UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA-UFAM

Tese de Doutorado

Sobre sistemas de equações do tipo Schrödinger-Poisson

Genivaldo dos Passos Corrêa

Novembro de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA-UFAM

Genivaldo dos Passos Corrêa

Sobre sistemas de equações do tipo Schrödinger-Poisson

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

Novembro de 2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C824s Corrêa, Genivaldo dos Passos.
Sobre sistemas de equações do tipo Schrödinger-Poisson / Genivaldo dos Passos Corrêa. — 2022.
xi, 97 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2022.

1. Sistema do tipo Schrödinger-Poisson, Método Variacional, . 2. Método de Penalização, Método de Redução, . 3. Teorema do Passo da Montanha,. 4. Princípio de Concentração e Compacidade de Lions,. 5. Método de Iteração de Moser.. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA-UFAM

Genivaldo dos Passos Corrêa

SOBRE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO TIPO SCHRÖDINGER-POISSON

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 04 de novembro de 2022.

Resultado: Aprovado.

Banca Examinadora

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos. (Orientador)
Universidade Federal do Pará - UFPA

F Corrêa

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corréa. (Membro Externo)
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa. (Membro Interno)
Universidade Federal do Pará - UFPA.

Prof^{a}. Dr^{a} Rubia Gonçalves Nascimento. (Membro Interno)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Julio Roberto Soares da Silva

Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva (Membro Interno)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedicatória

Aos meus pais, Domingos(em memória) e Benedita , a minha esposa Tânia e aos meus filhos João Henrique, Jean Gabriel e Giovani Henrique (O nosso anjo azul).

Agradecimentos

- À Deus, por me conceder o Dom da vida, por está sempre guiando meus passos, por não me permitir desistir nos momentos de dificuldades e principalmente, por me conceder a graça de alcançar este tão sonhado objetivo. Ao Senhor Deus toda honra e toda glória;

- Aos meus pais, Benedita dos Passos Corrêa e Domingos da Silva Corrêa (em memória), por toda luta que enfrentaram para me proporcionar uma educação que permitiu alcançar sonhos que nunca pensei que fossem possíveis. Pai, mãe tudo que sou hoje devo a vocês, gratidão é o que sinto por vocês em todos os momentos de minha vida;

- À minha esposa, Tânia de Jesus G. Martins, pelo companheirismo, compreensão e apoio em todos os momentos dessa jornada. Obrigado por cuidar tão bem dos nossos filhos nas minhas ausências e principalmente, pelo cuidado especial que você tem com o nosso Anjo Azul;

- Àos meus filhos, João Henrique, Jean Gabriel e Giovani Henrique(o Anjo Azul), por serem a fonte que alimenta os meus sonhos, e que não me permite deixar de sonhar, pois tudo que sonho, sonho por vocês;

- À todos os meus irmãos, Odaléa, Ocinéa, Odinéa, Odélia, Orlete, Genival, Jocivaldo, Marciléa, Rosana, Jairo e Odicléa, sou grato pela união e o amor que nos permite cuidar de nossa mãe, que é o pilar de sustentação de nossa família;

- Aos meus colegas do curso de doutorado e aos amigos que construir durante essa jornada, obrigado pela convivência e conhecimentos compartilhados;

- Ao Prof. Dr. Dilberto Júnior, pelos ensinamentos repassados durante as disciplinas de Matemática Numérica que me permitiram ser aprovado na Qualificação II. Agradeço também aos colegas das disciplinas, Clayton, Jeferson, Romário, Ronaldo, Sabado e Wilson pela parceria durantes o percurso;

- Ao amigo, Claudionei, professor da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), agradeço pelas conversas que tivemos durante a realização desta tese, pelos esclarecimentos que muitas vezes me deu, em dúvidas que apareciam durante a construção deste trabalho. Obrigado meu amigo;

- Ao Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos, meu agradecimento é especial, primeiro por ter aceitado ser meu orientador, segundo, por acreditar que essa parceria seria possível, terceiro, pela excelente orientação, dedicação e preocupação durante o desenvolvimento do trabalho e principalmente por ter sido uma pessoa compreensível com os problemas que surgiram durante o período tão conturbado da pandemia da Covid-19. Minha eterna graditão por tudo que me ensinou durante esses quase 4 anos de orientação;

- Ao Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa, ao Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa, à Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento, ao Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva por terem aceitado compor a banca examinadora desta tese e por suas contribuições que ajudaram a aprimorar a versão final do trabalho;

- A todos os meus professores, que contribuiram na minha formação acadêmica meu eterno agradecimento. De forma especial, agradeço aqui, ao Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, que desde minha graduação em Matemática, no campus da Ufpa em Abaetetuba, foi minha fonte de inspiração para seguir meus estudos na pós-graduação, na área de Análise matemática, com ênfase em EDP Elípticas. Obrigado professor por todos os ensinamentos a mim concedidos, você é um exemplo de profissional.

Resumo

Nesta tese, estudamos a existência de solução não trivial para a seguinte classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = g(u) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2 \Delta \phi = \ell(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro real, $V, \ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis e a não linearidade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que pode ter crescimento subcrítico, crítico e supercrítico. Supondo adequadas geometrias sobre o potencial $V(x)$ e assumindo que $0 \leq \ell(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ou $\ell(x) \equiv 1$, nós usamos o Método Variacional para mostrar a existência de solução não trivial e não negativa para este sistema, utilizando ferramentas como o Método de Redução de Benci e Fortunato [12] combinado com adaptações do Método de Penalização de Del Pino e Felmer [23] e o Teorema do Passo da Montanha [37, 4].

Palavras-chave: Sistema do tipo Schrödinger-Poisson, Método Variacional, Método de Penalização, Método de Redução, Teorema do Passo da Montanha, Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, Método de iteração de Moser.

Abstract

In this thesis, we study the existence of a non-trivial solution for the following class of Schrödinger-Poisson systems

$$\begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = g(u) & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2\Delta\phi = \ell(x)u^2 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $\epsilon > 0$ is a real parameter, $V, \ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ are measurable functions and the nonlinearity $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function that can have subcritical, critical, and supercritical growth. Assuming suitable geometries over the potential $V(x)$ and assuming that $0 \leq \ell(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ or $\ell(x) \equiv 1$, we use the Variational Method to show the existence of a non trivial and non negative solution for this system, using tools such as the Benci and Fortunato Reduction Method [12] combined with adaptations of Del Pino's Penalty Method and Felmer [23] and the Mountain Pass Theorem [37, 4].

Key words: Schrödinger-Poisson type system, Variational Methods, Penalty Method, Reduction Method, Mountain Pass Theorem, Lions Compactness Concentration, Moser Iteration Method.

Conteúdo

Introdução

Nas últimas décadas, vários pesquisadores têm estudado questões relacionadas à existência, não existência e multiplicidade de solução para a seguinte classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson,

$$\begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = g(u) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2\Delta\phi = \ell(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro real, $V, \ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis e a não linearidade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que pode ter crescimento subcrítico, crítico e supercrítico.

O problema (1) surge quando estudamos a interação entre um campo eletromagnético desconhecido e o campo de Schrödinger não linear

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + W(x)\Psi + \phi\Psi - q(|\Psi|) & \text{for} \quad x \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ -\Delta\phi = |\Psi|^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{2}$$

onde i é a unidade imaginária, $\hbar$ é a constante de Planck, m é a massa do campo, $W(x)$ é um potencial externo dado e q é uma função que descreve a interação entre partículas.

O conhecimento das soluções de (1) tem grande importância no estudo de existência de ondas estacionárias (*standing wave*), isto é,

$$\Psi(x,t) = \exp\left(\frac{-iEt}{\varepsilon}\right)u(x), E \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

que fornecem soluções das equações de Schrödinger em (2), com $\varepsilon^2 = \frac{\hbar^2}{2m}, W(x) = V(x) - E$.

Quando $V(x) \equiv \ell(x) \equiv \epsilon = 1$, o sistema (1), foi proposto pela primeira vez em 1998 por Benci e Fortunato [12] para um domínio limitado. Este problema está relacionado com a chamada equação de Hartree [29]. Nesse trabalho, os autores estudaram o problema de autovalor para o operador de Schrödinger acoplado a um campo eletromagnético. Mais precisamente, em [12] Benci e Fortunato consideraram o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u - \phi u = \omega u & \text{em } \Omega, \\ \Delta\phi = 4\pi u^2 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0, \phi(x) = g & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1, \omega > 0 \end{cases} \tag{4}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^3$ e g é uma função suave sobre $\overline{\Omega}$. Eles usaram argumentos de minimização para provar a existência de uma sequência (ω_n, u_n, ϕ_n) com $\omega_n \subset \mathbb{R}$, $\omega_n \to \infty$ e u_n, ϕ_n funções reais que satisfazem (4).

Em [22], D'Aprile e Mugnai usaram uma identidade do tipo Pohozaev para provar a não existência de solução não trivial para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \lambda\phi u = |u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2 \qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{5}$$

para $2 \leq p$ ou $p \geq 6$.

Em [13, 14], Benci e Fortunato também estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u = |u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = u^2 \qquad\qquad\qquad \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{6}$$

para $4 < p < 6$.

Em [21], D'Aprile e Mugnai usaram o Método Variacional para estudar a existência de soluções radialmente simétricas para o problema (6), com $4 \leq p < 6$.

Em [7], Azzollini, d'Avenia e Pomponio, assumem que a linearidade satisfaz as condições do tipo Berestycki-Lions e também provam existência de soluções não triviais para (6).

Azzollini-Pomponio em [5], mostraram existência de solução de energia mínima (solução ground state) para o problema (1), considerando $V(x) \equiv \alpha > 0$ e a não linearidade $g(u) = |u|^{p-1}u$ com $2 < p < 5$.

Explorando as propriedades de um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^3)$, constituído por funções radiais, Ruiz [34], Ambrosetti e Ruiz [3] contornam a falta de imersão compacta das imersões de Sobolev nos espaços $L^p(\mathbb{R}^3)$ e mostram resultados de existência e multiplicidade de solução para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \mu\phi u = 4\pi|u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = 4\pi u^2 \qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{7}$$

para adequados valores dos parâmetro p e $\mu > 0$.

Também existem interessantes resultados na literatura para potenciais $V(x)$ ou $\ell(x)$ não constantes. Em [36], Wang e Zhou estudaram o sistema (1) com as geometrias sobre $V(x)$ introduzidas no famoso artigo de Rabinowitz [32], a saber,

(V) $0 < \inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x) < \liminf\limits_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty.$

Recentemente, em [19], Chen, Fiscella, Pucci e Tang consideram o problema (1) com $\ell(x) \equiv 1$, a não linearidade crítica $g(u) = f(u) + |u|^5$ e $V(x)$ satisfazendo (V). Além do caso $p \in (4, 6)$, que geralmente é considerado na literatura, os resultados desses autores aplicam-se também para o caso $p \in [3, 4]$,.

Mais recente ainda, em [38], Yang e Yu, consideraram o problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2\Delta\phi = \ell(x)u^2 \qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{8}$$

e impondo adequadas condições sobre o potencial V, a função ℓ e não linearidade f, os autores mostraram, usando técnica de minimização na variedade de Nehari, a existência e concentração de solução ground state para (8), para ϵ suficientemente pequeno.

Em [18], Cerami e Varia estudaram o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \ell(x)\phi u = a(x)|u|^{p-2}u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = \ell(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{9}$$

e supondo adequadas hipóteses sobre as funções $\ell(x)$ e $a(x)$, os autores provaram resultado de existência de solução positiva para (9).

Motivados por todos esses trabalhos, principalmente por Alves [1], Alves e Souto [2] e Cardoso, Dos Prazeres e Severo [16], nesta tese nós estudamos o problema (1) com as geometrias sobre o potencial $V(x)$ introduzidas em [1] e [2]. Em [1], Alves estudou a seguinte classe de equações de Schrödinger

$$(A) \begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \,\text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

e introduziu sobre o potencial V as seguintes condições:

(V_1) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^3} V(x)$.

(V_2) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $V, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^3$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\}$.

(V_3) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^3$, tal que $(V(x_n))$ é limitada e

$\nabla V(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente.

(V_4) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

Nosso trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, estudamos o problema (1) para uma não linearidade com crescimento subcrítico e o potencial $V(x)$ podendo anular-se no infinito. Mais precisamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = \ell(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u, \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{10}$$

e assumimos que $\ell \in L^2(\mathbb{R}^3), V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é mensurável, a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e as seguintes hipóteses são satisfeitas:

(A_1) $V(x) \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)$, $|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} < S$, onde $S > 0$ é a melhor constante da imersão

$D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 0\}$ e $4 < p < 6$.

(A_2) Existe uma contante $V_\infty > 0$ tal que $V(x) \leq V_\infty$, $\forall\, x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

(A_3) Existem constantes $\Lambda > 0$ e $R > 1$, tais que, $\dfrac{1}{R^4} \inf\limits_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda$.

(ℓ) $\ell(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \ell(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^3$ e $\ell \not\equiv 0$.

(f_1) $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{sf(s)}{s^6} < +\infty.$

(f_2) $\displaystyle\limsup_{s\to +\infty} \frac{sf(s)}{s^p} = 0$, onde p é a dado em (A_1).

(f_3) Existe $\theta > 4$ tal que, $0 < \theta F(s) := \theta \displaystyle\int_0^s f(t),\, dt \leq sf(s)\, \forall\, s > 0$.

O resultado principal do Capítulo 1 é enunciado como segue:

Teorema 0.0.1. *Suponha que $(A_1) - (A_3), (\ell)$ e $(f_1) - (f_3)$ são satisfeitas. Então, existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, C_0, |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}) > 0$, tal que o sistema (10) possui solução não trivial e não negativa, para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$.*

Usamos o Método de redução de Benci e outros (Ver [12, 14]) combinado com o Método de penalização de Del Pino e Felmer [23] e o Teorema do Passo da Montanha para provar o Teorema 0.0.1.

A geometria (A_3) sobre o potencial $V(x)$ foi introduzida, pela primeira vez, em 2012 no famoso artigo [2] de Alves e Souto, onde os autores provaram a existência de solução positiva para a seguinte equação Schrödinger

$$(AS) \begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) \,\text{em}\ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \ \text{em}\ \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

A principal novidade em nosso resultado, em relação ao trabalho de Alves e Souto, é que além de estarmos trabalhando com um sistema de Schrödinger-Poisson, nós ainda consideramos que o potencial V pode ser negativo e ilimitdado inferiormente na bola $B_R(0)$, diferentemente dos autores, que consideram o potencial $V(x)$ não negativo e portanto, limitado inferiormente. Além disso, as estimativas necessárias ao estudos do sistema (10) requerem novos argumentos e são mais delicadas quando comparados ao caso escalar (equação de Schrödinger) dada em (AS).

O potencial $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por

$$V(x) = \begin{cases} -\dfrac{\epsilon}{|x|^\alpha}, & \text{se } |x| < R, \\ \left(\dfrac{R}{|x|}\right)^\beta \Lambda, & \text{se } |x| \geq R, \end{cases}$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, $0 \leq \alpha < 2$ e $0 \leq \beta \leq 4$, satisfaz claramente (V_1) e (V_2). Além disso, $V(x) \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para $q \in (3/2, 3/\alpha)$ e $V(x)$ ilimitado inferiormente.

No Capítulo 2, motivado por um artigo recente (2020) de Cardoso, dos Prazeres e Severo [16], nós consideramos o mesmo problema do Capítulo 1, mas com uma pertubação na não linearidade que pode ser crítica ou supercrítica. Mais precisamente, no Capítulo 2, nós estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = f(u) + \lambda |u|^{q-2}u \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = \ell(x)u^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u, \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{11}$$

onde $\ell(x)$, $V(x)$ e f satisfazem as mesmas hipóteses do Capítulo 1 e $q \geq 6$. A principal novidade deste capítulo é a pertubação $\lambda |u|^{q-2}u$ com $q \geq 6$ superlinear supercrítica da linearidade f

O principal resultado do Capítulo 2 é enunciado como segue:

Teorema 0.0.2. *Suponha que* $(A_1) - (A_3), (\ell)$ *e* $(f_1) - (f_3)$ *ocorrem. Então, existem constantes* $\lambda^* = \lambda^*(S, \theta, p, C_0, |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}) > 0$ *e* $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, C_0, |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}) > 0$, *tal que o sistema* (11) *possui solução não trivial e não negativa, para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$ *e* $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Para demonstrar este resultado, nós utilizamos um truncamento especial na não linearidade para contornar a falta de imersão contínua para $q > 6$ e a falta de imersão compacta dos espaços de Sobolev nos espaços $L^p(\mathbb{R}^3)$, combinado com o Método de Redução de Benci e Fortunato [12] e o Método de Penalização de del Pino e Felmer [23].

No Capítulo 3, nós consideramos o problema (1) com $\ell(x) \equiv 1$ e a classe de potenciais V introduzidas por Alves em [1] no estudo da equação Schrödinger em (A). Mais precisamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u + \phi u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2 \Delta \phi = u^2 \qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{12}$$

e assumimos as seguintes hipóteses sobre o potencial V:

(V_1) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^3} V(x)$.

(V_2) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $V, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^3$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\}$.

(V_3) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^3$, tal que $(V(x_n))$ é limitada e

$\nabla V(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente.

(V_4) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

Diremos que o potencial $V(x)$ pertence à *Classe 1* quando $V(x)$ satisfaz $(V_1), (V_2)$ e (V_3). E diremos que $V(x)$ pertence à *Classe 2* quando $(V_1), (V_2)$ e (V_4) são satisfeitas.

Sobre a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assumiremos que ela é contínua e satisfaz as seguintes condições:

(f_1') $\displaystyle\limsup_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s} = 0$;

(f_2') Existe $p \in (4,6)$, tal que $\displaystyle\limsup_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0$,

(f_3') Existe $\theta > 4$ tal que, $0 < \theta F(s) := \theta \displaystyle\int_0^s f(t)\,dt \leq sf(s)\,\forall\, s > 0$.

Supondo que $V(x)$ pertence a *Classe 1* ou a *Classe 2* e que a não linearidade f comporta-se como potência $f(t) = |t|^{p-2}t, p \in (2, 2^*)$, Alves [1] provou um resultado de existência de solução positiva para a equação Schrödinger ($\ell \equiv 0$ em (1)), com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Nosso principal resultado do Capítulo 3 é enunciado como segue:

Teorema 0.0.3. *Suponha que $V(x)$ pertença à Classe 1 ou 2 que f satisfaz $(f_1') - (f_3')$. Então, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que o sistema* (12) *possui solução positiva, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*

No Capítulo 4, consideramos a versão crítica do problema estudado no Capítulo 3. Mais precisamente, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u + \phi u = |u|^{p-1}u + |u|^4 u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2\Delta\phi = u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{13}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro real, $p \in (2, 5)$. Note que em dimensão 3, o expoente crítico de Sobolev é $2^* = 6$, assim a não linearidade em (13) é do tipo crítica.

Nosso principal resultado do Capítulo 4 é enunciado como segue:

Teorema 0.0.4. *Suponha que $V(x)$ pertença à Classe 1 ou 2 e $p \in (2, 5)$. Então, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que o sistema* (13) *possui solução positiva, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*

Notações

- C:= Constante positiva cujo valor exato não é relevante;
- $|A|$:= Medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$;
- $\displaystyle\int_A f$:= Integral de Lebesgue de uma função f sobre o conjunto A;
- $\partial\Omega$: Fronteira do conjunto Ω;
- $o_n(1)$: Ordem pequena;
- $O_n(1)$: Ordem grande;
- $B_R(0)$: Bola aberta de centro em 0 e raio R;
- $\blacksquare$:= Fim da demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário.
- $|u|_s$:= Norma de u em $L^s(\Omega)$.
- $\to$: Convergência forte;
- $\rightharpoonup$: Convergência fraca;
- $\hookrightarrow$: Imersão contínua;

Capítulo

1

Existência de solução não negativa e não trivial para uma classe de sistema do tipo Schrödinger-Poisson com potencial anulando-se no infinito

Neste capítulo, estudamos a seguinte classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = \ell(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u, \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\ell(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, o potencial $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável e a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. As hipóteses precisas sobre $\ell(x), V(x)$ e $f(x)$ serão apresentadas posteriormente.

Devido a inúmeras aplicações no campo da Física, principalmente na área da Mecânica Quântica e na teoria de semicondutores, sistemas do tipo Schrödinger-Poisson (1.1), vêm sendo objeto de estudos de vários pesquisadores. Esses estudos buscam resultados de existência, não existência, unicidade, multiplicidade de soluções, bem como soluções do tipo *groun-state*, radial, etc. O leitor interessado em obter mais informações das aplicações físicas na área da Mecânica Quântica, pode consultar as referências [11], [17], [28] e [15]. Já na teoria de semicondutores, sugerimos as referências [12], [14], [29] e [30].

Como bem ressaltado na Introdução, depois do trabalho de Benci e Fortunato [12], em 1998, que propõe o sistema (4), em um domínio limitado, o estudo de sistemas do tipo (1.1) tem atraído o interesse de vários pesquisadores que veem considerando o problema (1.1) para potenciais $V(x)$ e $\ell(x)$ constantes e não constantes.

Para o caso de potenciais não constantes, além dos trabalhos já citados na introdução, podemos citar o interessante trabalho de Zhao e outros [39], onde os autores consideraram um caso em que o potencial $V(x)$ muda de sinal. Eles usaram o método variacional para provar resultados de existência e comportamento assintótico de soluções não trivias de (1.1) quando $f(s) = |s|^{p-2}s$ com $4 < p < 6$.

Neste capítulo, estamos interessados em estudar o sistema (1.1) para uma classe de potenciais $V(x)$ que pode se anular no infinito. Assumimos as seguintes hipóteses sobre as funções V, ℓ e f:

(A_1) $V(x) \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)$, $|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} < S$, onde $S > 0$ é a melhor constante da imersão

$D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 0\}$ e $4 < p < 6$.

(A_2) Existe uma contante $V_\infty > 0$ tais que $V(x) \leq V_\infty$, $\forall\, x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

(A_3) Existem constantes $\Lambda > 0$ e $R > 1$, tal que, $\dfrac{1}{R^4} \inf\limits_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda$.

(ℓ) $\ell(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \ell(x) \geq 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^3$ e $\ell \not\equiv 0$.

(f_1) $\limsup\limits_{s \to 0^+} \dfrac{sf(s)}{s^6} < +\infty$.

(f_2) $\limsup\limits_{s \to +\infty} \dfrac{sf(s)}{s^p} = 0$, onde p é a dado em (A_1).

(f_3) Existe $\theta > 4$ tal que, $0 < \theta F(s) := \theta \displaystyle\int_0^s f(t)\, dt \leq sf(s) \,\forall\, s > 0$.

Antes de enunciarmos o principal resultado deste capítulo, apresentamos a definição de solução (fraca) para o sistema (1.1).

Definição 1.0.1. *Uma solução (fraca) não trivial e não negativa para* (1.1) *é um par* $(u, \phi) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $u, \phi \not\equiv 0, u, \phi \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^3$ *e as seguintes igualdades ocorrem*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x) uv\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi uv\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u) v\, dx, \,\forall\, v \in E$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \nabla \varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) u^2 \varphi\, dx, \,\forall\, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

veja Seção 1.1 para a definição de E.

Nosso principal resultado desse capítulo pode ser enunciado como segue:

Teorema 1.0.1. *Suponha* $(A_1) - (A_3), (\ell)$ *e* $(f_1) - (f_3)$ *são satisfeitas. Então, existe uma constante* $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, C_0, |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}) > 0$, *tal que o sistema* (1.1) *possui solução não trivial e não negativa, para todo* $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Como já foi ressaltado anteriormente, a hipótese (A_3) sobre o potencial $V(x)$ foi introduzida em 2012 por Alves e Souto no artigo [2], onde os autores estudaram a equação de Schrödinger, isto é, o problema (AS). Em nosso caso, a principal novidade é que o potencial V pode ser negativo e ilimitado inferiormente na bola $B_R(0)$.

Para demonstrar o Teorema 1.0.1 usaremos o *Método Variacional* combinado com o *Método de redução* de Benci e D. Fortunato [12] com uma adaptação da *Técnica de*

Penalização introduzida por Del Pino e Felmer [23]. Mais precisamente, primeiro convertemos o sistema (1.1) em um problema não local e estudamos as propriedades do termo não local, em seguida, realizamos um truncamento na não linearidade f que nos permitiu contornar a dificuldade gerada pela falta da imersão compacta do espaço E (subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ onde encontram-se as soluções do problema não local) em $L^6(\mathbb{R}^3)$. Assumindo (A_1) e (A_2), usamos o *Teorema do Passo da Montanha* [4] para provar que o problema truncado tem solução não trivial e não nula. Finalmente, obtivemos alguns resultados técnicos envolvendo a solução do problema truncado e acrescentamos a condição (A_3) para provar que solução do problema truncado fornece solução do sistema (1.1).

1.1 Formulação Variacional de (1.1) e o problema não local associado

Nesta seção, apresentaremos a formulação variacional do sistema (1.1) e as dificuldades encontrada para aplicar o Método variacional no estudo do funcional associado a ele, tais dificuldades, foram contornadas estudando um problema não local associado a (1.1) que foi obtido pela aplicação do Método de Redução de Benci e Fortunato [12, 15], veja também Chen e Tang [20, pp. 4929–4932] para mais detalhes.

O sistema (1.1) possui formulação variacional. De fato, primeiro observe que é natural buscar por solução do problema (1.1) no seguinte subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$,

$$E := \big\{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) : V(x)u^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)\big\}.$$

Claramente, $E \neq \emptyset$.

O lema a seguir será de fundamental importância para nossos propósitos neste capítulo.

Lema 1.1.1. *Assuma que (A_1) ocorre, então, a função $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2)dx,$$

define uma norma em E. Além disso, E é um espaço de Hilbert.

