UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO
AMPLA UFPA-UFAM

EQUAÇÃO DE ONDAS ACOPLADAS COM DAMPING FRACIONÁRIO E TERMOS DE FONTE

Por

Mauricio da Silva Vinhote

BELÉM
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA-UFAM

EQUAÇÃO DE ONDAS ACOPLADAS COM DAMPING FRACIONÁRIO E TERMOS DE FONTE

Mauricio da Silva Vinhote

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas.**

Coorientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

BELÉM

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V766e Vinhote, Mauricio da Silva.
Equação de ondas acopladas com damping fracionário e termos de fonte / Mauricio da Silva Vinhote. — 2021.
XI, 130 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas
Coorientador(a): Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Equação da onda. 2. Damping e fontes. 3. Blow-up. 4. Decaimento da energia. 5. Atrator global. I. Título.

CDD 515.353

EQUAÇÃO DE ONDAS ACOPLADAS COM DAMPING FRACIONÁRIO E TERMOS DE FONTE

Por

Mauricio da Silva Vinhote

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Banca examinadora:

Mirelson Martins Freitas

Prof. Dr. MIRELSON MARTINS FREITAS
Presidente (PDM/CAMPUS SALINÓPOLIS-UFPA)

Prof. Dr. ANDERSON DE JESUS ARAÚJO RAMOS
Membro (PDM/CAMPUS SALINÓPOLIS-UFPA)

Prof. Dr. MAURO DE LIMA SANTOS
Membro (PDM/UFPA)

Prof. Dr. DILBERTO DA SILVA ALMEIDA JÚNIOR
Membro (PDM/UFPA)

Prof. Dr. MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS
Membro (PDM/CAMPUS ABAETETUBA- UFPA)

Flank DM Bezerra

Prof. Dr. FLANK DAVID MORAIS BEZERRA
Membro Externo (UFPB)

Data da defesa: 06 de agosto de 2021

Conceito final: APROVADO

À memória de Antônia, minha mãe, que já dorme em sono profundo.

AGRADECIMENTOS

Quero, em primeiro lugar, agradecer a Deus por ter-me dado força e entusiasmo para cursar um doutorado a fim de que eu possa, futuramente, tornar-me um pesquisador e professor universitário. Esses são meus maiores sonhos. Lembro-me que, em meu primeiro dia de aula no curso de graduação em matemática, nem eu meus mais sublimes devaneios eu sonhei em ir tão longe. Louvo ao Senhor por eu ter chegado ao fim desta árdua jornada que é o doutoramento.

Todos os meus professores também merecem meus agradecimentos, pois cada um deles, à sua maneira, fez-me galgar degraus cada vez mais altos nesta longa escada que é a carreira acadêmica. Agradeço especialmente aos professores

- Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, que acompanhou minha trajetória acadêmica desde o início de minha graduação e me proporcionou grandes oportunidades e incentivos para que eu continuasse meus estudos;

- Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior, meu orientador no mestrado e no início do doutorado. Nunca esqueço o quanto ele foi compreensivo comigo quando passei por dificuldades pessoais que afetaram negativamente minha desenvoltura nos estudos. Sou grato a ele por ter acreditado em minha capacidade de aprender a fazer matemática;

- Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas, meu atual orientador, por todas as suas contribuições feitas meus trabalhos de qualificação e tese nos dois últimos anos do doutorado.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante os anos de duração desta longa jornada que se encerra por aqui.

Tudo quanto te vier à mão para fazer, faze-o conforme as tuas forças, porque na sepultura, para onde tu vais, não há obra nem projeto, nem conhecimento, nem sabedoria alguma.

Bíblia Sagrada - Eclesiastes 9:10

RESUMO

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática

EQUAÇÃO DE ONDAS ACOPLADAS COM DAMPING FRACIONÁRIO E TERMOS DE FONTE

Por Mauricio da Silva Vinhote.

Este trabalho é dedicado ao estudo do comportamento assintótico da solução de um sistema de equações de ondas acopladas. Tal sistema descreve as oscilações transversais de membranas que estão interligadas entre si e sujeitas à forças de atrito e forças externas. Os efeitos das forças de atrito e das forças externas sobre a dinâmica das vibrações dependem tanto da regularidade das funções que representam essas forças quanto dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$, que são os expoentes dos dampings fracionários. Usando semigrupos não lineares e a teoria de operadores monótonos, estabelecemos resultados de existência e unicidade de solução local fraca, bem como a dependência contínua em relação aos dados iniciais. Restringindo os parâmetros dos dampings para serem mais dominantes que as fontes, mostramos que a solução local pode ser estendida ao intervalo $[0, \infty)$, ou seja, esta solução é global. Por outro lado, se os parâmetros das fontes forem mais dominantes que dos dampings, provamos que as soluções com energia total inicial negativa possuem blow-up em tempo finito. Usando a teoria do poço de potencial, provamos que se os dados iniciais do nosso problema pertencem a parte "boa" do poço, as soluções correspondentes existem globalmente. Por outro lado, se as condições iniciais pertencem a parte "ruim" do poço, as soluções correspondentes possuem blow-up em tempo finito. Para a solução global, obtemos as taxas de decaimento uniforme da energia e, como consequência, estabelecemos o decaimento exponencial e algébrico (polinomial) da energia. Na última parte deste trabalho, consideramos uma perturbação autônoma do nosso problema. Mais precisamente, acrescentamos nas duas equações de onda os termos $\epsilon h_1(x)$ e

$\epsilon h_2(x)$ onde $\epsilon > 0$ é uma constante suficientemente pequena. Provamos que o sistema dinâmico correspondente possui um atrator global regular $\mathfrak{A}_\epsilon$ com dimensão fractal finita. Além disso, provamos a existência de atrator exponencial generalizado com dimensão fractal finita apenas em um espaço menos regular que o espaço de fase. Provamos a continuidade da família de atratores globais $\mathfrak{A}_\epsilon$ com relação ao parâmetro ϵ em um subconjunto J denso e residual de $[0, 1]$. Finalmente, provamos a semicontinuidade superior do atrator para todo $\epsilon \in [0, 1]$.

Palavras-Chave: Equação da onda, Damping e fontes, Blow-up, Decaimento da energia, Atrator global.

ABSTRACT

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática

COUPLED WAVES EQUATION WITH FRACTIONAL DAMPING AND SOURCE TERMS

by Mauricio da Silva Vinhote.

This work is dedicated to the study of the asymptotic behavior of the solution of a system of coupled wave equations. This system describes the transverse oscillations of membranes that are interconnected and subject to frictional and external forces. The effects of frictional forces and external forces on the dynamics of vibrations depend both on the regularity of the functions that represent these forces and on the parameters $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$, which are the exponents of fractional dampings. By using nonlinear semigroups and the theory of monotone operators, we establish results of existence and uniqueness of weak local solution, as well as the continuous dependence on the initial data. By restricting the damping parameters to be more dominant than the sources, we show that the local solution can be extended to the interval $[0,\infty)$, that is, this solution is global. On the other hand, if the source parameters are more dominant than the damping, we prove that the solution with negative total initial energy blow-up in finite time. Using the potential well theory, we prove that if the initial data of our problem can be found within the "good" part of the well, the corresponding solution exists globally. On the other hand, if the initial data can be found within the "bad" part of the well, the corresponding solution blow-up in finite time. For the global solution, we obtain the uniform decay rates of energy, which as a consequence, implies the exponential and algebraic (polynomial) decay of energy. In the last part of this work, we consider a autonomous perturbation of our problem. More precisely, we add to the two wave equations the terms $\epsilon h_1(x)$ and $\epsilon h_2(x)$ where $\epsilon > 0$ is a constant small enough. We prove that the corresponding dynamical system has a smooth global attractor $\mathfrak{A}_\epsilon$ with finite fractal dimension. Moreover, we prove the existence of generalized exponential attractors with finite fractal dimension only in a space less regular than the phase space. We prove the continuity of the family of global attractors $\mathfrak{A}_\epsilon$ with respect to parameter ϵ on a dense residual subset J of $[0, 1]$. Finally, we prove upper-semicontinuity of global attractors for all $\epsilon \in [0, 1]$.

Keywords: Wave equation, Damping and sources, Blow-up, Energy decay, Global attractor.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Devido ao seu frequente surgimento no estudo de problemas em acústica, eletromagnetismo, mecânica dos fluidos e teoria quântica de campos, os fenômenos ondulatórios têm sido intensa e profundamente investigados nas últimas três décadas. Neste contexto, cresceu o interesse dos matemáticos em inquirir e apurar as propriedades intrínsecas das soluções de equações da onda em suas mais diversas variações. Uma equação de onda descreve a propagação de perturbações de natureza oscilatória em fluidos, como ondas sonoras em acústica, em fios e membranas ideais, ou no vácuo, como é o caso das ondas luminosas em eletromagnetismo.

1.1 Problema em estudo e considerações gerais sobre a equação da onda

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e limitado com fronteira suave $\partial\Omega$. Nesta tese estudaremos o o seguinte sistema de equações de ondas acopladas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} u_t + g_1(u_t) = f_1(u,v), & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} - \Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} v_t + g_2(v_t) = f_2(u,v), & \text{em } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$. As funções $u = u(x,t)$ e $v = v(x,t)$ representam oscilações de duas membranas dispostas de tal forma que suas respectivas dinâmicas oscilatórias influenciam-se mutuamente. As equações em (1.1) estão sujeitas às seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), u_t(0) = u_1 \in L^2(\Omega), \\ v(0) = v_0 \in H_0^1(\Omega), v_t(0) = v_1 \in L^2(\Omega), \\ u = v = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{1.2}$$

A energia associada ao sistema (1.1)-(1.2) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Historicamente, já no século XVIII, Jean le Rond d'Alembert e Daniel Bernoulli foram um dos primeiros cientistas a estudarem a equação da corda vibrante, que modelava vibrações transversais em uma corda fina e flexível, mas sem a interferência de forças dissipativas ou externas no movimento vibratório. A fim de obter o modelo que descreve tais vibrações, deve-se considerar as seguintes hipóteses:

(1) A corda tem a forma de um cilindro reto suficientemente fino e de comprimento L e é confeccionada com material homogêneo;

(2) Consideramos um sistema xy de coordenadas cartesianas de modo que o eixo x coincida com o eixo de simetria da corda. Assumimos que a configuração de referência seja aquela na qual a extremidade esquerda da corda encontra-se fixada na origem $(0,0)$ desse sistema e a extremidade direita seja fixada na posição $(L,0)$. Assim, a cada seção transversal da corda corresponde um único ponto $x \in [0,L]$;

(3) A fim de que haja tensão entre as partículas que compõem a corda, deslocamos a extremidade direita e a fixamos na posição $(L+d,0)$, com $d > 0$.

