



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Resultados de estabilidade e tratamento numérico de sistemas termoelásticos

Ronald Cardoso Barbosa

Belém

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Ronald Cardoso Barbosa

**Resultados de estabilidade e tratamento numérico de sistemas
termoelásticos**

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Coorientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

B238r Barbosa, Ronald Cardoso.
 Resultados de estabilidade e tratamento numérico de sistemas
 termoelásticos / Ronald Cardoso Barbosa. — 2022.
 xii, 82 f. : il. color.

 Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
 Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
 Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em
 Matemática e Estatística, Belém, 2022.

 1. Sistemas termoelásticos. 2. Semigrupos. 3. Decaimento
 exponencial. 4. Decaimento polinomial. 5. Diferenças finitas.
 I. Título.


CDD 518.64


Resultados de estabilidade e tratamento numérico de sistemas termoelásticos

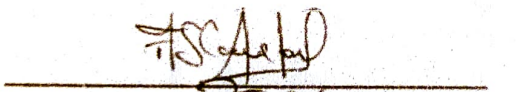
Ronald Cardoso Barbosa

Tese submetido ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática - UFPA, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

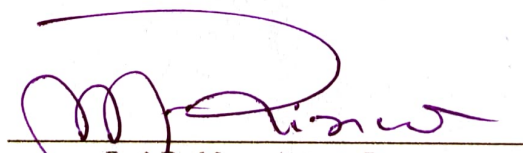
Aprovada em 06 de dezembro de 2022 por:


Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Orientador (PDM/UFPA) – Presidente


Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas
Membro interno (PDM/UFPA)


Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
Membro interno (PDM/UFPA)


Prof. Dr. Manoel Jeremias dos Santos
Membro interno (PDM/UFPA)


Prof. Dr. Mauro Antonio Rincon
Membro Externo (UFRJ)

À Família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e por me conceder paciência e sabedoria para poder realizar esta conquista.

Agradecer a minha mãe, Ivone Cardoso que sempre reforçou a necessidade de estudar e aos meus irmãos Rodrigo Barbosa e Gabriel Silva.

A minha companheira de longa data, Bianca Passos, que sempre esteve do meu lado nos bons e maus momentos e que compreendeu quando eu tinha que ficar ausente.

A todos os professores do programa e em especial meu orientador prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos que sempre esteve disponível para tirar as minhas dúvidas e é um exemplo de disciplina e simplicidade.

Ao prof. Dr. Dilberto de Almeida Júnior que foi a ponte para conhecer o de Grupo de Pesquisa em Análise Matemática Numérica GPAMN e que me incentivou a prosseguir na Pós-Graduação.

Aos meus colegas do programa, Alan Santos, Jeffersom Macedo, Jociane Fonseca, Jorge Morales, Márcio Bahia, Ronal Caljarro, Diogo Moan e a todos que aqui não citei, mas que contribuíram de forma direta ou indireta.

A todos os professores, colegas e amigos do Campi da UFPA Bragança, onde tive a oportunidade de exercer atividade docente, em especial à Prof^{ca}. Dr^a. Marly Nunes, Prof^a. Dr^a. Edilene Rozal, Prof. MSc. Nelson Lacerda, Prof. Dr. Elizardo Lucena, Prof. Dr. Edson Matos, Prof^a. Dr^a Maria Augusta Brito.

Por fim, gostaria de agradecer ao programa de bolsas CAPES, pelo financiamento desta pesquisa.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Resultados de estabilidade e tratamento numérico de sistemas termoelásticos

por Ronald Cardoso Barbosa

Nesta tese consideramos dois problemas termoelásticos distintos. O primeiro trata de um sistema constituído de duas equações da onda conectadas em paralelo e acopladas à equação do calor, governada pela lei de Fourier. O segundo trata de um sistema termoelástico poroso com microtemperatura e sem temperatura, governado pela lei de Lord-Shulman. Para o primeiro problema provamos a boa colocação, o decaimento exponencial do semigrupo e estudamos a sua versão semidiscreta e totalmente discreta usando o método de diferenças finitas. Em diferenças finitas semidiscretas provamos o decaimento exponencial usando o método da energia e no caso totalmente discreto, constatamos o decaimento exponencial através de simulações numéricas que garantem tal comportamento. Já para o segundo problema, provamos a boa colocação, o decaimento exponencial, a falta de decaimento exponencial e o decaimento polinomial do semigrupo dependendo de uma condição entre os coeficientes do sistema.

Palavras-Chave: Sistemas termoelásticos, semigrupos, boa colocação, decaimento exponencial, diferenças finitas, decaimento polinomial.

FEDERAL UNIVERSITY OF PARÁ

Abstract

Institute of Exact and Natural Sciences
Doctoral Program in Mathematics

Stability results and numerical treatment of thermoelastic systems

by Ronald Cardoso Barbosa

In this thesis we consider two distinct thermoelastic problems. The first deals with a system consisting of two wave equations connected in parallel and coupled to the heat equation, governed by Fourier's law. The second deals with a porous thermoelastic system with microtemperature and without temperature, governed by the Lord-Shulman law. For the first problem we prove the good collocation, the exponential decay of the semigroup and we study its semidiscrete and totally discrete version using the finite difference method. In semidiscrete finite differences we prove the exponential decay using the energy method and in the totally discrete case, we verify the exponential decay through numerical simulations that guarantee such behavior. For the second problem, we prove the good placement, the exponential decay, the lack of exponential decay and the polynomial decay of the semigroup depending on a condition between the system coefficients.

Keywords: Thermoelastic systems, semigroups, well-posedness, exponential decay, finite differences, polynomial decay.

| | |
|--|-----------|
| Resumo | iv |
| Símbolos | ix |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Considerações gerais e motivações | 1 |
| 1.2 Problemas Propostos | 4 |
| 1.2.1 Sistema de ondas termoelásticas conectadas em paralelo | 4 |
| 1.2.2 Sistema termoelástico poroso com a lei de Lord-Shulman | 7 |
| 1.3 Objetivos e organização da tese | 11 |
| 2 Preliminares | 13 |
| 2.1 Aspectos contínuos | 13 |
| 2.2 Aspectos numéricos | 17 |
| 3 Sistema termoelástico de ondas conectadas em paralelo | 19 |
| 3.1 Boa colocação | 19 |
| 3.2 Estabilidade exponencial | 24 |
| 3.3 Modelo semidiscreto em diferenças finitas | 26 |
| 3.3.1 Notações e resultados auxiliares | 26 |
| 3.4 Esquema semidiscreto | 28 |
| 3.5 Estabilidade exponencial semidiscreta | 29 |
| 3.5.1 Prova do Teorema 3.14 | 33 |
| 3.6 Modelo totalmente discreto em diferenças finitas | 34 |
| 3.6.1 Esquema totalmente discreto | 35 |
| 3.6.2 Energia discreta e taxa de variação | 35 |
| 3.7 Simulação numérica | 42 |
| 3.8 Teste da condição de estabilidade | 47 |
| 4 Sistema termoelástico poroso com a lei de Lord-Shulman | 50 |

| | | |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| 4.1 | Boa Colocação | 50 |
| 4.2 | Decaimento Exponencial | 55 |
| 4.3 | Decaimento polinomial | 71 |
| 5 | Considerações finais | 74 |
| | Referências Bibliográficas | 76 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Energia e solução numérica u_j^n | 44 |
| 3.2 | Simulação numérica com $\gamma > 0$ e $\delta = 0$ | 45 |
| 3.3 | Simulação numérica com $\gamma > 0$ e $\delta > 0$ | 46 |
| 3.4 | Simulação numérica: perfil da soluções no ponto $x_j = 0.5$ | 48 |
| 3.5 | Simulação numérica: perfil das soluções no ponto $x_j = 0.5$ | 49 |

| Símbolo | nome |
|--|---|
| α | constante de acoplamento |
| β | constante de acoplamento |
| δ | constante de acoplamento |
| γ | constante de amortecimento |
| c | calor específico |
| k | condutividade térmica |
| $\sigma(\mathcal{A})$ | espectro de \mathcal{A} |
| $\rho(\mathcal{A})$ | conjunto resolvente de \mathcal{A} |
| $(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ | operador resolvente de \mathcal{A} |
| $i\mathbb{R}$ | eixo imaginário |
| \Subset | imersão compacta |
| Re | parte real |
| Im | parte imaginária |
| $\mathcal{M}_{J \times J}(\mathbb{R})$ | espaço das matrizes reais quadradas. |
| $\ \cdot\ $ | norma em $L^2(0, l)$ |
| $\nabla_h(\cdot)$ | diferenças progressivas para derivada de primeira ordem |
| $\bar{\nabla}_h(\cdot)$ | diferenças regressivas para derivada de primeira ordem |
| $\Delta_h(\cdot)$ | diferenças centradas para derivada de segunda ordem |

1.1 Considerações gerais e motivações

Nesta tese estudamos as propriedades de estabilização de sistemas termoelásticos governados pela teoria da termoelasticidade linear de Biot [1]. Iniciamos com o estudo de um sistema termoelástico de ondas conectadas em paralelo, onde os efeitos térmicos são acoplados pelo laplaciano da temperatura. Posteriormente, estudamos um sistema termoelástico poroso com microtemperatura e sem temperatura baseado na teoria da termoelasticidade generalizada de Lord–Shulman [2]. Para motivar os problemas estudados, fazemos um breve comentário sobre algumas teorias termomecânicas e apresentamos alguns trabalhos clássicos da literatura.

A termomecânica estuda a deformação de corpos submetidos à carregamentos térmicos e mecânicos. Provavelmente, o seu estudo teve início com o trabalho de Duhamel [3], onde se considera que apenas a temperatura participa da resposta mecânica da estrutura, ou seja, as deformações do corpo não influenciariam a temperatura da estrutura. Por conta disso, esta teoria ficou conhecida como *teoria da termoelasticidade desacoplada*. Porém, há um desacordo com observações físicas, pois experimentos científicos mostraram que a temperatura é influenciada pela deformação do corpo. Nesta direção, foi apresentado em Biot [1], uma nova teoria da termoelasticidade que acopla em termos da deformação e do fluxo de calor, as partes térmica e mecânica da estrutura. Esta teoria ficou conhecida com *teoria*

clássica da termoelasticidade acoplada. As equações dinâmicas são dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} - \mu \Delta \mathbf{w} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \alpha \nabla \theta = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nu \Delta \theta + \beta \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde \mathbf{w} é o campo de deslocamento, θ a temperatura e $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta$ são constantes físicas.

Um ponto que chama atenção, é o fato da distribuição de temperatura no interior do corpo ser proveniente da lei de Fourier [4], *i.e.*,

$$\mathbf{q}(x, t) = -\kappa \nabla \theta(x, t), \quad (1.2)$$

onde \mathbf{q} representa o fluxo de calor, $k > 0$ a constante de condutividade térmica e $\nabla \theta$ o gradiente de temperatura. Esta equação nos diz que o gradiente de temperatura atuando em um ponto x no instante t , causa um fluxo de calor no mesmo instante t . Por conta disso, a equação parabólica (1.1)₂, apresenta uma inconsistência física conhecida como velocidade infinita de propagação do calor, que está em desacordo com experimentos físicos. Onsage [5] foi um dos primeiros a chamar atenção para este problema. Ele observou que a lei de Fourier poderia ser apenas uma aproximação que ignora o tempo necessário para a aceleração do fluxo de calor, em outras palavras, ele está afirmando que a inércia não foi considerada na lei de Fourier. Desta forma, uma das principais falhas da lei de Fourier foi observada, ou seja, um aumento imediato do fluxo de calor em todo o corpo. Para resolver esse problema, Cattaneo [6] derivou uma nova equação para relacionar o fluxo de calor e a temperatura. Ele introduziu ao fluxo de calor o tempo de relaxação térmica $\tau_0 > 0$, que é intrínseco do material, ou seja, o fluxo de calor é dado por

$$\mathbf{q}(x, t + \tau_0) = -\kappa \nabla \theta(x, t). \quad (1.3)$$

Nesta equação o gradiente de temperatura atuando em um ponto x no instante t , causa um fluxo de calor no instante posterior à $t + \tau_0$. Usando uma expansão em série de Taylor e um truncamento na derivada de primeira ordem, obtemos a lei de Cattaneo

$$\mathbf{q}(x, t + \tau_0) = \underbrace{\mathbf{q}(x, t) + \tau_0 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(x, t)}_{\text{truncamento}} + \frac{\tau_0^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\tau_0^3}{3!} \frac{\partial^3 \mathbf{q}}{\partial t^3}(x, t) + \frac{\tau_0^4}{4!} \frac{\partial^4 \mathbf{q}}{\partial t^4}(x, t) + \dots = -k \nabla \theta(x, t), \quad (1.4)$$

ou seja,

$$\mathbf{q}(x, t) + \tau_0 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(x, t) = -k \nabla \theta(x, t). \quad (1.5)$$

Conseqüentemente, ao usarmos a lei da conservação de energia, obtemos a equação hiperbólica para a propagação ondulatória do calor dada por

$$\left(\mathbf{I} + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \Delta \theta = 0. \quad (1.6)$$

Desta forma, o problema da velocidade infinita de propagação do calor foi resolvido no contexto da termodinâmica. Porém, o problema continuou em aberto no contexto da termomecânica até o surgimento da *teoria da termoelasticidade generalizada* de Lord–Schulman [2].

A *teoria da termoelasticidade generalizada* de Lord–Schulman [2], modifica a *teoria clássica da termoelasticidade acoplada* ao considerar o fluxo de calor (1.5) idealizado por Cattaneo. Com isso, o sistema (1.1) é transformado em

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} - \mu \Delta \mathbf{w} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \alpha \nabla \theta = 0, \\ \left(\mathbf{I} + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nu \Delta \theta + \left(\mathbf{I} + \beta \tau_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Assim, a velocidade finita de propagação do calor também foi estendida para a termomecânica.

A partir do trabalho de Grot [7], o interesse por estudos relacionados à termodinâmica de microestruturas cresceu bastante (ver *e.g.*, [8–13]). A termodinâmica de microestruturas estabelecida em [7], baseia-se nas leis de equilíbrio para estender a termodinâmica do contínuo para materiais elásticos com microestrutura, supondo que os microelementos além sofrerem microdeformações, possuem temperaturas diferentes. Para descrever este fenômeno foi introduzido o conceito de microtemperaturas. Grot [7] também destaca que se as deformações forem desprezadas e uma aproximação linear for considerada, obtém-se uma teoria de condução de calor para materiais com microestrutura, onde a temperatura T e microtemperatura θ estão acopladas pelo sistema

$$\begin{cases} c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa_0 \nabla^2 T - \kappa_1 \nabla \cdot \theta - \rho_0 h = 0, \\ c_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa_6 \nabla^2 \theta - (\kappa_4 + \kappa_5) \nabla (\nabla \cdot \theta) + \kappa_3 \nabla T + \kappa_2 \theta + \rho_0 \mu = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Após um breve comentário acerca das teorias termoelásticas, estamos em condições de apresentar os problemas estudados nesta tese.

1.2 Problemas Propostos

Apresentamos os dois problemas termoelásticos que estamos nesta tese. O primeiro trata-se de um sistema de ondas conectadas em paralelo e acopladas à equação do calor, governada pela lei de Fourier. O segundo trata-se de um sistema termoelástico com microtemperatura e sem temperatura, governado pela lei de Lord-Shulman.

1.2.1 Sistema de ondas termoelásticas conectadas em paralelo

Realizamos um estudo teórico e numérico relacionado à estabilização exponencial de um sistema parabólico-hiperbólico fortemente acoplado à equação do calor dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + \gamma u_t = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) + \delta \theta_{xx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \beta v_t = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1.9)$$

sujeito as condições de contorno de Dirichlet homogêneas

$$u(0, t) = u(l, t) = v(0, t) = v(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.10)$$

e condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, l), \quad (1.11)$$

onde as constantes α, γ, c, k são positivas e δ, β possuem o mesmo sinal.

O funcional energia associado ao sistema (1.9)–(1.11) é dado por

$$E(t) := \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{2} \|u_x\|^2 + \frac{1}{2} \|v_x\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|u - v\|^2 + \frac{c\delta}{2\beta} \|\theta_x\|^2 \quad (1.12)$$

e obedece a taxa de variação

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{k\delta}{\beta} \|\theta_{xx}\|^2 - \gamma \|u_t\|^2, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (1.13)$$

Consequentemente $E(t)$ decai ao longo do tempo t .

O modelo (1.9)–(1.11) descreve um sistema de equações de ondas conectadas em paralelo e acopladas com a equação de difusão do calor, governada pela lei de Fourier. As funções $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$ denotam os deslocamentos de dois sistemas contínuos unidimensionais simples e $\theta = \theta(x, t)$

denota a temperatura. Os modelos unidimensionais simples conectados em paralelo, geralmente são usados para representarem sistemas contínuos complexos em dimensões maiores, como por exemplo, um sistema sólido duplo conectado elasticamente por uma camada elástica de Winkler [14–17].

A supressão das vibrações em estruturas mecânicas é um dos assuntos centrais tratados nas engenharias, e o estudo dos controles ótimos para a absorção das vibrações é de grande interesse. Neste contexto, muitos pesquisadores investigaram a boa colocação e a estabilização exponencial das soluções de sistemas termoelásticos clássicos, constituídos de uma única equação da onda [18–25]. Dafermos [18], provavelmente tenha sido o primeiro a estudar o sistema termoelástico clássico para materiais anisotrópicos não homogêneos. Ele provou a existência de uma única solução que é diferenciável e assintoticamente estável com o tempo tendendo ao infinito. Em [22] Slemrod derivou um sistema termoelástico não linear e usou o método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução local e global. Em particular, ele provou que a energia do problema linear associado, decai exponencialmente com o tempo tendendo ao infinito. Em [19] Muñoz Rivera usou o método da energia para provar o decaimento exponencial da energia do sistema termoelástico. Logo depois, Racke *et al.* [20] estenderam os resultados de Muñoz Rivera para sistemas termoelásticos não lineares. Diferentemente dos trabalhos anteriores, que usaram o método da energia para provarem o decaimento exponencial de sistemas termoelásticos, Liu e Zheng [25] usaram a teoria de semigrupos de operadores lineares para provarem que o sistema termoelástico é exponencialmente estável.

Ao contrário da literatura anterior, que estuda uma única equação da onda acoplada à equação do calor por meio do gradiente da temperatura, o sistema (1.9)–(1.11) é constituído de duas equações da onda conectadas por uma camada elástica de Winkler e acopladas à equação do calor por meio do laplaciano da temperatura. A motivação para o acoplamento térmico vem das equações governantes dos campos de deslocamento \mathbf{w} e da temperatura θ , provenientes da teoria da termoelasticidade linear de Biot [1] após uma mudança de variável padrão (ver (1.15)). Mais precisamente, as equações dinâmicas da teoria da termoelasticidade linear são dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{tt} - \mu \Delta \mathbf{w} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \delta \nabla \theta = 0, \\ \theta_t - \nu \Delta \theta + \beta \operatorname{div} \mathbf{w}_t = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

onde as constantes λ, μ, ν são positivas e δ, β possuem o mesmo sinal. Definindo $\mathbf{v} := \operatorname{curl} \mathbf{w}$, $u := \operatorname{div} \mathbf{w}$ e $c^2 := \lambda + 2\mu$, o sistema (1.14) transforma-se no sistema termoelástico fortemente acoplado dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u + \delta \Delta \theta = 0, \\ \theta_t - \nu \Delta \theta + \beta u_t = 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

seguido do sistema diagonal de equações da onda dado por $\mathbf{v}_{tt} - \mu \Delta \mathbf{v} = 0$.

Em [26] Lebeau e Zuazua estudaram as propriedades da controlabilidade do sistema (1.15) quando o controle atua somente na equação hiperbólica (ou parabólica) e tem seu suporte restrito a um subconjunto aberto de uma variedade Riemanniana. Os autores provaram que, se o tempo de controle e o suporte de controle satisfazem a condição de controle geométrico para a equação da onda, então este sistema termoelástico é nulo controlável.

Por outro lado, o acoplamento elástico motivado pelas camadas de Winkler também foi estudado em Najafi *et al.* [27–30], Almeida Júnior *et al.* [31] além de Freitas *et al.* [32]. No trabalho de Najafi [29], encontramos o sistema de ondas conectadas em paralelo dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} + \alpha(u - v) + \beta(u_t - v_t) + g_1(u_t) + f_1(u, v) = 0, \\ v_{tt} - c_2^2 v_{xx} + \alpha(v - u) + \beta(v_t - u_t) + g_2(v_t) + f_2(u, v) = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Considerando condições de contorno mista, o autor provou que a solução de (1.16) (com $g_1 = g_2 = 0$ e $f_1 = f_2 = 0$) decai exponencialmente. Em contrapartida, para condições de contorno de Dirichlet homogênea, foi necessário adotar velocidades de onda diferentes ($c_1 \neq c_2$) para obter o decaimento exponencial da energia do sistema. Najafi usou a abordagem do domínio da frequência e métodos espectrais para obter esses resultados. Também foram apresentadas simulações numéricas que estão de acordo com os resultados analíticos obtidos. Por outro lado, Almeida Júnior *et al.* [31] consideraram o sistema (1.16) com $g_1 = g_2 = 0$, $f_1 = f_2 = 0$, $c_1 = c_2 = 1$ e $\beta = 0$. Eles provaram uma estimativa de observabilidade para o problema conservativo e trataram das questões da observabilidade uniforme com relação ao parâmetro de malha h , para uma semidiscretização de diferenças finitas. Recentemente Freitas *et al.* [32] estudaram o sistema não linear dado em (1.16) com $\beta = 0$. Dentre os resultados apresentados, eles provaram que a solução (u^α, v^α) do sistema convergem com $\alpha \rightarrow \infty$ para a solução (u, u) , onde u é a solução de uma única equação da onda não linear.

Uma ferramenta que tem sido amplamente usada para explicitar as soluções aproximadas e propriedades qualitativas de modelos teóricos, são os métodos numéricos [33–35]. Quando se trata de problemas termoelásticos que envolvem o acoplamento entre equações parabólicas e hiperbólicas, até mesmo em domínios unidimensionais, o método de elementos finitos (MEF) é o mais usado para discretizar a variável espacial [36–38]. Isso ocorre porque o MEF possui a vantagem de agir diretamente na formulação variacional do problema. Enquanto que o método de diferenças finitas (MDF), atua nas equações diferenciais parciais (EDPs) do problema. Por conta disso, surgem dificuldades que são intrínsecas do MDF, ainda mais quando estamos lidando com um sistema parabólico-hiperbólico acoplado. As principais dificuldades são: escolher adequadamente as fórmulas de diferenças finitas para aproximação das derivadas de primeira ordem, lidar com as condições de contorno discretas, provar leis de balanço de energia discreta, etc. No que diz respeito ao MDF, outras questões também não são simples de serem analisadas. Em particular, a convergência da solução aproximada para a solução exata

em sistemas de EDPs parabólico-hiperbólicas é uma delas, pois requer que o domínio numérico de dependência contenha o domínio matemático de dependência. Esse quesito é conhecido como condição CFL (Courant-Friedrichs-Levy) [39], que está intrinsecamente ligada à estabilidade do MDF.

1.2.2 Sistema termoelástico poroso com a lei de Lord-Shulman

Estudamos as condições necessárias e suficientes para estabelecermos o decaimento exponencial ou polinomial de um sistema termoelástico poroso com microtemperatura em sem temperatura. O efeito térmico está baseado na lei de Lord-Shulman e o sistema é dado por

$$\begin{cases} \rho_0 u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_0 \kappa \phi_{tt} - \alpha \phi_{xx} + b u_x + \xi \phi + d(\theta_x + \tau_0 \theta_{xt}) = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ b_0(\theta_t + \tau_0 \theta_{tt}) - \kappa_2 \theta_{xx} + d\phi_{xt} + \kappa_3 \theta = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1.17)$$

onde $u = u(x, t)$ representa o deslocamento do material sólido elástico, $\phi = \phi(x, t)$ a fração volumétrica e $\theta = \theta(x, t)$ microtemperatura. Os coeficientes constitutivos acima satisfazem

$$\begin{aligned} \rho_0 > 0, \quad \mu > 0, \quad \kappa > 0, \quad \alpha > 0, \quad \xi > 0, \quad b \neq 0, \\ d \neq 0, \quad \tau_0 > 0, \quad b_0 > 0, \quad \kappa_2 > 0, \quad \kappa_3 > 0, \quad \mu \xi > b^2. \end{aligned}$$

As condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in (0, l), \\ \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in (0, l), \end{aligned} \quad (1.18)$$

e as condições de contorno por

$$u(0, t) = u(l, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.19)$$

O funcional energia associado ao sistema (1.17)–(1.19) é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) := & \rho_0 \|u_t\|^2 + \rho_0 \kappa \|\phi_t\|^2 + (\mu - b^2/\xi) \|u_x\|^2 + \alpha \|\phi_x\|^2 + \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|^2 \\ & + b_0 \|\theta + \tau_0 \theta_t\|^2 + \kappa_2 \|\theta_x\|^2 + \kappa_3 \tau_0 \|\theta\|^2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

e obedece a taxa de variação

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\kappa_2 \|\theta_x\|_{L^2}^2 - \kappa_3 \|\theta\|_{L^2}^2, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (1.21)$$

Portanto $\mathcal{E}(t)$ decai ao longo do tempo t .

