$ $\mathcal{V} \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $\mathcal{V}, \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^N$, $\forall\, i,j \in \{1,2,3,\ldots,N\}$.

$(\mathcal{V}_2)$ $\mathcal{V}$ satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, tal que $\mathcal{V}(x_n)$ é limitada e $\nabla \mathcal{V}(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente.

$(\mathcal{V}_3)$ Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla \mathcal{V}\ (x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

Agora, iremos apresentar as hipóteses sobre a função Q. Seja $\mathbb{R}^2_+ := [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, assumiremos que a não linearidade $Q \in C^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$ é p-homogênea com crescimento subcrítico. Mais precisamente, nossas hipóteses sobre Q são:

(Q_0) Existe $p \in (4, 2.2^*)$, tal que $Q(tu,tv) = t^p Q(u,v)$ para todo $t > 0, (u,v) \in \mathbb{R}^2_+$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $\mathbb{N} \geq 3$,

(Q_1) Existe $C > 0$, tal que $|Q_u(u,v)| + |Q_v(u,v)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})$ para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$;

(Q_2) $Q_u(0,1) = 0$, $Q_v(1,0) = 0$;

(Q_3) $Q_u(1,0) = 0$, $Q_v(0,1) = 0$;

(Q_4) $Q(u,v) > 0$ para cada $u, v > 0$;

(Q_5) $Q_u(u,v)$, $Q_v(u,v) \geq 0$ para cada $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$.

Como Q é uma função homogênea de grau $p > 4$, então

1. $pQ(u,v) = uQ_u(u,v) + vQ_v(u,v)$;

2. ∇Q é uma função homogênea de grau $p-1$.

Exemplo 3.1. *Um protótipo de função Q que satisfaz $(Q_1) - (Q_5)$ é*

$$H(u,v) := a|u|^p + \sum_{\alpha_i + \beta_i = p} b_i |u|^{\alpha_i} |v|^{\beta_i} + c|v|^p,$$

onde $a, b_i, c \in \mathbb{R}\, \alpha_i + \beta_i = p, \alpha_i, \beta_i \geq 1, i \in \mathcal{I}$ com $\mathcal{I}$ denotando um subconjunto finito de $\mathbb{N}$.

Definição 3.1. *Dizemos que o par* $(u,v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *é uma solução (distribuicional) para* (S) *se* $u, v > 0$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (1+2u^2)\nabla u \nabla \varphi + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 u\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} W(\varepsilon x) u\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} Q_u(u,v)\varphi, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \\ \\ \varepsilon^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (1+2v^2)\nabla v \nabla \phi + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 v\phi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) v\phi = \int_{\mathbb{R}^N} Q_u(u,v)\phi, \ \forall\, \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 3.1. *Suponha que* W *e* V *satisfaçam* $(\mathcal{V}_0)$ *e que* W *ou* V *pertença a Classe 1 ou 2. Além disso, suponha que* Q *satisfaz* $(Q_0) - (Q_5)$*. Então, existe* $\varepsilon_0 > 0$*, tal que o sistema* (S) *possui uma solução para cada* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$*. Além disso,* $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e existem constantes* $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ *satisfazendo*

$$u_\varepsilon(x) \leq C_1 \exp\big(-C_2 \big|\frac{x}{\varepsilon}\big|\big) \quad e \quad v_\varepsilon(x) \leq C_3 \exp\big(-C_4 \big|\frac{x}{\varepsilon}\big|\big), \ \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 3.1. *O resultado presente no Teorema 3.1 generaliza os resultados de Arruda-Figueiredo e Nascimento [9, Teorema 1.1] em pelo menos dois aspectos: O primeiro é que consideramos* $\kappa \neq 0$*, o que torna as estimativas (sobre o funcional e a solução do problema auxiliar) totalmente diferente quando comparada ao caso* $\kappa = 0$*. E o segundo, que ao contrário de [9, Teorema 1.1], não exigimos que os dois potencias* V *e* W *estejam na mesma Classe 1 ou 2. Exigimos somente que um dos potencias pertença a uma dessas classes e que o outro verifique* $(\mathcal{V}_0)$*.*

3.2 A reformulação do sistema e o sistema auxiliar

Pela condição $(\mathcal{V}_0)$ podemos considerar o seguinte subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$

$$X = \left\{ (w,z) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x) w^2 + V(\varepsilon x) z^2] < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert quando munido da norma

$$\|(w,z)\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + |\nabla z|^2 + W(\varepsilon x)u^2 + V(\varepsilon x)v^2\right].$$

O funcional natural associado a (S_ε) é dado por

$$J_\varepsilon(u,v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} [(1+2u^2)|\nabla u|^2 + (1+2v^2)|\nabla v|^2 + W(\varepsilon x)u^2 + V(\varepsilon x)v^2] - \int\limits_{\mathbb{R}^N} Q(\varepsilon x, u, v),$$

que não está bem definido em X porque não podemos garantir que os termos $u^2|\nabla u|^2$ e $v^2|\nabla v|^2$ pertençam $L^1(\mathbb{R}^N)$ para $(u,v) \in X$. Para contornar essa dificuldade, vamos considerar a mudança de variável introduzida por Colin e Jeanjean em [27] e por Liu, Wang e Wang em [25]. Para tal, considere $w = f^{-1}(u)$ e $z = f^{-1}(v)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como no capítulo 1, isto é:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1+2f^2(t))^{\frac{1}{2}}} \quad \text{em} \quad [0,+\infty) \\ f(t) &= -f(-t) \quad \text{em} \quad (-\infty, 0]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Após a mudança de variável, definindo $I_\varepsilon(w,z) := J_\varepsilon(f(w), f(z))$, obtemos o seguinte funcional

$$I_\varepsilon(w,z) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + |\nabla z|^2 + W(\varepsilon x)f(w)^2 + V(\varepsilon x)f(z)^2] - \int\limits_{\mathbb{R}^N} Q(\varepsilon x, f(w), f(z)), \tag{3.2}$$

o qual está bem definido em X, mais precisamente, I_ε é classe $C^1(X,\mathbb{R})$ (devido as hipóteses $(\mathcal{V}_0), (Q_1)$ e as propriedades da função f) com derivada de Gateuax dada por

$$\begin{aligned} I'_\varepsilon(w,z)(\varphi,\phi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla\varphi + \nabla z \nabla\phi + \int\limits_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x)f(w)f'(w)\varphi + V(\varepsilon x)f(z)f'(z)]\phi] \\ &- \int\limits_{\mathbb{R}^N} [Q_w(\varepsilon x, f(w), f(z))f'(w)\varphi + Q_z(\varepsilon x, f(w), f(z))f'(z)\phi], \end{aligned} \tag{3.3}$$

para todo $(w,z), (\varphi,\phi) \in X$. Assim, $(w,z) \in X$ é ponto crítico do funcional I_ε se, e somente se, (w, z) é solução fraca do seguinte sistema reformulado:

$$\begin{cases} -\Delta w + W(\varepsilon x) f(w) f'(w) = Q_w(\varepsilon x, f(w), f(z)) f'(w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta z + V(\varepsilon x) f(z) f'(z) = Q_z(\varepsilon x, f(w), f(z)) f'(z) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w, z > 0 \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{RS_ε}$$

Proposição 3.1. *Se* $(w, z) \in X \cap [L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)]^2$ *é ponto crítico de* I_ε*, então* $(u, v) = (f(w), f(z))$ *é solução para* (S_ε).

