



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA -
UFPA/UFAM

Propriedades Espectrais e Estabilização dos Sistemas Uflyand-Mindlin e suas versões Truncadas

José Luiz Solon Sampaio

Belém

2022

José Luiz Solon Sampaio

Propriedades Espectrais e Estabilização dos Sistemas Uflyand-Mindlin e suas versões Truncadas

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla - UFPA/UFAM, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

Co-orientador: **Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos**

Belém

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S192p Sampaio, José Luiz Solon.
Propriedades Espectrais e Estabilização dos Sistemas Uflyand-
Mindlin e suas versões Truncadas / José Luiz Solon Sampaio. —
2021.
89 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Coorientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Uflyand-Mindlin. 2. Faedo-Galerkin. 3. Routh-Hurwitz.
4. Inércia de Inclinação. 5. Modelo de Corte. I. Título.

CDD 515.3534

Propriedades Espectrais e Estabilização dos Sistemas Uflyand-Mindlin e suas versões Truncadas

por

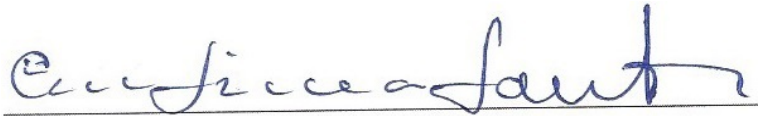
José Luiz Solon Sampaio

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA - UFPA/UFAM, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

Aprovada em 27 de Junho de 2022 por:



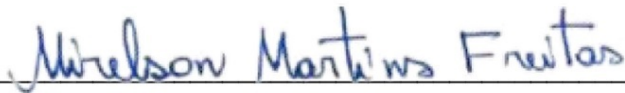
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (PDM - UFPA)



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (PDM - UFPA)



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (PPGME/PDM - UFPA)



Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas (PDM/UFPA - Salinópolis)



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (PDM/UFPA - Abaetetuba)



Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha (UFSJ - Membro Externo)

*Dedico este trabalho à todos que acreditaram em mim.
Em particular Raimundo Reginaldo de Oliveira Rufino (in memoriam)
e Cláudio de França Solon (in memoriam).*

"O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia."(Robert Collier)

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por todas as bênçãos que derramou ao longo da minha vida.
- Agradeço a minha família, por sempre me apoiarem e auxiliarem em meus sonhos.
- Agradeço a minha esposa, Noura Ingrid, por estar sempre ao meu lado.
- Agradeço a meu orientador, Dilberto Júnior, por sua disposição em me orientar.
- Agradeço a meus amigos que sempre estiveram comigo em todos os momentos.
- Agradeço a meus professores por todo o conhecimento transmitido.
- Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente auxiliaram em minha vida acadêmica.

Lista de Figuras

2.1	Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.11). Parâmetros: $\nu = 0,29; h = 0,015; E = 21.10^{12}; k = \sqrt{(0,822)}$ e $\rho = 7860$	13
2.2	Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.13). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1. . . .	13
2.3	Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.12). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1. . . .	15
2.4	Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.23). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1. . . .	17
2.5	Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.29). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1. . . .	20
2.6	Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.43). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1. . . .	22
2.7	Superfície representando $C_2(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Parâmetros: $\nu = 0,29; h = 0,015; E = 21.10^{12}; \rho = 7860; k = \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2}}$ e $\alpha = \sqrt{\rho_2 K}$, ou seja neste caso $m - \frac{d^2}{4} > 0$	28
2.8	Superfície representando $C_5(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7. . . .	29
2.9	Superfície representando $C_3(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7. . . .	29
2.10	Superfície representando $C_6(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7. . . .	30
2.11	Superfície representando $C_1(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7. . . .	30
2.12	Superfície representando $C_4(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7. . . .	31
2.13	Superfície representando $C_1(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Parâmetros: $\nu = 0,29; h = 0,015; E = 21.10^{12}; \rho = 7860; k = \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2}}$ e $\alpha = 3\sqrt{\rho_2 K}$, ou seja neste caso $m - \frac{d^2}{4} \leq 0$	32
2.14	Superfície representando $C_2(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13. . . .	32
2.15	Superfície representando $C_3(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13. . . .	33
2.16	Superfície representando $C_4(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13. . . .	33
2.17	Superfície representando $C_5(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13. . . .	34
2.18	Superfície representando $C_6(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13. . . .	34

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla - UFPA/UFAM

Propriedades Espectrais e Estabilização dos Sistemas Uflyand-Mindlin e suas versões Truncadas

por José Luiz Solon Sampaio

O presente trabalho faremos a análise dos sistemas de Uflyand-Mindlin e de suas versões truncadas, para tal na introdução, baseado no artigo de Hache et al [8], faremos a dedução do modelo clássico e das versões truncadas: Simplificada, Baseada na Inércia de Inclinação e Modelo de Corte. Já no primeiro capítulo faremos a análise espectral destes modelos, concluindo que a formulação clássica apresenta a inconsistência física denominada de "Segundo Espectro" enquanto que suas versões truncadas não apresentam tal inconsistência. O modo encontrado para a formulação clássica se consistente fisicamente é quando considerarmos a inclusão de um damping do tipo atrito nas segunda e terceira equações.

Em seguida demonstraremos que as referidas formulações são bem-postas no sentido de terem soluções fortes e fracas únicas através da técnica de Faedo-Galerkin. Por fim, buscaremos as condições para que estes sistemas tenham o decaimento exponencial da energia através do critério de Routh-Hurwitz. Nestes casos, demonstraremos a necessidade da igualdade de velocidades na formulação clássica, enquanto que no modelo denominado Simplificado, nenhuma condição é necessária. Entretanto, nos outros sistemas truncados a técnica não é adequada, pois não há a garantia da positividade de certos valores o que torna estes casos inconclusivos.

Palavras-chave: Uflyand-Mindlin; Simplificado; Inércia de Inclinação; Modelo de Corte; Damping; Energia; Faedo-Galerkin; Routh-Hurwitz

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla - UFPA/UFAM

Asymptotic and numerical stability of weakly dissipative systems of Mindlin-Timoshenko.

by José Luiz Solon Sampaio

In the present work, we analyze the Uflyand-Mindlin system and his truncated versions, in the introduction, based in the Hache's Paper [8], we deduce the classic model and his truncated versions: Simplified, Based in Slope Inertia and Shear Model. In the first chapter, we do the spectral analysis of the models, concluding that classic formulation has the "Second Spectrum", it's a physical inconsistency. When the truncated versions don't show this inconsistency. The way of the classical model doesn't show this "Second Spectrum" is adding dampings in second and third equations.

After, we prove that the system is well-posed, because has unique solutions weak and strong by the Faedo-Galerkin technique. In the end, we search the conditions of the exponential decay using the Routh-Wurwitz criterium. When we conclude that the classical system has an exponential decay when be a velocities equality, while the Simplified version don't need any criterium. In another way, the Slope Inertia Model and the Shear Model, has inconclusive results, because don't have any positives constants guaranteed.

Keywords: Uflyand-Mindlin; Simplified; Slope Inertia; Shear Model; Damping; Faedo-Galerkin; Routh-Hurwitz

1	Introdução	1
2	Análise de Dispersão e Conjecturas	9
2.1	Uflyand-Mindlin Clássico	9
2.2	Uflyand-Mindlin Simplificado	14
2.3	Uflyand-Mindlin baseada na Inércia de Inclinação	17
2.4	Modelo de Corte	20
2.5	Uflyand-Mindlin Clássico com Dampings	22
3	Boa-Colocação	35
3.1	Modelo de Uflyand-Mindlin Simplificado	35
3.2	Existência e Unicidade de Soluções Para Uflyand-Mindlin Simplificado	39
3.3	Modelo baseado na Inércia de Inclinação	49
3.4	Existência e Unicidade de Soluções Para o Modelo baseado na Inércia de Inclinação	52
3.5	Modelo de Corte	61
4	Decaimento Exponencial das Soluções	64
4.1	Uflyand-Mindlin com Dampings	65
4.2	Uflyand-Mindlin Simplificado	69
4.3	Modelo Baseado na Inércia de Inclinação	72
4.4	Modelo de Corte	74
5	Conclusão	76
	Referências Bibliográficas	77

CAPÍTULO 1

Introdução

Vigas e placas retangulares são utilizadas na engenharia no âmbito estrutural, dessa forma, é importante entender o comportamento destas estruturas em relação as vibrações, para tal foram criadas teorias paralelamente.

No sentido das vigas, foram propostos os modelos de Euler-Bernoulli e o de Rayleigh, tais formulações foram superadas pela proposta por Timoshenko [15], entretanto esta formulação, apresenta uma inconsistência física observada por Abbas e Thomas [1]: este sistema, origina dois espectros de frequência relacionados com a velocidade de propagação das ondas, a inconsistência ocorre no denominado “Segundo Espectro” posto que a função que o descreve, tende ao infinito quando o número de ondas tende a zero. A inconsistência está no fato deste atingir velocidade superior a velocidade da luz, algo impossível pela teoria da relatividade geral. Buscando corrigir tal inconsistência, Elishakoff propôs um modelo denominado simplificado [6], na ocasião o próprio autor define esta formulação como uma equação mais consistente e simples que a equação proposta por Timoshenko. Além de Elishakoff outros pesquisadores tentaram resolver os problemas desta inconsistência com sistemas derivados, com a utilização de dampings ou com o acoplamento de outras equações, como por exemplo, Rivera [2], Santos [14], Almeida Júnior [3], Ramos e Freitas [13].

Por outro lado, no âmbito do estudo de viga, a evolução das formulações foi semelhante como podemos observar a seguir, onde vamos realizar uma combinação de tradução livre com resumo de parte da primeira seção do artigo de Hache [8], após este momento vamos realizar uma atualização das notações posto que as que serão utilizadas no decorrer do tese se diferem da adotada no artigo base.

O autor inicia definindo o objeto de pesquisa, “Considere uma superfície retangular fina de comprimento a , largura b e seção uniforme h ”. Em seguida o mesmo define as condições físicas adotadas nas bordas da superfície “A seguir, serão consideradas superfícies com dois lados opostos apoiados de modo simples. Para objetivo da descrição, uma notação especial será adaptada, a mesma como aquela utilizada comumente na literatura para a condição de contorno. O símbolo SCSF, por exemplo, irá identificar a superfície com as bordas $x = 0$ e $x = a$ apoiados de modo simples e os outros dois fixados e livres”. Por fim define-se as funções que governam os movimento das placas “ ψ_x e ψ_y são as rotações de flexão de uma seção transversal normal sobre os eixos x e y respectivamente”. Aproveitamos para incluir a definição sobre a função ω que nesta situação representa o deslocamento transversal da superfície. A seguir foi definida a energia potencial, e suas constantes

$$V = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(D \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + k^2 Gh \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi_x \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \psi_y \right)^2 \right] \right) dx dy, \quad (1.1)$$

“onde $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ é a rigidez flexural da superfície, ν é a constante de Poisson, k^2 é modulo de cisalhamento e G é o modulo de elasticidade”. Destacamos ainda que, como a constante E não esta definida diretamente no artigo, iremos definir a constante E como sendo o modulo de Young em nosso trabalho. Em seguida o autor define a energia cinética do problema

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \rho h \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dx dy, \quad (1.2)$$

e então, define o domínio e explica os efeitos da energias fisicamente, “onde Ω é a área central da superfície. Aqui, não custa afirmar que o termo V é responsável pelo efeito de cisalhamento, enquanto T está associado com a rotação inercial. Quando usando a expressão da energia cinética, sem mencionar o fato de usar a expressão $\left[\rho I (\partial \psi_x / \partial t)^2 + \rho I (\partial \psi_y / \partial t)^2 \right]$, este, de fato, corrige o termo da rotação inercial que deveria está com o efeito de cisalhamento”. Novamente deixa um coeficiente sem definição clara, a constante ρ , dessa forma, a definiremos como sendo a contante de massa por unidade de volume. E segue utilizando o principio de Hamilton

$$\delta \int_{t_i}^t \Pi dt = 0, \quad (1.3)$$

definindo o lagrangiano Π por

$$\begin{aligned} \Pi &= T - V = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\rho h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] + \rho h \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy \\ &- \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(D \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \right. \\ &+ \left. k^2 G h \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi_x \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \psi_y \right)^2 \right] \right) dx dy, \end{aligned} \quad (1.4)$$

de onde segue que se considerarmos as equações (1.3) e (1.4), vamos obter

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^t \iint_{\Omega} \left\{ -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \right. \\ &- \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) + \\ &- k^2 G h \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi_x \right) \left(\frac{\partial \delta \omega}{\partial x} + \delta \psi_x \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \psi_y \right) \left(\frac{\partial \delta \omega}{\partial y} + \delta \psi_y \right) \right] + \\ &\left. + \rho h \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial \delta \omega}{\partial t} + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial t} \right) \right\} dx dy dt = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Após realizar o conceito de integração por partes obtemos,

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^t \iint_{\Omega} \left\{ D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \delta \psi_x + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \delta \psi_y + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \delta \psi_y + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \delta \psi_x \right) + \right. \\ &+ \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \delta \psi_x + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \delta \psi_y + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \delta \psi_y + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \delta \psi_x \right) + \\ &- k^2 G h \left[\left(\psi_x \delta \psi_x - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \delta \omega \right) + \left(\psi_y \delta \psi_y - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \delta \omega \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \delta \psi_x - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \delta \omega \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \delta \psi_y - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \delta \omega \right) \right] - \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \delta \omega - \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \delta \psi_x + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \delta \psi_y \right) \Big\} dx dy dt + \\ &- \int_{t_i}^t \int_{\Gamma} \left\{ D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \delta \psi_x dy - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \delta \psi_y dx - \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \delta \psi_y dx + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \delta \psi_x dy \right) + \right. \\ &+ \frac{D(1-\nu)}{2} \left(-\frac{\partial \psi_x}{\partial y} \delta \psi_x dx + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \delta \psi_y dy - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \delta \psi_x dx + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \delta \psi_y dy \right) + \\ &\left. + k^2 G h \left(\psi_x \delta \omega dy + \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta \omega dy - \psi_y \delta \omega dx - \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta \omega dx \right) \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Define-se então o espaço, Γ como a região do contorno. E agrupa termos para transformar o produto na seguinte igualdade,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_i}^t \iint_{\Omega} \left\{ \left[D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \right] \delta \psi_x + \right. \\
& + \left[D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - k^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \right] \delta \psi_y + \\
& + \left. \left[k^2 Gh \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right] \delta \omega \right\} dx dy dt + \\
& - \int_{t_i}^t \int_{\Gamma} \left\{ \left[D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} dy + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} dy \right) - \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} dx + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} dx \right) \right] \delta \psi_x + \right. \\
& + \left[-D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} dx + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} dx \right) + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} dy \right) \right] \delta \psi_y + \\
& + \left. k^2 Gh \left(\psi_x dy + \frac{\partial \omega}{\partial x} dy - \psi_y dx - \frac{\partial \omega}{\partial y} dx \right) \delta \omega \right\} dt = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Dessa forma, ao igualar os coeficientes dos termos variantes a zero, o autor enfim obtém as equações de movimento

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) \right] - k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}. \tag{1.8}$$

$$\frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) \right] - k^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

$$k^2 Gh \left(\nabla^2 \omega + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}. \tag{1.10}$$

E então realiza as devidas manipulações algébricas que transformam o sistema de equações na seguinte equação desacoplada:

$$D \nabla^4 \omega + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{\rho h^3}{12} \left(1 + \frac{12}{h^3} \frac{D}{k^2 G} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \omega + \frac{\rho^2 h^3}{12 k^2 G} \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} = 0. \tag{1.11}$$

Para justificar o próximo passo, o autor cita outros dois artigos que também são nossas referencias, “Em seu artigo, Elishakoff et al. [7], seguindo o conceito de seu próprio artigo [6] para o sistema de Timoshenko, sugere que os termos $\partial^2 \psi_x / \partial t^2$ e $\partial^2 \psi_y / \partial t^2$ nas equações (1.8) e (1.9) devem ser, respectivamente, substituídos por $\partial^3 u / \partial t^2 \partial x$ e $\partial^3 u / \partial t^2 \partial y$ nos sistemas de Mindlin”. Desta mudança sugerida origina-se o sistema denominado De Uflyand-Mindlin Simplificado, que novamente, após algumas manipulações algébricas, uma equação desacoplada é obtida:

$$D \nabla^4 \omega + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \rho \frac{h^3}{12} \left(1 + \frac{12}{h^3} \frac{D}{k^2 G} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \omega = 0. \tag{1.12}$$

Para substituir a equação (1.11) e complementa esta análise com: “Este modelo para superfície de Mindlin Simplificado pode ser justificado por argumentos assintóticos de elasticidade tridimensional, como foi comprovada para

o modelo de Bresse-Timoshenko”. Em seguida aborda uma situação particular em que $12D/h^3k^2G \gg 1$, e assim a equação de superfície de Mindlin simplificada pode ser reduzida a:

$$D\nabla^4\omega + \rho h \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - \frac{\rho D}{k^2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2\omega = 0. \quad (1.13)$$

E finaliza fazendo um comentário sobre o trabalho original de Mindlin “Note que esta equação é também obtida por Mindlin sem nenhum comentário sobre vantagens ou desvantagens em comparação com a equação original de Uflyand-Mindlin obtida em (1.11)”. E segue igualando a integral de linha da equação (1.6) a zero para iniciar o estudo das condições de contorno, para tal reescreve a igualdade como:

$$\int_{t_i}^t \int_{\Gamma} \left[D \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial\psi_y}{\partial y} \right) \delta\psi_x dy - D \left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial\psi_x}{\partial x} \right) \delta\psi_y dx + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} \right) \delta\psi_y dy + \right. \\ \left. - \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} \right) \delta\psi_x dx + k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial\omega}{\partial x} \right) \delta\omega dy - k^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) \delta\omega dx \right] dt = 0. \quad (1.14)$$

Por estar definida sobre Γ , teremos os contornos da superfície. Primeiramente analisa as bordas paralelas ao eixo x

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial\psi_y}{\partial y} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_x, \\ \frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_y, \\ k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial\omega}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad u, \end{aligned} \quad (1.15)$$

com estas especificadas. Passa para a análise nas bordas paralelas ao eixo y

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial\psi_x}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_y, \\ \frac{\partial\psi_x}{\partial y} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_x, \\ k^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad u, \end{aligned} \quad (1.16)$$

que são especificadas. Destaca que a análise é válida para ambos os modelos, Modelo de Superfície de Mindlin Simplificado e o Modelo de Superfície de Mindlin clássico. O autor em seguida, parte para uma terceira modelagem, para isto inicia analisando novamente o trabalho original de Mindlin: “No seu artigo, Mindlin usa a expressão exata da energia cinética em três dimensões dada pela teoria linear geral da elasticidade. Assim, usando (1.2) que contém além de uma correção por levar em conta o efeito do cisalhamento, Mindlin “Supercorrigiu”, por assim

dizer, a energia cinética". E sugere a substituição da expressão da energia cinética dada em (1.2) por

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \rho h \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (1.17)$$

Dessa forma, substitui as equações (1.1) e (1.17) em (1.3) para obter

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^t \iint_{\Omega} \left\{ -D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \right. \\ & - \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} \right) + \\ & - k^2 Gh \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi_x \right) \left(\frac{\partial \delta \omega}{\partial x} + \delta \psi_x \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \psi_y \right) \left(\frac{\partial \delta \omega}{\partial y} + \delta \psi_y \right) \right] + \\ & \left. + \rho h \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial \delta \omega}{\partial t} + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x} \frac{\partial^2 \delta \omega}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial y} \frac{\partial^2 \delta \omega}{\partial t \partial y} \right) \right\} dx dy dt = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Novamente o autor integra por partes para encontrar

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^t \iint_{\Omega} \left\{ \left[D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right] \delta \psi_x + \right. \\ & + \left[D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - k^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \delta \psi_y + \\ & + \left[k^2 Gh \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 u \right] \delta \omega \left. \right\} dx dy dt + \\ & - \int_{t_i}^t \int_{\Gamma} \left\{ \left[D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} dy + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} dy \right) - \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} dx + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} dx \right) \right] \delta \psi_x + \right. \\ & + \left[-D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} dx + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} dx \right) + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} dy \right) \right] \delta \psi_y + \\ & \left. + k^2 Gh \left(\psi_x dy + \frac{\partial \omega}{\partial x} dy - \psi_y dx - \frac{\partial \omega}{\partial y} dx \right) \delta \omega + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial x} dy - \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial y} dx \right) \delta \omega \right\} dt = 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

e iguala os coeficientes dos termos variantes a zero para o funcional sobre a superfície plana, para obter o novo sistema composto por:

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_x + (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) \right] - k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{D}{2} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \psi_y + (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) \right] - k^2 Gh \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.21)$$

$$k^2 Gh \left(\nabla^2 u + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = \rho h \left(1 - \frac{h^2}{12} \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (1.22)$$

Novamente realiza o desacoplamento das equações (1.20)-(1.22):

$$D \nabla^4 \omega + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \rho \frac{h^3}{12} \left(1 + \frac{12}{h^3} \frac{D}{k^2 G} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \omega + \frac{\rho h^2 D}{12 k^2 G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^4 \omega = 0. \quad (1.23)$$

Finalizado o desacoplamento, destaca o que esta formulação se distingue da (1.11): “As diferenças com as equações clássicas de Uflyand-Mindlin são duas: (a) um termo adicional ocorre, o ultimo, e (b) a derivada de quarta ordem em relação ao tempo, que é característico da teoria de superfícies de Uflyand-Mindlin Clássica, não aparece”. E novamente para obter as condições de fronteira, analisa a integral de linha da equação (1.19), definindo-a como zero e assim reescrevendo como:

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^t \int_{\Gamma} \left\{ \left[D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) dy - \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) dx \right] \delta \psi_x + \right. \\ & + \left[-D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) dx + \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) dy \right] \delta \psi_y + \\ & \left. + \left[\left(\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial x} + k^2 Gh \psi_x + k^2 Gh \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dy - \left(\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial y} + k^2 Gh \psi_y - k^2 Gh \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx \right] \delta \omega \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Por fim, da equação (1.24) implica nas condições de contorno da superfície. Primeiramente em relação as bordas paralelas ao eixo x ,

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_x, \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_y, \\ \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial x} + k^2 Gh \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad u, \end{aligned} \quad (1.25)$$

são definidas. Enquanto que para as bordas paralelas ao eixo y

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_x, \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} &= 0 \quad \text{ou} \quad \psi_y, \\ \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial y} + k^2 G h \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) &= 0 \quad \text{ou} \quad u, \end{aligned} \quad (1.26)$$

são especificadas. Portanto, o autor destaca que quando a borda é apoiada ou fixadas, as condições de contorno da borda coincidem com as condições da versões clássicas e simplificadas da teoria de superfície de Uflyand-Mindlin. Por fim o autor realizou uma aglutinação dos sistemas, para tal, introduz os parâmetros de controle γ_1, γ_2 e γ_3 , com $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ iguais a $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ para a equação de Uflyand-Mindlin clássica, a versão simplificada e o modelo baseado no conceito da inércia de inclinação, respectivamente, assim o seguinte sistema serve para todas as formulações, definindo $C = D(1 - \nu)/2$:

$$D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - k^2 G h \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \left(\gamma_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \gamma_3 \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial x} \right), \quad (1.27)$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) - C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - k^2 G h \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \left(\gamma_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + \gamma_3 \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2 \partial y} \right), \quad (1.28)$$

$$k^2 G h \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \left(\rho h - \gamma_2 \frac{\rho h^3}{12} \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}. \quad (1.29)$$

Aproveitamos ainda esta formulação, para definir o quarto e último sistema, este é denominado Modelo de Corte, esta formulação é baseada no sistema trabalhado por Almeida Júnior et al. [3], e será definido pelo sistema anterior quando todos os parâmetros de controle se anularem, ou seja, quando é escrito como,

$$D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - k^2 G h \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.30)$$

$$D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) - C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - k^2 G h \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.31)$$

$$k^2 G h \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}. \quad (1.32)$$

Aproveitando para atualizar as notações, da seguinte forma. O comprimento a e a largura b serão o mesmo valor L . As funções de rotação passam a ser definidas por $\psi_x := \psi$ e $\psi_y := \varphi$ enquanto que a função do deslocamento transversal será $\omega := u$. Dessa forma, concluímos a dedução de todos os modelos que serão tratados nesta tese, os únicos sistemas que não são precisamente estes, basicamente são variações destes com a adição de dampings.