Antes de analisarmos o problema de (1.17)–(1.19), veremos alguns trabalhos importantes no contexto da microtemperatura em sistemas unidimensionais. Iniciamos nossa discussão com trabalho de Casas & Quintanilla [40], onde os autores consideraram o sistema com temperatura e microtemperatura dado por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu^* u_{xx} - b\phi_x + \beta\theta_x = 0, \\ J\phi_{tt} - \alpha\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + dw_x - m\theta = 0, \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \gamma u_{xt} + l\phi_t - \kappa_1 w_x = 0, \\ \delta w_t - k_4^* w_{xx} + d\phi_{xt} + \kappa_3\theta_x + \kappa_2 w = 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

com $u = u(x, t)$ representando o deslocamento do material sólido elástico, $\phi = \phi(x, t)$ a fração volumétrica, $\theta = \theta(x, t)$ a temperatura e $w = w(x, t)$ a microtemperatura. Eles usaram a teoria de semi-grupo, mais precisamente os argumentos propostos por Liu & Zheng [41] para provarem o decaimento exponencial do sistema. Posteriormente Magaña & Quintanilla [42], estudaram o sistema com microtemperatura e sem temperatura dado por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x - \gamma u_{xxt} = 0, \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + dw_x + \tau\phi_t = 0, \\ \alpha w_t - k_4 w_{xx} + d\phi_{xt} + \kappa_2 w = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Eles provaram que a viscoelasticidade em conjunto com a microtemperatura (*i.e.*, $\tau = 0$) são capazes de produzir o decaimento exponencial do sistema (1.23). Enquanto que a viscoporosidade atuando com a microtemperatura (*i.e.*, $\gamma = 0$) produzem um decaimento lento se, $J\mu - \delta\rho \neq 0$. Nesta direção, Santos *et al.* [43] complementaram o resultado provando que o sistema (1.23) com $\gamma = 0$, decai exponencialmente se, e somente se, $J\mu - \delta\rho = 0$. Porém, decai polinomialmente com taxa ótima se $J\mu - \delta\rho \neq 0$.

Nas últimas décadas com o surgimento de materiais em microescala, o estudo de microestruturas com microtemperaturas tem estado em evidência [40, 44–52]. Porém quando olhamos para as equações da temperatura e da microtemperatura, observamos que as equações térmicas são provenientes da lei de Fourier, e portanto obtemos a inconsistência física da velocidade infinita de propagação do calor. Logo, é natural introduzir também, um parâmetro de relaxação térmica na microtemperatura. Nesse sentido, Bazarra *et al.* [53], consideram a teoria termoelástica de Lord-Shulman atuando num problema poroelástico com temperatura e microtemperatura. A novidade proposta foi introduzir o mesmo parâmetro de relaxação $\tau_0 > 0$, tanto na temperatura quanto na microtemperatura. Dentre os vários resultados apresentados estão, a boa colocação do sistema e o decaimento exponencial do sistema dado

por

$$\begin{cases} \rho_0 u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x + \beta_0(T_x + \tau_0 T_{xt}) = 0, \\ \rho_0 \kappa \phi_{tt} - \alpha \phi_{xx} + b u_x + \xi \phi + d(\theta_x + \tau_0 \theta_{xt}) - \beta_1(T_x + \tau_0 T_{xt}) = 0, \\ a_0(T_t + \tau_0 T_{tt}) - k T_{xx} + \beta_0 u_{xt} + \beta_1 \phi_t - k_1 \theta_x = 0, \\ b_0(\theta_t + \tau_0 \theta_{tt}) - \kappa_2 \theta_{xx} + d \phi_{xt} + \kappa_3 \theta + k_1 T_x = 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

onde $u = u(x, t)$ é o deslocamento, $\phi = \phi(x, t)$ é a fração volumétrica, $T = T(x, t)$ é a temperatura e $\theta = \theta(x, t)$ denota a microtemperatura.

A motivação para estudar o problema (1.17) vem do sistema (1.24), quando desprezamos a ação da temperatura (adotando $\beta_0 = \beta_1 = k_1 = 0$) e ficamos apenas com os efeitos térmicos da microtemperatura.

Um dos principais interesses no estudo de sistemas dissipativos, diz respeito à procura por condições mínimas para se obter o decaimento exponencial. Neste contexto, surge a procura por condições necessárias e suficientes para se obter o decaimento exponencial de sistemas fracamente dissipativos. Em [54] Soufyane provou que

$$\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0, \quad (1.25)$$

é a condição necessária e suficiente para se obter a estabilidade exponencial do sistema de vigas de Timoshenko. Depois, Muñoz Rivera & Racke [55] mostraram que a condição (1.25) também é necessária e suficiente para estabelecer o decaimento exponencial de um sistema de vigas de Timoshenko acopladas à equação do calor, governada pela lei de Fourier. Em seguida, Quintanilla [56] mostrou que não se pode obter o decaimento exponencial uniforme das soluções do sistema poroelástico se $\alpha - \mu\kappa \neq 0$. Posteriormente, Santos *et al.* [57] complementaram o resultado de Quintanilla provando que

$$J - \mu\kappa = 0, \quad (1.26)$$

é a condição necessária e suficiente para se obter o decaimento exponencial do sistema.

Em [58] Fernandes Sare & Racke estudaram o sistema de Timoshenko com a lei de Cattaneo dado por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \delta \theta_x = 0, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta \psi_{xt} = 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

que superar a inconsistência física imposta pela lei de Fourier. Aqui $\varphi = \varphi(x, t)$ é o deslocamento transversal, $\psi = \psi(x, t)$ é o ângulo de rotação da seção transversal, $q = q(x, t)$ é o fluxo de calor e $\theta = \theta(x, t)$ a temperatura. Eles provaram que o sistema não é exponencialmente estável adotando a relação de igualdade dada em (1.25). Porém, Santos *et al.* [59], apresentaram um resultado surpreendente – eles introduziram uma nova condição de estabilidade dada por

$$\chi := \left(\tau - \frac{\rho_1}{\rho_3 \kappa} \right) \left(\rho_2 - \frac{b \rho_1}{\kappa} \right) - \frac{\tau \rho_1 \delta^2}{\rho_3 \kappa}, \quad (1.28)$$

denominada pelos autores de *número de estabilidade*. Esta condição é necessária e suficiente para estabilizar exponencialmente o sistema de vigas de Timoshenko acoplado à lei de Cattaneo.

Aouadi *et al.* [60] propuseram um sistema de vigas de Timoshenko acopladas às equações de difusão de calor e massa governadas respectivamente pelas leis de Fourier e de Fick. O sistema é dado por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - \alpha \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \gamma_1 \theta_x - \gamma_2 P_x = 0, \\ c \theta_t + d P_t + q_x - \gamma_1 \psi_{tx} = 0, \\ d \theta_t + r P_t + \eta_x - \gamma_2 \psi_{tx} = 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

onde $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, c, d, r$, são constantes físicas e as novas variáveis dependentes P e η representam o potencial químico e o fluxo de massa respectivamente. Eles provaram que o sistema com $\mu = 0$ possui uma falta de estabilidade exponencial se a condição (1.25) não for satisfeita. Porém, é exponencialmente estável independentemente da condição (1.25), se $\mu > 0$.

Observando o sistema (1.29) percebemos duas equações parabólicas e portanto, a presença do paradoxo físico da velocidade infinita de propagação do calor e da massa. Para solucionar este problema, Aouadi *et al.* [61] consideraram o modelo de vigas de Timoshenko com efeitos de difusão térmica e de massa governados por lei de Cattaneo. O sistema é dado por

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) - \gamma_1 \theta_x - \gamma_2 P_x = 0, \\ c \theta_t + d P_t + q_x - \gamma_1 \psi_{tx} = 0, \\ \tau_0 q_t + q + K \theta_x = 0, \\ r P_t + d \theta_t + \eta_x - \gamma_2 \psi_{tx} = 0, \\ \tau_1 \eta_t + \eta + \hbar P_x = 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

onde $\tau_i > 0$ ($i = 0, 1$) são os parâmetros de relaxação térmica intrínseco do material. Eles apresentaram novas condições de estabilidade para o decaimento exponencial deste sistema de vigas de Timoshenko.

As condições de estabilidade são dadas por

$$\chi_0 := (d\gamma_2 - r\gamma_1) \frac{K}{\tau_0\gamma_1} - (d\gamma_1 - c\gamma_2) \frac{\hbar}{\tau_1\gamma_2} \quad \text{e} \quad \chi_1 := \xi \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa} \right) - \left(\frac{\tau_0\gamma_1^2}{K} + \frac{\tau_1\gamma_2^2}{\hbar} \right) (1 - \xi),$$

onde $\xi := 1 - \frac{\rho_1\Gamma}{\delta\kappa}$ e $\Gamma := (d\gamma_2 - r\gamma_1) \frac{K}{\tau_0\gamma_1} = (d\gamma_1 - c\gamma_2) \frac{\hbar}{\tau_1\gamma_2}$ se $\chi_0 = 0$. Os autores provaram o decaimento exponencial, a falta de decaimento exponencial e o decaimento polinomial do sistema (1.30) dependendo das escolhas que são feitas para as condições de estabilidade χ_0 e χ_1 .

Os trabalhos que citamos, nos mostram que a busca por condições de estabilidade envolvendo as constantes físicas se um sistema, representam um tema importante e atual de estudo e por conta disso, tem recebido atenção por partes dos pesquisadores nos últimos anos. Seguindo esta direção, investigamos as condições necessárias e suficientes para se obter o decaimento exponencial ou polinomial do sistema (1.17)–(1.19). Doravante, estas condições serão chamadas de *assinaturas de estabilidade*.

1.3 Objetivos e organização da tese

Os objetivos desta tese estão organizados de acordo com cada problema que estudamos.

Para o sistema (1.9)–(1.11) listamos os seguintes objetivos:

- Provar a boa colocação do sistema;
- Provar que o semigrupo associado ao sistema é exponencialmente estável;
- Provar que a energia semidiscreta decai exponencialmente com o tempo tendendo ao infinito;
- Introduzir um esquema numérico totalmente discreto em diferenças finitas;
- Estabelecer a condição de estabilidade do esquema numérico;
- Fornecer um algoritmo para a simulação numérica.

Para o sistema (1.17)–(1.19) os objetivos são listados à baixo:

- Provar a boa colocação do sistema;
- Encontrar as *assinaturas de estabilidade* do sistema;
- Provar o decaimento exponencial do semigrupo a partir das *assinaturas de estabilidade*;
- Provar a falta de decaimento exponencial do semigrupo;

- Provar o decaimento polinomial do semigrupo.

A organização da tese é a seguinte. Na Seção 2, apresentamos alguns conceitos e resultados preliminares. Na Seção 3, consideramos um sistema termoelástico de ondas conectadas em paralelo, onde provamos a boa colocação e a estabilização exponencial do semigrupo. Em seguida, apresentamos um esquema de semidiscretização espacial de diferenças finitas e introduzimos o método da energia para provar o decaimento exponencial da energia semidiscreta. Depois, fornecemos um esquema de diferenças finitas totalmente discreto que combina os métodos de integração explícito-implícito, provamos a contrapartida discreta da lei de dissipação e mostramos que a energia discreta é uma forma quadrática positiva definida. Além disso, reescrevemos o esquema numérico numa forma vetorial e fizemos simulações numéricas que ilustram os resultados teóricos. Finalmente na Seção 4, estudamos o sistema termoelástico poroso com a lei de Lord-Shulman, onde provamos a boa colocação, a estabilização exponencial, a falta de decaimento exponencial e o decaimento polinomial do semigrupo a partir de uma condição envolvendo os coeficientes do sistema.

Para dar embasamento ao desenvolvimento deste trabalho apresentamos alguns conceitos e resultados de estabilidade no sentido de Lyapunov [62], e da teoria de semigrupo de operadores lineares [63, 64]. Além disso, mostramos também, alguns resultados importantes do método de diferenças finitas.

2.1 Aspectos contínuos

A estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico pode ser caracterizada no sentido de Lyapunov [62]. Mais precisamente, um ponto de equilíbrio é *estável*, se todas as soluções que começam em pontos próximos permanecem próximas, caso contrário, é *instável*. Um sistema dinâmico é *assintoticamente estável*, se todas as soluções que começam em pontos próximos, não apenas permanecem próximas, mas também tendem ao ponto de equilíbrio à medida que o tempo se aproxima do infinito. Vejamos a definição seguinte.

Definição 2.1. O ponto de equilíbrio de um sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ é dito:

(i) Estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

(ii) Instável se não é estável.

(iii) Assintoticamente estável se for estável e puder ser escolhido um $\delta > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

O teorema básico do método de Lyapunov para sistemas autônomos que nos permite caracterizar a estabilidade é descrito a seguir.

Teorema 2.2 (Método de Lyapunov [62]). *Seja $x = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$, em que temos $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $x = 0$. Seja $\mathcal{L} : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

(i) $\mathcal{L}(0) = 0$ e $\mathcal{L}(x) > 0$ para todo $x \in D - \{0\}$;

(ii) $\dot{\mathcal{L}}(x) \leq 0$ para todo $x \in D$;

Então o ponto de equilíbrio x é estável. Além disso, se

(iii) $\dot{\mathcal{L}}(x) < 0$ para todo $x \in D - \{0\}$,

então o ponto de equilíbrio x é assintoticamente estável.

Observação 2.3. Uma função $\mathcal{L}(x)$ continuamente diferenciável satisfazendo (i) e (ii) é chamada de função de Lyapunov.

Definição 2.4. O ponto de equilíbrio $x = 0$ de um sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$ é exponencialmente estável se existirem constantes positivas M e ω tais que

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Além da estabilidade no sentido de Lyapunov, também usamos a teoria de semigrupos de operadores lineares. Abaixo apresentamos alguns conceitos importantes.

Definição 2.5. Seja X um espaço de Banach. Uma família $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

(i) $S(0) = I$ (I é o operador identidade em X);

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$ (a propriedade do semigrupo).

Definição 2.6. Um semigrupo de operadores lineares limitados $S(t)$, é uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0. \quad (2.1)$$

Definição 2.7. O operador linear \mathcal{A} definido por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \quad (2.2)$$

e

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ S(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad \text{para } x \in D(\mathcal{A}) \quad (2.3)$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$ e $D(\mathcal{A})$ é o domínio de \mathcal{A} .

Definição 2.8. Um semigrupo $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x, \quad \text{para cada } x \in X. \quad (2.4)$$

Observação 2.9. Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado de C_0 -semigrupo.

Definição 2.10. Um semigrupo $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é limitado se existe uma constante $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_X \leq M. \quad (2.5)$$

Se $M = 1$, $S(t)$ é chamado de semigrupo de contração.

Definição 2.11 (Problema de Cauchy). Seja X um espaço de Banach, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear de X , e consideremos para cada $U_0 \in X$, o problema abstrato de Cauchy dado por

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \quad t > 0, \quad (2.6)$$

$$U(0) = U_0. \quad (2.7)$$

Definição 2.12. Uma função $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ diz-se:

(a) Uma solução clássica (ou forte) de (2.6)–(2.7) se:

- (i) U é contínua para todo $t \geq 0$;
- (ii) U é continuamente diferenciável para $t > 0$;
- (iii) $U \in D(\mathcal{A})$ para todo $t > 0$;
- (iv) U satisfaz (2.6)–(2.7).

(b) Uma solução mild (ou generalizada) de (2.6)–(2.7) se:

- (i) U é contínua para todo $t \geq 0$;
- (ii) $\int_0^t U(s)ds \in D(\mathcal{A})$ para todo $t \geq 0$;
- (iii) $U(t) = \mathcal{A} \int_0^t U(s)ds + U_0$.

Teorema 2.13. *Seja \mathcal{A} o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$. Então:*

(a) *Para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$, existe uma única função*

$$U \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); D(\mathcal{A})), \quad (2.8)$$

dita solução forte do problema de Cauchy dado em (2.6)–(2.7).

(b) *Se $U_0 \in X$, existe uma única solução fraca $U \in C([0, \infty); X)$ do problema de Cauchy dado em (2.6)–(2.7).*

Lema 2.14 (Kato [65], Teorema 6.29). *Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado atuando em um espaço de Banach complexo X . Se \mathcal{A} for invertível e o operador inverso \mathcal{A}^{-1} for compacto, então o espectro de \mathcal{A} consiste inteiramente de autovalores discretos.*

Teorema 2.15. *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear \mathcal{A} é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})x\|_X \geq \lambda \|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in D(\mathcal{A}) \text{ e } \lambda > 0. \quad (2.9)$$

Teorema 2.16 (Lumer-Phillips [63]). *Seja \mathcal{A} um operador linear com domínio $D(\mathcal{A})$ denso em X .*

(i) *Se \mathcal{A} é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*

(ii) *Se \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então $\text{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e \mathcal{A} é dissipativo.*

Definição 2.17. *Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo limitado $S(t)$ sobre o espaço de Hilbert X . Dizemos que $S(t)$ é exponencialmente estável, se existem constantes $M > 0$ e $\omega > 0$ tais que,*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \quad t > 0. \quad (2.10)$$

O teorema seguinte caracteriza o decaimento exponencial.

Teorema 2.18 (Gearhart-Huang-Prüss [64, 66, 67]). *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} e $\rho(\mathcal{A})$ o conjunto resolvente do operador diferencial \mathcal{A} . Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

(i) $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$;

(ii) $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.19 (Borichev & Tomilov [68]). *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} com gerador infinitesimal \mathcal{A} tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. Então para $\alpha > 0$ fixo,*

$$\frac{1}{|\lambda|^\alpha} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \iff \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (2.11)$$

Abaixo temos algumas desigualdades importantes usadas no trabalho.

Proposição 2.20 (Desigualdade de Young). *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ temos que*

$$ab \leq \frac{a^2}{4\epsilon} + \epsilon b^2, \quad \text{para todo } \epsilon > 0. \quad (2.12)$$

Lema 2.21 (Desigualdade de Gronwall [69]). *Seja $\mathcal{L} : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável satisfazendo*

$$\mathcal{L}'(t) \leq \alpha \mathcal{L}(t), \quad \text{para todo } t \in (0, b).$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\alpha t}, \quad \text{para todo } t \in [0, b].$$

2.2 Aspectos numéricos

Os esquemas de diferenças finitas são usados com a finalidade de que suas soluções aproximem as soluções de certas equações diferenciais. Assim, desejamos algum tipo de convergência da solução da equação de diferenças finitas para a solução da equação diferencial. No entanto, a convergência não é uma tarefa fácil de provar. Uma alternativa comum é aplicar o Teorema da Equivalência de Lax, que afirma que, para esquemas consistentes para problemas lineares, a convergência é equivalente à estabilidade.

Teorema 2.22 (Teorema da Equivalência de Lax [70]). *Um esquema de diferenças finitas de dois níveis consistente para um problema de valor inicial linear bem colocado é convergente se, e somente se, é estável.*

Observação 2.23. Assim, fica claro que devemos estudar os conceitos de consistência e estabilidade.

Definição 2.24 (Consistência [70]). *Sejam $\mathcal{L}v = F$ a equação diferencial parcial sob consideração e $L_j^n v_j^n = G_j^n$ o esquema numérico de diferenças finitas correspondente. O esquema de diferenças $L_j^n v_j^n = G_j^n$ é consistente com a equação diferencial parcial $\mathcal{L}v = F$ no ponto (x, t) se*

$$(\mathcal{L}v - F)|_j^n - (L_j^n v_j^n - G_j^n) \rightarrow 0,$$

com $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ e $(j\Delta x, (n+1)\Delta t) \rightarrow (x, t)$.

Observação 2.25. Em situações práticas, a maioria dos esquemas numéricos que usamos na discretização de equações diferenciais são consistentes. Portanto, o maior problema em provar a convergência é de fato, obter a estabilidade.

De acordo com Thomas [70], a interpretação da estabilidade de um esquema de diferenças finitas é que, para um esquema de diferenças finitas estável, pequenos erros nas condições iniciais causam pequenos erros na solução. Como veremos, a definição permite que os erros cresçam, mas os limita a não crescer mais rápido do que exponencialmente.

Definição 2.26 (Estabilidade [70]). Um esquema de diferenças finitas

$$U^{n+1} = AU^n, \quad n \geq 0,$$

é dito estável em relação à norma $\|\cdot\|$ se existirem constantes positivas Δx_0 , Δt_0 , e constantes não negativas K e β de modo que

$$\|U^{n+1}\| \leq K\|U^0\|e^{\beta t},$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ e $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Lema 2.27 (Desigualdade de Poincaré [71]). *Suponha que $w \in S := \{w(t) = (w_0(t), w_1(t), \dots, w_{J+1}(t)); w_0(t) = w_{J+1}(t) = 0\}$. Então, vale a seguinte estimativa:*

$$h \sum_{j=1}^J |w_j(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor associado ao operador laplaciano discreto.

Sistema termoelástico de ondas conectadas em paralelo

Neste capítulo estudamos o sistema termoelástico de ondas conectadas em paralelo dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) + \gamma u_t = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) + \delta \theta_{xx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \beta v_t = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(l, t) = v(0, t) = v(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), & x \in (0, l). \end{cases} \quad (3.1)$$

Mostramos a boa colocação do usando a teoria de semigrupos de operadores lineares, e em seguida, provamos que o semigrupos associado é exponencialmente estável.