Levando em conta as hipóteses acima, estamos supondo tacitamente que o movimento da corda estará restrito ao plano xy. Se $u(x,t)$ é a posição do ponto x da corda num determinado instante $t \geq 0$, a equação diferencial que modela a vibração transversal é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.4}$$

sendo

$$a^2 = \frac{Ed}{\rho L(1 + d/L)} \tag{1.5}$$

onde ρ é a distribuição de matéria por unidade de volume da corda e E é o módulo de Young, um parâmetro que representa a rigidez do material do qual é feita a corda.

A equação (1.4), chamada de equação homogênea, é obtida levando-se em consideração apenas a força de tensão entre as partículas que compõe a corda quando esta está esticada. Na formulação do modelo para vibrações transversais, podemos também considerar mais dois tipos de força:

- **Forças de atrito (ou damping)**, que correspondem às interações do sistema com fluidos (o ar, por exemplo), atuam na direção oposta ao movimento dos pontos da corda e são responsáveis pela dissipação da energia mecânica, o que leva o sistema ao repouso com o passar do tempo;

- **Forças externas (fontes)**, que são oriundas de campos externos como o campo gravitacional, por exemplo, ou forças elásticas, ou seja, aquelas provenientes das interações entre as moléculas da corda.

Assim, se além da tensão entre as partículas, levarmos em consideração também as forças de atrito e as forças externas, obtemos a equação não homogênea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = f, \tag{1.6}$$

onde $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ representa a força de atrito, f a força externa e $\beta > 0$ é uma constante.

Sendo $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ a posição e velocidade iniciais da corda, temos que a solução da equação homogênea (1.4) é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds, \tag{1.7}$$

que é a conhecida Fórmula de d'Alembert. O primeiro termo da fórmula (1.7) nos mostra que a posição inicial gera duas "ondas parciais" que conservam o perfil inicial e cada uma delas tem amplitude igual à metade da amplitude original. Essas duas ondas viajam em sentidos contrários e com velocidade a. A contribuição da distribuição inicial de velocidades também pode ser interpretada como superposição de ondas parciais que se propagam em sentidos opostos e com mesma velocidade a. Isso fica claro quando escrevemos

$$\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds = \Psi(x+at) - \Psi(x-at),$$

onde Ψ é uma primitiva qualquer de $\psi/2a$.

Para que a Fórmula de d'Alembert seja uma solução legítima, é necessário que $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, ou seja, a posição inicial, por exemplo, deve ser uma função suave, o que exclui a possibilidade de considerarmos uma gama de funções φ que são apenas contínuas. Considerando um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, uma função $\varphi(x)$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2\delta}{L}x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ -\dfrac{2\delta}{L}x + 2\delta, & L/2 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{1.8}$$

embora seja fisicamente plausível como posição inicial, seria matematicamente inadmissível já que $\varphi(x)$ não é diferenciável.

Ocorre que, em muitas situações reais, as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ não são sequer diferenciáveis, sendo apenas contínuas. Além disso, a solução $u(x,t)$, da equação (1.4) deve ser tal que $u \in C^2((0,L)\times(0,T)) \cap C([0,L]\times[0,T])$ para um $T > 0$. Diante desse problema, para considerar também posição e velocidade iniciais que sejam apenas contínuas, foi necessária uma reformulação do conceito de solução de uma equação diferencial parcial como (1.4). Assim surgiu o conceito de solução fraca ou solução generalizada à Sobolev.

É possível generalizar as equações (1.4) e (1.6) para dimensões $n \geq 2$. Assim, o intervalo compacto $[0,L]$ no qual x varia é substituído por um conjunto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave $\partial\Omega$ e o operador derivada $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ em dimensão 1 é substituído pelo operador laplaciano Δ, que é definido por

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Em nosso sistema estudado (1.1), as funções $(-\Delta)^{\alpha_j}$ e g_j, com $j \in \{1,2\}$, denotam as forças de atrito que provocam a dissipação da energia, sendo $(-\Delta)^{\alpha_j}$ o damping fracionário. Já as funções f_j, com $j \in \{1,2\}$, representam as fontes de forças externas. Na literatura há muitos resultados que mostram a influência da interação entre o damping e as fontes na dinâmica do problema; como exemplos temos [1, 27, 32, 2, 3, 19, 20, 8, 9, 12, 16, 13, 14, 15, 24, 29]. Além de estudos sobre a existência, unicidade, dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais, solução global e taxas de decaimento da energia para uma grande variedade de equações da onda, há investigações sobre o comportamento das soluções em tempos longos. Este aspecto qualitativo da dinâmica é analisado por meio do estudo da existência de atratores globais [5, 11, 33, 53].

No trabalho de Gazzola e Squassina [26] é investigado o comportamento de soluções locais da seguinte equação hiperbólica superlinear com damping linear

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \omega \Delta u_t + \mu u_t = |u|^{p-2}u, & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto e Lipschitz de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $T > 0$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $\omega \geq 0$, $\mu \geq -\omega\lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ com condições de fronteira homogêneas de Dirichlet e

$$2 < p \leq \begin{cases} \frac{2n}{n-2}, & \text{para } \omega > 0, \\ \frac{2n-2}{n-2}, & \text{para } \omega = 0, \end{cases} \quad \text{se} \quad n \geq 3, \quad 2 < p < \infty, \quad \text{se} \quad n = 1, 2.$$

Os autores provaram que toda solução global é uniformemente limitada no espaço de fase natural. Eles também provaram a existência global de soluções com dados iniciais no poço de potencial. Finalmente, eles provaram o blow-up em tempo finito para soluções começando no conjunto instável e, também provaram o blow-up com dados iniciais de energia arbitrariamente alta.

Em [2], Cavalcanti et al. estudaram a existência de solução global, taxas de decaimento da energia e blow-up em tempo finito para a equação da onda com damping não linear

$$\begin{cases} u_{,tt} - \Delta u + h(u_t) = g(u), & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto limitado e com fronteira suave $\partial\Omega$. Esse estudo foi feito supondo que

g é uma função que admite um crescimento exponencial no infinito e que h é uma função contínua e monótona crescente que tem crescimento polinomial no infinito.

Em [29], Guo et al., os autores consideraram a boa colocação local e global das equações de ondas não lineares acopladas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + g_1(u_t) = f_1(u, v), & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \Delta v + g_2(v_t) = f_2(u, v), & \text{em } \Omega \times (0, T), \end{cases} \tag{1.10}$$

sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com condição de fronteira de Robin não linear sobre u e condição de fronteira de Dirichelet sobre v. As não linearidades $f_1(u, v)$ e $f_2(u, v)$ possuem expoentes supercríticos que representam os termos de fonte, e $g_1(u_t)$ e $g_2(v_t)$ são damping não lineares. Esses dampings são funções monótonas contínuas crescentes que se anulam na origem e satisfazem condições de crescimento. A boa colocação de foi investigada usando semigrupos não lineares e a teoria de operadores monótonos. Um resultado importante de blow-up em tempo finito de soluções fracas foi obtido em [29], desde que a energia inicial é negativa e as fontes são mais dominantes (em um sentido apropriado) que os dampings.

Em [22] foi investigado o comportamento a longo prazo da equação de onda semilinear

$$w_{tt} - \Delta w + f(w) = 0 \text{ em } Q = [0, \infty) \times \Omega, \;\; \Omega \subset \mathbb{R}^3 \tag{1.11}$$

sujeita às condições de fronteira

$$\partial_\nu w + w = -g(w_t) \text{ em } \Sigma = [0, \infty) \times \Gamma \tag{1.12}$$

e às condições iniciais

$$w(0) = w_0, \quad w_t(0) = w_1, \tag{1.13}$$

sendo Γ uma fronteira suave e ν o vetor normal unitário exterior a Γ. Os autores mostraram que as soluções fracas geradas pela dinâmica da onda convergem assintoticamente para um atrator global compacto. Além disso, regularidade e estrutura do atrator são discutidas em [22]. Este artigo foi um dos primeiros resultados relativos à dissipação não linear na fronteira no contexto de atratores globais.

Em [21] foi estudado o comportamento a longo prazo da solução da equação da onda não linear

$$u_{tt} = \alpha u_{xxt} + \sigma(u_x)_x - f(u) + g(x), \quad x \in (0,1), \quad t \in [0,\infty), \tag{1.14}$$

com condições iniciais

$$u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \tag{1.15}$$

e condições de fronteira

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{1.16}$$

e onde as funções f e σ satisfazem condições adequadas.

Este problema surge quando se considera o movimento longitudinal de uma barra homogênea que, em seu estado livre de tensão, tem seção transversal uniforme e comprimento unitário. O deslocamento de uma seção transversal da barra no tempo t é dado por $u(x,t)$. Foi mostrado que o semigrupo associado ao problema possui atrator global com dimensão fractal finita.