Prova: Considere a forma bilinear

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla v + V(x)uv), \ \forall\, u, v \in E. \tag{1.2}$$

Para provar o lema, é suficiente provar que $(u, u) \geq 0$, para todo $u \in E$ e $(u, u) = 0$, se e somente se, $u = 0$. De fato, desde que $\Omega := \big\{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 0\big\}$, então,

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2dx = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega} V(x)u^2dx + \int_{\Omega} V(x)u^2dx \geq \ -\int_{\Omega} -V(x)u^2dx.$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder e a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega}(-V(x))u^2dx &\geq -|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\left(\int_{\Omega}u^6dx\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\geq -|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}S^{-1}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx,
\end{aligned}$$

o que implica,

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)dx \geq (1-|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}S^{-1})\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx. \tag{1.3}$$

Usando a condição (A_1) e (1.3), concluímos que $(u,u)\geq 0$, para todo $u\in E$ e $(u,u)=0$ se, e somente se $u=0$, para todo $u\in E$, além disso, pode-se mostrar que E é um espaço de Hilbert. ■

Agora, observe que para cada $(u,\phi)\in E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ o funcional $\Gamma: E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$ definido por

$$\Gamma(u,\phi)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi u^2\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\,dx-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi|^2\,dx, \tag{1.4}$$

é de classe $C^1\left(E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3),\mathbb{R}\right)$ e suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial u}(u,\phi)\xi=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla\xi+V(x)u\xi)dx+\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi u\xi dx-\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\xi dx,\ \forall\,\xi\in E,$$

e

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\phi}(u,\phi)\eta=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)u^2\eta dx-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\phi\nabla\eta dx,\ \forall\,\eta\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

assim, de acordo com a Definição 1.0.1, os pontos críticos do funcional Γ em $E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, são exatamente as soluções fracas do sistema de Schrödinger-Poisson (1.1). Entretanto, devido ao funcional Γ em (1.4) ser fortemente indefinido, isto é, ilimitado inferiormente e superiormente, em espaço de dimensão infinita, temos dificuldade em obter tais pontos críticos. A fim de contornar essa dificuldade reduziremos o funcional Γ a um funcional de uma única variável u.

Para isso, observe que o funcional $L_u: D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$ dado por

$$L_u(v)=\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)u^2v\,dx,$$

está bem definido, é linear e contínuo. De fato, desde que $\ell(x)\in L^2(\mathbb{R}^3)$, $u^2\in L^3(\mathbb{R}^3)$ e $v\in L^6(\mathbb{R}^3)$, pela desigualdade de Hölder generalizada

$$L_u(v)=\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)u^2v\,dx\leq|\ell(x)|_{L^2(\mathbb{R}^3)}|u|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}|v|_{L^6(\mathbb{R}^3)}<+\infty,$$

logo, L_u está bem definido. Além disso, pela imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, temos

$$|L_u(v)| \leq S^{-1}|\ell(x)|_{L^2(\mathbb{R}^3)}|u|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}\|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.5}$$

onde S é a melhor constante de Sobolev na imersão mencionada anteriormente.

Fazendo $C = S^{-1}|\ell(x)|_{L^2(\mathbb{R}^3)}|u|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}$, temos

$$|L_u(v)| \leq C\|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)},\ \forall\, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

mostrando que L_u é limitada. Além disso, pela linearidade da integral, conclui-se que L_u é linear, e portanto, L_u é contínuo.

Notemos ainda que $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Hilbert, com o produto interno dado por

$$\langle \phi, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi\nabla v\, dx,\ \forall\, \phi, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

então, pelo Teorema de Lax-Milgram, para cada $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ existe uma única $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$L_u(v) = \langle \phi_u, v\rangle,\ \forall\, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_u\nabla v\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)u^2 v\, dx,\ \forall\, v\ \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \tag{1.6}$$

Mais precisamente, veja [6, 34], o termo não local ϕ_u dado por

$$\phi_u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)u^2(y)}{|x-y|}\, dy,$$

é a única solução fraca do problema

$$-\Delta\phi_u = \ell(x)u^2 \,\text{em}\, \mathbb{R}^3. \tag{1.7}$$

Portanto, está bem definido o operador $\phi : E \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ dado por $\phi(u) = \phi_u$, onde ϕ_u é a única solução de (1.7).

O próximo resultado apresenta importantes propriedades do termo ϕ_u que serão utilizadas ao longo deste capítulo.

Lema 1.1.2. *Assuma que (A_1) e (ℓ) ocorrem e que $u_n \rightharpoonup u$ em E, então,*

(i) Existe uma constante $C > 0$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\, dx \leq C\|u\|^4,\ \forall\, u \in E,$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n}u_n^2\, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\, dx,$

(iii) $\phi_{u_n} \to \phi_u$ *em* $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$,

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n} u_n u \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2 \, dx.$

Prova: Fazendo $v = \phi_u$ em (1.5) e (1.6), respectivamente, obtemos

$$|L_u(\phi_u)| \leq S^{-1} |\ell(x)|_{L^2(\mathbb{R}^3)} |u|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)} \|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \tag{1.8}$$

e

$$\|\phi_u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2 \, dx = L_u(\phi_u). \tag{1.9}$$

Assim, por $(1.8), (1.9)$ e a imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$, obtemos

$$\|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leq S^{-3} |\ell(x)|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.10}$$

Agora, note que, por (1.3) temos

$$\|u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{(1 - |\ell(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1})} \|u\|^2. \tag{1.11}$$

Portanto, segue-se de $(1.9), (1.10)$ e (1.11) que

$$\int_{R^3} \ell(x)\phi_u u^2 \, dx = \|\phi_u\|^2_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u\|^4, \, \forall \, u \in E,$$

onde $C = \left(\dfrac{S^{-3}|\ell(x)|_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{1 - |\ell(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}} \right)^2$, o que prova o item (i).

Para provar o item (ii), suponha que $u_n \rightharpoonup u$ em E, desde que (u_n) é limitada, então por (1.10), concluímos que a sequência (ϕ_{u_n}) também é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, existe $\phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, tal que, a menos de subsequência,

$$\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \tag{1.12}$$

Além disso, desde que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_{u_n} \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) u_n^2 \varphi \, dx, \, \forall \, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \tag{1.13}$$

de $(1.12), (1.13)$ e da passagem ao limite, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) u^2 \varphi \, dx, \, \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Usando a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) u^2 \varphi \, dx, \, \forall \, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

Pela unicidade de solução de (1.7), temos $\phi = \phi_u$. Logo, $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, e assim a menos de subsequência,

$$\phi_{u_n}(x) \to \phi_u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3.$$

Agora, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\phi_{u_n} u_n^2)^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}^2 u_n^4 \, dx$$

e como $\phi_{u_n}^2 \in L^3(\mathbb{R}^3), u_n^4 \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ e $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, então, pela desigualdade de Hölder,

$$|\phi_{u_n} u_n^2|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq |\phi_{u_n}|_{L^6(\mathbb{R}^3)} |u_n|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.14}$$

usando imersão contínua e o fato das sequências (ϕ_{u_n}) e (u_n) serem limitadas em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, concluímos por (1.14) que a sequência $(\phi_{u_n} u_n^2)$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Assim, como $\ell(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, podemos invocar o Lema de Brezis-Lieb para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_{u_n} u_n^2 \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_u u^2 \, dx,$$

o que prova o item (ii).

Agora note que, pelo item (ii)

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_{u_n}|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_u u^2 \, dx + o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi_u|^2 \, dx + o_n(1),$$

assim, $\phi_{u_n} \to \phi_u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, o que prova o item (iii).

Para provar o item (iv), observe que

$$\ell(x) \phi_{u_n}(x) u_n(x) \to \ell(x) \phi_u(x) u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3,$$

e que pela desigualdade de Hölder

$$|\ell(x)\, \phi_{u_n} u_n|^{\frac{6}{5}}_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\ell(x) \phi_{u_n}(x) u_n(x)|^{\frac{6}{5}} \, dx \leq |\ell(x)|^{\frac{6}{5}}_{L^2(\mathbb{R}^3)} |\phi_{u_n}|^{\frac{6}{5}}_{L^6(\mathbb{R}^3)} |u_n|^{\frac{6}{5}}_{L^6(\mathbb{R}^3)}$$

ou seja,

$$|\ell(x)\, \phi_{u_n} u_n|_{L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)} \leq |\ell(x)|_{L^2(\mathbb{R}^3)} |\phi_{u_n}|_{L^6(\mathbb{R}^3)} |u_n|_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.15}$$

Assim, usando novamente, a limitação de (ϕ_{u_n}) em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, a limitação de (u_n) em E e a imersão contínua de Sobolev de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$, concluímos por (1.15) que a sequência $(\ell(x)\, \phi_{u_n} u_n)$ é limitada em $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, desde que $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$, então, pelo Lema de Brezis-Lieb,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_{u_n} u_n u \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_u u^2 \, dx,$$

o que prova o item (iv) e finalizamos, assim, a prova do lema. $\blacksquare$

Lema 1.1.3. *Suponha que* (A_1) *e* (ℓ) *ocorrem. O funcional*

$$J_1(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u(x)u^2(x)\,dx$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ *e*

$$J_1'(u)v = 4\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u uv\,dx,\ \forall\, v \in E.$$

Prova: Mostraremos que a derivada de Gateaux de J_1 existe e é contínua em E'. De fato, note que pela definição de derivada,

$$J_1'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} \tag{1.16}$$

e usando a definição de $\phi_u(x)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\phi_{(u+tv)}(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)(u(y)+tv(y))^2}{|x-y|}\,dy \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)u^2(y)}{|x-y|}\,dy + 2t\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy + t^2\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)v^2(y)}{|x-y|}\,dy,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi_{(u+tv)}(x) = \phi_u(x) + 2t\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy + t^2\phi_v(x), \tag{1.17}$$

e desde que

$$\begin{aligned}
J_1(u+tv) = &\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{(u+tv)}(x)u^2(x)\,dx + 2t\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{(u+tv)}(x)u(x)v(x)\,dx \\
&+ t^2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{(u+tv)}(x)v^2(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Substituindo (1.17) em (1.18), obtemos

$$\begin{aligned}
J_1(u+tv) = &\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u(x)u^2(x)\,dx + 2t\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy u^2(x)\,dx \\
&+ t^2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_v(x)u^2(x)\,dx + 2t\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u(x)u(x)u(x)\,dx \\
&+ 4t^2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy\, u(x)v(x)\,dx + 2t^3\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_v(x)u(x)v(x)\,dx \\
&+ t^2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u(x)v^2(x)\,dx + 2t^3\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy\, v^2(x)\,dx \\
&+ t^4\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_v(x)v^2(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Assim, de (1.16) e (1.19) tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t} &= 2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy u^2(x)\,dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u(x)u(x)u(y)\,dx + t\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_v(x)u^2(x)\,dx \\
&+ 4t\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy\,u(x)v(x)\,dx \\
&+ 2t^2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_v(x)u(x)v(x)\,dx + t\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u(x)v^2(x)\,dx \\
&+ 2t^2\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy v^2(x)\,dx + t^3\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_v(x)v^2(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Para efeitos didáticos, vamos usar as seguintes notações:

$$F_1(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_v(x)u^2(x)\,dx \text{ e } F_2(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_v(x)u(x)v(x)\,dx$$

$$F_3(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u(x)v^2(x)\,dx \text{ e } F_4(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_v(x)v^2(x)\,dx.$$

$$F_5(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy\,u(x)v(x)\,dx$$
$$F_6(u,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy\,v^2(x)\,dx.$$

Note que pela desigualdade de Hölder as integrais em F_1, F_2, F_3 e F_4, são finitas. Além disso, também pela desigualdade de Hölder as funções $f(x) = \ell(x)u(x)v(x), g(y) = \ell(y)u(y)v(y) \in L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$ e como $\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3} = 2$, então, pelo Lema A.0.1 as integrais em F_5 e F_6, também são finitas. Assim,

$$
\begin{aligned}
J_1'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t} \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy\,u^2(x)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u(x)u(x)u(y)\,dx.
\end{aligned}
$$

Agora, note que

$$\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u(y)v(y)}{|x-y|}\,dy\,u^2(x)\,dx = \iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\ell(x)\ell(y)u(y)v(y)u^2(x)}{4\pi|x-y|}\,dx\,dy.$$

Aplicando os Teoremas de Tonelli e Fubini [Ver Apêndice A, Teorema A.0.3 e Teorema A.0.4], temos

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{\ell(x)\ell(y)u(y)v(y)u^2(x)}{4\pi|x-y|}\,dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\ell(y)u^2(y)}{|x-y|}\,dy\,u(x)v(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u(x)u(x)v(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, J_1 é Gateaux diferenciável, com

$$J_1'(u)v = 4\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u(x)u(x)v(x)\,dx,\ \forall\, u, v \in E.$$

Para mostrar que $J_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$ é suficiente provar que J_1' é contínua no dual de E. Suponha que $u_n \to u$ em E, então,

$$\begin{aligned}
\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\| &= \sup_{\|v\|=1} |(J_1'(u_n) - J_1'(u))v| \\
&= 4\sup_{\|v\|=1} \left|\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)(\phi_{u_n}u_n - \phi_u u)v\,dx\right| \\
&= 4\sup_{\|v\|=1} \left|\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n}u_n v\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u uv\,dx\right|.
\end{aligned}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$, então pelo Lema (1.1.2), item (iv) temos

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\| \to 0, \text{ quando}, n \to \infty,$$

assim, J_1' é contínuo e portanto, $J_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$. ■

Lema 1.1.4. *Para cada $u \in E$, considere G_{ϕ_u} o gráfico de*

$$\phi_u : u \in E \longmapsto \phi_u(u) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

Então,

$$G_{\phi_u} = \left\{(u, \phi) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3) : \partial_\phi \Gamma(u, \phi) = 0\right\}.$$

Além disso, $\phi_u \in C^1(E, D^{1,2}(\mathbb{R}^3))$.

Prova: A demonstração deste resultado segue argumentos padrões e pode ser encontrada em [12] ou [14]. ■

Agora, observe que fazendo $v = \phi_u$ em (1.6) e substituindo em (1.4) fica bem definido, o funcional J de uma variável, dado por

$$J(u) = \Gamma(u, \phi_u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)\,dx,\ \forall u \in E,$$

onde ϕ_u solução única de (1.7). Além disso, de acordo como o Lema 1.1.3, o funcional J é de classe $C^1(E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ com derivada de Gateaux dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u uv\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v\,dx,\ \forall v \in E,$$

dessa forma, temos o seguinte lema:

Lema 1.1.5. *O par $(u, \phi_u) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é ponto crítico do funcional Γ, ou seja, uma solução do sistema de Schrödinger-Poisson* (1.1) *se e somente se u é ponto crítico do funcional J e $\phi_u = \phi(u)$.*

Prova: Ver Benci e outros [12, 15] ou [20, pp. 4929–4932] para mais detalhes. ■

Note que os pontos críticos do funcional J são soluções fracas do problema não local

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi_u u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ (u, \phi_u) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{1.20}$$

E de acordo com o Lema 1.1.5, são também soluções fracas do sistema de Schrödinger-Poisson.

1.2 O Método de penalização de Del Pino e Felmer

A fim de usar o Método variacional e contornar a falta de compacidade da imersão de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$ e obter solução para o problema não local (1.20), usaremos a técnica de penalização introduzida por Del Pino e Felmer em [23] que consiste em estudar um problema auxiliar.

Para este fim, considere $k = \frac{2\theta}{\theta-4}$, $R > 1$ e defina as seguintes funções mensuráveis:

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(t), & se\ kf(t) \leq V(x)t \\ \frac{V(x)}{K}t, & se\ kf(t) > V(x)t, \end{cases} \tag{1.21}$$

e

$$g(x,t) = \begin{cases} f(t), & se\ |x| \leq R \\ \widetilde{f}(x,t), & se\ |x| > R. \end{cases} \tag{1.22}$$

Além disso, consideremos o problema não local penalizado

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi_u u = g(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ (u, \phi_u) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{1.23}$$

e o funcional energia de Euler-Lagrange $J : E \to \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\,dx, \tag{1.24}$$

onde $G(x,u) := \displaystyle\int_0^u g(x,s)\,ds$. É claro que, pelo Lema 1.1.3, o funcional J é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$, com derivada de Gateaux dada por:

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u uv\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)v\,dx,\ \forall\, v \in E. \tag{1.25}$$

Além disso, em vista das definições das funções $\widetilde{f}$ e g, e das condições sobre f as seguintes relações ocorrem:

(g_1) $\theta G(x,t) \leq g(x,t)t$, $\forall\, x \in B_R(0)$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

(g_2) $2G(x,t) \leq g(x,t)t \leq \frac{V(x)}{k}t^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

(g_3) $g(x,t) \leq \widetilde{f}(x,t) \leq f(t)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$ e $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

(g_4) $g(x,t) = f(t)$, $\forall\, x \in B_R(0)$.

Mostraremos a existência de solução não negativa e não trivial para o problema penalizado (1.23), para isso, provaremos que o funcional J satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, veja Apêndice A, Teorema A.0.2. Iniciamos com o seguinte resultado.

Lema 1.2.1. *Assuma que $(A_1), (\ell), (f_1) - (f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência $(PS)_c$ para J, então (u_n) é limitada em E.*

Prova: Note que

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right)\,dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_{u_n}|u_n|^2\,dx + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx \tag{1.26}$$

e observe que

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx = \frac{1}{\theta}\int_{B_R(0)}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx.$$

Usando a relação (g_1) concluímos que

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx \geq \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx,$$

e pela relação (g_2) temos

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx \geq \frac{2-\theta}{2k\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)}V(x)u_n^2\,dx.$$

Além disso, desde que $\Omega \subset B_R(0)$, então, $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)}V(x)u_n^2\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}V(x)u_n^2\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}V(x)u_n^2\,dx - \int_{\Omega}V(x)u_n^2\,dx.\end{aligned}$$

Agora, desde que $\theta > 4$, tem-se $\left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) < 0$, assim

$$\left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3 | B_R(0)} V(x)u_n^2\,dx \geq \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_n^2\,dx + \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right)\int_{\Omega} V(x)u_n^2\,dx. \qquad (1.27)$$

Lembrando que

$$\int_{\Omega} V(x)u_n^2\,dx \geq -|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,dx, \qquad (1.28)$$

segue por (1.27) e (1.28) que

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}\left[g(x,u_n)u_n - \theta G(x,u_n)\right]\,dx \geq \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_n^2\,dx - \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right)|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,dx. \qquad (1.29)$$

Combinado (1.29) e (1.26), obtemos

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n \geq{}& \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right)\,dx \\ &+ \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n}u_n^2\,dx + \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u_n^2\,dx \\ &- \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right)|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,dx. \end{aligned}$$

Efetuando alguns cálculos elementares obtemos

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n \geq{}& \left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)\left(\frac{\theta-2}{2k\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,dx \\ &+ \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\|u_n\|^2 + \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n}u_n^2\,dx. \end{aligned} \qquad (1.30)$$

Desde que $\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right) \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)$. Segue dessa desigualdade, da condição (A_1) e de (1.30) que

$$J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_n\|^2, \qquad (1.31)$$

e sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J, concluímos que

$$\left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_n\|^2 \leq o_n(1) + c\|u_n\|,$$

e portanto esta sequência é limitada em E. ■

Lema 1.2.2. *Assuma que* $(A_1), (\ell), (f_1) - (f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorrem. Então,* J *satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha, isto é,* $J(0) = 0$ *e*

(H1) Existem $\alpha, \rho > 0$*, tais que,* $J(u) \geq \alpha > 0$*, se* $\|u\| = \rho$*,*

(H2) Existe $u_0 \in C_0^\infty(B_1(0))$ *tal que* $J(u_0) < 0$ *com* $\|u_0\| > \rho$*.*

Prova: De fato, é claro que $J(0) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)\, dx, \end{aligned}$$

e pelas condições (f_1) e (f_2), temos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_0 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^6\, dx,$$

o que implica

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_1\|u\|^6 = \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - C_1\|u\|^4\right),\ \forall\, u \in E,$$

ou seja,

$$J(u) \geq \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - C_1\|u\|^4\right),\ \forall\, u \in E,$$

para alguma constante $C_1 > 0$.

Fazendo $\|u\| = \rho$ e escolhendo $\rho > 0$, tal que

$$\rho < \left[\frac{1}{4C_1}\right]^{\frac{1}{4}},$$

teremos $J(u) \geq \dfrac{1}{4}\rho^2$, assim, tomando $\alpha = \dfrac{1}{4}\rho^2 > 0$, obtemos

$$J(u) \geq \alpha > 0,\ \forall\, u \in E, \text{ com } \|u\| = \rho,$$

o que prova $(H1)$.

Para provar $(H2)$, fixamos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ com *supp* $\varphi \subseteq B_1(0)$ e considere $t > 0$, tal que $u = t\varphi$. Note que, pelo item (i) do Lema 1.1.2, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{t\varphi}(t\varphi)^2\, dx \leq \frac{Ct^4}{4}\|\varphi\|^4. \tag{1.32}$$

Pela condição (f_3) temos

$$\int_{s_0}^{s} \frac{\theta}{t}\, dt \leq \int_{s_0}^{s} \frac{f(t)}{F(t)}\, dt,\ \forall\, s > s_0,$$

usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\frac{F(s_0)}{s_0}s^\theta \le F(s);\ \forall\, s > s_0.$$

Sejam $C_1, C_2 > 0$, tais que $C_1 = \dfrac{F(s_0)}{s_0}$ e $C_2 = \max\{|F(s)| : s \in [0, s_0]\}$, então

$$F(s) \ge C_1 s^\theta - C_2,\ \forall\, s > 0, \tag{1.33}$$

e portanto, sendo $R > 1$, a definição da função g nos fornece

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} G(x,t\varphi)\,dx &= \int_{B_1(0)} G(x,t\varphi)\,dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_1(0)} G(x,t\varphi)\,dx\\ &= \int_{B_1(0)} F(t\varphi)\,dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_1(0)} G(x,t\varphi)\,dx,\end{aligned} \tag{1.34}$$

assim, de (1.33) e (1.34) temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(x,t\varphi)\,dx \ge \int_{B_1(0)} G(x,t\varphi)\,dx \ge C_1 t^\theta \int_{B_1(0)} |\varphi|^\theta\,dx - \frac{4\pi C_2}{3}, \tag{1.35}$$

e usando $(1.32), (1.35)$ e a definição do funcional J, teremos

$$J(t\varphi) \le \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{Ct^4}{4}\|\varphi\|^4 - C_1 t^\theta \int_{B_1(0)} |\varphi|\,dx + \frac{4\pi C_2}{3},$$

e desde que $\theta > 4$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, existe $t_0 > 0$ tal que $u_0 = t_0\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ com $\|u_0\| > \rho$ e $J(u_0) < 0$, o que prova a condição $(H2)$, completando assim a prova do Lema. ■

Lema 1.2.3. *Assuma que* $(A_1), (\ell), (f_1)-(f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorrem. Seja* (u_n) *uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* J*, então, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $r = r(\epsilon) > 0$*, tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_{2r}} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\,dx \le \epsilon,$$

onde $\Omega_{2r} := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \ge 2r\} = \mathbb{R}^3 \setminus B_{2r}(0)$.

Prova: De fato, seja $R < r$ e defina a função $\eta_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\eta_r \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

(b) $0 \le \eta_r \le 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}^3$.

(c) Existe $C > 0$, que não depende de r, tal que $|\nabla \eta_r(x)| \le \dfrac{C}{r},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^3$.

(d) $\eta_r(x) = 0, \forall\, x \in B_r(0)$ e $\eta_r(x) = 1, \forall\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{2r}(0)$.

Note que, desde que (u_n) é $(PS)_c$, pelo Lema 1.2.1, (u_n) é limitada em E, consequentemente, $(\eta_r u_n)$ é também limitada em E. Além disso,

$$J'(u_n)(\eta_r u_n) = o_n(1),$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n \nabla(\eta_r u_n) + V(x)(\eta_r u_n)u_n\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n}(\eta_r u_n)^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)(\eta_r u_n)\, dx = o_n(1),$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]\, dx = &-\int_{\mathbb{R}^3} \eta_r^2 \ell(x)\phi_{u_n}u_n^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \eta_r g(x,u_n)u_n\, dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n\, dx \,+\, o_n(1).\end{aligned}$$

Agora, usando a propriedade (d) da função η_r, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]\, dx = &-\int_{\Omega_r} \eta_r^2 \ell(x)\phi_{u_n}u_n^2\, dx + \int_{\Omega_r} \eta_r g(x,u_n)u_n\, dx \\ &- \int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n\, dx \,+\, o_n(1),\end{aligned} \tag{1.36}$$

onde $\Omega_r := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \geq r\} = \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$.