3.1 Boa colocação

Primeiramente introduzimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_0^1(0, l), \quad (3.2)$$

dotado da seguinte norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\phi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \alpha\|u - v\|^2 + \frac{c\delta}{\beta}\|\theta_x\|^2. \quad (3.3)$$

Seja $U_1 = (u_1, \phi_1, v_1, \psi_1, \theta_1)^\top$ e $U_2 = (u_2, \phi_2, v_2, \psi_2, \theta_2)^\top$, o produto interno correspondente é dado por

$$\langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l \left(\phi_1 \bar{\phi}_2 + \psi_1 \bar{\psi}_2 + u_{1,x} \bar{u}_{2,x} + v_{1,x} \bar{v}_{2,x} + \alpha(u_1 - v_1) \overline{(u_2 - v_2)} + \frac{c\delta}{\beta} \theta_{1,x} \bar{\theta}_{2,x} \right) dx. \quad (3.4)$$

Assim, para $U = (u, \phi, v, \psi, \theta)^\top \in \mathcal{H}$, denotando $\phi := u_t$ e $\psi := v_t$, podemos reescrever o sistema (3.1) na forma do problema de Cauchy dado por

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t), & \text{para todo } t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $U_0 := (u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0)^\top$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador diferencial

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I_d(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - \alpha I_d(\cdot) & -\gamma I_d(\cdot) & \alpha I_d(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d(\cdot) & 0 \\ \alpha I_d(\cdot) & 0 & \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - \alpha I_d(\cdot) & 0 & -\delta \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & -c^{-1}\beta I_d(\cdot) & c^{-1}k \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ U = (u, \phi, v, \psi, \theta)^\top \in \mathcal{H}; \theta \in H^3(0, l), u, v \in H^2(0, l), \phi, \psi \in H_0^1(0, l) \right\}.$$

Lema 3.1. *O operador \mathcal{A} é dissipativo no espaço de fase \mathcal{H} , isto é,*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma \|\phi\|^2 - \frac{\delta k}{\beta} \|\theta_{xx}\|^2 \leq 0. \quad (3.7)$$

Prova. Usando o produto interno (3.4) temos

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix} \phi \\ u_{xx} - \alpha(u - v) - \gamma\phi \\ \psi \\ v_{xx} - \alpha(v - u) - \delta\theta_{xx} \\ c^{-1}K\theta_{xx} - c^{-1}\beta\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \phi \\ v \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
 &= \int_0^l (u_{xx} - \alpha(u - v) - \gamma\phi)\bar{\phi}dx + \int_0^l (v_{xx} - \alpha(v - u) - \delta\theta_{xx})\bar{\psi}dx + \int_0^l \phi_x\bar{u}_x dx \\
 &\quad + \int_0^l \psi_x\bar{v}_x dx + \alpha \int_0^l (\phi - \psi)\overline{(u - v)}dx + \frac{c\delta}{\beta} \int_0^l (c^{-1}K\theta_{xx} - c^{-1}\beta\psi)_x\bar{\theta}_x dx.
 \end{aligned}$$

Realizando as integrações por partes obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= - \int_0^l u_x\bar{\phi}_x dx - \alpha \int_0^l (u - v)\bar{\phi}dx - \gamma \int_0^l \phi^2 dx - \int_0^l v_x\bar{\psi}_x dx - \alpha \int_0^l (v - u)\bar{\psi}dx + \delta \int_0^l \theta_x\bar{\psi}_x dx \\
 &\quad + \int_0^l \phi_x\bar{u}_x dx + \int_0^l \psi_x\bar{v}_x dx + \alpha \int_0^l (\phi - \psi)\overline{(u - v)}dx + \frac{\delta K}{\beta} \int_0^l \theta_{xxx}\bar{\theta}_x dx - \delta \int_0^l \psi_x\bar{\theta}_x dx. \\
 &= 2\text{Im} \int_0^l u_x\bar{\phi}_x dx + 2\text{Im} \int_0^l v_x\bar{\psi}_x dx + 2\alpha\text{Im} \int_0^l (u - v)\overline{(\phi - \psi)}dx + 2\delta\text{Im} \int_0^l \psi_x\bar{\theta}_x dx \\
 &\quad - \gamma\|\phi\|^2 - \frac{\delta K}{\beta}\|\theta_{xx}\|^2.
 \end{aligned}$$

Tomando a parte real ficamos com

$$\text{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma\|\phi\|^2 - \frac{\delta K}{\beta}\|\theta_{xx}\|^2.$$

Isto conclui a demonstração. ■

Lema 3.2. *Seja $\rho(\mathcal{A})$ o conjunto resolvente de \mathcal{A} . Então $0 \in \rho(\mathcal{A})$.*

Prova. De fato, tomando $\lambda = 0$ na equação resolvente dada por $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, onde $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^\top \in \mathcal{H}$ temos

$$-\mathcal{A}U = F. \tag{3.8}$$

Escrevendo o sistema em termo de suas componentes obtemos

$$-\phi = f_1 \quad \text{em } H_0^1(0, l), \quad (3.9)$$

$$-u_{xx} + \alpha(u - v) + \gamma\phi = f_2 \quad \text{em } L^2(0, l), \quad (3.10)$$

$$-\psi = f_3 \quad \text{em } H_0^1(0, l), \quad (3.11)$$

$$-v_{xx} + \alpha(v - u) + \delta\theta_{xx} = f_4 \quad \text{em } L^2(0, l), \quad (3.12)$$

$$-K\theta_{xx} + \beta\psi = f_5 \quad \text{em } H_0^1(0, l). \quad (3.13)$$

Este sistema é equivalente à

$$-u_{xx} + \alpha(u - v) = \gamma f_1 + f_2, \quad (3.14)$$

$$-v_{xx} + \alpha(v - u) + \delta\theta_{xx} = f_4, \quad (3.15)$$

$$-K\theta_{xx} = \beta f_3 + f_5. \quad (3.16)$$

Em seguida, provamos que $u, v \in H_0^1(0, l)$. Para isto, consideramos a forma sesquilinear $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ em $V = H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\tau((u, v, \theta), (u^*, v^*, \theta^*)) &:= \int_0^l u_x \bar{u}_x^* dx + \int_0^l v_x \bar{v}_x^* dx + \alpha \int_0^l (u - v) \overline{(u^* - v^*)} dx \\ &\quad + \tau K \int_0^l \theta_x \bar{\theta}_x^* dx - \delta \int_0^l \theta_x \bar{v}_x^* dx \end{aligned}$$

e a forma linear

$$\mathcal{L}_\tau(u^*, v^*, \theta^*) := \int_0^l (\gamma f_1 + f_2) \bar{u}^* dx + \int_0^l f_4 \bar{v}^* dx + \tau \int_0^l (\beta f_3 + f_5) \bar{\theta}^* dx,$$

onde $\tau > 0$ é um parâmetro para garantir a coercividade de \mathcal{B}_τ .

Resolver o problema (3.14)–(3.16) é equivalente a resolver o seguinte problema variacional:

$$\mathcal{B}_\tau((u, v, \theta), (u^*, v^*, \theta^*)) = \mathcal{L}_\tau(u^*, v^*, \theta^*). \quad (3.17)$$

Em V definimos a norma

$$\|(u, v, \theta)\|_V^2 = \|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u - v\|^2 + \|\theta_x\|^2.$$

Agora, usando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\tau((u, v, \theta), (u, v, \theta)) &= \|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \alpha\|u - v\|^2 + \tau K\|\theta_x\|^2 - \delta \int_0^l \theta_x \bar{v}_x dx \\ &\geq \|u_x\|^2 + \frac{1}{2}\|v_x\|^2 + \alpha\|u - v\|^2 + \left(\tau K - \frac{\delta^2}{2}\right) \int_0^l \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

Escolhendo $\tau > \frac{\delta^2}{2K}$ existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\mathcal{B}_\tau((u, v, \theta), (u, v, \theta)) \geq M\|(u, v, \theta)\|_V^2, \quad (3.18)$$

mostrando que $\mathcal{B}_\tau(\cdot, \cdot)$ é coerciva em V . Para provar que $\mathcal{B}_\tau(\cdot, \cdot)$ é contínua basta notarmos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_\tau((u, v, \theta), (u^*, v^*, \theta^*))| &\leq \|u_x\|\|u_x^*\| + \|v_x\|\|v_x^*\| + \alpha\|u - v\|\|u^* - v^*\| \\ &\quad + \tau K\|\theta_x\|\|\theta_x^*\| + |\delta|\|\theta_x\|\|v_x^*\| \\ &\leq C\|(u, v, \theta)\|_V\|(u^*, v^*, \theta^*)\|_V, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $C := 3 + \tau K + |\delta|$. Desde que $\mathcal{L}_\tau(\cdot)$ é um funcional linear contínuo, pelo Teorema de Lax-Milgram, o problema (3.17) admite uma única solução $(u, v, \theta) \in V$. Assim $u, v \in H_0^1(0, l)$. Por outro lado, segue das equações (3.9) e (3.11) que $\phi, \psi \in H_0^1(0, l)$ e da equação (3.13) que $\theta \in H^3(0, l)$. Finalmente, das equações (3.10) e (3.12) temos $u, v \in H^2(0, l)$ e com isto concluímos que $U \in D(\mathcal{A})$. ■

Por outro lado, combinando (3.7) e (3.8) é simples mostrar que

$$\|\phi\|^2 + \|\theta_{xx}\|^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.20)$$

Portanto, como consequência do Teorema Lumer-Phillips temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *O operador \mathcal{A} é um gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$ em \mathcal{H} . Então, para quaisquer dados iniciais $U_0 \in \mathcal{H}$, existe uma única solução fraca $U(t) \in C([0, \infty); \mathcal{H})$ do problema (3.5). Além disso, se os dados iniciais $U_0 \in D(\mathcal{A})$, existe uma única solução forte do problema (3.5) na classe*

$$U(t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C([0, \infty); D(\mathcal{A})). \quad (3.21)$$

3.2 Estabilidade exponencial

Nesta seção nosso objetivo é analisar o decaimento exponencial do sistema (3.1), e para isto usamos o Teorema 2.18. Mais precisamente, mostramos que as condições (i) e (ii) do Teorema 2.18 são satisfeitas. De fato, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^\top \in \mathcal{H}$, consideramos a equação resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, que em termos de suas componentes escalares é dada por

$$i\lambda u - \phi = f_1 \in H_0^1(0, l), \quad (3.22)$$

$$i\lambda\phi - u_{xx} + \alpha(u - v) + \gamma\phi = f_2 \in L^2(0, l), \quad (3.23)$$

$$i\lambda v - \psi = f_3 \in H_0^1(0, l), \quad (3.24)$$

$$i\lambda\psi - v_{xx} + \alpha(v - u) + \delta\theta_{xx} = f_4 \in L^2(0, l), \quad (3.25)$$

$$ic\lambda\theta - k\theta_{xx} + \beta\psi = cf_5 \in H_0^1(0, l). \quad (3.26)$$

Os resultados seguintes, são necessários para mostrar que as condições (i) e (ii) são satisfeitas.

Proposição 3.4. $D(\mathcal{A}) \Subset \mathcal{H}$, i.e., a imersão $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ é compacta.

Prova. De fato, seja $U_n = (u_n, \phi_n, v_n, \psi_n, \theta_n)^\top$ uma sequência limitada em $D(\mathcal{A})$. Em particular, temos que

$$\begin{aligned} u_n, v_n & \text{ são limitada em } H^2(0, l) \Subset H_0^1(0, l), \\ \phi_n, \psi_n & \text{ são limitada em } H_0^1(0, l) \Subset L^2(0, l), \\ \theta_n & \text{ é limitada em } H^3(0, l) \Subset H_0^1(0, l). \end{aligned}$$

Consequentemente, existem $u, v, \theta \in H_0^1(0, l)$ e $\phi, \psi \in L^2(0, l)$ tais que, até uma subsequência,

$$\begin{aligned} u_n & \rightarrow u \text{ em } H_0^1(0, l), & v_n & \rightarrow v \text{ em } H_0^1(0, l), & \phi_n & \rightarrow \phi \text{ em } L^2(0, l), \\ \psi_n & \rightarrow \psi \text{ em } L^2(0, l), & \theta_n & \rightarrow \theta \text{ em } H_0^1(0, l). \end{aligned}$$

Isto conclui prova. ■

Observação 3.5. Como $D(\mathcal{A}) \Subset \mathcal{H}$, a inversa \mathcal{A}^{-1} é compacta. Segue imediatamente do Lema 2.14 que o espectro de \mathcal{A} consiste inteiramente de autovalores discretos.

Agora estamos em condições de provar o lema seguinte.

Lema 3.6. *Sob as notações acima temos que*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}). \quad (3.27)$$

Prova. Suponha por absurdo que $i\mathbb{R} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Como o espectro de \mathcal{A} é discreto, é suficiente mostrar que $i\lambda U = \mathcal{A}U$ implica $U = 0$. De fato, de (3.20) com $F = 0$, temos que $\phi = \theta_{xx} = 0$. Consequentemente, usando a desigualdade de Poincaré, obtemos $\theta = \theta_x = 0$. Usando isto em (3.22) obtemos $u = 0$. Finalmente, de (3.26) e (3.24) obtemos respectivamente que $\psi = 0$ e $v = 0$. Assim $U = 0$, o que é uma contradição. Isto conclui a prova. ■

Agora para concluir as hipóteses do Teorema 2.18 e consequentemente, provar o decaimento exponencial do sistema (3.1), construímos os seguintes lemas técnicos.

Lema 3.7. *Sob as notações acima existe uma constante positiva C , tal que*

$$\|\phi\|^2, \|\theta\|^2, \|\theta_x\|^2, \|\theta_{xx}\|^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.28)$$

Prova. A prova segue imediatamente da estimativa (3.20) usando a desigualdade de Poincaré. ■

Lema 3.8. *Sob as notações acima existe uma constante positiva C , tal que*

$$\|\psi\|^2 \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (3.29)$$

Prova. Multiplicando a equação (3.26) por $\bar{\psi}$ e integrando por partes sobre $[0, l]$ temos

$$ic\lambda \int_0^l \theta \bar{\psi} dx - k \int_0^l \theta_{xx} \bar{\psi} dx + \beta \|\psi\|^2 = c \int_0^l f_5 \bar{\psi} dx. \quad (3.30)$$

Usando a equação (3.25) obtemos

$$\beta \|\psi\|^2 = -c \int_0^l \theta_x \bar{v}_x dx - \alpha c \int_0^l \theta \overline{(v-u)} dx + \delta c \|\theta_x\|^2 + k \int_0^l \theta_{xx} \bar{\psi} dx + \int_0^l \bar{f}_4 \theta dx + c \int_0^l f_5 \bar{\psi} dx. \quad (3.31)$$

Em seguida, usando a desigualdade de Young e o Lema 3.7 obtemos

$$\|\psi\|^2 \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (3.32)$$

Lema 3.9. *Sob as notações acima existe uma constante positiva C , tal que*

$$\|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u - v\|^2 \leq \varepsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (3.33)$$

Prova. Multiplicando as equações (3.23) e (3.25) por \bar{u} e \bar{v} respectivamente, realizando integrações por partes sobre $[0, l]$ e somando os resultados temos

$$\|u_x^2\|^2 + \|v_x^2\|^2 + \alpha\|u - v\|^2 = -i\lambda \int_0^l \phi \bar{u} dx - i\lambda \int_0^l \psi \bar{v} dx + \delta \int_0^l \theta_x \bar{v}_x dx - \gamma \int_0^l \phi \bar{u} dx + \int_0^l f_2 \bar{u} dx + \int_0^l f_4 \bar{v} dx.$$

Usando as equações (3.22), (3.24), as desigualdades de Poincaré e Young e os Lemas 3.7 e 3.8 obtemos

$$\|u_x\|^2 + \|v_x\|^2 + \|u - v\|^2 \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (3.34)$$

Isto conclui a prova. ■

No teorema abaixo, usamos os Lemas 3.7–3.9 para provar a estabilidade exponencial do sistema.

Teorema 3.10. *O semigrupo $S(t) = e^{tA}$ gerado por A é exponencialmente estável.*

Prova. De fato, somando as estimativas dos Lemas 3.7–3.9 obtemos

$$(1 - \varepsilon C) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (3.35)$$

Escolhendo $\varepsilon := 1/2C$, concluímos que existe uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.36)$$

Do Teorema 2.18 concluímos a prova. ■

3.3 Modelo semidiscreto em diferenças finitas

Esta seção é dedicada ao estudo da versão semidiscreta do sistema (3.1). Dentre os resultados apresentados, destacamos o decaimento exponencial do funcional energia semidiscreto, preservando assim, a propriedade teórica provada na Seção 3.2.

3.3.1 Notações e resultados auxiliares

Para nossos propósitos, será necessário introduzirmos algumas notações e resultados à priori apresentados em forma de lemas. Começamos com a discretização do domínio espacial $[0, l]$.

De fato, dado $J \in \mathbb{N}$ definimos $h := l/(J + 1)$ e introduzimos a malha espacial

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j = jh < \dots < x_J < x_{J+1} = l. \quad (3.37)$$

Dado $S = \{w(t) = (w_0(t), w_1(t), \dots, w_J(t), w_{J+1}(t)); w_0(t) = w_{J+1}(t) = 0\}$, definimos os operadores de diferenças finitas da seguinte forma:

Para uma função $w(t) \in S$ denotamos

$$\nabla_h w_j(t) := \frac{w_{j+1}(t) - w_j(t)}{h}, \quad \bar{\nabla}_h w_j(t) := \frac{w_j(t) - w_{j-1}(t)}{h}, \quad (3.38)$$

$$\Delta_h w_j(t) := \frac{w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)}{h^2}. \quad (3.39)$$

Usando as notações anteriores e as condições de contorno, podemos provar que os lemas seguintes são válidos.

Lema 3.11. *Suponha que $v, w \in S$. Então, vale a identidade seguinte*

$$h \sum_{j=1}^J v_j(t) (\Delta_h w_j(t)) = -h \sum_{j=0}^J \nabla_h v_j(t) \nabla_h w_j(t), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Prova. Seja $v, w \in S$. Então,

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J v_j(t) (\Delta_h w_j(t)) &= h \sum_{j=1}^J v_j(t) \frac{w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)}{h^2} \\ &= h \sum_{j=1}^J v_j(t) \frac{w_{j+1}(t) - w_j(t)}{h^2} - h \sum_{j=1}^J v_j(t) \frac{w_j(t) - w_{j-1}(t)}{h^2} \\ &= -h \sum_{j=0}^J \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \frac{w_{j+1}(t) - w_j(t)}{h}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Isto conclui a prova. ■

Lema 3.12. *Suponha que $w \in S$. Então, vale a estimativa seguinte*

$$h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h w_j(t)|^2, \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (3.41)$$

Prova. Seja $w \in S$. Do Lema 3.11, usando a desigualdade de Young obtemos

$$h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2 = -h \sum_{j=1}^J w_j(t) (\Delta_h w_j(t)) \leq \frac{1}{4\varepsilon} h \sum_{j=1}^J |w_j(t)|^2 + \varepsilon h \sum_{j=1}^J |\Delta_h w_j(t)|^2, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Usando a versão semidiscreta da desigualdade de Poincaré (ver Lema 2.27) na estimativa dada acima temos

$$h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2 \leq \frac{1}{4\lambda_1 \varepsilon} h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2 + \varepsilon h \sum_{j=1}^J |\Delta_h w_j(t)|^2, \quad (3.42)$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor associado ao operador laplaciano discreto. Escolhendo $\varepsilon := 1/2\lambda_1$ obtemos

$$h \sum_{j=0}^J |\nabla_h w_j(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h w_j(t)|^2. \quad (3.43)$$

Isto conclui a prova. ■

Agora, de posse das notações e das estimativas dadas acima, podemos dar prosseguimento ao estudo do sistema semidiscreto associado ao sistema (1.9)–(1.11).

3.4 Esquema semidiscreto

Consideramos a seguinte semidiscretização em diferenças finitas para o sistema (3.1).

$$u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha(u_j(t) - v_j(t)) + \gamma u_j'(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.44)$$

$$v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha(v_j(t) - u_j(t)) + \delta \Delta_h \theta_j(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.45)$$

$$c\theta_j'(t) - k\Delta_h \theta_j(t) + \beta v_j'(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.46)$$

onde " ' " denota derivada em relação ao tempo t e usamos $\Delta_h w_j(t)$ com $w_j(t) \in \{u_j(t), v_j(t), \theta_j(t)\}$ para denotar

$$\Delta_h w_j(t) := \frac{w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)}{h^2}.$$

O sistema (3.44)–(3.46) possui $3 \times J$ equações diferenciais lineares com $3 \times J$ variáveis $u_1(t), u_2(t), \dots, u_J(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_J(t)$ e $\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_J(t)$ a serem determinadas, com condições de contorno

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = v_0(t) = v_{J+1}(t) = \theta_0(t) = \theta_{J+1}(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in (0, T) \quad (3.47)$$

e condições iniciais

$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad v_j(0) = v_j^0, \quad v_j'(0) = v_j^1, \quad \theta_j(0) = \theta_j^0, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, J. \quad (3.48)$$

As funções $u_j(t)$, $v_j(t)$ e $\theta_j(t)$ são aproximações de $u(x_j, t)$, $v(x_j, t)$ e $\theta(x_j, t)$ respectivamente, sendo u , v e θ as soluções do sistema (1.9)–(1.11).

Além disso, o funcional energia do sistema (3.44)–(3.48) é dado por

$$\begin{aligned}
 E_h(t) := & \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |u_j(t)|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |v_j(t)|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 \\
 & + \alpha \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 + \frac{c\delta h}{\beta} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\theta_{j+1}(t) - \theta_j(t)}{h} \right|^2.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Observação 3.13. O funcional energia é construído mediante o uso de técnicas multiplicativas. Mais precisamente, multiplicamos as equações em (3.44), (3.45) e (3.46) por $u'_j(t)$, $v'_j(t)$ e $\theta_j(t)$ respectivamente. Em seguida, adicionamos para $j = 1, 2, \dots, J$ e usamos as condições de contorno dadas em (3.47). Somando os resultados obtidos e usando algumas regras de derivação no tempo, chegamos ao resultado desejado. Os detalhes da prova estão no Lema 3.15 que veremos à seguir.

3.5 Estabilidade exponencial semidiscreta

Nesta subseção, usamos o método da energia adaptado para o domínio semidiscreto, para provar que o funcional energia $E_h(t)$ dado em (3.49) decai exponencialmente. Até onde temos conhecimento, esta é a primeira vez, que o método da energia é usado para provar o decaimento exponencial de um sistema semidiscreto.

Teorema 3.14. *O funcional energia semidiscreto $E_h(t)$ do sistema (3.44)–(3.48) decai exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$. Ou seja, existem constantes positivas M e ω , independentes de h e dos dados iniciais, tais que*

$$E_h(t) \leq M E_h(0) e^{-\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.50}$$

A prova do Teorema 3.14 é estabelecida através de alguns lemas técnicos construídos à priori. O resultado sobre a natureza dissipativa da energia semidiscreta é dado à seguir.

Lema 3.15. *O funcional energia semidiscreto $E_h(t)$ do sistema (3.44)–(3.48) satisfaz a seguinte taxa de variação*

$$\frac{d}{dt} E_h(t) = -\gamma h \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 - \frac{\delta k}{\beta} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{3.51}$$

Prova. Multiplicando a equação (3.44) por $hu'_j(t)$ e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$ obtemos

$$\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^J |u'_j(t)|^2 - h \sum_{j=1}^J (\Delta_h u_j(t)) u'_j(t) + \alpha h \sum_{j=1}^J (u_j(t) - v_j(t)) u'_j(t) + \gamma h \sum_{j=1}^J |u'_j(t)|^2 = 0. \quad (3.52)$$

Usando o Lema 3.11 temos

$$h \sum_{j=1}^J (\Delta_h u_j(t)) u'_j(t) = -\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2. \quad (3.53)$$

Combinando as equações (3.52), (3.53) e usando as condições de contorno dadas em (3.47) obtemos

$$\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 + \alpha h \sum_{j=0}^J (u_j(t) - v_j(t)) u'_j(t) + \gamma h \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 = 0. \quad (3.54)$$

Analogamente, multiplicando a equação (3.45) por $hv'_j(t)$ temos

$$\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + \alpha h \sum_{j=0}^J (v_j(t) - u_j(t)) v'_j(t) + \delta h \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) = 0. \quad (3.55)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.46) por $-\frac{\delta}{\beta} h \Delta_h \theta_j(t)$ e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$ ficamos com

$$\frac{c\delta}{\beta} \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\theta_{j+1}(t) - \theta_j(t)}{h} \right|^2 + \frac{\delta k}{\beta} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2 - \delta h \sum_{j=0}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) = 0. \quad (3.56)$$

Adicionando as equações (3.54), (3.55) e (3.56) obtemos (3.51). Provando assim o lema. ■

Os lemas seguintes são extremamente técnicos, porém importantes para provarmos o decaimento exponencial do sistema (3.44)–(3.48).

Considere o funcional $\mathcal{F}_h(t)$ dado por

$$\mathcal{F}_h(t) := h \sum_{j=0}^J u'_j(t) u_j(t) + h \sum_{j=0}^J v'_j(t) v_j(t) + \frac{\gamma}{2} h \sum_{j=0}^J |u_j(t)|^2. \quad (3.57)$$

Lema 3.16. Para qualquer $h > 0$ e $(u_j(t), v_j(t), \theta_j(t))$ solução de (3.44)–(3.48) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_h(t) \leq & -h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 - h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 - \alpha h \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \\ & + Ch \sum_{j=0}^J |u'_j|^2 + Ch \sum_{j=0}^J |v'_j|^2 + Ch \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a equação (3.44) por $hu_j(t)$ e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$ e usando o Lema 3.11 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(h \sum_{j=0}^J u'_j(t) u_j(t) + \gamma \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |u_j(t)|^2 \right) - h \sum_{j=0}^J |u'_j|^2 + h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \\ + \alpha h \sum_{j=0}^J (u_j(t) - v_j(t)) u_j(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Analogamente, multiplicando a equação (3.45) por $hv_j(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(h \sum_{j=0}^J v'_j(t) v_j(t) \right) - h \sum_{j=0}^J |v'_j|^2 + h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + \alpha h \sum_{j=0}^J (v_j(t) - u_j(t)) v_j(t) \\ + \delta h \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v_j(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Adicionando as equações (3.58) e (3.59) e usando a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_h(t) \leq & -h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 - h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 - \alpha h \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \\ & + h \sum_{j=0}^J |u'_j|^2 + \frac{3}{2} h \sum_{j=0}^J |v'_j|^2 + \frac{|\delta|}{2} h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2. \end{aligned}$$

Isso completa a prova. ■

Consideremos o funcional $\mathcal{G}_h(t)$ dado por

$$\mathcal{G}_h(t) := ch \sum_{j=0}^J \theta_j(t) v'_j(t). \quad (3.60)$$

Lema 3.17. Para qualquer $h > 0$ e $(u_j(t), v_j(t), \theta_j(t))$ solução de (3.44)–(3.48) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}_h(t) \leq & -\frac{\beta}{2} h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 + \varepsilon_2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + \alpha \varepsilon_1 h \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \\ & + Ch \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2, \quad \text{para todo } \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Prova. Multiplicando a equação (3.46) por $\frac{h}{\delta} v'_j(t)$ e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$ obtemos

$$\frac{ch}{\delta} \sum_{j=1}^J \theta'_j(t) v'_j(t) - \frac{Kh}{\delta} \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) + \frac{\beta h}{\delta} \sum_{j=1}^J |v'_j(t)|^2 = 0. \quad (3.62)$$

Usando a identidade $\theta'_j(t) v'_j(t) = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_j(t) v'_j(t)) - \theta_j(t) v''_j(t)$ temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}_h(t) = \frac{ch}{\delta} \sum_{j=1}^J \theta_j(t) v''_j(t) + \frac{Kh}{\delta} \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) - \frac{h\beta}{\delta} \sum_{j=1}^J |v'_j(t)|^2, \quad (3.63)$$

onde

$$\mathcal{G}_h(t) := \frac{ch}{\delta} \sum_{j=0}^J \theta_j(t) v'_j(t).$$

Substituindo a equação (3.45) em (3.63) e usando as desigualdades de Young e de Poincaré (ver Lema 2.27) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}_h(t) &= \frac{ch}{\delta} \sum_{j=1}^J \theta_j(t) \left(\Delta_h v_j(t) - \alpha (v_j(t) - u_j(t)) - \delta \Delta_h \theta_j(t) \right) + \frac{Kh}{\delta} \sum_{j=1}^J (\Delta_h \theta_j(t)) v'_j(t) - \frac{h\beta}{\delta} \sum_{j=1}^J |v'_j(t)|^2 \\ &\leq -\frac{\beta}{2\delta} h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 - \frac{ch}{\delta} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}(t) - \theta_j(t)}{h} \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right) + C \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2 \\ &\quad + \alpha h \varepsilon_1 \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2 \\ &\leq -\frac{\beta}{2\delta} h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 + h \varepsilon_2 \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + C \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2 + \alpha h \varepsilon_1 \sum_{j=0}^J |u_j(t) - v_j(t)|^2. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. ■

Agora estamos em condições de provarmos um dos principais resultados deste capítulo.