Análise de Dispersão e Conjecturas

Vamos iniciar esta tese apresentando primeiramente o desenvolvimento dos modelos, com isto poderemos então extrair os espectros de frequência e em seguida, analisamos o comportamento destes espectros, corroborando as conclusões em plotagens gráficas.

2.1 Uflyand-Mindlin Clássico

O primeiro modelo analisado é o sistema de Uflyand-Mindlin, ou seja, o sistema (1.27)-(1.29), quando considerado a trinca $(1, 0, 0)$, que pode ser descrito em nossa notação por

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\nu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

onde consideraremos a e b de mesmo comprimento L , dessa forma o domínio passa a ser $\Omega = [0, L]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Por outro lado, denotamos, $\rho_1 = \rho h$, $\rho_2 = \frac{\rho h^3}{12}$ e $K = k^2 Gh$ além do artigo descrito, tal formulação é baseada

nos trabalhos de Lagnese [9, 10]. Neste primeiro modelo e nos seguintes iremos considerar soluções harmônicas definidas por:

Definição 2.1 (Soluções Harmônicas). Definimos as soluções harmônicas pelas funções exponenciais:

$$u = A_1 e^{i(\gamma_x x + \gamma_y y + \omega t)}, \quad \psi = A_2 e^{i(\gamma_x x + \gamma_y y + \omega t)}, \quad \varphi = A_3 e^{i(\gamma_x x + \gamma_y y + \omega t)}, \quad (2.4)$$

em que i é a unidade imaginária, γ_x e γ_y são o número de ondas, ω é a frequência e A_j , $j = 1, 2, 3$ são as amplitudes associadas às funções u , ψ e φ , respectivamente, esta definição é baseada na solução harmônica proposta por Trefethen [16].

Desta forma, estamos aptos a demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.2 (Dispersão de Uflyand-Mindlin). *O sistema de Uflyand-Mindlin definido por (2.1)-(2.3) tem soluções harmônicas da forma (2.4), com amplitudes A_i , $i = 1, 2, 3$ e velocidades de fase:*

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) + \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} + \right.} \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)} + \left(\frac{K}{\rho_2} \frac{1}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ C_3 &= \pm \sqrt{\frac{D}{\rho_2} \left(1 - \frac{1+\nu}{2} \right) + \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}}. \end{aligned}$$

Prova. Substituindo as funções harmônicas como definidas em (2.4) no problema (2.1)-(2.3), obtemos o sistema $AX = 0$ com $X = (A_1, A_2, A_3)^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \omega^2 \rho_1 & -iK\gamma_x & -iK\gamma_y \\ iK\gamma_x & -\rho_2 \omega^2 + D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ & -D \frac{1+\nu}{2} \gamma_y^2 + K & D \frac{1+\nu}{2} \gamma_y \gamma_x \\ iK\gamma_y & D \frac{1+\nu}{2} \gamma_y \gamma_x & -\rho_2 \omega^2 + D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ & & -D \frac{1+\nu}{2} \gamma_x^2 + K \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Precisamos que $\det(A) = 0$ para obter soluções não-triviais. Neste sentido é necessário que

$$\omega^6 + a(\gamma_x, \gamma_y) \omega^4 + b(\gamma_x, \gamma_y) \omega^2 + c(\gamma_x, \gamma_y) = 0, \quad (2.6)$$

onde os coeficientes $a(\gamma_x, \gamma_y)$, $b(\gamma_x, \gamma_y)$ e $c(\gamma_x, \gamma_y)$ são dados, respectivamente por,

$$\begin{aligned} a(\gamma_x, \gamma_y) &= -\frac{D}{\rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - 2\frac{K}{\rho_2} - \frac{K}{\rho_1} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\ b(\gamma_x, \gamma_y) &= \left(\frac{D}{\rho_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \frac{K D}{\rho_2 \rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ &\quad + \left(\frac{K}{\rho_2}\right)^2 + \frac{K D}{\rho_1 \rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \frac{K K}{\rho_1 \rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\ c(\gamma_x, \gamma_y) &= -\frac{K}{\rho_1} \left(\frac{D}{\rho_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^3 - \frac{K K D}{\rho_1 \rho_2 \rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2. \end{aligned}$$

Esta equação pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \left\{ \omega^4 - \left[\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \frac{K}{\rho_2} \right] \omega^2 + \frac{K D}{\rho_1 \rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 \right\} \cdot \\ \left[\omega^2 - \frac{D}{\rho_2} \left(1 - \frac{1+\nu}{2} \right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \frac{K}{\rho_2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dessa forma, as soluções são,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \frac{K}{\rho_2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2} \right)^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + 2 \left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) \frac{K}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \left(\frac{K}{\rho_2} \right)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \frac{K}{\rho_2} + \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2} \right)^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + 2 \left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) \frac{K}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \left(\frac{K}{\rho_2} \right)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\omega_3^2 = \frac{D}{\rho_2} \left(1 - \frac{1+\nu}{2} \right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \frac{K}{\rho_2}. \quad (2.10)$$

Sabendo que $\omega = C\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ concluímos,

$$C_1^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) + \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} + \sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} + \left(\frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \right)^2} \right], \quad (2.11)$$

$$C_2^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) + \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} - \sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2} \right) \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} + \left(\frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \right)^2} \right], \quad (2.12)$$

$$C_3^2 = \frac{D}{\rho_2} \left(1 - \frac{1 + \nu}{2} \right) + \frac{K}{\rho_2} \frac{1}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}, \quad (2.13)$$

o que completa a demonstração do teorema. ■

A análise para observar se o espectro de uma equação é ou não físico, passa por analisar se em nenhum ponto seu valor cresce de forma ilimitada, dessa forma podemos analisar esses casos da seguinte maneira:

Proposição 2.3. *Da identidade $\omega(\gamma_x, \gamma_y) = C(\gamma_x, \gamma_y)\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ temos:*

- Se $\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} \omega(\gamma_x, \gamma_y) = K > 0$ então o espectro tem comportamento não-físico.
- Se $\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} \omega(\gamma_x, \gamma_y) = 0$ devemos usar a regra de l'Hôpital para analisar o comportamento do espectro.

Prova. Da identidade do enunciado temos que $C(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{\omega(\gamma_x, \gamma_y)}{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}}$, portanto

$$\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} \omega(\gamma_x, \gamma_y)}{\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}}. \quad (2.14)$$

Se $\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} \omega(\gamma_x, \gamma_y) = K > 0$ então $\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) = +\infty$, e dessa forma a velocidade do espectro ultrapassa a velocidade da luz, o que é considerado um comportamento não-físico. Com isto demonstramos o primeiro item da proposição.

Podemos observar este fenômeno nas soluções (2.8) e (2.10), representadas respectivamente pelas superfícies da FIGURA 2.1 e FIGURA 2.2.

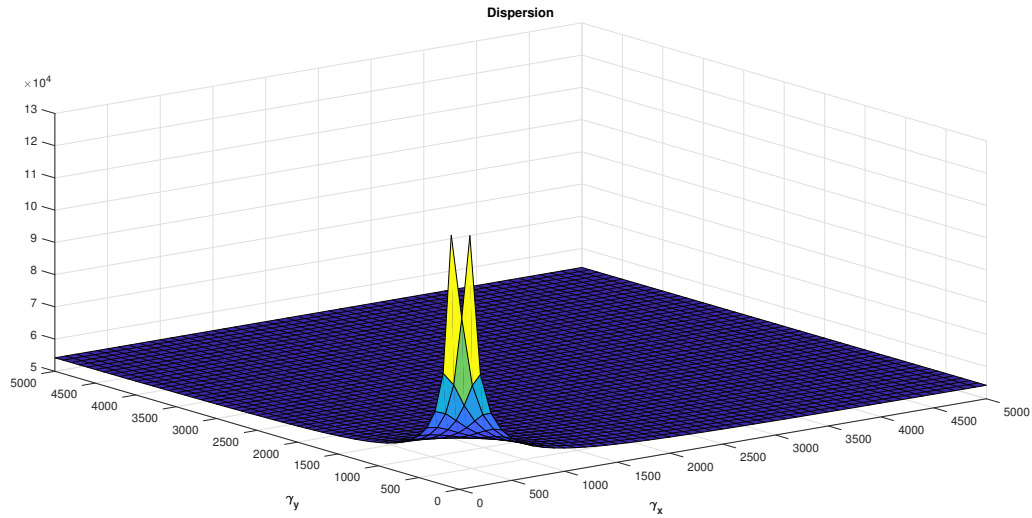


FIGURA 2.1: Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.11). Parâmetros: $\nu = 0,29$; $h = 0,015$; $E = 21 \cdot 10^{12}$; $k = \sqrt{(0,822)}$ e $\rho = 7860$.

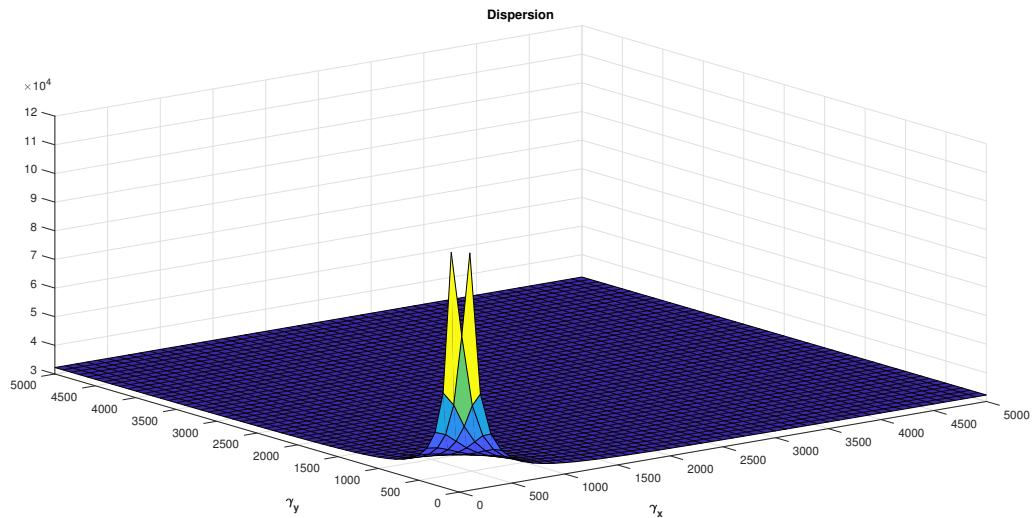


FIGURA 2.2: Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.13). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1.

Por outro lado se $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega(\gamma) = 0$, então $\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{0}{0}$, dessa forma podemos usar a regra de

l'Hôpital o que demonstra o segundo item da proposição. Assim, para saber o comportamento de (2.12) procedemos da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma_x, \gamma_y \rightarrow 0^+} C_2^2 &= \lim_{\gamma_x, \gamma_y \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[\frac{\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \frac{K}{\rho_2}}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2}\right)^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + 2\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}\right) \frac{K}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \left(\frac{K}{\rho_2}\right)^2}}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \right] \\
&= \frac{\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}}{2} + \\
&\quad + \lim_{\gamma_x, \gamma_y \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{\frac{K}{\rho_2} - \sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2}\right)^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + 2\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}\right) \frac{K}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \left(\frac{K}{\rho_2}\right)^2}}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \\
&= \frac{\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}}{2} + \\
&\quad + \lim_{\gamma_x, \gamma_y \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{-2\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2}\right)^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - 2\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}\right) \frac{K}{\rho_2}}{2\sqrt{\left(\frac{K}{\rho_1} - \frac{D}{\rho_2}\right)^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + 2\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}\right) \frac{K}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \left(\frac{K}{\rho_2}\right)^2}} \\
&= \frac{\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{-2\left(\frac{K}{\rho_1} + \frac{D}{\rho_2}\right) \frac{K}{\rho_2}}{2\sqrt{\left(\frac{K}{\rho_2}\right)^2}} \\
&= 0, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

deste fato juntamente com a conclusão de que outro limite é $\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} C(\gamma_x, \gamma_y) = \sqrt{\frac{D}{\rho_2}}$ podemos então observar que este espectro é totalmente físico, como fica ilustrado pela FIGURA 2.3. ■

2.2 Uflyand-Mindlin Simplificado

O segundo modelo analisado é o sistema de Uflyand-Mindlin Simplificado, descrito quando é considerada a trinca $(0, 0, 1)$ no sistema (1.27)-(1.29),

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

$$-\rho_2 u_{ttx} - D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

$$-\rho_2 u_{tty} - D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\nu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

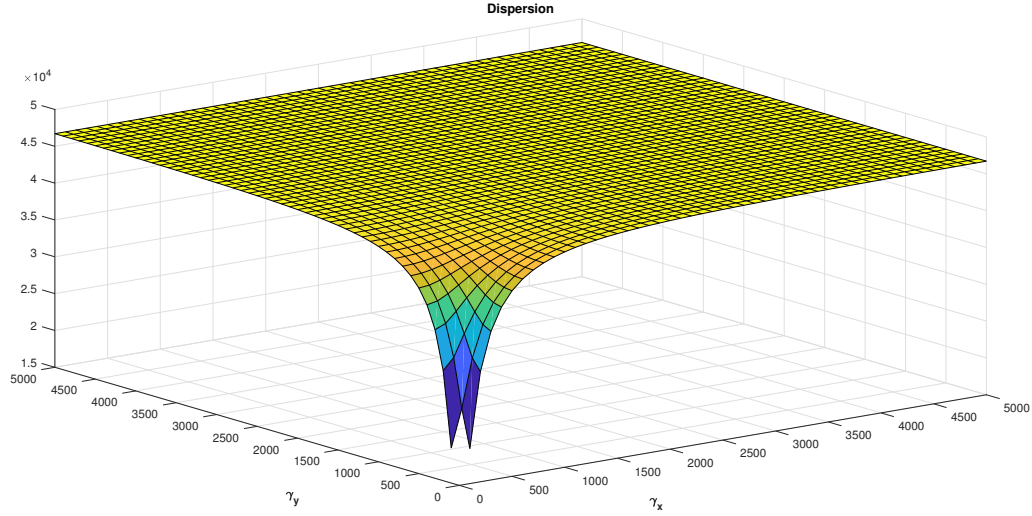


FIGURA 2.3: Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.12). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1.

consideramos o mesmo domínio e as mesmas constantes do sistema (2.1)-(2.3). Por conseguinte, podemos realizar a análise espectral

Teorema 2.4 (Dispersão do Modelo Simplificado). *O sistema de Uflyand-Mindlin Simplificado dado por (2.16)-(2.18) tem soluções harmônicas da forma (2.4), com amplitudes $A_i, i = 1, 2, 3$ e velocidade associada:*

$$C = \pm \sqrt{\frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}}. \quad (2.19)$$

Prova. Substituindo as funções harmônicas (2.4) em (2.16)-(2.18), obtemos um sistema da forma $AX = 0$ em que $X = (A_1, A_2, A_3)^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \omega^2 \rho_1 & -iK\gamma_x & -iK\gamma_y \\ i\rho_2 \gamma_x \omega^2 + iK\gamma_x & D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_y^2 + K & D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_y \gamma_x \\ i\rho_2 \gamma_y \omega^2 + iK\gamma_y & D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_y \gamma_x & D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_x^2 + K \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Neste caso, precisamos que $\det(A) = 0$ para que hajam soluções não triviais, assim,

$$a(\gamma_x, \gamma_y)\omega^2 + b(\gamma_x, \gamma_y) = 0. \quad (2.21)$$

Donde os coeficientes $a(\gamma_x, \gamma_y)$ e $b(\gamma_x, \gamma_y)$ representam respectivamente,

$$\begin{aligned} a(\gamma_x, \gamma_y) &= -\left(\frac{D}{\rho_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 - \frac{K D}{\rho_2 \rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ &\quad - \left(\frac{K}{\rho_2}\right)^2 - \frac{K D}{\rho_1 \rho_2} \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 - \frac{K K}{\rho_1 \rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\ b(\gamma_x, \gamma_y) &= \frac{K}{\rho_1} \left(\frac{D}{\rho_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^3 + \frac{K K D}{\rho_1 \rho_2 \rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2. \end{aligned}$$

E portanto suas soluções são da forma,

$$\omega^2 = \frac{K D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2}{\rho_1 D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 K (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}. \quad (2.22)$$

Levando em consideração o fato de $\omega = C \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ temos,

$$C^2 = \frac{K D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 K (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}. \quad (2.23)$$

Logo, extraindo a raiz quadrada demonstramos o teorema. ■

Comparando ao que ocorreu na primeira análise, podemos afirmar que a análise do comportamento de (2.19) é simples, como podemos observar no corolário a seguir.

Corolário 2.5. *A velocidade de espectro (2.19) tem comportamento físico em todo o seu domínio e seus limites são*

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) &= 0, \\ \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} C(\gamma_x, \gamma_y) &= \sqrt{\frac{K D}{\rho_1 D + \rho_2 K}}. \end{aligned}$$

Prova. Iniciamos pelo caso em que as variáveis tendem a zero.

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) &= \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{K D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 K (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{0}{\rho_1 K}} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Passando agora para o caso em que as variáveis tendem ao infinito.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} C(\gamma_x, \gamma_y) &= \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}} \\
 &= \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{KD}{\rho_1 D + \frac{\rho_1 K}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} + \rho_2 K}} \\
 &= \sqrt{\frac{KD}{\rho_1 D + \rho_2 K}}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Concluindo dessa forma, a demonstração do corolário. ■

O gráfico da FIGURA 2.4 reforça as conclusões obtidas anteriormente.

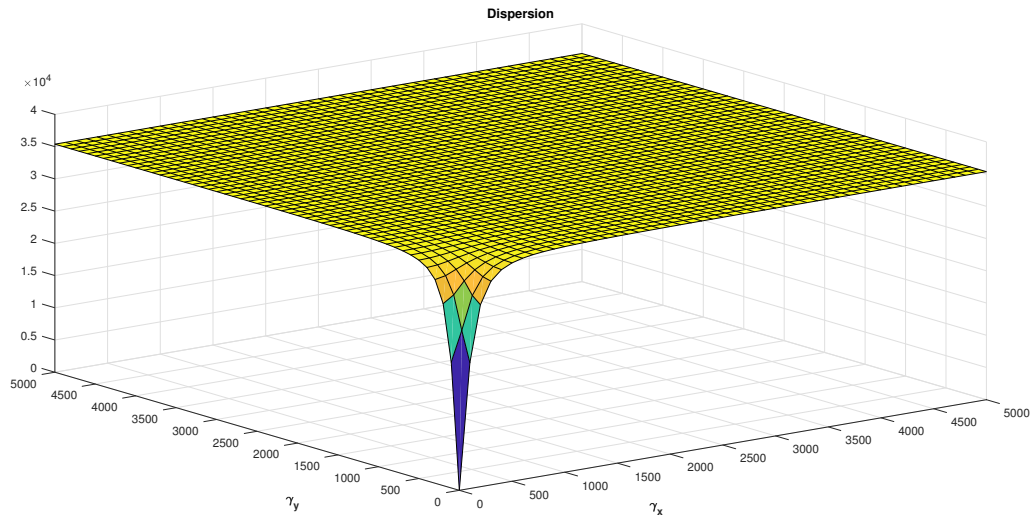


FIGURA 2.4: Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.23). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1.

2.3 Uflyand-Mindlin baseada na Inércia de Inclinação

O próximo sistema a ser analisado consiste no ultimo modelo estudado por Hache em seu artigo [8] citado na primeira seção, a equação de Uflyand-Mindlin baseada no conceito da inércia de inclinação, que é o sistema

(1.27)-(1.29), quando consideramos os valores dos gamas como sendo $(0, 1, 0)$ dado pelas equações:

$$\rho_1 u_{tt} - \rho_2 u_{ttxx} - \rho_2 u_{ttsy} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (2.26)$$

$$-D\psi_{xx} - D\frac{1-\mu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) = 0, \quad (2.27)$$

$$-D\varphi_{yy} - D\frac{1-\mu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\mu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) = 0. \quad (2.28)$$

Novamente consideraremos as mesmas constantes e o mesmo domínio do sistema (2.1)-(2.3). Seguindo para a análise espectral, enunciaremos e provamos o seguinte teorema.