Observe que

$$\int_{\Omega_{2r}} [|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]\, dx \leq \int_{\Omega_r} [|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]\, dx, \tag{1.37}$$

Agora, desde que $R < r$, temos $B_R(0) \subset B_r(0)$, logo, $g(x,u_n) \leq \dfrac{1}{k}V(x)u_n^2$, $\forall\, x \in \Omega_r$, o que implica

$$\int_{\Omega_r} g(x,u_n)u_n\eta_r\, dx \leq \frac{1}{k}\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]\, dx, \tag{1.38}$$

assim, combinando (1.36) com (1.38), obtemos

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]\, dx &\leq -\int_{\Omega_r} \eta_r^2 \ell(x)\phi_{u_n}u_n^2\, dx - \int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n \,+\, o_n(1) \\ &\leq -\int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n\, dx \,+\, o_n(1),\end{aligned}$$

logo

$$\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2]\, dx \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1}\int_{\Omega_r} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx + \, o_n(1). \tag{1.39}$$

Note que, a condição (d), nos diz que $\nabla \eta_r = 0$ em Ω_{2r}, então

$$\int_{\Omega_r} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx = \int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx, \tag{1.40}$$

e desde que, $L^6(B_{2r}(0) \setminus B_r(0)) \hookrightarrow L^2(B_{2r}(0) \setminus B_r(0))$, podemos usar a propriedade (c) da função η_r e a desigualdade de Hölder, para concluir que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx &\leq \frac{C}{r}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla u_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\, dx,\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \frac{C}{r}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\, dx,\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Além disso, já sabemos por (1.3) que

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\, dx \geq \left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\, dx,$$

e sendo (u_n) limitada, existe uma constante $M > 0$, de modo que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M}{\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Portanto,

$$\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx \leq \frac{MC}{r}\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.41}$$

Agora, sendo E um espaço de Hilbert, (u_n) limitada em E, então, existe $u \in E$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em E e $u_n \to u$ em $L^2(B_{2r}(0) \setminus B_r(0))$. Assim,

$$\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\, dx,\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.42}$$

logo, por $(1.40), (1.41)$ e (1.42), temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{\Omega_r} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx\right] \leq \frac{MC}{r}\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

e fazendo uso da desigualdade de Hölder,

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{\Omega_r} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx\right] \leq \frac{MC|B_{2r}(0) \setminus B_r(0)|^{\frac{1}{3}}}{r\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^6\, dx\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{1.43}$$

Portanto, desde que $|B_{2r}(0) \setminus B_r(0)| \leq |B_{2r}(0)|$, então, combinando (1.37), (1.39) e (1.43) temos

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\int_{\Omega_{2r}} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\,dx \right] \leq \frac{\sqrt[3]{4\pi}2k(k-1)^{-1}MC}{\sqrt[3]{3}\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^6\,dx \right)^{\frac{1}{6}} < \epsilon,$$

o que é possível para $r > 0$, suficientemente grande, pois, $|u|^6$ é integrável em $\mathbb{R}^3$ e $|B_{2r}(0) \setminus B_r(0)| \longrightarrow 0$. ■

Lema 1.2.4. *Assuma que $(A_1), (\ell), (f_1) - (f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Então, J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J, isto é,

$$J(u_n) \to c \ \text{ e } \ J'(u_n) \to 0.$$

Desde que, pelo Lema 1.2.1 a sequência (u_n) é limitada, temos $J'(u_n)u_n = o_n(1)$ e assim

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n} u_n^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)u_n\,dx + o_n(1). \tag{1.44}$$

Note que por (g_2) e pelo fato de $\Omega \subset B_R(0) \subset B_{2r}(0)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} g(x,u_n)u_n\,dx \leq \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} V(x)u_n^2\,dx \leq \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\,dx,$$

assim, segue do Lema 1.2.3 que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} g(x,u_n)u_n\,dx = 0. \tag{1.45}$$

Agora, desde que $u_n \to u$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$ com $s \in [2,6)$ e $g(x,t) \leq f(t)$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, usando o crescimento subcrítico de f e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_{2r}(0)} g(x,u_n)u_n\,dx = \int_{B_{2r}(0)} g(x,u)u\,dx. \tag{1.46}$$

As igualdades em (1.45) e (1.46) nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)u_n\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u\,dx. \tag{1.47}$$

Assim, do item (i) do Lema 1.1.2, de (1.44) e (1.47), temos

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\,dx. \tag{1.48}$$

Além disso, como $u_n \rightharpoonup u$ em E, $g(x,u_n) \rightharpoonup g(x,u)$ em $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$, $J'(u_n)u = o_n(1)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_n \nabla u + V(x)u_n u)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx,$$

então, essas afirmações, juntamente como o item (iv) do Lema 1.1.2 nos dizem que

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\,dx. \tag{1.49}$$

De (1.48) e (1.49), concluímos que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em E. Portanto, J satisfaz a condição de Palais-Smale. ■

Teorema 1.2.1. *Assuma que as condições* $(A_1), (\ell), (f_1)-(f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorrem. Então, o problema penalizado* (1.23) *possui uma solução não trivial e não negativa.*

Prova: De fato, os Lemas (1.2.2) e (1.2.4) garantem que J cumpre as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, portanto, exite $u \in E$, tal que

$$J(u) = c > 0 \quad \text{e} \quad J'(u) = 0,\ \forall\ u \in E,$$

onde c é nível minimax do funcional J, ou seja,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = u_0\}.$$

Seja $u^- = \min\{u, 0\}$. Desde que $J'(u)u^- = 0$ e $g(x,t) = 0$, para $t \leq 0$, segue que

$$\|u^-\|^2 + \int_\Omega \ell(x)\phi_u(u^-)^2 = 0,$$

assim $u^- = 0$. Portanto, $u = u^+ \geq 0$ é solução não trivial e não negativa do problema (1.23). ■

1.3 Propriedades da solução do problema truncado (1.23)

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades da solução u do problema (1.23), obtida no teorema anterior, que nos permitirá provar que u também é solução do problema não local (1.20), o que é equivalente a mostrar que o par $(u, \phi_u) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução não trivial e não negativa do sistema (1.1), ver Lema 1.1.5.

Inicialmente, note que dada $u \in H_0^1(B_1(0))$, a extensão de u por zero fora de Ω, que denotaremos por $\widetilde{u}$, pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Logo, os mesmos argumentos anteriores, via Teorema de Lax-Milgran, mostram que existe um único $\phi_{\widetilde{u}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $-\Delta\phi_{\widetilde{u}} = \ell(x)\widetilde{u}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Portanto, o funcional $J_\infty : H_0^1(B_1(0)) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\infty(u) := \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{B_1(0)} \ell(x)\phi_{\widetilde{u}} u^2\,dx - \int_{B_1(0)} F(u)\,dx,$$

possui as Geometrias do Teorema do Passo da Montanha. Assim, está bem definido o nível minimax

$$d := \inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{t\in[0,1]} J_\infty(\gamma(t)) \ \text{ onde } \ \Gamma_0 = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(B_1(0))) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_0\}, \tag{1.50}$$

com $J_\infty(u_0) < 0$ e $u_0 \in C_0^\infty(B_1(0))$ dado no Lema (1.2.2).

O próximo lema relaciona o nível minimax do funcional J com o nível minimax do funcional J_∞.

Lema 1.3.1. *Assuma que as condições* $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1) - (f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorram. Então, o nível minimax* d *satisfaz* $c \leq d$.

Prova: De fato, note que para cada $u \in H_0^1(B_1(0))$ podemos escrever $J(\widetilde{u}) = J(u)$, onde identificamos u com sua extensão $\widetilde{u}$, pois,

$$J(\widetilde{u}) = \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{B_1(0)} \ell(x)\phi_{\widetilde{u}}u^2\,dx - \int_{B_1(0)} F(u)\,dx.$$

Usando a condição (A_2), temos

$$J(u) \leq J_\infty(u),\ \forall\, u \in H_0^1(B_1(0)).$$

Assim, usando as definição do nível d, ver (1.50), temos

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{t\in[0,1]} J_\infty(\gamma(t)) = d.$$

Claramente, $\Gamma \subset \Gamma_0$ com Γ dado na prova do Teorema 1.2.1. Portanto,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \leq d. \quad \blacksquare$$

Lema 1.3.2. *Assuma que as condições* $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1) - (f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorram. Então, para todo* $R > 1$ *a solução* $u \in E$ *do problema penalizado* (1.23) *satisfaz a estimativa*

$$\|u\|^2 \leq 2kd.$$

Prova: De fato, argumentando como em (1.31), obtemos

$$J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u\|^2,$$

logo,

$$d \geq c \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u\|^2,$$

e como $k = \dfrac{2\theta}{\theta-4}$, então, $\|u\|^2 \leq 2kd$. $\blacksquare$

Lema 1.3.3. *Assuma que as condições* $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1) - (f_3)$, *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorrem. Seja* $u \in E$ *uma solução do problema penalizado* (1.23), *então, existe uma constante* $M > 0$, *que não depende de* $R > 1$ *tal que*

$$|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq M|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}$$

Prova: Considere $\beta, \sigma > 1$ e defina

$$u_{\beta,\sigma}(x) = \min\left\{u^{\beta-1}(x), \sigma\right\} \text{ e } \Omega_\sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |u(x)|^{\beta-1} < \sigma\right\}.$$

Note que $u_{\beta,\sigma} \in E$ e $\nabla(u_{\beta,\sigma}u) = u_{\beta,\sigma}\nabla u + (\beta-1)u^{\beta-1}(\nabla u)_{\chi\Omega_\sigma}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^3} |u_{\beta,\sigma}\nabla u + (\beta-1)u^{\beta-1}(\nabla u)_{\chi\Omega_\sigma}|^2\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)u^{\beta-1}u_{\beta,\sigma}\nabla u(\nabla u)_{\chi\Omega_\sigma}\,dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3}(\beta-1)^2|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma}\,dx,\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^3}(u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma} + (\beta-1)^2|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma})\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2\,dx + (\beta^2-1)\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma}\,dx \\ &\leq (\beta+1)\int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2\,dx + 2(\beta+1)(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^3}(|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma})\,dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx \leq (\beta+1)\left[\int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2\,dx + 2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^3}(|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma})\,dx\right]. \quad (1.51)$$

Agora, observe que $\ell(x)\phi_u(u_{\beta,\sigma}u)^2 \geq 0$ em $\mathbb{R}^3$ e $V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2 \geq 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ e

$$\nabla u\nabla(u_{\beta,\sigma}^2u) = u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)u^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma}. \quad (1.52)$$

Assim, usando $(u_{\beta,\sigma}^2u)$ como função teste, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3}[\nabla u\nabla(u_{\beta,\sigma}^2u) + V(x)(u_{\beta,\sigma}^2u)]\,dx + \int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u u(u_{\beta,\sigma}^2u)\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)(u_{\beta,\sigma}^2u). \quad (1.53)$$

Da combinação de (1.52) e (1.53) obtém-se,

$$\left[\int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)u^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma}\,dx\right] \leq \int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u_{\beta,\sigma}^2u,$$

dessa desigualdade, e de (1.51) encontramos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx \leq (\beta+1)\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u)u^2_{\beta,\sigma}u.$$

Pelas condições $(f_1),(f_2)$ e a relação (g_3), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx &\leq C_0(\beta+1)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2}(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx \\ &\leq (\beta+1)\left[\int_{\Omega} -V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx + C_0\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2}(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx\right], \end{aligned} \tag{1.54}$$

para alguma constante positiva C_0 e $p \in (4,6)$.

Além disso, $V(x) \in L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega), (u_{\beta,\sigma}u)^2 \in L^{\frac{6}{8-p}}(\mathbb{R}^3)$ e $|u|^{p-2} \in L^{\frac{6}{p-2}}(\mathbb{R}^3)$, então, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Omega} -V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx \leq |V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)}\left(\int_{\Omega} |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2}(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx \leq |u|^{p-2}_{L^6(\mathbb{R}^3)}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}},$$

e usando essas duas últimas desigualdades, (1.54) e a irmesão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\begin{aligned}|u_{\beta,\sigma}u|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx \\ &\leq S^{-1}(\beta+1)\left[|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)}\left(\int_{\Omega} |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right] \\ &+ C_0S^{-1}(\beta+1)\left[|u|^{p-2}_{L^6(\mathbb{R}^3)}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right]. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Agora, pela definição de $(u_{\beta,\sigma})$ e (1.55) concluímos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u^\beta|^6\,dx\right)^{\frac{1}{3}} &\leq S^{-1}(\beta+1)\left[|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)}\left(\int_{\Omega} |u^\beta|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right] \\ &+ S^{-1}C_0C_1^{p-2}(\beta+1)\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u^\beta|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}, \end{aligned}$$

o que implica,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{6\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{6\beta}} \leq \left(2S^{-1}|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)} + 2S^{-1}C_0C_1^{p-2}\right)^{\frac{1}{2\beta}}\beta^{\frac{1}{2\beta}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\frac{12\beta}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{12\beta}},$$

assim, fazendo $C = 2S^{-1}|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)} + 2S^{-1}C_0C_1^{p-2}$, obtemos

$$|u|_{L^{6\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq C^{\frac{1}{2\beta}}\beta^{\frac{1}{2\beta}}|u|_{L^{\frac{12\beta}{8-p}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.56}$$

Agora, recorde que $p \in (4,6)$, ver (A_1), e considere a sequência $\beta_n = \left(\frac{8-p}{2}\right)^n$, onde $n \geq 1$ é um número natural. Então, para $n = 1$ em (1.56), temos

$$|u|_{L^{6\beta_1}(\mathbb{R}^3)} \leq C^{\frac{1}{2\beta_1}}\beta_1^{\frac{1}{2\beta_1}}|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.57}$$

Fazendo $n = 2$ em (1.56), em seguida, usando (1.57) e $\beta_2 = \beta_1^2$, obtemos

$$\begin{aligned}|u|_{L^{6\beta_2}(\mathbb{R}^3)} &\leq C^{\frac{1}{2\beta_2}}\beta_2^{\frac{1}{2\beta_2}}|u|_{L^{6\beta_1}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_1^2}\right)}\beta_1^{\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_1^2}}|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Continuando o processo de forma indutiva, concluímos que

$$|u|_{L^{6\beta_n}(\mathbb{R}^3)} \leq C^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_1}+\ldots+\frac{1}{\beta_1^n}\right)}\beta_1^{\frac{1}{\beta_1}+\ldots+\frac{1}{\beta_1^n}}|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.58}$$

Agora, observando que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta_1}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{1}{\beta_1}} = \frac{8-p}{6-p}$$

obtemos, por (1.58) que

$$|u|_{L^{6\beta_1^n}(\mathbb{R}^3)} \leq C^{\frac{8-p}{2(6-p)}}\left(\frac{(8-p)}{2}\right)^{\frac{8-p}{6-p}}|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \tag{1.59}$$

Portanto, desde que $\beta_1 > 1$, por passagem ao limite em (1.59) com $n \to \infty$, concluímos $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e

$$|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq M|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)},$$

onde definimos a constante

$$M := C^{\frac{8-p}{2(6-p)}}\left(\frac{(8-p)}{2}\right)^{\frac{8-p}{6-p}}.$$

■

Lema 1.3.4. *Assuma que as condições $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1)-(f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Seja $u \in E$ a solução do problema* (1.23)*, obtida no Teorema 1.2.1, e $R > 1$. Então, u satisfaz*

$$|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq M\left(\frac{2S^2kd}{S-|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova: De fato, por (1.3) temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \geq (1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx. \tag{1.60}$$

Assim, usando o Lema 1.3.2, a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e (1.60), obtemos

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq M|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq MS^{\frac{1}{2}}\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq MS^{\frac{1}{2}}(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1})^{-\frac{1}{2}}\|u\| \\ &= M\left(\frac{S^2}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|. \end{aligned}$$

Portanto, ainda pelo Lema 1.3.2, temos

$$|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq M\left(\frac{S^2}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}} (2kd)^{\frac{1}{2}} = M\left(\frac{2S^2kd}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \blacksquare$$

Lema 1.3.5. *Assuma que as condições* $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1) - (f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorrem. Então, para cada* $R > 1$, *temos*

$$u(x) \leq \frac{R|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{|x|} \leq \frac{RM}{|x|}\left(\frac{2S^2kd}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0),$$

onde u *é a solução de* (1.23) *obtida no Teorema 1.2.1.*

Prova: Seja $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função harmônica dada por

$$v(x) = \frac{RM}{|x|}\left(\frac{2S^2kd}{S - |V(x)|_{L^{3/2}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que pelo Lema anterior, temos $u(x) \leq v(x)\, q.t.p$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$, assim, a função definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} (u - v)^+(x), & \text{se } |x| \geq R, \\ \\ 0, & \text{se } |x| \leq R, \end{cases}$$

pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, desde que $0 \leq \psi \leq u$, então, $\psi \in E$. Considerando agora a função ψ como função teste e usando o fato que u é solução não negativa de (1.23), temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \psi \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u\psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} (g(x, u) - V(x)u)\psi \, dx,$$

assim, por (A_1) e (g_2) temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \psi \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \psi \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u \psi \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} (g(x,u) - V(x)u)\psi \, dx, \\ &\leq \left(\frac{1}{k} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} V(x) u \psi \, dx \leq 0.\end{aligned}$$

Desde que $\Delta v = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ e $\psi = 0$ em $\partial B_R(0)$, então, pelo Teorema do Divergente

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \psi \nabla \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \psi \nabla (u - v)\psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \psi \, dx \leq 0,$$

ou seja, $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3$. Portanto, $u \leq v$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$. ■

1.3.1 Prova do Teorema 1.0.1

Nesta seção, além das hipóteses (A_1) e (A_2), assumiremos que (A_3) ocorre. Então, usaremos os resultados anteriores para provar o Teorema 1.0.1, mais precisamente, que a solução u de (1.23) fornece solução do sistema (1.1).

Prova do Teorema 1.0.1: Desde que, o problema penalizado (1.23) possui uma solução não trivial e não negativa $u \in E$, é suficiente provar que u satisfaz a desigualdade

$$\frac{f(u)}{u} \leq \frac{V(x)}{k}, \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0).$$

Note que pela condição (f_1) e o Lema 1.3.5, temos

$$\frac{f(u)}{u} \leq C_0 |u|^4 \leq C_0 \left[\frac{RM}{|x|} \left(\frac{2S^2 kd}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^4 = C_0 \frac{R^4}{|x|^4} \left(\frac{2MS^2 kd}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}} \right)^2,$$

e pela condição (A_3), temos

$$\frac{f(u)}{u} \leq C_0 \left(\frac{2MS^2 kd}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}} \right)^2 \frac{V(x)}{\Lambda} = \frac{kC_0}{\Lambda} \left(\frac{2MS^2 kd}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}} \right)^2 \frac{V(x)}{k}.$$

De modo que, fixando $\Lambda^* > 0$, tal que

$$kC_0 \left(\frac{2MS^2 kd}{S - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}} \right)^2 \leq \Lambda^*,$$

teremos, para todo $\Lambda \geq \Lambda^*$

$$\frac{f(u)}{u} \leq \frac{V(x)}{k} \Leftrightarrow f(u) \leq \frac{V(x)}{k}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0).$$

Assim, pela definição do truncamento de g, segue que a solução fraca do problema (1.23) é também solução (não trivial e não negativa) do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi_u u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ (u, \phi_u) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Portanto, pelo Lema 1.1.5, conluímos que o par $(u, \phi_u) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução não trivial e não negativa do sistema (1.1) ■

Capítulo

2

Existência de solução não negativa e não trivial para um sistema de equação do tipo Schrödinger-Poisson com expoente crítico e supercrítico.

Neste capítulo, estudamos a seguinte classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi u = f(u) + \lambda |u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = \ell(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u, \phi \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^3, \ u, \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\ell(x)$, $V(x)$ e f satisfazem as mesmas hipóteses do Capítulo 1 e $q \geq 6$. A principal novidade aqui é a pertubação $\lambda|u|^{q-2}u$ que pode ser crítica ou superlinear supercrítica.

Para facilitar a leitura, iremos enunciar novamente as hipóteses sobre as funções $\ell(x)$, $V(x)$ e f, e definir a noção de solução para (2.1).

(A_1) $V(x) \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega) \cap L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)$, $|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} < S$, onde $S > 0$ é a melhor constante da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) < 0\}$ e $4 < p < 6$.

(A_2) Existe uma contante $V_\infty > 0$ tal que $V(x) \leq V_\infty$, $\forall\, x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

(A_3) Existem constantes $\Lambda > 0$ e $R > 1$, tal que, $\displaystyle\frac{1}{R^4} \inf_{|x| \geq R} |x|^4 V(x) \geq \Lambda$.

(ℓ) $\ell(x) \in L^2(\mathbb{R}^3), \ell(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ e $\ell \not\equiv 0$.

(f_1) $\displaystyle\limsup_{s \to 0^+} \frac{sf(s)}{s^6} < +\infty$.

(f_2) $\displaystyle\limsup_{s \to +\infty} \frac{sf(s)}{s^p} = 0$, onde p é dado em (A_1).

(f_3) Existe $\theta > 4$ tal que $0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)\,dt \leq sf(s)\,\forall\, s \geq 0$.

Definição 2.0.1. *Uma solução (fraca) não trivial e não negativa para* (2.1) *é um par* $(u, \phi) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, *tal que* $u, \phi \not\equiv 0, u, \phi \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^3$ *e as seguintes igualdades ocorrem*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)uv\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi uv\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v\,dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{q-2}uv\,dx,\ \forall\, v \in E$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \nabla \varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)u^2\varphi\,dx,\ \forall\, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

O principal resultado deste capítulo pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 2.0.1. *Suponha que* $(A_1) - (A_3), (\ell)$ *e* $(f_1) - (f_3)$ *ocorrem. Então, existem constantes* $\lambda^* = \lambda^*(S, \theta, p, C_0, |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}) > 0$ *e* $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, C_0, |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}) > 0$, *tais que o sistema* (2.1) *possui solução não trivial e não negativa, para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$ *e* $\Lambda \geq \Lambda^*$.

Para demonstrar o Teorema 2.0.1 utilizamos as ideias em [16], [12], [2]. Mais precisamente, fizemos uma adaptação da técnica de Penalização introduzida por Del Pino e Felmer em [23] e Benci e Fortunato [12, 15]. A saber, a técnica consiste em truncar a não linearidade $f(t) + \lambda|t|^{q-2}t$ e considerar um problema não local associado (2.9) que tem estrutura variacional e o funcional associado satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, aplicamos alguns resultados técnicos e o método de Iteração de Moser [31] combinado com o tamanho do parâmetro λ para provar que a solução do problema truncado fornece a solução do problema original.

Note que da mesma forma que foi feito no Capítulo 1, usando o Teorema de Lax-Milgram, para cada $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, existe uma única $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ solução da segunda equação do sistema (2.1) e assim (2.1) reduz-se ao seguinte problema não local

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi_u u = f(u) + \lambda|u|^{q-2}u \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ (u, \phi_u) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1 O Método de penalização de Del Pino e Felmer e a Formulação variacional do problema

Inicialmente, observe que por (f_1) e (f_2) existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$f(s) \leq C_0 s^{p-1} \qquad \text{e} \qquad f(s) \leq C_0 s^5, \forall\, s \geq 0, \tag{2.3}$$

e que o funcional associado ao problema (2.1) é dado por

$$\mathcal{J}_\lambda(u, \phi) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} F(u)\,dx - \frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^q\,dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2\,dx.$$

Para aplicar o método variacional no estudo de $\mathcal{J}_\lambda$, temos pelo menos duas dificuldades. A primeira é que como podemos ter $q > 6$, o funcional $\mathcal{J}_\lambda$ não está bem definido sobre $E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, pois só temos as imersões $E, D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. A segunda dificuldade deve-se ao fato do funcional $\mathcal{J}_\lambda$ ser fortemente indefinido. Para contornar essas dificuldades, adaptaremos as ideias de [2], [16] e [12], que consiste na modificação da não linearidade $f(u) + \lambda|u|^{q-2}$ fornecendo um problema auxiliar.

Desde que estamos interessados em solução positiva para (2.1), vamos supor que

$$f(s) = 0, \ \forall \ s \leq 0.$$

Considere $m \in \mathbb{N}$ e $g_{\lambda,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguinte função auxiliar

$$g_{\lambda,m}(s) = \begin{cases} 0, & se \ s < 0 \\ f(s) + \lambda s^{q-1}, & se \ 0 \leq s \leq m \\ f(s) + \lambda m^{q-p} s^{p-1}, & se \ s \geq m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Sem perda de generalidade, por (2.3) e (2.4), podemos supor que existe $C_0 \geq 1$ tal que

$$g_{\lambda,m}(s) \leq C_0(1 + \lambda m^{q-p})s^{p-1} \quad \text{e} \quad g_{\lambda,m}(s) \leq C_0(1 + \lambda m^{q-p})s^5, \ \forall s \geq 0. \tag{2.5}$$

Além disso, considerando

$$G_{\lambda,m}(s) = \int_0^s g_{\lambda,m}(t)dt,$$

temos,

$$G_{\lambda,m}(s) = \begin{cases} 0, & se \ s \leq 0 \\ F(s) + \lambda s^q, & se \ 0 \leq s \leq m \\ F(s) + \frac{\lambda}{p} m^{q-p} s^p + \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) m^q, & se \ s \geq m \end{cases} \tag{2.6}$$

e

$$G_{\lambda,m}(s) \leq \frac{C_0}{p}(1 + \lambda m^{q-p})s^p \quad \text{e} \quad G_{\lambda,m}(s) \leq \frac{C_0}{6}(1 + \lambda m^{q-p})s^5, \forall s \geq 0.$$

Note que por (2.5) e (2.6), o funcional $\mathcal{J}_{\lambda,m} : E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{J}_{\lambda,m}(u, \phi) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi u^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} G_{\lambda,m}(u) \, dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi|^2 \, dx,$$

é de classe $C^1\left(E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \mathbb{R}\right)$ e suas derivadas parciais são

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\lambda,m}}{\partial u}(u, \phi)\xi = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla \xi + V(x)u\xi)dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi u\xi dx - \int_{\mathbb{R}^3} g_{\lambda,m}(u)\xi dx \, \forall \, \xi \in E,$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\lambda,m}}{\partial \phi}(u,\phi)\eta = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)u^2\eta dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi\nabla\eta dx,\ \forall\, \eta \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

Assim, os pontos críticos (u,ϕ) de $\mathcal{J}_{\lambda,m}$ em $E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ que verificam a condição $|u|_{L^\infty} \leq m$ são soluções de (2.1).

Entretanto, como no Capítulo 1, o funcional $\mathcal{J}_{\lambda,m}$ é fortemente indefinido e precisamos contornar a falta de compacidade das imersões $E, D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Para isso, usamos o chamado *Método de redução*, veja [12] e um novo truncamento.

Afim de alcançar esse objetivo, seja $k = \dfrac{2\theta}{\theta-2}$ e considere a função mensurável $\widetilde{g}_{\lambda,m} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widetilde{g}_{\lambda,m}(x,s) = \begin{cases} 0, & se\ x\in\mathbb{R}^3 \text{ e } s\leq 0 \\ \\ g_{\lambda,m}(s), & se\ kg_{\lambda,m}(s) \leq V(x)s \\ \\ \frac{V(x)}{K}s, & se\ kg_{\lambda,m}(s) > V(x)s. \end{cases} \tag{2.7}$$

Além disso, para $R>1$ definimos também a função de penalização

$$h_{\lambda,m}(x,s) = \begin{cases} g_{\lambda,m}(s), & se\, |x|\leq R \\ \\ \widetilde{g}_{\lambda,m}(x,s), & se\, |x| > R. \end{cases} \tag{2.8}$$

Finalmente, estudaremos o seguinte problema penalizado

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \ell(x)\phi_u u = h_{\lambda,m}(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ (u,\phi_u) \in E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{2.9}$$

Note que das hipóteses sobre f e da definição de $g_{\lambda,m}$ podemos obter as seguintes relações sobre $h_{\lambda,m}$:

(h_1) $\theta H_{\lambda,m}(x,s) \leq h_{\lambda,m}(x,s)s,\ \forall\, x\in B_R(0)$ e $\forall\, s\in\mathbb{R}$,

(h_2) $2H_{\lambda,m}(x,s) \leq h_{\lambda,m}(x,s)s \leq \frac{V(x)}{k}s^2,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)$ e $\forall\, s\in\mathbb{R}$,

(h_3) $h_{\lambda,m}(x,s) \leq \widetilde{g}_{\lambda,m}(x,s) \leq g_{\lambda,m}(s),\ \forall\, x\in\mathbb{R}^3$ e $\forall\, s\in\mathbb{R}$,

(h_4) $h_{\lambda,m}(x,s) = g_{\lambda,m}(s),\ \forall\, x\in B_R(0)$.

Ao problema auxiliar (2.9) associamos o funcional Energia de Euler-Lagrange $J_{\lambda,m} : E\to\mathbb{R}$, definido por

$$J_{\lambda,m}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} H_{\lambda,m}(x,u)\,dx,$$

onde $H_{\lambda,m}(x,u) := \int_0^u h_{\lambda,m}(x,s)\,ds$.