3.5.1 Prova do Teorema 3.14

Aqui usamos os lemas técnicos previamente construídos para provarmos o resultado de estabilização exponencial do sistema (3.44)–(3.48).

Definimos o funcional de Lyapunov semidiscreto dado por

$$\mathcal{L}_h(t) := N_1 E_h(t) + \mathcal{F}_h(t) + N_2 \mathcal{G}_h(t), \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (3.64)$$

onde os coeficientes N_1 e N_2 são escolhidos posteriormente. Além disso, é simples provar que $\mathcal{L}_h(t)$ e $E_h(t)$ são equivalentes. De fato, segue das desigualdades de Young e de Poincaré (ver Lema 2.27) que existe uma constante $0 < c < N_1$ tal que

$$|\mathcal{L}_h(t) - N_1 E_h(t)| \leq |\mathcal{F}_h(t)| + |N_2 \mathcal{G}_h(t)| \leq c E_h(t), \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$(N_1 - c)E_h(t) \leq \mathcal{L}_h(t) \leq (N_1 + c)E_h(t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (3.65)$$

Em particular, (3.65) prova que o ítem (i) do Teorema 2.2 é satisfeito.

Agora substituindo os resultados dos Lemas 3.15, 3.16 e 3.17 na derivada de $\mathcal{L}_h(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) &\leq -(N_1 \gamma - C)h \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 - (N_2 \beta / 2 - C)h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 - h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \\ &\quad - (1 - N_2 \varepsilon_2)h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 - (1 - N_2 \varepsilon_1)\alpha h \sum_{j=0}^J |v_j(t) - u_j(t)|^2 \\ &\quad - (N_1 \delta k / \beta - C - N_2 C)h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Ao escolhermos $N_2 > 2C/\beta$, $\varepsilon_2 := 1/2N_2$, $\varepsilon_1 := 1/2N_2$ e N_1 suficientemente grande, tal que $N_1 > \max\{C/\gamma, (1 + N_2)\beta C/\delta k\} > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= N_1 \gamma - C > 0, & \xi_2 &:= N_2 \beta / 2 - C > 0, & \xi_3 &:= 1 - N_2 \varepsilon_2 > 0, \\ \xi_4 &:= 1 - N_2 \varepsilon_1 > 0, & \xi_5 &:= N_1 \delta k / \beta - C - N_2 C > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) \leq & -\xi_1 h \sum_{j=0}^J |u'_j(t)|^2 - \xi_2 h \sum_{j=0}^J |v'_j(t)|^2 - h \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 - \xi_3 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 \\ & - \xi_4 \alpha h \sum_{j=0}^J |v_j(t) - u_j(t)|^2 - \xi_5 h \sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Usando o Lema 3.12 no termo $\sum_{j=1}^J |\Delta_h \theta_j(t)|^2$, podemos concluir que existe uma constante positiva $\eta := \min \{2, 2\xi_1, 2\xi_2, 2\xi_3, 2\xi_4, 2\lambda_1 \xi_5\} > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) \leq -\eta E_h(t). \quad (3.68)$$

Combinando (3.65) com (3.68) obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_h(t) \leq -\frac{\eta}{N_1 + c} \mathcal{L}_h(t), \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (3.69)$$

Isto prova que o ítem (ii) do Teorema 2.2 é satisfeito.

Finalmente, usando o Lema de Gronwall 2.21 e a estimativa (3.65) obtemos

$$E_h(t) \leq \frac{N_1 + c}{N_1 - c} E_h(0) e^{-\frac{\eta}{N_1 + c} t}, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (3.70)$$

em que $N_1 > c$. Isto nos dá (3.50) com $M := \frac{N_1 + c}{N_1 - c} > 1$ e $\omega := \frac{\eta}{N_1 + c} > 0$.

3.6 Modelo totalmente discreto em diferenças finitas

Nesta seção, introduzimos um esquema numérico que combina os métodos explícito (nas equações hiperbólicas) e implícito (na equação parabólica) para o estudo do sistema (3.1). Provamos que o funcional energia totalmente discreto é uma forma quadrática positiva definida com taxa de variação negativa, desde que, seja considerada uma condição de estabilidade envolvendo os parâmetros de malha $\{\Delta t, \Delta x\}$. Por fim, construímos um esquema vetorial explícito, para a simulação numérica do sistema.

3.6.1 Esquema totalmente discreto

Consideramos o sistema (3.1) em $[0, l] \times [0, T]$ e em seguida, discretizamos o retângulo $[0, l] \times [0, T]$. Dados $J, N \in \mathbb{N}$, definimos os parâmetros de malha $\Delta x = \frac{l}{J+1}$, $\Delta t = \frac{T}{N+1}$ e introduzimos a malha

$$0 = x_0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_j = j\Delta x < x_J < x_{J+1} = (J+1)\Delta x = l, \quad (3.71)$$

$$0 = t_0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_n = n\Delta t < t_N < t_{N+1} = (N+1)\Delta t = T, \quad (3.72)$$

com $j = 0, 1, 2, \dots, J+1$ e $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$.

Agora consideramos a seguinte discretização de diferenças finitas para o sistema (1.9)–(1.11)

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \alpha(u_j^n - v_j^n) + \gamma \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = 0, \quad (3.73)$$

$$\frac{v_j^{n+1} - 2v_j^n + v_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \alpha(v_j^n - u_j^n) + \delta \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad (3.74)$$

$$c \frac{\theta_j^n - \theta_j^{n-1}}{\Delta t} - k \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = 0, \quad (3.75)$$

onde $j = 1, 2, \dots, J$ e $n = 1, 2, \dots, N$.

Denotamos por $(u_j^n, v_j^n, \theta_j^n)$ a aproximação numérica para as solução (u, v, θ) nos pontos (x_j, t_n) da malha. Para as condições de contorno, usamos

$$u_0^n = u_{J+1}^n = v_0^n = v_{J+1}^n = \theta_0^n = \theta_{J+1}^n = 0, \quad \text{para todo } n = 0, 1, \dots, N+1, \quad (3.76)$$

e para as condições iniciais, adotamos

$$u_j^0 = u_{0j}, \quad \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\Delta t} = u_{1j}, \quad v_j^0 = v_{0j}, \quad \frac{v_j^1 - v_j^{-1}}{2\Delta t} = v_{1j}, \quad \theta_j^0 = \theta_{0j}, \quad \text{para todo } j = 0, 1, \dots, J+1. \quad (3.77)$$

Observação 3.18. Note que ao usarmos os operadores clássicos de diferenças finitas para aproximação das derivadas, obtemos um esquema numérico consistente de acordo com a Definição 2.24.

3.6.2 Energia discreta e taxa de variação

Nesta subseção usamos técnicas multiplicativas adaptadas ao domínio totalmente discreto para construir o funcional energia discreto do sistema (3.73)–(3.77). Em seguida, provamos que o funcional é uma forma quadrática positiva com taxa de variação numérica negativa.

Afirmamos que o funcional energia discreto do sistema (3.73)–(3.77) é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^n := & \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\ & + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \right) + \frac{c\delta}{\beta} \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2 \\ & + \alpha \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - v_j^{n+1})(u_j^n - v_j^n). \end{aligned} \quad (3.78)$$

O teorema seguinte prova nossa afirmação.

Teorema 3.19. *Seja $(u_j^n, v_j^n, \theta_j^n)$ a solução numérica do sistema (3.73)–(3.77). Assim, para todo $\Delta x, \Delta t \in (0, 1)$ a taxa de variação do funcional energia discreto \mathbf{E}^n em (3.78) no instante t_n é dada por*

$$\frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} \leq -\gamma \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 - \frac{\delta k}{\beta} \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right|^2 \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Em particular $\mathbf{E}^n \leq \mathbf{E}^0$ para todo $n = 1, 2, \dots, N$.

Prova. Multiplicando a equação (3.73) por $\Delta x \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)$ e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$ temos

$$\begin{aligned} & \Delta x \sum_{j=1}^J \underbrace{\left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)}_{\mathcal{R}_1^n} - \Delta x \sum_{j=1}^J \underbrace{\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)}_{\mathcal{R}_2^n} \\ & + \alpha \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \underbrace{(u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})}_{\mathcal{R}_3^n} + \gamma \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Fazendo algumas simplificações nos termos de (3.79) e tendo em mente as condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^n & := \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ & = \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right) \\ & = \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \mathcal{S}_1^n(u), \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde

$$\mathcal{S}_1^n(u) := \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_0^n - u_0^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\Delta t} \right)^2.$$

Analogamente, após algumas simplificações, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2^n &:= \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1}}{\Delta x} \right) + \mathcal{S}_2^n(u) \\ &= -\frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_j^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) + \mathcal{S}_2^n(u), \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde

$$\mathcal{S}_2^n(u) := \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_{J+1}^n - u_J^n}{\Delta x} \frac{u_{J+1}^{n+1} - u_{J+1}^{n-1}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} \frac{u_0^{n+1} - u_0^{n-1}}{\Delta x} \right).$$

Também concluímos que

$$\mathcal{R}_3^n := \sum_{j=1}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) = \sum_{j=0}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \mathcal{S}_3^n(u, v), \quad (3.82)$$

em que

$$\mathcal{S}_3^n(u, v) := -(u_0^n - v_0^n)(u_0^{n+1} - u_0^{n-1}).$$

Substituindo (3.80), (3.81) e (3.82) na equação (3.79) temos

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \alpha \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) \\ &+ \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_j^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ &+ \delta \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \gamma \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 \\ &+ \mathcal{S}_1^n(u) + \mathcal{S}_2^n(u) + \mathcal{S}_3^n(u, v) = 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Analogamente, da equação (3.74) obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \alpha \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J (v_j^n - u_j^n)(v_j^{n+1} - v_j^{n-1}) \\
& + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} - \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + \delta \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \mathcal{S}_1^n(v) + \mathcal{S}_2^n(v) + \mathcal{S}_3^n(v, u) = 0. \tag{3.84}
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando a equação (3.75) por $-\frac{\delta \Delta x}{\beta} \left(\frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right)$ e adicionando para $j = 1, \dots, J$, temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{c\delta}{\beta} \Delta x \sum_{j=1}^J \underbrace{\left(\frac{\theta_j^n - \theta_j^{n-1}}{\Delta t} \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right)}_{\mathcal{R}_{j,n}^4} + \frac{\delta k}{\beta} \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right|^2 \\
& - \delta \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) = 0. \tag{3.85}
\end{aligned}$$

Agora simplificamos o termo \mathcal{R}_4^n e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_4^n & := \sum_{j=1}^J \left(\frac{\theta_j^n - \theta_j^{n-1}}{\Delta t} \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\
& = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \frac{\theta_j^n - \theta_j^{n-1}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\theta_j^n - \theta_{j-1}^n}{\Delta x} \frac{\theta_j^n - \theta_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \frac{\theta_j^n - \theta_j^{n-1}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \frac{\theta_{j+1}^n - \theta_{j+1}^{n-1}}{\Delta x} \right) - \mathcal{S}_4^n(\theta) \\
& = -\frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \frac{\theta_{j+1}^{n-1} - \theta_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \right] - \mathcal{S}_4^n(\theta) \\
& \leq -\frac{1}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{\theta_{j+1}^{n-1} - \theta_j^{n-1}}{\Delta x} \right)^2 \right] - \mathcal{S}_4^n(\theta), \tag{3.86}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{S}_4^n(\theta) := \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\theta_1^n - \theta_0^n}{\Delta x} \frac{\theta_0^n - \theta_0^{n-1}}{\Delta x} - \frac{\theta_{J+1}^n - \theta_J^n}{\Delta x} \frac{\theta_{J+1}^n - \theta_{J+1}^{n-1}}{\Delta x} \right).$$

Substituindo (3.86) na equação (3.85) ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{c\delta}{\beta} \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{\theta_{j+1}^{n-1} - \theta_j^{n-1}}{\Delta x} \right)^2 \right] + \frac{\delta k}{\beta} \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right|^2 \\ & - \delta \Delta x \sum_{j=1}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) + \mathcal{S}_4^n(\theta) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Adicionando as equações (3.83), (3.84) e (3.87) temos

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\ & - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_j^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ & + \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} - \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} \frac{v_j^{n-1} - v_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ & + \frac{\alpha \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - v_j^{n+1})(u_j^n - v_j^n) - \frac{\alpha \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n-1} - v_j^{n-1}) \\ & + \frac{c\delta}{\beta} \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{\theta_{j+1}^{n-1} - \theta_j^{n-1}}{\Delta x} \right)^2 \right] + \frac{\delta k}{\beta} \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right|^2 \\ & + \gamma \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 + \mathcal{S}_1^n(u) + \mathcal{S}_2^n(u) + \mathcal{S}_3^n(u, v) + \mathcal{S}_1^n(v) + \mathcal{S}_2^n(v) + \mathcal{S}_3^n(v, u) + \mathcal{S}_4^n(\theta) \leq 0. \end{aligned}$$

Usando as condições de contorno (3.76) obtemos

$$\mathcal{S}_1^n(u) + \mathcal{S}_2^n(u) + \mathcal{S}_3^n(u, v) + \mathcal{S}_1^n(v) + \mathcal{S}_2^n(v) + \mathcal{S}_3^n(v, u) + \mathcal{S}_4^n(\theta) = 0.$$

Finalmente, usando a energia \mathbf{E}^n em (3.78) temos

$$\frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} \leq -\gamma \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right|^2 - \frac{\delta k}{\beta} \Delta x \sum_{j=1}^J \left| \frac{\theta_{j+1}^n - 2\theta_j^n + \theta_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right|^2 \leq 0, \text{ para todo } n = 1, 2, \dots, N.$$

Em particular $\mathbf{E}^n \leq \mathbf{E}^0$ para todo $n = 1, 2, \dots, N$. Isto conclui a prova. ■

Proposição 3.20 (Positividade da energia). *Se $\Delta t \leq \Delta x / \sqrt{1 + \alpha \Delta x^2 / 2}$, então para toda solução não trivial do sistema discreto (3.73)–(3.77) temos*

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}^n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) \sum_{j=0}^J \left[(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + (v_j^{n+1} - v_j^n)^2 \right] \\ &\quad + \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J \left[(u_j^n - v_j^n) + (u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \right]^2 + \frac{c\delta}{\beta} \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2 \geq 0, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Prova. Levando em conta as condições de contorno de Dirichlet homogêneas em (3.76) e as identidades

$$\sum_{j=0}^J w_{j+1}^{n+1} w_{j+1}^n = \sum_{j=0}^J w_j^{n+1} w_j^n, \quad \sum_{j=0}^J |w_{j+1}^n|^2 = \sum_{j=0}^J |w_j^n|^2, \quad \sum_{j=0}^J |w_{j+1}^{n+1}|^2 = \sum_{j=0}^J |w_j^{n+1}|^2, \quad (3.88)$$

para todos $w_j^n \in \{u_j^n, v_j^n, \theta_j^n\}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}^n}{\Delta x} &= \frac{1}{2\Delta t^2} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{2\Delta t^2} \sum_{j=0}^J (v_j^{n+1} - v_j^n)^2 + \frac{1}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1})(v_{j+1}^n - v_j^n) + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \\ &\quad + \frac{c\delta}{\beta} \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Usando a identidade elementar $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$ onde $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) = \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J \left[(u_j^n - v_j^n) + (u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \right]^2 - \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J \left[(v_j^{n+1} - v_j^n) - (u_j^{n+1} - u_j^n) \right]^2,$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) &= -\frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J (v_j^{n+1} - v_j^n)^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{4} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)(v_j^{n+1} - v_j^n) \\ &\quad + \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J \left[(u_j^n - v_j^n) + (u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Agora, usando a desigualdade $2xy \geq -(x^2 + y^2)$ onde $x, y \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{\alpha}{4} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)(v_j^{n+1} - v_j^n) \geq -\frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J (v_j^{n+1} - v_j^n)^2. \quad (3.91)$$

De (3.90) e (3.91) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^J (u_j^n - v_j^n)(u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) &\geq -\frac{\alpha}{4} \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - \frac{\alpha}{4} \sum_{j=0}^J (v_j^{n+1} - v_j^n)^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J \left[(u_j^n - v_j^n) + (u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

De (3.89) e (3.92) temos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}^n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\alpha}{2} \right) \sum_{j=0}^J (v_j^{n+1} - v_j^n)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})(u_{j+1}^n - u_j^n) + \frac{1}{2\Delta x^2} \sum_{j=0}^J (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1})(v_{j+1}^n - v_j^n) \\ &\quad + \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J \left[(u_j^n - v_j^n) + (u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \right]^2 + \frac{c\delta}{\beta} \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Observe que tendo em vista as identidades em (3.88) e a desigualdade $-2xy \geq -(x^2 + y^2)$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})(u_{j+1}^n - u_j^n) &= \sum_{j=0}^J (u_{j+1}^{n+1}u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n+1}u_j^n - u_j^{n+1}u_{j+1}^n + u_j^{n+1}u_j^n) \\ &= \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1}u_j^n - u_{j+1}^{n+1}u_j^n - u_j^{n+1}u_{j+1}^n + u_j^{n+1}u_j^n) \\ &= \sum_{j=0}^J (2u_j^{n+1}u_j^n - u_{j+1}^{n+1}u_j^n - u_j^{n+1}u_{j+1}^n) \\ &\geq \sum_{j=0}^J (2u_j^{n+1}u_j^n - \frac{1}{2}|u_{j+1}^{n+1}|^2 - \frac{1}{2}|u_j^n|^2 - \frac{1}{2}|u_j^{n+1}|^2 - \frac{1}{2}|u_{j+1}^n|^2) \\ &= \sum_{j=0}^J (2u_j^{n+1}u_j^n - \frac{1}{2}|u_j^{n+1}|^2 - \frac{1}{2}|u_j^n|^2 - \frac{1}{2}|u_j^{n+1}|^2 - \frac{1}{2}|u_j^n|^2) \\ &= -\sum_{j=0}^J (|u_j^{n+1}|^2 + |u_j^n|^2 - 2u_j^{n+1}u_j^n) = -\sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\sum_{j=0}^J (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})(u_{j+1}^n - u_j^n) \geq - \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2. \quad (3.94)$$

Analogamente, temos

$$\sum_{j=0}^J (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1})(v_{j+1}^n - v_j^n) \geq - \sum_{j=0}^J (v_j^{n+1} - v_j^n)^2. \quad (3.95)$$

Finalmente, segue de (3.93), (3.94) e (3.95) que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}^n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) \sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) \sum_{j=0}^J (v_j^{n+1} - v_j^n)^2 \\ &\quad + \frac{\alpha}{8} \sum_{j=0}^J \left[(u_j^n - v_j^n) + (u_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \right]^2 + \frac{c\delta}{\beta} \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\theta_{j+1}^n - \theta_j^n}{\Delta x} \right)^2 > 0, \end{aligned} \quad (3.96)$$

desde que $\Delta t \leq \Delta x / \sqrt{1 + \alpha \Delta x^2 / 2}$. Isto conclui a prova. ■

Observação 3.21. Isto mostra que \mathbf{E}^n ($n = 1, \dots, N$) é uma forma quadrática positiva definida.

Corolário 3.22 (Estabilidade). *O esquema numérico (3.73)–(3.77) é estável se, e somente se,*

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \alpha \Delta x^2 / 2}}.$$

3.7 Simulação numérica

Para a simulação numérica do sistema discreto (3.73)–(3.77), introduzimos um novo esquema numérico explícito na forma vetorial. Mas antes, precisamos definir algumas matrizes importantes.

Denotamos por $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{J \times J}(\mathbb{R})$ a matriz tridiagonal associada à aproximação do operador laplaciano e por $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{J \times J}(\mathbb{R})$ a matriz diagonal dada por

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{J \times J} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & b & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}_{J \times J},$$

onde $b := \alpha\Delta t^2/r^2 - 2/r^2$ com $r = \Delta t/\Delta x$. Definimos a matriz

$$\mathbf{M} := \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad (3.97)$$

e por $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2^\pm \in \mathcal{M}_{J \times J}(\mathbb{R})$ as matrizes de massa

$$\mathbf{D}_1 := \left[\mathbf{I} + \frac{k\Delta t}{C\Delta x^2} \mathbf{A} \right]^{-1}, \quad \mathbf{D}_2^+ := \left[\mathbf{I} + \frac{\beta\delta r^2}{2c} \mathbf{A} \mathbf{D}_1 \right]^{-1}, \quad \mathbf{D}_2^- := \left[\mathbf{I} - \frac{\beta\delta r^2}{2c} \mathbf{A} \mathbf{D}_1 \right]^{-1}.$$

Se denotarmos $U^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_J^n)^\top$, $V^n = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_J^n)^\top$ e $\Theta^n = (\theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_J^n)^\top$, $n = 0, 1, \dots, N$, então o esquema (3.73)–(3.77) assume a seguinte forma vetorial:

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{n+1} = -\frac{2r^2}{2 + \gamma\Delta t} \mathbf{M} U^n - \frac{2 - \gamma\Delta t}{2 + \gamma\Delta t} U^{n-1} + \frac{2\alpha\Delta t^2}{2 + \gamma\Delta t} V^n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ V^{n+1} = -r^2 \mathbf{D}_2^+ \mathbf{M} V^n + \alpha\Delta t^2 \mathbf{D}_2^+ U^n - \mathbf{D}_2^+ \left(\mathbf{I} - \frac{\beta\delta r^2}{2c} \mathbf{A} \mathbf{D}_1 \right) V^{n-1} + \delta r^2 \mathbf{D}_2^+ \mathbf{A} \mathbf{D}_1 \Theta^{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \Theta^n = \mathbf{D}_1 \left(\mathbf{I} - \frac{\beta\delta r^2}{2c} \mathbf{D}_2^+ \mathbf{A} \mathbf{D}_1 \right) \Theta^{n-1} + \frac{\beta}{2c} \mathbf{D}_1 \left[\mathbf{I} + \mathbf{D}_2^+ \left(\mathbf{I} - \frac{\beta\delta r^2}{2c} \mathbf{A} \mathbf{D}_1 \right) \right] V^{n-1} \\ \quad + \frac{\beta r^2}{2c} \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2^+ \mathbf{M} V^n - \frac{\alpha\beta\Delta t^2}{2c} \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2^+ U^n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ U^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_J^0)^\top, \quad U^1 - U^{-1} = 2\Delta t (u_1^1, u_2^1, \dots, u_J^1)^\top, \\ V^0 = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_J^0)^\top, \quad V^1 - V^{-1} = 2\Delta t (v_1^1, v_2^1, \dots, v_J^1)^\top, \quad \Theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_J^0)^\top. \end{array} \right. \quad (3.98)$$

Observação 3.23. O procedimento usado para construir o esquema explícito (3.98), consiste primeiro em reescrever as equações do sistema numérico (3.73)–(3.77) na forma vetorial e depois fazer combinações das equações resultantes, até que seja possível remover os termos que tornam o problema implícito.