Teorema 2.6 (Dispersão do Modelo Baseado na Inércia de Inclinação). *O sistema de Uflyand-Mindlin Simplificado dado por (2.26)-(2.28) tem soluções harmônicas da forma (2.4), com amplitudes $A_i, i = 1, 2, 3$ e velocidade de fase associada:*

$$C = \pm \sqrt{\frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \rho_2 K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}}. \quad (2.29)$$

Prova. Obtemos um sistema da forma $AX = 0$ quando substituimos funções harmônicas no lugar das funções constituintes do sistema (2.26)-(2.28), onde $X = (A_1, A_2, A_3)^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \omega^2 \rho_1 + & & & \\ & -iK\gamma_x & & -iK\gamma_y \\ -\omega^2 \rho_2(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) & & & \\ & iK\gamma_x & D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\gamma_y^2 + K & D\frac{1+\mu}{2}\gamma_y\gamma_x \\ & iK\gamma_y & D\frac{1+\mu}{2}\gamma_y\gamma_x & D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\gamma_x^2 + K \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

dessa forma, para obtermos soluções não triviais é necessário que $\det(A) = 0$ o que implica em

$$a(\gamma_x, \gamma_y)\omega^2 + b(\gamma_x, \gamma_y) = 0, \quad (2.31)$$

no qual os coeficientes $a(\gamma_x, \gamma_y)$ e $b(\gamma_x, \gamma_y)$ são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} a(\gamma_x, \gamma_y) &= -\rho_1 D^2 \left(1 - \frac{1+\mu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 - \rho_1 K D \left(2 - \frac{1+\mu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \rho_1 K^2 + \\ &\quad - \rho_2 D^2 \left(1 - \frac{1+\mu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^3 - \rho_2 K D \left(2 - \frac{1+\mu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 - \rho_2 K^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\ b(\gamma_x, \gamma_y) &= K D^2 \left(1 - \frac{1+\mu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^3 + K^2 D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, a solução do problema para ω pe dada por,

$$\omega^2 = \frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \rho_2 K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}. \quad (2.32)$$

Então quando consideramos a igualdade $\omega^2 = C^2(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)$, temos a seguinte igualdade

$$C^2 = \frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \rho_2 K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)} \quad (2.33)$$

que finaliza a demonstração do teorema. ■

Novamente temos um caso que a análise é considerada simples,

Corolário 2.7. *Os limites da velocidade de espectro (2.29) são*

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) &= 0, \\ \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} C(\gamma_x, \gamma_y) &= 0, \end{aligned}$$

e dessa forma, esta tem comportamento completamente físico.

Prova. Novamente a análise se inicia pelo caso em que o limite tende a zero pela direita

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) &= \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} \frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \rho_2 K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)} \\ &= \frac{0}{\rho_1 K} = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

e finaliza com a análise quando a média geométrica dos gamas tende ao mais infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} C(\gamma_x, \gamma_y) &= \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} \frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K + \rho_2 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \rho_2 K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)} \\ &= \lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} \frac{\frac{KD}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}}{\frac{\rho_1 D}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)} + \frac{\rho_1 K}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2} + \rho_2 D + \frac{\rho_2 K}{(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}} = \frac{0}{\rho_2 D} = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Desta forma, temos a demonstração do teorema. ■

Para ratificar os resultados temos a seguinte plotagem gráfica. Observe que este espectro de velocidade tem um comportamento diferente dos anteriores, pois ele parte de zero, atinge seu valor máximo $C = \frac{\sqrt{KD}}{\sqrt{\rho_1 D + \sqrt{\rho_2 K}}}$ no valor $\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = \sqrt[4]{\frac{\rho_1 K}{\rho_2 D}}$ e decresce se aproximando novamente de zero.

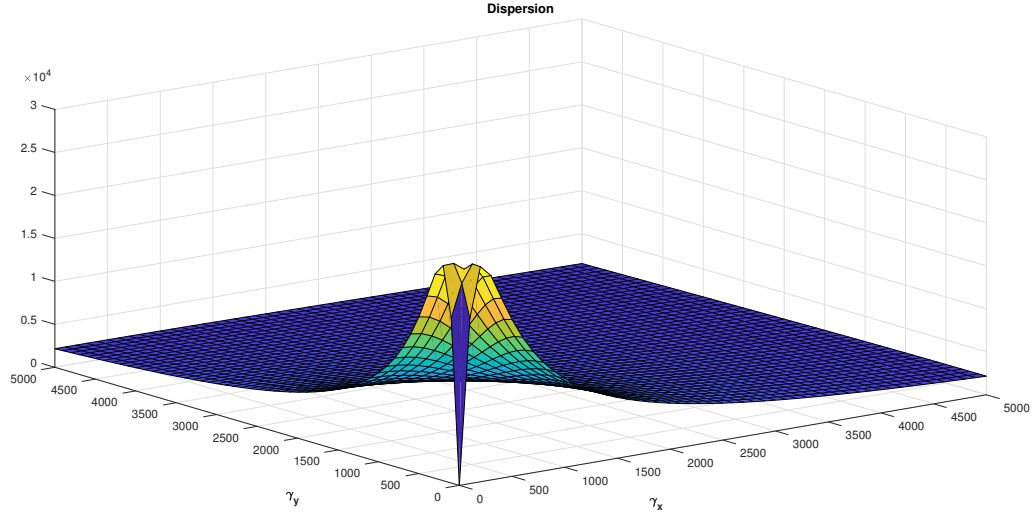


FIGURA 2.5: Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.29). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1.

2.4 Modelo de Corte

A última formulação que trataremos é o Modelo de Corte para Uflyand Mindlin, este modelo não foi deduzido por Hache [8] como citado na primeira seção, este modelo como deduzido a partir do modelo tratado por Almeida Júnior et al [3] em seu artigo, neste trabalho os autores provam o decaimento exponencial da energia livre de qualquer relação entre os coeficientes. Baseada na formulação (1.27)-(1.29) obtemos uma versão bidimensional do modelo considerando os coeficientes $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, dado por,

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.36)$$

$$-D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

$$-D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\nu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) = 0, \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (2.38)$$

novamente consideraremos o domínio e as notações adotadas no sistema (2.1)-(2.3). E seguindo a ordem já definida neste trabalho, após a exposição do modelo a ser tratado, iniciamos a análise de de dispersão do modelo, para tal primeiramente extraímos seu espectro de velocidade.

Teorema 2.8 (Dispersão do Modelo de Corte). *O modelo denominado de Modelo de Corte, descrito nas equações (2.36)-(2.38), está associado as amplitudes $A_i, i = 1, 2, 3$ e velocidade*

$$C = \pm \sqrt{\frac{KD(\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K}}, \quad (2.39)$$

para soluções harmônicas da forma (2.4).

Prova. Para este fim, substituímos as funções que compõem (2.36)-(2.38) pelas funções harmônicas (2.4), obtendo assim um sistema da forma $AX = 0$ em que

$$A = \begin{pmatrix} K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \omega^2 \rho_1 & -iK\gamma_x & -iK\gamma_y \\ iK\gamma_x & D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - D\frac{1+\nu}{2}\gamma_y^2 + K & D\frac{1+\nu}{2}\gamma_y\gamma_x \\ iK\gamma_y & D\frac{1+\nu}{2}\gamma_y\gamma_x & D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - D\frac{1+\nu}{2}\gamma_x^2 + K \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

e $X = (A_1, A_2, A_3)^T$. Dessa forma, para que hajam soluções não triviais precisamos que $\det(A) = 0$, o que implica em,

$$a(\gamma_x, \gamma_y)\omega^2 + b(\gamma_x, \gamma_y) = 0, \quad (2.41)$$

no qual $a(\gamma_x, \gamma_y)$ e $b(\gamma_x, \gamma_y)$ representam os coeficientes,

$$\begin{aligned} a(\gamma_x, \gamma_y) &= -\rho_1 D^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 - \rho_1 K D \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \rho_1 K^2, \\ b(\gamma_x, \gamma_y) &= K D^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^3 + K^2 D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2. \end{aligned}$$

Para encontrar a solução desta equação devemos isolar ω . Após isolar este, e simplificarmos a fração resultante, determinamos que suas soluções são,

$$\omega^2 = \frac{K D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2}{\rho_1 D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K}. \quad (2.42)$$

Mais uma vez considerando o fato de $\omega = C \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ temos,

$$C^2 = \frac{K D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)}{\rho_1 D (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \rho_1 K}, \quad (2.43)$$

demonstrando o teorema ao extrairmos a raiz quadrada e obtermos (2.39). ■

Assim, após extrairmos o espectro de velocidade, passamos para sua análise, verificando seu comportamento em todo o domínio de modo que não haja nenhuma inconsistência física, em particular, destacamos dois limites desta análise, o limite quando o número de ondas tende a zero pela direita e quando o referido número de ondas tende infinito positivo. Mais uma vez, similarmente a análise das duas seções anteriores, a análise é simples em (2.39).

Corolário 2.9. *Em todo o domínio a velocidade de espectro (2.39) tem comportamento físico e seus limites são*

$$\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow 0^+} C(\gamma_x, \gamma_y) = 0,$$

$$\lim_{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \rightarrow +\infty} C(\gamma_x, \gamma_y) = \sqrt{\frac{K}{\rho_1}}.$$

A demonstração será omitida, pois é similar a realizada duas seções atrás quando provamos (2.24) e (2.25). Esta conclusão é ratificada pelo gráfico da FIGURA 2.6.

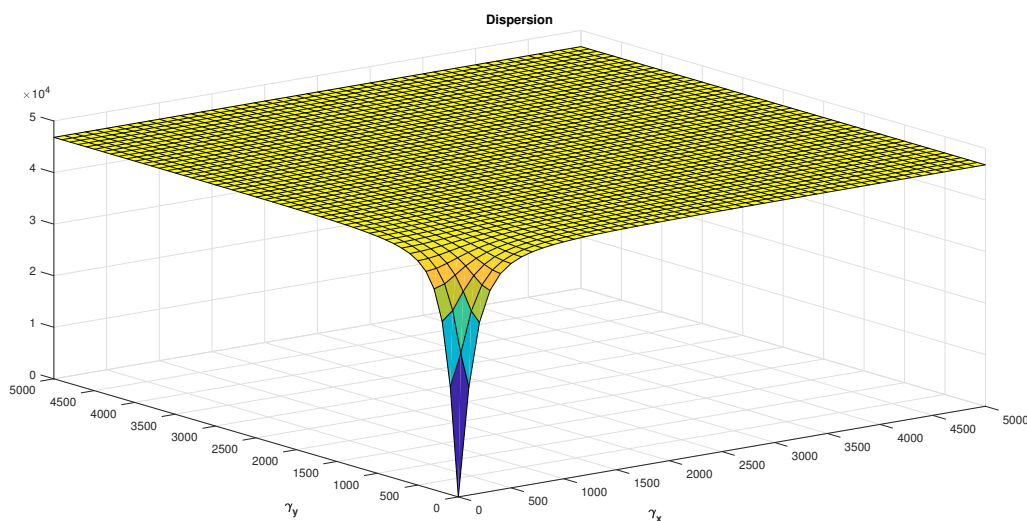


FIGURA 2.6: Superfície representando $C(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.43). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.1.

2.5 Uflyand-Mindlin Clássico com Dampings

A partir desta seção voltaremos a tratar os mesmos modelos anteriores adicionados de dampings do tipo atrito $\alpha\psi_t$ e $\alpha\varphi_t$, na segunda e terceira equações respectivamente, mantida a ordem que este sistema já foram analisados. Dessa forma, vamos analisar o comportamento da velocidade do espectro de frequência do modelo de Uflyand-Mindlin Clássico (2.1)-(2.3), adicionando dos referidos dampings, dado pelo sistema:

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (2.44)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) + \alpha\psi_t = 0, \quad (2.45)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\nu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) + \alpha\varphi_t = 0, \quad (2.46)$$

por se tratar de uma variação do sistema (2.1)-(2.3), e assim o domínio e as constantes são definidos da mesma forma. O diferencial está em α que é uma constante positiva que representa a velocidade do damping friccional.

Teorema 2.10 (Dispersão do Modelo com Damping). *O sistema (2.44)-(2.46) tem soluções harmônicas da forma (2.4) com amplitudes A_i , $i = 1, 2, 3$ e velocidades de fase:*

$$C_{1,2} = \frac{-z_{\pm}}{2\gamma} + \sqrt{\left(\frac{z_{\pm}}{2\gamma}\right)^2 + v}, \quad (2.47)$$

$$C_{3,4} = \frac{-z_{\pm}}{2\gamma} - \sqrt{\left(\frac{z_{\pm}}{2\gamma}\right)^2 + v}, \quad (2.48)$$

$$C_{5,6} = \frac{id}{2\gamma} \pm \sqrt{v(1-r) + \frac{m}{\gamma^2} - \frac{d^2}{4\gamma^2}}, \quad (2.49)$$

em que $\frac{K}{\rho_1} = \frac{D}{\rho_2} = v$, $\frac{K}{\rho_2} = m$, $\frac{1+\nu}{2} = r$, $\gamma_x^2 + \gamma_y^2 = \gamma^2$, $\frac{\alpha}{\rho_2} = d$ e a constante z_{\pm} representa,

$$z_{\pm} = \frac{-id}{2} \pm \sqrt{m - \frac{d^2}{4}}. \quad (2.50)$$

Prova. Como já realizado anteriormente, substituímos as funções harmônicas (2.4) no sistema que estamos analisando, neste caso (2.44)-(2.46), obtemos assim um novo sistema da forma matricial $AX = 0$ em que $X = (A_1, A_2, A_3)^T$ e

$$A = \begin{pmatrix} K(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - \omega^2 \rho_1 & -iK\gamma_x & -iK\gamma_y \\ iK\gamma_x & -\rho_2 \omega^2 + D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ & -D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_y^2 + K + i\alpha \omega & D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_y \gamma_x \\ iK\gamma_y & D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_y \gamma_x & -\rho_2 \omega^2 + D(\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \\ & & -D^{\frac{1+\nu}{2}} \gamma_x^2 + K + i\alpha \omega \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

O objetivo continua determinar condições para que $\det(A) = 0$ e assim obter soluções não triviais. Neste sentido temos que

$$\omega^6 + a(\gamma_x, \gamma_y)\omega^5 + b(\gamma_x, \gamma_y)\omega^4 + c(\gamma_x, \gamma_y)\omega^3 + d(\gamma_x, \gamma_y)\omega^2 + e(\gamma_x, \gamma_y)\omega + f(\gamma_x, \gamma_y) = 0, \quad (2.52)$$

com os coeficientes $a(\gamma_x, \gamma_y)$, $b(\gamma_x, \gamma_y)$, $c(\gamma_x, \gamma_y)$, $d(\gamma_x, \gamma_y)$, $e(\gamma_x, \gamma_y)$ e $f(\gamma_x, \gamma_y)$ dados por,

$$\begin{aligned}
a(\gamma_x, \gamma_y) &= -2i \frac{\alpha}{\rho_2}, \\
b(\gamma_x, \gamma_y) &= -\frac{D}{\rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) - 2 \frac{K}{\rho_2} - \left(\frac{\alpha}{\rho_2}\right)^2 - \frac{K}{\rho_1} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\
c(\gamma_x, \gamma_y) &= i \frac{D}{\rho_2} \frac{\alpha}{\rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + 2i \frac{K}{\rho_2} \frac{\alpha}{\rho_2} + 2i \frac{K}{\rho_1} \frac{\alpha}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\
d(\gamma_x, \gamma_y) &= \left(\frac{D}{\rho_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \frac{K}{\rho_2} \frac{D}{\rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \left(\frac{K}{\rho_2}\right)^2 + \\
&\quad + \frac{K}{\rho_1} \frac{D}{\rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 + \frac{K}{\rho_1} \frac{K}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) + \frac{K}{\rho_1} \left(\frac{\alpha}{\rho_2}\right)^2 (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\
e(\gamma_x, \gamma_y) &= -i \frac{K}{\rho_1} \frac{D}{\rho_2} \frac{\alpha}{\rho_2} \left(2 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2 - i \frac{K}{\rho_1} \frac{K}{\rho_2} \frac{\alpha}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2), \\
f(\gamma_x, \gamma_y) &= -\frac{K}{\rho_1} \left(\frac{D}{\rho_2}\right)^2 \left(1 - \frac{1+\nu}{2}\right) (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^3 - \frac{K}{\rho_1} \frac{K}{\rho_2} \frac{D}{\rho_2} (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^2.
\end{aligned}$$

Se considerarmos, $\frac{K}{\rho_1} = \frac{D}{\rho_2} = v$, $\frac{K}{\rho_2} = m$, $\frac{1+\nu}{2} = r$, $\gamma_x^2 + \gamma_y^2 = \gamma^2$ e $\frac{\alpha}{\rho_2} = d$, temos que os coeficientes passam a ser descritos por,

$$\begin{aligned}
a(\gamma_x, \gamma_y) &= -2id, \\
b(\gamma_x, \gamma_y) &= -v(3-r)\gamma^2 - 2m - d^2, \\
c(\gamma_x, \gamma_y) &= ivd(4-r)\gamma^2 + 2imd, \\
d(\gamma_x, \gamma_y) &= v^2(3-2r)\gamma^4 + vm(3-r)\gamma^2 + m^2 + vd^2\gamma^2, \\
e(\gamma_x, \gamma_y) &= -iv^2d(2-r)\gamma^4 - ivmd\gamma^2, \\
f(\gamma_x, \gamma_y) &= -v^3(1-r)\gamma^6 - v^2m\gamma^4.
\end{aligned}$$

Com essas considerações, a equação (2.52) pode ser reescrita como,

$$[\omega^2 - id\omega - (v(1-r)\gamma^2 + m)] [\omega^4 - id\omega^3 - (2v\gamma^2 + m)\omega^2 + ivd\gamma^2\omega + v^2\gamma^4] = 0. \quad (2.53)$$

Dessa forma, suas soluções são

$$\omega_{1,2} = \frac{-z_{\pm}}{2} + \sqrt{\frac{z_{\pm}^2}{4} + v\gamma^2}, \quad (2.54)$$

$$\omega_{3,4} = \frac{-z_{\pm}}{2} - \sqrt{\frac{z_{\pm}^2}{4} + v\gamma^2}, \quad (2.55)$$

$$\omega_{5,6} = \frac{id}{2} \pm \sqrt{v(1-r)\gamma^2 + m - \frac{d^2}{4}}, \quad (2.56)$$

em que

$$z_{\pm} = \frac{-id}{2} \pm \sqrt{m - \frac{d^2}{4}}. \quad (2.57)$$

Portanto, usando que $\omega = C\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}$ temos a demonstração do teorema. ■

Observe que todos os espectros desta seção são valores complexos. Nestes casos, o estudo da equação de dispersão é feito usando a parte real da solução, a partir daí, uma análise similar a do caso real é feita. Antes do teorema, observaremos uma proposição sobre o valor de z_{\pm} .

Proposição 2.11. *O valor z_{\pm} como definido em (2.50) se comporta da seguinte maneira:*

- Se $m - \frac{d^2}{4} > 0$, então

$$\sqrt{(z_+)^2} = z_+, \quad (2.58)$$

$$\sqrt{(z_-)^2} = -z_-. \quad (2.59)$$

- Se $m - \frac{d^2}{4} \leq 0$, então

$$\sqrt{(z_+)^2} = -z_+, \quad (2.60)$$

$$\sqrt{(z_-)^2} = -z_-. \quad (2.61)$$

Prova. Iniciamos analisando o primeiro caso em que consideramos $m - \frac{d^2}{4} > 0$, dessa forma, da definição de z_{\pm} em (2.50),

$$z_+ = \left(\sqrt{m - \frac{d^2}{4}} \right) + \left(\frac{-d}{2} \right) i, \quad (2.62)$$

$$z_- = \left(-\sqrt{m - \frac{d^2}{4}} \right) + \left(\frac{-d}{2} \right) i, \quad (2.63)$$

dessa forma, em z_+ como a parte real é positiva temos,

$$\sqrt{(z_+)^2} = z_+. \quad (2.64)$$

Por outro lado, a parte real e a parte imaginária de z_- são negativas e por isso,

$$\sqrt{(z_-)^2} = -z_-. \quad (2.65)$$

No segundo caso da definição de z_{\pm} em (2.50), junto com a condição $m - \frac{d^2}{4} \leq 0$ temos,

$$z_+ = \left(\frac{-d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - m} \right) i, \quad (2.66)$$

$$z_- = \left(\frac{-d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - m} \right) i, \quad (2.67)$$

ou seja, temos dois números que são imaginários puros com sua parte imaginária negativa e dessa forma,

$$\sqrt{(z_+)^2} = -z_+, \quad (2.68)$$

$$\sqrt{(z_-)^2} = -z_-. \quad (2.69)$$

O que finaliza a demonstração da proposição. ■

Com esta proposição demonstrada, podemos enunciar e demonstrar o teorema a seguir,

Teorema 2.12. *As velocidades de fase do sistema (2.44)-(2.46) se comportam da seguintes maneira:*

- *Sob quaisquer condições:*

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_1 = 0, \quad (2.70)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_4 = 0, \quad (2.71)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} C_{1,2} = \sqrt{v}, \quad (2.72)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} C_{3,4} = -\sqrt{v}, \quad (2.73)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} C_{5,6} = \pm \sqrt{v(1-r)}. \quad (2.74)$$

- Quando consideramos $m - \frac{d^2}{4} > 0$:

$$\text{Real} \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{2,3,5,6} \right) = \pm \infty. \quad (2.75)$$

- Por outro lado, se $m - \frac{d^2}{4} \leq 0$ temos:

$$\text{Real} \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{2,3,5,6} \right) = 0. \quad (2.76)$$

Prova. Nesta demonstração primeiramente analisaremos os limites quando as variáveis tendem a $+\infty$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} C_{1,2} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{-z_{\pm}}{2\gamma} + \sqrt{\left(\frac{z_{\pm}}{2\gamma}\right)^2 + v} = \sqrt{v},$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} C_{3,4} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{-z_{\pm}}{2\gamma} - \sqrt{\left(\frac{z_{\pm}}{2\gamma}\right)^2 + v} = -\sqrt{v},$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} C_{5,6} = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{id}{2\gamma} \pm \sqrt{v(1-r) + \frac{m}{\gamma^2} - \frac{d^2}{4\gamma^2}} = \pm \sqrt{v(1-r)}.$$

Feito isso, iremos analisar os casos quando as variáveis tendem a zero, para tal utilizaremos fortemente a proposição 2.3. Na referida observamos primeiramente os limites de ω . Assim em (2.54) e em (2.55) temos

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_{1,2} = \frac{-z_{\pm}}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_{\pm}}{2}\right)^2}, \quad (2.77)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_{3,4} = \frac{-z_{\pm}}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_{\pm}}{2}\right)^2}, \quad (2.78)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_{5,6} = \frac{id}{2} \pm \sqrt{m - \frac{d^2}{4}}, \quad (2.79)$$

logo, se $m - \frac{d^2}{4} > 0$ então os limites (2.77)-(2.79) serão reescritos como,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_1 = 0, \quad (2.80)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_2 = -z_- = \left(\sqrt{m - \frac{d^2}{4}} \right) + \left(\frac{d}{2} \right) i, \quad (2.81)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_3 = -z_+ = \left(-\sqrt{m - \frac{d^2}{4}} \right) + \left(\frac{d}{2} \right) i, \quad (2.82)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_4 = 0, \quad (2.83)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_{5,6} = \left(\pm \sqrt{m - \frac{d^2}{4}} \right) + \left(\frac{d}{2} \right) i, \quad (2.84)$$

logo, os limites de ω_2 e ω_5 terão uma parte real positiva dessa forma temos que

$$Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{2,5} \right) = +\infty, \quad (2.85)$$

como ratificado nas plotagens 2.7 e 2.8,

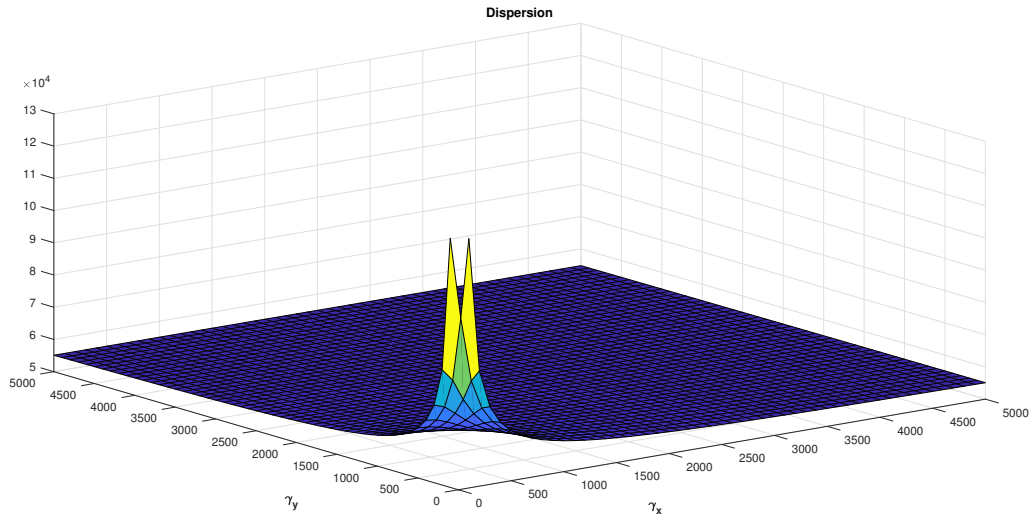


FIGURA 2.7: Superfície representando $C_2(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Parâmetros: $\nu = 0,29$; $h = 0,015$; $E = 21.10^{12}$; $\rho = 7860$; $k = \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2}}$ e $\alpha = \sqrt{\rho_2 K}$, ou seja neste caso $m - \frac{d^2}{4} > 0$.