1.2 Objetivos e organização da tese

O objetivo desta presente tese é estudar o comportamento assintótico do problema 1.1-(1.2) focando na iteração entre dampings e fontes. Usando semigrupos não lineares e a teoria de operadores monótonos, estabelecemos resultados de existência e unicidade de solução local fraca para (1.1)-(1.2), bem como a dependência contínua em relação aos dados iniciais mostrando que o problema (1.1)-(1.2) é bem posto. Restringindo os parâmetros dos dampings para serem mais dominantes que as fontes, mostramos que a solução local pode ser estendida ao intervalo $[0,\infty)$, ou seja, esta solução é global. Por outro lado, se os parâmetros das fontes forem mais dominantes que dos dampings, provamos que as soluções com energia total inicial negativa possuem blow-up em tempo finito. Usando a teoria do poço de potencial, provamos que se os dados iniciais do nosso problema pertencem a parte "boa" do poço, as soluções correspondentes são globais. Por outro lado, se as condições iniciais pertencem a parte "ruim" do poço, as soluções correspondentes possuem blow-up em tempo finito. Para a solução global, obtemos as taxas de decaimento exponencial e polinomial da energia. Na última parte da tese, consideramos pequenas perturbações do sistema (1.1)-(1.2) por forças externa autônomas. Usando a moderna teoria de quase-estabilidade proposta por Chueshov e Lasiecka [23] , provamos que o sistema dinâmico associado possui atrator global regular com dimensão fractal finita. Além disso, provamos alguma propriedades geométricas do atrator global e a existência de atratores exponencias generalizados. Também estudamos a continuidade do atrator em relação ao parâmetro que multiplica a força externa sobre um subconjunto denso e residual de $[0, 1]$. Finalmente, investigamos a semicontinudade superior do atrator sobre todo o conjunto $[0, 1]$.

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 2, apresentamos algumas definições, notações e resultados das teorias de operadores monótonos e de atratores globais, bem como resultados gerais de análise funcional.

- No Capítulo 3, usando semigrupos não lineares e a teoria de operadores monótonos, provamos a existência de uma solução local fraca para o problema (1.1)-(1.2), também provamos que tal solução local depende continuamente dos dados iniciais no espaço energia. Além disso, investigamos a existência global de soluções fracas. Também provamos um resultado de blow-up de energia total inicial negativa. Usando a teoria do poço de potencial, provamos que as soluções que começam na parte boa do poço existem globalmente. Por outro lado, provamos que as soluções que começam fora da parte boa do poço possuem blow-up em tempo finito.

- No Capítulo 4, obtemos a taxa de decaimento uniforme da energia, de onde segue os decaimentos exponencial e algébrico (polinomial).

- No Capítulo 5, consideramos uma perturbação autônoma do problema (1.1)-(1.2). Mais precisamente, acrescentamos nas duas equações de onda os termos $\epsilon h_1(x)$ e $\epsilon h_2(x)$ onde $\epsilon > 0$ é uma constante suficientemente pequena. Provamos que o sistema dinâmico correspondente possui um atrator global regular $\mathfrak{A}_\epsilon$ com dimensão fractal finita. Além disso, provamos a existência de atrator exponencial generalizado com dimensão fractal finita em um espaço menos regular que o espaço de fase. Provamos a continuidade da família de atratores globais $\mathfrak{A}_\epsilon$ para ϵ em um subconjunto J denso e residual de $[0, 1]$. Finalmente, provamos a semicontinuidade superior para todo $\epsilon \in [0, 1]$. Vale destacar que os resultados desse capítulo deram origem a um artigo intitulado "Quasi-stability and continuity of attractors for nonlinear system of wave equations" publicado na revista "Nonautonomous Dynamical System".

Capítulo 2

Conceitos preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições, notações e teoremas centrais das teorias de operadores monótonos maximais e de atratores globais. Juntas, essas teorias formam o plano de fundo sobre o qual foi desenvolvida esta tese. Antes, porém, iniciamos com algumas considerações importantes acerca das potências fracionárias do operador Laplaciano. Em todo o trabalho, usaremos as notações

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad p \geq 1, \quad \|u\| = \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (u,v) = (u,v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(u,v)_{L^2(\Omega)}$ representa o produto interno usual em $L^2(\Omega)$.

2.1 O Laplaciano fracionário

O objetivo desta seção é introduzir a definição de potência fracionária do operador Laplaciano e algumas de suas propriedades básicas (para mais detalhes veja [36, 50]). Seja $s \geq 0$ e consideremos as autofunções $\varphi_i, i \in \mathbb{N}$, do operador Laplaciano $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\lambda_i, i \in \mathbb{N}$, os seus respectivos autovalores. As potências do operador Laplaciano são operadores

$$(-\Delta)^s : D((-\Delta)^s) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

definidos por

$$(-\Delta)^s u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^s (u, \varphi_i)\varphi_i,$$

com domínio dado por

$$D((-\Delta)^s) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2s} |(u, \varphi_i)|^2 < \infty \right\}.$$

O espaço fracionário $D((-\Delta)^s)$ é munido do produto interno e norma dados por

$$(u, v)_s = ((-\Delta)^s u, (-\Delta)^s v), \quad \|u\|_{D((-\Delta)^s)} = \|(-\Delta)^s u\|.$$

É bem conhecido o fato de que a imersão

$$D((-\Delta)^{s_1}) \hookrightarrow D((-\Delta)^{s_2}), \quad s_1 > s_2 \geq 0, \tag{2.1}$$

é compacta.

Para $s_1, s_2 \geq 0$, temos que $(-\Delta)^{s_1}(-\Delta)^{s_2} = (-\Delta)^{s_1+s_2}$ e como o operador $(-\Delta)^s$ é auto-adjunto, dada $u \in D((-\Delta)^s)$, podemos escrever

$$((-\Delta)^s \varphi, u) = \left((-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi, (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \right), \quad \forall \varphi \in D((-\Delta)^{s/2}). \tag{2.2}$$

Em particular, temos

$$((-\Delta)^s u, u) = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|^2 \geq 0, \quad \forall u \in D((-\Delta)^s). \tag{2.3}$$

2.2 Definições e resultados abstratos sobre operadores monótonos maximais

A seguir, introduzimos os principais conceitos e resultados da teoria de operadores monótonos maximais. Denotamos por X um espaço de Banach qualquer com norma $\|\cdot\|_X$ e por X^* seu dual. Dado um $x^* \in X^*$, o valor do funcional linear x^* aplicado em qualquer $x \in X$ é denotado por (x^*, x). Em particular, quando X é um espaço de Hilbert assumiremos que ele é identificado com o seu próprio dual. Para mais detalhes recomendamos a referência [7].

Definição 2.2.1 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Dizemos que um operador $A : X \to X^*$ é* ***monótono*** *se*

$$(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2) \geq 0,$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in X$. Além disso, dizemos que o operador $A : X \to X^*$ é ***monótono maximal*** *se, para qualquer $x^* \in X^*$, existe um $x \in X$ tal que $Ax + x = x^*$.*

Definição 2.2.2 *Seja X um espaço de Banach reflexivo com norma $\| \cdot \|_X$ e $A : X \to X^*$ um operador tal que $D(A) = X$, onde $D(A)$ representa o domínio de A. O operador $A : X \to X^*$ é dito* ***hemicontínuo*** *se*

$$A(x + \lambda y) \to A(x) \text{ fraco-estrela quando } \lambda \to 0,$$

para quaisquer $x, y \in X$. Dizemos que $A : X \to X^*$ é ***coercivo*** *se*

$$\lim_{\|x\|_X \to \infty} \frac{(Ax, x)}{\|x\|_X} = \infty.$$

Definição 2.2.3 *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)_H$. Dizemos que um operador $A : D(A) \subset H \to H$ é* ***acretivo*** *se*

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0$$

para quaisquer $u, v \in D(A)$. O operador $A : D(A) \subset H \to H$ é chamado ***m-acretivo*** *se é acretivo e se a imagem de $D(A)$ pelo operador $A + I$ é H, onde I é o operador identidade sobre H.*

Vejamos agora alguns resultados importantes envolvendo os conceitos que vimos até o momento relacionados a operadores monótonos maximais.

Teorema 2.2.1 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se $A : X \to X^*$ é um operador monótono e hemicontínuo, então $A : X \to X^*$ é monótono maximal.*

A demonstração pode ser conferida em [7, Teorema 2.4].

Teorema 2.2.2 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se $A : X \to X^*$ é um operador coercivo e monótono maximal, então $A : X \to X^*$ é sobrejetivo, ou seja, $Im(A) = X^*$.*

A prova deste teorema pode ser consultada em [7, Corolário 2.2].

Teorema 2.2.3 *Seja X um espaço de Banach e sejam $A : X \to X^*$ e $B : X \to X^*$ operadores monótonos maximais tais que*

$$(int(D(A))) \cap D(B) \neq \emptyset.$$

Então $A + B$ é monótono maximal.

Para demonstração, consulte [7, Theorem 2.6].

2.3 Definições e resultados abstratos sobre atratores globais

Nesta seção, iremos introduzir alguns conceitos e resultados relacionados a atratores globais que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Para mais detalhes, consulte as referências clássicas [11, 33, 43, 5, 58, 53] e mais recentemente [23]. Iniciamos pela definição de semigrupo.

Definição 2.3.1 *Seja X um espaço métrico. Um* ***semigrupo*** *é uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de funções de X em si mesmo satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *$S(0) = I$, onde I é a identidade em X;*
- *$S(t+s) = S(t)S(s),\ \forall t, s \geqslant 0$;*
- *$[0,\infty) \times X \ni (t,x) \longmapsto S(t)x \in X$ é contínua.*

Por simplicidade, um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre um espaço métrico X será denotado por $S(t)$.