Demonstração. Veja [37, Proposição 2.5]. □

Para aplicarmos o método variacional e encontar solução do sistema (S_ε) iremos adaptar, para o nosso caso, o método o Método de penalização de del Pino e Felmer, veja [28], seguindo as ideias de Alves [4].

Desde que estamos interessados em obter solução positiva para (S_ε), iremos assumir que

$$Q(u, v) = 0 \text{ se } u \leq 0 \text{ ou } v \leq 0. \tag{3.4}$$

Fixemos $a > 0$, seja $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não crescente de classe C^1 verificando

$$\eta \equiv 1 \text{ em } (-\infty, a], \eta \equiv 0 \text{ em } [5a, +\infty), \eta' \leq 0 \text{ e } |\eta'| \leq \frac{C}{a}, \tag{3.5}$$

onde a constante C é independente de a. Usando a função η, definimos $\widehat{Q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$\widehat{Q}(s, t) = \eta(|(s, t)|) Q(s, t) + [1 - \eta(|(s, t)|)] A(s^2 + t^2), \tag{3.6}$$

onde

$$A := \max \left\{ \frac{Q(s, t)}{s^2 + t^2} : (s, t) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq |(s, t)| \leq 5a \right\}. \tag{3.7}$$

Observe que $A > 0$ e $A \to 0$ quando $a \to 0^+$. Assim, podemos assumir que,

$$A < \frac{1}{4} \min\{W_0, V_0\},\ W(x) \geq W_0 > 0 \ \text{ e } \ V(x) \geq V_0 > 0, \tag{3.8}$$

onde W_0, V_0 são obtidos pela hipótese $(\mathcal{V}_0)$. Agora, fixado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, definimos a função $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$H(x,s,t) = \chi_\Omega(x)Q(s,t) + [1-\chi_\Omega(x)]\widehat{Q}(s,t), \tag{3.9}$$

onde χ_Ω denota a função característica de Ω.

Lema 3.1. *A função H e suas derivadas H_s e H_t satisfazem as seguintes propriedades:*

(H_1) $pH(x,s,t) = sH_s(x,s,t) + tH_t(x,s,t)$ *para cada* $x \in \Omega$.

(H_2) $2H(x,s,t) \leq sH_s(x,s,t) + tH_t(x,s,t)$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega$.

(H_3) *Fixado* $k = \dfrac{4p}{p-2}$ *podemos escolher* $a > 0$ *suficientemente pequeno tal que*

$$sH_s(x,s,t) + tH_t(x,s,t) \leq \frac{1}{k}[W(x)s^2 + V(x)t^2] \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega$$

e

$$\frac{|H_s(x,s,t)|}{a}, \frac{|H_t(x,s,t)|}{a} \leq \frac{1}{4}\min\{W_0, V_0\} \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega.$$

Demonstração. Veja [4, Lema 2.2]. □

Nosso objetivo agora é estudar a existência de solução para o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta w + W(\varepsilon x)f(w)f'(w) = H_w(\varepsilon x, f(w), f(z))f'(w) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta z + V(\varepsilon x)f(z)f'(z) = H_z(\varepsilon x, f(w), f(z))f'(z) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w, z > 0 \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{AS_ε}$$

Observação 3.2. *Se (w,z) é solução de (AS_ε) verificando $|(f(w(x)), f(z(x)))| \leq a, \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\varepsilon$, então (w,z) será solução de (RS_ε), onde $\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x \in \Omega\}$. Assim, nosso objetivo é obter solução de (AS_ε) com esta propriedade.*

Associado ao sistema (AS_ε) definimos, sobre X, o seguinte funcional

$$\Phi_\varepsilon(w,z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + |\nabla z|^2 + W(\varepsilon x)f^2(w) + V(\varepsilon x)f^2(z)] - \int_{\mathbb{R}^N} H(\varepsilon x, f(w), f(z)). \tag{3.10}$$

Sob a condição (Q_1) da não linearidades Q e $(\mathcal{V}_1)$ sobre W e V, é possível mostrar que o funcional Φ_ε é de classe C^1 com derivada de Gateaux dada por

$$\begin{aligned}\Phi'_\varepsilon(w,z)(\varphi,\phi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} [\nabla w \nabla \varphi + \nabla z \nabla \phi] + \int\limits_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x) f(w) f'(w)\varphi + V(\varepsilon x) f(z) f'(z)\phi] \\ &- \int\limits_{\mathbb{R}^N} [H_w(\varepsilon x, f(w), f(z)) f'(w)\varphi + H_z(\varepsilon x, f(w), f(z)) f'(z)\phi],\end{aligned} \tag{3.11}$$

para quaisquer $(w,z),(\varphi,\phi) \in X$. Portanto, os pontos críticos de Φ_ε são exatamente as soluções fracas de (AS_ε).

Para cada $\rho > 0$, considere o conjunto

$$\Sigma_\rho = \big\{(w,z) \in X : \ \Psi(w,z) = \rho^2\big\}, \tag{3.12}$$

onde

$$\Psi(w,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 + |\nabla z|^2 + W(\varepsilon x) f(w)^2 + V(\varepsilon x) f(z)^2]. \tag{3.13}$$

Desde que Ψ é contínua, segue que Σ_ρ é um subconjunto fechado em X que desconecta X em

$$X_1 := \{(w,z) \in X : \ \Psi(w,z) > \rho^2\} \quad \text{e} \quad X_2 := \{(w,z) \in X : \ \Psi(w,z) < \rho^2\}.$$

O próximo lema garante que o funcional Φ_ε satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 3.2. *O funcional Φ_ε satisfaz as seguintes condições:*

(i) Existem constantes $\rho, \alpha > 0$, tais que $\Phi_\varepsilon(w,z) \geq \alpha, \ \forall \ (w,z) \in \Sigma_\rho$.