Agora vamos apresentar alguns exemplos numéricos, principalmente no que diz respeito ao comportamento da energia discreta \mathbf{E}^n dada em (3.78), com o objetivo de confirmar os resultados teóricos estabelecidos nas seções anteriores.

Para nossos propósitos, consideramos $l = 1$, $T = 5$ e para a malha computacional adotamos $\Delta x = 1/32$ e $\Delta t = 1/64$. Usamos $\alpha = 2.75$, $c = 3$, $k = 1$, $\beta = 4$, seguido das condições iniciais

$$\begin{aligned} u(x_j, 0) = v(x_j, 0) = \theta(x_j, 0) &= \sin\left(\frac{\nu\pi x_j}{l}\right), & \nu \in \mathbb{N}, \\ u_t(x_j, 0) = v_t(x_j, 0) &= \sin\left(\frac{\nu\pi x_j}{l}\right), & \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

A precisão do esquema numérico (3.98) pode ser vista através da taxa de conservação de energia. De fato, tomando \mathbf{E}^n sem amortecimento (*i.e.*, $\gamma = \delta = 0$), obtemos $\mathbf{E}^n = \mathbf{E}^0$ para todo $n = 1, 2, \dots, N$, ou seja, a energia \mathbf{E}^n é conservativa, como podemos ver na Figura 3.1 (lado esquerdo). Ainda na Fi-

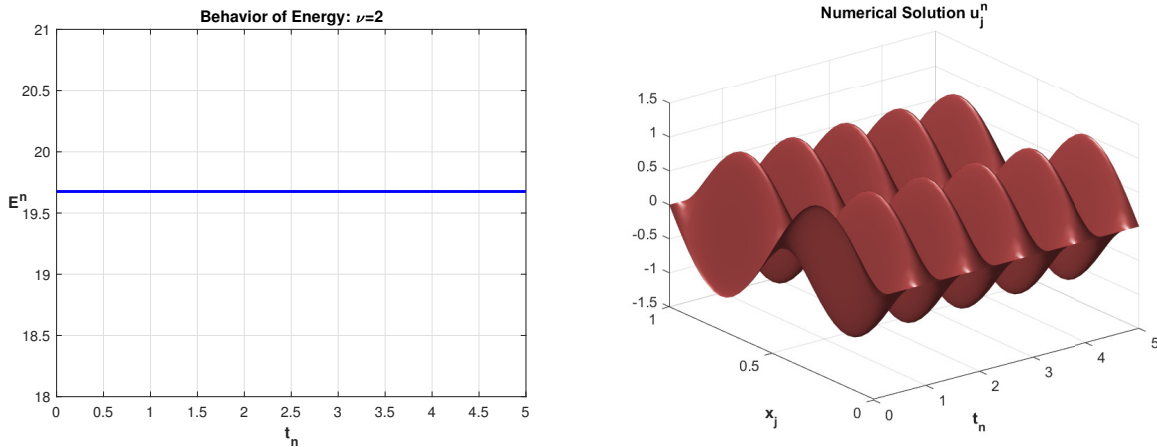


FIGURA 3.1: Energia e solução numérica u_j^n .

gura 3.1 (lado direito), temos a solução numérica u_j^n considerando as condições iniciais (3.99) com $\nu = 2$. Observamos que u_j^n matém um comportamento padrão ao longo do tempo t_n , o que corrobora a conservação de energia. A solução numérica de v_j^n é semelhante à u_j^n por causa da natureza do sistema e das condições iniciais adotadas. Por sua vez, a solução numérica θ_j^n está mais acoplada ao sistema.

No próximo exemplo adotamos $\gamma > 0$ e $\delta = 0$, ou seja, analisamos o caso em que apenas o amortecimento por atrito é considerado. Na Figura 3.2, observamos que a solução numérica u_j^n diminui rapidamente ao longo do tempo devido à atuação do mecanismo dissipativo controlado por $\gamma > 0$. No entanto, apesar de haver um acoplamento entre as equações (3.73) e (3.74), o decaimento rápido não está presente na solução v_j^n . O último gráfico da Figura 3.2 também mostra um decaimento muito lento da solução θ_j^n , o que supostamente não deveria ocorrer, pois temos uma equação do calor parabólica. Porém, o acoplamento entre as equações (3.74) e (3.75) que ocorre em β , deteriora o suposto decaimento rápido de θ_j^n . Ainda na Figura 3.2, observamos um decaimento lento da energia das soluções do sistema. Isto é comprovado no gráfico ao lado (direito), que trata do comportamento da energia plotada na escala semilog ($t_n, \log(\mathbf{E}^n)$), o qual não descreve uma linha reta. Isto indica que a energia não tem um comportamento exponencial.

Agora, quando consideramos o caso parcialmente amortecido, isto é, com $\gamma > 0$ e $\delta > 0$, observamos na Figura 3.3, um decaimento rápido da solução $(w_j^n, v_j^n, \theta_j^n)$ e da energia E^n ao longo do tempo t_n . Além disso, o decaimento exponencial de E^n é comprovado pelo gráfico na escala semilog $(t_n, \log(E^n))$. Este resultado de decaimento exponencial corrobora os resultados teóricos obtidos nos Teoremas 3.10 e 3.50, pois em ambos, podemos concluir que a energia do sistema é controlada por uma função exponencialmente decrescente $e^{-\omega t}$ com $\omega > 0$.

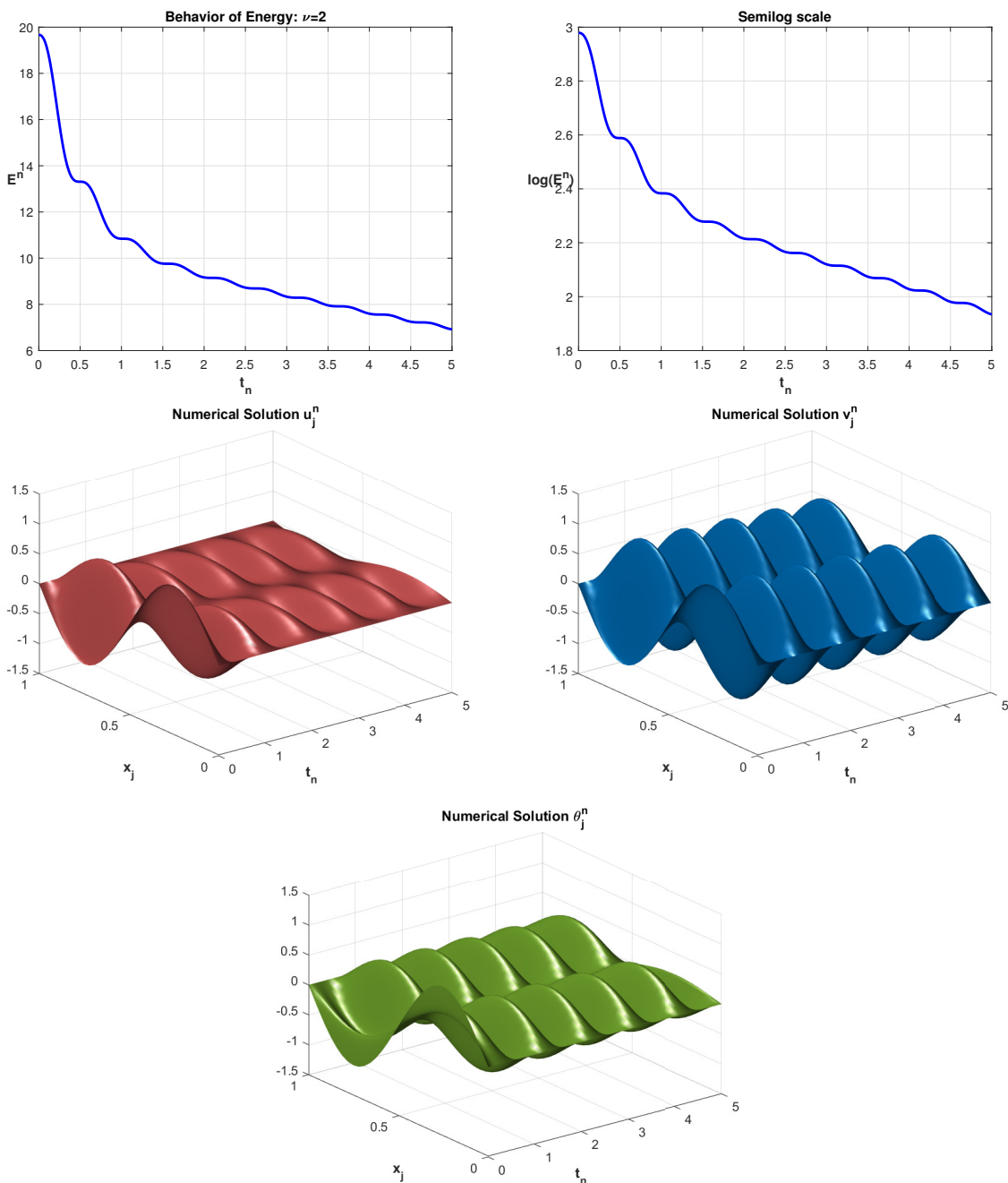
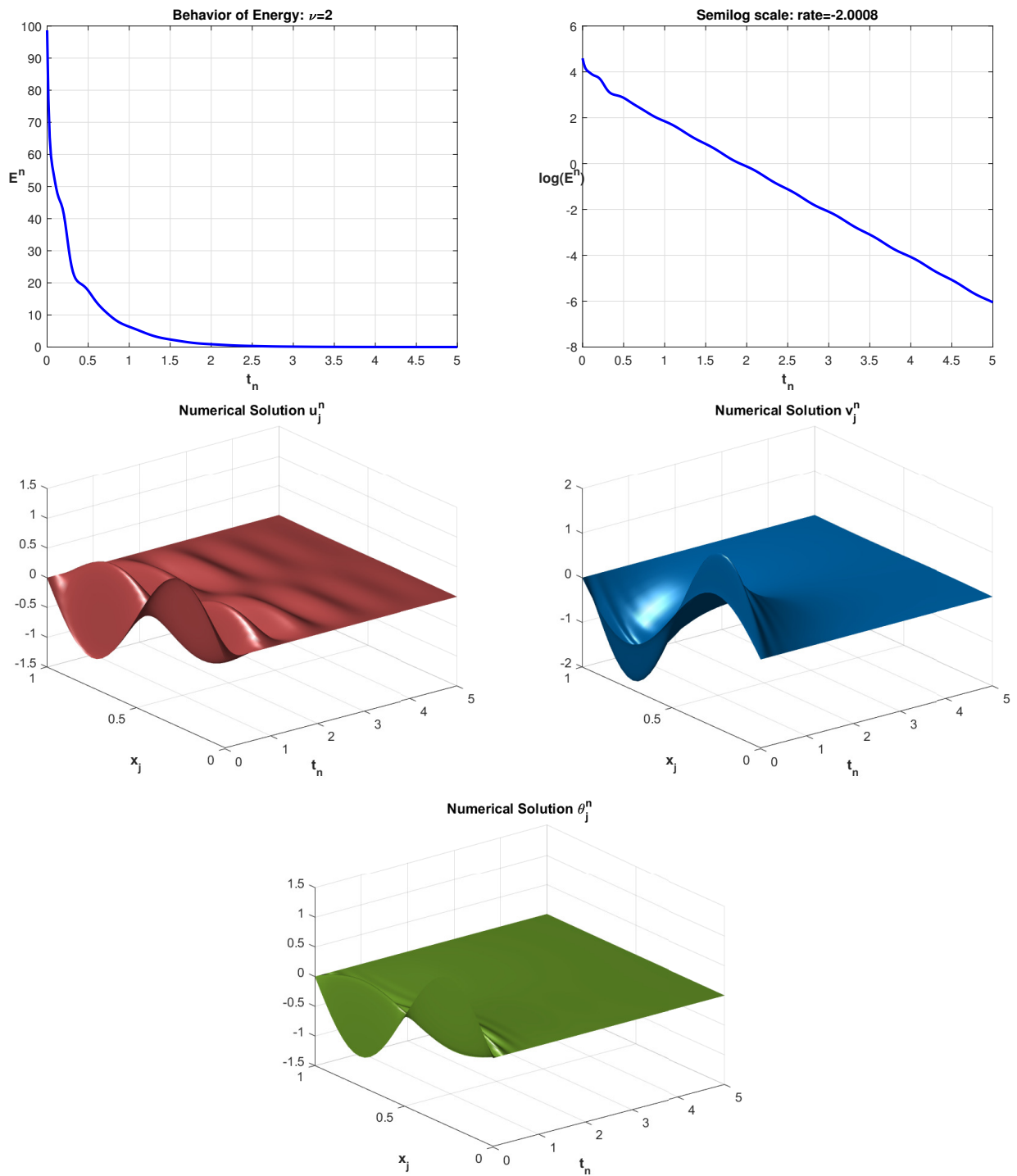


FIGURA 3.2: Simulação numérica com $\gamma > 0$ e $\delta = 0$.

FIGURA 3.3: Simulação numérica com $\gamma > 0$ e $\delta > 0$.

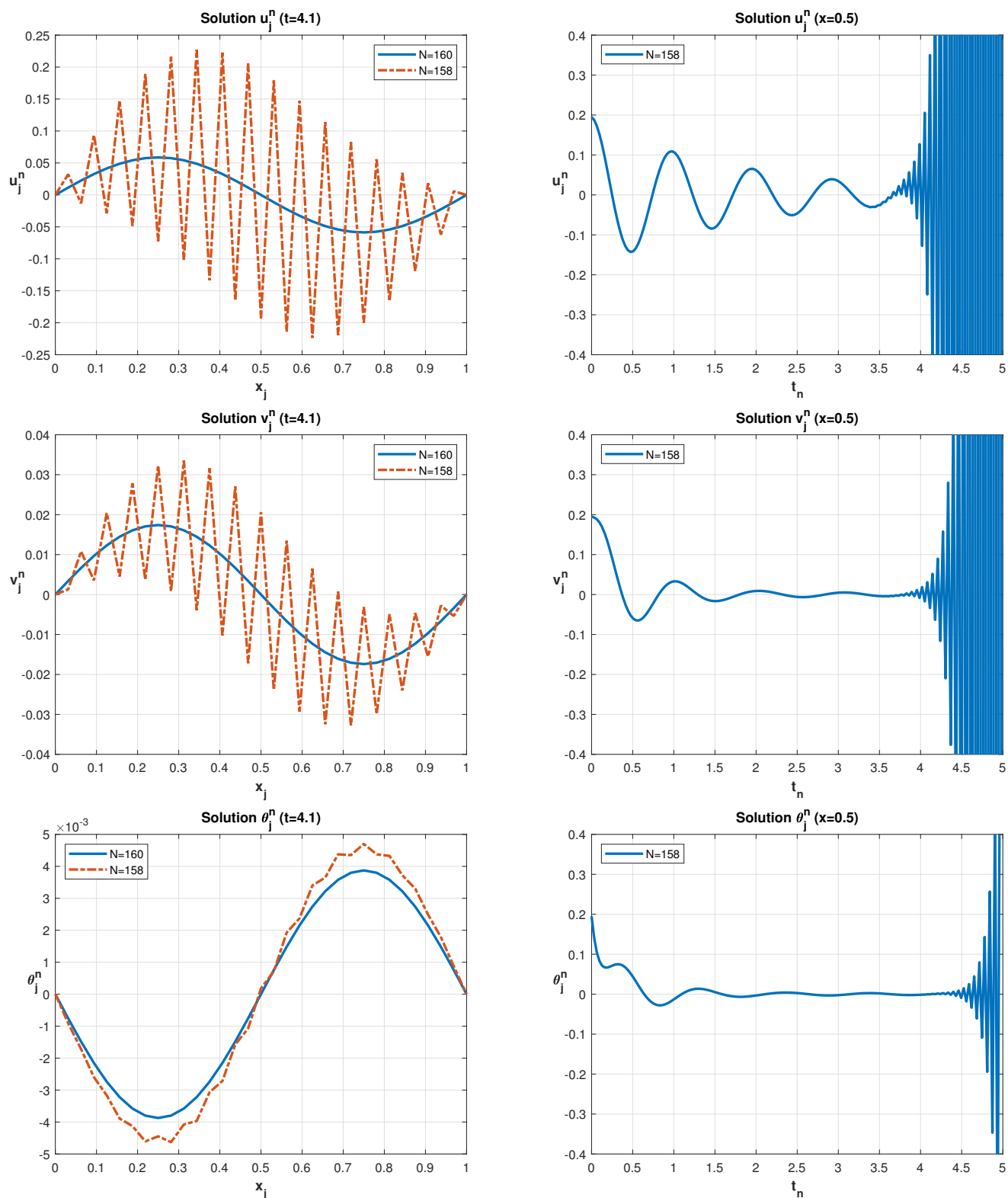
3.8 Teste da condição de estabilidade

Nas próximas simulações, testamos a robustez da condição de estabilidade do esquema numérico (3.73)–(3.77). Mais precisamente, estamos interessados em mostrar que a condição

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \alpha \Delta x^2 / 2}}, \quad (3.100)$$

apresentada no Corolário 3.22, estabelece de fato, um condição de estabilidade numérica para o esquema de diferenças finitas (3.73)–(3.77). Para nossos propósitos, consideramos os mesmos valores das constantes usadas na Seção 3.7 com destaque para $\alpha = 2.75$. Em seguida, assumimos $l = 1$, $J = 32$, $T = 5$, e para que a condição (3.100) seja satisfeita precisamos assumir $N \geq 160$. Na Figura 3.4 (coluna à esquerda), mostramos as soluções $(u_j^n, v_j^n, \theta_j^n)$ para $t_n = 4.1$. É possível observar que de fato, a condição (3.100) é necessária para se obter a estabilidade das soluções $(u_j^n, v_j^n, \theta_j^n)$. Basta notar que para um valor de $N < 160$ (mais precisamente $N = 158$) os gráficos apresentam soluções espúrias, o que caracteriza uma instabilidade. Ainda observando a Figura 3.4 (coluna à direita) para $x_j = 0,5$ e $0 \leq t_n \leq 5$, observamos que devido à instabilidade ocorre um blow-up nas soluções e conseqüentemente a falta de convergência do esquema numérico.

Neste contexto, é importante ressaltar que para $N \geq 160$ implica em $r := \Delta t / \Delta x \leq 1$, que corresponde à condição CFL clássica estabelecida para o esquema explícito de diferenças finitas da equação da onda [39]. Isto nos faz refletir se a condição (3.100) é de fato necessária para o esquema explícito (3.73)–(3.77), ou seja, se a condição $r \leq 1$ não seria suficiente. Observe que para $\alpha = 0$, estes critérios são idênticos. No entanto, para $\alpha > 0$, a condição (3.100) é mais restritiva que a condição clássica $r \leq 1$, e portanto a condição (3.100) deverá prevalecer. Para ilustração, realizamos simulações com α devidamente grande. Em particular, consideramos $T = 5$, $l = 1$, $J = 32$ como no exemplo anterior, porém adotamos $\alpha = 1024$ e olhamos para a condição (3.100), que sugere $N \geq 196$ e conseqüentemente $r \approx 0.81633$. Na Figura 3.5 (coluna à esquerda), observamos que para $N = 196$, as soluções permanecem estáveis, o que é perfeitamente normal pois satisfaz tanto a condição (3.100) quanto a condição $r \leq 1$. Por outro lado, escolhendo $N = 194$, valor que não atende à condição (3.100), notamos uma instabilidade numérica descrita nos gráficos com linhas tracejadas. Neste último caso ($N = 194$) obtemos $r \approx 0.82474$, ou seja, ainda temos $r \leq 1$, porém não é suficiente para garantir a estabilidade. Ainda analisando os gráficos das Figuras 3.4 e 3.5 (coluna à direita), para o valor fixado $x_j = 0.5$ e $0 \leq t_n \leq 5$, observamos a visão de perfil do blow-up da solução devido à instabilidade numérica. Portanto, mostramos com teste pontuais a importância de se usar a condição de estabilidade (3.100).

FIGURA 3.4: Simulação numérica: perfil da soluções no ponto $x_j = 0.5$

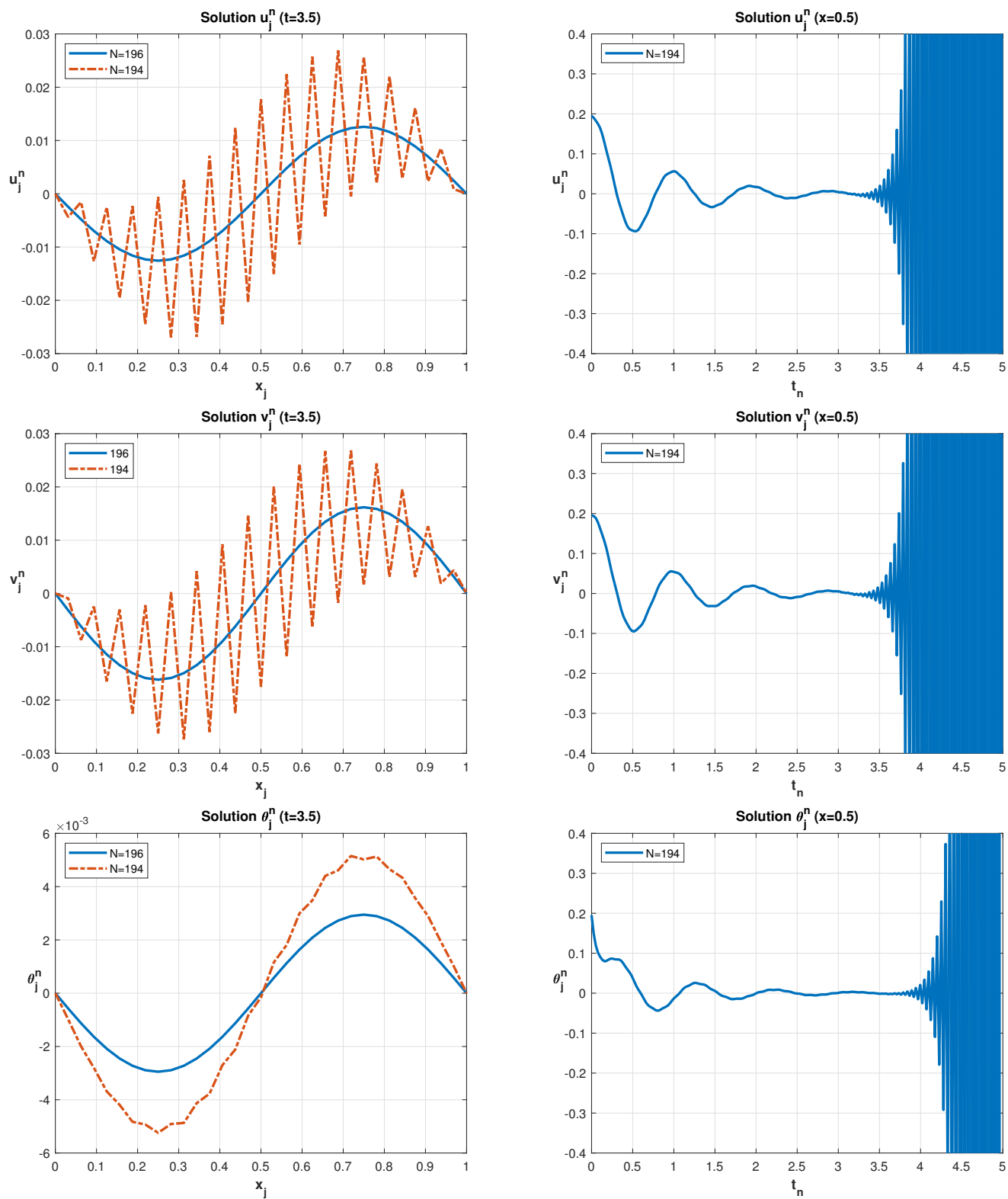


FIGURA 3.5: Simulação numérica: perfil das soluções no ponto $x_j = 0.5$

Sistema termoelástico poroso com a lei de Lord-Shulman

Neste capítulo iremos analisar o comportamento assintótico do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_0 \kappa \phi_{tt} - \alpha \phi_{xx} + b u_x + \xi \phi + d(\theta_x + \tau_0 \theta_{xt}) = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ b_0(\theta_t + \tau_0 \theta_{tt}) - \kappa_2 \theta_{xx} + d\phi_{xt} + \kappa_3 \theta = 0 \quad \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in (0, l), \\ \phi_t(x, 0) = \phi_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), \quad x \in (0, l), \\ u(0, t) = u(l, t) = \phi_x(0, t) = \phi_x(l, t) = \theta(0, t) = \theta(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Usaremos a teoria de semigrupos de operadores lineares para provar a boa colocação. Em seguida, encontramos as condições necessárias e suficientes (*assinaturas de estabilidade*) para provarmos a estabilização exponencial ou polinomial do semigrupo associado.