Definição 2.3.2 *Um* ***sistema dinâmico*** *é um par $(X, S(t))$ consistindo de um espaço métrico X e um semigrupo $S(t)$ sobre X. O espaço métrico X é chamado* ***espaço de fase****.*

Definição 2.3.3 *Dados dois subconjuntos A e B de um espaço métrico X, a* ***semi-distância de Hausdorff*** *entre os conjuntos A e B de X é definida por*

$$\mathrm{dist}_X(A,B) := \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y),$$

onde d é a métrica de X. A ***distância de Hausdorff*** *entre os conjuntos A e B de X é definida como*

$$\mathrm{d}_X(A,B) = \max\big\{\mathrm{dist}_X(A,B), \mathrm{dist}_X(B,A)\big\}.$$

Definição 2.3.4 *Um subconjunto $\mathfrak{A} \subset X$ é um* ***atrator global*** *para o sistema dinâmico $(X, S(t))$ se satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\mathfrak{A}$ é compacto;

(2) $\mathfrak{A}$ é ***invariante****, isto é, $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ para todo $t \geq 0$;*

(3) $\mathfrak{A}$ atrai subconjuntos limitados pela ação do semigrupo $S(t)$, isto é, para todo subconjunto limitado $B \subset X$,

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}_X(S(t)B, \mathfrak{A}) = 0. \tag{2.4}$$

Notemos que o atrator global para um sistema dinâmico quando existe, ele é único, e é o maior conjunto invariante compacto e o menor conjunto fechado que atrai limitados de X pela ação do semigrupo $S(t)$.

Definição 2.3.5 *Sejam $(X, S(t))$ um sistema dinâmico e B um subconjunto de X. Dizemos que B é um* ***conjunto absorvente*** *se, para todo subconjunto limitado $D \subset X$, existe $\tau = \tau(D) > 0$ tal que*

$$S(t)D \subset B, \quad \forall t \geq \tau.$$

Definição 2.3.6 *Um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é dito* ***dissipativo*** *se existe um subconjunto absorvente e limitado D de X.*

Definição 2.3.7 *Diz-se que uma função contínua $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma* ***trajetória completa*** *para o sistema dinâmico $(X, S(t))$, se $S(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$ para todo $t \geq 0$ e todo $\tau \in \mathbb{R}$.*

É bem conhecido (veja, por exemplo [53]) que o atrator global para um sistema dinâmico $(X, S(t))$ quando existe, é caracterizado por trajetórias completas e limitadas de X.

Definição 2.3.8 *Dizemos que um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é* ***assintoticamente compacto*** *se para toda sequência limitada $\{x_n\} \subset X$ e toda sequência $\{t_n\} \subset [0, \infty)$ com $t_n \to \infty$, a sequência $\{S(t_n)x_n\}$ possui subsequência convergente.*

O resultado a seguir fornece um critério que nos permite verificar se um sistema dinâmico é assintoticamente compacto.

Teorema 2.3.1 *Seja $(X, S(t))$ um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo X com métrica d. Suponha que para todo conjunto positivamente invariante limitado $B \subset X$ e para todo $\epsilon > 0$, existe um $\tau = \tau(\epsilon, B) > 0$ de modo que*

$$d(S(\tau)z_1, S(\tau)z_2) \leq \epsilon + \Psi(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in B,$$

*onde $\Psi : B \times B \to \mathbb{R}$ é uma **função contrativa**, ou seja,*

$$\liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \Psi(x_n, x_m) = 0, \quad \textit{para toda sequência } (x_n) \subset B.$$

Então $S(t)$ é assintoticamente compacto.

Definição 2.3.9 *Dizemos que um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é **assintoticamente suave** se para todo conjunto positivamente invariante limitado $B \subset X$, existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que $K \subset \overline{B}$ e*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S(t)B, K) = 0.$$

O próximo teorema estabelece a equivalência entre compacidade assintótica e suavidade assintótica de um sistema dinâmico.

Teorema 2.3.2 *Seja $(X, S(t))$ um sistema dinâmico dissipativo sobre um espaço de Banach X. Então $(X, S(t))$ é assintoticamente compacto se, e somente se, é assintoticamente suave.*

Definição 2.3.10 *Seja $\mathscr{N}$ o conjunto dos pontos estacionários do sistema dinâmico $(X, S(t))$, isto é,*

$$\mathscr{N} = \big\{x \in X : S(t)x = x, \forall t \geq 0\big\}.$$

*A **variedade instável** de $\mathscr{N}$ é o conjunto*

$$W^u(\mathscr{N}) = \big\{x \in X : \textit{ existe } \xi : \mathbb{R} \to X \textit{ solução global com } \xi(0) = x \textit{ tal que } \lim_{t\to-\infty} d(\xi(t), \mathscr{N}) = 0\big\}.$$

Definição 2.3.11 *Um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é dito **gradiente** se ele possui uma função de Lyapunov estrita, ou seja, se existe uma função contínua $\Phi : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

- $[0, \infty) \ni t \longmapsto \Phi(S(t)x)$ *é não crescente para cada $x \in X$,*

- *se* $x \in X$ *é tal que* $\Phi(S(t)x) = \Phi(x)$ *para todo* $t \geq 0$*, então* $x \in \mathscr{N}$*.*

Teorema 2.3.3 (Existência de atrator global) *Seja* $(X, S(t))$ *um sistema dinâmico gradiente e assintoticamente compacto com a correspondente função de Lyapunov denotada por* Φ*. Suponha que*

$$\Phi(y) \to \infty \ \textit{ se e somente se } \ \|y\|_X \to \infty \tag{2.5}$$

e que o conjunto $\mathscr{N}$ *do pontos estacionários é limitado. Então o sistema dinâmico* $(X, S(t))$ *possui atrator global caracterizado por* $\mathfrak{A} = W^u(\mathscr{N})$*.*

Definição 2.3.12 *Sejam* X *um espaço de Banach e* $S(t)$ *um semigrupo sobre* X*. Dizemos que um conjunto fechado e limitado* $\mathfrak{A}^{min} \subset X$ *é um* ***atrator global minimal*** *para o semigrupo* $S(t)$ *se são válidas as seguintes propriedades:*

(1) $\mathfrak{A}^{min}$ *é positivamente invariante, isto é,* $S(t)\mathfrak{A}^{min} \subset \mathfrak{A}^{min}$ *para todo* $t \geq 0$*;*

(2) $\mathfrak{A}^{min}$ *atrai todo ponto* $x \in X$*, isto é,*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}_X(S(t)x, \mathfrak{A}^{min}) = 0 \ \textit{ para todo } \ x \in X;$$

(3) $\mathfrak{A}^{min}$ *é minimal, ou seja, não existe subconjunto próprio de* $\mathfrak{A}^{min}$ *possuindo as propriedades (1) e (2) acima.*

Teorema 2.3.4 *Suponha que um sistema dinâmico gradiente* $(X, S(t))$ *possui atrator global* $\mathfrak{A}$*. Então para todo* $x \in X$ *temos*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}_X(S(t)x, \mathscr{N}) = 0,$$

ou seja, qualquer trajetória se estabiliza no conjunto $\mathscr{N}$ *dos pontos estacionários. Em particular, isso significa que o atrator global minimal* $\mathfrak{A}^{min}$ *coincide com o conjunto dos pontos estacionários,* $\mathfrak{A}^{min} = \mathscr{N}$*.*

Definição 2.3.13 *Uma semi-norma* $n_X(\cdot)$ *definida sobre um espaço de Banach* X *é dita* ***compacta*** *se* $n_X(x_n) \to 0$ *para toda sequência* $x_n \rightharpoonup 0$ *em* X*.*

Definição 2.3.14 *Sejam X e Y espaços de Banach reflexivos com $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ e seja*

$$H = X \times Y. \tag{2.6}$$

Considere o sistema dinâmico $(H, S(t))$ dado por

$$S(t)z = (u(t), u_t(t)), \quad z = (u_0, u_1) \in H, \tag{2.7}$$

onde a função u possui a regularidade

$$u \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y). \tag{2.8}$$

Dizemos que o sistema dinâmico $(H, S(t))$ é ***quase-estável*** *sobre um conjunto $B \subset H$, se existe uma seminorma compacta $n_X(\cdot)$ sobre X e funções não negativas $a(t), b(t)$ e $c(t)$ em $\mathbb{R}^+$, sendo $a(t)$ e $c(t)$ localmente limitadas em $[0, \infty)$ e $b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ com $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$ tais que*

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \le a(t)\|z^1 - z^2\|_H^2, \tag{2.9}$$

e

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \le b(t)\|z^1 - z^2\|_H^2 + c(t) \sup_{0\le s\le t} [n_X(u^1(s) - u^2(s))]^2 \tag{2.10}$$

para $t > 0$ e $z^i \in B$, onde $S(t)z^i = (u^i(t), u_t^i(t)), i = 1, 2$.

A quase-estabilidade implica a compacidade assintótica do semigrupo.

Teorema 2.3.5 ([23], Proposição 7.9.4) *Seja $(H, S(t))$ um sistema dinâmico definido por (2.7) e satisfazendo a regularidade (2.8). Se $(H, S(t))$ é quase-estável sobre todo conjunto positivamente invariante limitado $B \subset H$, então $(H, S(t))$ é assintoticamente compacto.*

Definição 2.3.15 *Seja $\mathfrak{A}$ o atrator global para um sistema dinâmico $(X, S(t))$. A* ***dimensão fractal*** $\dim_f^X \mathfrak{A}$ *de $\mathfrak{A}$ é definida por*

$$\dim_f^X \mathfrak{A} := \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\ln n(\mathfrak{A}, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

onde $n(\mathfrak{A}, \epsilon)$ é o menor número de bolas fechadas de raio ϵ que são necessárias para cobrir o atrator $\mathfrak{A}$.

A quase-estabilidade também garante a dimensão fractal finita e a regularidade do atrator.