(ii) Para todo $\varepsilon \in (0,1]$, existe $(e_1,e_2) \in X_2$ tal que $\Phi_\varepsilon(e_1,e_2) \leq 0$.

Demonstração. Usando (H_1), (H_2) e (H_3), obtemos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} H(\varepsilon x, f(w), f(z)) \leq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} H(\varepsilon x, f(w), f(z)) + \frac{1}{2k} \int\limits_{\mathbb{R}^N/\Omega_\varepsilon} [W(\varepsilon x) f(w)^2 + V(\varepsilon x) f(z)^2],$$

por (3.9) e (Q_2) temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} H(\varepsilon x, f(w), f(z)) \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^N} (|f^2(w)|^{\frac{p}{2}} + |f^2(z)|^{\frac{p}{2}}) + \frac{1}{2k} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon} [W(\varepsilon x) f(w)^2 + V(\varepsilon x) f(z)^2]. \tag{3.14}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} H(\varepsilon x, f(w), f(z)) &\leq C \left(\int\limits_{R^N} |f^2(w)| \right)^{\frac{\sigma p}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f^2(w)|^{2^*} \right)^{1-\frac{\sigma p}{2}} + C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f^2(z)| \right)^{\frac{\sigma p}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f^2(z)|^{2^*} \right)^{1-\frac{\sigma p}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{2k} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon} [W(\varepsilon x) f(w)^2 + V(\varepsilon x) f(z)^2] \\
&\leq C\rho^{\sigma p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(w))|^2 \right)^{(1-\frac{\sigma p}{2})\frac{2^*}{2}} + C\rho^{\sigma p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(z))|^2 \right)^{(1-\frac{\sigma p}{2})\frac{2^*}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{2k} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon} [W(\varepsilon x) f(w)^2 + V(\varepsilon x) f(z)^2],
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $\sigma := (2.2^* - p)/(2^* - 1)p$ e $C > 0$. Notando que para cada $(w, z) \in \Sigma_\rho$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(w))|^2 \leq 2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \leq 2\rho^2 \quad \text{e} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(z))|^2 \leq 2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 \leq 2\rho^2, \tag{3.16}$$

por (3.10), (3.15) e (3.16), temos

$$\begin{aligned}
\Phi_\varepsilon(w, z) &\geq \frac{k-1}{2k} \int\limits_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^2 + |\nabla z|^2 + W(\varepsilon x) f(w)^2 + V(\varepsilon x) f(z)^2] \\
&\quad - \frac{C}{V_0^{\frac{\sigma p}{2}}} \rho^{\sigma p} \cdot C\rho^{\left(1-\frac{\sigma p}{2}\right)\frac{2^*}{2}} - \frac{C}{W_0^{\frac{\sigma p}{2}}} \rho^{\sigma p} \cdot C\rho^{\left(1-\frac{\sigma p}{2}\right)\frac{2^*}{2}},
\end{aligned}$$

logo,

$$\Phi_\varepsilon(w, z) \geq \frac{k-1}{2k}\rho^2 - C\rho^{\frac{2N+2p}{N+2}}, \ \forall\, (w, z) \in \Sigma_\rho.$$

Notando que $(2N + 2p)/(N + 2) > 2$ pois $p > 4$, podemos escolher $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\Phi_\varepsilon(w, z) \geq \alpha > 0, \ \forall\, (w, z) \in \Sigma_\rho,$$

o que prova o item (i).

Agora, note que, pela condição (H_1), existem constantes $C_3, C_4 > 0$ tais que

$$H(\varepsilon x, s, t) \geq C_3|(s,t)|^p - C_4, \ \forall \ (x,s,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \tag{3.17}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $0 \in \Omega$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $supp\ \varphi \subset B_r(0) \subset \Omega$, para algum $r > 0$. Desde que $B_r(0) \subset \Omega_\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0,1]$, $f(t\varphi) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ e $w(\varepsilon x) \leq W_\infty$, $V(\varepsilon x) \leq V_\infty$ em $\mathbb{R}^N$, por (3.17), para todo $t \geq 0$, temos

$$\Phi_\varepsilon((t\varphi, t\varphi)) \leq \frac{t^2}{2} \int\limits_{B_r(0)} [2|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2} \int\limits_{B_r(0)} [W_\infty + V_\infty] f^2(t\varphi) - C_3 \int\limits_{B_r(0)} |(f(t\varphi), f(t\varphi))|^p + C_4|B_r(0)|,$$

assim,

$$\Phi_\varepsilon((t\varphi, t\varphi)) \leq \frac{t^2}{2} \int\limits_{B_r(0)} [2|\nabla\varphi|^2 + [W_\infty + V_\infty]\varphi^2 - C_3 \int\limits_{B_r(0)} |(f(t\varphi)|^p + C_4|B_r(0)|.$$

Pela propriedade (6) do Lema 1.1, segue que a função $\frac{f(t)}{t}$ é decrescente para $t > 0$. Desde que $0 \leq t\varphi \leq t$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$ e $t > 0$, obtemos $f(t)\varphi(x) \leq f(t\varphi(x))$. Logo, para todo $\varepsilon \in (0,1]$ e $t \geq 0$, temos

$$\Phi_\varepsilon((t\varphi, t\varphi)) \leq t^2 \left[\frac{1}{2} \int\limits_{B_r(0)} [2|\nabla\varphi|^2 + [W_\infty + V_\infty]\varphi^2 - C_3 \frac{f^p(t)}{t^2} \int\limits_{B_r(0)} |\varphi|^p \right] + C_4|B_r(0)|. \tag{3.18}$$

Da propriedade (5) do Lema 1.1 e desde que $p > 4$, concluímos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f^p(t)}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \right)^p t^{\frac{p}{2} - 2} = +\infty, \tag{3.19}$$

por (3.18) e (3.19), segue o item (ii). $\square$

Pelo Teorema 1.2 e Lema 3.2, existe uma sequência de Cerami para Φ_ε no nível

$$c_\varepsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} \max_{t \in [0,1]} \Phi_\varepsilon(\gamma(t)), \tag{3.20}$$

onde

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) \in \Phi_\varepsilon^{-1}(-\infty, 0] \cap X_2\},$$

isto é, existe $(w_n, z_n) \subset X$, tal que

$$\Phi_\varepsilon(w_n, z_n) = c_\varepsilon + o_n(1) \ \text{ e } \ (1 + \|(w_n, z_n)\|)\|\Phi'_\varepsilon(w_n, z_n)\|_* = o_n(1). \tag{3.21}$$