Por outro lado, os limites ω_3 e ω_6 terão uma parte real negativa dessa forma temos que

$$Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{3,6} \right) = -\infty, \quad (2.86)$$

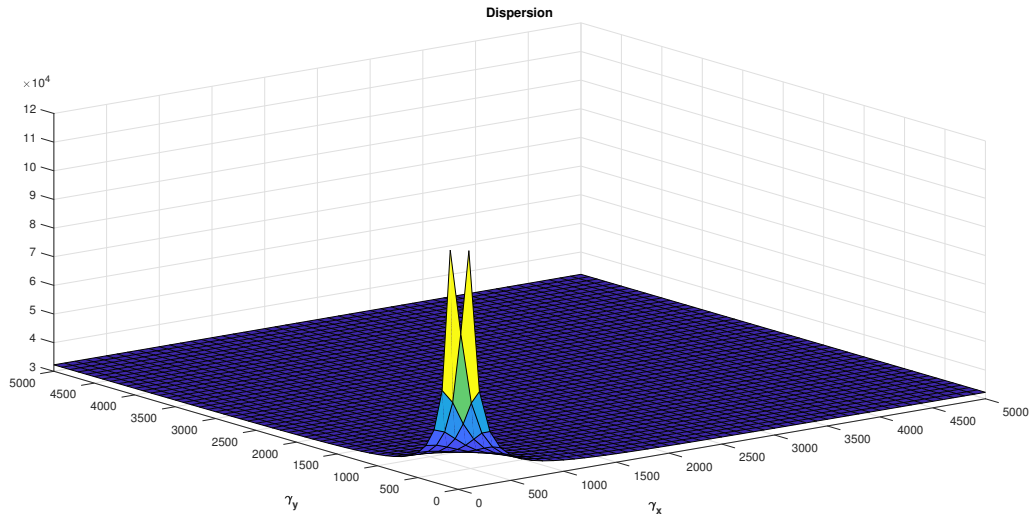


FIGURA 2.8: Superfície representando $C_5(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7.

como ratificado nas plotagens 2.9 e 2.10, que finaliza demonstração do segundo item do teorema.

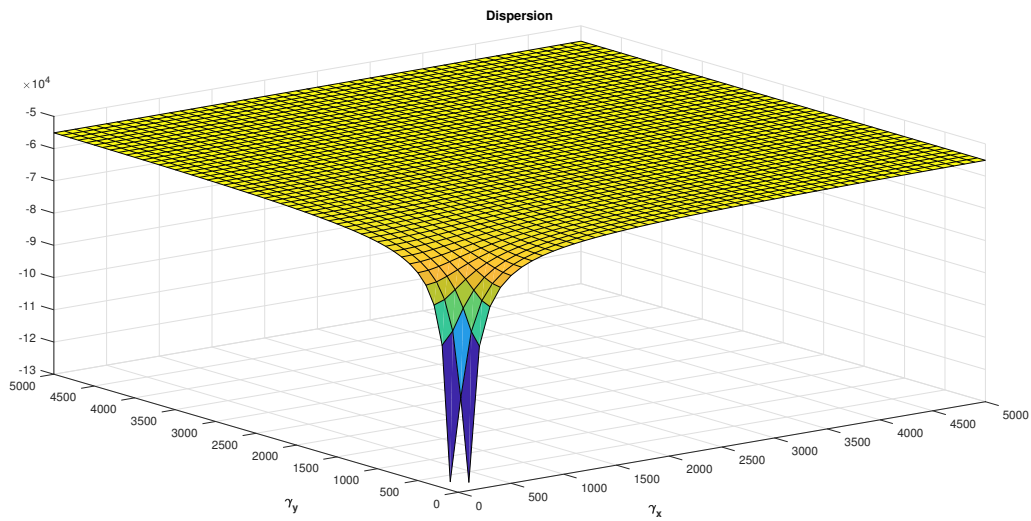


FIGURA 2.9: Superfície representando $C_3(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7.

Por fim, os limites de ω_1 e ω_4 se anulam, ou seja, para calcular o limite de C_1 e C_4 devemos utilizar a regra de l'Hôpital, por onde concluímos

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{1,4} = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \pm \frac{v\gamma}{\sqrt{\frac{z_{\pm}^2}{4} + v\gamma^2}} = 0, \tag{2.87}$$

tal resultado pode ser observado nas FIGURAs 2.11 e 2.12.

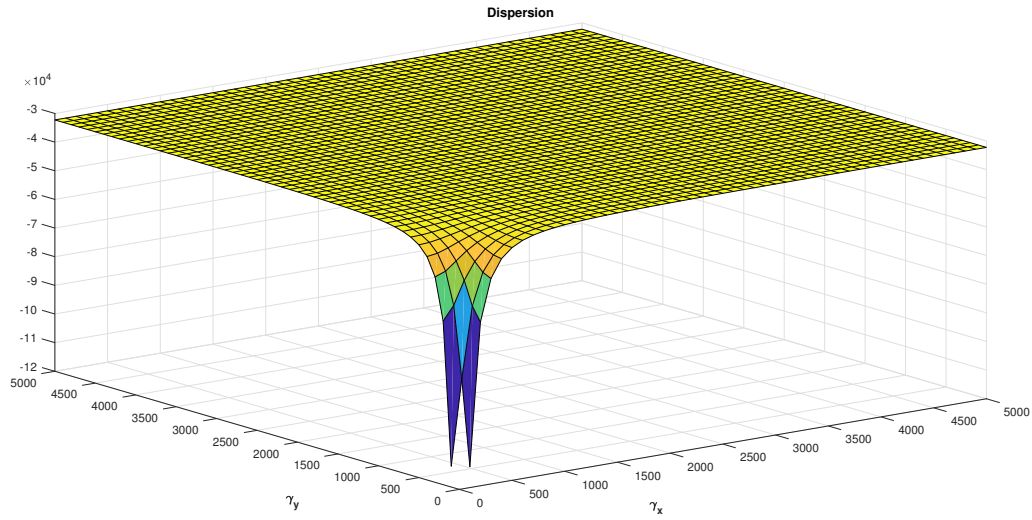


FIGURA 2.10: Superfície representando $C_6(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7.

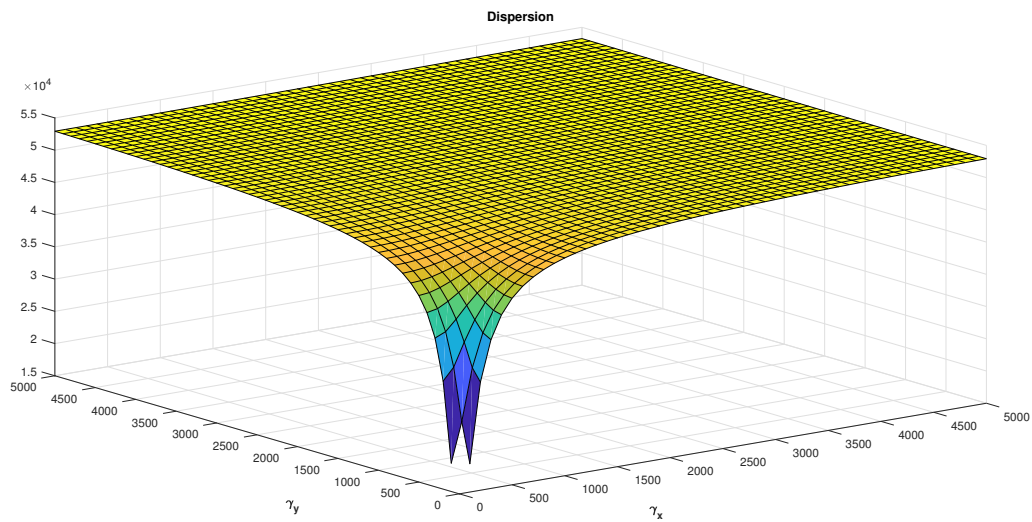


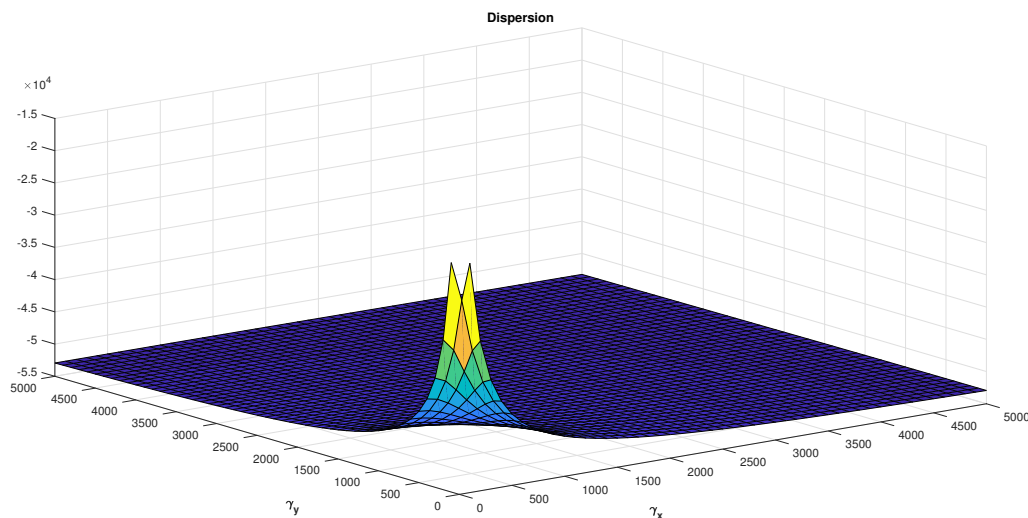
FIGURA 2.11: Superfície representando $C_1(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7.

A partir deste ponto analisaremos o outro caso quando $m - \frac{d^2}{4} \leq 0$, assim as (2.77)-(2.79) serão calculadas por,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_1 = -z_+ = \left(\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - m} \right) i, \quad (2.88)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_2 = -z_- = \left(\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - m} \right) i, \quad (2.89)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_3 = 0, \quad (2.90)$$


 FIGURA 2.12: Superfície representando $C_4(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.7.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_4 = 0, \quad (2.91)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_{5,6} = \left(\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - m} \right) i, \quad (2.92)$$

assim os limites se anulam ou são imaginários puro, dessa forma temos que $Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \omega_{1,2,3,4,5,6} \right) = 0$, o que implica novamente em

$$Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{1,2,3,4,5,6} \right) = \frac{0}{0}, \quad (2.93)$$

e por consequência podemos usar a regra de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{1,2} \right) &= Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{v\gamma}{\sqrt{\frac{z_{\pm}^2}{4} + v\gamma^2}} \right) = 0, \\ Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{3,4} \right) &= Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{-v\gamma}{\sqrt{\frac{z_{\pm}^2}{4} + v\gamma^2}} \right) = 0, \\ Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} C_{5,6} \right) &= Real \left(\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{\pm v(1-r)\gamma}{\sqrt{v(1-r)\gamma^2 + m - \frac{d^2}{4}}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Portanto quando consideramos $m - \frac{d^2}{4} \leq 0$ os espectros se tornam físicos completando a demonstração do primeiro item e demonstrando o ultimo item do teorema, esses comportamentos são ilustrados pelas FIGURAS 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18. ■

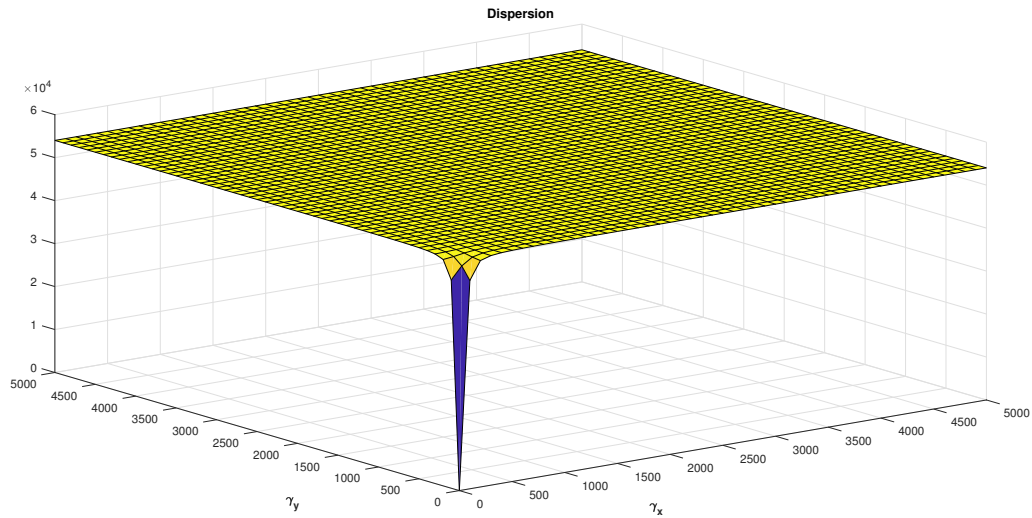


FIGURA 2.13: Superfície representando $C_1(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Parâmetros: $\nu = 0,29$; $h = 0,015$; $E = 21.10^{12}$; $\rho = 7860$; $k = \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2}}$ e $\alpha = 3\sqrt{\rho_2 K}$, ou seja neste caso $m - \frac{d^2}{4} \leq 0$.

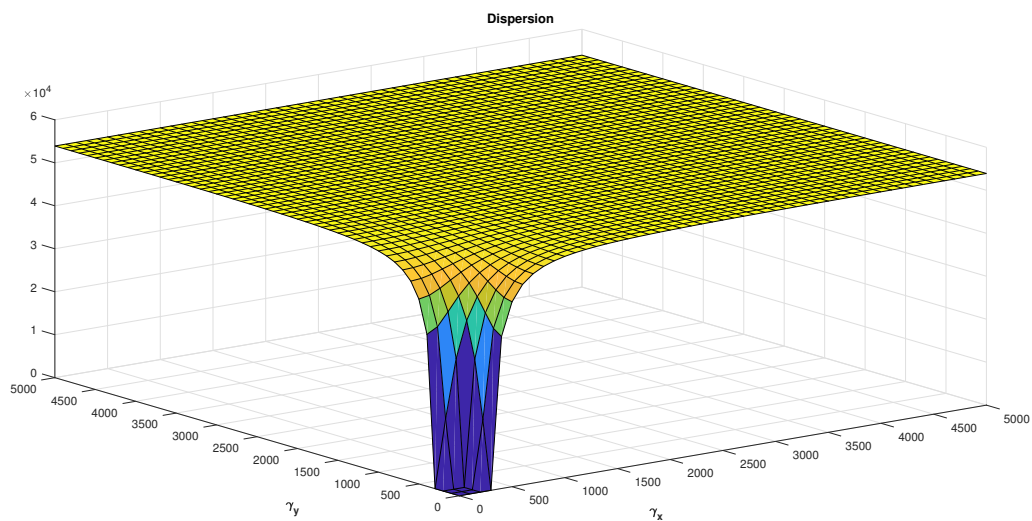


FIGURA 2.14: Superfície representando $C_2(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.47). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13.

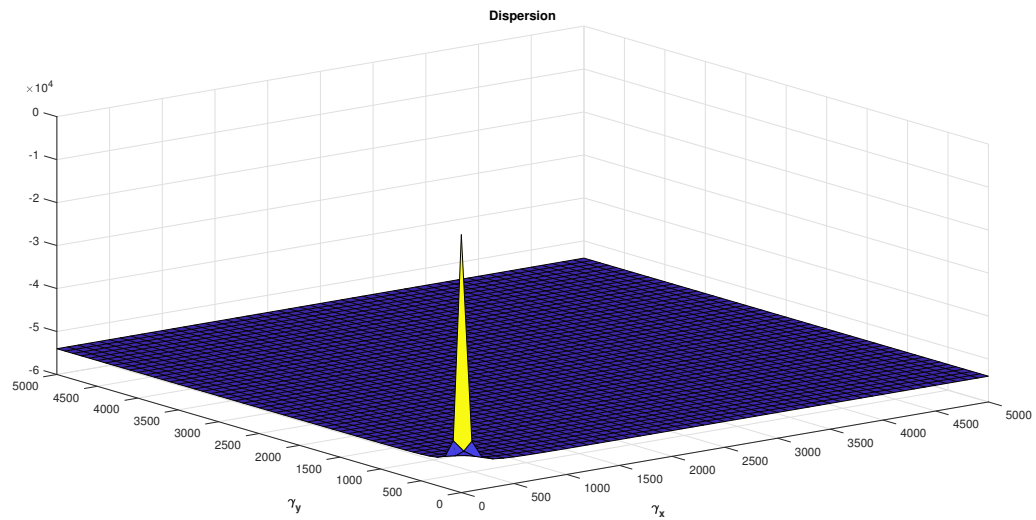


FIGURA 2.15: Superfície representando $C_3(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13.

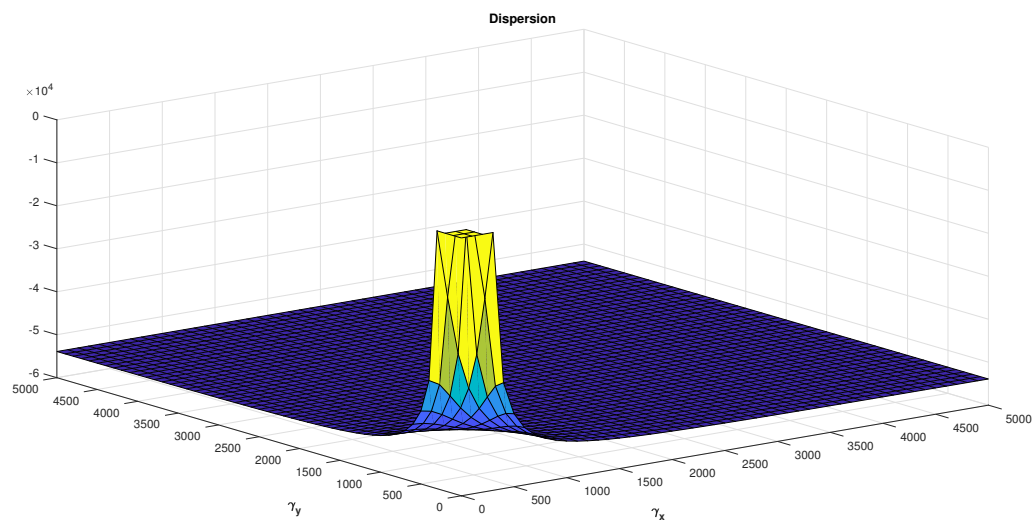
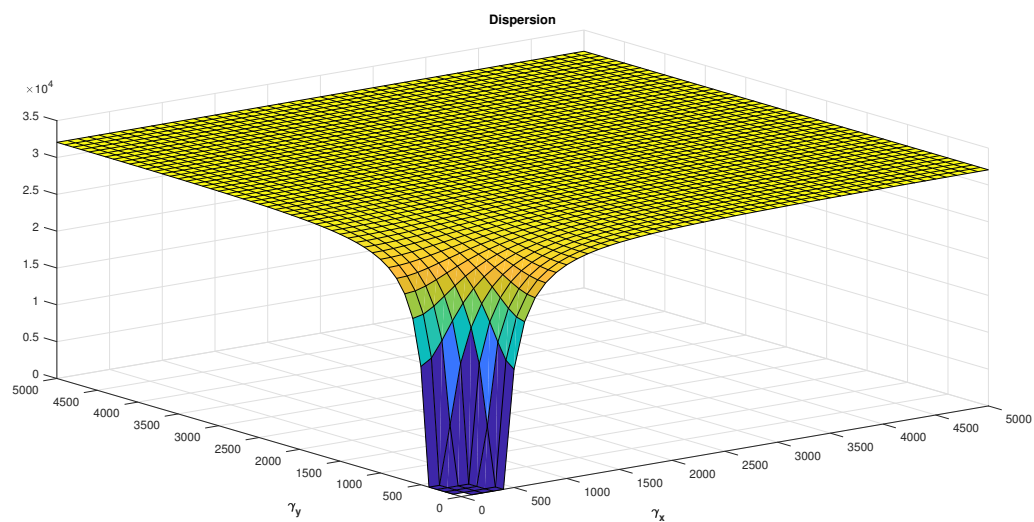
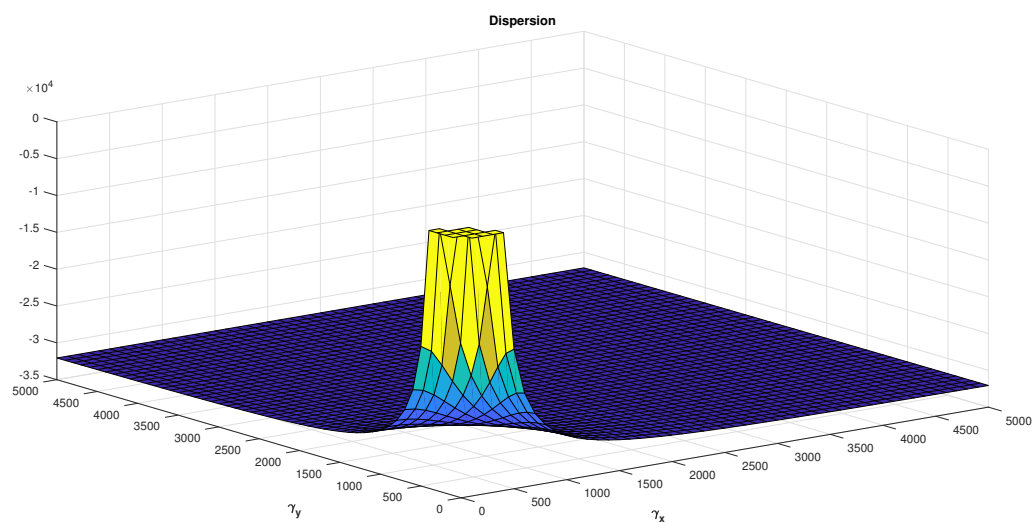


FIGURA 2.16: Superfície representando $C_4(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.48). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13.