Teorema 2.3.6 ([23], Teorema 7.9.6) *Seja $(H, S(t))$ um sistema dinâmico definido por (2.7). Se $(H, S(t))$ possui atrator global $\mathfrak{A}$ e é quase-estável em $\mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A}$ possui dimensão fractal finita.*

Teorema 2.3.7 ([23], Teorema 7.9.8) *Seja $(H, S(t))$ sistema dinâmico definido por (2.7). Suponhamos que $(H, S(t))$ possua atrator global $\mathfrak{A}$ e seja quase-estável em $\mathfrak{A}$. Suponhamos ainda que $c_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} c(t) < \infty$. Então toda trajetória completa $\{(u(t), u_t(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ sobre o atrator possui a seguinte regularidade*

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}; X) \cap C(\mathbb{R}; Y), \quad u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}; Y). \tag{2.11}$$

Além disso,

$$\|u_t(t)\|_X^2 + \|u_{tt}(t)\|_Y^2 \leq R^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

onde $R > 0$ é uma constante dependente de c_∞, n_X e da imersão compacta $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Definição 2.3.16 *Dizemos que um conjunto compacto $\mathfrak{A}_{exp} \subset H$ é um **atrator exponencial** para o sistema dinâmico $(H, S(t))$ se*

- *$\mathfrak{A}_{exp}$ é positivamente invariante, isto é, $S(t)\mathfrak{A}_{exp} \subset \mathfrak{A}_{exp}$ para todo $t \geq 0$;*
- *$\mathfrak{A}_{exp}$ tem dimensão fractal finita em H;*
- *$\mathfrak{A}_{exp}$ atrai conjuntos limitados de H a uma taxa exponencial, isto é, para todo conjunto limitado $D \subset H$, existem $t_D, C_D, \gamma_D > 0$ tais que*

$$\mathrm{dist}_H(S(t)D, \mathfrak{A}_{exp}) \leq C_D e^{-\gamma_D(t-t_D)}, \quad \forall t \geq t_D.$$

*Se existir um atrator exponencial possuindo dimensão fractal finita somente em algum espaço estendido $\widetilde{H} \supseteq H$, então esse conjunto que atrai exponencialmente é chamado **atrator exponencial generalizado**.*

Teorema 2.3.8 ([23], Teorema 7.9.9) *Seja $(S(t), H)$ um sistema dinâmico dissipativo definido em (2.7) e satisfazendo a regularidade (2.8). Suponhamos que $(S(t), H)$ é quase-estável sobre* *algum conjunto absorvente limitado B e que existe um espaço estendido $\widetilde{H} \supseteq H$ tal que para todo $T > 0$,*

$$\|S(t_2)z - S(t_1)z\|_{\widetilde{H}} \leq C_{B,T}|t_2 - t_1|^{\alpha}, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \quad z \in B, \tag{2.13}$$

onde $C_{B,T} > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$ são constantes. Então o sistema dinâmico $(S(t), H)$ possui um atrator exponencial generalizado com dimensão fractal finita em $\widetilde{H}$.

2.4 O Teorema do Passo da Montanha

A fim de enunciar o Teorema do Passo da Montanha, precisamos estabelecer a noção de derivada de funções $f : U \subseteq E \to F$ onde U é um conjunto aberto e E e F são espaços de Banach. No cálculo infinitesimal em dimensão finita, buscávamos aproximar localmente funções não lineares por funções afins

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

onde $f'(x_0)$ é uma transformação linear contínua de E em F. Essa ideia nos leva à definição a seguir.

Definição 2.4.1 *Sejam E e F espaços de Banach e U um aberto em E. Dizemos que a função $f : U \subseteq E \to F$ é **Frechét-diferenciável** num ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : E \to F$ tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h),$$

para todo h tal que $h + x_0$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0 e contida em U com $R(x_0, h)$ satisfazendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

*Neste caso, A é chamada de **derivada de Frechét** de f em x_0 e é denotada por $A = Df(x_0)$. Dizemos que f é Frechét-diferenciável em U se f é Frechét-diferenciável em todos os pontos de U.*

Definição 2.4.2 *Seja H um espaço de Hilbert e considere $C^1(H, \mathbb{R})$ como sendo o espaço vetorial dos funcionais $f : H \to \mathbb{R}$ que são diferenciáveis no sentido de Frechét com derivadas de Frechét* *contínuas em H. Diz-se que um funcional $f \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisfaz a* ***condição de Palais-Smale (PS)*** *se qualquer sequência $(u_n) \subset H$ tal que $(f(u_n))$ é limitada e $Df(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$ possui subsequência convergente.*

Teorema 2.4.1 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja H um espaço de Hilbert. Se $f \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS), tem derivada Frechét Df localmente Lipschitziana e, além disso, f é tal que:*

- *$f(0) = 0$;*
- *existem constantes positivas m e r tais que $f(u) \geq m$ quando $\|u\| = r$;*
- *existe $v \in H$ tal que $f(v) \leq 0$ e $\|v\| > r$,*

então f possui um valor crítico

$$d = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \max_{t \in [0,1]} f(\alpha(t)) \right\}$$

onde

$$A = \big\{ \alpha \in C([0,1],H); \;\; \alpha(0) = 0 \;\text{ e }\; \alpha(1) = v \big\}.$$

A ideia geométrica do Teorema do Passo da Montanha pode ser resumida da seguinte forma: suponha que se deseja transpor uma cadeia de montanhas sem contorna-las e com o mínimo esforço possível. Qualquer caminho saindo do sopé de um lado da cadeia e indo até o sopé do outro lado passará por um ponto cuja altitude seja máxima para o caminho escolhido. A ideia é procurar, dentre todos os caminhos admissíveis, aquele cuja altitude máxima seja a menor possível.

2.5 Outras definições e resultados auxiliares

As definições e resultados desta seção desempenham um papel auxiliar na demonstração de alguns teoremas estabelecidos neste trabalho.

Definição 2.5.1 (Quociente da diferença simétrica) *Seja X um espaço de Banach. Dados $u \in C([0,T];X)$ e $h > 0$, definimos o quociente da diferença simétrica de u por*

$$D_h u(t) = \frac{u_e(t+h) - u_e(t-h)}{2h} \tag{2.14}$$

onde $u_e(t)$ *é a extensão de* u *a* $\mathbb{R}$ *dada por*

$$u_e(t) = \begin{cases} u(0) & se \quad t \leq 0, \\ u(t) & se \quad t \in (0,T), \\ u(T) & se \quad t \geq T. \end{cases} \tag{2.15}$$

Proposição 2.5.1 *Seja* $u \in C([0,T];X)$ *onde* X *é um espaço de Hilbert com produto interno* $(\cdot,\cdot)_X$ *e norma* $\|\cdot\|_X$. *Então*

$$\lim_{h\to 0}\int_0^T (u(t), D_h u(t))_X dt = \frac{1}{2}(\|u(T)\|_X^2 - \|u(0)\|_X^2). \tag{2.16}$$

Além disso, se $u_t \in C([0,T];X)$, *então*

$$\int_0^T (u(t), D_h u(t))_X dt = 0 \quad para\ cada \quad h > 0, \tag{2.17}$$

e

$$D_h u(t) \to u_t(t) \quad fracamente\ em\ X\ quando\ h \to 0 \quad \forall t \in (0,T), \tag{2.18}$$

$$D_h u(0) \to \frac{1}{2}u_t(0) \quad fracamente\ em\ X\ quando\ h \to 0, \tag{2.19}$$

$$D_h u(T) \to \frac{1}{2}u_t(T) \quad fracamente\ em\ X\ quando\ h \to 0. \tag{2.20}$$

Para demonstração, consulte [41, Proposition 4.3].

Proposição 2.5.2 *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach. Suponha que* $u \in C([0,T];Y)$ *e* $u_t \in L^1(0,T;Y) \cap L^p(0,T;X), 1 \leq p < \infty$. *Então* $D_h u \in L^p(0,T;X)$ *e* $\|D_h u\|_{L^p(0,T;X)} \leq \|u_t\|_{L^p(0,T;X)}$. *Além disso*

$$D_h u \to u_t \quad quando\ h \to 0\ em \quad L^p(0,T;X). \tag{2.21}$$

Para demonstração, consulte [31, Proposition 3.2].

Em algumas demonstrações necessitaremos do conhecido teorema de compacidade a seguir.

Teorema 2.5.1 (Aubin-Lions) *Sejam* X_0, X *e* X_1 *espaços de Banach com* $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$. *Suponha que a imersão* $X_0 \hookrightarrow X$ *seja compacta e* $X \hookrightarrow X_1$ *seja contínua. Para* $1 \leq p,q \leq \infty$, *seja*

$$W = \left\{u \in L^p([0,T];X_0); u' \in L^q([0,T];X_1)\right\}$$

com a norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p([0,T];X_0)} + \|u'\|_{L^q([0,T];X_1)}.$$

Então

- *Se* $p < \infty$, *a imersão* $W \hookrightarrow L^p([0,T];X)$ *é compacta;*

- *Se* $p = \infty$ *e* $q > 1$, *a imersão* $W \hookrightarrow C([0,T];X)$ *é compacta.*

Para demonstração, consulte [47].

Definição 2.5.2 *Uma função* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita* ***linearmente limitada próximo a origem*** *se existem constantes positivas* c_1 *e* c_2 *tais que*

$$c_1|s| \leq |\gamma(s)| \leq c_2|s|, \quad \forall |s| < 1.$$

Capítulo 3

Existência e unicidade de solução

Neste capítulo, investigamos a boa colocação local e global, a estabilização uniforme e o blow-up em tempo finito para as soluções do problema (1.1)-(1.2). Nossos resultados são obtidos via teoria de semigrupos não lineares e operadores monótonos maximais.