Lema 3.3. *Cada sequência (w_n, z_n) de Cerami para Φ_ε é limitada em X.*

Demonstração. De fato, seja $(\varphi_n, \phi_n) := \left(\dfrac{f(w_n)}{f'(w_n)}, \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)$, como

$$\nabla\varphi_n = \left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1 + 2f^2(w_n)}\right)\nabla w_n \ \text{ e } \ \nabla\phi_n = \left(1 + \frac{2f^2(z_n)}{1 + 2f^2(z_n)}\right)\nabla z_n,$$

temos $\|\varphi_n\| \leq 2\|w_n\|$ e $\|\phi_n\| \leq 2\|z_n\|$. Logo, por (3.21), $\Phi'_\varepsilon(w_n, z_n)(\varphi_n, \phi_n) = o_n(1)$, assim,

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon + o_n(1) &= \Phi_\varepsilon(w_n, z_n) - \frac{1}{p}\Phi'_\varepsilon(w_n, z_n)(\varphi_n, \phi_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\left(1 + \frac{2f^2(w_n)}{1 + 2f^2(w_n)}\right)\right]|\nabla w_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\left(1 + \frac{2f^2(z_n)}{1 + 2f^2(z_n)}\right)\right]|\nabla z_n|^2 \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x)f^2(w_n) + V(\varepsilon x)f^2(z_n)] \\
&+ \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} [f(w_n)H_w(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n)) + f(z_n)H_z(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n)) \\
&- pH(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))].
\end{aligned}$$

Desde que $\left(1 + \dfrac{2f^2(t)}{1 + 2f^2(t)}\right) \leq 2$, por (H_1), temos

$$\begin{aligned}
c_\varepsilon + o_n(1) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n|^2 + |\nabla z_n|^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x)f^2(w_n) + V(\varepsilon x)f^2(z_n)] \\
&+ \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N/\Omega_\varepsilon} [f(w_n)H_w(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n)) + f(z_n)H_z(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n)) \\
&- pH(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))].
\end{aligned}$$

Por (H_2) e (H_3), segue que

$$
\begin{aligned}
c_\varepsilon + o_n(1) &\geq \left(\frac{p-4}{2p}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N}[W(\varepsilon x)f^2(w_n)+V(\varepsilon x)f^2(z_n)] \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\varepsilon} H(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n)) \\
&\geq \left(\frac{p-4}{2p}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2k}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N}[W(\varepsilon x)f^2(w_n)+V(\varepsilon x)f^2(z_n)].
\end{aligned}
$$

Usando $k = \dfrac{4p}{p-2}$, obtemos

$$
c_\varepsilon + o_n(1) \geq c_p \int\limits_{\mathbb{R}^N}[(|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2)+W(\varepsilon x)f^2(w_n)+V(\varepsilon x)f^2(z_n)], \tag{3.22}
$$

onde $c_p := \min\left\{\dfrac{p-4}{2p}, \dfrac{p-2}{4p}\right\} > 0$, pois $4 < p < 2.2^*$.

Assim, para mostrar que (w_n, z_n) é limitada em X é suficiente provar que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(W(\varepsilon x)w_n^2+V(\varepsilon x)z_n^2\right) \leq C, \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}.
$$

De fato, pelo Lema 1.1 e (3.22), segue que

$$
\int\limits_{\{|w_n|\leq 1\}} W(\varepsilon x)w_n^2 \leq \frac{1}{C}\int\limits_{\{|w_n|\leq 1\}} W(\varepsilon x)f(w_n)^2 \leq c + o_n(1)
$$

e

$$
\int\limits_{\{|w_n|>1\}} W(\varepsilon x)w_n^2 \leq W_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} w_n^{2^*} \leq W_\infty S\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_n|^2\right)^{\frac{2^*}{2}} \leq W_\infty S(c_\varepsilon + o_n(1))^{\frac{2^*}{2}}.
$$

Similarmente, concluímos que $\left(V(\varepsilon x)z_n^2\right)$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, (w_n, z_n) é limitada em X. $\square$

O próximo resultado é fundamental na prova de que o funcional associado ao sistema auxiliar (AS_ε) satisfaz a condição de Cerami.

Lema 3.4. *Suponha que* $(w_n, z_n) \rightharpoonup (w, z)$ *em* X *então:*

(i) *Dado* $\xi > 0$*, existe* $R > 0$ *tal que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N/B_R(0)} [|\nabla w_n|^2 + |\nabla z_n|^2 + W(\varepsilon x)f^2(w_n) + V(\varepsilon x)f^2(z_n)] < \xi.$$

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n + V(\varepsilon x)f(z_n)f'(z_n)z_n] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x)f(w)f'(w)w + V(\varepsilon x)f(z)f'(z)z].$$

(iii)

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} [H_w(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f'(w_n)w_n + H_z(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f'(z_n)z_n] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} [H_w(\varepsilon x, f(w), f(z))f'(w)w + H_z(\varepsilon x, f(w), f(z))f'(z)z].$$

(iv) *Se* $\big(w_n(x), z_n(x)\big) \to (w(x), z(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x)f^2(w_n) + V(\varepsilon x)f^2(z_n)] = \int\limits_{\mathbb{R}^N} [W(\varepsilon x)f^2(w) + V(\varepsilon x)f^2(z)].$$

Então,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} W(\varepsilon x)f^2(w_n - w) + V(\varepsilon x)f^2(z_n - z) = 0.$$

Demonstração. Considere a função corte $\varphi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $\varphi_R = 0$ em $B_{R/2}(0)$, $\varphi_R = 1$ em $\mathbb{R}^N/B_R(0)$, $0 \le \varphi_R \le 1$ e $|\nabla\varphi_R| \le C/R$, onde a constante $C > 0$ é independente de R. Desde que (w_n, z_n) é limitada, temos

$$\Phi_\varepsilon'(w_n, z_n)\left(\varphi_R \frac{f(w_n)}{f'(w_n)}, \varphi_R \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right) = o_n(1),$$

logo,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1+\frac{2f^2(w_n)}{1+2f^2(w_n)}\right)|\nabla w_n|^2\varphi_R + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1+\frac{2f^2(z_n)}{1+2f^2(z_n)}\right)|\nabla z_n|^2\varphi_R$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n + \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\nabla z_n\right)\nabla\varphi_R + \int\limits_{\mathbb{R}^N} W(\varepsilon x)f^2(w_n)\varphi_R + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)f^2(z_n)\varphi_R$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}[H_w(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f(w_n)\varphi_R + H_z(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f(z_n)\varphi_R + o_n(1).$$