FIGURA 2.17: Superfície representando $C_5(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13.FIGURA 2.18: Superfície representando $C_6(\gamma_x, \gamma_y)$ na equação (2.49). Mesmos parâmetros da FIGURA 2.13.

CAPÍTULO 3

Boa-Colocação

A análise do espectro de velocidade demonstra uma propriedade importante para esta categoria de problemas, mas não é única característica que deve ser analisada. Neste capítulo, baseado nos artigos de Ramos et al [13] e de Almeida Júnior et al [3], provaremos que no sistema de Uflyand-Mindlin Simplificado, através das aproximações de Faedo-Galerkin, há existência e unicidade de soluções fortes e fracas.

3.1 Modelo de Uflyand-Mindlin Simplificado

Nesta primeira seção apresentaremos novamente o modelo de Uflyand-Mindlin Simplificado. Este foi proposto em (2.16)-(2.18), entretanto aqui além do sistema base, há a adição de dampings, além da presença das condições

iniciais e de contorno.

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (3.1)$$

$$-\rho_2 u_{ttx} - D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) + \alpha\psi_t = 0, \quad (3.2)$$

$$-\rho_2 u_{tty} - D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\mu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) + \alpha\varphi_t = 0, \quad (3.3)$$

$$u(\Gamma_x, t) = \psi_x(\Gamma_x, t) = \varphi(\Gamma_x, t) = u(\Gamma_y, t) = \psi(\Gamma_y, t) = \varphi_y(\Gamma_y, t) = 0, \quad (3.4)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad u_{tt}(x, y, 0) = u_2(x, y), \quad (3.5)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad (3.6)$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad \psi_t(x, y, 0) = \psi_1(x, y). \quad (3.7)$$

Neste caso, as definições das funções, das constantes e do domínio são as mesmas, acrescidas dos conjuntos que representam os contornos do domínio definidos por $\Gamma_x = \{0, L\} \times [0, L] \subset \mathbb{R}^2$ e $\Gamma_y = [0, L] \times \{0, L\} \subset \mathbb{R}^2$. Primeiramente iremos determinar a equação da energia associada ao problema, neste capítulo provaremos seu decaimento e no próximo capítulo provaremos que este decaimento é exponencial.

Teorema 3.1. *O sistema de Uflyand-Mindlin Simplificado, com suas condições iniciais e de contorno descrito em (3.1)-(3.7) tem energia decrescente com esta energia descrita por*

$$\begin{aligned} E(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_t)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi + u_x)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi + u_y)^2 dx dy + \\ &+ \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \iint_{\Omega} (u_{tt})^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{tx})^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{ty})^2 dx dy + \\ &+ D \iint_{\Omega} (\psi_x + \varphi_y)^2 dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_y - \varphi_x)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Prova. Para o calculo da energia, iniciamos multiplicando as equações (3.1), (3.2) e (3.3) por u_t , ψ_t e φ_t respectivamente, após isso, integramos sobre Ω

$$\rho_1 \iint_{\Omega} u_t u_{tt} dx dy - K \iint_{\Omega} u_t (\psi + u_x)_x dx dy - K \iint_{\Omega} u_t (\varphi + u_y)_y dx dy = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & -\rho_2 \iint_{\Omega} \psi_t u_{ttx} dx dy - D \iint_{\Omega} \psi_t \psi_{xx} dx dy - D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \psi_t \psi_{yy} dx dy + \\ & -D \frac{1+\mu}{2} \iint_{\Omega} \psi_t \varphi_{xy} dx dy + K \iint_{\Omega} \psi_t (\psi + u_x) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} (\psi_t)^2 dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & -\rho_2 \iint_{\Omega} \varphi_t u_{tty} dx dy - D \iint_{\Omega} \varphi_t \varphi_{yy} dx dy - D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_t \varphi_{xx} dx dy + \\ & -D \frac{1+\mu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_t \psi_{xy} dx dy + K \iint_{\Omega} \varphi_t (\varphi + u_y) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} (\varphi_t)^2 dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

somamos essas equações e usamos a integração por partes,

$$\begin{aligned} & \rho_1 \iint_{\Omega} u_t u_{tt} dx dy - K \int_0^L u_t (\psi + u_x)|_0^L dy + K \iint_{\Omega} u_{tx} (\psi + u_x) dx dy + \\ & -K \int_0^L u_t (\varphi + u_y)|_0^L dx + K \iint_{\Omega} u_{ty} (\varphi + u_y) dx dy - \rho_2 \int_0^L \psi_t u_{tt}|_0^L dy + \rho_2 \iint_{\Omega} \psi_{tx} u_{tt} dx dy + \\ & -D \int_0^L \psi_t \psi_x|_0^L dy + D \iint_{\Omega} \psi_{tx} \psi_x dx dy - D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \psi_t \psi_y|_0^L dx + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \psi_{ty} \psi_y dx dy + \\ & -D \int_0^L \psi_t \varphi_y|_0^L dy + D \iint_{\Omega} \psi_{tx} \varphi_y dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \psi_t \varphi_x|_0^L dx - D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \psi_{ty} \varphi_x dx dy + \\ & +K \iint_{\Omega} \psi_t (\psi + u_x) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} (\psi_t)^2 dx dy - \rho_2 \int_0^L \varphi_t u_{tt}|_0^L dx + \rho_2 \iint_{\Omega} \varphi_{ty} u_{tt} dx dy + \\ & -D \int_0^L \varphi_t \varphi_y|_0^L dx + D \iint_{\Omega} \varphi_{ty} \varphi_y dx dy - D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \varphi_t \varphi_x|_0^L dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_{tx} \varphi_x dx dy + \\ & -D \int_0^L \varphi_t \psi_x|_0^L dx + D \iint_{\Omega} \varphi_{ty} \psi_x dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \varphi_t \psi_y|_0^L dy + \\ & -D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_{tx} \psi_y dx dy + K \iint_{\Omega} \varphi_t (\varphi + u_y) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} (\varphi_t)^2 dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

então, aplicando as condições de contorno e agrupando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \iint_{\Omega} u_t u_{tt} dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi + u_x)_t (\psi + u_x) dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi + u_y)_t (\varphi + u_y) dx dy + \\
& \quad + \rho_2 \iint_{\Omega} (\psi_{tx} + \varphi_{ty}) u_{tt} dx dy + D \iint_{\Omega} (\psi_x + \varphi_y)_t (\psi_x + \varphi_y) dx dy + \quad (3.13) \\
& \quad + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_y - \varphi_x)_t (\psi_y - \varphi_x) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_t)^2 + (\varphi_t)^2] dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, podemos obter da equação (3.1) a seguinte igualdade,

$$\frac{\rho_1}{K} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = \psi_x + \varphi_y,$$

derivando esta em relação ao tempo, multiplicando o resultado deste produto por u_{tt} e integrando em Ω temos

$$\frac{\rho_1}{K} \iint_{\Omega} u_{tt} u_{ttt} dx dy - \iint_{\Omega} u_{tt} u_{txx} dx dy - \iint_{\Omega} u_{tt} u_{tyy} dx dy = \iint_{\Omega} (\psi_{tx} + \varphi_{ty}) u_{tt} dx dy,$$

dessa forma, aplicando novamente integração por partes,

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1}{K} \iint_{\Omega} u_{tt} u_{ttt} dx dy - \int_0^L u_{tt} u_{tx} \Big|_0^L dy + \iint_{\Omega} u_{ttx} u_{tx} dx dy + \\
& \quad - \int_0^L u_{tt} u_{ty} \Big|_0^L dx + \iint_{\Omega} u_{tty} u_{ty} dx dy = \iint_{\Omega} (\psi_{tx} + \varphi_{ty}) u_{tt} dx dy,
\end{aligned}$$

logo, se aplicarmos a condição de contorno e substituirmos em (3.13),

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \iint_{\Omega} u_t u_{tt} dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi + u_x)_t (\psi + u_x) dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi + u_y)_t (\varphi + u_y) dx dy + \\
& \quad \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \iint_{\Omega} u_{tt} u_{ttt} dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} u_{ttx} u_{tx} dx dy + \\
& \quad + \rho_2 \iint_{\Omega} u_{tty} u_{ty} dx dy + D \iint_{\Omega} (\psi_x + \varphi_y)_t (\psi_x + \varphi_y) dx dy + \quad (3.14) \\
& \quad + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_y - \varphi_x)_t (\psi_y - \varphi_x) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_t)^2 + (\varphi_t)^2] dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, da definição da energia (3.8), como proposto no teorema, a equação (3.14) se torna

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\alpha \iint_{\Omega} [(\psi_t)^2 + (\varphi_t)^2] dx dy. \quad (3.15)$$

Provando o decaimento e finalizando a demonstração do teorema. ■

3.2 Existência e Unicidade de Soluções Para Uflyand-Mindlin Simplificado

Nesta seção iremos provar que o sistema é bem posto utilizando o método de Faedo-Galerkin.

Para tal, iniciamos definindo os espaços de fases

$$\mathcal{H} := (H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) \times (H_*^1(\Omega) \times L_*^2(\Omega))^2, \quad (3.16)$$

ao mesmo tempo que

$$\mathcal{H}_1 := (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \times H_0^1(\Omega) \times (H_*^2(\Omega) \times H_*^1(\Omega))^2, \quad (3.17)$$

onde os conjuntos são definidos por

$$H_*^2(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_*^1(\Omega), \quad H_*^1(\Omega) := H^1(\Omega) \cap L_*^2(\Omega), \quad (3.18)$$

e por outro lado

$$L_*^2(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \iint_{\Omega} u(x, y) dx dy = 0 \right\}. \quad (3.19)$$

Primeiramente definiremos o que são soluções fracas do problema.

Definição 3.2. Dadas as condições iniciais $U_0 = (u_0, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}$, uma função $U = (u, u_t, u_{tt}, \psi, \psi_t, \varphi, \varphi_t) \in C([0, T], \mathcal{H})$ é dita uma solução fraca de (3.1)-(3.7) se para todo $t \in [0, T]$

$$\rho_1 \frac{d}{dt} (u_t, \zeta) + K (u_x + \psi, \zeta_x) + K (u_y + \varphi, \zeta_y) = 0, \quad (3.20)$$

$$\rho_1 \frac{d}{dt} (u_{tt}, \eta) + K \frac{d}{dt} (u_x + \psi, \eta_x) + K \frac{d}{dt} (u_y + \varphi, \eta_y) = 0, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \frac{d}{dt} (u_t, \nu_x) + D (\psi_x, \nu_x) + D \frac{1-\nu}{2} (\psi_y, \nu_y) + \\ & + D \frac{1+\mu}{2} (\varphi_y, \nu_x) + K (\psi + u_x, \nu) + \alpha (\psi_t, \nu) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \frac{d}{dt} (u_t, \iota_y) + D (\varphi_y, \iota_y) + D \frac{1-\nu}{2} (\varphi_x, \iota_x) + \\ & + D \frac{1+\mu}{2} (\psi_x, \iota_y) + K (\varphi + u_y, \iota) + \alpha (\varphi_t, \iota) = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para todo, $\zeta, \eta \in H_0^1(\Omega)$, $\nu, \iota \in H_*^1(\Omega)$ e $U(0) = U_0$.

Com essa definição posta, podemos enunciar e demonstrar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.3. *Dados os espaços de fase \mathcal{H} em (3.16) e \mathcal{H}_1 em (3.17) e a condição inicial $U_0 = (u_0, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}$, temos que:*

(i) *se a condição inicial $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (3.1)-(3.7) tem uma solução fraca satisfazendo*

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.24)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.25)$$

$$u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.26)$$

$$\psi \in L^\infty l(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.27)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \quad (3.28)$$

$$\varphi \in L^\infty l(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.29)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)). \quad (3.30)$$

(ii) se a condição inicial $U_0 \in \mathcal{H}_1$, então o problema (3.1)-(3.7) tem uma única solução forte satisfazendo

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.31)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.32)$$

$$u_{tt} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.33)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.34)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.35)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.36)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)). \quad (3.37)$$

(iii) em ambos os casos, a solução U depende continuamente que os dados iniciais estejam em \mathcal{H} . Em particular, o problema (3.1)-(3.7) tem uma única solução fraca.

Prova. De modo análogo ao que foi feito nos artigos de Ramos et al [13] e de Almeida Júnior et al [3], a demonstração será feita em seis passos.

- Passo 1: Problema Aproximado

Considerando que a condição inicial está no espaço de fases, $U_0 \in \mathcal{H}$. Definimos as bases ortogonais de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $H_*^2(\Omega)$ por $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ e $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$ respectivamente, as quais são também bases ortonormais de $L^2(\Omega)$. Para algum natural n , denotamos os subespaços de dimensão finita gerados por n vetores de cada uma destas bases por

$$H_n = \text{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad V_n = \text{span}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}. \quad (3.38)$$

Logo, quando procuramos soluções para o problema aproximado

$$\rho_1 (u_{tt}^n, \zeta) + K (u_x^n + \psi^n, \zeta_x) + K (u_y^n + \varphi^n, \zeta_y) = 0, \quad (3.39)$$

$$\rho_1 (u_{ttt}^n, \eta) + K (u_{xt}^n + \psi_t^n, \eta_x) + K (u_{yt}^n + \varphi_t^n, \eta_y) = 0, \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 (u_{tt}^n, \nu_x) + D (\psi_x^n, \nu_x) + D \frac{1-\nu}{2} (\psi_y^n, \nu_y) + \\ & + D \frac{1+\mu}{2} (\varphi_y^n, \nu_x) + K (\psi^n + u_x^n, \nu) + \alpha (\psi_t^n, \nu) = 0, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 (u_{tt}^n, \nu_y) + D (\varphi_y^n, \nu_y) + D \frac{1-\nu}{2} (\varphi_x^n, \nu_x) + \\ & + D \frac{1+\mu}{2} (\psi_x^n, \nu_y) + K (\varphi^n + u_y^n, \nu) + \alpha (\varphi_t^n, \nu) = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

para todo $\zeta, \eta \in H_n, \nu, \nu \in V_n$ com condições iniciais

$$(u^n(0), u_t^n(0), u_{tt}^n(0), \psi^n(0), \psi_t^n(0), \varphi^n(0), \varphi_t^n(0)) = (u_0^n, u_1^n, u_2^n, \psi_0^n, \psi_1^n, \varphi_0^n, \varphi_1^n), \quad (3.43)$$

satisfazendo

$$(u_0^n, u_1^n, u_2^n, \psi_0^n, \psi_1^n, \varphi_0^n, \varphi_1^n) \rightarrow (u_0, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \quad (3.44)$$

forte em \mathcal{H} , elas são da forma

$$\begin{aligned} u^n(x, y, t) &= \sum_{j=1}^n a_{j,n} \omega_j(x, y), \\ \psi^n(x, y, t) &= \sum_{j=1}^n b_{j,n} \nu_j(x, y), \\ \varphi^n(x, y, t) &= \sum_{j=1}^n c_{j,n} \nu_j(x, y). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Aplicando a teoria de equações diferenciais ordinárias na forma padrão: pelo teorema de Carathéodory, podemos obter uma solução local $(u^n(t), u_t^n(t), u_{tt}^n(t), \psi^n(t), \psi_t^n(t), \varphi^n(t), \varphi_t^n(t))$, no intervalo $[0, t_n)$ a qual $0 \leq t_n \leq T$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta é dita uma solução aproximada para o problema.

- Passo 2: Uma Estimativa a Priori

Substituindo ζ por u_t^n em (3.39), η por u_{tt}^n em (3.41), ν por ψ_t^n em (3.41) e ν por φ_t^n em (3.42) a equação se torna

$$\frac{d}{dt} E^n(t) + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_t^n)^2 + (\varphi_t^n)^2] dx dy = 0, \quad (3.46)$$

onde a energia aproximada é calculada por,

$$\begin{aligned}
 E^n(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_t^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi^n + u_x^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi^n + u_y^n)^2 dx dy + \\
 &+ \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{tx}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{ty}^n)^2 dx dy + \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \iint_{\Omega} (u_{tt}^n)^2 dx dy + \\
 &+ D \iint_{\Omega} (\psi_x^n + \varphi_y^n)^2 dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_y^n - \varphi_x^n)^2 dx dy,
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

desse modo, quando integramos (3.46) de 0 a $t < t_n$, obtemos dos dados iniciais que para algum $n \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0, T]$

$$E^n(t) + \alpha \int_0^t \iint_{\Omega} [(\psi_t^n)^2 + (\varphi_t^n)^2] dx dy dt \leq C_1, \tag{3.48}$$

em que C_1 é uma constante positiva que depende da condição inicial. Assim, pelo teorema do prolongamento, em todo o intervalo $[0, T]$ são definidas soluções aproximadas.

• Passo 3: Aplicando o Limite

A partir da definição de $E^n(t)$ e da equação (3.48), podemos concluir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \{u_t^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \{u_{tt}^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \{\psi^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \{\psi_t^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \\ \{\varphi^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \{\varphi_t^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.49}$$

Nestas seqüências podemos extrair subsequências de $\{u^n\}$, $\{\psi^n\}$ e $\{\varphi^n\}$, que iremos continuar denotando da mesma forma $\{u^n\}$, $\{\psi^n\}$ e $\{\varphi^n\}$, tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} u^n \rightarrow u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ u_t^n \rightarrow u_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ u_{tt}^n \rightarrow u_{tt} \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \psi^n \rightarrow \psi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \psi_t^n \rightarrow \psi_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \\ \varphi^n \rightarrow \varphi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \varphi_t^n \rightarrow \varphi_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.50}$$

Como consequência dos limites acima, podemos aplicar o limite no problema aproximado (3.39)-(3.42), e dessa forma, obter uma solução fraca que satisfaz, as seguintes relações de pertencimento

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.51)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.52)$$

$$u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.53)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.54)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \quad (3.55)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.56)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \quad (3.57)$$

dessa forma, concluímos a demonstração do item (i) do teorema.

- Passo 4: Dados Iniciais

Usando o lema de Aubin-Lions [11], temos que

$$u^n \rightarrow u \text{ forte em } C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (3.58)$$

$$u_t^n \rightarrow u_t \text{ forte em } C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (3.59)$$

$$\psi^n \rightarrow \psi \text{ forte em } C([0, T]; L_*^2(\Omega)), \quad (3.60)$$

$$\varphi^n \rightarrow \varphi \text{ forte em } C([0, T]; L_*^2(\Omega)), \quad (3.61)$$

e por consequência

$$(u(0), u_t(0), \psi(0), \varphi(0)) = (u_0, u_1, \psi_0, \varphi_0). \quad (3.62)$$

Ao multiplicarmos (3.40) por uma função teste θ , que satisfaz

$$\theta \in H^1(0, T), \quad \theta(0) = 1, \quad \theta(T) = 0, \quad (3.63)$$

e integrarmos o produto no intervalo $[0, T]$ obtemos

$$\begin{aligned} & -\rho_1 (u_2^n, \eta) - \rho_1 \int_0^T (u_{tt}^n, \eta) \theta_t dt + \\ & + K \int_0^T \frac{d}{dt} (u_x^n + \psi^n, \eta_x) \theta dt + K \int_0^T \frac{d}{dt} (u_y^n + \varphi^n, \eta_y) \theta dt = 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

para todo $\eta \in H_0^1(\Omega)$. Aplicando o limite $n \rightarrow \infty$ temos

$$\begin{aligned} & -\rho_1 (u_2, \eta) - \rho_1 \int_0^T (u_{tt}, \eta) \theta_t dt + \\ & + K \int_0^T \frac{d}{dt} (u_x + \psi, \eta_x) \theta dt + K \int_0^T \frac{d}{dt} (u_y + \varphi, \eta_y) \theta dt = 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

para todo $\eta \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, multiplicando (3.21) pela mesma função teste θ e integrando o resultado sobre $[0, T]$ temos

$$\begin{aligned} & -\rho_1 (u_{tt}(0), \eta) - \rho_1 \int_0^T (u_{tt}, \eta) \theta_t dt + \\ & + K \int_0^T \frac{d}{dt} (u_x + \psi, \eta_x) \theta dt + K \int_0^T \frac{d}{dt} (u_y + \varphi, \eta_y) \theta dt = 0, \end{aligned} \quad (3.66)$$

para todo $\eta \in H_0^1(\Omega)$. De (3.65) e (3.66), podemos concluir que $u_{tt}(0) = u_2$. Analogamente, temos que

$$\psi_t(0) = \psi_1 \text{ e } \varphi_t(0) = \varphi_1.$$

- Passo 5: Solução Forte

Suponha, que os dados iniciais no problema aproximado (3.39)-(3.42) satisfazem a inclusão

$(u_0, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}_1$ e que por outro lado, temos a convergência

$$(u_0^n, u_1^n, u_2^n, \psi_0^n, \psi_1^n, \varphi_0^n, \varphi_1^n) \rightarrow (u_0, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \text{ forte em } \mathcal{H}_1. \quad (3.67)$$

Ao substituir ζ por $-u_{txx}$ em (3.39), η por $-u_{ttxx}$ em (3.40), ν por $-\psi_{txx}$ em (3.41) e ι por $-\varphi_{txx}$ em (3.42), realizamos integrações por partes e operações algébricas similares as do calculo da energia, assim

obtemos

$$\frac{d}{dt}F^n(t) + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_{tx}^n)^2 + (\varphi_{tx}^n)^2] dx dy = 0, \quad (3.68)$$

onde o termo F^n é similar ao da energia com mais uma derivada em relação ao eixo x em cada parcela, ou seja, definido por

$$\begin{aligned} F^n(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_{tx}^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi_x^n + u_{xx}^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi_x^n + u_{yx}^n)^2 dx dy + \\ &+ \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \iint_{\Omega} (u_{ttx}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{txx}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{txy}^n)^2 dx dy + \\ &+ D \iint_{\Omega} (\psi_{xx}^n + \varphi_{xy}^n)^2 dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_{xy}^n - \varphi_{xx}^n)^2 dx dy, \end{aligned} \quad (3.69)$$

logo, de (3.68) concluímos que para todo $t \in [0, T]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade

$$F_n(t) + \alpha \int_0^t \iint_{\Omega} [(\psi_{tx}^n)^2 + (\varphi_{tx}^n)^2] dx dy dt \leq C_2, \quad (3.70)$$

em que C_2 é uma contante positiva dependente dos dados iniciais, entretanto independente de t e n . De modo análogo, se substituirmos ζ por $-u_{tyy}$ em (3.39), η por $-u_{ttyy}$ em (3.40), ν por $-\psi_{tyy}$ em (3.41) e ι por $-\varphi_{tyy}$ em (3.42), e que similarmente ao que foi feito F , realizamos operações análogas ao cálculo da energia e obtemos

$$\frac{d}{dt}G^n(t) + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_{ty}^n)^2 + (\varphi_{ty}^n)^2] dx dy = 0, \quad (3.71)$$

no qual o termo G^n também é similar ao da energia como uma de suas parcelas derivadas em relação ao eixo y , dessa forma definido por

$$\begin{aligned} G^n(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_{ty}^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi_y^n + u_{xy}^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi_y^n + u_{yy}^n)^2 dx dy + \\ &+ \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \iint_{\Omega} (u_{tty}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{txy}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{tyy}^n)^2 dx dy + \\ &+ D \iint_{\Omega} (\psi_{xy}^n + \varphi_{yy}^n)^2 dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_{yy}^n - \varphi_{xy}^n)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Assim, de (3.71) concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, T]$, a desigualdade a seguir é válida

$$G_n(t) + \alpha \int_0^t \iint_{\Omega} [(\psi_{ty}^n)^2 + (\varphi_{ty}^n)^2] dx dy dt \leq C_2. \quad (3.73)$$

Portanto, de (3.70) e (3.73), concluímos que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ \{u_t^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ \{u_{tt}^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \{\psi^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \{\psi_t^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \{\varphi^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \{\varphi_t^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \end{array} \right. \quad (3.74)$$

estas limitações implicam em,

$$\left\{ \begin{array}{l} u^n \rightarrow u \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ u_t^n \rightarrow u_t \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ u_{tt}^n \rightarrow u_{tt} \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \psi^n \rightarrow \psi \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \psi_t^n \rightarrow \psi_t \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \varphi^n \rightarrow \varphi \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \varphi_t^n \rightarrow \varphi_t \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \end{array} \right. \quad (3.75)$$

e destas convergências concluímos que $(u, u_t, u_{tt}, \psi, \psi_t, \varphi, \varphi_t)$ é solução forte e satisfaz

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.76)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.77)$$

$$u_{tt} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.78)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.79)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.80)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.81)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.82)$$

o que demonstra o item (ii) do teorema. Resta-nos demonstrar a dependência contínua das soluções em relação ao fato dos dados iniciais estarem em \mathcal{H} .