4.1 Boa Colocação

Nesta seção estudamos a boa colocação do sistema (4.1). Para isso, consideramos o seguinte espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_*^1(0, l) \times L_*^2(0, l) \times H_0^1(0, l) \times L^2(0, l), \quad (4.2)$$

onde

$$L_*^2(0, l) := \left\{ f \in L^2(0, l); \int_0^l f(x) dx = 0 \right\}, \quad H_*^1(0, l) := H^1(0, l) \cap L_*^2(0, l),$$

dotado do produto interno

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{H}} &:= \rho_0 \int_0^l v_1 \bar{v}_2 dx + \rho_0 \kappa \int_0^l \psi_1 \bar{\psi}_2 dx + (\mu - b^2/\xi) \int_0^l u_{1,x} \bar{u}_{2,x} dx + \alpha \int_0^l \phi_{1,x} \bar{\phi}_{2,x} dx \\ &+ \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_{1,x} + \sqrt{\xi} \phi_1 \right) \overline{\left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_{2,x} + \sqrt{\xi} \phi_2 \right)} dx + b_0 \int_0^l (\theta_1 + \tau_0 \vartheta_1) \overline{(\theta_2 + \tau_0 \vartheta_2)} dx \\ &+ \kappa_2 \int_0^l \theta_{1,x} \bar{\theta}_{2,x} dx + \kappa_3 \tau_0 \int_0^l \theta_1 \bar{\theta}_2 dx, \end{aligned} \quad (4.3)$$

com $b^2 < \mu\xi$ para todo $U_1 = (u_1, v_1, \phi_1, \psi_1, \theta_1, \vartheta_1)^\top$ e $U_2 = (u_2, v_2, \phi_2, \psi_2, \theta_2, \vartheta_2)^\top$ em \mathcal{H} e norma dada por

$$\|U_1\|_{\mathcal{H}}^2 := \langle U_1, U_1 \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (4.4)$$

Com estes espaços podemos reescrever as equações (4.1) no seguinte problema de Cauchy

$$U_t(t) = \mathcal{A}U(t), \quad t > 0, \quad (4.5)$$

$$U(0) = U_0, \quad (4.6)$$

onde $U(t) = (u(t), u_t(t), \varphi(t), \varphi_t(t), \theta(t), \theta_t(t))^\top$ é a solução do sistema, $U_0 = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, \theta_1)^\top$ é as condições iniciais e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador diferencial definido por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho_0}(\cdot)_{xx} & 0 & \frac{b}{\rho_0}(\cdot)_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) & 0 & 0 \\ -\frac{b}{\rho_0 \kappa}(\cdot)_x & 0 & \frac{\alpha}{\rho_0 \kappa}(\cdot)_{xx} - \frac{\xi}{\rho_0 \kappa} I(\cdot) & 0 & -\frac{d}{\rho_0 \kappa}(\cdot)_x & -\frac{d\tau_0}{\rho_0 \kappa}(\cdot)_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I(\cdot) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{b_0 \tau_0}(\cdot)_x & \frac{\kappa_2}{b_0 \tau_0}(\cdot)_{xx} - \frac{\kappa_3}{b_0 \tau_0} I(\cdot) & -\frac{1}{\tau_0} I(\cdot) \end{pmatrix},$$

onde denotamos por $I(\cdot)$ o operador identidade. O domínio de \mathcal{A} é dado por

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ U := (u, v, \phi, \psi, \theta, \vartheta)^\top \in \mathcal{H} \mid \begin{array}{l} u, \phi, \theta \in H^2(0, l), \quad v, \vartheta \in H_0^1(0, l), \\ \psi \in H_*^1(0, l), \quad \phi_x(0) = \phi_x(l) = 0 \end{array} \right\}. \quad (4.7)$$

Provaremos a existência e a unicidade das soluções usando a teoria de semigrupos[63]. Então o problema será bem posto, isto é, o resultado do seguinte Teorema:

Teorema 4.1. *Seja $U_0 \in \mathcal{H}$, então existe uma única solução $U \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$ para (4.1). Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$ então $U \in C([0, +\infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty), \mathcal{H})$.*

Prova. O resultado será provado usando o Teorema 2.16 de Lumer-Phillips. Temos que mostrar que \mathcal{A} é um operador dissipativo e que $(I - \mathcal{A})$ é sobrejetivo. Primeiro vamos mostrar que \mathcal{A} é dissipativo. Sendo $U = (u, v, \phi, \psi, \theta, \vartheta)^\top \in D(\mathcal{A})$, usando as mesmas ideias do Capítulo 3 podemos verificar que

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_2 \|\theta_x\|_{L^2}^2 - \kappa_3 \|\theta\|_{L^2}^2 \leq 0, \quad (4.8)$$

mostrando que \mathcal{A} é um operador dissipativo.

O próximo passo é mostrar que $I - \mathcal{A}$ é sobrejetivo. Isto é, para cada $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\top \in \mathcal{H}$, temos que encontrar $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - \mathcal{A})U = F,$$

que em termo de suas componentes é

$$u - v = f_1, \quad (4.9)$$

$$\rho_0 v - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho_0 f_2, \quad (4.10)$$

$$\phi - \psi = f_3, \quad (4.11)$$

$$\rho_0 \kappa \psi - \alpha \phi_{xx} + b u_x + \xi \phi + d(\theta_x + \tau_0 \vartheta_x) = \rho_0 \kappa f_4, \quad (4.12)$$

$$\theta - \vartheta = f_5, \quad (4.13)$$

$$b_0(\vartheta + \tau_0 \vartheta) - \kappa_2 \theta_{xx} + d\psi_x + \kappa_3 \theta = b_0 \tau_0 f_6. \quad (4.14)$$

Substituindo v da primeira equação na segunda, a ψ da terceira na quarta e ϑ da quinta equação na sexta, obtemos o sistema equivalente

$$\rho_0 u - \mu u_{xx} - b\phi_x = g_1 \in L^2(0, l), \quad (4.15)$$

$$\rho_0 \kappa \phi - \alpha \phi_{xx} + b u_x + \xi \phi + d(1 + \tau_0)\theta_x = g_2 \in L^2(0, l), \quad (4.16)$$

$$[b_0(1 + \tau_0) + \kappa_3]\theta - \kappa_2 \theta_{xx} + d\phi_x = g_3 \in L^2(0, l), \quad (4.17)$$

onde $g_1 := \rho_0(f_1 + f_2)$, $g_2 := \rho_0\kappa f_3 + \rho_0\kappa f_4 + d\tau_0 f_{5,x}$ e $g_3 := b_0[(1 + \tau_0)f_5 + \tau_0 f_6] + df_{3,x}$.

Para resolver (4.15)–(4.17), definimos sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{V} := H_0^1(0, l) \times H_*^1(0, l) \times H_0^1(0, l)$, a seguinte forma bilinear

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((u, \phi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})) &:= \rho_0 \int_0^l u \tilde{u} dx + \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} \tilde{u}_x + \sqrt{\xi} \tilde{\phi} \right) dx \\ &+ (\mu - b^2/\xi) \int_0^l u_x \tilde{u}_x dx + \rho_0 \kappa \int_0^l \phi \tilde{\phi} dx + \alpha \int_0^l \phi_x \tilde{\phi}_x dx \\ &+ [b_0(1 + \tau_0) + \kappa_3] \int_0^l \theta \tilde{\theta} dx + \kappa_2 \int_0^l \theta_x \tilde{\theta}_x dx \\ &+ d(1 + \tau_0) \int_0^l \theta_x \tilde{\phi} dx + d \int_0^l \tilde{\theta} \phi_x dx, \end{aligned}$$

para cada $(u, \phi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{V}$ e a forma linear

$$\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) := \int_0^l g_1 \tilde{u} dx + \int_0^l g_2 \tilde{\phi} dx + \int_0^l g_3 \tilde{\theta} dx,$$

para cada $(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{V}$. Mostra-se facilmente, seguindo as ideias do Capítulo 3, que \mathcal{B} e \mathcal{L} satisfazem as condições do Teorema de Lax-Milgram.

Consequentemente, existe um único $(u, \phi, \theta) \in \mathcal{V}$, satisfazendo

$$\mathcal{B}((u, \phi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})) = \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}), \quad \text{para todo } (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) \in \mathcal{V}. \quad (4.18)$$

Então,

$$u \in H_0^1(0, l), \quad \phi \in H_*^1(0, l), \quad \theta \in H_0^1(0, l).$$

Tomando $(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) = (\tilde{u}, 0, 0)$ em (4.18), obtemos

$$\int_0^l u_x \tilde{u}_x dx = \frac{1}{\mu} \int_0^l (g_1 - \rho_0 u + b \phi_x) \tilde{u} dx, \quad \text{para todo } \tilde{u} \in H_0^1(0, l).$$

Então, pela definição de derivada fraca, u_x está em $H^1(0, l)$. Logo, pela teoria da regularidade elíptica implica que $u \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$. Da mesma maneira, para mostrar que $\phi \in H^2(0, l) \cap H_*^1(0, l)$,

substituímos $(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) = (0, \tilde{\phi}, 0)$ em (4.18) donde temos

$$\int_0^l \phi_x \tilde{\phi}_x dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^l (g_2 - (\rho_0 \kappa + \xi) \phi - bu_x - d(1 + \tau_0) \theta_x) \tilde{\phi} dx, \quad \text{para todo } \tilde{\phi} \in H_*^1(0, l). \quad (4.19)$$

Então ϕ_x pertence a $H^1(0, l)$, claramente implicando que $\phi \in H^2(0, l) \cap H_*^1(0, l)$. Para provar que $\theta \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$, substituímos $(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) = (0, 0, \tilde{\theta})$ em (4.18)

$$\int_0^l \theta_x \tilde{\theta}_x dx = \frac{1}{\kappa_2} \int_0^l (g_3 - d\phi_x - [b_0(1 + \tau_0) + \kappa_3] \theta) \tilde{\theta} dx, \quad \text{para todo } \tilde{\theta} \in H_0^1(0, l). \quad (4.20)$$

Então, $\theta \in H^2(0, l)$ porque

$$-\kappa_2 \theta_{xx} = g_3 - d\phi_x - [b_0(1 + \tau_0) + \kappa_3] \theta \in L^2(0, l).$$

Portanto, concluímos que

$$(u, \phi, \theta) \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \times H^2(0, l) \cap H_*^1(0, l) \times H_0^2(0, l).$$

Além disso,

$$v = u - f_1 \in H_0^1(0, l), \quad \psi = \phi - f_2 \in H_*^1(0, l), \quad \vartheta = \theta - f_5 \in H_0^1(0, l).$$

Portanto, existe uma única $U \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo (4.9)–(4.14). Desde que $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$, \mathcal{A} é um operador dissipativo e $I - \mathcal{A}$ é sobrejetivo, então a prova do Teorema 4.1 segue imediatamente do Teorema 2.16.

■

Observação 4.2. Note que da equação (4.1)₂ e das condições (4.1)₅ temos

$$\begin{aligned} \rho_0 \kappa \int_0^l \phi_{tt} dx &= \alpha \int_0^l \phi_{xx} dx - b \int_0^l u_x dx - \xi \int_0^l \phi dx - d \int_0^l (\theta_x + \tau_0 \theta_{xt}) dx \\ &= \alpha \phi_x \Big|_0^l - bu \Big|_0^l - \xi \int_0^l \phi dx - d(\theta + \tau_0 \theta_t) \Big|_0^l = -\xi \int_0^l \phi dx. \end{aligned}$$

Pondo $v(t) := \int_0^l \phi dx$ obtemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} v''(t) = -av(t) \\ v(0) = \int_0^l \phi_0 dx, \quad v'(0) = \int_0^l \phi_1 dx, \end{cases} \quad (4.21)$$

onde $a := \frac{\xi}{\rho_0 \kappa} > 0$. A solução geral de (4.21) é dada por

$$v(t) = A \cos(at) + B \sin(at), \quad (4.22)$$

onde A e B são constantes. Das condições iniciais (4.21)₂ obtemos

$$v(t) := \int_0^l \phi(x, t) dx = \cos(\sqrt{a}t) \int_0^l \phi_0(x) dx + \frac{\sin(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}} \int_0^l \phi_1(x) dx. \quad (4.23)$$

Consequentemente, se $\phi_0, \phi_1 \in L_*^2(0, l)$ temos que

$$\int_0^l \phi(x, t) dx = 0. \quad (4.24)$$

Assim concluímos que $\phi \in L_*^2(0, l)$ e, portanto, podemos usar a desigualdade de Poincaré.

4.2 Decaimento Exponencial

Apresentamos dois números importantes

$$\chi_0 := (\kappa\mu - \alpha)(b_0\tau_0\mu - \kappa_2\rho_0) - \tau_0\mu d^2 \quad \text{e} \quad \chi_{\tau_0} := b_0\tau_0\mu - \kappa_2\rho_0, \quad (4.25)$$

associados ao sistema termoelástico (4.1), os quais chamaremos de *assinaturas de estabilidade*. Ao determinarmos as *assinaturas de estabilidade*, estamos fornecendo as condições necessárias e suficientes para estabilização do sistema.

De acordo com o Teorema (2.18), devemos mostrar que o eixo imaginário está contido no conjunto resolvente e que o operador resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Nesta direção para qualquer $U = (u, v, \phi, \psi, \theta, \vartheta)^\top \in D(\mathcal{A})$, a equação resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ em termo de suas componentes escalares é dada por

$$i\lambda u - v = f_1, \quad (4.26)$$

$$i\lambda\rho_0 v - \mu u_{xx} - b\phi_x = \rho_0 f_2, \quad (4.27)$$

$$i\lambda\phi - \psi = f_3, \quad (4.28)$$

$$i\lambda\rho_0\kappa\psi - \alpha\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + d(\theta_x + \tau_0\vartheta_x) = \rho_0\kappa f_4, \quad (4.29)$$

$$i\lambda\theta - \vartheta = f_5, \quad (4.30)$$

$$b_0(\vartheta + i\lambda\tau_0\vartheta) - \kappa_2\theta_{xx} + d\psi_x + \kappa_3\theta = b_0\tau_0 f_6, \quad (4.31)$$

onde $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\top \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Por (4.8), podemos ver facilmente que

$$\operatorname{Re}\langle (i\lambda I - \mathcal{A})U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \kappa_2 \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \kappa_3 \|\theta\|_{L^2}^2. \quad (4.32)$$

Consequentemente

$$\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.33)$$

Primeiro provamos o lema seguinte.

Lema 4.3. *Sob as notações acima temos que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.*

Prova. Seguindo os passos da Proposição 3.4, provamos sem dificuldade que a imersão $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ é compacta. Usando o Lema de Kato 2.14, obtemos que o espectro de \mathcal{A} consiste inteiramente de autovalores discretos. Então fazendo $F = 0$, podemos supor por contradição que \mathcal{A} possui um autovalor imaginário puro, *i.e.*, $\mathcal{A}U = i\lambda U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \neq 0$. Por (4.33), obtemos $\theta_x = \theta = 0$, do qual implica que $\vartheta = 0$ por (4.30). Pela equação (4.31) implica que $\psi_x = 0$ e usando a desigualdade de Poincaré, obtemos $\psi = 0$. Pelas equações (4.28), (4.29) e (4.27) concluímos que $\phi = 0$, $u_x = 0$ e $v = 0$ respectivamente. Portanto isto implica que $U = 0$. Mas isto é uma contradição. Logo o espectro de \mathcal{A} não possui autovalores imaginários. ■

Lema 4.4. *Sob as notações acima temos $0 \in \rho(\mathcal{A})$.*

Prova. Vamos mostrar que podemos encontrar $U = (u, v, \phi, \psi, \theta, \vartheta)^\top \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A}U = F, \quad (4.34)$$

para qualquer $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\top \in \mathcal{H}$. Em termo de suas componentes

$$v = f_1, \quad (4.35)$$

$$\mu u_{xx} + b\phi_x = \rho_0 f_2, \quad (4.36)$$

$$\psi = f_3, \quad (4.37)$$

$$\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi - d(\theta_x + \tau_0\vartheta_x) = \rho_0\kappa f_4, \quad (4.38)$$

$$\vartheta = f_5, \quad (4.39)$$

$$-b_0\vartheta + \kappa_2\theta_{xx} - d\psi_x - \kappa_3\theta = b_0\tau_0 f_6. \quad (4.40)$$

De (4.35), (4.37) e (4.39), vemos que $v \in H_0^1(0, l)$, $\psi \in H_*^1(0, l)$ e $\vartheta \in H_0^1(0, l)$, respectivamente. Assim o sistema (4.35)–(4.40) é equivalente ao seguinte sistema

$$\mu u_{xx} + b\phi_x = \rho_0 f_2, \quad (4.41)$$

$$\alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi - d\theta_x = \rho_0\kappa f_4 + d\tau_0 f_{5,x}, \quad (4.42)$$

$$\kappa_2\theta_{xx} - \kappa_3\theta = b_0\tau_0(f_5 + f_6) + df_{3,x}. \quad (4.43)$$

Para estudar este sistema com as incógnitas (u, ϕ, θ) , definimos a forma bilinear

$$\mathcal{B}_0((u, \phi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})) = \mathcal{L}_0(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}), \quad (4.44)$$

onde

$$\mathcal{B}_0((u, \phi, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta})) = \int_0^l (\tilde{u}u + \tilde{\phi}\phi + \tilde{\theta}\theta) dx, \quad \mathcal{L}_0(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}) = \int_0^l (\tilde{u}\tilde{u} + \tilde{\phi}\tilde{\phi} + \tilde{\theta}\tilde{\theta}) dx,$$

com

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \mu u_{xx} + b\phi_x, & \hat{\phi} &= \alpha\phi_{xx} - bu_x - \xi\phi - d\theta_x, & \hat{\theta} &= \kappa_2\theta_{xx} - \kappa_3\theta, \\ \check{u} &= \rho_0 f_2, & \check{\phi} &= \rho_0\kappa f_4 + d\tau_0 f_{5,x}, & \check{\theta} &= b_0\tau_0(f_5 + f_6) + df_{3,x}. \end{aligned}$$

Pelo teorema da divergência vemos que \mathcal{B}_0 é uma forma bilinear limitada definida em $(H^2(0, l))^3$ no qual é coerciva. É fácil verificar que $\rho_0 f_2$, $\rho_0\kappa f_4 - d\tau_0 f_{5,x}$ e $b_0\tau_0(f_5 + f_6) + df_{3,x}$ pertencem a $H^{-1}(0, l)$. Logo, pelo Teorema de Lax–Milgran existe uma única (u, ϕ, θ) que é solução do sistema (4.41)–(4.43) e então podemos concluir a existência de soluções para o sistema (4.35)–(4.40). Portanto, 0 está no conjunto resolvente de \mathcal{A} e o lema está provado. ■

Antes de provarmos os lemas técnicos que darão suporte aos nossos resultados, apresentamos a definição seguinte.

Definição 4.5. Seja $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)^\top \in D(\mathcal{A})$ e $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\top \in \mathcal{H}$. Então definimos a seguinte classe de funcionais \mathfrak{L} dada por

$$\mathfrak{L} := \left\{ \mathcal{R} = \int_0^l f_i u_j dx; |\mathcal{R}| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, i, j \in \{1, 2, \dots, 6\} \right\}. \quad (4.45)$$

Lema 4.6. Seja $(u, v, \phi, \psi, \theta, \vartheta)^\top$ a solução do sistema (4.26)–(4.31). Então existe uma constante positiva C independente de λ tal que

$$\|\theta + \tau_0\vartheta\|_{L^2}^2 \leq C \|\psi\|_{L^2} \|\theta_x\|_{L^2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.46)$$

Prova. Combinando as equações (4.30) e (4.31) obtemos

$$i\lambda b_0(\theta + \tau_0\vartheta) - \kappa_2\theta_{xx} + d\psi_x + \kappa_3\theta = b_0f_5 + b_0\tau_0f_6. \quad (4.47)$$

Multiplicando a equação (4.47) por $\overline{(\theta + \tau_0\vartheta)}$ e integrando por partes sobre $[0, l]$ temos

$$i\lambda b_0\|\theta + \tau_0\vartheta\|_{L^2}^2 + \kappa_2 \int_0^l \theta_x \overline{(\theta + \tau_0\vartheta)}_x dx - d \int_0^l \psi \overline{(\theta + \tau_0\vartheta)}_x dx + \kappa_3 \int_0^l \theta \overline{(\theta + \tau_0\vartheta)} dx = \mathcal{R} \quad (4.48)$$

e

$$\begin{aligned} & i\lambda b_0\|\theta + \tau_0\vartheta\|_{L^2}^2 + \kappa_2\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \kappa_3\|\theta\|_{L^2}^2 + \kappa_2\tau_0 \int_0^l \theta_x \bar{\vartheta}_x - d \int_0^l \psi \bar{\vartheta}_x dx \\ & - d\tau_0 \int_0^l \psi \bar{\vartheta}_x dx + \kappa_3\tau_0 \int_0^l \theta \bar{\vartheta} dx = \mathcal{R}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{R} \in \mathfrak{L}$. Substituindo $\bar{\vartheta}_x$ e $\bar{\vartheta}$ pela equação (4.28), tomando a parte imaginária e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos

$$\begin{aligned} b_0\|\theta + \tau_0\vartheta\|_{L^2}^2 & \leq C\|\theta_x\|_{L^2}^2 + \frac{C}{|\lambda|} \|\psi\|_{L^2} \|\theta_x\|_{L^2} + C\|\psi\|_{L^2} \|\theta_x\|_{L^2} + C\|\theta\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ & \leq C(\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2) + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Por (4.33) temos

$$b_0\|\theta + \tau_0\vartheta\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.50)$$

Isso completa a prova do lema. ■

Lema 4.7. *Seja $(u, v, \phi, \psi, \theta, \vartheta)^\top$ a solução do sistema (4.26)–(4.31). Então existe uma constante positiva C independente de λ tal que para todo $\varepsilon > 0$*

$$\|\psi\|_{L^2}^2, \|\phi_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.51)$$

Prova. Multiplicando a equação (4.47) por $\int_0^x \bar{\psi} ds$ e integrando por partes sobre o intervalo $[0, l]$ temos

$$d\|\psi\|_{L^2}^2 = \kappa_3 \int_0^l \theta \int_0^x \bar{\psi} ds dx + i\lambda b_0 \int_0^l (\theta + \tau_0\vartheta) \int_0^x \bar{\psi} ds dx + \kappa_2 \int_0^l \theta_x \bar{\psi} dx + \mathcal{R}, \quad (4.52)$$

onde $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$. De (4.29) temos

$$\begin{aligned}
 d\|\psi\|_{L^2}^2 &= \kappa_3 \int_0^l \theta \int_0^x \bar{\psi} ds dx - \frac{b_0}{\rho_0 \kappa} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \int_0^x \left(\alpha \bar{\phi}_{xx} - \overline{(bu_x + \xi \phi)} - d(\theta_x + \tau_0 \vartheta_x) \right) ds dx \\
 &\quad + \frac{db_0}{\rho_0 \kappa} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}^2 + \kappa_2 \int_0^l \theta_x \bar{\psi} dx + \mathcal{R} \\
 &= \kappa_3 \int_0^l \theta \int_0^x \bar{\psi} ds dx - \frac{\alpha b_0}{\rho_0 \kappa} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{\phi}_x dx + \frac{b_0}{\rho_0 \kappa} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \int_0^x \overline{(bu_x + \xi \phi)} ds dx \\
 &\quad + \frac{db_0}{\rho_0 \kappa} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}^2 + \kappa_2 \int_0^l \theta_x \bar{\psi} dx + \mathcal{R}. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
 \|\psi\|_{L^2}^2 &\leq C(\|\theta_x\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2})\|\psi\|_{L^2} + C\|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}\|\phi_x\|_{L^2} + \frac{b_0 b}{\rho_0 \kappa} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{u} dx \\
 &\quad + \frac{b_0 \xi}{\rho_0 \kappa} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \int_0^x \bar{\phi} ds dx + C\|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.54}
 \end{aligned}$$