Pelo Lema 1.1.3 temos $J_{\lambda,m} \in C^1(E, \mathbb{R})$ e para todo $\psi \in E$, sua derivada de Gateaux é dada por:

$$J'_{\lambda,m}(u)\psi = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla \psi + V(x)u\psi)\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u\psi\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u)\psi\,dx.$$

Observamos que pela definição de $h_{\lambda,m}$ os pontos críticos u de $J_{\lambda,m}$ que verificam $|u|_{L^\infty} \leq m$ fornecem soluções (a saber (u, ϕ_u)) do sistema (2.1).

A próxima seção, será dedicada a encontrar pontos críticos de $J_{\lambda,m}$ que satisfazem a condição estabelecida.

2.2 Existência de solução para o problema auxiliar (2.9)

Nesta seção, aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz para mostrar que o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema auxiliar (2.9) tem um ponto crítico e consequentemente obter solução de (2.9).

Lema 2.2.1. *Assuma que $(A_1), (\ell), (f_1) - (f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem e seja $(u_n) \subset E$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $J_{\lambda,m}$, então, (u_n) é limitada em E.*

Prova: De fato, note que,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,m}(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_{\lambda,m}(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right)\,dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n}u_n^2\,dx \\ + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3} \left[h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n)\right]\,dx, \end{aligned} \tag{2.10}$$

além disso, observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3} \left[h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n)\right]\,dx = \frac{1}{\theta}\int_{B_R(0)} \left[g(x,u_n)u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n)\right]\,dx \\ + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \left[h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n)\right]\,dx, \end{aligned}$$

então, usando a relação (h_1) concluímos que

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3} \left[h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n)\right]\,dx \geq \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \left[h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n)\right]\,dx.$$

Pela relação (h_2), temos

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3} \left[h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n)\right]\,dx \geq \frac{2-\theta}{2k\theta}\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} V(x)u_n^2\,dx. \tag{2.11}$$

Desde que $\Omega \subset B_R(0)$, então, $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, logo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} V(x) u_n^2 \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} V(x) u_n^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n^2 \, dx - \int_{\Omega} V(x) u_n^2 \, dx.\end{aligned}$$

Agora, desde que $\theta > 4$, tem-se $\left(\dfrac{2-\theta}{2k\theta}\right) < 0$, assim

$$\begin{aligned}\left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} V(x) u_n^2 \, dx \geq & \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n^2 \, dx \\ & - \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) \int_{\Omega} V(x) u_n^2 \, dx. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\int_{\Omega} V(x) u_n^2 \, dx \geq -|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx, \qquad (2.13)$$

segue por (2.11), (2.12) e (2.13) que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^3} \left[h_{\lambda,m}(x,u_n) u_n - \theta H_{\lambda,m}(x,u_n) \right] dx \geq & \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n^2 \, dx \\ & + \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Usando (2.14) em (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}J_{\lambda,m}(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,m}(u_n) u_n \geq & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla u_n|^2 + V(x) u_n^2 \right) dx \\ & + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_{u_n} u_n^2 \, dx + \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} V(x) u_n^2 \, dx \\ & + \left(\frac{2-\theta}{2k\theta}\right) |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Em consequência,

$$\begin{aligned}J_{\lambda,m}(u_n) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,m}(u_n) u_n \geq & \left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right) \left(\frac{\theta-2}{2k\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx \\ & + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right) \|u_n\|^2 + \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_{u_n} u_n^2 \, dx. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Notando que

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right) \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_{u_n} u_n^2 \, dx \geq 0.$$

Segue da condição (A_1) e (2.15) que

$$J_{\lambda,m}(u_n) - \frac{1}{\theta}J'_{\lambda,m}(u_n)u_n \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_n\|^2.$$

Por outro lado, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para $J_{\lambda,m}$, concluímos que

$$\left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_n\|^2 \leq o_n(1) + c\|u_n\|.$$

Portanto (u_n) é uma sequência limitada em E. ■

Lema 2.2.2. *Assuma que $(A_1), (\ell), (f_1)-(f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Então, $J_{\lambda,m}$ satisfaz as seguintes condições:*

(H1) Existem $\alpha, \rho > 0$, tais que, $J_{\lambda,m}(u) \geq \alpha > 0$, se $\|u\| = \rho$,

(H2) Existe $u_0 \in C_0^\infty(B_1(0))$ tal que $\|u_0\| > \rho$ e $J_{\lambda,m}(u_0) < 0$.

Prova: De fato, desde que

$$J_{\lambda,m}(u) \;=\; \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3}H_{\lambda,m}(x,u)\,dx,$$

por (h_3) e (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}
J_{\lambda,m}(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_u u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3}G_{\lambda,m}(x,u)\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^3}G_{\lambda,m}(x,u)\,dx, \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_0(1+\lambda m^{q-p})}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\,dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando a imersão contínua de E em $L^6(\mathbb{R}^3)$, obtemos uma constante $C = C(\lambda, m) > 0$, tal que

$$J_{\lambda,m}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^6 = \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - C\|u\|^4\right),\ \forall\, u \in E,$$

o que prova $(H1)$.

Para provar $(H2)$, fixamos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)\setminus\{0\}$, com $\varphi \geq 0$ em $\mathbb{R}^3$. Note que pelo item (i) do Lema 1.1.2, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\ell(x)\phi_{t\varphi}(t\varphi)^2\,dx \leq \frac{Ct^4}{4}\|\varphi\|^4. \tag{2.16}$$

Além disso, pela condição (f_3), concluímos que

$$F(s) \geq C_1 s^\theta - C_2, \, \forall \, s > 0.$$

Observe que por (2.6) e (2.10), temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} H_{\lambda,m}(x, t\varphi)\, dx = \int_{B_1(0)} G_{\lambda,m}(x, t\varphi)\, dx \geq \int_{B_1(0)} F(t\varphi)\, dx,$$

assim, usando o fato de que $G_{\lambda,m}(x,t) \geq F(t)$ em $B_R(0) \times \mathbb{R}$, para obter

$$\int_{\mathbb{R}^3} H_{\lambda,m}(x, t\varphi)\, dx \geq C_1 t^\theta \int_{B_1(0)} |\varphi|^\theta \, dx - \frac{4\pi C_2}{3}, \tag{2.17}$$

logo, (2.16), (2.17) e a definição de $J_{\lambda,m}$, nos permite concluir que

$$J_{\lambda,m}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{Ct^4}{4}\|\varphi\|^4 - C_1 t^\theta \int_{B_1(0)} |\varphi|\, dx + \frac{4\pi C_2}{3},$$

e desde que $\theta > 4$, então, existe $t_0 > 0$, suficientemente grande, tal que $J_{\lambda,m}(t_0\varphi) < 0$, o que prova $(H2)$. ■

O próximo lema será de fundamental importância para provar que o funcional $J_{\lambda,m}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 2.2.3. *Assuma que $(A_1), (\ell), (f_1)-(f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para $J_{\lambda,m}$, então, dado $\epsilon > 0$, existe $r = r(\epsilon) > 0$, tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_{2r}} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\, dx \leq \epsilon,$$

onde $\Omega_{2r} := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \geq 2r\} = \mathbb{R}^3 \setminus B_{2r}(0)$.

Prova: De fato, seja $R < r$ e defina a função $\eta_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\eta_r \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

(b) $0 \leq \eta_r \leq 1 \, \forall \, x \in \mathbb{R}^3$.

(c) Existe $C > 0$, que não depende de r, tal que $|\nabla \eta_r(x)| \leq \dfrac{C}{r}, \, \forall \, x \in \mathbb{R}^3$.

(d) $\eta_r(x) = 0, \, \forall \, x \in B_r(0)$ e $\eta_r(x) = 1, \, \forall \, x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{2r}(0)$.

Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para $J_{\lambda,m}$, pelo Lema (2.2.1), (u_n) é limitada em E. Consequentemente, $(\eta_r u_n)$ é também limitada em E e

$$J'_{\lambda,m}(u_n)(\eta_r u_n) = o_n(1),$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n \nabla(\eta_r u_n) + V(x)(\eta_r u_n)u_n \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n}(\eta_r u_n)^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u_n)(\eta_r u_n) \, dx = o_n(1),$$

e em consequência, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \, dx = & -\int_{\mathbb{R}^3} \eta_r^2 \ell(x)\phi_{u_n} u_n^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \eta_r h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n \, dx \\ & -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n \, dx \, + \, o_n(1).\end{aligned}$$

Agora, usando a propriedade (d) da função η_r, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \, dx = & -\int_{\Omega_r} \eta_r^2 \ell(x)\phi_{u_n} u_n^2 \, dx + \int_{\Omega_r} \eta_r h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n \, dx \\ & -\int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n \, dx \, + \, o_n(1),\end{aligned}$$

onde $\Omega_r := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \geq r\} = \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)$.

Observe que

$$\int_{\Omega_{2r}} [|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \, dx \leq \int_{\Omega_r} [|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \, dx. \tag{2.18}$$

Além disso, desde que $R < r$, então, $B_R(0) \subset B_r(0)$, assim, por (h_2), $h_{\lambda,m}(x,u_n) \leq \frac{1}{k}V(x)u_n^2$, $\forall\, x \in \Omega_r$, o que implica

$$\int_{\Omega_r} h_{\lambda,m}(x,u_n)u_n\eta_r \, dx \leq \frac{1}{k}\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \, dx. \tag{2.19}$$

Assim, combinando (2.18) com (2.19), obtemos

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \, dx & \leq -\int_{\Omega_r} \eta_r^2 \ell(x)\phi_{u_n} u_n^2 \, dx - \int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n \, + \, o_n(1) \\ & \leq -\int_{\Omega_r} \nabla\eta_r \nabla u_n u_n \, dx \, + \, o_n(1),\end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\Omega_r} \eta_r[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2] \, dx \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-1}\int_{\Omega_r} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n| \, dx + \, o_n(1). \tag{2.20}$$

Note que, a condição (d), nos diz que $\nabla\eta_r = 0$ em Ω_{2r}, então,

$$\int_{\Omega_r} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n|\,dx = \int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n|\,dx. \tag{2.21}$$

E portanto, podemos usar a propriedade (c) da função η_r e a desigualdade de Hölder para concluir que

$$\begin{aligned}\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n|\,dx &\leq \frac{C}{r}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla u_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\,dx,\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{C}{r}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Além disso, por (1.3), (ver Capítulo 1)

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\,dx \geq \left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}S^{-1}\right)\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,dx,$$

e sendo (u_n) limitada em E, existe uma constante $M > 0$, de modo que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M}{\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

assim,

$$\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n|\,dx \leq \frac{MC}{r\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.22}$$

Agora, sendo E um espaço de Hilbert, então, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^2(B_{2r}(0)\setminus B_r(0))$. Assim,

$$\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u_n|^2\,dx,\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.23}$$

logo, por (2.21), (2.22) e (2.23), temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{\Omega_r} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n|\,dx\right] \leq \frac{MC}{r\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

de onde obtemos, pela desigualdade de Hölder,

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\int_{\Omega_r} |\nabla\eta_r||\nabla u_n||u_n|\,dx\right] \leq \frac{MC|B_{2r}(0)\setminus B_r(0)|^{\frac{1}{3}}}{r\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^6\,dx\right)^{\frac{1}{6}}. \tag{2.24}$$

Portanto, desde que $|B_{2r}(0) \setminus B_r(0)| \leq |B_{2r}(0)|$, combinando $(2.18), (2.20)$ e (2.24) temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left[\int_{\Omega_{2r}} |\nabla \eta_r||\nabla u_n||u_n|\, dx \right] &\leq \frac{2k\sqrt[3]{4\pi}MC}{\sqrt[3]{3}(k-1)\left(1 - |V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} S^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{B_{2r}(0)\setminus B_r(0)} |u|^6\, dx \right)^{\frac{1}{6}} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

que é possível, pois, $|u|^6$ é integrável em $\mathbb{R}^3$ e $|B_{2r}(0) \setminus B_r(0)| \longrightarrow 0$ quando $r \to \infty$ ■

Lema 2.2.4. *Assuma que $(A_1), (\ell), (f_1) - (f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Então, $J_{\lambda,m}$ satisfaz a condição Palais-Smale.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para $J_{\lambda,m}$, isto é,

$$J_{\lambda,m}(u_n) \to c \ \text{ e } \ J'_{\lambda,m}(u_n) \to 0.$$

Pelo Lema 2.2.1, a sequência (u_n) é limitada em E, logo, $J'_{\lambda,m}(u_n)u_n = o_n(1)$. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_n} u_n^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x, u_n)u_n\, dx + o_n(1). \tag{2.25}$$

Note que por (h_2) e pelo fato de $\Omega \subset B_R(0) \subset B_{2r}(0)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} h_{\lambda,m}(x, u_n)u_n\, dx \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} V(x)u_n^2\, dx \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} (|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2)\, dx,$$

assim, segue do Lema 2.2.3 que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{2r}(0)} h_{\lambda,m}(x, u_n)u_n\, dx = 0. \tag{2.26}$$

Agora, usando a continuidade da função $h_{\lambda,m}$, a relação (h_3), o crescimento subcrítico de $g_{\lambda,m}$ (ver (2.5)), a imersão compacta $E \hookrightarrow L^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para $2 \leq s < 6$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B_{2r}(0)} h_{\lambda,m}(x, u_n)u_n\, dx = \int_{B_{2r}(0)} h_{\lambda,m}(x, u)u\, dx. \tag{2.27}$$

As igualdades em (2.26) e (2.27) nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x, u_n)u_n\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x, u)u\, dx. \tag{2.28}$$

Assim, usando o item (i) do Lema 1.1.2, (2.25) e (2.28), temos

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda.m}(x, u)u\, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\, dx. \tag{2.29}$$

Novamente, a continuidade de $h_{\lambda,m}$, (h_3), o crescimento subcrítico de $g_{\lambda,m}$, a imersão compacta $E \hookrightarrow L^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para $2 \leq s < 6$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, implicam que

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u_n)\varphi\,dx \to \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u)\varphi\,dx, \tag{2.30}$$

e pela convergência fraca, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_n \nabla \varphi + V(x)u_n\varphi)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla \varphi + V(x)u\varphi)\,dx, \tag{2.31}$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Além disso, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para $J_{\lambda,m}$, temos $J'_{\lambda,m}(u_n)\varphi = o_n(1)$. Assim, de (2.30), (2.31) e pelo item (iv) do Lema 1.1.2, concluímos que

$$J'_{\lambda,m}(u)\varphi = 0,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Por densidade, obtemos

$$J'_{\lambda,m}(u)v = 0,\ \forall\, v \in E.$$

Em particular, $J'_{\lambda,m}(u)u = 0$, isto é,

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u)u\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u^2\,dx. \tag{2.32}$$

Combinando (2.29) e (2.32), concluímos que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em E. Portanto, $J_{\lambda,m}$ satisfaz a condição Palais-Smale. ■

Teorema 2.2.1. *Assuma que as condições $(A_1), (\ell), (f_1)-(f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Então, para cada $\lambda > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, o problema auxiliar* (2.9) *possui uma solução não trivial e não negativa $u_{\lambda,m}$.*

Prova: De fato, o Lema 2.2.2 e o Lema 2.2.4 garantem que $J_{\lambda,m}$ cumpre as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, portanto, existe $u_{\lambda,m} \in E$, tal que, para cada $\lambda > 0$ e $m \in \mathbb{N}$,

$$J_{\lambda,m}(u_{\lambda,m}) = c_{\lambda,m} > 0 \quad \text{e} \quad J'_{\lambda,m}(u_{\lambda,m}) = 0,$$

onde $c_{\lambda,m}$ é o nível minimax de $J_{\lambda,m}$, ou seja,

$$c_{\lambda,m} = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,m}(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_0\}.$$

Seja $u^-_{\lambda,m} = \min\{u_{\lambda,m}, 0\}$, desde que $J_{\lambda,m}(u_{\lambda,m})u^-_{\lambda,m} = 0$ e $h_{\lambda,m}(x,t) = 0$ para $t \leq 0$, temos

$$\|u^-_{\lambda,m}\|^2 + \int_\Omega \ell(x)\phi_{u_{\lambda,m}}(u^-_{\lambda,m})^2 = 0,$$

assim $u^-_{\lambda,m} = 0$. Portanto, $u_{\lambda,m} = u^+_{\lambda,m} \geq 0$ é solução não trivial e não negativa do problema auxiliar (2.9). ■

2.3 Propriedades da solução do problema truncado (2.9)

Nesta seção, apresentamos alguns resultados relacionados a solução $u_{\lambda,m}$ do problema (2.9), obtida no teorema anterior, que nos permitirá provar o Teorema 2.0.1.

Inicialmente, observe que dada $u \in H_0^1(B_1(0))$ a extensão de u, por zero, fora de Ω, que denotaremos por $\widetilde{u}$, pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, pelo Teorema de Lax-Milgran, existe um único $\phi_{\widetilde{u}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $-\Delta\phi_{\widetilde{u}} = \widetilde{u}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Assim, está bem definido o funcional

$$J_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{B_1(0)} \ell(x)\phi_{\widetilde{u}}u^2\,dx - \int_{B_1(0)} F(u)\,dx.$$

Note que J_∞ possui as geometrias do Teorema do Passo da Montanha e portanto está bem definido o nível minimax

$$c_\infty := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\infty(\gamma(t)) \ \text{ onde } \ \Gamma_0 = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(B_1(0))) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_0\} \tag{2.33}$$

com $J_\infty(u_0) < 0$ e $u_0 \in C_0^\infty(B_1(0))$ dado no Lema (2.2.2).

O próximo lema relaciona o nível minimax de $J_{\lambda,m}$ com o nível minimax de J_∞.

Lema 2.3.1. *Assuma que as condições $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1) - (f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Então, os níveis minimax $c_{\lambda,m}$ e c_∞ satisfazem a estimativa $c_{\lambda,m} \leq c_\infty$.*

Prova: De fato, note que

$$J_{\lambda,m}(\widetilde{u}) = \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{B_1(0)} \ell(x)\phi_{\widetilde{u}}u^2\,dx - \int_{B_1(0)} F(u)\,dx,$$

assim, usando a condição (A_2) obtemos

$$J_{\lambda,m}(u) \leq J_\infty(u),\ \forall\, u \in H_0^1(B_1(0)),$$

logo,

$$J_{\lambda,m}(\gamma(t)) \leq J_\infty(\gamma(t)),\ \forall\, t \in [0,1], \gamma \in \Gamma_0,$$

onde Γ_0 é definido em (2.33). Desde que $\Gamma_0 \subset \Gamma$, com Γ definido na prova do Teorema 2.2.1, então, pelas definições de $c_{\lambda,m}$ e c_∞, concluímos que

$$c_{\lambda,m} = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,m}(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\infty(\gamma(t)) = c_\infty. \quad \blacksquare$$

Lema 2.3.2. *Assuma que as condições $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1) - (f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Então, para todo $R > 1$ a solução $u_{\lambda,m}$ de (2.9) satisfaz a estimativa*

$$\|u_{\lambda,m}\|^2 \leq 2kc_\infty.$$

Prova: De fato, usando o fato que que $u_{\lambda,m}$ é ponto crítico de $J_{\lambda,m}$ e o mesmo argumento da prova do Lema 2.2.1, obtemos

$$c_{\lambda,m} = J_{\lambda,m}(u_{\lambda,m}) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,m}(u_{\lambda,m})u_{\lambda,m} \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) \|u_{\lambda,m}\|^2.$$

Pelo Lema 2.3.1, temos

$$c_\infty \geq c_{\lambda,m} \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right) \|u_{\lambda,m}\|^2.$$

Desde que $k = \dfrac{2\theta}{\theta-4}$, obtemos o resultado do lema. ■

Lema 2.3.3. *Assuma que as condições $(A_1), (A_2), (\ell), (f_1)-(f_3)$ e $\Omega \subset B_R(0)$ ocorrem. Seja $u_{\lambda,m} \in E$ a solução de (2.9) e $R > 1$ então, vale a seguinte estimativa*

$$|u_{\lambda,m}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{8-p}{2(6-p)}} \left(\frac{(8-p)}{2}\right)^{\frac{8-p}{6-p}} |u_{\lambda,m}|_{L^6(\mathbb{R}^3)}.$$

Prova: Considere $\beta, \sigma > 1$ e defina

$$u_{\beta,\sigma}(x) = \min\left\{u^{\beta-1}(x), \sigma\right\} \text{ e } \Omega_\sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |u(x)|^{\beta-1} < \sigma\right\},$$

onde estamos denotando $u_{\lambda,m}$ simplesmente por u para simplificar a notação. Note que $u_{\beta,\sigma} \in E$ e $\nabla(u_{\beta,\sigma}u) = u_{\beta,\sigma}\nabla u + (\beta-1)u^{\beta-1}(\nabla u)_{\chi_{\Omega_\sigma}}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^3} |u_{\beta,\sigma}\nabla u + (\beta-1)u^{\beta-1}(\nabla u)_{\chi_{\Omega_\sigma}}|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)u^{\beta-1}u_{\beta,\sigma}\nabla u(\nabla u)_{\chi_{\Omega_\sigma}}\,dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} (\beta-1)^2|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi_{\Omega_\sigma}}\,dx,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi_{\Omega_\sigma}} + (\beta-1)^2|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi_{\Omega_\sigma}})\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2\,dx + (\beta^2-1)\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi_{\Omega_\sigma}}\,dx \\
&\leq (\beta+1)\int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2\,dx + 2(\beta+1)(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^3} (|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi_{\Omega_\sigma}})\,dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx \leq (\beta+1)\left[\int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2\,dx + 2(\beta-1)\int_{\mathbb{R}^3} (|u|^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi_{\Omega_\sigma}})\,dx\right]. \quad (2.34)$$

Agora, observe que

$$\ell(x)\phi_u(u_{\beta,\sigma}u)^2 \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^3, V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2 \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \tag{2.35}$$

e

$$\nabla u \nabla(u_{\beta,\sigma}^2 u) = u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)u^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma}. \tag{2.36}$$

Além disso, usando a função $(u_{\beta,\sigma}^2 u)$ como função teste, no problema auxiliar (2.9), temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} [\nabla u \nabla(u_{\beta,\sigma}^2 u) + V(x)(u_{\beta,\sigma}^2 u)]\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_u u(u_{\beta,\sigma}^2 u)\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u)(u_{\beta,\sigma}^2 u). \tag{2.37}$$

Da combinação de $(2.35), (2.36)$ e (2.37) obtém-se,

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_{\beta,\sigma}^2|\nabla u|^2 + 2(\beta-1)u^{2(\beta-1)}|\nabla u|^2_{\chi\Omega_\sigma}\,dx + \int_\Omega V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u)u_{\beta,\sigma}^2 u\,dx,$$

dessa desigualdade, e de (2.34) encontramos,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx \leq (\beta+1)\int_\Omega V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx + (\beta+1)\int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m}(x,u)u_{\beta,\sigma}^2 u\ dx.$$

Pelas relações (h_3), (g_3) e (2.5) concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx &\leq (\beta+1)(1+\lambda m^{q-p})\int_\Omega -V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx \\ &\quad + C_0(\beta+1)(1+\lambda m^{q-p})\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2}(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx,\end{aligned} \tag{2.38}$$

para alguma constante $C_0 > 0$.

Além disso, $V(x) \in L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega), (u_{\beta,\sigma}u)^2 \in L^{\frac{6}{8-p}}(\mathbb{R}^3)$ e $|u|^{p-2} \in L^{\frac{6}{p-2}}(\mathbb{R}^3)$, então, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega -V(x)(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx \leq |V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)}\left(\int_\Omega |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2}(u_{\beta,\sigma}u)^2\,dx \leq |u|^{p-2}_{L^6(\mathbb{R}^3)}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}.$$

Combinando essas duas desigualdade com (2.38) e usando a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, obtemos

$$\begin{aligned}|u_{\beta,\sigma}u|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla(u_{\beta,\sigma}u)|^2\,dx \\ &\leq 2S^{-1}\beta(1+\lambda m^{q-p})\left[|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)}\left(\int_\Omega |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right] \\ &\quad + 2S^{-1}C_0\beta(1+\lambda m^{q-p})\left[|u|^{p-2}_{L^6(\mathbb{R}^3)}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{\beta,\sigma}u|^{\frac{12}{8-p}}\,dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right].\end{aligned} \tag{2.39}$$

Além disso, note que $u_{\beta,\sigma}(x) \to u^{\beta-1}(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^3$ quando $\sigma \to \infty$. Então, pelo Lema de Fatou,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{6\beta} dx\right)^{\frac{1}{3}} \leq \liminf_{\sigma\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_{\beta,\sigma} u|^6 dx\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{2.40}$$

Usando a relação $0 \leq u_{\beta,\sigma} \leq u^{\beta-1}$ no lado direito de (2.39), em seguida, usando (2.40), obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{6\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{3}} &\leq 2S^{-1}\beta(1+\lambda m^{q-p}) \left[|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{12\beta}{8-p}}\, dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right] \\ &\quad + 2S^{-1}\beta C_0(1+\lambda m^{q-p}) \left[|u|^{p-2}_{L^6(\mathbb{R}^3)} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\frac{12\beta}{8-p}}\, dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right].\end{aligned} \tag{2.41}$$

Agora, note que, da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e do Lema 2.3.2, temos

$$|u|^{p-2}_{L^6(\mathbb{R}^3)} = \left(|u|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}\right)^{\frac{p-2}{2}} \leq \left(\frac{2kc_\infty}{S - |\ell(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{p-2}{2}}. \tag{2.42}$$

Combinando (2.40) e (2.42) obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{6\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{3}} &\leq 2S^{-1}\beta(1+\lambda m^{q-p}) \left[|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{12\beta}{8-p}}\, dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right] \\ &\quad + C_0(1+\lambda m^{q-p})2S^{-1}\beta \left[C_1^{p-2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\frac{12\beta}{8-p}}\, dx\right)^{\frac{8-p}{6}}\right],\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde estamos denotando $C_1 = \left(\dfrac{2kc_\infty}{S - |\ell(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Agora, realizando alguns cálculos diretos em (2.43) e definindo $C := 2S^{-1}|V(x)|_{L^{\frac{6}{p-2}}(\Omega)} + 2S^{-1}C_0C_1^{p-2}$, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{6\beta}\, dx\right)^{\frac{1}{6\beta}} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{2\beta}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{\frac{12\beta}{8-p}}\, dx\right)^{\frac{8-p}{12\beta}},$$

para cada $\beta > 1$.