• Passo 6: Dependência Contínua

Dadas duas soluções fortes do problema (3.1)-(3.3), $U(t) = (u, u_t, u_{tt}, \psi, \psi_t, \varphi, \varphi_t)$ e $V(t) = (\bar{u}, \bar{u}_t, \bar{u}_{tt}, \bar{\psi}, \bar{\psi}_t, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}_t)$, com dados iniciais $U(0) = (u_0, u_1, u_2, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1)$, $V(0) = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1) \in \mathcal{H}_1$ respectivamente. Assim, a função descrita por $(W, W_t, W_{tt}, \Psi, \Psi_t, \Phi, \Phi_t) = U(t) - V(t)$ satisfaz o sistema de equações

$$\rho_1 W_{tt} - K(\Psi + W_x)_x - K(\Phi + W_y)_y = 0, \quad (3.83)$$

$$-\rho_2 W_{ttx} - D\Psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\Psi_{yy} - D\frac{1+\mu}{2}\Phi_{xy} + K(\Psi + u_x) + \alpha\Psi_t = 0, \quad (3.84)$$

$$-\rho_2 W_{tty} - D\Phi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\Phi_{xx} - D\frac{1+\mu}{2}\Psi_{xy} + K(\Phi + W_y) + \alpha\Phi_t = 0, \quad (3.85)$$

com dados iniciais $(W(0), W_t(0), W_{tt}(0), \Psi(0), \Psi_t(0), \Phi(0), \Phi_t(0)) = U(0) - V(0)$. De modo análogo ao feito na análise de energia, multiplicamos (3.83) por W_t , (3.84) por Ψ_t , (3.85) por Φ_t e integramos no intervalo $(0, L)$

$$\frac{d}{dt}\Sigma(t) = -\alpha \int_{\Omega} [(\Psi_t)^2 + (\Phi_t)^2], \quad (3.86)$$

onde o termo $\Sigma(t)$ é a energia correspondente à $U(t) - V(t)$ definido por

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (W_t)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\Psi + W_x)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\Phi + W_y)^2 dx dy + \\ &+ \frac{\rho_1 \rho_2}{K} \iint_{\Omega} (W_{tt})^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (W_{tx})^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (W_{ty})^2 dx dy + \\ &+ D \iint_{\Omega} (\Psi_x + \Phi_y)^2 dx dy + D\frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\Psi_y - \Phi_x)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Integrando (3.86) sobre $(0, t)$ temos que existe uma constante $C_T > 0$ tal que para algum $t \in [0, T]$,

$$\Sigma(t) \leq C_T \Sigma(0), \quad (3.88)$$

o que nos permite concluir que nas soluções fortes há uma dependência contínua dos dados iniciais. Desse modo, sabemos que a solução forte do problema (3.1)-(3.3) é única. Por outro lado, a dependência contínua e unicidade para soluções fracas podem ser provada usando argumentos de densidade (desde que, soluções

fracas são limites de soluções fortes). Portanto, com a análise acima, nós completamos a demonstração do teorema. ■

3.3 Modelo baseado na Inércia de Inclinação

Similarmente as seções anteriores, trataremos um modelo proposto no primeiro capítulo, acrescido das condições iniciais e de contorno, o modelo em questão consiste no Modelo baseado na Inércia de Rotação (1.20)-(1.22), que neste momento será reescrito através de

$$\rho_1 u_{tt} - \rho_2 u_{ttxx} - \rho_2 u_{ttsy} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (3.89)$$

$$-D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) + \alpha\psi_t = 0, \quad (3.90)$$

$$-D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\mu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) + \alpha\varphi_t = 0, \quad (3.91)$$

$$u(\Gamma_x, t) = \psi_x(\Gamma_x, t) = \varphi(\Gamma_x, t) = u(\Gamma_y, t) = \psi(\Gamma_y, t) = \varphi_y(\Gamma_y, t) = 0, \quad (3.92)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad u_{tt}(x, y, 0) = u_2(x, y), \quad (3.93)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad (3.94)$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad \psi_t(x, y, 0) = \psi_1(x, y). \quad (3.95)$$

Por se tratar de uma representação do modelo já proposto continuaremos considerando as definições de constantes e do domínio, entretanto, novamente acrescentamos os conjuntos que representam os contornos do domínio definidos por $\Gamma_x = \{0, L\} \times [0, L] \subset \mathbb{R}^2$ e $\Gamma_y = [0, L] \times \{0, L\} \subset \mathbb{R}^2$. Seguindo a técnica, primeiramente iremos determinar a equação da energia associada ao problema. Neste capítulo provaremos que esta é decrescente e no próximo capítulo demonstraremos que este decaimento é exponencial.

Teorema 3.4. *O sistema baseada na inércia de rotação, acrescido de suas condições iniciais e de contorno descrito em (3.89)-(3.95) tem energia decrescente com esta energia descrita por*

$$\begin{aligned} E(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_t)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{xt})^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{yt})^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi + u_x)^2 dx dy + \\ &+ K \iint_{\Omega} (\varphi + u_y)^2 dx dy + D \iint_{\Omega} (\psi_x + \varphi_y)^2 dx dy + D\frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_y - \varphi_x)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Prova. A técnica de obtenção da energia é clássica e decorre da multiplicação das equações (3.89), (3.90) e (3.91) por u_t , ψ_t e φ_t respectivamente, após isso, integrar sobre Ω

$$\begin{aligned} & \rho_1 \iint_{\Omega} u_t u_{tt} dx dy - \rho_2 \iint_{\Omega} u_t u_{ttxx} dx dy - \rho_2 \iint_{\Omega} u_t u_{ttsy} dx dy + \\ & -K \iint_{\Omega} u_t (\psi + u_x)_x dx dy - K \iint_{\Omega} u_t (\varphi + u_y)_y dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} & -D \iint_{\Omega} \psi_t \psi_{xx} dx dy - D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \psi_t \psi_{yy} dx dy - D \frac{1+\mu}{2} \iint_{\Omega} \psi_t \varphi_{xy} dx dy + \\ & +K \iint_{\Omega} \psi_t (\psi + u_x) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} (\psi_t)^2 dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} & -D \iint_{\Omega} \varphi_t \varphi_{yy} dx dy - D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_t \varphi_{xx} dx dy - D \frac{1+\mu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_t \psi_{xy} dx dy + \\ & +K \iint_{\Omega} \varphi_t (\varphi + u_y) + \alpha \int_{\Omega} (\varphi_t)^2 dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.99)$$

aplicando a integração por partes sobre a somas dessas funções,

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \iint_{\Omega} u_t u_{tt} dx dy - \int_0^L \rho_2 u_t u_{ttx} \Big|_0^L dy + \rho_2 \iint_{\Omega} u_{tx} u_{ttx} dx dy - \int_0^L \rho_2 u_t u_{tty} \Big|_0^L dx + \\
& + \rho_2 \iint_{\Omega} u_{ty} u_{tty} dx dy - K \int_0^L u_t (\psi + u_x) \Big|_0^L dy + K \iint_{\Omega} u_{tx} (\psi + u_x) dx dy + \\
& - K \int_0^L u_t (\varphi + u_y) \Big|_0^L dx + K \iint_{\Omega} u_{ty} (\varphi + u_y) dx dy - D \int_0^L \psi_t \psi_x \Big|_0^L dy + D \iint_{\Omega} \psi_{tx} \psi_x dx dy + \\
& - D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \psi_t \psi_y \Big|_0^L dx + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \psi_{ty} \psi_y dx dy - D \int_0^L \psi_t \varphi_y \Big|_0^L dy + D \iint_{\Omega} \psi_{tx} \varphi_y dx dy \quad (3.100) \\
& + D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \psi_t \varphi_x \Big|_0^L dx - D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \psi_{ty} \varphi_x dx dy + K \iint_{\Omega} \psi_t (\psi + u_x) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} (\psi_t)^2 dx dy + \\
& - D \int_0^L \varphi_t \varphi_y \Big|_0^L dx + D \iint_{\Omega} \varphi_{ty} \varphi_y dx dy - D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \varphi_t \varphi_x \Big|_0^L dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_{tx} \varphi_x dx dy + \\
& - D \int_0^L \varphi_t \psi_x \Big|_0^L dx + D \iint_{\Omega} \varphi_{ty} \psi_x dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \int_0^L \varphi_t \psi_y \Big|_0^L dy + \\
& - D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} \varphi_{tx} \psi_y dx dy + K \iint_{\Omega} \varphi_t (\varphi + u_y) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} (\varphi_t)^2 dx dy = 0,
\end{aligned}$$

assim, agrupando os termos semelhantes e aplicando as condições de contorno,

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \iint_{\Omega} u_t u_{tt} dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} u_{tx} u_{ttx} dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} u_{ty} u_{tty} dx dy + K \iint_{\Omega} (\psi + u_x)_t (\psi + u_x) dx dy + \\
& + K \iint_{\Omega} (\varphi + u_y)_t (\varphi + u_y) dx dy + D \iint_{\Omega} (\psi_x + \varphi_y)_t (\psi_x + \varphi_y) dx dy \quad (3.101) \\
& + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_y - \varphi_x)_t (\psi_y - \varphi_x) dx dy + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_t)^2 + (\varphi_t)^2] dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, como proposto no teorema, substituindo a energia (3.96) na equação (3.101) temos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha \iint_{\Omega} [(\psi_t)^2 + (\varphi_t)^2] dx dy \leq 0, \quad (3.102)$$

demonstrando o teorema. ■

3.4 Existência e Unicidade de Soluções Para o Modelo baseado na Inércia de Inclinação

De modo similar ao realizado na seção anterior, iniciamos definindo os espaços de fases

$$\mathcal{H} := (H_0^1(\Omega))^2 \times (H_*^1(\Omega) \times L_*^2(\Omega))^2, \quad (3.103)$$

ao mesmo tempo que

$$\mathcal{H}_1 := (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \times (H_*^2(\Omega) \times H_*^1(\Omega))^2, \quad (3.104)$$

em que novamente definimos os conjuntos por

$$H_*^2(\Omega) := H^2(\Omega) \cap H_*^1(\Omega), \quad H_*^1(\Omega) := H^1(\Omega) \cap L_*^2(\Omega), \quad (3.105)$$

enquanto que

$$L_*^2(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \iint_{\Omega} u(x, y) dx dy = 0 \right\}. \quad (3.106)$$

Assim, podemos definir quais são as soluções fracas do sistema (3.89)-(3.95).

Definição 3.5. Dadas as condições iniciais $U_0 = (u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}$, uma função

$U = (u, u_t, \psi, \psi_t, \varphi, \varphi_t) \in C([0, T], \mathcal{H})$ é dita uma solução fraca de (3.89)-(3.95) se para todo $t \in [0, T]$

$$\rho_1 \frac{d}{dt} (u_t, \zeta) + \rho_2 \frac{d}{dt} (u_{tx}, \zeta_x) + \rho_2 \frac{d}{dt} (u_{ty}, \zeta_y) + K (u_x + \psi, \zeta_x) + K (u_y + \varphi, \zeta_y) = 0, \quad (3.107)$$

$$D (\psi_x, \nu_x) + D \frac{1-\nu}{2} (\psi_y, \nu_y) + D \frac{1+\mu}{2} (\varphi_y, \nu_x) + K (\psi + u_x, \nu) + \alpha (\psi_t, \nu) = 0, \quad (3.108)$$

$$D (\varphi_y, \iota_y) + D \frac{1-\nu}{2} (\varphi_x, \iota_x) + D \frac{1+\mu}{2} (\psi_x, \iota_y) + K (\varphi + u_y, \iota) + \alpha (\varphi_t, \iota) = 0, \quad (3.109)$$

para todo, $\zeta \in H_0^1(\Omega)$, $\nu, \iota \in H_*^1(\Omega)$ e $U(0) = U_0$.

Finalmente com esta definição pronta, partiremos ao enunciado do teorema e sua demonstração.

Teorema 3.6. Dados os espaços de fase \mathcal{H} em (3.103) e \mathcal{H}_1 em (3.104) e a condição inicial

$U_0 = (u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}$, temos que:

(i) se a condição inicial $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (3.97)-(3.95) tem uma solução fraca satisfazendo

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.110)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.111)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.112)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \quad (3.113)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.114)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)). \quad (3.115)$$

(ii) se a condição inicial $U_0 \in \mathcal{H}_1$, então o problema (3.97)-(3.95) tem uma única solução forte satisfazendo

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.116)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.117)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.118)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.119)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.120)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)). \quad (3.121)$$

(iii) em ambos os casos, a solução U depende continuamente que os dados iniciais estejam em \mathcal{H} . Em particular, o problema (3.97)-(3.95) tem uma única solução fraca.

Prova. Novamente a demonstração será feita de forma análoga as feitas nos artigos de Ramos et al [13] e de Almeida Júnior et al [3], e portanto está dividida em seis passos.

- Passo 1: Problema Aproximado

Considerando que a condição inicial está no espaço de fases, $U_0 \in \mathcal{H}$. Definimos as bases ortogonais de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $H_*^2(\Omega)$ por $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ e $\{\nu_j\}_{j=1}^\infty$ respectivamente. Para algum natural n , denotamos os subespaços de dimensão finita gerados por n vetores de cada uma destas bases por

$$H_n = \text{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad V_n = \text{span}\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n\}. \quad (3.122)$$

Logo, quando procuramos soluções para o problema aproximado

$$\rho_1 (u_{tt}^n, \zeta) + \rho_2 (u_{ttx}^n, \zeta_x) + \rho_2 (u_{tty}^n, \zeta_y) + K (u_x^n + \psi^n, \zeta_x) + K (u_y^n + \varphi^n, \zeta_y) = 0, \quad (3.123)$$

$$D (\psi_x^n, \nu_x) + D \frac{1-\nu}{2} (\psi_y^n, \nu_y) + D \frac{1+\mu}{2} (\varphi_y^n, \nu_x) + K (\psi^n + u_x^n, \nu) + \alpha (\psi_t^n, \nu) = 0, \quad (3.124)$$

$$D (\varphi_y^n, \iota_y) + D \frac{1-\nu}{2} (\varphi_x^n, \iota_x) + D \frac{1+\mu}{2} (\psi_x^n, \iota_y) + K (\varphi^n + u_y^n, \iota) + \alpha (\varphi_t^n, \iota) = 0, \quad (3.125)$$

para todo $\zeta \in H_n, \nu, \iota \in V_n$ com condições iniciais

$$(u^n(0), u_t^n(0), \psi^n(0), \psi_t^n(0), \varphi^n(0), \varphi_t^n(0)) = (u_0^n, u_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, \varphi_0^n, \varphi_1^n), \quad (3.126)$$

satisfazendo

$$(u_0^n, u_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, \varphi_0^n, \varphi_1^n) \rightarrow (u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \quad (3.127)$$

forte em \mathcal{H} , elas são da forma

$$\begin{aligned} u^n(x, y, t) &= \sum_{j=1}^n a_{j,n} \omega_j(x, y), \\ \psi^n(x, y, t) &= \sum_{j=1}^n b_{j,n} \nu_j(x, y), \\ \varphi^n(x, y, t) &= \sum_{j=1}^n c_{j,n} \nu_j(x, y). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Pelo teorema de Carathéodory, podemos obter uma solução local $(u^n(t), u_t^n(t), \psi^n(t), \psi_t^n(t), \varphi^n(t), \varphi_t^n(t))$, no intervalo $[0, t_n)$ a qual $0 \leq t_n \leq T$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta é dita uma solução aproximada para o problema.

- Passo 2: Uma Estimativa a Priori

Substituindo ζ por u_t^n em (3.123), ν por ψ_t^n em (3.124) e ι por φ_t^n em (3.125) a equação se torna

$$\frac{d}{dt} E^n(t) + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_t^n)^2 + (\varphi_t^n)^2] dx dy = 0, \quad (3.129)$$

onde a energia aproximada é calculada por,

$$\begin{aligned}
E^n(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_t^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{tx}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{ty}^n)^2 dx dy + \\
&+ K \iint_{\Omega} (\psi^n + u_x^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi^n + u_y^n)^2 dx dy + \\
&+ D \iint_{\Omega} (\psi_x^n + \varphi_y^n)^2 dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_y^n - \varphi_x^n)^2 dx dy,
\end{aligned} \tag{3.130}$$

desse modo, quando integramos (3.129) de 0 a $t < t_n$, obtemos dos dados iniciais que para algum $n \in \mathbb{N}$ e para todo $t \in [0, T]$

$$E^n(t) + \alpha \int_0^t \iint_{\Omega} [(\psi_t^n)^2 + (\varphi_t^n)^2] dx dy dt \leq C_1, \tag{3.131}$$

em que C_1 é uma constante positiva que depende da condição inicial. Assim, em todo o intervalo $[0, T]$ são definidas soluções aproximadas.

• Passo 3: Aplicando o Limite

A partir da definição de $E^n(t)$ e da equação (3.131), podemos concluir que

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \{u_t^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \{\psi^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \{\psi_t^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \\ \{\varphi^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \{\varphi_t^n\} \text{ é limitado em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.132}$$

Nestas seqüências podemos extrair subsequências de $\{u^n\}$, $\{\psi^n\}$ e $\{\varphi^n\}$, que iremos continuar denotando da mesma forma $\{u^n\}$, $\{\psi^n\}$ e $\{\varphi^n\}$, tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} u^n \rightarrow u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ u_t^n \rightarrow u_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \psi^n \rightarrow \psi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \psi_t^n \rightarrow \psi_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \\ \varphi^n \rightarrow \varphi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \varphi_t^n \rightarrow \varphi_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.133}$$

Como consequência dos limites acima, podemos aplicar o limite no problema aproximado (3.123)-(3.125), e dessa forma, obter uma solução fraca que satisfaz, as seguintes relações de pertencimento

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.134)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.135)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.136)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \quad (3.137)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.138)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \quad (3.139)$$

dessa forma, concluímos a demonstração do item (i) do teorema.