Da equações (4.26) e (4.28) temos $\bar{u} = -\frac{1}{i\lambda}(\bar{v} + \bar{f}_1)$ e $\bar{\phi} = -\frac{1}{i\lambda}(\bar{\psi} + \bar{f}_3)$, respectivamente. Assim, a desigualdade acima se reduz a

$$\begin{aligned}
 \|\psi\|_{L^2}^2 &\leq C(\|\theta_x\|_{L^2} + \|\theta\|_{L^2})\|\psi\|_{L^2} + C\|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}\|\phi_x\|_{L^2} + \frac{C}{|\lambda|} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
 &\quad + C\|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Agora usando o Lema 4.6, a desigualdade de Young e a estimativa (4.33) obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}\|\phi_x\|_{L^2} + C\|\psi\|_{L^2}\|\theta_x\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \\
 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}\|\phi_x\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.29) por $\bar{\phi}$ e integrando por partes sobre $[0, l]$ temos

$$\alpha\|\phi_x\|_{L^2}^2 = -i\lambda\rho_0\kappa \int_0^l \psi \bar{\phi} dx - \sqrt{\xi} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{\phi} dx - d \int_0^l (\theta_x + \tau_0 \vartheta_x) \bar{\phi} dx + \mathcal{R},$$

onde $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$. Substituindo $\bar{\phi}$ pela equação (4.28), usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha \|\phi_x\|_{L^2}^2 &= \rho_0 \kappa \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\sqrt{\xi}}{i\lambda} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{\psi} dx + \frac{d}{i\lambda} \int_0^l (\theta_x + \tau_0 \vartheta_x) \bar{\psi} dx + \mathcal{R} \\ &\leq C_\varepsilon \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 + C \|\theta_x + \tau_0 \vartheta_x\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para todos os $\varepsilon > 0$ e $|\lambda| \geq 1$. Finalmente usando o Lema 4.6, a desigualdade de Young e a estimativa (4.33) obtemos

$$\begin{aligned} \|\phi_x\|_{L^2}^2 &\leq C_\varepsilon \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} C \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\psi\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Substituindo (4.56) em (4.55) e usando o Lema 4.6 temos

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2} \left(\frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\psi\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon = 1$ e fazendo as simplificações necessárias, obtemos

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\quad + C \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2} \left(\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, o Lema 4.6 e a estimativa (4.33) obtemos

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^2}^2 &\leq \frac{C}{|\lambda|} \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\psi\|_{L^2} \|\theta_x\|_{L^2} + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Combinando (4.56) e (4.57) temos

$$\|\phi_x\|_{L^2}^2 \leq \frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (4.58)$$

Isso completa a prova do lema. ■

Lema 4.8. *Seja $(u, v, \phi, \psi, \theta, q)^\top$ a solução do sistema (4.26)–(4.31). Então existe uma constante positiva C independente de λ tal que para todo $\varepsilon, \eta > 0$*

$$|\chi_{\tau_0}| \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 \leq |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.59)$$

onde $\chi_{\tau_0} := b_0 \tau_0 \mu - \rho_0 \kappa_2 \neq 0$. Caso contrário, se $\chi_{\tau_0} = 0$ temos

$$\left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 \leq \left(\eta + \frac{\varepsilon}{\eta} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right) C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C_{\varepsilon, \eta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_{\varepsilon, \eta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$$

Prova. Multiplicando a equação (4.29) por $\tau_0 \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right)$ e integrando por partes sobre o intervalo $[0, l]$ temos

$$\begin{aligned} & i\lambda \frac{\rho_0 \kappa b \tau_0}{\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{u}_x dx + i\lambda \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \int_0^l \psi \bar{\phi} dx + \frac{\alpha b \tau_0}{\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_x \bar{u}_{xx} dx + \alpha \tau_0 \sqrt{\xi} \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\ & + \tau_0 \int_0^l (b u_x + \xi \phi) \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + d \tau_0 \int_0^l (\theta_x + \tau_0 \vartheta_x) \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx = \mathcal{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & i\lambda \frac{\rho_0 \kappa b \tau_0}{\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{u}_x dx + i\lambda \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \int_0^l \psi \bar{\phi} dx + \frac{\alpha b \tau_0}{\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_x \bar{u}_{xx} dx + \alpha \tau_0 \sqrt{\xi} \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\ & + \tau_0 \sqrt{\xi} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 - \frac{db \tau_0}{\sqrt{\xi}} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{u}_{xx} dx - d \tau_0 \sqrt{\xi} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{\phi}_x dx = \mathcal{R}, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$. Substituindo $\bar{u}_x, \bar{\phi}$ e \bar{u}_{xx} respectivamente por (4.26), (4.28) e (4.27) temos

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho_0 \kappa b \tau_0}{\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx - \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha b \tau_0}{\mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_x (i\lambda \rho_0 \bar{v} + b \bar{\phi}_x + \rho_0 \bar{f}_2) dx \\ & + \alpha \tau_0 \sqrt{\xi} \|\phi_x\|_{L^2}^2 + \tau_0 \sqrt{\xi} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 - d \tau_0 \sqrt{\xi} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{\phi}_x dx \\ & + \frac{db \tau_0}{\mu \sqrt{\xi}} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) (i\lambda \rho_0 \bar{v} + b \bar{\phi}_x + \rho_0 \bar{f}_2) dx = \mathcal{R} \end{aligned} \quad (4.60)$$

e

$$\begin{aligned}
\tau_0 \sqrt{\xi} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &= \frac{\rho_0 \kappa b \tau_0}{\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 - i\lambda \frac{\alpha b \tau_0 \rho_0}{\mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \phi \bar{v}_x dx \\
&\quad - \frac{\alpha \tau_0 \sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \|\phi_x\|_{L^2}^2 - i\lambda \frac{db \tau_0 \rho_0}{\mu \sqrt{\xi}} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{v} dx \\
&\quad + \frac{d\tau_0 \sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{\phi}_x dx + \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Substituindo novamente ϕ por (4.28) temos

$$\begin{aligned}
\tau_0 \sqrt{\xi} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &= (\kappa \mu - \alpha) \frac{b \tau_0 \rho_0}{\mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 \\
&\quad - \underbrace{i\lambda \frac{db \tau_0 \rho_0}{\mu \sqrt{\xi}} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{v} dx - \frac{\alpha \tau_0 \sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \|\phi_x\|_{L^2}^2}_{I_1 :=} \\
&\quad + \frac{d\tau_0 \sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{\phi}_x dx + \mathcal{R}. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Por outro lado, combinando as equações (4.30) e (4.31) temos

$$i\lambda b_0 (\theta + \tau_0 \vartheta) = \kappa_2 \theta_{xx} - d\psi_x - \kappa_3 \theta + b_0 (f_5 + \tau_0 f_6). \tag{4.62}$$

Multiplicando a equação (4.62) por $\frac{db \tau_0 \rho_0}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \bar{v}$ e integrando por partes em $[0, l]$ obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &:= i\lambda \frac{db \tau_0 \rho_0}{\mu \sqrt{\xi}} \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{v} dx = -\frac{db \tau_0 \rho_0 \kappa_2}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \theta_x \bar{v}_x dx - \frac{d^2 b \tau_0 \rho_0}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \psi_x \bar{v} dx \\
&\quad - \frac{db \tau_0 \rho_0 \kappa_3}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \theta \bar{v} dx + \mathcal{R}. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Substituindo \bar{v}_x pela equação (4.26) temos

$$I_1 = i\lambda \frac{db \tau_0 \rho_0 \kappa_2}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \theta_x \bar{u}_x dx + \frac{d^2 b \tau_0 \rho_0}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx - \frac{db \tau_0 \rho_0 \kappa_3}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \theta \bar{v} dx + \mathcal{R}. \tag{4.64}$$

Agora, substituindo I_1 em (4.61) temos

$$\begin{aligned}
 \tau_0 \sqrt{\xi} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &= \left[(\kappa\mu - \alpha) \frac{b\tau_0\rho_0}{\mu\sqrt{\xi}} - \frac{d^2 b\tau_0\rho_0}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \right] \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 \\
 &\quad - \frac{\alpha\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \|\phi_x\|_{L^2}^2 - \underbrace{i\lambda \frac{db\tau_0\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta_x \bar{u}_x dx + \frac{db\tau_0\rho_0\kappa_3}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta \bar{v} dx}_{I_2:=} \\
 &\quad + \frac{d\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \int_0^l (\theta + \tau_0\vartheta) \bar{\phi}_x dx + \mathcal{R}. \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

A partir daqui, a prova é dividida em duas etapas.

Etapa 1. Aqui somamos e subtraímos os termos $(i\lambda d\tau_0\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}/b_0\mu) \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx$ em I_2 para obtermos

$$\begin{aligned}
 \tau_0 \sqrt{\xi} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &= c_1 \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
 &\quad - i\lambda \frac{d\tau_0\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \frac{db\tau_0\rho_0\kappa_3}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta \bar{v} dx \\
 &\quad + \frac{d\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \int_0^l (\theta + \tau_0\vartheta) \bar{\phi}_x dx + \frac{i\lambda d\tau_0\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx + \mathcal{R},
 \end{aligned}$$

onde $c_1 := (\kappa\mu - \alpha) \frac{b\tau_0\rho_0}{\mu\sqrt{\xi}} - \frac{d^2 b\tau_0\rho_0}{b_0\mu\sqrt{\xi}}$. Substituindo a equação (4.26) em \bar{v}_x , usando a desigualdade de Young e estimativa (4.33) temos

$$\begin{aligned}
 \tau_0 \sqrt{\xi} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &= -i\lambda c_1 \int_0^l \psi \bar{u}_x dx + \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
 &\quad - i\lambda \frac{d\tau_0\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \frac{db\tau_0\rho_0\kappa_3}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta \bar{v} dx \\
 &\quad + \frac{d\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \int_0^l (\theta + \tau_0\vartheta) \bar{\phi}_x dx + \frac{i\lambda d\tau_0\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx \\
 &\quad + \mathcal{R}
 \end{aligned}$$

seguido por

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0\sqrt{\xi}}{2} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}}u_x + \sqrt{\xi}\phi \right\|_{L^2}^2 &\leq \lambda^2 \frac{C}{\eta} \|\psi\|^2 + \eta C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \rho_0\kappa\tau_0\sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C \|\theta + \tau_0\vartheta\|^2 + C \|\phi_x\|^2 + C_\eta \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } \eta > 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Usando os Lemas 4.6, 4.7, a desigualdade de Young e a estimativa (4.33) temos

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0\sqrt{\xi}}{2} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}}u_x + \sqrt{\xi}\phi \right\|_{L^2}^2 &\leq \eta C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 \frac{C}{\eta} \|\psi\|^2 + C (\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\phi_x\|^2) + \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C_\eta \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0\sqrt{\xi}}{2} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}}u_x + \sqrt{\xi}\phi \right\|_{L^2}^2 &\leq \left(\eta + \frac{\varepsilon}{\eta} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right) C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \lambda^2 C_{\varepsilon,\eta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C_{\varepsilon,\eta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } \varepsilon, \eta > 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Isso prova a segunda desigualdade.

Etapa 2. Tendo em mente I_2 em (4.65) e a equação (4.30) temos

$$I_2 := i\lambda \frac{db\tau_0\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta_x \bar{u}_x dx = \frac{db\tau_0\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \vartheta_x \bar{u}_x dx + \mathcal{R}. \quad (4.68)$$

Agora, adicionando e subtraindo o termo $(db\rho_0\kappa_2/b_0\mu\sqrt{\xi}) \int_0^l \theta_x \bar{u}_x dx$, temos

$$I_2 = \frac{db\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l (\theta_x + \tau_0\vartheta_x) \bar{u}_x dx - \frac{db\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta_x \bar{u}_x dx + \mathcal{R}. \quad (4.69)$$

Substituindo (4.29) em (4.69) obtemos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -i\lambda\rho_0\kappa \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{u}_x dx + \frac{\alpha b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_{xx} \bar{u}_x dx - \frac{b^2\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \|u_x\|_{L^2}^2 - \frac{\xi b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi \bar{u}_x dx \\
 &\quad - \frac{db\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta_x \bar{u}_x dx + \mathcal{R} \\
 &= -i\lambda\rho_0\kappa \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{u}_x dx + \frac{\alpha b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_{xx} \bar{u}_x dx - \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{u}_x dx \\
 &\quad - \frac{d\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \frac{d\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx + \mathcal{R}. \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo o termo $\frac{\alpha b^2\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_{xx} \bar{\phi} dx$ temos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -i\lambda\rho_0\kappa \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{u}_x dx - \frac{\alpha b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_x (\overline{\mu u_x + b\phi})_x dx + \frac{\alpha b^2\rho_0\kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
 &\quad - \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{u}_x dx + \frac{d\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx \\
 &\quad - \frac{d\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \mathcal{R}. \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

Substituindo \bar{u}_x no primeiro termo de I_2 por (4.26) e $\overline{(\mu u_x + b\phi)}_x$ por (4.27) obtemos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \rho_0\kappa \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + i\lambda \frac{\alpha b\rho_0^2\kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \int_0^l \phi_x \bar{v} dx + \frac{\alpha b^2\rho_0\kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
 &\quad - \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{u}_x dx - \frac{d\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx \\
 &\quad + \frac{d\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx + \mathcal{R}. \tag{4.72}
 \end{aligned}$$

Substituindo ϕ_x por (4.28) e reordenando os termos ficamos com

$$\begin{aligned}
I_2 &= (\kappa\mu - \alpha) \frac{b\rho_0^2\kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + \frac{\alpha b^2 \rho_0 \kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \|\phi_x\|_{L^2}^2 - \frac{b\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{u}_x dx \\
&\quad - \frac{d\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \frac{d\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx + \mathcal{R} \\
&= (\kappa\mu - \alpha) \frac{b\rho_0^2\kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + \frac{\alpha b^2 \rho_0 \kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \|\phi_x\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\rho_0\kappa_2\xi}{b_0\mu} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{\phi} dx - \frac{d\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx \\
&\quad + \frac{d\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx + \mathcal{R}. \tag{4.73}
\end{aligned}$$

Substituindo I_2 em (4.65) encontramos

$$\begin{aligned}
(b_0\tau_0\mu - \rho_0\kappa_2) \frac{\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &= [(\kappa\mu - \alpha)(b_0\tau_0\mu - \rho_0\kappa_2) - \tau_0\mu d^2] \frac{b\rho_0}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx \\
&\quad + \rho_0\kappa\tau_0\sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{db\tau_0\rho_0\kappa_3}{b_0\mu\sqrt{\xi}} \int_0^l \theta \bar{v} dx + \frac{d\tau_0\sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \int_0^l (\theta + \tau_0\vartheta) \bar{\phi}_x dx \\
&\quad - \frac{\alpha b^2 \rho_0 \kappa_2}{b_0\mu^2\sqrt{\xi}} \|\phi_x\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_0\kappa_2\xi}{b_0\mu} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{\phi} dx \\
&\quad + \frac{d\rho_0\kappa_2\sqrt{\xi}}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx - \frac{d\rho_0\kappa_2}{b_0\mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \mathcal{R}
\end{aligned}$$

e em seguida,

$$\begin{aligned}
 \chi_{\tau_0} \frac{\sqrt{\xi}}{b_0 \mu} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &= \chi_0 \frac{b \rho_0}{b_0 \mu^2 \sqrt{\xi}} \int_0^l \psi \bar{v}_x dx + \rho_0 \kappa \tau_0 \sqrt{\xi} \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{\alpha \tau_0 \sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
 &+ \frac{db \tau_0 \rho_0 \kappa_3}{b_0 \mu \sqrt{\xi}} \int_0^l \theta \bar{v} dx + \frac{d \tau_0 \sqrt{\xi}}{\mu} (\mu - b^2/\xi) \int_0^l (\theta + \tau_0 \vartheta) \bar{\phi}_x dx \\
 &- \frac{\alpha b^2 \rho_0 \kappa_2}{b_0 \mu^2 \sqrt{\xi}} \|\phi_x\|_{L^2}^2 - \frac{\rho_0 \kappa_2 \xi}{b_0 \mu} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{\phi} dx \\
 &- \frac{d \rho_0 \kappa_2}{b_0 \mu} \int_0^l \theta_x \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) dx + \frac{d \rho_0 \kappa_2 \sqrt{\xi}}{b_0 \mu} \int_0^l \theta_x \bar{\phi} dx + \mathcal{R},
 \end{aligned}$$

onde $\chi_{\tau_0} := b_0 \tau_0 \mu - \rho_0 \kappa_2$ e $\chi_0 := (\kappa \mu - \alpha) \chi_{\tau_0} - \tau_0 \mu d^2$ são dados em (4.25). Tomando o valor absoluto e usando a desigualdade de Young e Poincaré temos

$$\begin{aligned}
 |\chi_{\tau_0}| \frac{\sqrt{\xi}}{b_0 \mu} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &\leq |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + \eta \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 \\
 &+ C (\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2) + C \|\phi_x\|_{L^2}^2 \\
 &+ \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon, \eta > 0.
 \end{aligned}$$

Escolhendo $\eta := |\chi_{\tau_0}| \sqrt{\xi} / 2b_0 \mu$ temos

$$\begin{aligned}
 |\chi_{\tau_0}| \frac{\sqrt{\xi}}{2b_0 \mu} \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 &\leq |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C (\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\theta_x\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2) \\
 &+ C \|\phi_x\|_{L^2}^2 + C \|\theta + \tau_0 \vartheta\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Agora, usando os Lemas 4.6, 4.7 e a estimativa (4.33) obtemos

$$|\chi_{\tau_0}| \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 \leq |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (4.74)$$

Isto completa a demonstração do lema. ■

Lema 4.9. *Seja $(u, v, \phi, \psi, \theta, q)^\top$ a solução do sistema (4.26)–(4.31). Então existe uma constante positiva C independente de λ tal que*

$$\|v\|_{L^2}^2 \leq C \|\phi_x\|_{L^2}^2 + C \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.75)$$

Prova. Multiplicando a equação (4.27) por \bar{u} e usando (4.26) temos

$$\begin{aligned} -\rho_0 \|v\|_{L^2}^2 + \mu \|u_x\|_{L^2}^2 + b \int_0^l \phi \bar{u}_x dx &= \mathcal{R}, \\ -\rho_0 \|v\|_{L^2}^2 + (\mu - b^2/\xi) \|u_x\|_{L^2}^2 + \frac{b}{\sqrt{\xi}} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{u}_x dx &= \mathcal{R}, \\ -\rho_0 \|v\|_{L^2}^2 + (\mu - b^2/\xi) \|u_x\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 - \sqrt{\xi} \int_0^l \left(\frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right) \bar{\phi} dx &= \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré temos

$$\rho_0 \|v\|_{L^2}^2 \leq (\mu - b^2/\xi) \|u_x\|_{L^2}^2 + C \|\phi_x\|^2 + C \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.76)$$

Desde que

$$\frac{b^2}{\xi} \|u_x\|_{L^2}^2 \leq 2 \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 + 2\xi c_p \|\phi_x\|_{L^2}^2, \quad (4.77)$$

onde $c_p > 0$ é a constante de Poincaré, substituindo em (4.76) temos

$$\rho_0 \|v\|_{L^2}^2 \leq C \|\phi_x\|_{L^2}^2 + C \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.78)$$

■

Agora estamos em condições de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.10. *O sistema (4.1) é exponencialmente estável se, e somente se, $\chi_0 = 0$.*

Prova. Dividimos a prova em duas partes.

(i) Suficiência: Pelos Lemas 4.6–4.9 e as estimativas (4.33) e (4.77), temos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + C \|\psi\|_{L^2} \|\theta_x\|_{L^2} + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|v_x\|_{L^2} + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Desde que $\chi_0 = 0$ e $\varepsilon := 1/2C$ temos

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.80)$$

Escolhendo λ^2 suficientemente grande concluímos a demonstração.

(ii) Necessidade: Mostraremos que o semigrupo $S(t)$ não é exponencialmente estável quando o número de estabilidade χ_0 é diferente de zero. A prova é baseada no Teorema 2.18. A estratégia consiste em verificar se a condição $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty$ falha ou não. Para isso, suponhamos que exista $U = (u, v, \phi, \psi, \theta, \vartheta)^\top \in \mathcal{H}$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}} \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos tomar $f_1 = f_2 = f_3 = f_5 = f_6 = 0$ e escolher $f_4(x) = \rho_0^{-1} \kappa^{-1} \cos(\omega_n x)$ no sistema (4.26)–(4.31) tal que $F = (0, 0, 0, f_4, 0, 0)$ é limitado (uniformemente em n) em \mathcal{H} . Pelas condições de contorno (1.19) podemos supor que

$$u(x) = \mathbf{A}_n \sin(\omega_n x), \quad \phi(x) = \mathbf{B}_n \cos(\omega_n x), \quad \theta(x) = \mathbf{C}_n \sin(\omega_n x),$$

onde \mathbf{A}_n , \mathbf{B}_n e \mathbf{C}_n são constantes e $\omega_n := n\pi/l$. Portanto, ao substituirmos estas soluções no sistema (4.26)–(4.31), temos

$$-(\lambda^2 \rho_0 - \mu \omega_n^2) \mathbf{A}_n + b \omega_n \mathbf{B}_n = 0, \quad (4.81)$$

$$b \omega_n \mathbf{A}_n - (\lambda^2 \rho_0 \kappa - \alpha \omega_n^2 - \xi) \mathbf{B}_n + (d + i \lambda d \tau_0) \omega_n \mathbf{C}_n = 1, \quad (4.82)$$

$$i \lambda d \omega_n \mathbf{B}_n + (\lambda^2 b_0 \tau_0 - \kappa_2 \omega_n^2 - i \lambda b_0 - \kappa_3) \mathbf{C}_n = 0. \quad (4.83)$$

Agora escolhemos

$$\lambda^2 \equiv \lambda_n^2 = \frac{\mu}{\rho_0} \omega_n^2 + \frac{b^2 \chi_{\tau_0}}{\rho_0 \chi_0} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (4.84)$$

onde $\chi_{\tau_0} := b_0 \tau_0 \mu - \kappa_2 \rho_0 \neq 0$ e $\chi_0 := (\kappa \mu - \alpha)(b_0 \tau_0 \mu - \kappa_2 \rho_0) - \tau_0 \mu d^2 \neq 0$. Com isto, obtemos o seguinte sistema

$$b \chi_{\tau_0} \mathbf{A}_n - \chi_0 \omega_n \mathbf{B}_n = 0, \quad (4.85)$$

$$b \chi_0 \omega_n \mathbf{A}_n - \left[(\kappa \mu - \alpha) \chi_0 \omega_n^2 + \kappa b^2 \chi_{\tau_0} - \xi \chi_0 \right] \mathbf{B}_n + d(1 + i \lambda_n \tau_0) \chi_0 \omega_n \mathbf{C}_n = \chi_0, \quad (4.86)$$

$$i \lambda_n \rho_0 d \chi_0 \omega_n \mathbf{B}_n + \left[(\mu b_0 \tau_0 - \kappa_2 \rho_0) \chi_0 \omega_n^2 + b^2 b_0 \tau_0 \chi_{\tau_0} - (i \lambda_n b_0 + \kappa_3) \rho_0 \chi_0 \right] \mathbf{C}_n = 0. \quad (4.87)$$

A partir de (4.85) e (4.87) temos

$$\mathbf{B}_n = \frac{b \chi_{\tau_0}}{\omega_n \chi_0} \mathbf{A}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_n \sim -\frac{i \lambda_n \rho_0 d}{(b_0 \tau_0 \mu - \kappa_2 \rho_0) \omega_n} \mathbf{B}_n. \quad (4.88)$$

Combinando (4.86) e (4.88) temos

$$\mathbf{A}_n \sim \frac{\omega_n}{i \lambda_n d^2 \rho_0 b} \left[(\kappa \mu - \alpha)(b_0 \tau_0 \mu - \kappa_2 \rho_0) - \tau_0 \mu d^2 \right]. \quad (4.89)$$

Conseqüentemente,

$$\mathbf{A}_n \sim \frac{\omega_n}{i\lambda_n d^2 \rho_0 b} \chi_0 \sim \chi_0 O(1), \quad (4.90)$$

com $\chi_{\tau_0} \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_0 \|v\|_{L^2}^2 = \lambda^2 \mathbf{A}_n^2 \rho_0 \int_0^l |\sin(\omega_n x)|^2 dx \\ &= \lambda^2 \chi_0^2 |O(1)|^2 = \chi_0^2 |O(\lambda^2)|. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Isto implica em

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty \quad \text{com} \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.92)$$

desde que $\chi_{\tau_0} \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$. As outras constantes são dadas por

$$\mathbf{B}_n \sim O(\lambda_n^{-1}) \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_n \sim O(\lambda_n^{-1}). \quad (4.93)$$

■

Observação 4.11. Por outro lado, se

$$\chi_{\tau_0} := b_0 \tau_0 \mu - \kappa_2 \rho_0 = 0 \quad \implies \quad \chi_0 := (\kappa \mu - \alpha) (b_0 \tau_0 \mu - \kappa_2 \rho_0) - \tau_0 \mu d^2 = -\tau_0 \mu d^2 \neq 0. \quad (4.94)$$

Já sabemos por (4.84), (4.90) e (4.91) que há uma falta de estabilidade exponencial neste caso. Porém, com uma prova direta, também podemos chegar a essa conclusão. De fato, escolhendo

$$\lambda^2 \equiv \lambda_n^2 = \frac{\mu}{\rho_0} \omega_n^2 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.95)$$

temos

$$\mathbf{A}_n \sim -\frac{\tau_0 \mu \omega_n}{i \lambda_n \rho_0 b} \sim O(1). \quad (4.96)$$

Portanto,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_0 \|v\|_{L^2}^2 = \lambda^2 \mathbf{A}_n^2 \rho_0 \int_0^l |\sin(\omega_n x)|^2 dx = |O(\lambda_n^2)|. \quad (4.97)$$

Isto implica que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow \infty \quad \text{com} \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.98)$$

4.3 Decaimento polinomial

Nesta subseção, mostramos que a solução do sistema (4.1) decai polinomialmente com a taxa $1/\sqrt{t}$. Para isto, usamos os resultados do Teorema 2.19.