Esta relação implica que,

$$|u|_{L^{6\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{2\beta}} |u|_{L^{\frac{12\beta}{8-p}}(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.44}$$

Para $\beta_1 = (8-p)/2$ em (2.44), temos

$$|u|_{L^{6\beta_1}(\mathbb{R}^3)} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{1}{2\beta_1}} \beta_1^{\frac{1}{2\beta_1}} |u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.45}$$

Fazendo $\beta_2 = (8-p)^2/4$ em (2.44), usando (2.45) e notando que $\beta_2 = \beta_1^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|u|_{L^{6\beta_2}(\mathbb{R}^3)} &\leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{1}{2\beta_2}} \beta_2^{\frac{1}{2\beta_2}} |u|_{L^{6\beta_1}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{1}{2\beta_1}+\frac{1}{2\beta_2}} \beta_1^{\frac{1}{2\beta_1}} \beta_2^{\frac{1}{2\beta_2}} |u|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_1^2}\right)} \beta_1^{\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_1^2}} |u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
$$

Continuando o processo de forma indutiva sobre n, para $\beta_n = \left((8-p)/2\right)^n$ temos

$$
|u|_{L^{6\beta_{n+1}}(\mathbb{R}^3)} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta_1}+\ldots+\frac{1}{\beta_1^n}\right)} \beta_1^{\frac{1}{\beta_1}+\ldots+\frac{1}{\beta_1^n}} |u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.46}
$$

Agora, observando que

$$
\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta_1}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{1}{\beta_1}} = \frac{8-p}{6-p}
$$

temos, por (2.46)

$$
|u|_{L^{6\beta_{n+1}}(\mathbb{R}^3)} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{8-p}{2(6-p)}} \left(\frac{(8-p)}{2}\right)^{\frac{8-p}{6-p}} |u|_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.47}
$$

Assim, passando o limite em (2.47) com $n \to \infty$, concluímos $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e

$$
|u|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{8-p}{2(6-p)}} \left(\frac{(8-p)}{2}\right)^{\frac{8-p}{6-p}} |u|_{L^6(\mathbb{R}^3)},
$$

com $u = u_{\lambda,m}$ fixada inicialmente. ■

Lema 2.3.4. *Assuma que as condições* $(A_1),(A_2),(\ell),(f_1)-(f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorrem, então, existem* $m_0 \in \mathbb{N}$ *e* $\lambda_0 > 0$ *tal que, para cada* $R > 1$*, a solução* $u_{\lambda,m}$ *do problema auxiliar* (2.9) *satisfaz a estimativa*

$$
|u_{\lambda,m_0}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq m_0,\ \forall\, \lambda \in (0,\lambda_0).
$$

Prova: De fato, usando (1.3), a imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$ e o Lema 2.3.2, obtemos

$$
|u_{\lambda,m}|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq \left(\frac{2kc_\infty}{S-|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.48}
$$

assim, por (2.48) e Lema 2.3.3, concluímos que

$$
|u_{\lambda,m}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \left[C(1+\lambda m^{q-p})\right]^{\frac{8-p}{2(6-p)}} \left(\frac{(8-p)}{2}\right)^{\frac{8-p}{6-p}} \left(\frac{2kc_\infty}{S-|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Definindo a constante

$$C_2 := C^{\frac{8-p}{2(6-p)}}\left(\frac{(8-p)}{2}\right)^{\frac{8-p}{6-p}}\left(\frac{2kc_\infty}{S-|V(x)|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

obtemos

$$|u_{\lambda,m}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_2(1+\lambda m^{q-p})^{\frac{8-p}{2(6-p)}}.$$

Agora, fixando $m_0 \in \mathbb{N}$ e $\lambda_0 > 0$ tal que $m_0 > 2C_2$ e $(1+\lambda_0 m_0^{q-p})^{\frac{8-p}{2(6-p)}} \leq 2$, respectivamente, temos

$$|u_{\lambda,m_0}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} < m_0,\ \forall\, \lambda \in [0,\lambda_0). \qquad \blacksquare$$

Lema 2.3.5. *Assuma que as condições* $(A_1),(A_2),(\ell),(f_1)-(f_3)$ *e* $\Omega \subset B_R(0)$ *ocorrem e seja* $u_{\lambda,m}$ *a solução do problema auxiliar* (2.9) *obtida no Teorema* 2.2.1. *Então, para cada* $\lambda > 0$ *e* $R > 1$ *ocorre a estimativa*

$$u_{\lambda,m_0}(x) \leq \frac{R|u_{\lambda,m_0}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}{|x|} \leq \frac{Rm_0}{|x|},\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0).$$

Prova: Seja $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função harmônica dada por

$$v(x) = \frac{R}{|x|}|u_{\lambda,m_0}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}.$$

Note que pelo Lema 2.3.4, temos $u_{\lambda,m_0}(x) \leq v(x)\, q.t.p$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$. Assim, a função

$$\Psi(x) := \begin{cases} (u_{\lambda,m_0} - v)^+(x), & \text{se } |x| \geq R, \\ 0, & \text{se } |x| \leq R, \end{cases}$$

pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Além disso, desde que $0 \leq \Psi \leq u_{\lambda,m_0}$ em $\mathbb{R}^3$, então, $\Psi \in E$.

Tomando Ψ como função teste e usando o fato que u_{λ,m_0} é solução do problema auxiliar (2.9), temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_{\lambda,m_0}\nabla\Psi\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_{\lambda,m_0}} u_{\lambda,m_0}\Psi\, dx = \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} (h_{\lambda,m_0}(x,u_{\lambda,m_0}) - V(x)u_{\lambda,m_0})\Psi\, dx,$$

assim, por (A_1) e (h_2) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_{\lambda,m_0}\nabla\Psi\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_{\lambda,m_0}\nabla\Psi\, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x)\phi_{u_{\lambda,m_0}} u_{\lambda,m_0}\Psi\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} (h_{\lambda,m_0}(x,u_{\lambda,m_0}) - V(x)u_{\lambda,m_0})\Psi\, dx, \\ &\leq \left(\frac{1}{k}-1\right)\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)} V(x)u_{\lambda,m_0}\Psi\, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Como v é harmônica, segue que $-\Delta v = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$, além disso, $\Psi \equiv 0$ em $\partial B_R(0)$, então, pelo Teorema do Divergente, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Psi|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \Psi \nabla (u_{\lambda,m_0} - v)\Psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_{\lambda,m_0} \nabla \Psi \, dx \leq 0,$$

ou seja, $\Psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3$, logo, $u_{\lambda,m_0} \leq v$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$. Portanto,

$$u_{\lambda,m_0}(x) \leq \frac{R}{|x|} |u_{\lambda,m_0}|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{R}{|x|} m_0, \; \forall \, x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0). \quad \blacksquare$$

2.4 Prova do Teorema 2.0.1:

Nesta seção, finalmente provaremos o Teorema 2.0.1. Usaremos os resultados anteriores e assumindo que a hipótese (A_3) ocorre, além das hipóteses (A_1) e (A_2) já consideradas.

Prova Teorema 2.0.1: Note que pela definição de $g_{\lambda,m}$, temos

$$g_{\lambda,m_0}(s) \leq g_{\lambda_0,m_0}(s), \; \forall \, s \in \mathbb{R} \, \mathrm{e} \, \forall \, \lambda \in (0, \lambda_0),$$

assim, por (2.5)

$$k \, g_{\lambda,m_0}(u_{\lambda,m_0}) \leq k \, C_0 (1 + \lambda_0 m_0^{q-p}) \, u_{\lambda,m_0}^4 u_{\lambda,m_0}.$$

Usando o Lema 2.3.5, a condição (A_3) e $u_{\lambda,m_0} \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} k \, g_{\lambda,m_0}(u_{\lambda,m_0}(x)) &\leq k \, C_0 (1 + \lambda_0 m_0^{q-p}) \frac{R^4}{|x|^4} |u_{\lambda,m_0}|^4_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \, u_{\lambda,m_0}(x) \\ &\leq k \, C_0 (1 + \lambda_0 m_0^{q-p}) \frac{V(x)}{\Lambda} m_0^4 \, u_{\lambda,m_0}(x) \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0), \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Assim, escolhendo $\Lambda_0 = k \, C_0 (1 + \lambda_0 m_0^{q-p}) m_0^4$, teremos

$$k \, g_{\lambda,m_0}(u_{\lambda,m_0}(x)) \leq V(x) u_{\lambda,m_0}(x) \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0), \tag{2.49}$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e $\Lambda \geq \Lambda_0$.

Combinando (2.4), (2.7), (2.8) e (2.49), concluímos que,

$$h_{\lambda,m_0}(x, u_{\lambda,m_0}) = g_{\lambda,m_0}(u_{\lambda,m_0}(x)) = f(u_{\lambda,m_0}) + (u_{\lambda,m_0})^{q-1} \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0). \tag{2.50}$$

Desde que, pelo Teorema 2.2.1, $u_{\lambda,m_0} \geq 0$ e $u_{\lambda,m_0} \not\equiv 0$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_{\lambda,m_0} \nabla \psi + V(x) u_{\lambda,m_0} \psi) \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \ell(x) \phi_{u_{\lambda,m_0}} u_{\lambda,m_0} \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\lambda,m_0}(x, u_{\lambda,m_0}) \psi \, dx,$$

para cada $\psi \in E$, então, por (2.50) concluímos que u_{λ,m_0} é solução não trivial e não negativa do problema (2.2), para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e $\Lambda \geq \Lambda_0$.

Similarmente ao Lema 1.1.5, concluímos que o par $(u_{\lambda,m_0}, \phi_{u_{\lambda,m_0}}) \in E \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução não trivial e não negativa do sistema (2.1). $\blacksquare$

Capítulo

3

Sistema do tipo Schrödinger-Poisson com potencial V não constante: Caso subcrítico

Neste capítulo, estudamos a seguinte classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u + \phi u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2\Delta\phi = u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \phi \in D^{1,2}(R^3), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro real, $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com o potencial V não constante.

Estamos interessados em estudar o sistema (3.1) com as geometrias sobre o potencial V introduzidas no artigo de Alves [1], onde o autor estudou a equação Schrödinger. Mais precisamente, assumimos as seguintes hipóteses sobre o potencial V:

(V_1) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$, onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^3} V(x)$.

(V_2) $V \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e $V, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^3$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, 3\}$.

(V_3) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^3$, tal que $(V(x_n))$ é limitada e

$\nabla V(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente em $\mathbb{R}^3$.

(V_4) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

Em todo este capítulo, diremos que o potencial V pertence à Classe 1 quando V satisfaz $(V_1), (V_2)$ e (V_3). E diremos que V pertence à Classe 2 quando V satisfaz $(V_1), (V_2)$ e (V_4).

Sobre a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assumiremos que ela é contínua e satisfaz as seguintes condições:

(f_1') $\limsup\limits_{s\to 0^+} \dfrac{f(s)}{s} = 0$.

(f_2') Existe $p \in (2, 6)$, tal que $\limsup\limits_{s\to +\infty} \dfrac{f(s)}{|s|^{p-1}} = 0$.

(f_3') Existe $\theta > 4$, tal que $0 < \theta F(s) := \theta \displaystyle\int_0^s f(t)\,dt \leq sf(s)$, $\forall\, s > 0$.

Antes de enunciarmos o principal resultado deste capítulo, daremos a definição de solução para o problema (3.1).

Definição 3.0.1. *Uma solução (fraca) positiva para* (3.1) *é um par* $(u, \phi) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, *tal que* $u, \phi > 0$ *em* $\mathbb{R}^3$ *e as seguintes igualdades ocorrem*

$$\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)uv\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi uv\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(u)v\,dx,\ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^3)$$

e

$$\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \nabla \varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 \varphi\,dx,\ \forall\, \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

O principal resultado do capítulo 3 é enunciado como segue:

Teorema 3.0.1. *Suponha que* V *pertença à Classe 1 ou 2 e que* f *satisfaz* $(f_1') - (f_3')$. *Então, existe* $\epsilon_0 > 0$, *tal que o sistema* (3.1) *possui solução positiva, para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.

Para mostrar a validade do Teorema 3.0.1 usaremos o Método variacional adaptando o Método de redução de [12], a Técnica de penalização introduzida por Del Pino e Felmer em [23] e as ideias de Alves [1].

3.1 Um problema não local equivalente ao sistema (3.1).

Nesta seção, provaremos que o sistema (3.1) é equivalente a um problema não local e apresentamos um resultado preliminar envolvendo o termo não local do problema.

Inicialmente, note que implementando as mudanças de variáveis $v(x) = u(\epsilon x)$ e $\phi(x) = \phi(\epsilon x)$, o problema (3.1) é equivalente ao seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u + \phi u = f(u) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{3.2}$$

Agora, fixamos uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e definimos o funcional $L_u : D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dado por

$$L_u(v) = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 v\,dx.$$

Desde que $u \in L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)$, então, $u^2 \in L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$ e como $v \in L^6(\mathbb{R}^3)$, pela desigualdade de Hölder e a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, o funcional L_u está bem definido e satisfaz a seguinte desigualdade

$$|L_u(v)| \leq S^{-1/2} |u|^2_{L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}, \tag{3.3}$$

onde S é a melhor constante de Sobolev da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.

A desigualdade em (3.3) nos diz que L_u é limitada e claramente linear. Portanto, L_u é contínuo. Sendo $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ um espaço de Hilbert, com o produto interno

$$\langle \phi, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi\nabla v\, dx,$$

então, pelo Teorema de Lax-Milgran, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ existe uma única $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, tal que $L_u(v) = \langle \phi_u, v\rangle$ para cada $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi_u\nabla v\, dx = \int_{\mathbb{R}^3} u^2 v\, dx, \forall\, v\, \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

mais precisamente, veja [6, 34], ϕ_u dada por

$$\phi_u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|}\, dy,$$

é a única solução fraca do problema

$$-\Delta\phi_u = u^2 \,\text{em}\, \mathbb{R}^3. \tag{3.4}$$

Desde que por (3.4) a função ϕ_u satisfaz a segunda equação de (3.2), então por substituição direta o sistema (3.2) reduz-se a seguinte equação não local de Schrödinger

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u + \phi_u u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{3.5}$$

Semelhante aos argumentos que foram ultilizados nos capítulos anteriores, se $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ for uma solução positiva de (3.5), então, o par $(u, \phi_u) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ será uma solução do problema (3.1) com $\phi = \phi_u$. Portanto, nossa tarefa de encontrar solução do sistema (3.2) reduz-se a encontrar solução do problema (3.5).

Para contornar a falta da imersão compacta de $H^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ nos espaços $L^p(\mathbb{R}^3)$ e encontar solução positiva para (3.5), iremos adaptar a Penalização de Del Pino e Felmer

Agora, note que pelas condições (V_1) e (V_2), a função $\|\cdot\| : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)|u|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

define uma norma em $H^1(\mathbb{R}^3)$ equivalente a norma usual desse espaço.

O lema que enunciaremos a seguir, é uma versão do Lema 1.1.2, presente no Capítulo 1, com $\ell(x) = 1$, por isso sua demonstração (bem conhecida na literatura) será omitida.

Lema 3.1.1. *Suponha que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então,*

(*i*) *Existe uma constante $C > 0$, tal que,* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2\, dx \leq C\|u\|^4, \forall\, u \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2\, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2\, dx.$

(iii) $\phi_{u_n} \to \phi_u \quad$ *em* $H^1(\mathbb{R}^3)$.

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n u\, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2\, dx.$

Prova: Basta seguir os mesmos passos do Lema 1.1.2 fazendo $\ell(x) = 1$. ■

3.2 A técnica de Penalização de Del Pino e Felmer e o Problema Auxiliar.

Desde que estamos interessados em solução positiva para (3.5), vamos supor que

$$f(s) = 0, \text{ para todo } s \leq 0.$$

Para todo $\epsilon > 0$, considere $B_{R_\epsilon}(0)$ a bola aberta de centro zero e raio R_ϵ contida em $\mathbb{R}^3$, sejam ainda as constantes $k = \frac{2\theta}{\theta - 4}$ e $a > 0$, tais que,

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{V_0}{k},$$

onde V_0 é a constante dada na condição (V_1).

Considere as seguintes funções, denominadas funções de penalização:

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} 0, & se\ s \leq 0 \\ \\ f(s), & se\ \ 0 \leq s \leq a \\ \\ \frac{V_0}{k} s, & se\ s \geq a, \end{cases}$$

e

$$g(x,s) = \chi(x) f(s) + (1 - \chi(x)) \widetilde{f}(s), \forall\, (x,s)\ \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R},$$

onde χ é a função característica em relação a $B_{R_\epsilon}(0)$, ou seja,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in B_{R_\epsilon}(0), \\ \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}^3 \backslash B_{R_\epsilon}(0). \end{cases}$$

Finalmente, estudaremos o seguinte problema auxiliar não local

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x) u + \phi_u u = g(\epsilon x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{3.6}$$

Note que, se u_ϵ é uma solução positiva de (3.6), tal que, $u_\epsilon(x) < a$ em $\mathbb{R}^3 \backslash B_{R_\epsilon}(0)$, então, u_ϵ também será uma solução do problema (3.5) e consequentemente, o par $(u_\epsilon, \phi_{u_\epsilon}) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução positiva do sistema (3.1). Portanto, nosso objetivo será encontrar uma solução do problema auxiliar (3.6) verificando essa condição.

Para isso, ao problema auxiliar (3.6) associamos o funcional energia de Euler-Lagrange $J_\epsilon : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, dado por

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(\epsilon x, u)\,dx,$$

onde $G(\epsilon x, s) := \displaystyle\int_0^s g(\epsilon x, t)\,dt,\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Das hipóteses sobre f e das definições das funções $\widetilde{f}$ e g, obtemos as seguintes relações:

(g_1') $\theta G(\epsilon x, s) \leq g(\epsilon x, s)s$, $\forall\, x \in B_{R_\epsilon}(0)$ e $\forall\, s \in \mathbb{R}$,

(g_2') $2G(\epsilon x, s) \leq g(\epsilon x, s)s \leq \frac{V(\epsilon x)}{k}s^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_\epsilon}(0)$ e $\forall\, s \in \mathbb{R}$,

As relações $(g_1'), (g_2')$ e o Lema 3.1.1, garantem que o funcional J_ϵ está bem definido e é de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$, com derivada de Gateaux dada por:

$$J_\epsilon'(u)v = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla v + V(\epsilon x)uv)\,dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_u uv\,dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u)v\,dx,\ \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^3).$$

É claro que ponto crítico de J_ϵ é solução (fraca) de (3.6). Os próximos resultados tem como finalidade, mostrar que para cada $\epsilon > 0$, o problema auxiliar (3.6) possui uma solução positiva $u_\epsilon \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Mostraremos que J_ϵ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, veja apêndice A, Teorema A.0.2. Iniciamos com o seguinte lema.

Lema 3.2.1. *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência $(PS)_c$ para J_ϵ. Então, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$.*

Prova: Note que

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta}J_\epsilon'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x)u_n^2\right)\,dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}|u_n|^2\,dx \\ + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3} \left[g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)\right]\,dx, \end{aligned} \tag{3.7}$$

observe também que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3} \left[g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)\right]\,dx = \frac{1}{\theta}\int_{B_{R_\epsilon}(0)} \left[g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)\right]\,dx \\ + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3 \backslash B_{R_\epsilon}(0)} \left[g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)\right]\,dx. \end{aligned}$$

Pela relação (g_1'), obtemos

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}[g(\epsilon x,u_n)u_n-\theta G(\epsilon x,u_n)]\,dx \geq \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\epsilon}(0)}[g(\epsilon x,u_n)u_n-\theta G(\epsilon x,u_n)]\,dx.$$

Além disso, pela relação (g_2'), temos

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3}[g(\epsilon x,u_n)u_n-\theta G(\epsilon x,u_n)]\,dx \geq \frac{2-\theta}{2k\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\epsilon}(0)}V(\epsilon x)u_n^2\,dx.$$

Assim, combinando esta última desigualdade com a igualdade em (3.7), usando o fato de que $k=2\theta/(\theta-4)$, e que o termo não local é não negativo, obtemos

$$J_\epsilon(u_n)-\frac{1}{\theta}J_\epsilon'(u_n)u_n \geq \left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\|u_n\|^2 \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_n\|^2.$$

Sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional J_ϵ, concluímos que

$$\left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_n\|^2 \leq o_n(1)+c\|u_n\|,$$

e portanto (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. ■

Lema 3.2.2. *Para todo $\epsilon>0$, J_ϵ satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha, isto é, $J_\epsilon(0)=0$ e*

(H1) Existem $\alpha,\rho>0$, tais que, $J_\epsilon(u)\geq\alpha>0$, se $\|u\|=\rho$.

(H2) Existe $u_0\in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $J_\epsilon(u_0)<0$ com $\|u_0\|>\rho$.

Prova: De fato, é claro que $J_\epsilon(0)=0$. Além disso,

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}G(\epsilon x,u)\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}G(\epsilon x,u)\,dx. \end{aligned}$$

Pelas hipóteses (f_1') e (f_2'), dado $\xi>0$, existe uma constante $C_\xi>0$, tal que

$$|f(s)|\leq\xi|s|+C_\xi|s|^{p-1},\forall s\in\mathbb{R}.$$

Desde que $G(x,t)\leq f(t)$ em $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$, temos

$$J_\epsilon(u)\geq\left(\frac{1}{2}-C_0\xi\right)\|u\|^2-C_0C_\xi\|u\|^p,$$

para alguma constante $C_0>0$.

Fixado $\xi > 0$ tal que $1 > 2C_0\xi$ e fazendo $\|u\| = \rho$, podemos escolher $\rho > 0$ suficientemente pequeno e $\alpha = \alpha(\rho) > 0$, tal que, $(H1)$ ocorre.

Para provar $(H2)$, considere $t > 0$ e fixe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $supp\varphi \cap B_1(0) \neq \emptyset$. Note que pelo item (i) do Lema 3.1.1, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{t\varphi}(t\varphi)^2\, dx \leq \frac{Ct^4}{4}\|\varphi\|^4. \tag{3.8}$$

Da hipótese (f_3'), existem constantes $C_2, C_3 > 0$, tal que

$$F(s) \geq C_1 s^\theta - C_2,\ \forall\, s > 0, \tag{3.9}$$

assim, desde que $G(x,s) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} G(\epsilon x, t\varphi)\, dx &= \int_{B_{R_\epsilon}(0)} G(\epsilon x, t\varphi)\, dx + \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{R_\epsilon}(0)} G(\epsilon x, t\varphi)\, dx \\ &\geq \int_{B_{R_\epsilon}(0)} F(t\varphi)\, dx \end{aligned} \tag{3.10}$$

logo, por (3.9) e (3.10), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} G(\epsilon x, t\varphi)\, dx \geq \int_{B_{R_\epsilon}(0)} F(t\varphi)\, dx \geq C_1 t^\theta \int_{B_{R_\epsilon}(0)} |\varphi|^\theta\, dx - \frac{4\pi R_\epsilon^3 C_2}{3}. \tag{3.11}$$

Então, usando $(3.8), (3.11)$ e a definição de J_ϵ, teremos

$$J_\epsilon(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{Ct^4}{4}\|\varphi\|^4 - C_1 t^\theta \int_{B_{R_\epsilon}(0)} |\varphi|\, dx + \frac{4\pi R_\epsilon^3 C_2}{3}.$$

Desde que $\theta > 4$ e $R_\epsilon > 1$, existe $t_0 > 0$ tal que $u_0 = t_0\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ satisfaz $\|u_0\| > \rho$ e $J_\epsilon(u_0) < 0$, o que prova a condição $(H2)$, completando assim a prova do lema. ∎

Lema 3.2.3. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para J_ϵ. Então, dado $\alpha > 0$, existe $r = r(\alpha) > 0$, tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_r(0)} (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x)u_n^2)\, dx \leq \alpha.$$

Prova: A prova deste lema é análoga a prova do Lema 1.2.3 do Capítulo 1. ∎

Lema 3.2.4. *O funcional J_ϵ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Basta proceder como na prova do Lema 1.2.4 do Capítulo 1. ∎

Teorema 3.2.1. *Para cada $\epsilon > 0$, o problema auxiliar* (3.6) *possui uma solução positiva* $u_\epsilon \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Prova: De fato, pelos Lemas (3.2.2) e (3.2.4), para cada $\epsilon > 0$ existe $u_\epsilon \in H^1(\mathbb{R}^3)$, tal que

$$J_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon > 0 \quad \text{e} \quad J'_\epsilon(u_\epsilon) = 0,$$

onde c_ϵ é nível minimax do funcional J_ϵ, ou seja,

$$c_\epsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\epsilon(\gamma(t)) \qquad \text{e} \qquad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \ \text{e} \ \gamma(1) = u_0\}.$$

Desde que $g(x,t) = 0$ para $t \leq 0$ temos

$$\|u_\epsilon^-\|^2 + \int_\Omega \phi_{u_\epsilon}(u_\epsilon^-)^2 = 0.$$

Assim, $u_\epsilon^- = 0$ e $u_\epsilon = u_\epsilon^+ \geq 0$. Observando que $-\Delta\phi_u \geq 0$ em $\mathbb{R}^3$, pelo Princípio do Máximo, temos $\phi_u > 0$ em $\mathbb{R}^3$. Desde que $V(x) \geq V_0 > 0$, usando mais uma vez o Princípio do Máximo, temos $u_\epsilon > 0$ em $\mathbb{R}^3$. Portanto, u_ϵ é solução positiva do problema auxiliar (3.6). ■

3.3 Solução Positiva do Sistema de Schrödinger-Poisson (3.1)

Nesta seção, mostaremos que a solução u_ϵ do problema auxiliar (3.6) também é solução do problema não local (3.5) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o que equivale a mostrar que o par $(u_\epsilon, \phi_{u_\epsilon}) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução positiva do sistema (3.1).

Inicialmente, observe que pela hipótese (V_2) existe $V_\infty > 0$, tal que $V(\epsilon x) \leq V_\infty$ em $\mathbb{R}^3$. Além disso, dada $u \in H_0^1(B_1(0))$, a extensão de u por zero fora de Ω, que denotaremos por $\widetilde{u}$, pertence a $H^1(\mathbb{R}^3)$. Logo, pelo Teorema de Lax-Milgran, existe um único $\phi_{\widetilde{u}} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $-\Delta\phi_{\widetilde{u}} = \widetilde{u}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Portanto, o funcional

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V_\infty|u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{\widetilde{u}}u^2dx - \int_{\mathbb{R}^3}F(u)dx,$$

está bem definido.