Escolhendo $R > 0$ tal que $\Omega_\varepsilon \subset B_{R/2}(0)$, por (H_2) e (H_3) temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2)\varphi_R + \left(1-\frac{1}{k}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N}[W(\varepsilon x)f^2(w_n)+V(\varepsilon x)f^2(z_n)]\varphi_R \leq$$
$$\leq -\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{f(w_n)}{f'(w_n)}\nabla w_n + \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\nabla z_n\right)\nabla\varphi_R + o_n(1).$$

Usando (6) do Lema 1.1, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a limitação de (w_n, z_n) e $|\nabla\varphi_R| \leq C/R$, temos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{k}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^N/B_R(0)}[|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2+W(\varepsilon x)f^2(w_n)+V(\varepsilon x)f^2(z_n)] &\leq 2\big(|w_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}|\nabla w_n\nabla\varphi_R| \\ &+ |z_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}|\nabla z_n\nabla\varphi_R|\big) \\ &\leq \frac{Mc}{R}+o_n(1),\end{aligned}$$

o que conclui a prova de (i).

(ii) Note que por (i) e $f(t)f'(t) \leq f^2(t)$, temos

$$\limsup_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N/B_R(0)} W(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n + V(\varepsilon x)f(z_n)f'(z_n)z_n = o_R(1), \tag{3.23}$$

desde que,

$$w_n \to w \;\text{ e }\; z_n \to z \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

temos,

$$w_n(x) \to w(x), z_n(x) \to z(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,$$

e

$$|w_n(x)| \leq g_1(x), |z_n(x)| \leq g_2(x), g_1, g_2 \in L^s(B_R(0)), s \in [1, 2^*).$$

Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{B_R(0)} [W(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)u_n + V(\varepsilon x)f(z_n)f'(z_n)z_n] = \int\limits_{B_R(0)} [W(\varepsilon x)f(w)f'(w)u + V(\varepsilon x)f(z)f'(z)z]. \tag{3.24}$$

Por (3.23) e (3.24), obtemos o item (ii).

(iii) Agora, usando o item (i) e $\Phi'_\varepsilon(w_n, z_n)(w_n, z_n) = o_n(1)$, temos

$$\limsup_{n\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N/B_R(0)} H_w(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f'(w_n)w_n + H_z(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f'(z_n)z_n = o_R(1). \tag{3.25}$$

Usando $\Omega_\varepsilon \subset B_R(0)$, (H_3), $w_n \to w$, $z_n \to z$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{B_R(0)} [H_w(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f'(w_n)w_n + H_z(\varepsilon x, f(w_n), f(z_n))f'(z_n)z_n] =$$
$$\int\limits_{B_R(0)} [H_w(\varepsilon x, f(w), f(z))f(w)f'(w)w + H_z(\varepsilon x, f(w), f(z))f'(z)z]. \tag{3.26}$$

Assim, por (3.25) e (3.26) obtemos (iii). □

Proposição 3.2. *O funcional Φ_ε satisfaz a condição de Cerami para cada nível c_ε.*

Demonstração. De fato, seja $(w_n, z_n) \subset X$, tal que

$$\Phi_\varepsilon(w_n, z_n) = c_\varepsilon + o_n(1) \;\text{ e }\; (1 + \|(w_n, z_n)\|)\|\Phi'_\varepsilon(w_n, z_n)\|_* = o_n(1),$$

pelo Lema 3.3, (w_n, z_n) é limitada em X. Assim, a menos de subsequência, $(w_n, z_n) \rightharpoonup (w, z)$

em X. Além disso, desde que $\Phi'_\varepsilon(w_n,z_n)(w_n,z_n)=o_n(1)$, usando (iii) do Lema 3.4, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2+W(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n+V(\varepsilon x)f(z_n)f'(z_n)z_n]=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}[H_w(\varepsilon x,f(w),f(z))f'(w)w+H_z(\varepsilon x,f(w),f(z))f'(z)z]. \quad (3.27)$$

Agora, usando que $\Phi'_\varepsilon(w_n,z_n)(\varphi,\phi)=o_n(1)$ para todo $\varphi,\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, por passagem ao limite combinado com o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos $\Phi'_\varepsilon(w,z)(\varphi,\phi)=0$. Por densidade, segue que $\Phi'_\varepsilon(w,z)(\varphi,\phi)=0$ para todo $\varphi,\phi\in X$. Em particular, $\Phi'(w,z)(w,z)=0$, isto é,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2+|\nabla z|^2+W(\varepsilon x)f(w)f'(w)w+V(\varepsilon x)f(z)f'(z)z]=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}[H_w(\varepsilon x,f(w),f(z))f'(w)w+H_z(\varepsilon x,f(w),f(z))f'(z)z]. \quad (3.28)$$

Combinado (3.27) e (3.28), temos

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2+W(\varepsilon x)f(w_n)f'(w_n)w_n+V(\varepsilon x)f(z_n)f'(z_n)z_n]=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2+|\nabla z|^2+W(\varepsilon x)f(w)f'(w)w+V(\varepsilon x)f(z)f'(z)z]. \quad (3.29)$$

Usando (ii) do Lema 3.4 e (3.29), segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_n|^2+|\nabla z_n|^2]=\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2+|\nabla z|^2].$$

Note que como $(w_n,z_n)\rightharpoonup(w,z)$ em X, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla w_n\nabla w+\nabla z_n\nabla z]=\int\limits_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2+|\nabla z|^2],$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla(w_n-w)|^2+|\nabla(z_n-z)|]^2=0. \tag{3.30}$$

Observando que

$$\|w_n-w\|\leq C[\Psi_W(w_n-w)+\Psi_W(w_n-w)^{\frac{2^*}{2}}] \quad \text{e} \quad \|z_n-z\|\leq C[\Psi_V(z_n-z)+\Psi_V(z_n-z)^{\frac{2^*}{2}}],$$

onde

$$\Psi_{\mathcal{V}}(w_n-w):=\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla(w_n-w)|^2+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{V}(\varepsilon x)f^2(w_n-w).$$