Teorema 4.12 (Decaimento Polinomial). *Suponhamos que $\chi_{\tau_0} \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$. Então o semigrupo associado ao sistema (4.1) é polinomialmente estável i.e., satisfaz*

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \text{para todo } t > 0, \quad U_0 \in D(\mathcal{A}). \quad (4.99)$$

No caso particular $\chi_{\tau_0} = 0$, a desigualdade (4.99) também vale.

Prova. Suponhamos que $\chi_{\tau_0} \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$. Segue do Lema 4.8₁ e da equação (4.26) que

$$|\chi_{\tau_0}| \left\| \frac{b}{\sqrt{\xi}} u_x + \sqrt{\xi} \phi \right\|_{L^2}^2 \leq |\lambda| |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|u_x\|_{L^2} + \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.100)$$

Por outro lado, combinando os Lemas 4.6, 4.7, 4.9 e as estimativas (4.33), (4.77) e (4.100) temos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq |\lambda| |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|u_x\|_{L^2} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq |\lambda| |\chi_0| C \|\psi\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Usando a desigualdade de Young e o Lema 4.7 temos

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{\lambda^2}{\eta} C \|\psi\|_{L^2}^2 + (\eta + \varepsilon) C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{\eta} + \varepsilon + \eta + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right) C \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\lambda^2}{\eta} C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon, \eta > 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\eta} - \varepsilon - \eta - \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{\lambda^2}{\eta} C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } \varepsilon, \eta > 0.$$

Usando o fato de que $C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \leq \lambda^2 C_\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}$ (para $|\lambda| \geq 1$ suficientemente grande) e escolhendo $\eta := 1/2$ e $\varepsilon := 1/12$, a estimativa acima se torna

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3\lambda^2}\right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \lambda^2 C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3\lambda^2}\right) \|U\|_{\mathcal{H}} \leq \lambda^2 C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.102)$$

Escolhendo $|\lambda|$ suficientemente grande, obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \lambda^2 C \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.103)$$

Daí segue que

$$\frac{1}{\lambda^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.104)$$

que é equivalente a

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\lambda^2. \quad (4.105)$$

Então, usando o Teorema 2.19 (ver (2.11)), obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Do Teorema 4.1, concluímos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Segue que \mathcal{A} é sobrejetivo sobre \mathcal{H} , então tomando $\mathcal{A}U_0 = F$, temos

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \text{para todo } t > 0, \quad U_0 \in D(\mathcal{A}). \quad (4.106)$$

Assim, a solução decai polinomialmente. No caso em que $\chi_{\tau_0} = 0$, usamos as mesmas ideias acima para provar o decaimento polinomial. ■

Observação 4.13. Neste capítulo apresentamos as assinaturas de estabilidade do sistema (4.1). Estas assinaturas representam as condições necessárias e suficientes para se obter o decaimento exponencial de um sistema termoelástico poroso com microtemperatura e sem temperatura.

Na tabela abaixo resumimos os diferentes tipos de decaimento

onde $\chi := \kappa\mu - \alpha$, $\chi_{\tau_0} := b_0\tau_0\mu - \kappa_2\rho_0$ e $\chi_0 := (\kappa\mu - \alpha)(b_0\tau_0\mu - \kappa_2\rho_0) - \tau_0\mu d^2$. Da tabela acima, podemos deduzir que o decaimento exponencial do sistema (4.1) vale se $\chi_0 = 0$ e conseqüentemente podemos

TABELA 4.1: Assinaturas de estabilidade: A função $\text{sgn}(x)$ extrai o sinal de um número real x

| Assinaturas de estabilidade | Falta de decaimento exponencial | Tipos de decaimento |
|---|---------------------------------|---------------------|
| 1. $\text{sgn}(\chi) = \text{sgn}(\chi_{\tau_0}) = 0 \Rightarrow \chi_0 \neq 0$ | Sim | Polinomial |
| 2. $\text{sgn}(\chi) \neq \text{sgn}(\chi_{\tau_0}) \Rightarrow \chi_0 \neq 0$ | Sim | Polinomial |
| 3. $\text{sgn}(\chi) = \text{sgn}(\chi_{\tau_0}) \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$ | Sim | Polinomial |
| 4. $\chi_0 = 0 \Rightarrow \text{sgn}(\chi) = \text{sgn}(\chi_{\tau_0}) \neq 0$ | Não | Exponencial |

ter,

$$\chi := \kappa\mu - \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \chi_{\tau_0} := b_0\tau_0\mu - \kappa_2\rho_0 > 0,$$

ou,

$$\chi := \kappa\mu - \alpha < 0 \quad \text{e} \quad \chi_{\tau_0} := b_0\tau_0\mu - \kappa_2\rho_0 < 0.$$

No caso da lei de Fourier ($\tau_0 = 0$), o decaimento exponencial é válido se, e somente se,

$$\kappa\mu - \alpha = 0.$$

Este resultado é apoiado por resultados anteriores da literatura e confirmam que nossos achados estão corretos.

O termo de acoplamento térmico d é crítico para os resultados acima. Claramente, quando $d = 0$, a equação térmica é desacoplada do sistema poroso. Neste caso, o sistema (4.1) se reduz ao sistema elástico poroso, que tem os mesmos resultados de estabilidade deste artigo, onde o número de estabilidade é $\chi = \kappa\mu - \alpha$. Isso novamente confirma que nossas conclusões estão corretas.

Considerações finais

Nesta tese investigamos dois sistemas distintos acoplados à efeitos térmicos. Mais precisamente, estudamos um sistema de ondas conectadas em paralelo com efeitos térmicos governados pela lei de Fourier e um sistema termoelástico poroso com efeitos térmicos governados pela lei de Lord–Shulman. A questão central desta pesquisa foi buscar compreender como os mecanismos térmicos atuam em cada problema estudado, ou seja, estávamos interessados em saber se o mecanismo térmico era suficiente para estabilizar exponencialmente os sistemas, ou se era necessário a imposição de alguma condição envolvendo os coeficientes do sistema. Outra questão também importante nesta pesquisa, envolveu o estudo de esquemas numéricos em diferenças finitas, capazes de fornecer simulações compatíveis com os resultados teóricos obtidos.

Um vasto levantamento bibliográfico foi feito na intenção de sabermos, quais os principais resultados da literatura sobre o comportamento assintótico de sistemas termoelásticos, e quais apresentavam resultados de análise numérica. No que diz respeito às questões de análise numérica pelo método de diferenças finitas, percebemos que havia poucos trabalhos nesta direção. A maioria dos artigos que encontramos, usam o método de elementos finitos para discretizar a variável espacial. Então vislumbramos a possibilidade de apresentar novos resultados nesta direção.

Como dissemos anteriormente, o primeiro problema que estudamos trata-se de um sistema de ondas conectadas em paralelo e acoplado a lei de Fourier. Nossas contribuições com relação ao problema contínuo, dizem respeito à boa colocação e a estabilização exponencial do sistema. A principal dificuldade em provar o decaimento exponencial, é devido ao sistema ser parcialmente amortecido. Isto

dificulta a tarefa de encontrar os multiplicadores e as combinações corretas das equações do sistema resolvente, que são necessárias para se construir as estimativas de decaimento exponencial. Por outro lado, com relação ao sistema semidiscreto em diferenças finitas, introduzimos pela primeira vez na literatura, uma prova de decaimento exponencial usando o método da energia. Até onde sabemos, este método era usado apenas para problemas contínuos. As dificuldades de se usar o método da energia em sistemas semidiscretos vão desde a simples escolha dos multiplicadores semidiscretos, até a combinação adequada das equações semidiscretas e a manipulação correta dos operadores de diferenças finitas que aproximam as derivadas. Tudo isso requer a construção prévia de identidades e de estimativas semidiscretas. No contexto totalmente discreto, apresentamos um esquema numérico combinando métodos de integração explícito-implícito, capaz de reproduzir os resultados teóricos de estabilização exponencial. Este esquema numérico fornece uma energia discreta consistente nos passos n e $n - 1$, e além disso, provamos que a energia discreta é uma forma quadrática positiva definida dependendo de uma relação entre os parâmetros de malha $\{\Delta t, \Delta x\}$. Posteriormente, construímos um algoritmo capaz de fornecer as simulações numéricas do sistema.

O segundo problema que estudamos trata-se de um sistema termoelástico poroso com microtemperatura e sem temperatura, governado pela lei de Lord-Shulman. Para este problema, também provamos a boa colocação e a estabilização exponencial ou polinomial dependendo de uma condição particular entre os coeficientes do sistema que denominamos de *assinaturas de estabilidade*. A grande dificuldade que encontramos neste sistema está no fato das equações não terem uma estrutura simétrica como geralmente ocorre em outros sistemas, e também, pelo fato da dissipação atuar somente no equação térmica. Isto dificulta muito o trabalho de encontrar os multiplicadores adequados e as combinações corretas das equações para a construção das estimativas.

Acreditamos que nossos avanços tanto no contexto da estabilização quanto na análise numérica de sistemas acoplados, trarão uma nova perspectiva para o estudo de sistemas hiperbólicos acoplados à equações parabólicas.

Referências Bibliográficas

- [1] M. A. Biot. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, 27(3): 240–253, mar 1956. ISSN 0021-8979. doi: 10.1063/1.1722351.
- [2] H. W. Lord and Y. Shulman. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(5):299–309, sep 1967. ISSN 0022-5096. doi: 10.1016/0022-5096(67)90024-5.
- [3] J. Duhamel. Second memoire sur les phenomenon thermo-mechanique. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 15:1–15, 1937.
- [4] J. B. J. Fourier. Théorie analytique de la chaleur. Paris: Firmin Didot père et fils, 1822.
- [5] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. I. *Physical Review*, 37(4):405–426, feb 1931. ISSN 0031-899X. doi: 10.1103/physrev.37.405.
- [6] C. Cattaneo. Sulla conduzione del calore. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 3:83–101, 1948.
- [7] R. A. Grot. Thermodynamics of a continuum with microstructure. *International Journal of Engineering Science*, 7(8):801–814, aug 1969. ISSN 0020-7225. doi: 10.1016/0020-7225(69)90062-7.
- [8] P. Riha. On the theory of heat-conducting micropolar fluids with microtemperatures. *Acta Mechanica*, 23(1-2):1–8, mar 1975. ISSN 0001-5970. doi: 10.1007/bf01177664.
- [9] P. Riha. On the microcontinuum model of heat conduction in materials with inner structure. *International Journal of Engineering Science*, 14(6):529–535, jan 1976. ISSN 0020-7225. doi: 10.1016/0020-7225(76)90017-3.

- [10] D. Iesan and R. Quintanilla. On a theory of thermoelasticity with microtemperatures. *Journal of Thermal Stresses*, 23(3):199–215, apr 2000. ISSN 0149-5739. doi: 10.1080/014957300280407.
- [11] D. Iesan and R. Quintanilla. On thermoelastic bodies with inner structure and microtemperatures. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 354(1):12–23, jun 2009. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2008.12.017.
- [12] M. Aouadi, M. Ciarletta, and F. Passarella. Thermoelastic theory with microtemperatures and dissipative thermodynamics. *Journal of Thermal Stresses*, 41(4):522–542, oct 2018. ISSN 0149-5739. doi: 10.1080/01495739.2017.1383219.
- [13] D. Iesan. On a theory of thermoelasticity without energy dissipation for solids with microtemperatures. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 98(6):870–885, jan 2018. ISSN 0044-2267. doi: 10.1002/zamm.201700130.
- [14] Z. Oniszczyk. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part I: Free vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 232(2):355–366, apr 2000. ISSN 0022-460X. doi: 10.1006/jsvi.1999.2742.
- [15] Z. Oniszczyk. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part II: Forced vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 232(2):367–386, apr 2000. ISSN 0022-460X. doi: 10.1006/jsvi.1999.2743.
- [16] Z. Oniszczyk. Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system. *Journal of Sound and Vibration*, 232(2):387–403, apr 2000. ISSN 0022-460X. doi: 10.1006/jsvi.1999.2744.
- [17] I. Kucuk and I. Sadek. Optimal control of an elastically connected rectangular plate-membrane system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 180(2):345–363, aug 2005. ISSN 0377-0427. doi: 10.1016/j.cam.2004.11.005.
- [18] C. M. Dafermos. On the existence and the asymptotic stability of solution to the equations of linear thermoelasticity. *Archive For Rational Mechanics And Analysis*, 29(4):241–271, jan 1968. ISSN 0003-9527. doi: 10.1007/bf00276727.
- [19] J. E. Muñoz Rivera and C. A. C. Baldez. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24(2):390–406, mar 1992. ISSN 0036-1410. doi: 10.1137/0524025.
- [20] R. Racke, Y. Shibata, and S. M. Zheng. Global solvability and exponential stability in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, 51(4):751–763, 1993. ISSN 0033-569X. doi: 10.1090/qam/1247439.

- [21] J. U. Kim. On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(4):889–899, jul 1992. ISSN 0036-1410. doi: 10.1137/0523047.
- [22] M. Slemrod. Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 76(2): 97–133, jun 1981. ISSN 0003-9527. doi: 10.1007/bf00251248.
- [23] S. W. Hansen. Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 167(2):429–442, jul 1992. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/0022-247x(92)90217-2.
- [24] S. Jiang, J. E. Muñoz Rivera, and R. Racke. Asymptotic stability and global existence in thermoelasticity with symmetry. *Quarterly of Applied Mathematics*, 56(2):259–275, 1998. ISSN 0033-569X. doi: 10.1090/qam/1622566.
- [25] Z. Liu and S. Zheng. Exponential stability of the semigroup associated with a thermoelastic system. *Quarterly of Applied Mathematics*, 51(3):535–545, 1993. ISSN 0033-569X. doi: 10.1090/qam/1233528.
- [26] G. Lebeau and E. Zuazua. Null-controllability of a system of linear thermoelasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 141(4):297–329, apr 1998. ISSN 0003-9527. doi: 10.1007/s002050050078.
- [27] M. Najafi, G. R. Sarhangi, and H. Wang. The study of stabilizability of the coupled wave equations under various end conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(9):1308–1312, 1992. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/9.623099.
- [28] M. Najafi, G. R. Sarhangi, and H. Wang. Stabilizability of coupled wave equation in parallel under various boundary conditions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(9):1308–1312, 1997. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/9.623099.
- [29] M. Najafi. Study of exponential stability of coupled wave system via distributed stabilizer. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 28(8):479–491, 2001. ISSN 0161-1712. doi: 10.1155/s0161171201003829.
- [30] M. Najafi. Stability treatments of wave system in rn with coupling controllers via energy functional and decomposition methods. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(1-2):46–54, jan 2009. ISSN 0895-7177. doi: 10.1016/j.mcm.2008.07.006.
- [31] D. S. Almeida Júnior, A. J. A. Ramos, and M. L. Santos. Observability inequality for the finite-difference semi-discretization of the 1-d coupled wave equations. *Advances in Computational Mathematics*, 41(1):105–130, apr 2015. ISSN 1019-7168. doi: 10.1007/s10444-014-9351-6.

- [32] M. M. Freitas, R. Q. Caljaro, M. L. Santos, and A. J. A. Ramos. Singular limit dynamics and attractors for wave equations connected in parallel. *Applied Mathematics & Optimization*, 85(1), feb 2022. ISSN 0095-4616. doi: 10.1007/s00245-022-09849-0.
- [33] A. J. A. Ramos, C. S. L. Gonçalves, and S. S. Corrêa Neto. Exponential stability and numerical treatment for piezoelectric beams with magnetic effect. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 52(1):255–274, jan 2018. ISSN 0764-583X. doi: 10.1051/m2an/2018004.
- [34] F. A. Boussouira, J.E. Muñoz Rivera, and D.S. Almeida Júnior. Stability to weak dissipative Bresse system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 374(2):481–498, feb 2011. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2010.07.046.
- [35] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, and O. V. Villagrán. Exponential stability in a thermoviscoelastic mixtures of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 46(24):4151–4162, dec 2009. ISSN 0020-7683. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.07.026.
- [36] R. L. R. Madureira, M. A. Rincon, and M. Aouadi. Numerical analysis for a thermoelastic diffusion problem in moving boundary. *Mathematics and Computers in Simulation*, 187:630–655, sep 2021. ISSN 0378-4754. doi: 10.1016/j.matcom.2021.03.032.
- [37] R. L. R. Madureira, M. A. Rincon, and M. Aouadi. Global existence and numerical simulations for a thermoelastic diffusion problem in moving boundary. *Mathematics and Computers in Simulation*, 166:410–431, dec 2019. ISSN 0378-4754. doi: 10.1016/j.matcom.2019.07.001.
- [38] B. A. Carmo, H. R. Clark, R. R. Guardia, and M. A. Rincon. Mathematical analysis and numerical simulation of a nonlinear thermoelastic system. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 39(14):1514–1542, oct 2018. ISSN 0163-0563. doi: 10.1080/01630563.2018.1486857.
- [39] R. D. Richtmyer and K. W. Morton. *Difference methods for initial value problems*, volume 22. 2nd Ed, Wiley, apr 1967. doi: 10.2307/2004698.
- [40] P. S. Casas and R. Quintanilla. Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures. *International Journal of Engineering Science*, 43(1-2):33–47, jan 2005. ISSN 0020-7225. doi: 10.1016/j.ijengsci.2004.09.004.
- [41] Z. Liu and S. Zheng. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*. 1999.
- [42] A. Magaña and R. Quintanilla. On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 43(11-12):3414–3427, jun 2006. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.077.
- [43] M. L. Santos, A. D. S. Campelo, and D. S. Almeida Júnior. On the decay rates of porous elastic systems. *Journal of Elasticity*, 127(1):79–101, oct 2016. doi: 10.1007/s10659-016-9597-y.

- [44] M. Ciarletta, B. Straughan, and V. Tibullo. Structural stability for a rigid body with thermal microstructure. *International Journal of Engineering Science*, 48(6):592–598, jun 2010. ISSN 0020-7225. doi: 10.1016/j.ijengsci.2010.03.002.
- [45] R. Quintanilla. On growth and continuous dependence in thermoelasticity with microtemperatures. *Journal of Thermal Stresses*, 34(9):911–922, sep 2011. ISSN 0149-5739. doi: 10.1080/01495739.2011.586278.
- [46] R. Quintanilla. On the logarithmic convexity in thermoelasticity with microtemperatures. *Journal of Thermal Stresses*, 36(4):378–386, apr 2013. ISSN 0149-5739. doi: 10.1080/01495739.2013.770701.
- [47] S. Chirita, M. Ciarletta, and C. D’Apice. On the theory of thermoelasticity with microtemperatures. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 397(1):349–361, jan 2013. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/j.jmaa.2012.07.061.
- [48] G. Jaiani and L. Bitsadze. On basic problems for elastic prismatic shells with microtemperatures. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 96(9):1082–1088, dec 2016. ISSN 0044-2267. doi: 10.1002/zamm.201400172.
- [49] F. Passarella, V. Tibullo, and G. Viccione. Rayleigh waves in isotropic strongly elliptic thermoelastic materials with microtemperatures. *Meccanica*, 52(13):3033–3041, dec 2017. ISSN 0025-6455. doi: 10.1007/s11012-016-0591-z.
- [50] A. Magana and R. Quintanilla. Exponential stability in type III thermoelasticity with microtemperatures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 69(5), sep 2018. ISSN 0044-2275. doi: 10.1007/s00033-018-1023-9.
- [51] N. Bazarra, M. Campo, and J. R. Fernandez. A thermoelastic problem with diffusion, microtemperatures, and microconcentrations. *Acta Mechanica*, 230(1):31–48, oct 2019. ISSN 0001-5970. doi: 10.1007/s00707-018-2273-5.
- [52] A. Magana and R. Quintanilla. Exponential stability in three-dimensional type iii thermo-porous-elasticity with microtemperatures. *Journal of Elasticity*, 139(1):153–161, sep 2020. ISSN 0374-3535. doi: 10.1007/s10659-019-09748-6.
- [53] N. Bazarra, J. R. Fernandez, and R. Quintanilla. Lord-shulman thermoelasticity with microtemperatures. *Applied Mathematics & Optimization*, 84(2):1667–1685, jun 2021. ISSN 0095-4616. doi: 10.1007/s00245-020-09691-2.
- [54] A. Soufyane. Stabilisation de la poutre de Timoshenko. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 328(8):731–734, apr 1999. ISSN 0764-4442. doi: 10.1016/s0764-4442(99)80244-4.

- [55] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke. Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems—global existence and exponential stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 276(1):248–278, dec 2002. ISSN 0022-247X. doi: 10.1016/s0022-247x(02)00436-5.
- [56] R. Quintanilla. Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity. *Applied Mathematics Letters*, 16(4):487–491, may 2003. ISSN 0893-9659. doi: 10.1016/s0893-9659(03)00025-9.
- [57] M. L. Santos, A. D. S. Campelo, and D. S. Almeida Júnior. Rates of decay for porous elastic system weakly dissipative. *Acta Applicandae Mathematicae*, 151(1):1–26, may 2017. ISSN 0167-8019. doi: 10.1007/s10440-017-0100-y.
- [58] H. D. Fernández Sare and R. Racke. On the stability of damped timoshenko systems: Cattaneo versus fourier law. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 194(1):221–251, feb 2009. doi: 10.1007/s00205-009-0220-2.
- [59] M. L. Santos, D. S. Almeida Júnior, and J. E. Muñoz Rivera. The stability number of the Timoshenko system with second sound. *Journal of Differential Equations*, 253(9):2715–2733, nov 2012. ISSN 0022-0396. doi: 10.1016/j.jde.2012.07.012.
- [60] M. Aouadi; M. Campo; M. I. M. Copetti and J. R. Fernández. Existence, stability and numerical results for a Timoshenko beam with thermodiffusion effects. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, 70(4), jul 2019. ISSN 0044-2275. doi: 10.1007/s00033-019-1161-8.
- [61] M. Aouadi, A. J. A. Ramos, and A. Castejón. Stability conditions for thermodiffusion timoshenko system with second sound. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, 72(4), jun 2021. doi: 10.1007/s00033-021-01580-0.
- [62] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Third edition, 2002. doi: 10.23919/acc.2004.1383823.
- [63] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1_7.
- [64] J. Prüss. On the spectrum of C_0 -semigroups. pages 453–461, 1992. ISSN 0255-0156. doi: 10.1007/978-3-319-18494-4_26.
- [65] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Berlin Heidelberg, 1995. doi: 10.1007/978-3-642-66282-9_9.
- [66] L. M. Gearhart. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 236(0):385–394, 1978. ISSN 0002-9947. doi: 10.1090/s0002-9947-1978-0461206-1.

- [67] F. Huang. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Journal of Differential Equations*, 104(2):307–324, aug 1985. ISSN 0022-0396. doi: 10.1006/jdeq.1993.1074.
- [68] A. Borichev and Y. Tomilov. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen*, 347(2):455–478, oct 2009. doi: 10.1007/s00208-009-0439-0.
- [69] A. Tveito and R. Winther. *Introduction to Partial Differential Equations. A Computational Approach*. Springer Berlin, Heidelberg, 2005. doi: 10.1007/978-3-540-70529-1_292.
- [70] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer New York, 1995. doi: 10.1007/978-1-4899-7278-1_7.
- [71] J. A. Infante and E. Zuazua. Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-d wave equation. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(2):407–438, mar 1999. ISSN 0764-583X. doi: 10.1051/m2an:1999123.