3.1 Formulação via semigrupos e solução local fraca

A análise do nosso problema é dada no espaço de Hilbert

$$H = (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2, \tag{3.1}$$

munido com o produto interno usual, isto é, dados $U_1 = (u_1, v_1, w_1, z_1), U_2 = (u_2, v_2, w_2, z_2) \in H$, então

$$(U_1, U_2)_H = (\nabla u_1, \nabla u_2) + (\nabla v_1, \nabla v_2) + (w_1, w_2) + (z_1, z_2).$$

Dado $U = (u, v, w, z) \in H$, a norma de U é dada por

$$\|U\|_H^2 = \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

Definimos o operador não linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$ por

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -w \\ -z \\ -\Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} w + g_1(w) - f_1(u,v) \\ -\Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} z + g_2(z) - f_2(u,v) \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

O domínio de $\mathcal{A}$ é dado por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \big\{ U = (u,v,w,z) \in H : z \in H_0^1(0,L), w \in H_0^1(0,L), \\ -\Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} w + g_1(w) - f_1(u,v) \in L^2(\Omega), \\ -\Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} z + g_2(z) - f_2(u,v) \in L^2(\Omega) \big\} \end{aligned}$$

Para $U = (u, v, u_t, v_t) \in D(\mathcal{A})$, o problema (1.1)-(1.2) pode ser escrito sob a forma do problema de Cauchy equivalente

$$\frac{dU(t)}{dt} + \mathcal{A}U(t) = 0, \;\; 0 < t < T, \quad U(0) = U_0 = (u_0, v_0, u_1, w_1) \in H. \tag{3.3}$$

O problema (3.3) é um caso particular do seguinte problema de Cauchy

$$\frac{dU(t)}{dt} + \mathcal{A}U(t) = F(t), \;\; 0 < t < T, \quad U(0) = U_0 = (u_0, v_0, u_1, w_1) \in H. \tag{3.4}$$

Para um problema dessa natureza, sob hipóteses adequadas, é possível obter dois tipos de solução, a saber, a solução forte ou a solução generalizada.

Definição 3.1.1 *Uma **solução forte** do problema de Cauchy* (3.4) *é uma função* $U \in C([0,T); H)$ *que é absolutamente contínua em cada subintervalo* $[a,b]$ *com* $0 < a < b < T$. *Portanto,* U *é diferenciável quase sempre e* $\dfrac{dU}{dt} \in L^1(a,b;H)$ *e para quase todo* $t > 0$ *temos que* $U(t) \in D(\mathcal{A})$ *e vale* (3.4).

Definição 3.1.2 *Uma **solução generalizada** de* (3.4) *em um intervalo fechado* $[0,T]$ *é uma função contínua* $U \in C([0,T]; H)$ *tal que* $U(0) = U_0$ *e existe uma sequência* (U_n) *de soluções fortes definidas em* $[0,T]$ *para o problema*

$$\frac{dU_n(t)}{dt} + \mathcal{A}U_n(t) = F_n, \;\; n = 1, 2, ...$$

com $F_n \to F$ *em* $L^1(0,T;H)$ *e* $U_n \to U$ *em* $C([0,T];H)$. *Uma função* U *de classe* $C([0,T);H)$ *será uma solução generalizada para o problema* (3.4) *em um semi-intervalo* $[0,T)$ *se* U *for uma solução generalizada de* (3.4) *em todo intervalo fechado* $[0,T']$ *com* $T' < T$.

Conforme as definições de solução para o problema de Cauchy (3.4), vemos que as soluções generalizadas são limites (fortes) de soluções fortes. É importante destacar que as soluções generalizadas não satisfazem a equação diferencial (3.4) de fato. Todavia, sob hipóteses adequadas de regularidade, é possível mostrar que uma solução generalizada satisfaz uma forma variacional da equação. As soluções com essa característica são chamadas **soluções fracas**.

De acordo com o Teorema de Kato (veja [54]), se $\mathcal{A} + \omega I$ é m-acretivo para algum inteiro positivo ω, então para cada dado inicial $U_0 \in D(\mathcal{A})$ existe uma única solução forte U de (3.3), ou seja, $U \in W^{1,\infty}(0,T;H)$ com $U(0) = U_0$ e $U(t) \in D(\mathcal{A})$, $\forall t \in [0,T]$, de modo que a equação (3.3) é satisfeita para quase todo $t \in [0,T]$, sendo $T > 0$ arbitrário.

Nos próximos resultados, mostramos que se as funções g_i e f_i, $i = 1,2$, satisfazem determinadas condições, o problema (3.3) possui uma única solução global forte $U \in W^{1,\infty}(0,T;H)$, para qualquer $T > 0$, desde que $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Sob hipóteses adicionais, garantimos a existência de um $T_0 > 0$ para o qual U é solução local única de (3.3). Se o dado inicial $U_0 \in H$, um argumento de densidade nos fornece uma sequência $(U_0^n) \in D(\mathcal{A})$ que converge forte para U_0 em H. Desta forma, podemos obter, para cada U_0^n, uma função U^n que será solução forte única do problema

$$U_t^n + \mathcal{A}U^n = 0, \ \ U^n(0) = U_0^n \in D(\mathcal{A}).$$

Em seguida provamos que a sequência (U^n) é de Cauchy num espaço de Banach, ou seja, (U^n) converge forte para uma função $U = (u, v, u_t, v_t)$, solução (generalizada) do problema (3.3), o que é equivalente à afirmação de que o par (u,v) é a solução do problema (1.1)-(1.2) no sentido da definição a seguir.

Definição 3.1.3 (Solução fraca) *Um par de funções* (u,v) *é dito solução fraca para o problema* (1.1)-(1.2) *se*

(i) $u, v \in C(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u_t \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega \times (0,T)) \cap L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}))$, $v_t \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^{r+1}(\Omega \times (0,T)) \cap L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}))$;

(ii) $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega))^2$ *and* $(u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1) \in (L^2(\Omega))^2$*;*

(iii) u *e* v *satisfazem as seguintes identidades*

$$
\begin{aligned}
&(u_t(t), \phi(t)) - (u_t(0), \phi(0)) + \int_0^t \big[- (u_t(\tau), \phi_t(\tau)) + (\nabla u(\tau), \nabla \phi(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} \phi(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_1(u_t(\tau)), \phi(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau)), \phi(\tau)) d\tau,
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&(v_t(t), \psi(t)) - (v_t(0), \psi(0)) + \int_0^t \big[- (v_t(\tau), \psi_t(\tau)) + (\nabla v(\tau), \nabla \psi(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} \psi(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_2(v_t(\tau)), \psi(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^t (f_2(u(\tau), v(\tau)), \psi(\tau)) d\tau,
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

para todo $t \in [0, T]$ *e todo par de funções teste* ϕ, ψ *satisfazendo*

$$
\begin{aligned}
&\phi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{m+1}(\Omega \times (0, T)) \cap L^2(0, T; D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}})), \\
&\psi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{r+1}(\Omega \times (0, T)) \cap L^2(0, T; D((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}})), \\
&\phi_t, \psi_t \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Hipótese 3.1.1 *Ao longo do desenvolvimento do presente capítulo, suponhamos que o damping e os termos de fonte satisfaçam das seguintes propriedades:*

- ***Damping:*** $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções monótonas crescentes com* $g_1(0) = g_2(0) = 0$*. Além disso, existem constantes* $a, b > 0$ *e* $m, r \geq 1$ *tais que*

$$
\begin{aligned}
a|s|^{m+1} &\leq g_1(s)s \leq b|s|^{m+1}, \quad \forall |s| \geq 1, \\
a|s|^{r+1} &\leq g_2(s)s \leq b|s|^{r+1}, \quad \forall |s| \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

- ***Fontes:*** $f_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *e existe uma constante* $C > 0$ *e* $p \geq 1$ *tais que*

$$
|\nabla f_i(u, v)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + 1), \quad \forall u, v \in \mathbb{R},\ i = 1, 2. \tag{3.8}
$$

Lema 3.1.1 *Suponhamos que* $f_1, f_2 : (H_0^1(\Omega))^2 \to L^2(\Omega)$ *são funções globalmente Lipschitz contínuas. Então para toda condição inicial* $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$*, o problema* (3.3) *possui uma solução forte global* $U \in W^{1,\infty}(0, T; H)$ *para todo* $T > 0$*.*

Demonstração: Devemos mostrar que o operador $\mathcal{A}+\omega I$ é m-acretivo para algum $\omega > 0$, com I sendo o operador identidade, e usar o Teorema de Kato para concluir a prova. Esta demonstração está dividida em quatro passos como veremos a seguir.

Passo 1: $\mathcal{A}+\omega I$ é acretivo para algum $\omega > 0$. Vamos mostrar que para algum $\omega > 0$

$$((\mathcal{A}+\omega I)U - (\mathcal{A}+\omega I)\tilde{U}, U-\tilde{U})_H \geq 0, \quad \forall U, \tilde{U} \in D(\mathcal{A}).$$

Sejam $U = (u, v, w, z)$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{z}) \in D(\mathcal{A})$. Assim

$$\begin{aligned}
&((\mathcal{A}+\omega I)U - (\mathcal{A}+\omega I)\tilde{U}, U-\tilde{U})_H \\
&= (\mathcal{A}U - \mathcal{A}\tilde{U}, U-\tilde{U})_H + \omega\|U-\tilde{U}\|_H^2 \\
&\quad + ((-\Delta)^{\alpha_1}(w-\tilde{w}), w-\tilde{w}) + ((-\Delta)^{\alpha_2}(z-\tilde{z}), z-\tilde{z}) \\
&\quad + (g_1(w)-g_1(\tilde{w}), w-\tilde{w}) + (g_2(z)-g_2(\tilde{z}), z-\tilde{z}) \\
&\quad - (f_1(u,v)-f_1(\tilde{u},\tilde{v}), w-\tilde{w}) - (f_2(u,v)-f_2(\tilde{u},\tilde{v}), z-\tilde{z}) \\
&\quad + \omega(\|\nabla(u-\tilde{u})\|^2 + \|\nabla(v-\tilde{v})\|^2 + \|w-\tilde{w}\|^2 + \|z-\tilde{z}\|^2).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Desde que $(-\Delta)^s$ é autoadjunto para $s \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
((-\Delta)^{\alpha_1}(w-\tilde{w}), w-\tilde{w}) &= \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}(w-\tilde{w})\|^2, \\
((-\Delta)^{\alpha_2}(z-\tilde{z}), z-\tilde{z}) &= \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}(z-\tilde{z})\|^2.
\end{aligned}$$