Assim, concluimos que,

$$\begin{aligned}\|(w_n,z_n)-(w,z)\|^2 &\leq C\big[\Psi_W(w_n-w)+\Psi_W(w_n-w)^{\frac{2^*}{2}}+\Psi_V(z_n-z)+\Psi_V(z_n-z)^{\frac{2^*}{2}}\big]\\ &\leq C\big[\Psi_W(w_n-w)+\Psi_V(z_n-z)+(\Psi_W(w_n-w)+\Psi_V(z_n-z))^{\frac{2^*}{2}}\big].\end{aligned}$$

Usando (iv) do Lema 3.4 e (3.30), a menos de subsequência, temos

$$(w_n,z_n)\to(w,z) \quad \text{em} \quad X,$$

o que conclui a prova da proposição. □

Teorema 3.2. *Suponha que W e V satisfaçam $(\mathcal{V}_0)$ e que Q satisfaz $(Q_0)-(Q_5)$. Então, para todo $\varepsilon\in(0,1]$, o sistema auxiliar (AS_ε) possui uma solução fraca $(w_\varepsilon,z_\varepsilon)\in X$, tal que*

$$\Phi_\varepsilon(w_\varepsilon,z_\varepsilon)=c_\varepsilon \quad e \quad \|(w_\varepsilon,z_\varepsilon)\|^2\leq C(c_\varepsilon+c_\varepsilon^{\frac{2^*}{2}}), \tag{3.31}$$

onde $C>0$ é uma constante independente de ε e c_ε é definido em (3.20).

Demonstração. Análogo aos argumentos usados no Lema 1.3. □

Lema 3.5. *Sejam $(w_\varepsilon,z_\varepsilon)$ a solução de (AS_ε) obtida no Teorema 3.2 e sequências $\varepsilon_n\in(0,1)$ e $(x_n)\subset\mathbb{R}^N$, tal que $\varepsilon_n\to0$ quando $n\to\infty$. As sequências (θ_n) e (ϑ_n) definida por*

$$\theta_n(x):=w_{\varepsilon_n}(x+x_n) \quad e \quad \vartheta_n(x):=z_{\varepsilon_n}(x+x_n),$$

pertencem a $L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ *e possuem subsequências que convergem uniformemente sobre conjuntos compactos de* $\mathbb{R}^N$ *para* $\theta, \vartheta \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$, *respectivamente. Além disso, existem constantes* $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ *tais que,*

$$\theta(x) \leq C_1 \exp\bigl(-C_2|x|\bigr) \quad e \quad \vartheta(x) \leq C_3 \exp\bigl(-C_4|x|\bigr),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. A prova segue da adaptação dos argumento usados na prova do Lema 1.10 com os da prova de [9, Corolário 4.3]. □

Lema 3.6. *Suponha que* W *e* V *satisfaçam* $(\mathcal{V}_0)$ *e que* W *ou* V *pertença a Classe 1 ou 2. Além disso, suponha que* Q *satisfaz* $(Q_0) - (Q_5)$. *Então,*

$$m_\varepsilon := \max_{x \in \partial\Omega_\varepsilon} |(w_\varepsilon(x), z_\varepsilon(x))| \to 0 \quad quando \quad \varepsilon \to 0^+,$$

onde definimos $\Omega_\varepsilon := B_{\frac{R_\varepsilon}{\varepsilon}}$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existiria $\delta > 0$ e uma sequência $\varepsilon_n \to 0^+$, tais que

$$m_{\varepsilon_n} \geq \delta,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $w_{\varepsilon_n}, z_{\varepsilon_n} \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, existe $x_n \in \partial B_{\frac{R_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}}$, tal que

$$w_{\varepsilon_n}^2(x_n) + z_{\varepsilon_n}^2(x_n) \geq \delta^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Defina as funções $\theta_n, \vartheta_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$\theta_n(x) := w_{\varepsilon_n}(x + x_n) \ \text{ e } \ \vartheta_n(x) := z_{\varepsilon_n}(x + x_n).$$

Pelo Lema 3.3, a sequência $(w_{\varepsilon_n}, z_{\varepsilon_n})$ é limitada em X. Assim, pela invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, (θ_n, ϑ_n) também é limitada em X. Além disso, (θ_n, ϑ_n) é solução do seguinte sistema

$$(AS_{\varepsilon_n})\begin{cases}-\Delta\theta_n + W(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)f(\theta_n)f'(\theta_n) = H_w(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n, f(\theta_n), f(\vartheta_n))f'(\theta_n) \text{ em } \mathbb{R}^N,\\ -\Delta\vartheta_n + V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)f(\vartheta_n)f'(\vartheta_n) = H_z(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n, f(\theta_n), f(\vartheta_n))f'(\vartheta_n) \text{ em } \mathbb{R}^N,\\ \theta_n, \vartheta_n > 0 \in H^1(\mathbb{R}^N).\end{cases}$$

Note que, a menos de subsequência, $(\theta_n,\vartheta_n) \rightharpoonup (\theta,\vartheta)$ em X, para algum $(\theta,\vartheta) \in X$. Pelo Lema3.5, (θ_n) e (ϑ_n) convergem uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^N$ para θ e ϑ, respectivamente. Além disso, $\theta,\vartheta \in C(\mathbb{R}^N)$, assim, deste fato e (3.32), segue que

$$\theta^2(0) + \vartheta^2(0) \geq \delta^2,$$

logo,

$$\theta \not\equiv 0 \text{ ou } \vartheta \not\equiv 0. \tag{3.33}$$

Desde que $\big(W(\varepsilon_n x_n)\big)$ e $\big(V(\varepsilon_n x_n)\big)$ são limitadas, existem $\alpha_W, \alpha_V > 0$, tais que

$$W(\varepsilon_n x_n) \to \alpha_W \;\text{ e }\; V(\varepsilon_n x_n) \to \alpha_V. \tag{3.34}$$