Usando argumentos padrões e o Lema 3.1.1, podemos mostrar que I_∞ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, os argumentos são análogos aos empregados na prova do Lema 3.2.2, e consequentemente está bem definido o nível minimax

$$c_\infty := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\infty(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)) : \gamma(0) = 0 \ \text{e} \ I_\infty(\gamma(1)) < 0\}.$$

O próximo lema nos fornece uma estimativa da norma da solução u_ϵ em relação ao nível minimax do funcional I_∞ e a constante k.

Lema 3.3.1. *A solução do problema auxiliar* (3.6) *satisfaz a estimativa*

$$\|u_\epsilon\|^2 \leq 2kc_\infty.$$

Prova: De fato, note que para cada $u \in H_0^1(B_1(0))$, podemos escrever $J_\epsilon(\widetilde{u}) = J_\epsilon(u)$ identificando u com sua estensão $\widetilde{u}$ porque

$$J_\epsilon(\widetilde{u}) = \frac{1}{2}\int_{B_1(0)} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx + \frac{1}{4}\int_{B_1(0)} \ell(x)\phi_{\widetilde{u}}u^2\,dx - \int_{B_1(0)} F(u)\,dx.$$

Pela definição de V_∞, g e sua primitiva G, temos

$$J_\epsilon(u) \leq I_\infty(u),\ \forall\, u \in H^1(B_1(0)),$$

assim,

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(\gamma(t)) \leq \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_\infty(\gamma(t))\ \forall\gamma\in\Gamma.$$

consequentemente, $c_\epsilon \leq c_\infty$, para todo $\epsilon > 0$.

Além disso, como u_ϵ é ponto crítico de J_ϵ, então,

$$c_\infty \geq c_\epsilon = J_\epsilon(u_\epsilon) - \frac{1}{\theta}J'_\epsilon(u_\epsilon)u_\epsilon \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_\epsilon\|^2,$$

logo,

$$c_\infty \geq \left(\frac{\theta-4}{4\theta}\right)\|u_\epsilon\|^2,$$

e sendo $k = \dfrac{2\theta}{\theta-4}$, concluímos a prova do lema. ■

O próximo lema será importante para provarmos que o Teorema 3.0.1.

Lema 3.3.2. *Suponha que* $(V_1), (V_2)$, $(f_1') - (f_3')$ *ocorrem. Seja* $(\epsilon_n) \subset (0,1)$ *tal que* $\epsilon_n \to 0^+$ $(x_n) \subset \mathbb{R}^3$ *e*

$$v_n(x) := u_{\epsilon_n}(x + x_n),$$

onde u_{ϵ_n} *é solução (fraca) do problema auxiliar* (3.6), *obtida no Teorema 3.2.1. Então,* $(v_n) \in C(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ *e* (v_n) *possui uma subsequência que converge uniformemente sobre compactos de* $\mathbb{R}^3$ *para uma função* $v \in C(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Prova: Usando o Método de iteraçao de Moser [31] e argumentando como na prova do Lema 1.3.3, conluímos que $v_n \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Além disso, $v_n \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para s suficientemente grande, veja [25]. Pelo lema anterior e a invariância do $\mathbb{R}^3$ por translação, (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim, usando as imersões compactas de Schauder concluímos que existe $v \in C(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, tal que, a menos de subsequência,

$$v_n \to v \ \text{ uniformemente sobre K},$$

para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^3$. ■

Lema 3.3.3. *Suponha que* $(V_1),(V_2),(V_3)$, $(f_1')-(f_3')$ *ocorrem. Então, a solução* u_ϵ *do problema auxiliar* (3.6) *verifica:*

$$\max_{x\in\partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} u_\epsilon(x)\to 0 \ \ quando\ \ \epsilon\to 0.$$

Prova: Suponha, por contradição, que exista um número real $\gamma>0$ e uma sequência $(\epsilon_n)\subset(0,1)$, tais que, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\max_{x\in\partial B_{\frac{R_{\epsilon_n}}{\epsilon_n}}(0)} u_{\epsilon_n}(x)\geq\gamma>0 \ \text{ e } \ \epsilon_n\to 0. \tag{3.12}$$

Sendo u_{ϵ_n} contínua e $\partial B_{\frac{R_{\epsilon_n}}{\epsilon_n}}(0)$ compacta, existe uma subsequência $(x_n)\in\partial B_{\frac{R_{\epsilon_n}}{\epsilon_n}}(0)$, tal que

$$u_{\epsilon_n}(x_n)=\max_{x\in\partial B_{\frac{R_{\epsilon_n}}{\epsilon_n}}(0)} u_{\epsilon_n}(x). \tag{3.13}$$

Segue por (3.12) e (3.13) que

$$u_{\epsilon_n}(x_n)\geq\gamma>0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Agora, considere as sequências (v_n) e (ϕ_n) definidas por $v_n(x):=u_{\epsilon_n}(x+x_n)$ e $\phi_n(x):=\phi_{u_{\epsilon_n}}(x+x_n)$.

Note que pelo Lema 3.3.1 e da invariância do $\mathbb{R}^3$ por translação, (v_n) e (ϕ_n) são limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, respectivamente.

Assim, existem $v\in H^1(\mathbb{R}^3)$ e $\phi\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tais que, a menos de subsequência,

$$\begin{cases} v_n\rightharpoonup v \text{ em } H^1(\mathbb{R}^3) \ \text{ e } \ \phi_n\rightharpoonup\phi, \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^3),\\ v_n(x)\to v(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3 \ \text{ e } \ \phi_n(x)\to\phi(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^3,\\ v_n\to v \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^3) \ \text{ e } \ \phi_n\to\phi \text{ em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^3),\end{cases} \tag{3.14}$$

para todo $s\in[2,6)$.

Além disso, pelo Lema 3.3.2, sabemos que (v_n) converge uniformemente para alguma função $v\in C(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ em $\mathbb{R}^3$. Assim, por continuidade,

$$u_{\epsilon_n}(x_n)=u_{\epsilon_n}(0+x_n)=v_n(0)\to v(0),$$

ou seja, $v_n(0)\geq\gamma>0$ e portanto, $v\neq 0$. Note ainda, que a função u_{ϵ_n} é solução (fraca) do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon_n}+V(\epsilon_n y)u_{\epsilon_n}(y)+\phi_{u_{\epsilon_n}}(y)u_{\epsilon_n}(y)=g(\epsilon_n y,u_{\epsilon_n}(y))\,\text{em } \mathbb{R}^3,\\ \\ u_{\epsilon_n}\in H^1(\mathbb{R}^3),\ \ u_{\epsilon_n}>0 \text{ em } \mathbb{R}^3.\end{cases}$$

Denotando por $y=x+x_n$ e usando a definição de v_n temos

$$\begin{cases} -\Delta v_n+V(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)v_n+\phi_n v_n=g(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n,v_n)\,\text{em } \mathbb{R}^3,\\ \\ v_n\in H^1(\mathbb{R}^3),\ \ v_n>0 \text{ em } \mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{3.15}$$

Note que, pela condição (V_2) a sequência $(V(\epsilon_n x_n))$ é limitada em $\mathbb{R}$, então, a menos de subsequência $(V(\epsilon_n x_n))$ converge para algum $\beta \in \mathbb{R}$ e a condição (V_1) garante que $\beta > 0$. Agora, desde que (v_n) é solução (fraca) de (3.15), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_n \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) v_n \varphi dx \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_n v_n \varphi dx,\end{aligned} \tag{3.16}$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Além disso, note que por (3.14), o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o item (iv) do Lema 3.1.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_n \nabla \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v \nabla \varphi dx \ \text{ e } \ \int_{\mathbb{R}^3} \phi_n v_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \phi_n v \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{3.17}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) v_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \beta v \varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{3.18}$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n)\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^3} h(\epsilon x, v)\varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{3.19}$$

onde a função h é definida por

$$h(\epsilon x, s) := \widehat{\chi}(\epsilon x) f(s) + (1 - \widehat{\chi}(\epsilon x))\widetilde{f}(s),$$

para alguma função $\widehat{\chi} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Assim, por $(3.16), (3.17), (3.18)$ e (3.19) segue que v é solução (fraca) do problema

$$-\Delta v + \beta v + \phi v - h(\epsilon x, v) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3. \tag{3.20}$$

Agora, note que por densidade, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, tal que,

$$\|\varphi_j - v\| \leq \frac{1}{j} \Rightarrow \|\varphi_j - v\| = o_j(1).$$

Considerando $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ como função teste em (3.16), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + o_n(1) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_n \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) v_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_n v_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx,\end{aligned}$$

e desde que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_n \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right) dx + o_n(1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_n v_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi v \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + o_n(1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^3} h(\epsilon x, v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + o_n(1),$$

temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) v_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right] = &- \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v \nabla \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi v \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \\ &+ h(\epsilon x, v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + o_n(1), \end{aligned} \tag{3.21}$$

combinando, (3.18) com (3.21) e usando (3.20) concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left[V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - V(\epsilon_n x_n) \right] v_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = o_j(1). \tag{3.22}$$

Por simplicidade de notação, para cada $n \in \mathbb{N}$, façamos

$$V_{\epsilon_n} := V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - V(\epsilon_n x_n),$$

e escrevendo $v = (v - v_n) + v_n$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} V_{\epsilon_n} v \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| V_{\epsilon_n} (v - v_n) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + V_{\epsilon_n} v_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |V_{\epsilon_n}||v - v_n| \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx + \int_{\mathbb{R}^3} |V_{\epsilon_n}||v_n| \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e (3.22) concluímos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} V_{\epsilon_n} v \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \left(\int_{\{supp \varphi_j\}} \left| V_{\epsilon_n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\{supp \varphi_j\}} |v - v_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + o_j(1).$$

Desde que φ_j tem suporte compacto e $v_n \to v$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para todo $s \in [2, 6)$, então, da desigualdade acima obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} V_{\epsilon_n} v \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = o_j(1).$$

Fazendo $\varphi_j = (\varphi_j - v) + v$ e procedendo de modo análogo ao que foi feito anteriormente, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} V_{\epsilon_n} \varphi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = o_j(1),$$

de onde concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} V_{\epsilon_n}\frac{\partial(\varphi_j)^2}{\partial x_i}dx\right| = o_j(1).$$

Seja $R>0$ e $B_R(0)\subset\mathbb{R}^3$, tal que, $supp\,\varphi_j\subset B_R(0)$. Desde que $V,\varphi_j\in C^2(\mathbb{R}^3)$, podemos usar o Teorema de Green e obter

$$\int_{B_R(0)}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)\varphi_j^2dx = -\int_{B_R(0)} V(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)\frac{\partial(\varphi_j)}{\partial x_i}dx + \int_{\partial B_R(0)} V(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)\varphi_j^2\eta_i dS_{x_i},$$

onde η_i é o vetor normal exterior a fronteira de $B_R(0)$. Agora, usando novamente a fato de que φ_j tem suporte compacto, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)\varphi_j^2dx &= -\int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)\frac{\partial(\varphi_j)^2}{\partial x_i}dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} V_{\epsilon_n}\frac{\partial(\varphi_j)^2}{\partial x_i}dx - \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x_n)\frac{\partial(\varphi_j)^2}{\partial x_i}dx\\ &= o_j(1).\end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)\varphi_j^2dx\right| = o_j(1). \tag{3.23}$$

Agora, provaremos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx\right| = o_j(1). \tag{3.24}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx\right| = \Bigg|&\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right]|\varphi_j|^2dx\\ &-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)|\varphi_j|^2dx\Bigg|.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Desde que por (V_2), $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right)$ é limitada, para cada $i=1,2,3$ existe $\gamma_i\in\mathbb{R}$, tal que, a menos de subsequência,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\to\gamma_i,$$

assim, fazendo $n\to\infty$, temos

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right]|\varphi_j|^2\to 0,\ \text{ q.t.p }\ \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x+\epsilon_n x_n)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right]|\varphi_j|^2dx=o_j(1). \tag{3.26}$$

Passando ao limite (3.25) e usando (3.23) e (3.26), obtemos (3.24).

Agora, provaremos que a sequência $(\epsilon_n x_n)$ é $(PS)_\beta$ para o potencial V. De fato, desde que v é não nula e

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx\to\int_{\mathbb{R}^3}|v|^2,$$

existe $j_0\in\mathbb{N}$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx\geq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|v|^2,\ \text{para todo}\, j\geq j_0.$$

Agora, observando que

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)=\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx\right).$$

segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right|\leq\frac{2}{\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx}\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi_j|^2dx\right|,\ \text{para todo}\, j\geq j_0,$$

usando (3.24) e a desigualdade acima, obtemos para cada $i=1,2,3$,

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right|=o_j(1).$$

Sendo j arbitrário, concluí-se que $\nabla V(\epsilon_n x_n)\to 0$, e desde que, $V(\epsilon_n x_n)\to\beta$, então, a sequência $(\epsilon_n x_n)$ é $(PS)_\beta$ para o potencial V. Além disso, sendo $V(\epsilon_n x_n)$ limitada, concluímos por (V_3) que $(\epsilon_n x_n)$ possui subsequência convergente em $\mathbb{R}^3$, o que é absurdo, pois

$$|\epsilon_n x_n|=|\epsilon_n|\frac{|R_{\epsilon_n}|}{|\epsilon_n|}=|R_{\epsilon_n}|=\frac{1}{\epsilon_n}\to\infty,\ \text{ quando }\ n\to\infty.$$

Portanto,

$$\max_{x\in\partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)}u_\epsilon(x)\to 0\ \text{ quando }\ \epsilon\to 0. \qquad\blacksquare$$

A seguir, iremos provar que se o potencial V pertence a Classe 2, a solução u_ϵ do problema auxiliar (3.6) satisfaz a mesma propriedade presente no lema anterior. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Lema 3.3.4. *Suponha que* $(V_1), (V_2), (V_4)$, $(f_1') - (f_3')$ *ocorrem. Então, a solução* u_ϵ *do problema auxiliar* (3.6) *verifica:*

$$\max_{x\in\partial\Lambda_\epsilon} u_\epsilon(x) \to 0 \quad \textit{quando} \ \epsilon \to 0.$$

Prova: Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existe um $\delta_0 > 0$ e uma sequência $(\epsilon_n) \subset (0,1)$, tais que

$$\max_{x\in\partial\Lambda_{\epsilon_n}} u_n(x) \geq \delta_0 > 0 \ \text{ e } \ \epsilon_n \to 0,$$

onde denotamos $u_n := u_{\epsilon_n}$.

Desde que $u_n \in C(\mathbb{R}^3)$ e $\partial\Lambda_n$ é compacto, existe $x_n \in \partial\Lambda_n$ tal que

$$u_n(x_n) = \max_{x\in\partial\Lambda_{\epsilon_n}} u_n(x).$$

Usando os mesmos argumentos explorados na prova do Lema 3.3.3, obtemos

$$\nabla V(\epsilon_n x_n) \to 0 \ \text{ quando } \ \epsilon_n \to 0.$$

Desde que, $(\epsilon_n x_n) \subset \partial\Lambda_{\epsilon_n}$ e $\partial\Lambda_{\epsilon_n}$ é um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^3$, então, existe $z_0 \in \partial\Lambda_{\epsilon_n}$, tal que

$$\epsilon_n x_n \to z_0 \,\text{em}\, \mathbb{R}^3.$$

Uma vez que $V \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, concluímos que

$$\nabla V(\epsilon_n x_n) \to \nabla V(z_0).$$

Pela unicidade do limite, obtemos $\nabla V(z_0) = 0$, contrariando a condição (V_4). Portanto, o lema está provado. ■

3.3.1 Prova do Teorema 3.0.1

Nesta subseção, provaremos o Teorema 3.0.1. Para tal, o nosso objetivo aqui é mostrar que se o potencial V pertence a Classe 1 ou a Classe 2, a solução u_ϵ do problema auxiliar (3.6) satisfaz a seguinte estimativa,

$$u_\epsilon(x) < a, \ \text{ em } \ \mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0), \tag{3.27}$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Prova do Teorema 3.0.1: Suponha, inicialmente, que o potencial V pertença a Classe 1. Pelo Lema 3.3.3, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que

$$\max_{x\in\partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} u_\epsilon(x) < a - \delta,$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Considere a função w_ϵ dada por

$$w_\epsilon(x) = \begin{cases} (u_\epsilon - a + \delta)^+(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0), \\ \\ 0, & \text{se } x \in B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0). \end{cases}$$

Note que, por construção $w_\epsilon \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso, pelo truncamento g, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_\epsilon|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} \nabla (u_\epsilon - a + \delta)^+ \nabla w_\epsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_\epsilon \nabla w_\epsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_\epsilon) w_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon x) u_\epsilon w_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_\epsilon} u_\epsilon w_\epsilon dx \\ &\leq \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} V(\epsilon x) u_\epsilon w_\epsilon dx \leq 0, \end{aligned}$$

logo, $w_\epsilon \equiv 0$. Assim, $u_\epsilon(x) \leq a - \delta < a$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)$. Portanto, pela definição de g, temos

$$g(\epsilon x, u_\epsilon) = f(u_\epsilon), \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0),$$

mostrando que u_ϵ é solução do problema não local (3.5). Consequentemente, o par $(u_\epsilon, \phi_{u_\epsilon})$ é solução do sistema (3.1), o que prova o Teorema 3.0.1 para o potencial V pertencendo a Classe 1.

A demonstração do Teorema 3.0.1 para o potencial V pertencendo a Classe 2 segue o mesmo argumento do caso anterior.

■

Capítulo

4

Sistema do tipo Schrödinger-Poisson com potencial V não constante: Caso crítico

Neste capítulo, estudamos a seguinte classe de sistemas do tipo Schrödinger-Poisson

$$\begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u + \phi u = |u|^{p-1}u + |u|^4 u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\epsilon^2 \Delta \phi = u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro real, $p \in (2,5)$ e o potencial $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínuo e não constante.

Estamos interessados em estudar o sistema (4.1) com as mesmas geometrias sobre o potencial V consideradas no Capítulo 3, a saber, as geometrias introduzidas no artigo de Alves [1], onde o autor estudou a equação Schrödinger. No entanto, diferentemente do Capítulo 3, neste capítulo, nos propusemos a estudar o problema com a presença do termo crítico $|u|^4 u$, visto que em $\mathbb{R}^3$ o expoente crítico de Sobolev é $2^* = 6$. É bem conhecido na literatura, que a presença do termo crítico causa algumas dificuldades técnicas em aplicar o método variacional. Uma das dificuldades aqui, consiste em provar que o funcional associado ao problema em questão, satisfaz a condição de Palais-Smale. Dificuldade essa, que será contornada aplicando o Método de Penalização de Del Pino e Felmer, juntamente com o Princípio de Concentração e Compaciade de Lions [27]. Quando comparamos o problema (4.1) ao problema subcrítico estudado no capítulo 3, verificamos que em relação ao estudo do problema penalizado, há pelo menos duas dificuldades. A primeira é provar que o funcional associado ao problema penalizado satisfaz a condição (PS) abaixo de um certo nível, a segunda é construir um nível do passo da montanha que esteja abaixo do nível onde a condição (PS) é verificada, veja o Lema 4.1.3

Para facilitar a leitura do texto, iremos enunciar novamente as hipóteses sobre o potencial V, visto que, nesse capítulo, estamos consideramdo, o caso particular, em que $f(u) = |u|^{p-1}u$.

(V_1) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, onde $V_0 = \inf\limits_{\mathbb{R}^N} V(x)$.

(V_2) $V \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e $V, \dfrac{\partial V}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^3$, $\forall\, i,j \in \{1,2,3\}$.

(V_3) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^3$, tal que $(V(x_n))$ é limitada e $\nabla V(x_n) \to 0$, então (x_n) possui uma subsequência convergente.

(V_4) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\nabla V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

Novamente, diremos que o potencial V pertence à Classe 1 quando V satisfaz $(V_1), (V_2)$ e (V_3). E diremos que V pertence à Classe 2 quando V satisfaz $(V_1), (V_2)$ e (V_4).

O principal resultado desse capítulo é o seguinte

Teorema 4.0.1. *Suponha que V pertença à Classe 1 ou 2 e que $p \in (2,5)$. Então, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que o sistema (4.1) possui solução positiva, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.*

Assim como no Capítulo 3, por uma mudança adequada de variável, o problema (4.1) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u + \phi u = |u|^{p-1}u + |u|^4 u \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = u^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \phi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3), \end{cases} \tag{4.2}$$

além disso, para cada $u \in L^{12/5}(\mathbb{R}^3)$ o Teorema de Lax-Milgram garante a existência de uma única $\phi_u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ solução da equação

$$-\Delta \phi = u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

e portanto, nosso problema se reduz a resolver a seguinte equação de Schrödinger

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u + \phi_u u = |u|^{p-1}u + |u|^4 u \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{4.3}$$

Para contornar a falta da imersão compacta de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$ e encontar solução positiva para (4.3), iremos fazer uma outra adaptação do Método de Penalização de Del Pino e Felmer, agora com a presença do termo crítico.

Do mesmo modo que no capítulo anterior as condições (V_1) e (V_2), garantem que para todo $\epsilon > 0$ a função $\|\cdot\| : H^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)|u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

define uma norma, equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^3)$.

O lema que enunciaremos a seguir, apresenta importantes propriedades da função ϕ_u presente no termo não local do funcional associado ao problema auxiliar que será definido na próxima seção.

Lema 4.0.1. *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos* *(i)* $\|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\phi_u\|^2$, *para alguma constante* $C > 0$, *(que não depende de* u*). Em consequência, existe uma constante* $C' > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_u u^2\, dx \leq C'\|u\|^4$;

(ii) $\phi_u \geq 0$;

(iii) Para todo $t > 0$, $\phi_{tu} = t^2\phi_u$;

(iv) Para todo $\alpha > 0$ *se* $u_\alpha(x) = \alpha^2 u(\alpha x)$, *então,* $\phi_{u_\alpha}(x) = \alpha^2\phi_u(\alpha x)$;

Prova: Veja [21] ou [34]. ■

4.1 A técnica de Penalização de Del Pino e Felmer e o Problema Auxiliar.

Dado um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, considere as constantes $k = \frac{2\theta}{\theta-4}$ e $a > 0$, tal que, $a^{p-1} + a^4 = k^{-1}V_0$ em que V_0 é a constante dada na condição (V_0). Agora, considere as seguintes funções, denominadas funções de penalização:

$$g(\epsilon x, s) = \begin{cases} \chi_\Omega(\epsilon x)(|s|^{p-1}s + s^5) + \chi_{\mathbb{R}\backslash\Omega}(\epsilon x)\widetilde{f}(s) & se\ s \geq 0, \\ 0 & se\ \ s < 0, \end{cases}$$

e

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} |s|^{p-1}s + s^5 & se\ \ 0 \leq s \leq a, \\ \frac{V_0}{k}s & se\ s > a, \end{cases}$$

onde χ_Ω é a função característica em relação a Ω, ou seja, $\chi_\Omega(z) = 1$ se $z \in \Omega$ e $\chi_\Omega(z) = 0$, se $z \in \mathbb{R}^3\backslash\Omega$.

Finalmente, estudaremos o seguinte problema auxiliar não local

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u + \phi_u u = g(\epsilon x, u) & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{4.4}$$

Note que, se u_ϵ é uma solução positiva de (4.4), tal que, $u_\epsilon(x) < a$ em $\mathbb{R}^3\backslash B_{R_\epsilon}(0)$, então, u_ϵ também será uma solução do problema (4.3) e consequentemente, o par $(u_\epsilon, \phi_{u_\epsilon}) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é uma solução positiva do sistema (4.1). Portanto, nosso objetivo será encontrar uma solução do problema auxiliar (4.4) verificando essa condição. Note que pelas definições das funções $\widetilde{f}$ e g, obtemos as seguintes relações:

(g_1^*) $g(\epsilon x, s) \leq |s|^{p-1}s + s^5$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3$ e $s > 0$,

(g_2^*) $\theta G(\epsilon x, s) \leq g(\epsilon x, s)s$, $\forall\, x \in B_{R_\epsilon}(0)$ e $\forall\, s \in \mathbb{R}$,

(g_3^*) $4G(\epsilon x, s) \leq g(\epsilon x, s)s \leq \frac{V(\epsilon x)}{k}s^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_\epsilon}(0)$ e $\forall\, s \in \mathbb{R}$.

Ao problema auxiliar (4.4) associamos o funcional energia de Euler-Lagrange $J_\epsilon : E_\epsilon \to \mathbb{R}$, dado por

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)u^2)\, dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^3}G(\epsilon x, u)\, dx,$$

onde $G(\epsilon x, s) := \displaystyle\int_0^s g(\epsilon x, t)\, dt$, $\forall\ (x, s) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, e $E_\epsilon := H^1(\mathbb{R}^3)$ munido da norma $\|.\|$ definida anteriormente.

As relações $(g_1^*), (g_2^*), (g_3^*)$ e o Lema 4.0.1, garantem que o funcional J_ϵ está bem definido e é de classe $C^1(E_\epsilon, \mathbb{R})$, com derivada de Gateaux dada por:

$$J'_\epsilon(u)v = \int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u \nabla v + V(\epsilon x)uv)\, dx + \int_{\mathbb{R}^3}\phi_u uv\, dx - \int_{\mathbb{R}^3}g(\epsilon x, u)v\, dx,\ \forall\, u, v \in E_\epsilon.$$

É claro que ponto crítico de J_ϵ é solução fraca de (4.4). Os próximos resultados têm como finalidade, mostrar que para cada $\epsilon > 0$, o problema auxiliar (4.4) possui uma solução positiva $u_\epsilon \in E_\epsilon$.

Mostraremos que J_ϵ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz, veja apêndice A, Teorema A.0.2.

Lema 4.1.1. *O funcional J_ϵ verifica as geometrias do Teorema do Passo da Montanha, para todo $\epsilon > 0$ isto é, $J_\epsilon(0) = 0$ e*

(H1) Existem $\alpha, \rho > 0$, tais que, $J_\epsilon(u) \geq \alpha > 0$, se $\|u\| = \rho$.

(H2) Existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $J_\epsilon(u_0) < 0$ com $\|u_0\| > \rho$.