Além disso, pela monotonicidade de g_1 e g_2 temos

$$\begin{aligned}
(g_1(w)-g_1(\tilde{w}), w-\tilde{w}) &= \int_\Omega (g_1(w)-g_1(\tilde{w}))(w-\tilde{w})dx \geq 0, \\
(g_2(z)-g_2(\tilde{z}), z-\tilde{z}) &= \int_\Omega (g_2(z)-g_2(\tilde{z}))(z-\tilde{z})dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas acima em (3.9) resulta em

$$\begin{aligned}
&((\mathcal{A}+\omega I)U - (\mathcal{A}+\omega I)\tilde{U}, U-\tilde{U})_H \\
&\geq -(f_1(u,v)-f_1(\tilde{u},\tilde{v}), w-\tilde{w}) - (f_2(u,v)-f_2(\tilde{u},\tilde{v}), z-\tilde{z}) \\
&\quad + \omega(\|\nabla(u-\tilde{u})\|^2 + \|\nabla(v-\tilde{v})\|^2 + \|w-\tilde{w}\|^2 + \|z-\tilde{z}\|^2).
\end{aligned}$$

Seja $V = (H_0^1(\Omega))^2$. Como, por hipótese, $f_1, f_2 : V \to L^2(\Omega)$ são globalmente Lipschitz com constante de Lipschitz L_{f_1} e L_{f_2}, respectivamente, então fazendo $L = \max\{L_{f_1}, L_{f_2}\}$ temos

$$\begin{aligned}
&((\mathcal{A}+\omega I)U - (\mathcal{A}+\omega I)\tilde{U}, U-\tilde{U})_H \\
&\geq -L\|(u-\tilde{u}, v-\tilde{v})\|_V\|w-\tilde{w}\| - L\|(u-\tilde{u}, v-\tilde{v})\|_V\|z-\tilde{z}\| \\
&\quad + \omega(\|\nabla(u-\tilde{u})\|^2 + \|\nabla(v-\tilde{v})\|^2 + \|w-\tilde{w}\|^2 + \|z-\tilde{z}\|^2) \\
&\geq -L(\|\nabla(u-\tilde{u})\|^2 + \|\nabla(v-\tilde{v})\|^2) - \frac{L}{2}(\|w-\tilde{w}\|^2 + \|z-\tilde{z}\|^2) \\
&\quad + \omega(\|\nabla(u-\tilde{u})\|^2 + \|\nabla(v-\tilde{v})\|^2 + \|w-\tilde{w}\|^2 + \|z-\tilde{z}\|^2) \\
&= (\omega - L)(\|\nabla(u-\tilde{u})\|^2 + \|\nabla(v-\tilde{v})\|^2) \\
&\quad + \left(\omega - \frac{L}{2}\right)(\|w-\tilde{w}\|^2 + \|z-\tilde{z}\|^2).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\omega > L$ temos que $\mathcal{A}+\omega I$ é acretivo.

Passo 2: $(\mathcal{A}+\lambda I)$ é m-acretivo para algum $\lambda > 0$. Devemos mostrar que para cada $\Phi = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in H$, existe $U = (u, v, w, z) \in D(\mathcal{A})$ tal que $(\mathcal{A}+\lambda I)U = \Phi$ para algum $\lambda > 0$, ou seja,

$$\begin{cases} -w + \lambda u = v_1, \\ -z + \lambda v = v_2, \\ -\Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} w + g_1(w) - f_1(u,v) + \lambda w = v_3, \\ -\Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} z + g_2(z) - f_2(u,v) + \lambda z = v_4. \end{cases} \tag{3.10}$$

Observe que (3.10) pode ser escrito como

$$\begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\Delta w + (-\Delta)^{\alpha_1} w + g_1(w) - f_1(\frac{w+v_1}{\lambda}, \frac{z+v_2}{\lambda}) + \lambda w = v_3 + \frac{1}{\lambda}\Delta v_1, \\ -\frac{1}{\lambda}\Delta z + (-\Delta)^{\alpha_2} z + g_2(z) - f_2(\frac{w+v_1}{\lambda}, \frac{z+v_2}{\lambda}) + \lambda z = v_4 + \frac{1}{\lambda}\Delta v_2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Lembremos que $V = (H_0^1(\Omega))^2$. Levando em conta que $(v_1, v_2) \in V$, o lado direito de (3.11) pertence a V', portanto podemos definir o operador $\mathcal{R} : D(\mathcal{R}) \subset V \to V'$ dado por

$$\mathcal{R}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}\Delta w + (-\Delta)^{\alpha_1} w + g_1(w) - f_1(\frac{w+v_1}{\lambda}, \frac{z+v_2}{\lambda}) + \lambda w \\ -\frac{1}{\lambda}\Delta z + (-\Delta)^{\alpha_2} z + g_2(z) - f_2(\frac{w+v_1}{\lambda}, \frac{z+v_2}{\lambda}) + \lambda z \end{pmatrix}.$$

Decompomos o operador $\mathcal{R}$ como a soma de dois operadores

$$\mathcal{R}_1\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}\Delta w - f_1(\frac{w+v_1}{\lambda}, \frac{z+v_2}{\lambda}) + \lambda w \\ -\frac{1}{\lambda}\Delta z - f_2(\frac{w+v_1}{\lambda}, \frac{z+v_2}{\lambda}) + \lambda z \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

e

$$\mathcal{R}_2 \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\Delta)^{\alpha_1} w + g_1(w) \\ (-\Delta)^{\alpha_2} z + g_2(z) \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Agora nos resta provar que o operador $\mathcal{R}$ é sobrejetivo. Para isto é suficiente mostrar que ele é monótono maximal e coercivo. O primeiro passo é provar que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são monótonos maximais sendo $\mathcal{R}_1$ também coercivo. Assim $\mathcal{R}$ será também monótono maximal e coercivo. Pelo Teorema 2.2.2 obtemos a sobrejetividade de $\mathcal{R}$.

Passo 3: $\mathcal{R}_1$ é monótono maximal. Notemos que $D(\mathcal{R}_1) = V$. Primeiramente provamos que $\mathcal{R}_1$ é um operador monótono. Sejam $W = (w, z), \tilde{W} = (\tilde{w}, \tilde{z}) \in V$. Então

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{R}_1(W) - \mathcal{R}_1(\tilde{W}), W - \tilde{W} \rangle \\
&= -\frac{1}{\lambda}(\Delta(w - \tilde{w}), w - \tilde{w}) - \frac{1}{\lambda}(\Delta(z - \tilde{z}), z - \tilde{z}) \\
&\quad + \lambda(w - \tilde{w}, w - \tilde{w}) + \lambda(z - \tilde{z}, z - \tilde{z}) \\
&\quad - \left(f_1\left(\frac{w + v_1}{\lambda}, \frac{z + v_2}{\lambda}\right) - f_1\left(\frac{\tilde{w} + v_1}{\lambda}, \frac{\tilde{z} + v_2}{\lambda}\right), w - \tilde{w} \right) \\
&\quad - \left(f_2\left(\frac{w + v_1}{\lambda}, \frac{z + v_2}{\lambda}\right) - f_2\left(\frac{\tilde{w} + v_1}{\lambda}, \frac{\tilde{z} + v_2}{\lambda}\right), z - \tilde{z} \right).
\end{aligned}$$

Como $f_1, f_2 : V \to L^2(\Omega)$ são globalmente Lipschitz, obtemos

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{R}_1(W) - \mathcal{R}_1(\tilde{W}), W - \tilde{W} \rangle \\
&\geq \frac{1}{\lambda}\|\nabla(w - \tilde{w})\|^2 + \frac{1}{\lambda}\|\nabla(z - \tilde{z})\|^2 + \lambda\|w - \tilde{w}\|^2 + \lambda\|z - \tilde{z}\|^2 \\
&\quad - \frac{L}{\lambda}\|(w - \tilde{w}, z - \tilde{z})\|_V\|w - \tilde{w}\| - \frac{L}{\lambda}\|(w - \tilde{w}, z - \tilde{z})\|_V\|z - \tilde{z}\|,
\end{aligned}$$

onde $L = \max\{L_{f_1}, L_{f_2}\}$. Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{R}_1(W) - \mathcal{R}_1(\tilde{W}), W - \tilde{W} \rangle \\
&\geq \frac{1}{\lambda}\|\nabla(w - \tilde{w})\|^2 - \frac{L}{2\lambda^2}(\|\nabla(w - \tilde{w})\|^2 + \|\nabla(z - \tilde{z})\|^2) \\
&\quad - \frac{L}{2}\|w - \tilde{w}\|^2 + \lambda\|w - \tilde{w}\|^2 + \frac{1}{\lambda}\|\nabla(z - \tilde{z})\|^2 \\
&\quad - \frac{L}{2\lambda^2}(\|\nabla(w - \tilde{w})\|^2 + \|\nabla(z - \tilde{z})\|^2) - \frac{L}{2}\|z - \tilde{z}\|^2 + \lambda\|z - \tilde{z}\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{L}{\lambda^2}\right)(\|\nabla(w - \tilde{w})\|^2 + \|\nabla(z - \tilde{z})\|^2) \\
&\quad + \left(\lambda - \frac{L}{2}\right)(\|w - \tilde{w}\|^2 + \|z - \tilde{z}\|^2).
\end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda > 0$ suficientemente grande, concluímos que existe uma constante $C_\lambda > 0$ tal que

$$\langle \mathcal{R}_1(W) - \mathcal{R}_1(\tilde{W}), W - \tilde{W} \rangle \geq C_\lambda \|W - \tilde{W}\|^2_{V^*}, \tag{3.14}$$

de onde segue que $\mathcal{R}_1$ é monótono. Mostraremos agora que $\mathcal{R}_1$ é hemicontínuo. Sejam $W = (w,z), \tilde{W} = (\tilde{w}, \tilde{z}), \hat{W} = (\hat{w}, \hat{z}) \in V$. Então