Segue de (AS_{ε_n}) que

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla\theta_n\nabla\varphi + \int\limits_{\mathbb{R}^N} W(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)f(\theta_n)f'(\theta_n)\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} H_w(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n, f(\theta_n), f(\vartheta_n))f'(\theta_n)\varphi + o_n(1), \tag{3.35}$$

e

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla\vartheta_n\nabla\phi + \int\limits_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n)f(\vartheta_n)f'(\vartheta_n)\phi = \int\limits_{\mathbb{R}^N} H_z(\varepsilon_n x+\varepsilon_n x_n, f(\theta_n), f(\vartheta_n))f'(\vartheta_n)\phi + o_n(1), \tag{3.36}$$

usando (3.35), (3.36), passagem do limite e a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^N}[\nabla\theta\nabla\varphi+\alpha_W f(\theta)f'(\theta)\varphi] &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} g_1(x,f(\theta),f(\vartheta))f'(\theta)\varphi, && (3.37)\\
\int\limits_{\mathbb{R}^N}[\nabla\vartheta\nabla\phi+\alpha_V f(\vartheta)f'(\vartheta)\phi] &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} g_2(x,f(\theta),f(\vartheta))f'(\vartheta)\phi, && (3.38)
\end{aligned}$$

para todo $(\varphi,\phi)\in X$, onde

$$g_1(x,f(\theta),f(\vartheta)) := \tilde{I}(x)Q_u(f(\theta),f(\vartheta))+(1-\tilde{I}(x))\widehat{Q_w}(f(\theta),f(\vartheta))$$

e

$$g_2(x,f(\theta),f(\vartheta)) := \tilde{I}(x)Q_v(f(\theta),f(\vartheta))+(1-\tilde{I}(x))\widehat{Q_z}(f(\theta),f(\vartheta)),$$

para alguma função $\tilde{I}\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Notando que $(\theta,\vartheta)\in W^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\nabla(ff')(w)=(f')^2(w)\nabla w+f(w)f''(w)\nabla w \text{ e } f''(w)=-2f(w)[f'(w)]^4,\ \forall\, w\in H^1(\mathbb{R}^N),$$

pelas propriedades (2) e (3) do Lema 1.1, temos $(ff')(w)\in H^1(\mathbb{R}^N)$ para todo $w\in H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, por densidade, existem $\varphi_j,\phi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tais que

$$\|\varphi_j-(ff')(\theta)\|\le\frac{1}{j}\ e\ \|\phi_j-(ff')(\vartheta)\|\le\frac{1}{j},\ \forall\, j\in\mathbb{N}. \tag{3.39}$$

Afirmamos que (3.33) e (3.37) implicam que $\theta\not\equiv 0$ e $\vartheta\not\equiv 0$. De fato, suponha, por contradição, que $\theta\not\equiv 0$ e $\vartheta\equiv 0$. Como $f(0)=0$, por (3.4), (3.32) e (3.35),

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\theta|^2+\alpha_W\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\theta)f'(\theta)\theta=\int\limits_{\mathbb{R}^N} g_1(x,f(\theta),0)f'(\theta)\theta=0,$$

usando o fato que $\theta\ge 0$, concluímos que $\theta\equiv 0$, e com isso, $(\theta,\vartheta)=(0,0)$ o que contradiz (3.33). A mesma conclusão é obtida se considerarmos $\theta\equiv 0$ e $\vartheta\not\equiv 0$. Assim, a afirmação é verdadeira.

Agora, suponha que W satisfaça a condição (PS), isto é, W pertença a Classe 1.

Escolhendo $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ como função teste em (3.35), temos

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla \theta_n \nabla (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}) + \int\limits_{\mathbb{R}^N} W(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n) f(\theta_n) f'(\theta_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \int\limits_{\mathbb{R}^N} H_u(\varepsilon_n x + \varepsilon_n x_n, f(\theta_n), f(\vartheta_n)) f'(\theta_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$$
$$= o_n(1).$$

Assim, explorando o fato que $\theta \not\equiv 0$ e argumentando como no Capítulo 1, podemos concluir que

$$\nabla W(\varepsilon_n x_n) \to 0 \text{ e } W(\varepsilon_n x_n) \to \alpha_W,$$

logo, $(\varepsilon_n x_n)$ é uma sequência $(PS)_{\alpha_W}$ para W. Assim de $(\mathcal{V}_2)$, $(\varepsilon_n x_n)$ deveria ter uma subsequência convergente, mas

$$|\varepsilon_n x_n| = R_{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \to \infty \text{ quando } n \to +\infty.$$

Portanto, o lema é verdadeiro para W na Classe 1. O caso em que V pertence a Classe 1 é análogo. □

Lema 3.7. *Suponha que W e V satisfaçam $(\mathcal{V}_0)$ e que W ou V pertença a Classe 2. Além disso, suponha que Q satisfaz $(Q_0) - (Q_5)$. Então*

$$m_\varepsilon := \max_{x \in \partial \Omega_\varepsilon} |(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))| \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0^+,$$

onde definimos $\Omega_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}\Lambda$ com Λ dado na hipóteses $(\mathcal{V}_3)$.

Demonstração. Se W pertence a Classe 2, podemos usar um argumento análogo ao usado na prova do lema anterior para obter uma sequência $(\varepsilon_n x_n) \subset \Lambda$, tal que

$$\nabla W(\varepsilon_n x_n) \to 0 \text{ quando } \varepsilon_n \to 0^+.$$

Desde que $\partial \Lambda$ é compacto em $\mathbb{R}^N$, existe $x_0 \in \partial \Lambda$, tal que $\varepsilon_n x_n \to x_0$ em $\mathbb{R}^N$, logo,

$$x_0 \in \partial \Lambda \text{ e } \nabla W(x_0) = 0,$$

o que contradiz $(\mathcal{V}_3)$. O caso em que V pertence a Classe 2 segue o mesmo argumento. $\square$

3.3 Demonstração do Teorema 3.1

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\varepsilon$, tal que

$$w_\varepsilon(y_\varepsilon) \geq f^{-1}\big(\frac{a}{2}\big).$$

Combinando o lema anterior com o fato que $|\big(w_\varepsilon(x), z_\varepsilon(x)\big)| \to 0$ quando $|x| \to +\infty$, veja Lema 3.5, concluímos que existe um ponto de máximo $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\varepsilon$ para w_ε. Como $(w_\varepsilon, z_\varepsilon) \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é solução de (AS_ε), temos

$$W(\varepsilon x_\varepsilon) f\big(w_\varepsilon(x_\varepsilon)\big) f'\big(w_\varepsilon(x_\varepsilon)\big) = H_w\big(\varepsilon x_\varepsilon, f\big(w_\varepsilon(x_\varepsilon)\big), f\big(z_\varepsilon(x_\varepsilon)\big)\big) f'\big(w_\varepsilon(x_\varepsilon)\big),$$

usando o fato de que f é uma função crescente e $f' > 0$ em $(0, \infty)$, temos

$$W_0 \frac{a}{2} \leq H_w\big(\varepsilon x_\varepsilon, f\big(w_\varepsilon(x_\varepsilon)\big), f\big(z_\varepsilon(x_\varepsilon)\big)\big),$$

o que contradiz a hipótese (H_3). Assim, $w_\varepsilon(x) < f^{-1}\big(\frac{a}{2}\big)$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$. Similarmente, temos $z_\varepsilon(x) < f^{-1}\big(\frac{a}{2}\big)$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon$. Logo,

$$|\big(f(w_\varepsilon), f(z_\varepsilon)\big)| < a \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\varepsilon.$$

Portanto, pela definição de H, $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$ é também solução de (RS_ε). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] J.F.L. Aires and M.A.S Souto, *Existence of solutions for a quasilinear Schrödinger equation with vanishing potentials*, J. Math. Anal. Appl. 416, 924–946 (2014).