- Passo 4: Dados Iniciais

Usando o lema de Aubin-Lions [11], temos que

$$u^n \rightarrow u \text{ forte em } C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (3.140)$$

$$\psi^n \rightarrow \psi \text{ forte em } C([0, T]; L_*^2(\Omega)), \quad (3.141)$$

$$\varphi^n \rightarrow \varphi \text{ forte em } C([0, T]; L_*^2(\Omega)), \quad (3.142)$$

e por consequência

$$(u(0), \psi(0), \varphi(0)) = (u_0, \psi_0, \varphi_0). \quad (3.143)$$

Ao multiplicarmos (3.123) por uma função teste θ , que satisfaz

$$\theta \in H^1(0, T), \quad \theta(0) = 1, \quad \theta(T) = 0, \quad (3.144)$$

e integrarmos o produto no intervalo $[0, T]$ obtemos

$$\begin{aligned}
 & -\rho_1 (u_1^n, \eta) - \rho_1 \int_0^T (u_t^n, \eta) \theta_t dt + \rho_2 (u_1^n, \eta_{xx}) + \\
 & + \rho_2 \int_0^T (u_t^n, \eta_{xx}) \theta_t dt + \rho_2 (u_1^n, \eta_{xx}) + \rho_2 \int_0^T (u_t^n, \eta_{xx}) \theta_t dt + \\
 & + K \int_0^T (u_x^n + \psi^n, \eta_x) \theta dt + K \int_0^T (u_y^n + \varphi^n, \eta_y) \theta dt = 0, \tag{3.145}
 \end{aligned}$$

para todo $\eta \in H_0^1(\Omega)$. Aplicando o limite $n \rightarrow \infty$ temos

$$\begin{aligned}
 & -\rho_1 (u_1, \eta) - \rho_1 \int_0^T (u_t, \eta) \theta_t dt + \rho_2 (u_1, \eta_{xx}) + \\
 & + \rho_2 \int_0^T (u_t, \eta_{xx}) \theta_t dt + \rho_2 (u_1, \eta_{xx}) + \rho_2 \int_0^T (u_t, \eta_{xx}) \theta_t dt + \\
 & + K \int_0^T (u_x + \psi, \eta_x) \theta dt + K \int_0^T (u_y + \varphi, \eta_y) \theta dt = 0, \tag{3.146}
 \end{aligned}$$

para todo $\eta \in H_0^1(\Omega)$. Por outro lado, multiplicando (3.21) pela mesma função teste θ e integrando o resultado sobre $[0, T]$ temos

$$\begin{aligned}
 & -\rho_1 (u_t(0), \eta) - \rho_1 \int_0^T (u_t, \eta) \theta_t dt + \rho_2 (u_t(0), \eta_{xx}) + \\
 & + \rho_2 \int_0^T (u_t, \eta_{xx}) \theta_t dt + \rho_2 (u_t(0), \eta_{xx}) + \rho_2 \int_0^T (u_t, \eta_{xx}) \theta_t dt + \\
 & + K \int_0^T (u_x + \psi, \eta_x) \theta dt + K \int_0^T (u_y + \varphi, \eta_y) \theta dt = 0, \tag{3.147}
 \end{aligned}$$

para todo $\eta \in H_0^1(\Omega)$. De (3.146) e (3.147), podemos concluir que $u_t(0) = u_1$. Analogamente, temos que

$$\psi_t(0) = \psi_1 \text{ e } \varphi_t(0) = \varphi_1.$$

- Passo 5: Solução Forte

Suponha, que os dados iniciais no problema aproximado (3.123)-(3.125) satisfazem a inclusão $(u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}_1$ e que por outro lado, temos a convergência

$$(u_0^n, u_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n, \varphi_0^n, \varphi_1^n) \rightarrow (u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \text{ forte em } \mathcal{H}_1. \quad (3.148)$$

Ao substituir ζ por $-u_{txx}$ em (3.107), ν por $-\psi_{txx}$ em (3.108) e ι por $-\varphi_{txx}$ em (3.109) e analogamente ao cálculo da energia, podemos agrupar algebricamente os termos e obtermos

$$\frac{d}{dt} F^n(t) + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_{tx}^n)^2 + (\varphi_{tx}^n)^2] dx dy = 0, \quad (3.149)$$

onde o termo F^n é similar ao da energia, novamente com mais uma derivada em relação ao tempo em suas parcelas. Ou seja, definido por

$$\begin{aligned} F^n(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_{tx}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{txx}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{txy}^n)^2 dx dy + \\ &+ K \iint_{\Omega} (\psi_x^n + u_{xx}^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi_x^n + u_{yx}^n)^2 dx dy + \\ &+ D \iint_{\Omega} (\psi_{xx}^n + \varphi_{xy}^n)^2 dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_{xy}^n - \varphi_{xx}^n)^2 dx dy. \end{aligned} \quad (3.150)$$

De (3.149) concluímos que para todo $t \in [0, T]$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade

$$F_n(t) + \alpha \int_0^t \iint_{\Omega} [(\psi_{tx}^n)^2 + (\varphi_{tx}^n)^2] dx dy dt \leq C_2, \quad (3.151)$$

em que C_2 é uma contante positiva dependente dos dados iniciais, entretanto independente de t e n . De modo análogo, se substituirmos ζ por $-u_{tyy}$ em (3.107), ν por $-\psi_{tyy}$ em (3.108) e ι por $-\varphi_{tyy}$ em (3.109), e realizando novamente operações similares ao cálculo da energia, concluímos que

$$\frac{d}{dt} G^n(t) + \alpha \iint_{\Omega} [(\psi_{ty}^n)^2 + (\varphi_{ty}^n)^2] dx dy = 0, \quad (3.152)$$

no qual o termo G^n também é similar ao da energia como uma de sua parcelas derivadas em relação a variável y , dessa forma definido por

$$\begin{aligned}
 G^n(t) &= \rho_1 \iint_{\Omega} (u_{ty}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{txy}^n)^2 dx dy + \rho_2 \iint_{\Omega} (u_{tyy}^n)^2 dx dy + \\
 &+ K \iint_{\Omega} (\psi_y^n + u_{xy}^n)^2 dx dy + K \iint_{\Omega} (\varphi_y^n + u_{yy}^n)^2 dx dy + \\
 &+ D \iint_{\Omega} (\psi_{xy}^n + \varphi_{yy}^n)^2 dx dy + D \frac{1-\nu}{2} \iint_{\Omega} (\psi_{yy}^n - \varphi_{xy}^n)^2 dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

Logo, de (3.152) concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, T]$, a desigualdade a seguir é válida

$$G_n(t) + \alpha \int_0^t \int_{\Omega} [(\psi_{ty}^n)^2 + (\varphi_{ty}^n)^2] dt \leq C_2. \tag{3.154}$$

Portanto, de (3.151) e (3.154), concluímos que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{u^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ \{u_t^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ \{\psi^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \{\psi_t^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \{\varphi^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \{\varphi_t^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \end{array} \right. \tag{3.155}$$

estas limitações implicam em,

$$\left\{ \begin{array}{l} u^n \rightarrow u \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ u_t^n \rightarrow u_t \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \\ \psi^n \rightarrow \psi \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \psi_t^n \rightarrow \psi_t \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \\ \varphi^n \rightarrow \varphi \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \\ \varphi_t^n \rightarrow \varphi_t \text{ fraca estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \end{array} \right. \tag{3.156}$$

e destas convergências concluímos que $(u, u_t, \psi, \psi_t, \varphi, \varphi_t)$ é solução forte e satisfaz

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.157)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.158)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.159)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.160)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.161)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.162)$$

o que demonstra o item (ii) do teorema. Resta-nos demonstrar a dependência contínua das soluções em relação ao fato dos dados iniciais estarem em \mathcal{H} .

• Passo 6: Dependência Contínua

Dadas duas soluções fortes do problema (3.89)-(3.91), $U(t) = (u, u_t, \psi, \psi_t, \varphi, \varphi_t)$ e

$V(t) = (\bar{u}, \bar{u}_t, \bar{\psi}, \bar{\psi}_t, \bar{\varphi}, \bar{\varphi}_t)$, com dados iniciais $U(0) = (u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1)$,

$V(0) = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1) \in \mathcal{H}_1$ respectivamente. Assim, a função descrita por

$(W, W_t, \Psi, \Psi_t, \Phi, \Phi_t) = U(t) - V(t)$ satisfaz o sistema de equações

$$\rho_1 W_{tt} - \rho_1 W_{ttxx} - \rho_1 W_{ttyy} - K(\Psi + W_x)_x - K(\Phi + W_y)_y = 0, \quad (3.163)$$

$$-D\Psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\Psi_{yy} - D\frac{1+\mu}{2}\Phi_{xy} + K(\Psi + u_x) + \alpha\Psi_t = 0, \quad (3.164)$$

$$-D\Phi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\Phi_{xx} - D\frac{1+\mu}{2}\Psi_{xy} + K(\Phi + W_y) + \alpha\Phi_t = 0, \quad (3.165)$$

com dados iniciais $(W(0), W_t(0), \Psi(0), \Psi_t(0), \Phi(0), \Phi_t(0)) = U(0) - V(0)$. De modo análogo ao feito na análise de energia, multiplicamos (3.163) por W_t , (3.164) por Ψ_t , (3.165) por Φ_t e integramos no intervalo $(0, L)$

$$\frac{d}{dt}\Sigma(t) = -\alpha \iint_{\Omega} [(\Psi_t)^2 + (\Phi_t)^2] dx dy, \quad (3.166)$$

onde o termo $\Sigma(t)$ é a energia correspondente à $U(t) - V(t)$ definido por

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \rho_1 \int_{\Omega} (W_t)^2 + \rho_2 \int_{\Omega} (W_{tx})^2 + \rho_2 \int_{\Omega} (W_{ty})^2 + K \int_{\Omega} (\Psi + W_x)^2 + \\ &+ K \int_{\Omega} (\Phi + W_y)^2 + D \int_{\Omega} (\Psi_x + \Phi_y)^2 + D\frac{1-\nu}{2} \int_{\Omega} (\Psi_y - \Phi_x)^2. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Integrando (3.166) sobre $(0, t)$ temos que existe uma constante $C_T > 0$ tal que para algum $t \in [0, T]$,

$$\Sigma(t) \leq C_T \Sigma(0), \quad (3.168)$$

o que nos permite concluir que nas soluções fortes há uma dependência contínua dos dados iniciais. Desse modo, sabemos que a solução forte do problema (3.89)-(3.91) é única. Por outro lado, a dependência contínua e unicidade para soluções fracas podem ser provada usando argumentos de densidade (desde que, soluções fracas são limites de soluções fortes). Portanto, com a análise acima, nós completamos a demonstração do teorema. ■

3.5 Modelo de Corte

Similarmente as seções anteriores, trataremos um modelo proposto no primeiro capítulo, acrescido das condições iniciais e de contorno, o modelo em questão consiste no Modelo de Corte (2.36)-(2.38), que neste momento será reescrito através de

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (3.169)$$

$$-D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) + \alpha\psi_t = 0, \quad (3.170)$$

$$-D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\mu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) + \alpha\varphi_t = 0, \quad (3.171)$$

$$u(\Gamma_x, t) = \psi_x(\Gamma_x, t) = \varphi(\Gamma_x, t) = u(\Gamma_y, t) = \psi(\Gamma_y, t) = \varphi_y(\Gamma_y, t) = 0, \quad (3.172)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad u_{tt}(x, y, 0) = u_2(x, y), \quad (3.173)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad (3.174)$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad \psi_t(x, y, 0) = \psi_1(x, y). \quad (3.175)$$

Considerando os mesmos espaços de fase (3.103) e (3.104), podemos definir o que são soluções fracas para este problema.

Definição 3.7. Dadas as condições iniciais $U_0 = (u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}$, uma função

$U = (u, u_t, \psi, \psi_t, \varphi, \varphi_t) \in C([0, T], \mathcal{H})$ é dita uma solução fraca de (3.169)-(3.175) se para todo $t \in [0, T]$

$$\rho_1 \frac{d}{dt} (u_t, \zeta) + K(u_x + \psi, \zeta_x) + K(u_y + \varphi, \zeta_y) = 0, \quad (3.176)$$

$$D(\psi_x, \nu_x) + D \frac{1-\nu}{2} (\psi_y, \nu_y) + D \frac{1+\mu}{2} (\varphi_y, \nu_x) + K(\psi + u_x, \nu) + \alpha(\psi_t, \nu) = 0, \quad (3.177)$$

$$D(\varphi_y, \iota_y) + D \frac{1-\nu}{2} (\varphi_x, \iota_x) + D \frac{1+\mu}{2} (\psi_x, \iota_y) + K(\varphi + u_y, \iota) + \alpha(\varphi_t, \iota) = 0, \quad (3.178)$$

para todo, $\zeta \in H_0^1(\Omega)$, $\nu, \iota \in H_*^1(\Omega)$ e $U(0) = U_0$.

Finalmente com esta definição pronta, partiremos ao enunciado do teorema.

Teorema 3.8. Dados os espaços de fase \mathcal{H} em (3.103) e \mathcal{H}_1 em (3.104) e a condição inicial

$U_0 = (u_0, u_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{H}$, temos que:

(i) se a condição inicial $U_0 \in \mathcal{H}$, então o problema (3.169)-(3.175) tem uma solução fraca satisfazendo

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.179)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.180)$$

$$\psi \in L^\infty l(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.181)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)), \quad (3.182)$$

$$\varphi \in L^\infty l(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.183)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; L_*^2(\Omega)). \quad (3.184)$$

(ii) se a condição inicial $U_0 \in \mathcal{H}_1$, então o problema (3.169)-(3.175) tem uma única solução forte satisfazendo

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.185)$$

$$u_t \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad (3.186)$$

$$\psi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.187)$$

$$\psi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)), \quad (3.188)$$

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_*^2(\Omega)), \quad (3.189)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_*^1(\Omega)). \quad (3.190)$$

(iii) *em ambos os casos, a solução U depende continuamente que os dados iniciais estejam em \mathcal{H} . Em particular, o problema (3.169)-(3.175) tem uma única solução fraca.*

Observe que na análise do Modelo baseado na Inércia da Rotação, os termos $-\rho_2 u_{ttxx}$ e $-\rho_2 u_{ttyy}$ não desempenham papel crucial e sua ausência não altera de forma significativa a demonstração. Estes termos são o diferencial entre o referido modelo (3.89)-(3.95) e o modelo denominado Modelo de Corte (3.169)-(3.175), dessa forma, podemos afirmar que a demonstração da Boa-Colocação deste segundo é análoga a demonstração feita no teorema anterior.

Decaimento Exponencial das Soluções

Após demonstrar a boa colocação do sistema, ainda resta uma propriedade importante a ser provada, o decaimento exponencial da solução do problema, para isto, faremos uma análise baseada na ideia de R. Quintanilla [12], aplicando o teorema de Hurwitz [5].

Teorema 4.1 (Teorema de Hurwitz). *A condição necessária e suficiente para os zeros do polinômio com coeficientes reais*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad (a_0 > 0)$$

ter toda a sua parte real negativa, é que os determinantes

$$\Delta_0 = a_0, \Delta_1 = a_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$$

são todos positivos, para $\lambda > 1$,

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2\lambda-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2\lambda-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_\lambda \end{vmatrix}, \quad (a_k = 0 \text{ se } k > n).$$

Demonstraremos o decaimento exponencial da solução do sistema de equações de Uflyand-Mindlin em sua forma clássica e na forma simplificada, concluiremos que a formulação clássica necessita da igualdade de velocidades para garantir o decaimento exponencial, mesmo resultado obtido por Campelo [4] quando fez a análise via método de energia e semigrupos. Por outro lado, o sistema simplificado obtém o referido decaimento sem nenhuma relação de velocidades.

4.1 Uflyand-Mindlin com Dampings

Nesta primeira seção trataremos o modelo clássico de Uflyand-Mindlin. Para esta análise, consideramos que as funções do sistema podem ser reescritas pelas seguintes funções harmônicas

$$u(x, y, t) = A_1 e^{\omega t} \sin(\eta_x x) \sin(\eta_y y), \quad (4.1)$$

$$\psi(x, y, t) = A_2 e^{\omega t} \cos(\eta_x x) \sin(\eta_y y), \quad (4.2)$$

$$\varphi(x, y, t) = A_3 e^{\omega t} \sin(\eta_x x) \cos(\eta_y y), \quad (4.3)$$

dessa forma, o teorema a seguir demonstra o decaimento exponencial do referido sistema.

Teorema 4.2. *O sistema Clássico de Uflyand-Mindlin dado por (2.44)-(2.46) tem o decaimento exponencial, decorrente de que sua soluções no formato de (4.1)-(4.3) estão a esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$, para ϵ suficientemente pequeno e a igualdade de velocidades $\frac{K}{\rho_1} = \frac{D}{\rho_2}$.*

Prova. Substituindo (4.1)-(4.3) no sistema (2.44)-(2.46), o torna

$$A_1[\rho_1 \omega^2 + K(\eta_x^2 + \eta_y^2)] + A_2[K\eta_x] + A_3[K\eta_y] = 0, \quad (4.4)$$

$$A_1[K\eta_x] + A_2[\rho_2 \omega^2 + D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_y^2 + K + \alpha\omega] + A_3[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x \eta_y] = 0, \quad (4.5)$$

$$A_1[K\eta_y] + A_2[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x \eta_y] + A_3[\rho_2 \omega^2 + D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_x^2 + K + \alpha\omega] = 0, \quad (4.6)$$

assim, fazendo os devidos cálculos e simplificações obtemos

$$\omega^6 + C_5\omega^5 + C_4\omega^4 + C_3\omega^3 + C_2\omega^2 + C_1\omega + C_0 = 0, \quad (4.7)$$

em que os coeficientes C_5, C_4, C_3, C_2, C_1 e C_0 representam

$$C_5 = 2d,$$

$$C_4 = 2v_2\eta^2 - v_2r\eta^2 + 2m + d^2 + v_1\eta^2,$$

$$C_3 = 2v_2d\eta^2 - v_2dr\eta^2 + 2dm + 2v_1d\eta^2,$$

$$C_2 = v_2^2\eta^4 - v_2^2r\eta^4 + 2v_2m\eta^2 - v_2mr\eta^2 + m^2 + 2v_1v_2\eta^4 - v_1v_2r\eta^4 + v_1m\eta^2 + v_1d^2\eta^2,$$

$$C_1 = 2v_1v_2d\eta^4 - v_1v_2dr\eta^4 + v_1dm\eta^2,$$

$$C_0 = v_1v_2^2\eta^6 - v_1v_2^2r\eta^6 + v_1v_2m\eta^4,$$

onde $v_1 = \frac{K}{\rho_1}$, $v_2 = \frac{D}{\rho_2}$, $m = \frac{K}{\rho_2}$, $\eta^2 = (\eta_x^2 + \eta_y^2)$, $r = \frac{1+\mu}{2}$ e $d = \frac{\alpha}{\rho_2}$. Entretanto, para utilizarmos o critério de Routh-Hurwitz, devemos substituir ω por $x - \epsilon$, dessa forma nossa equação se torna

$$L_6x^6 + L_5x^5 + L_4x^4 + L_3x^3 + L_2x^2 + L_1x + L_0 = 0, \quad (4.8)$$

considerando, para facilitar a escrita, $L_6, L_5, L_4, L_3, L_2, L_1$ e L_0 como

$$L_6 = 1,$$

$$L_5 = C_5 - 6\epsilon,$$

$$L_4 = C_4 - 5C_5\epsilon + 15\epsilon^2,$$

$$L_3 = C_3 - 4C_4\epsilon + 10C_5\epsilon^2 - 20\epsilon^3,$$

$$L_2 = C_2 - 3C_3\epsilon + 6C_4\epsilon^2 - 10C_5\epsilon^3 + 15\epsilon^4,$$

$$L_1 = C_1 - 2C_2\epsilon + 3C_3\epsilon^2 - 4C_4\epsilon^3 + 5C_5\epsilon^4 - 6\epsilon^5,$$

$$L_0 = C_0 - C_1\epsilon + C_2\epsilon^2 - C_3\epsilon^3 + C_4\epsilon^4 - C_5\epsilon^5 + \epsilon^6.$$

Para esta técnica, nos resta provar a positividade de $\Lambda_6, \Lambda_5, \Lambda_4, \Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1$ e Λ_0 . Iniciando pela análise de Λ_0 e sabendo que $\Lambda_0 = L_0$ temos

$$\Lambda_0 = R_{0,6}\eta^6 + R_{0,4}\eta^4 + R_{0,2}\eta^2 + R_{0,0}, \quad (4.9)$$

com $R_{0,6} = v_1v_2^2(1-r) > 0$, ou seja, se considerarmos η suficientemente grande garantimos a positividade de Λ_0 . A análise seguinte será a de Λ_1 , desde que

$$\Lambda_1 = L_1 = R_{1,4}\eta^4 + R_{1,2}\eta^2 + R_{1,0}, \quad (4.10)$$

onde $R_{1,4} = v_1v_2d(1-r) - 2(v_2^2(1-r) + v_1v_2(2-r))\epsilon$, basta escolhermos η grande e ϵ pequeno para garantir que $\Lambda_1 > 0$. Assim sendo, trataremos agora do termo Λ_2 , este termo é calculado por

$$\Lambda_2 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 \\ L_0 & L_2 \end{bmatrix} = L_1L_2 - L_0L_3, \quad (4.11)$$

uma vez que, $\Lambda_2 = R_{2,8}\eta^8 + R_{2,6}\eta^6 + R_{2,4}\eta^4 + R_{2,2}\eta^2 + R_{2,0}$, já que

$$R_{2,8} = v_1^2v_2^2d(2-2r+r^2) - 2[(v_1^2 - v_2^2)(1-r)^2 - v_1^2]\epsilon,$$

logo, para que $\Lambda_2 > 0$, definimos η suficientemente grande e ϵ suficientemente pequeno. Seguindo a ordem dos indicies, vamos para o calculo de Λ_3 , este termo é determinado por

$$\Lambda_3 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & L_5 \\ L_0 & L_2 & L_4 \\ 0 & L_1 & L_3 \end{bmatrix} = L_1L_2L_3 + L_0L_1L_5 - L_1^2L_4 - L_0L_3^2, \quad (4.12)$$

o que o torna, $\Lambda_3 = R_{3,10}\eta^{10} + R_{3,8}\eta^8 + R_{3,6}\eta^6 + R_{3,4}\eta^4 + R_{3,2}\eta^2 + R_{3,0}$, com

$$\begin{aligned} R_{3,10} &= v_1^3v_2^2d^2r^2 + [v_2^5(r-2)(r-1)^2 - 2v_1v_2^4(r-1)(r^2-2r+2) + \\ &+ v_1^2v_2^3(r-2)(r^2-r+1) - 2v_1^3v_2^2r^2] (2d\epsilon - 4\epsilon^2), \end{aligned} \quad (4.13)$$

portanto, para ϵ suficientemente pequeno e η suficientemente grande temos a positividade de Λ_3 . Considerando agora o termo Λ_4 , desde que este termo pode ser determinado por

$$\Lambda_4 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & L_5 & 0 \\ L_0 & L_2 & L_4 & L_6 \\ 0 & L_1 & L_3 & L_5 \\ 0 & L_0 & L_1 & L_4 \end{bmatrix} = \begin{aligned} &L_1 L_2 L_3 L_4 + L_0 L_1 L_4 L_5 + L_1^2 L_2 L_6 \\ &+ L_0 L_2 L_3 L_5 + L_0 L_1 L_4 L_5 - L_1 L_2^2 L_5 \\ &- L_1^2 L_4^2 - L_0 L_1 L_3 L_6 - L_0 L_3^2 L_4 - L_0^2 L_5^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e dessa forma $\Lambda_4 = R_{4,12}\eta^{12} + R_{4,10}\eta^{10} + R_{4,8}\eta^8 + R_{4,6}\eta^6 + R_{4,4}\eta^4 + R_{4,2}\eta^2 + R_{4,0}$, onde

$$\begin{aligned} R_{4,12} &= v_1^4 v_2^2 d^2 r^2 + [v_2^6 (r^2 - 2r + 2)(r - 1)^2 - 2v_1 v_2^5 (r - 2)(r - 1)(r^2 - r + 1) + \\ &+ v_1^2 v_2^4 (r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 2) + v_1^4 v_2^2 r^2] (-2d\epsilon + 4\epsilon^2) - 2v_1^4 v_2^2 d r^2 \epsilon, \end{aligned} \quad (4.15)$$

então, escolhendo ϵ e η adequados, temos que $R_{4,12} > 0$. Quando analisamos Λ_5 que é dado por

$$\Lambda_5 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & L_5 & 0 & 0 \\ L_0 & L_2 & L_4 & L_6 & 0 \\ 0 & L_1 & L_3 & L_5 & 0 \\ 0 & L_0 & L_1 & L_4 & L_6 \\ 0 & 0 & L_0 & L_3 & L_5 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

temos que, $\Lambda_5 = R_{5,12}\eta^{12} + R_{5,10}\eta^{10} + R_{5,8}\eta^8 + R_{5,6}\eta^6 + R_{5,4}\eta^4 + R_{5,2}\eta^2 + R_{5,0}$, aonde podemos observar que, $R_{5,12} = -2v_2^2 (v_1 - v_2)^2 (rv_2 + v_1 - v_2)^2 (d - 2\epsilon)^2 r^2 \epsilon$, e este coeficiente ou é negativo ou é nulo. Para nosso propósito, este termo não pode ser negativo, ou seja, precisamos que este se anule. Para que este coeficiente seja nulo necessitamos que $v_1 = v_2$. Dessa forma, para garantir a positividade de Λ_5 devemos observar $R_{5,10}$, que é definido através de

$$R_{5,10} = v_1 v_2^2 [v_2 (r - 1) + v_1]^2 d^3 m r^2 + O(\epsilon^5), \quad (4.17)$$

observe que devido aos expoentes, este termo é positivo para ϵ suficientemente pequeno, o que implica na positividade de Λ_5 . Por ultimo, analisaremos o termo Λ_6 dado por

$$\Lambda_6 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & L_5 & 0 & 0 & 0 \\ L_0 & L_2 & L_4 & L_6 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & L_3 & L_5 & 0 & 0 \\ 0 & L_0 & L_1 & L_4 & L_6 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & L_3 & L_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 & L_4 & L_6 \end{bmatrix} = L_6 \Lambda_5 = \Lambda_5. \quad (4.18)$$

Desde que já provamos que Λ_5 é positivo concluímos que Λ_6 também é positivo. Demonstradas as positivities de todos os lambdas concluímos que a solução do problema decai exponencialmente, quando satisfazemos a igualdade de velocidades $v_1 = v_2$. Realizando dessa forma, a demonstração do teorema. ■

4.2 Uflyand-Mindlin Simplificado

De modo análogo ao que foi feito na primeira seção deste capítulo, nesta seção aplicaremos o critério de Routh-Hurwitz ao sistema de Uflyand-Mindlin simplificado similar a (2.16)-(2.18), entretanto acrescido de dampings da seguinte maneira.