Prova: De fato, é claro que $J_\epsilon(0) = 0$. Além disso, pela definição de J_ϵ e o crescimento de G temos

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^3}G(\epsilon x, u)\, dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^3}|u|^6\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \frac{C_\epsilon}{p}|u|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} - \frac{1}{6}|u|^6_{L^6(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Usando a imersão contínua de E_ϵ em $L^q(\mathbb{R}^3)$, com $2 \leq q \leq 6$, obtemos constantes positivas C_1, C_2 e C_3 tais que

$$J_\epsilon(u) \geq \frac{1 - \epsilon C_1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_3}{6}\|u\|^6 - \frac{C_2 C_\epsilon}{p}\|u\|^p.$$

Assim, fazendo $\|u\| = \rho$ e escolhendo $0 < \rho < \min\left\{ \left(\frac{3-3\epsilon C_1}{2C_3}\right)^{1/4}, \left(\frac{p}{8C_\epsilon C_2}\right)^{1/p-2} \right\}$, teremos $J_\epsilon(u) \geq \frac{1}{8}\rho^2 = \alpha > 0$, para todo $u \in E_\epsilon$ com $\|u\| = \rho$, o que prova $(H1)$.

Para provar $(H2)$, considere $t > 0$ e fixe uma função não nula $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$, então, usando o item (i) do Lema 4.0.1, temos

$$J_\epsilon(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{Ct^4}{4}\|\varphi\|^4 - \frac{t^6}{6}\int_{\mathbb{R}^3} \varphi^6 dx,$$

logo, $J_\epsilon(t\varphi) \to -\infty$ se $t \to +\infty$, e assim, existe um $t_0 > 0$ tal que $\|t_0\varphi\| > \rho$ e $J_\epsilon(u_0) < 0$, com $u_0 = t_0\varphi$, o que prova a condição $(H2)$. completando assim a prova do lema. ■

Pelo Teorema do Passo da Montanha, para cada $\epsilon > 0$, existe uma sequência $(u_n) \in E_\epsilon$ de Palais-Smale para o funcional J_ϵ, no nível c_ϵ, isto é

$$J_\epsilon(u_n) \to c_\epsilon \text{ e } J_\epsilon'(u_n) \to 0,$$

onde

$$c_\epsilon := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^3) : \gamma(0) = 0 \,\text{e}\, \gamma(1) = u_0 \right\}.$$

Para nossos propósitos , assim como em [23, 24], é mais conveniente considerarmos a seguinte caracterização sobre o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha

$$c_\epsilon := \inf_{v\in E_\epsilon\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} J_\epsilon(tv). \tag{4.5}$$

O próximo lema mostra que toda sequência de Palais-Smale de J_ϵ é limitada em E_ϵ.

Lema 4.1.2. *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência $(PS)_{c_\epsilon}$ para J_ϵ. Então, (u_n) é limitada em E_ϵ.*

Prova: Note que

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta}J_\epsilon'(u_n)u_n = &\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x)u_n^2\right) dx + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n}|u_n|^2\, dx \\ &+ \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3} \left[g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)\right] dx, \end{aligned}$$

usando a condição (g_2^*) e o item (ii) do Lema 4.0.1 temos

$$J_\epsilon(u_n) - \frac{1}{\theta}J_\epsilon'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega} \left[g(\epsilon x, u_n)u_n - \theta G(\epsilon x, u_n)\right] dx. \tag{4.6}$$

Note que pelas definições de g e G, a condição (V_1) e o fato de $(2-\theta)<0$ e $k>2$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}[g(\epsilon x,u_n)u_n-\theta G(\epsilon x,u_n)]\,dx &= \frac{2-\theta}{2k\theta}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}V_0u_n^2\,dx\\ &\geq \frac{2-\theta}{4\theta}\int_{\mathbb{R}^3}V(\epsilon x)u_n^2\,dx+\frac{2-\theta}{4\theta}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\,dx\\ &= \frac{2-\theta}{4\theta}\|u_n\|^2,\end{aligned}$$

assim, de (4.6), da desigualdade acima e do fato de (u_n) ser uma sequência $(PS)_{c_\epsilon}$ para o funcional J_ϵ temos

$$c_\epsilon+o_n(1)\geq\frac{\theta-2}{4\theta}\|u_n\|^2, \tag{4.7}$$

o que prova que (u_n) é limitada em E_ϵ. ■

O lema que provaremos a seguir é de fundamental importância para contornarmos as dificuldades causada pela presença do termo crítico, no problema proposto neste capítulo.

Lema 4.1.3. *Existe $v\in E_\epsilon\setminus\{0\}$, tal que*

$$\max_{t\geq 0}J_\epsilon(tv)<\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}.$$

Prova: De acordo com (Talenti [35], 1976) para cada $h>0$ o ínfimo S da imersão de Sobolev do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$ é atingido pela função

$$\omega_h(x):=\frac{(3h)^{\frac{1}{4}}}{(h+|x|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

além disso, dada uma função $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3,[0,1])$, tal que

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{se } x\in B_1(0),\\ \\ 0, & \text{se } x\in\mathbb{R}^3\setminus B_2(0),\end{cases}$$

onde $B_1(0)$ e $B_2(0)$ são, respectivamente, as bolas de raio 1 e raio 2, contidas no $\mathbb{R}^3$ e centro na origem, as quais representaremos, simplesmente por B_1 e B_2. Considere a função dada por $\Theta_h(x)=\varphi\omega_h$ e note que, pela definição de φ, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_1}\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{(h+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right|^2dx=\int_{B_2\setminus B_1}\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{(h+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right|^2dx<+\infty,$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_1}|\nabla\Theta_h|^2\,dx=(3h)^{\frac{1}{2}}\int_{B_2\setminus B_1}\left|\nabla\left(\frac{\varphi}{(h+|x|^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right|^2dx=O(h^{\frac{1}{2}}).$$

Agora, observe que pela definição da função Θ_h e o fato de $\varphi = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_2$, concluímos que

$$\int_{B_2} \Theta_h^6 dx = (3h)^{\frac{3}{2}} \int_{B_2} \frac{\varphi^6}{(h+|x|^2)^3} dx$$
$$= (3h)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(h+|x|^2)^3} dx + (3h)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\varphi^6 - 1)}{(h+|x|^2)^3} dx.$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo $x = yh^{1/2}$, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma

$$\int_{B_2} \Theta_h^6 dx = 3^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|y|^2)^3} dy + (3h)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1} \frac{(\varphi^6 - 1)}{(h+|x|^2)^3} dx. \tag{4.8}$$

Usando a desigualdade triangular e fato de $0 \leq \varphi \leq 1$ temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1} \frac{(\varphi^6 - 1)}{(h+|x|^2)^3} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1} \frac{2}{(h+|x|^2)^3} dx \leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1} \frac{2}{|x|^6} dx < +\infty. \tag{4.9}$$

Assim, passando ao limite (4.8) com $h \to 0$ e usando (4.9) concluímos que

$$\int_{B_2} \Theta_h^6 dx \longrightarrow 3^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|y|^2)^3} dy > 0. \tag{4.10}$$

Agora, notando que a função $u(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^3} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ então, pela definição de convergência, exitem constantes h_0, M_1 e M_2 tal que

$$M_1 < \int_{B_2} \Theta_h^6 dx < M_2, \tag{4.11}$$

para todo $h \in (0, h_0)$. Por outro lado, fazendo, novamente, a mudança de variável $x = yh^{\frac{1}{2}}$, concluímos que

$$\int_{B_1} |x| \omega_h^6 dx = \frac{3^{3/2}}{h^{\frac{1}{2}}} \int_{B_{\frac{1}{\sqrt{h}}}} \frac{|y|}{(1+|y|^2)^3} dy,$$

e desde que, a integral do lado direito da igualdade acima é finita, então

$$\int_{B_1} |x| \omega_h^6 dx = O(h^{\frac{1}{2}}). \tag{4.12}$$

Agora, vamos denotar $X_h = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_h|^2 dx$, onde

$$v_h(x) := \frac{\Theta_h(x)}{|\Theta_h|_{L^6(\mathbb{R}^3)}}.$$

Pela definição de φ, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_2} |\nabla v_h|^2 dx &= \int_{B_1} |\nabla v_h|^2 dx + \int_{B_2\setminus B_1} |\nabla v_h|^2 dx \\ &= \int_{B_1} |\nabla \omega_h|^2 dx + \int_{B_2\setminus B_1} |\nabla \Theta_h|^2 dx.\end{aligned}$$

De acordo com [35] para cada $h > 0$ a função ω_h é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ \\ u \geq 0 \text{ e } \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx < +\infty. \end{cases}$$

Usando o Teorema do Divergente e observando que ω_h é radialmente decrescente, temos a desigualdade

$$\int_{B_1} |\nabla \omega_h|^2 dx \leq \int_{B_1} \omega_h^6 dx.$$

Da desigualdade acima e de (4.12) obtemos

$$\int_{B_2} |\nabla \omega_h|^2 dx \leq \int_{B_1} \omega_h^6 dx + O(h^{1/2}).$$

Além disso, usando a desigualdade de Hölder e lembrando que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \omega_h^6\, dx = S^{3/2}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_2} |\nabla \omega_h|^2 dx &\leq \left(\int_{B_1} \omega_h^6 dx\right)^{2/3} \left(\int_{B_1} \omega_h^6 dx\right)^{1/3} + O(h^{1/2}) \\ &\leq S \left(\int_{B_1} \omega_h^6 dx\right)^{1/3} + O(h^{1/2}),\end{aligned}$$

e por (4.11)

$$X_h \leq S + O(h^{1/2}).$$

Note que, sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \in \Omega$ e $B_2 \subset \Omega$. Agora, sendo

$$J_\epsilon(tv_h) = \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla v_h)|^2 + V(\epsilon x)|v_h|^2) dx + \frac{t^4}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_h} v_h^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} G(\epsilon x, tv_h) dx,$$

onde $G(\epsilon x, s) = \displaystyle\int_0^s g(\epsilon x, t) dt$ e usando as definições de G e g, temos

$$G(\epsilon x, tv_h) = \frac{\lambda t^{p+1}}{p+1} |v_h|^{p+1} + \frac{t^6}{6} |v_h|^6,$$

e desde que $\int_{\mathbb{R}^3} |v_h|^6 dx = 1$, então, usando o item (i) do Lema 4.0.1 obtemos

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon(tv_h) &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_h)|^2 + V(\epsilon x)|v_h|^2)dx + \frac{t^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{v_h} v_h^2 dx - \frac{\lambda t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|v_h|^{p+1}dx - \frac{t^6}{6}\\
&\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_h)|^2 + V_\infty|v_h|^2)dx + C\frac{t^4}{4}|v_h|^4_{L^{12/5}(\mathbb{R}^3)} - \frac{\lambda t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|v_h|^{p+1}dx - \frac{t^6}{6}.
\end{aligned}
$$

Agora, definimos a função $B : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$
B(t) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_h|^2 + V_\infty|v_h|^2)dx + C\frac{t^4}{4}|v_h|^4_{L^{12/5}(\mathbb{R}^3)} - \frac{\lambda t^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}|v_h|^{p+1}dx - \frac{t^6}{6}.
$$

Note que, para cada $h > 0$, exite $t_h > 0$, tal que $B(t_h) = \max_{t\geq 0} B(t)$ e sendo B diferenciável, então $B'(t_h) = 0$, e assim

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_h)|^2 + V_\infty|v_h|^2)dx - t_h^4 = \lambda t_h^{p-1}|v_h|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)} - Ct_h^2|v_h|^4_{L^{12/5}(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.13}
$$

Afirmamos que para $h > 0$, suficientemente pequeno, t_h satisfaz

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_h|^2 + V_\infty|v_h|^2)dx\right)^{\frac{1}{4}} \geq t_h. \tag{4.14}
$$

De fato, usando a definição de v_h e estimativas similares usadas em [10], podemos concluir que para cada $q \in [2, 6)$ tem-se

$$
|v_h|^q_{L^q(\mathbb{R}^3)} = \begin{cases} O(h^{q/4}), & \text{se } q \in [2,3), \\ O(h^{3/4}|log(h)|), & \text{se } q = 3, \\ O(h^{6-q/4}), & \text{se } q \in (3,6), \end{cases}
$$

então, pela definição de p concluímos que

$$
|v_h|^4_{L^{12/5}(\mathbb{R}^3)} = O(h) \text{ e } |v_h|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)} = O(h^{5-p/4}),
$$

assim, por (4.13), para $h > 0$, suficientemente pequeno, obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla v_h|^2 + V_\infty|v_h|^2)dx - t_h^4 = t_h^2\left[\lambda t_h^{p-3}O(h^{5-p/4}) - CO(h)\right] \geq 0,
$$

o que prova a afirmação em (4.14).

Agora, considere $t_0 = \left(X_h + \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |v_h|^2 dx\right)^{1/4}$, em que $X_h = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v_h|^2 dx$, então

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(t_h v_h) &\leq \frac{t_h^2}{2} t_0^4 - \frac{1}{6} t_h^6 + \frac{t_h^4}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{v_h} v_h^2 dx - \frac{t_h^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |v_h|^{p+1} dx \\
&\leq \frac{1}{3} t_0^6 + \frac{C}{4} t_h^4 |v_h|^4_{L^{12/5}(\mathbb{R}^3)} - \frac{t_h^{p+1}}{p+1} |v_h|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq \frac{1}{3} \left(S + O(h^{1/2}) + \int_{B_2} V_\infty |v_h|^2 dx\right)^{3/2} + \frac{C}{4} t_h^4 |v_h|^4_{L^{12/5}(\mathbb{R}^3)} - \frac{t_h^{p+1}}{p+1} |v_h|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Uma vez que $(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + \alpha(a+b)^\alpha b$, para todo $a, b \geq 0$ e $\alpha > 1$, então, existe uma constante $C_1 > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(t_h v_h) &\leq \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}} + O(h^{1/2}) + C_1 \int_{\mathbb{R}^3} V_\infty |v_h|^2 dx + \frac{C}{4} t_h^4 |v_h|^4_{L^{12/5}(\mathbb{R}^3)} - \frac{t_h^{p+1}}{p+1} |v_h|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)} \\
&= \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}} + O(h^{1/2}) + C_1 V_\infty O(h^{1/2}) + \frac{C}{4} t_h^4 O(h) - \frac{t_h^{p+1}}{p+1} O(h^{5-p/4}),
\end{aligned}$$

assim, tomando $h > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que

$$J_\epsilon(t_h v_h) < \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}}, \ \forall \, \epsilon > 0.$$

de onde segue que

$$\max_{t>0} J_\epsilon(t_h v_h) < \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}}, \ \forall \, \epsilon > 0.$$

Note que pela caracterização do nível minimax dada em (4.5) e o lema anterior obtemos

$$c_\epsilon < \frac{1}{3} S^{\frac{3}{2}}, \ \forall \, \epsilon > 0.$$

Lema 4.1.4. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para J_ϵ. Então, dado $\alpha > 0$, existe $r = r(\alpha) > 0$, tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_r(0)} (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x) u_n^2) \, dx \leq \alpha.$$

Prova: A prova deste lema é análoga a prova do Lema 1.2.3 do Capítulo 1. ■

Lema 4.1.5. *O funcional J_ϵ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c_ϵ.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência de Palais-Smale para funcional J_ϵ, então (u_n) é limitada em E_ϵ e assim a menos de subsequência $u_n \rightharpoonup u$ em E_ϵ e $u_n(x) \to u(x) \, q.t.p$ em $\mathbb{R}^3$, logo, existem medidas não negativas μ e ν tais que

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\mu = |\nabla u|^2 + \mu \text{ e } |u_n|^6 \rightharpoonup d\nu = |u|^6 + \nu, \tag{4.15}$$

no sentido das medidas de Radon, para mais detalhes, veja Willem [37], seção 1.9, pag 26. Usando o Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, [27] ou Teorema $A.0.9$ (Apêndice), existe um conjunto de índices J, no máximo enumerável, uma sequência de pontos $(x_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}^3$, duas sequências de medidas não negativas (μ_j) e (ν_j) tais que

$$\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \ \mu \geq \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j} \text{ e } S\nu_j^{1/3} \leq \mu_j, \tag{4.16}$$

para todo $j \in J$, onde δ_{x_j} é a função delta de Dirac de massa 1 no ponto x_j e S é a melhor constante de Sobolev na imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ em $L^6(\mathbb{R}^3)$.

Queremos provar que, a menos de subsequência, (u_n) converge forte em E_ϵ para o seu limite fraco u. Para isso, mostraremos inicialmente que a medida ν é nula, isto é, que J é vazio.

De fato, suponhamos por contradição que o conjunto J não seja vazio e para cada $j \in J$, fixado, vamos considerar a função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, [0,1])$, tal que $\varphi \equiv 1$ em $B_1(0), \varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_2(0)$ e $|\nabla\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 2$. Agora, para cada $\rho > 0$, considere a função

$$\psi_\rho(x) = \varphi\left(\frac{x - x_j}{\rho}\right).$$

Note que para cada $\rho > 0$, fixado

$$J'_\epsilon(u_n)(\psi_\rho u_n) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty,$$

então, desde que $g(x,s)s \leq |s|^{p+1} + |s|^6$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\rho \, dx \leq & \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1}\psi_\rho \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \psi_\rho \, dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \psi_\rho \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon x)|u_n|^2 \psi_\rho \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 \psi_\rho \, dx + o_n(1).\end{aligned} \tag{4.17}$$

Usando as imersões compactas de Sobolev de E_ϵ em $L^q(B_{2\rho}(x_j))$, com $2 \leq q < 6$ obtemos a menos de subsequência que $u_n \to u$ em $L^2(B_{2\rho}(x_j))$, assim, usando Vaimberg e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1}\psi_\rho \, dx = \int_{B_{2\rho}(x_j)} |u_n|^{p+1}\psi_\rho \, dx \to \int_{B_{2\rho}(x_j)} |u|^{p+1}\psi_\rho \, dx, \tag{4.18}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon x)|u_n|^2 \psi_\rho \, dx = \int_{B_{2\rho}(x_j)} V(\epsilon x)|u_n|^2 \psi_\rho \, dx \to \int_{B_{2\rho}(x_j)} V(\epsilon x)|u|^2 \psi_\rho \, dx. \tag{4.19}$$

Além disso, pelo item (ii) do Lema 3.1.1 (veja Capítulo 3)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_n} u_n^2 \psi_\rho \, dx = \int_{B_{2\rho}(x_j)} \phi_{u_n} u_n^2 \psi_\rho \, dx \to \int_{B_{2\rho}(x_j)} \phi_u u^2 \psi_\rho \, dx, \tag{4.20}$$

e usando o fato de que $|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\mu$ e $|u_n|^6 \rightharpoonup d\nu$, então

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \psi_\rho \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\rho \, d\mu \text{ e } \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \psi_\rho \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\rho \, d\nu, \tag{4.21}$$

assim, fazendo $n \to \infty$ em (4.17) e usando (4.18), (4.19), (4.20) e (4.21), temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\rho \, dx \leq & \int_{B_{2\rho}(x_j)} |u|^{p+1} \psi_\rho \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\rho \, d\nu \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\rho \, d\mu - \int_{B_{2\rho}(x_j)} V(\epsilon x) |u|^2 \psi_\rho \, dx - \int_{B_{2\rho}(x_j)} \phi_u u^2 \psi_\rho \, dx + o_n(1).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Afirmamos que

$$\lim_{\rho\to 0} \left[\limsup_{n\to+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\rho \, dx \right| \right] = o_\rho(1). \tag{4.23}$$

De fato, pela desigualdade de Hölder

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\rho \, dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^2 |\nabla \psi_\rho|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

e usando a limitação de (∇u_n) em $L^2(\mathbb{R}^3)$, a imersão compacta de $E_\epsilon(B_{2\rho}(x_j))$ em $L^2(B_{2\rho}(x_j))$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos por passagem ao limite que

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\rho \, dx \right| \leq C \left(\int_{B_{2\rho}(x_j)} |u|^2 |\nabla \psi_\rho|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

e aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes 3 e $\frac{3}{2}$, temos

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n \nabla \psi_\rho u_n \, dx \right| \leq C \left(\int_{B_{2\rho}(x_j)} |u|^6 \, dx \right)^{1/6} \left(\int_{B_{2\rho}(x_j)} |\nabla \psi_\rho|^3 \, dx \right)^{1/3},$$

e pela definição de ψ_ρ temos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_n \nabla \psi_\rho u_n \, dx \right| &\leq C \left(\int_{B_{2\rho}(x_j)} |u|^6 \, dx \right)^{1/6} \left(\int_{B_2(0)} |\nabla \varphi|^3 \, dx \right)^{1/3} \\ &\leq \overline{C} \left(\int_{B_{2\rho}(x_j)} |u|^6 \, dx \right)^{1/6}\end{aligned}$$

e desde que

$$\lim_{n\to+\infty} |u|^6 \chi_{B_{2\rho}(x_j)} = 0 \text{ e } |u|^6 \chi_{B_{2\rho}(x_j)} \leq |u|^6 \in L^1(\mathbb{R}^3),$$

então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u_n\nabla\psi_\rho u_n\,dx\right|\right]=o_\rho(1),$$

provando a afirmação.

Observe ainda, que pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, se $\rho\to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{p+1}\psi_\rho\,dx\to\int_{B_\rho(x_j)}|u|^{p+1}\chi_{x_j}\,dx=0, \tag{4.24}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_u u\psi_\rho\,dx\to\int_{B_\rho(x_j)}\phi_u u\chi_{x_j}\,dx=0, \tag{4.25}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^3}V(\epsilon x)|u|^2\psi_\rho\,dx\to\int_{\mathbb{R}^3}V(\epsilon x)|u|^2\chi_{x_j}\,dx=0. \tag{4.26}$$

Assim, passando ao limite em (4.22) com $\rho\to 0$ e usando $(4.23),(4.24),(4.25)$ e (4.26), obtemos

$$\int_{\{x_j\}}d\mu\le\int_{\{x_j\}}d\nu,$$

e assim,

$$\mu_j(\{x_j\})\le\nu_j(\{x_j\})=\nu_j.$$

Da desigualdade acima e de (4.16), concluímos que $\nu_j\ge S^{3/2}$ para todo $j\in J$, e desde que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\nu_j^{1/3}<+\infty,$$

segue que o conjunto J é finito. Agora vamos provar que $\nu_j=0$ para todo $j\in J$. De fato, observe que

$$c_\epsilon+o_n(1)=J_\epsilon(u_n)-\frac{1}{4}J_\epsilon'(u_n)u_n,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}c_\epsilon+o_n(1)=&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u_n|^2+V(\epsilon x)u_n^2\right)\,dx+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\int_\Omega|u_n|^6\,dx\\&+\frac{1}{4}\int_\Omega\left(|u_n|^{p+1}-\frac{4}{p+1}|u_n|^{p+1}\right)\,dx+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}\left(g(\epsilon x,u_n)-4G(\epsilon x,u_n)\right)\,dx,\end{aligned}$$

e usando as condições (g_2^*) e (g_3^*) temos

$$c_\epsilon+o_n(1)\ge\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2\,dx+\frac{1}{12}\int_\Omega|u_n|^6\,dx. \tag{4.27}$$

Afirmamos que $x_j \in \Omega$. De fato, suponha, sem perda de generalidade que $x_j \in int(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$, então, escolhendo $\rho > 0$, suficientemente pequeno, temos $supp\psi_\rho \subset B_\rho(x_j) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, logo usando (4.23), (4.25) e (4.26), temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \psi_\rho \, dx = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} g(\epsilon x, u_n) u_n \psi_\rho \, dx + o_{n,\rho}(1),$$

passando ao limite com $n \to \infty$, e depois com $\rho \to 0$, temos

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} g(\epsilon x, u_n) u_n \psi_\rho \, dx \right] = 0,$$

e assim, $\mu_j \leq 0$, o que gera uma contradição. Portanto, a afirmação é verdadeira, logo por (4.27) temos

$$c_\epsilon + o_n(1) \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \psi_\rho \, dx + \frac{1}{12} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \psi_\rho \, dx + o_n(1), \tag{4.28}$$

e desde que $\mu_j \geq S^{3/2}$, então, por passagem ao limite em (4.28) temos

$$c_\epsilon \geq \frac{1}{4} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \psi_\rho \, dx + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j} \psi_\rho \right] + \frac{1}{12} \left[\int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \psi_\rho \, dx + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \psi_\rho \right],$$

de onde concluímos que

$$c_\epsilon \geq \frac{1}{4} \mu_j + \frac{1}{12} \nu_j \geq \frac{1}{3} S^{3/2},$$

o que é uma contradição, e assim o conjunto J é vazio. Portanto, de (4.15) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \, dx. \tag{4.29}$$

Afirmamos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$C \|u_n - u\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_n) u \, dx + o_n(1). \tag{4.30}$$

Considere, por um momento, que a afirmação é verdadeira. Vamos provar que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_n) u \, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} [g(\epsilon x, u_n) u_n - g(\epsilon x, u_n) u] \, dx \right| \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} [g(\epsilon x, u_n) u_n - g(\epsilon x, u_n) u] \, dx \right| &\leq \left| \int_{B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx - \int_{B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u \, dx \right| \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u \, dx \right|. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Seja $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$, então, usando a imersão compacta de E_ϵ em $L^{6/5}(B_R(0))$, Vaimberg e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{B_R(0)} |u_n|^5 u \, dx \to \int_{B_R(0)} |u|^6 \, dx, \tag{4.32}$$

assim, usando o crescimento da g, (4.29) e (4.32), concluímos que dado $\delta > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx - \int_{B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u \, dx \right| < \frac{\delta}{3}, \forall n > n_0. \tag{4.33}$$

Além disso, pela condição (g_3^*) temos

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x) u_n^2),$$

logo, pelo Lema 4.1.4, dado $\delta > 0$, ajustando $R > 0$ obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx \right| < \frac{\delta}{3}. \tag{4.34}$$

Agora, usando novamente o crescimento da g e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u \, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n|^{p-1} |u| \, dx + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n|^5 |u| \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u_n|^6 \, dx \right)^{\frac{5}{6}} \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} |u|^6 \, dx \right)^{\frac{1}{6}},
\end{aligned}$$

e sendo (u_n) uma sequência limitada em E_ϵ, então, para $R > 0$ suficientemente grande, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} g(\epsilon x, u_n) u \, dx \right| \leq \frac{\delta}{3}. \tag{4.35}$$

Segue de $(4.31), (4.33), (4.34)$ e (4.35) que

$$\int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_n) u_n \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_n) u dx \to 0.$$

Portanto, por (4.30), concluímos que, a menos de subsequência $u_n \to u$ em E_ϵ.