[2] J.F.L. Aires, *Existência de soluções para equações equações de Schrödinger quase-lineares com potencial se anulando no infinito*, Tese de Doutorado, Campina Grande, 2014.

[3] C.O. Alves, *Existence of standing waves solutions for a Nonlinear Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, JEPE 01 (2015), 231–241.

[4] C.O. Alves, *Local mountain pass for a class of elliptic system*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2007), 135–150.

[5] C.O. Alves, J.M.B. do Ó, M.A.S. Souto, *Local mountain-pass for a class of elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *involving critical growth*, Nolinear Anal. 46(2001), 495–510.

[6] C.O. Alves, J.M.B. do Ó and O.H. Miyagaki, *On perturbations of a class of a periodic m-Laplacian equation with critical growth*, Nonlinear Anal. 45 (2001) 849–863.

[7] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 262 (1973), 349–381.

[8] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew Math.Phy. 43 (1992), 27–42.

[9] S.C.Q. Arruda, G.M. Figueiredo and R. G. Nascimento, *Existence and asymptotic behavior of solutions for a class of semilinear subritical elliptic systems*, Asymptotic Analysis, (2021), 1–20.

[10] T. Bartsch and Z.Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 1725–1741.

[11] J. Chen and Q. Zhang. *Existence of ground state solution of Nehari-Pohožaev type for a quasilinear Schrödinger system*, Differential Integral Equations 34 (1/2) 1 - 20, January/February 2021.

[12] C. Chen and H. Yang, *Multiple solutions for a class of quasilinear Schrödinger systems in* $\mathbb{R}^N$*,* Bull Malays Math Sci Soc. 2017.

[13] F.J. Corrêa, G. dos Santos and L. Tavares, *Solution for nonvariational quasilinear elliptic systems via sub-supersolution technique and Galerkin method*, Z. Angew. Math. Phys., 30 (2021), 72–99.

[14] E. Dibenedetto, $C^{1+\alpha}$ *Local Regularity of Weak Solutions of Degenerate Elliptic Equations*, Nonlinear Anal. 7 (1983), 827–850.

[15] A. Floer and A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equations with bounded potential*, J. Funct. Anal. 69 (1986), 397–408.

[16] E. Gloss, *Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}$, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2010), 1–23.

[17] Y. Guo and Z. Tang, *Ground state solutions for quasilinear Schrödinger systems,* J. Math. Anal. Appl. 389, 322–339 (2012).

[18] E. W. Laedke, K. H. Spatschek and L. Stenflo, *Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions*, J. Math. Phys., 24 (1983), 2764–2763.

[19] X. Liu, J. Liu and Z. Q. Wang, *Ground states for quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, Calc. Var. 46 (2013), 641–669.

[20] Gelson C.G. dos Santos, *Sobre existência de solução positiva para uma classe de problemas não locais e para uma classe de problemas locais com não linearidade descontínua*, Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, Belém-PA 2016.

[21] G.C.G. dos Santos and S.S. Muhassua, *Existence of solutions for a class of quasilinear Schödinger equation in* $\mathbb{R}^N$ *with zero-mass*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2022), 1–16.

[22] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equation of second order*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[23] R. W. Hasse, *A general method for the solutions of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations*, Z. Physik, 37 (1980), 83–87.

[24] H. Lange, B. Toomire and P. F. Zweifel, *Time-dependent dissipation in nonlinear Schr¨odinger systems*, J. Math. Phys., 36 (1995), 1274–1283.

[25] J. Liu, Y. Wang and Z. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*, J. Differential Equations 187 (2003), 473–493.

[26] P.L. Lions *The concentration-compacness principle in the calculus of variations: the limit case.* Rev. Mat. Iberoamericana 1(1985), 145–201.

[27] M. Colin and L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach*, Nonlinear Analysis 56 (2004), 213–226.

[28] M. del Pino and P.L. Felmer, *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations 4 (1996), 121–137.

[29] J. Moser, *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960),457–468.

[30] J. M. B. do Ó, O. H. Miyagaki and S. H. M. Soares *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations with critical growth*, J. Differential Equations 248 (2010), 722–744.

[31] J. M. B. do Ó and U. Severo, *Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlineartries*, Comm. Pure Appl. Anal. 8 (2009), 621–644.

[32] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, In: CBMS Regional Conf. Ser. in Math. No., vol. 65. Amer. Math. Soc., Providence (1986).

[33] D. Ruiz and G. Siciliano, *Existence of ground states for a nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinearity 23 (2010), 1221–1233.

[34] G.C.G. Dos Santos and G.M. Figueiredo, *Existence of solutions for an NSE with discontinuous nonlinearity*, J. Fixed Point Theory Appl. 19(1) (2017), 917–937. doi:10.1007/s11784-017-0404-6

[35] E. A. B. Silva and G. F. Vieira, *Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with subcritical growth*, Nonlinear Analysis 72 (2010), 2935–2949.

[36] E. A. B. Silva and G. F. Vieira, *Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth*, Calc. Var. 39 (2010), 1–33.

[37] U. Severo and E. da Silva, *On the existence of standing wave solutions for a class of quasilinear Schrodinger systems.* J. Math. Anal. Appl. 412,763–775 (2014).

[38] U. B. Severo, *Estudo de uma classe de equações de Schrödinger quase-lineares*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2007.

[39] G. Talenti, *Best constant in sobolev inequality*, Annali di Matematica pura ed Applicata, Springer, v. 110, n. 1, p. 353–372, 1976.

[40] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, Journal of Differential equations, Academic Press, v. 51, nº 1(1984), 126–150.

[41] M. Yang, *Existence of solutions for a quasilinear Schrödinger equation with subcritical nonlinearities*, Lecture Notes in Mathematics 75 (2012), 5362–5373.

[42] Y. Wang and W. Zou, *Bound states to critical quasilinear Schrödinger equations*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 19 (2012), 19–47.

[43] M. Willem *Minimax Theorems*. Birkhäuser, 1996.