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (4.19)$$

$$-\rho_2 u_{ttx} - D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) + \alpha\psi_t = 0, \quad (4.20)$$

$$-\rho_2 u_{tty} - D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\nu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) + \alpha\varphi_t = 0, \quad (4.21)$$

Para este problema, podemos enunciar e provar o seguinte teorema.

Teorema 4.3. *Para ϵ suficientemente pequeno e sem nenhuma igualdade de velocidades, o sistema Uflyand-Mindlin simplificado, descrito em (4.19)-(4.21) acrescido de dampings do tipo atrito tem suas soluções no formato de (4.1)-(4.3) a esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$ implicando em seu decaimento exponencial.*

Prova. Dessa forma, iniciamos substituindo as funções constituintes do sistema (4.19)-(4.21) pelas funções harmônicas (4.1)-(4.3), nesse sentido nosso sistema se torna

$$A_1[\rho_1\omega^2 + K(\eta_x^2 + \eta_y^2)] + A_2[K\eta_x] + A_3[K\eta_y] = 0, \quad (4.22)$$

$$A_1[-\rho_2\eta_x\omega^2 + K\eta_x] + A_2[D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_y^2 + K + \alpha\omega] + A_3[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x\eta_y] = 0, \quad (4.23)$$

$$A_1[-\rho_2\eta_y\omega^2 + K\eta_y] + A_2[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x\eta_y] + A_3[D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_x^2 + K + \alpha\omega] = 0, \quad (4.24)$$

de onde concluímos que após algumas manipulações algébricas pode ser escrito como

$$C_4\omega^4 + C_3\omega^3 + C_2\omega^2 + C_1\omega + C_0 = 0, \quad (4.25)$$

onde os coeficientes C_0, C_1, C_2, C_3 e C_4 representam

$$C_4 = d^2,$$

$$C_3 = 2v_2d\eta^2 - v_2dr\eta^2 + 2dm + v_1d\eta^2,$$

$$C_2 = v_2^2\eta^4 - v_2^2r\eta^4 + 2v_2m\eta^2 - v_2mr\eta^2 + m^2 + v_1v_2\eta^4 - v_1v_2r\eta^4 + v_1m\eta^2 + v_1d^2\eta^2,$$

$$C_1 = 2v_1v_2d\eta^4 - v_1v_2dr\eta^4 + v_1dm\eta^2,$$

$$C_0 = v_1v_2^2\eta^6 - v_1v_2^2r\eta^6 + v_1v_2m\eta^4,$$

em que denotamos por $v_1 = \frac{K}{\rho_1}$, $v_2 = \frac{D}{\rho_2}$, $m = \frac{K}{\rho_2}$, $\eta^2 = (\eta_x^2 + \eta_y^2)$, $r = \frac{1+\mu}{2}$ e $d = \frac{\alpha}{\rho_2}$. Neste ponto, para usarmos o critério de Routh-Hurwitz, devemos considerar $\omega = x - \epsilon$, dessa forma o problema passa a ser escrito por

$$L_4x^4 + L_3x^3 + L_2x^2 + L_1x + L_0 = 0, \quad (4.26)$$

colocado dessa forma afim de simplificar a escrita, em que L_4, L_3, L_2, L_1 e L_0 estão representando

$$L_4 = C_4,$$

$$L_3 = C_3 - 4C_4\epsilon,$$

$$L_2 = C_2 - 3C_3\epsilon + 6C_4\epsilon^2,$$

$$L_1 = C_1 - 2C_2\epsilon + 3C_3\epsilon^2 - 4C_4\epsilon^3,$$

$$L_0 = C_0 - C_1\epsilon + C_2\epsilon^2 - C_3\epsilon^3 + C_4\epsilon^4,$$

a próxima etapa desta técnica consiste em provar a positividade de $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ e Λ_4 . Novamente, iniciamos analisando Λ_0 que é dado por $\Lambda_0 = L_0$, em vista disso, este pode ser escrito como

$$\Lambda_0 = R_{0,6}\eta^6 + R_{0,4}\eta^4 + R_{0,2}\eta^2 + R_{0,0} \quad (4.27)$$

desde que $R_{0,6} = v_1v_2^2(1-r)$, podemos garantir a positividade de Λ_0 , para isso é suficiente escolhermos η grande. O próximo passo consiste em analisar Λ_1 que representa $\Lambda_1 = L_1$, com efeito

$$\Lambda_1 = R_{1,4}\eta^4 + R_{1,2}\eta^2 + R_{1,0} \quad (4.28)$$

levando em consideração que $R_{1,4} = v_1v_2d(2-r) - 2[v_2^2(1-r) + v_1v_2\eta^4] \epsilon$ podemos concluir a positividade de Λ_1 se considerarmos ϵ suficientemente pequeno e η suficientemente grande. O passo seguinte consiste em analisar Λ_2 que é calculado por

$$\Lambda_2 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 \\ L_0 & L_2 \end{bmatrix} = L_1L_2 - L_0L_3, \quad (4.29)$$

nesse sentido temos que $\Lambda_2 = R_{2,8}\eta^8 + R_{2,6}\eta^6 + R_{2,4}\eta^4 + R_{2,2}\eta^2 + R_{2,0}$, considerando o fato de $R_{2,8} = v_1^2v_2^2d(1-r)^2 - 2(v_1+v_2)^2v_2^2(r-1)^2\epsilon$, para η suficientemente grande e ϵ suficientemente pequeno temos que $\Lambda_2 > 0$. Seguindo novamente a ordem nos indicies, a seguir analisamos Λ_3 que é determinado por

$$\Lambda_3 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & 0 \\ L_0 & L_2 & L_4 \\ 0 & L_1 & L_3 \end{bmatrix} = L_1L_2L_3 - L_1^2L_4 - L_0L_3^2, \quad (4.30)$$

assim sendo, $\Lambda_3 = R_{3,10}\eta^{10} + R_{3,8}\eta^8 + R_{3,6}\eta^6 + R_{3,4}\eta^4 + R_{3,2}\eta^2 + R_{3,0}$ onde $R_{3,10} = v_1^2v_2^2[v_1+v_2(2-r)]d^2 + 2v_2^2(v_1+v_2)^2[v_2(2-r)-v_1]d(1-r)^2\epsilon$ e portanto $\Lambda_3 > 0$ quando escolhemos ϵ suficientemente pequeno e η suficientemente grande. Por fim, analisamos Λ_4 que é definido como

$$\Lambda_4 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 & 0 & 0 \\ L_0 & L_2 & L_4 & 0 \\ 0 & L_1 & L_3 & 0 \\ 0 & L_0 & L_1 & L_4 \end{bmatrix} = L_4\Lambda_3 = d^2\Lambda_3, \quad (4.31)$$

assim quando garantimos a positividade de Λ_3 automaticamente garantimos a positividade de Λ_4 . Portanto desde que provamos que $\Lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$, sem a necessidade de nenhum critério, então o sistema tem decrescimento na forma exponencial de modo incondicional. ■

4.3 Modelo Baseado na Inércia de Inclinação

Nesta seção aplicaremos o critério de Routh-Hurwitz ao Modelo Baseado na Inércia de Inclinação (2.26)-(2.28), acrescido de dampings do tipo atrito, de modo similar ao que foi feito nas duas primeiras seções, entretanto neste caso o resultado foi inconclusivo, pois algumas positivities da técnica não são garantidas, ou seja, através desse critério não temos como garantir o decaimento é exponencial, entretanto isso não implica o contrário, ou seja, o decaimento exponencial pode ou não ocorrer. O sistema ser trabalhado nesta seção é dado por,

$$\rho_1 u_{tt} - \rho_2 u_{ttxx} - \rho_2 u_{ttsy} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (4.32)$$

$$-D\psi_{xx} - D\frac{1-\mu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) + \alpha\psi_t = 0, \quad (4.33)$$

$$-D\varphi_{yy} - D\frac{1-\mu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\mu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) + \alpha\varphi_t = 0, \quad (4.34)$$

Como definido pela técnica, iniciamos substituindo as funções harmônicas (4.1)-(4.3) no lugar das funções constituintes do sistema (4.32)-(4.34)

$$A_1[\rho_1\omega^2 + \rho_2(\eta_x^2 + \eta_y^2)\omega^2 + K(\eta_x^2 + \eta_y^2)] + A_2[K\eta_x] + A_3[K\eta_y] = 0, \quad (4.35)$$

$$A_1[K\eta_x] + A_2[D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_y^2 + K + \alpha\omega] + A_3[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x\eta_y] = 0, \quad (4.36)$$

$$A_1[K\eta_y] + A_2[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x\eta_y] + A_3[D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_x^2 + K + \alpha\omega] = 0, \quad (4.37)$$

assim, após algumas manipulações algébricas o sistema pode ser escrito como

$$C_4\omega^4 + C_3\omega^3 + C_2\omega^2 + C_1\omega + C_0 = 0, \quad (4.38)$$

onde os coeficientes C_0, C_1, C_2, C_3 e C_4 representam

$$C_4 = d_2^2 + d_1d_2\eta^2,$$

$$C_3 = v_2d_2(2-r)\eta^2 + 2d_2m_2 + v_2d_1(2-r)\eta^4 + 2v_1d_2\eta^2,$$

$$C_2 = v_2^2(1-r)\eta^4 + v_2(2-r)m\eta^2 + m_2^2 + v_2m_1(1-r)\eta^6 + v_1v_2(2-r)\eta^4 + v_1m_2\eta^2 + v_1d_2^2\eta^2,$$

$$C_1 = v_1v_2d_2(2-r)\eta^4 + v_1d_2m_2\eta^2,$$

$$C_0 = v_1v_2^2(1-r)\eta^6 + v_1v_2m_2\eta^4,$$

em que denotamos por $v_1 = \frac{K}{\rho_1}$, $v_2 = \frac{D}{\rho_2}$, $m_1 = \frac{D}{\rho_1}$, $m_2 = \frac{K}{\rho_2}$, $\eta^2 = (\eta_x^2 + \eta_y^2)$, $r = \frac{1+\mu}{2}$, $d_1 = \frac{\alpha}{\rho_1}$ e $d_2 = \frac{\alpha}{\rho_2}$. Neste ponto, devemos aplicar novamente o critério de Routh-Hurwitz, para tal, vamos considerar $\omega = x - \epsilon$, e assim o problema passa a ser escrito por

$$L_4x^4 + L_3x^3 + L_2x^2 + L_1x + L_0 = 0, \quad (4.39)$$

colocado dessa forma afim de simplificar a escrita, em que L_4, L_3, L_2, L_1 e L_0 estão representando

$$\begin{aligned} L_4 &= C_4, \\ L_3 &= C_3 - 4C_4\epsilon, \\ L_2 &= C_2 - 3C_3\epsilon + 6C_4\epsilon^2, \\ L_1 &= C_1 - 2C_2\epsilon + 3C_3\epsilon^2 - 4C_4\epsilon^3, \\ L_0 &= C_0 - C_1\epsilon + C_2\epsilon^2 - C_3\epsilon^3 + C_4\epsilon^4, \end{aligned}$$

a próxima etapa desta técnica seria provar a positividade de $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ e Λ_4 . Conseguimos provar a positividade de Λ_0 que é dada por $\Lambda_0 = L_0$, ou seja,

$$\Lambda_0 = R_{0,6}\eta^6 + R_{0,4}\eta^4 + R_{0,2}\eta^2 + R_{0,0} \quad (4.40)$$

desde que $R_{0,6} = v_1v_2^2(1-r) + v_2m_1(1-r)\epsilon^2$, podemos garantir a positividade de Λ_0 , para isso é suficiente escolhermos η grande. Em seguida analisamos Λ_1 e neste temos o caso qqem que a positividade não é garantida, pois desde que representa $\Lambda_1 = L_1$, temos

$$\Lambda_1 = R_{1,6}\eta^6 + R_{1,4}\eta^4 + R_{1,2}\eta^2 + R_{1,0} \quad (4.41)$$

em que $R_{1,6} = -2v_2m_1(1-r)\epsilon$, como este é o termo dominante, não podemos garantir sua positividade e de modo similar ocorre em Λ_2, Λ_3 e Λ_4 , ou seja esta técnica não é adequada para este problema.

4.4 Modelo de Corte

O ultimo modelo trabalhado é o Modelo de Corte (2.36)-(2.38) que a inclusão novamente de damping do tipo atrito o transformando no sistema.

$$\rho_1 u_{tt} - K(\psi + u_x)_x - K(\varphi + u_y)_y = 0, \quad (4.42)$$

$$-D\psi_{xx} - D\frac{1-\nu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1+\nu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + u_x) + \alpha\psi_t = 0, \quad (4.43)$$

$$-D\varphi_{yy} - D\frac{1-\nu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1+\nu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + u_y) + \alpha\varphi_t = 0. \quad (4.44)$$

Entretanto neste ocorre o mesmo que no modelo trabalhado na seção anterior, não há a garantia da positividade e por consequência, não há a garantia do decaimento exponencial da solução. Mesmo assim apresentaremos aonde a técnica falha.

Novamente iniciamos substituindo as funções constituintes do sistema (4.42)-(4.44) pelas funções harmônicas (4.1)-(4.3), nesse sentido nosso sistema se torna

$$A_1[\rho_1\omega^2 + K(\eta_x^2 + \eta_y^2)] + A_2[K\eta_x] + A_3[K\eta_y] = 0, \quad (4.45)$$

$$A_1[K\eta_x] + A_2[D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_y^2 + K + \alpha\omega] + A_3[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x\eta_y] = 0, \quad (4.46)$$

$$A_1[K\eta_y] + A_2[D\frac{1+\mu}{2}\eta_x\eta_y] + A_3[D(\eta_x^2 + \eta_y^2) - D\frac{1+\mu}{2}\eta_x^2 + K + \alpha\omega] = 0, \quad (4.47)$$

desse modo, concluímos que o sistema pode ser escrito como

$$C_4\omega^4 + C_3\omega^3 + C_2\omega^2 + C_1\omega + C_0 = 0, \quad (4.48)$$

onde os coeficientes C_0, C_1, C_2, C_3 e C_4 representam

$$C_4 = \rho_1\alpha^2,$$

$$C_3 = \rho_1 D\alpha(2-r)\eta^2 + 2\rho_1 K\alpha,$$

$$C_2 = \rho_1 D^2(1-r)\eta^4 + \rho_1 KD(2-r)\eta^2 + \rho_1 K^2 + K\alpha^2\eta^2,$$

$$C_1 = KD\alpha(2-r)\eta^4 + K^2\alpha\eta^2,$$

$$C_0 = KD^2(1-r)\eta^6 + K^2 D\eta^4.$$

Para aplicarmos o critério de Routh-Hurwitz, devemos considerar $\omega = x - \epsilon$, dessa forma o problema passa a ser escrito por

$$L_4x^4 + L_3x^3 + L_2x^2 + L_1x + L_0 = 0, \quad (4.49)$$

em que L_4, L_3, L_2, L_1 e L_0 calculados através de,

$$\begin{aligned} L_4 &= C_4, \\ L_3 &= C_3 - 4C_4\epsilon, \\ L_2 &= C_2 - 3C_3\epsilon + 6C_4\epsilon^2, \\ L_1 &= C_1 - 2C_2\epsilon + 3C_3\epsilon^2 - 4C_4\epsilon^3, \\ L_0 &= C_0 - C_1\epsilon + C_2\epsilon^2 - C_3\epsilon^3 + C_4\epsilon^4, \end{aligned}$$

provar a positividade de $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ e Λ_4 é a próxima etapa desta técnica. Iniciando sempre com a análise de $\Lambda_0 = L_0$,

$$\Lambda_0 = R_{0,6}\eta^6 + R_{0,4}\eta^4 + R_{0,2}\eta^2 + R_{0,0} \quad (4.50)$$

do fato de que $R_{0,6} = KD^2(1-r)$, a positividade de Λ_0 é garantida, desde que escolhamos η grande. A próxima análise é do termo Λ_1 que dado por $\Lambda_1 = L_1$,

$$\Lambda_1 = R_{1,4}\eta^4 + R_{1,2}\eta^2 + R_{1,0} \quad (4.51)$$

levando em consideração que $R_{1,4} = KD\alpha(2-r) - 2[\rho_1 D^2(1-r)]\epsilon$ também concluímos a positividade de Λ_1 se considerarmos η suficientemente grande e ϵ suficientemente pequeno. O passo seguinte consiste em analisar Λ_2 que é calculado por

$$\Lambda_2 = \det \begin{bmatrix} L_1 & L_3 \\ L_0 & L_2 \end{bmatrix} = L_1L_2 - L_0L_3, \quad (4.52)$$

desse modo temos que $\Lambda_2 = R_{2,8}\eta^8 + R_{2,6}\eta^6 + R_{2,4}\eta^4 + R_{2,2}\eta^2 + R_{2,0}$, o problema está em que considerando o fato de $R_{2,8} = -2\rho_1^2 D^4(1-r)^2\epsilon$, e que consideramos anteriormente η suficientemente grande não temos garantia de que $\Lambda_2 > 0$. Este problema voltaria se repetir em Λ_3 e Λ_4 . Portanto novamente a técnica não foi adequada a esta situação.

CAPÍTULO 5

Conclusão

Os resultados demonstrados neste trabalho reforçam que os modelos bidimensionais truncados (Simplificado, Baseado na Inércia de Inclinação e o modelo de Corte) apresentam vantagens em relação ao modelo clássico na questão da análise espectral, pois conseguem espectros consistentes fisicamente sem nenhuma necessidade de relação entre coeficientes ou a presença de damping.

Quanto ao âmbito dos sistemas serem bem postos, todos apresentam equivalência de condições, todos são bem postos, ou seja há a unicidade de soluções fracas e fortes em todos.

Por outro lado, observamos no último capítulo que o Modelo Simplificado tem sempre o decaimento exponencial da energia ao considerarmos dampings do tipo atrito nas segunda e terceira equações, vantagem sobre o modelo clássico que para obter tal propriedade é necessária uma relação não-prática para obter o referido decaimento. Entretanto, nos outros dois modelos abordados neste trabalho não foi possível chegar a nenhuma conclusão sobre o decaimento da energia, visto que nestes casos o método de Routh-Hurwitz foi inconclusivo.

Por fim, destacamos que dos modelos trabalhados nesta tese, o modelo que apresentou melhor comportamento é o modelo denominado simplificado gerado a partir das hipóteses de Elishakoff, pois este apresenta espectros de velocidade com comportamento completamente físicos, além disso é um sistema bem-posto e que tem o decaimento exponencial sobre quaisquer condições.

Referências Bibliográficas

- [1] Thomas J. Abbas, B.A.H. The second frequency spectrum of timoshenko beams. *J. Sound Vib.*, 51(1): 123–137, 1977.
- [2] Muñoz Rivera J.E. Aguilera Contreras, G. Stability of a timoshenko system with localized kelvin-voigt dissipation. *Appl Math Optim*, 84, 2021.
- [3] Ramos A.J.A. Freitas M.M. Almeida Júnior, D.S. Energy decay for damped shear beam model and new facts related to the classical timoshenko system. *Applied Mathematics Letters*, 120, 2021.
- [4] Almeida Júnior D. Santos M. L. Campelo, A. Stability to the dissipative reissner-mindlin-timoshenko acting on displacement equation. *European Journal of Applied Mathematics*, 27(2):157–193, 2016.
- [5] J. Dieudonne. La théorie analytique des polynômes d’une variable (à coefficients quelconques). *Mémorial des sciences mathématiques*, fascicule 93:1–70, 1938.
- [6] I. Elishakoff. An equation both more consistent and simpler than the bresse-timoshenko equation. *Gilat, R., Banks-Sills, L. (eds.) Advanced in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, The jacob aboudi volume, Springer, Berlin.*, 168:249–254, 2009.
- [7] I. Elishakoff, F. Hache, and N. Challamel. Vibrations of asymptotically and variationally based uflyand-mindlin plate models. *International Journal of Engineering Science*, 116:58–73, 2017.
- [8] Florian Hache and Isaac Elishakoff. Free vibration analysis of plates taking into account rotary inertia and shear deformation via three alternative theories: a lévy-type solution. *Acta Mechanica*, 228, 2017.
- [9] J. E. Lagnese. *Boundary Stabilization of Thin Plates*. SIAM, Philadelphia, 1989.

-
- [10] J. E. Lagnese and J. L. Lions. *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*. Collection RMA, Masson, Paris, 1988.
- [11] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod Gauthier-Villars, 1969.
- [12] R. Quintanilla. Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity. *Applied Mathematics Letters*, 16:487–491, 2003.
- [13] Aouadi M. Almeida Júnior D.S. Freitas M.M. Araújo M.L. Ramos, A.J.A. A new stabilization scenario for timoshenko system with thermo-diffusion effects in second spectrum perspective. *Arch. Math*, 116:203?219, 2021.
- [14] M.L. Santos, D.S. Almeida Júnior, and J.E. Muñoz Rivera. The stability number of the timoshenko system with second sound. *Journal of Differential Equations*, 253(9):2715–2733, 2012. ISSN 0022-0396.
- [15] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 6(41/245):744–746, 1921.
- [16] L. N. Trefethen. Group velocity in finite difference schemes. *SIAM Review*, 24(2):113–136, 1982.