Provemos agora que a afirmação em (4.30) é verdadeira. De fato, pela proposição (A.0.2) existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left[|\nabla u_n|^2 - \nabla u_n \nabla u - \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) \right] dx$$

e

$$C_2\int_{\mathbb{R}^3}|u_n-u|^2dx\le\int_{\mathbb{R}^3}V(\epsilon x)\left[|u_n|^2-u_nu-u(u_n-u)\right]dx.$$

Considerando $C=\min\{C_1,C_2\}$, temos

$$\begin{aligned}C\|u_n-u\|^2\le&\int_{\mathbb{R}^3}\left[|\nabla u_n|^2-\nabla u_n\nabla u-\nabla u(\nabla u_n-\nabla u)\right]dx\\&+\int_{\mathbb{R}^3}V(\epsilon x)\left[|u_n|^2-u_nu-u(u_n-u)\right]dx,\end{aligned}$$

e usando a definição de J'_ϵ e fato de que $J'_\epsilon(u_n)u_n=J'_\epsilon(u_n)u=o_n(1)$, pois (u_n) é $(PS)_{c_\epsilon}$, temos

$$\begin{aligned}C\|u_n-u\|^2\le o_n(1)+&\int_{\mathbb{R}^3}g(\epsilon x,u_n)u_ndx-\int_{\mathbb{R}^3}g(\epsilon x,u_n)udx-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2dx\\+&\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_nudx-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla(u_n-u)dx-\int_{\mathbb{R}^3}V(\epsilon x)u(u_n-u)dx.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Note que pelos itens (ii) e (iv) do Lema 1.1.2 (ver capítulo 1)

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_nu\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{u_n}u_n^2\,dx=o_n(1),\tag{4.37}$$

e desde que $u_n\rightharpoonup u$ em E_ϵ e V é limitado, então, por continuidade

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla(u_n-u)\,dx\to 0\ \text{ e }\ \int_{\mathbb{R}^3}V(\epsilon x)u(u_n-u)\,dx\to 0.\tag{4.38}$$

Portanto, segue de (4.36), (4.37) e (4.38) que

$$C\|u_n-u\|^2\le\int_{\mathbb{R}^3}g(\epsilon x,u_n)u_n\,dx-\int_{\mathbb{R}^3}g(\epsilon x,u_n)u\,dx+o_n(1),$$

provando a afirmação (4.30). ■

Teorema 4.1.1. *Para cada $\epsilon>0$, o problema auxiliar* (4.4) *possui uma solução positiva $u_\epsilon\in E_\epsilon$.*

Prova: Desde que o funcional J_ϵ satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha (Lema 4.1.1), e satisfaz a condição $(PS)_{c_\epsilon}$, para $c_\epsilon<\frac{1}{3}S^{2/3}$, (Lema 4.1.5), então, pelo Teorema do Passo da Montanha (veja Apêndice A, Teorema $A.0.2$), existe $u_\epsilon\in E_\epsilon$ tal que

$$J_\epsilon(u_\epsilon)=c_\epsilon>0\quad\text{e}\quad J'_\epsilon(u_\epsilon)=0,$$

onde c_ϵ é nível minimax do funcional J_ϵ, ou seja,

$$c_\epsilon=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J_\epsilon(\gamma(t))\qquad\text{e}\qquad\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],X):\gamma(0)=0\ \text{ e }\ \gamma(1)=u_0\}.$$

E como os pontos críticos de J_ϵ são soluções fracas do problema auxiliar (4.4), segue que, para todo $\epsilon>0$ a função $u_\epsilon\in E_\epsilon$ é solução fraca de (4.4). Procedendo de modo análogo ao que foi feito no Teorema 3.2.1 (veja Capítulo 3) concluimos que u_ϵ é solução positiva. ■

4.2 Solução Positiva do Sistema de Schrödinger-Poisson (4.1)

Nesta seção, mostaremos que a solução u_ϵ do problema auxiliar (4.4) também é solução do problema não local (4.2) para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o que equivale a mostrar que o par $(u_\epsilon, \phi_{u_\epsilon}) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é solução positiva do sistema (4.1).

Explorando argumentos análagos aos ultilizados no inicio da Seção 3.3 [Capítulo 3], mostra-se que o funcional

$$J_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2 + V_\infty|u|^2)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_{\tilde{u}}u^2dx - \int_{\mathbb{R}^3}F(u)dx,$$

está bem definido e utilizando argumentos padrões e o Lema 3.1.1, podemos mostrar que J_∞ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, consequentemente está bem definido o nível minimax

$$c_\infty := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\infty(\gamma(t)) \quad \text{e} \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^3)) : \gamma(0) = 0 \ \text{e} \ J_\infty(\gamma(1)) < 0\}.$$

Além disso,

$$\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\epsilon(\gamma(t)) \le \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\infty(\gamma(t)) \; \forall\gamma\in\Gamma,$$

de onde obtemos

$$c_\epsilon \le c_\infty, \text{ para todo } \epsilon > 0. \tag{4.39}$$

O próximo lema nos fornece uma estimativa da norma da solução u_ϵ em relação ao nível minimax do funcional J_∞ e a constante k.

Lema 4.2.1. *A solução do problema auxiliar* (4.4) *satisfaz a estimativa*

$$\|u_\epsilon\|^2 \le 2kc_\infty.$$

Prova: De fato, por passagem ao limite em (4.7) e usando (4.39) temos

$$\|u_\epsilon\|^2 \le \frac{4\theta}{\theta-2}c_\infty,$$

e o resultado segue da definição de $k = \dfrac{2\theta}{\theta-4}$. ∎

Lema 4.2.2. *A solução u_ϵ do problema auxiliar* (3.6) *verifica:*

$$\max_{x\in\partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} u_\epsilon(x) \to 0 \quad \textit{quando} \quad \epsilon \to 0.$$

Prova: Suponha, por contradição, que exista um número real $b > 0$ e uma sequência $\epsilon_n \to 0$, tais que

$$\max_{x\in\partial B_{\frac{R_{\epsilon_n}}{\epsilon_n}}(0)} u_{\epsilon_n}(x) \ge b > 0, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Agora, fixemos $x_n \in \partial B_{\frac{R\epsilon_n}{\epsilon_n}}(0)$ satisfazendo

$$u_{\epsilon_n}(x_n) = \max_{x \in \partial B_{\frac{R\epsilon_n}{\epsilon_n}}(0)} u_{\epsilon_n}(x).$$

Portanto,

$$u_{\epsilon_n}(x_n) \geq b > 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $(u_{\epsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E_ϵ e ϕ_n é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, então, denotando $v_n(x) := u_{\epsilon_n}(x + x_n)$ e $\phi_n(x) := \phi_{u_{\epsilon_n}}(x + x_n)$, concluímos que as sequências (v_n) e (ϕ_n) são limitadas em E_ϵ e $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, respectivamente. Além disso,

$$\begin{cases} -\Delta v_n + V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)v_n + \phi_n v_n = g(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n) \,\text{em } \mathbb{R}^3, \\ \\ v_n \in E_\epsilon, \ \ v_n > 0, \ \ \phi_n > 0, \ \text{ em } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{4.40}$$

Usando um argumento semelhante ao utilizado na prova do Lema 3.3.2 [veja Capítulo 3], podemos concluir que a sequência (v_n) converge uniformemente em conjuntos compactos do $\mathbb{R}^3$ para seu limite fraco $v \in E_\epsilon$. Então, $v \in C(\mathbb{R}^3)$ e $v(0) \geq b > 0$ o que implica $v \not\equiv 0$. Além disso, pela condição (V_2), existe uma subsequência de $(\epsilon_n x_n)$, que ainda denotaremos por $(\epsilon_n x_n)$, tal que

$$V(\epsilon_n x_n) \to \vartheta,$$

para algum número real $\vartheta > 0$. Agora, uma vez que, por (4.40), vale a igualdade abaixo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_n \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) v_n \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_n v_n \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n)\varphi \, dx, \tag{4.41}$$

para toda $\varphi \in E_\epsilon$, então, passando ao limite, como $n \to +\infty$ e usando o Teorema da Convergência Dominada e o item (iv) do Lema 3.1.1, deduzimos que v é solução fraca não nula do problema

$$-\Delta v + \vartheta v + \phi v - h(\epsilon x, v) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

em que $h(\epsilon x, s) := \widehat{\chi}(\epsilon x) f(s) + (1 - \widehat{\chi}(\epsilon x))\widetilde{f}(s)$ para alguma função $\widehat{\chi} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Agora, note que por densidade, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, tal que,

$$\|\varphi_j - v\| \leq \frac{1}{j},$$

ou seja,

$$\|\varphi_j - v\| = o_j(1).$$

E considerando $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ como função teste em (4.41) e procedendo como no Lema 3.3.3, veja Capítulo 3, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left[V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - V(\epsilon_n x_n)\right] v_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = o_j(1).$$

Desde que φ_j tem suporte compacto e $v_n \to v$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$, para todo $s \in [2,6)$, então,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left[V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - V(\epsilon_n x_n)\right] v \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = o_j(1).$$

Fazendo $\varphi_j = (\varphi_j - v) + v$ e procedendo de modo análogo ao que foi feito anteriormente, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left[V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - V(\epsilon_n x_n)\right] \varphi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = o_j(1),$$

de onde concluímos que

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - V(\epsilon_n x_n)\right] \frac{\partial (\varphi_j)^2}{\partial x_i} dx \right| = o_j(1).$$

Seja $R > 0$ e $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$, tal que, $supp\, \varphi_j \subset B_R(0)$. Desde que $V, \varphi_j \in C^2(\mathbb{R}^3)$, podemos usar o Teorema de Green e obter

$$\int_{B_R(0)} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)\varphi_j^2 dx = -\int_{B_R(0)} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)\frac{\partial (\varphi_j)}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B_R(0)} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)\varphi_j^2 \eta_i dS_{x_i},$$

onde η_i é o vetor normal exterior a fronteira de $B_R(0)$. Agora, usando novamente a fato de que φ_j tem suporte compacto, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)\varphi_j^2 dx &= -\int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)\frac{\partial (\varphi_j)^2}{\partial x_i} dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} V_{\epsilon_n} \frac{\partial (\varphi_j)^2}{\partial x_i} dx - \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon_n x_n)\frac{\partial (\varphi_j)^2}{\partial x_i} dx \\
&= o_j(1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)\varphi_j^2 dx \right| = o_j(1). \tag{4.42}$$

Agora, provaremos que

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx \right| = o_j(1). \tag{4.43}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx \right| = \Bigg| &\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) \right] |\varphi_j|^2 dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)|\varphi_j|^2 dx \Bigg|.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Desde que por (V_2), $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right)$ é limitada, para cada $i = 1, 2, 3$ existe $\gamma_i \in \mathbb{R}$, tal que, a menos de subsequência,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) \to \gamma_i,$$

assim, fazendo $n \to \infty$, temos

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right] |\varphi_j|^2 \to 0, \text{ q.t.p} \quad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right] |\varphi_j|^2 dx = o_j(1). \tag{4.45}$$

Passando ao limite (4.44) e usando (4.42) e (4.45), obtemos (4.43).

Agora, provaremos que a sequência $(\epsilon_n x_n)$ é $(PS)_\vartheta$ para o potencial V. De fato, desde que v é não-nula e

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2,$$

existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |v|^2, \text{ para todo } j \geq j_0.$$

Agora, observando que

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx\right).$$

segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right| \leq \frac{2}{\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx} \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi_j|^2 dx\right|, \text{ para todo } j \geq j_0,$$

usando (4.43) e a desigualdade acima, obtemos para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right| = o_j(1).$$

Sendo j arbitrário, concluí-se que $\nabla V(\epsilon_n x_n) \to 0$, e desde que, $V(\epsilon_n x_n) \to \vartheta$, então, a sequência $(\epsilon_n x_n)$ é $(PS)_\vartheta$ para o potencial V. Além disso, sendo $V(\epsilon_n x_n)$ limitada, concluímos por (V_3) que $(\epsilon_n x_n)$ possui subsequência convergente em $\mathbb{R}^3$, o que é absurdo, pois

$$|\epsilon_n x_n| = |\epsilon_n| \frac{|R_{\epsilon_n}|}{|\epsilon_n|} = |R_{\epsilon_n}| = \frac{1}{\epsilon_n} \to \infty, \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$\max_{x \in \partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} u_\epsilon(x) \to 0 \text{ quando } \epsilon \to 0. \qquad \blacksquare$$

O caso em que o potencial V pertence a Classe 2, a solução u_ϵ do problema auxiliar (4.4), também satisfaz a mesma propriedade presente no lema anterior e demonstração é análoga a prova do Lema 3.3.4, [ver Capítulo 3].

4.2.1 Prova do Teorema 4.0.1

Nesta subseção, provaremos que se o potencial V pertence a Classe 1 ou a Classe 2, então a solução u_ϵ do problema auxiliar (4.4) satisfaz a seguinte estimativa,

$$u_\epsilon(x) < a, \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0),$$

para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Prova do Teorema 4.0.1: Suponha, inicialmente, que o potencial V pertença a Classe 1. Pelo Lema 4.2.2, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que

$$\max_{x \in \partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} u_\epsilon(x) < a - \delta,$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Considere a função w_ϵ dada por

$$w_\epsilon(x) = \begin{cases} (u_\epsilon - a + \delta)^+(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0), \\ \\ 0, & \text{se } x \in B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0). \end{cases}$$

Note que, por construção $w_\epsilon \in E_\epsilon$. Além disso, pelo truncamento g, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w_\epsilon|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} \nabla(u_\epsilon - a + \delta)^+ \nabla w_\epsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u_\epsilon \nabla w_\epsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} g(\epsilon x, u_\epsilon) w_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} V(\epsilon x) u_\epsilon w_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{u_\epsilon} u_\epsilon w_\epsilon dx \\ &\leq \left(\frac{1}{k} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} V(\epsilon x) u_\epsilon w_\epsilon dx \leq 0, \end{aligned}$$

logo, $w_\epsilon \equiv 0$. Assim, $u_\epsilon(x) \leq a - \delta < a$ em $\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)$. Portanto, pela definição de g, temos

$$g(\epsilon x, u_\epsilon) = |u_\epsilon|^{p-1} u_\epsilon + u_\epsilon^5, \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0),$$

mostrando que u_ϵ é solução do problema não local dado em (4.3). Consequentemente, o par $(u_\epsilon, \phi_{u_\epsilon})$ é solução do sistema (4.1), o que prova o Teorema 4.0.1 para o potencial V pertencendo a Classe 1.

A demonstração do Teorema 4.0.1 para o potencial V pertencendo a Classe 2 segue o mesmo argumento do caso anterior.

■

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados importantes

Este apêndice tem como objetivo apresentar algumas definições e alguns resultados importantes que foram usados no decorrer dos capítulos desta tese.

Definição A.0.1. *Considere um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço normado. Dizemos que o funcional I é Fréchet Diferenciável em $u \in X$, quando existe um funcional linear e contínuo $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{\|w\|\to 0} \frac{|I(u+w) - I(u) - L(w)}{\|w\|} = 0.$$

Além disso

(a) Dizemos que o funcional I é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ quando sua derivada de Fréchet I' é contínua sobre X.

(b) A derivada de Gateaux de I é dada por

$$I'(u)w = \lim_{t\to 0} \frac{[I(u+tw) - I(u)]}{t} = 0.$$

(c) Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Proposição A.0.1. *Seja X um espaço de Banach e I um funcional definido eem X, se I tem derivada de Gateaux contínua em X, então, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Teorema A.0.1. *(Teorema do passo da Montanha, Willem). Seja X um Espaço de Banach, $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R}), \varphi \in X$ e $r > 0$. Suponha que*

$$b := \inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geq J(\varphi).$$

Então, para cada $\epsilon > 0$ existe $u \in X$ tal que

(a) $c - 2\epsilon \leq J(u) \leq c + 2\epsilon$,

(b) $\|J'(u)\| < 2\epsilon$,

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \quad e \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = \varphi\}.$$

Prova: (Ver [37]).

Teorema A.0.2. *(Teorema do passo da Montanha, Ambrosetti-Rabinowitz). Seja X um Espaço de Banach e $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, tal que $J(0) = 0$. Suponha que*

(H1) Existem $\alpha, \rho > 0$, tais que, $J(u) \geq \alpha > 0; se \|u\| = \rho$;

(H2) Existe $u_0 \in X$ tal que $J(u_0) < 0$; se $\|u_0\| > \rho$.
Se J satisfaz a condição $(PS)_c$, onde:

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) \quad e \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = u_0\},$$

então, c é um valor crítico de J, ou seja, existe $u \in X$, tal que

$$J(u) = c \quad e \quad J'(u) = 0;$$

onde:

Prova: (Ver [4]).

Teorema A.0.3. *(Teorema de Tonelli) Seja $F(x,y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ uma função mensurável satisfazendo:*

(a) $\displaystyle\int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 < \infty$ *q.t.p. em* $x \in \Omega_1$,

e

(b) $\displaystyle\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 < \infty$ *q.t.p. em* $x \in \Omega_2$,

Then $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Prova: (Ver [9], página 91, Teorema 4.4).

Teorema A.0.4. *(Teorema de Fubini) Assuma que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ e $\displaystyle\int_{\Omega_2} |F(x,y)|d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$, q.t.p. em $x \in \Omega_1$,. Analogamente, $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ e $\displaystyle\int_{\Omega_1} |F(x,y)|d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_1)$ q.t.p. em $y \in \Omega_2$. Além disso,*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y)d\mu_1 = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)d\mu_1 d\mu_2$$

Prova: (Ver [9], página 91, Teorema 4.5).

Lema A.0.1. *Sejam* $0 < \beta < N$, $f \in L^q(\mathbb{R}^N), g \in L^r(\mathbb{R}^N)$, *tal que* $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{\beta}{N} = 2$ *e* $1 < q, r < \infty$. *Então, existe uma constante* $C = C(q, r, \beta, N)$ *tal que*

$$\iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{|f(x)||g(x)|}{|x-y|^\beta}\, dx\, dy \leq C|f|_{L^q(\mathbb{R}^N)}|g|_{L^r(\mathbb{R}^N)}.$$

Prova: (Veja página 31 de [33]).

Teorema A.0.5. *(Teorema Vainberg) Seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_p \to 0$. *Então existe uma subsequencia* (f_{n_k}) *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω

(b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ *q.t.p em* Ω.

Prova. (Ver [9], página 94, Teorema 4.9)

Teorema A.0.6. *(Brezis - Lieb) Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$ *e* $(f_n) \subset L^p(\Omega), f \in L^p(\Omega)$ *com* $p > 1$. *Suponha que* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω *e existe uma constante* $C > 0$, *tal que*

$$\int |f_n|^p dx \leq C, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int f_n h dx \longrightarrow \int f h\, dx, \forall\, h \in L^q(\Omega),$$

onde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Prova. (Ver [26]).

Teorema A.0.7. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *onde* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *e* $1/p + 1/q = 1$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$|fg|_{L^1(\Omega)} \leqslant |f|_{L^p(\Omega)}\, |g|_{L^q(\Omega)}\, .$$

Uma consequência muito útil, denominada desigualdade Hölder generalizada, é a seguinte: Sejam $f_1, f_2, ..., f_k$ *funções tais que, para todo* $1 \leq i \leq k$, *temos*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega),\ \ e\ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então,

$$f = f_1.f_2.....f_k \in L^p(\Omega)$$

e

$$|f|_{L^p(\Omega)} \leqslant |f_1|_{L^{p_1}(\Omega)} \ldots\ldots |f_k|_{L^{p_k}(\Omega)}\,.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^s(\Omega)$ para todo $p \leq s \leq q$ e se verifica a desigualdade de interpolação

$$|f|_{L^s(\Omega)} \leqslant |f|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}\, |f|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \;\; \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \,\forall\, \alpha \in [0,1].$$

Prova. (Ver [9], página 92, Teorema 4.6).

Teorema A.0.8. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função mensurável f. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leqslant g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f é integrável e*

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Prova. (Ver [8]).

Lema A.0.2. *(Lema de Fatou's) Se (u_n) é uma sequência de funções mensuraveis não negativas em X, então*

$$\int (\liminf u_n)\, d\mu \leqslant \liminf \int u_n d\mu.$$

Prova. (Ver [8]).

Teorema A.0.9. *(Princípio de Concentração e Compacidade de Lions) Seja $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, e suponhamos que*

$$\nu_n = |\nabla u_n|^2 \to \nu,$$

e

$$\mu_n = |u_n|^{2^*} \to \mu,$$

no sentido das medidas de Radon, onde μ e ν são medidas limitadas e não negativas sobre o $\mathbb{R}^N$. Então, existe um conjunto de índices J no máximo enumerável, duas famílias $(\mu_j)_{j\in J}$ e $(\nu_j)_{j\in J}$ de números reais não negativos e uma família de pontos distintos $(x_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$\nu = |u|^{2^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

e

$$\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}.$$

Além disso, temos

$$\mu_j \geq S \nu_j^{\frac{2}{2^*}} \;\; e \;\; \sum_{j\in J} \nu_j^{\frac{2}{2^*}} < +\infty$$

onde δ_{x_j} é a medida de Dirac de massa 1 concentrada em x_j e S é a melhor constante de Sobolev na imersão contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Prova. (Ver [27]).

Proposição A.0.2. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ seu prodruto escalar. Então, existe uma constante positiva $C = C(p)$, tal que*

$$\langle | x |^{p-2} x - | y |^{p-2} y, x - y \rangle \geq C | x - y |^p, \text{ se } p \geq 2$$

e

$$\langle | x |^{p-2} x - | y |^{p-2} y, x - y \rangle \geq \frac{| x - y |^2}{(| x | + | y |)^{2-p}}, \text{ se } 1 < p < 2.$$

Bibliografia

[1] C. O. Alves, *Existence of standing waves solutions for a Nonlinear Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, JEPE, vol 1, 2015, 231-241.

[2] C.O. Alves, M. A. S. Souto, *Existence of solution for a class of elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with vanishing potentials,* J. Differential Equations, 252, 5555-5568 (2012).

[3] A. Ambrosetti and D. Ruiz, *Multiple bound states for the Schrödinger-Poisson problem*, Commun. Contemp. Math. **10** (2008), 391-404.

[4] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[5] A. Azzollini and A. Pomponio, *Ground state solutions for the nonlinear Schrödinger-Maxwell equations*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 90-108.

[6] A. Azzollini, *Concentration and compactness in nonlinear Schrödinger–Poisson system with a general nonlinearity.* J. Differ. Equ. **249** (2010), 1746–1763.

[7] A. Azzollini, P. d'Avenia and A. Pomponio, *On the Schrödinger-Maxwell equations under the effect of a general nonlinear term*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27**(2) (2010),779-791.

[8] R. G. Bartle, *The Elements of integration and Lebesgue Measure* , Jhon Wiley e Sons, inc., New York, 1966.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations,* Springer 2010.

[10] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983) 437-477.

[11] R. Benguria, H. Brézis and E. H. Lieb, *The Thomas-Fermi-Von Weizsäcker theory of atoms and molecules*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), 167-180.

[12] V. Benci and D. Fortunato, *An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **11** (1998), 283-293.

[13] V. Benci and D. Fortunato, *The nonlinear Klein-Gordon equation coupled with the Maxwell equations*, In: Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 9 (Catania, 2000), volume 47 (2001), 6065-6072.

[14] V. Benci and D. Fortunato, *Solitary waves of the nonlinear Klein-Gordon equation coupled with Maxwell equations*, Rev. Math. Phys. **14** (2002), 409-420.

[15] V. Benci, D. Fortunato, *Solitary waves in abelian gauge theories*, Adv. Nonlinear Stud., **8**, (2008), no 2, 327-352.

[16] J.A. Cardoso, D.S. dos Prazeres and U.B. Severo, *Fractional Schrödinger equations involving potential vanishing at infinity and supercritical exponents*, Z. Angew. Math. Phys. 71(4) (2020) 129, 14 pp.

[17] I. Catto and P. L. Lions, *Binding of atoms and stability of molecules in Hartree and Thomas-Fermi type theories. Part 1: A necessary and sufficient condition for the stability of general molecular system*, Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), 1051-1110.

[18] G. Cerami and G. Vaira, *Positive solutions for some non-autonomous Schrödinger-Poisson systems*, J. Differential Equations, **248** (2010), 521-543.

[19] S. Chen, A. Fiscella, P. Pucci and X. Tang, *Semiclassical ground state solutions for critical Schrödinger-Poisson systems with lower perturbations*, J. Differ. Equ. 268(6) (2020), 2672-2716.

[20] S.-J. Chen e C.-L. Tang, *High energy solutions for the superlinear Schrödinger-Maxwell equations*, Nonlinear Anal. 71(10) (2009) 4927-4934.

[21] T. D'Aprile and D. Mugnai, *Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **134** (2004), pp 1-14.

[22] T. D'Aprile, D. Mugnai, *Non-existence results for the coupled Klein–Gordon–Maxwell equations*, Adv. Nonlinear Stud. 4, 2004, 307-322.

[23] M. Del Pino e P.L. Felmer, *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Diferential Equations. **4** (1996), 121-137.

[24] W. Y. Ding, W-M. Ni, *On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **91** (1986) 283-308.

[25] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *I Elliptic partial differentiol equations of second-order*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[26] O. Kavian, *Introduction à théorie des points critiques et applications aux problémes elleptiques*, Université de Nancy, (1993).

[27] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case*. Part II, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984) 223-283.

[28] E. H. Lieb, *Thomas-Fermi and related theories and molecules*, Rev. Modern Phys. **53**(1981), 603-641.

[29] P. L. Lions, *Solutions of Hartree-Fock equations for Coulomb systems*, Comm. Math. Phys. **109** (1984), 33-97.

[30] P. Markowich, C. Ringhofer and C. Schmeiser, *Semiconductor Equations* , Springer-Verlag, New York, 1990.

[31] Moser, J., *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. **13**,(1960) 457-468 .

[32] P.H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*. Z. Angew. Math. Phys. 43(2) (1992), 270-291.

[33] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vols. II, IV, Elsevier(Singapore) P e Ltd., 2003.

[34] D. Ruiz, *The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term*, J. Funct. Anal. **237** (2006), 655-674.

[35] G. Talenti, *Best constants in Sobolev Inequality,* Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976), 353-372.

[36] Z. Wang and H. Zhou, *Positive solution for a nonlinear stationary Schrödinger-Poisson system in* $\mathbb{R}^3$. Discrete Contin. Dyn. Syst. 18(4)(2007), 809-816.

[37] M. Willem, *Minimax Theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, volume 24.

[38] Yang, Z., Yu, Y. *Existence and concentration of solution for Schrödinger-Poisson system with local potential*. Partial Differ. Equ. Appl. 2, 47 (2021).

[39] L. Zhao, H. Liu e F. Zhao, *Existence and concentration of solutions for the Schrödinger-Poisson equations with steep well potential*, J. Differ. Equ. 255(1)(2013), 1-23.