$$\begin{aligned}
&\langle \mathcal{R}_1(W + \eta\tilde{W}), \hat{W} \rangle - \langle \mathcal{R}_1(W), \hat{W} \rangle \\
&= \lambda(w + \eta\tilde{w}, \hat{w}) - \lambda(w, \hat{w}) + \lambda(z + \eta\tilde{z}, \hat{z}) - \lambda(z, \hat{z}) \\
&\quad - \left[\frac{1}{\lambda}(\Delta(w + \eta\tilde{w}), \hat{w}) - \frac{1}{\lambda}(\Delta w, \hat{w})\right] - \left[\frac{1}{\lambda}(\Delta(z + \eta\tilde{z}), \hat{z}) - \frac{1}{\lambda}(\Delta z, \hat{z})\right] \\
&\quad - \left[\left(f_1\left(\frac{w + \eta\tilde{w} + v_1}{\lambda}, \frac{z + \eta\tilde{z} + v_2}{\lambda}\right), \hat{w}\right) - \left(f_1\left(\frac{w + v_1}{\lambda}, \frac{z + v_2}{\lambda}\right), \hat{w}\right)\right] \\
&\quad - \left[\left(f_2\left(\frac{w + \eta\tilde{w} + v_1}{\lambda}, \frac{z + \eta\tilde{z} + v_2}{\lambda}\right), \hat{z}\right) - \left(f_2\left(\frac{w + v_1}{\lambda}, \frac{z + v_2}{\lambda}\right), \hat{z}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Temos

$$\left|\frac{1}{\lambda}(\Delta(w + \eta\tilde{w}), \hat{w}) - \frac{1}{\lambda}(\Delta w, \hat{w})\right| = \left|\frac{\eta}{\lambda}\right| |(\nabla\tilde{w}, \nabla\hat{w})| \xrightarrow{\eta \to 0} 0.$$

Analogamente,

$$\left|\frac{1}{\lambda}(\Delta(z + \eta\tilde{z}), \hat{z}) - \frac{1}{\lambda}(\Delta z, \hat{z})\right| = \left|\frac{\eta}{\lambda}\right| |(\nabla\tilde{z}, \nabla\hat{z})| \xrightarrow{\eta \to 0} 0.$$

Como $f_1 : V \to L^2(\Omega)$ é globalmente Lipschitz, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\left(f_1\left(\frac{w + \eta\tilde{w} + v_1}{\lambda}, \frac{z + \eta\tilde{z} + v_2}{\lambda}\right), \hat{w}\right) - \left(f_1\left(\frac{w + v_1}{\lambda}, \frac{z + v_2}{\lambda}\right), \hat{w}\right)\right| \\
&\qquad \leq \frac{L_{f_1}|\eta|}{|\lambda|} \|(\tilde{w}, \tilde{z})\|_V \|\hat{w}\| \xrightarrow{\eta \to 0} 0.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&\left|\left(f_2\left(\frac{w + \eta\tilde{w} + v_1}{\lambda}, \frac{z + \eta\tilde{z} + v_2}{\lambda}\right), \hat{z}\right) - \left(f_2\left(\frac{w + v_1}{\lambda}, \frac{z + v_2}{\lambda}\right), \hat{z}\right)\right| \\
&\qquad \leq \frac{L_{f_2}|\eta|}{|\lambda|} \|(\tilde{w}, \tilde{z})\|_V \|\hat{z}\| \xrightarrow{\eta \to 0} 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, obtém-se

$$|\lambda(w + \eta\tilde{w}, \hat{w}) - \lambda(w, \hat{w})| = |\lambda\eta||(\tilde{w}, \hat{w})| \xrightarrow{\eta \to 0} 0,$$

e analogamente

$$|\lambda(z+\eta\tilde{z},\hat{z})-\lambda(z,\hat{z})|\xrightarrow{\eta\to 0}0.$$

Portanto, levado em conta as convergências acima, podemos passar ao limite (3.15) com $\eta \to 0$ para concluir que $\mathcal{R}_1$ é hemicontínuo. Portanto, pelo Teorema 2.2.1 temos que $\mathcal{R}_1$ é monótono maximal. A coercividade de $\mathcal{R}_1$ segue diretamente da desigualdade (3.14).

Passo 4: $\mathcal{R}_2$ é monótono maximal. Sejam $W=(w,z),\tilde{W}=(\tilde{w},\tilde{z})\in V$. Como g_1 e g_2 são monótonas, temos

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}_2(W)-\mathcal{R}_2(\tilde{W}),W-\tilde{W}\rangle &= \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}(w-\tilde{w})\|^2+(g_1(w)-g_1(\tilde{w}),w-\tilde{w})\\ &\quad+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}(z-\tilde{z})\|^2+(g_2(z)-g_2(\tilde{z}),z-\tilde{z})\geq 0.\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{R}_2$ é monótono. Provaremos que $\mathcal{R}_2$ é hemicontínuo. Sejam $W=(w,z),\tilde{W}=(\tilde{w},\tilde{z}),\hat{W}=(\hat{w},\hat{z})\in V$ e notemos que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}_2(W+\eta\tilde{W}),\hat{W}\rangle &= ((-\Delta)^{\alpha_1})(w+\eta\tilde{w}),\hat{w})+\int_\Omega g_1(w+\eta\tilde{w})\hat{w}dx\\ &\quad+((-\Delta)^{\alpha_2})(z+\eta\tilde{z}),\hat{z})+\int_\Omega g_2(z+\eta\tilde{z})\hat{z}dx.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando o fato que $(-\Delta)^s$ é autoadjunto, temos

$$\lim_{\eta\to 0}((-\Delta)^{\alpha_1})(w+\eta\tilde{w}),\hat{w})=((-\Delta)^{\alpha_1})w,\hat{w}), \tag{3.17}$$

e

$$\lim_{\eta\to 0}((-\Delta)^{\alpha_2})(z+\eta\tilde{z}),\hat{z})=((-\Delta)^{\alpha_2})z,\hat{z}). \tag{3.18}$$

Como g_1 é contínua, temos que

$$g_1(w+\eta\tilde{w})\hat{w}\to g_1(w)\hat{w}\ \text{ q.s. em }\ \Omega\ \text{ quando }\eta\to 0. \tag{3.19}$$

Além disso, pela hipótese sobre o damping, encontramos que $g_1(s)\leq b(|s|^m+1)$ para todo $s\in\mathbb{R}$. Portanto, se $|\eta|\leq 1$, teremos

$$|g_1(w+\eta\tilde{w})\hat{w}|\leq b(|w|^m+|\tilde{w}|^m+1)|\hat{w}|\in L^1(\Omega). \tag{3.20}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{\eta \to 0} \int_\Omega g_1(w + \eta \tilde{w}) \hat{w} dx = \int_\Omega g_1(w) \hat{w} dx. \tag{3.21}$$

Analogamente,

$$\lim_{\eta \to 0} \int_\Omega g_2(z + \eta \tilde{z}) \hat{z} dx = \int_\Omega g_2(z) \hat{z} dx. \tag{3.22}$$

Portanto, passando ao limite em (3.16) com $\eta \to 0$ obtemos

$$\lim_{\eta \to 0} \langle \mathcal{R}_2(W + \eta \tilde{W}), \hat{W} \rangle = \langle \mathcal{R}_2(W), \hat{W} \rangle, \tag{3.23}$$

de onde concluímos que $\mathcal{R}_2$ é monótono maximal. Agora, como $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são ambos maximais monótonos e $\text{int}(D(\mathcal{R}_1)) \cap D(\mathcal{R}_2) \neq \emptyset$, pelo Teorema 2.2.3, concluímos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ é maximal monótono. Além disso, como $\mathcal{R}_2$ é monótono e $\mathcal{R}_2(0) = 0$ temos $\langle \mathcal{R}_2 W, W \rangle \geq 0$ para todo $W \in V$. Então

$$\langle \mathcal{R} W, W \rangle = \langle \mathcal{R}_1 W, W \rangle + \langle \mathcal{R}_2 W, W \rangle \geq \langle \mathcal{R}_1 W, W \rangle, \quad \forall W \in V.$$

Portanto, a coercividade de $\mathcal{R}_1$ implica na de $\mathcal{R}$ e concluímos que $\mathcal{R}$ é sobrejetivo. Assim, a prova de acretividade maximal está completa. ■

Lema 3.1.2 *Suponha que $p, m, r \geq 1$ e $p \cdot \max\left\{\frac{m+1}{m}, \frac{r+1}{r}\right\} \leq \frac{2}{\epsilon}$ para algum $\epsilon > 0$. Suponha ainda que $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ sejam tais que*

$$|\nabla f_i(u, v)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + 1), \quad i = 1, 2,$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$. Então

- *$f_i : (H^{1-\epsilon}(\Omega))^2 \to L^{\sigma_i}(\Omega)$ com $i = 1, 2$ são localmente Lipschitz para*
$$\sigma_1 = \hat{m} = \frac{m+1}{m} \quad e \quad \sigma_2 = \hat{r} = \frac{r+1}{r}.$$
- *$f_i : V \to L^2(\Omega)$ com $i = 1, 2$ são localmente Lipschitz sendo $V = (H_0^1(\Omega))^2$.*

Demonstração: Primeiramente provaremos que $f_1 : (H^{1-\epsilon}(\Omega))^2 \to L^{\hat{m}}(\Omega)$ é localmente Lipschitz. Sejam $z = (u, v), \hat{z} = (\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{V} = (H^{1-\epsilon}(\Omega))^2$ tais que $\|z\|_{\hat{V}}, \|\hat{z}\|_{\hat{V}} \leq R$, sendo $R > 0$. Por (3.8) e pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$|f_1(z) - f_1(\hat{z})| \leq C|z - \hat{z}| \left(|u|^{p-1} + |\hat{u}|^{p-1} + |v|^{p-1} + |\hat{v}|^{p-1} + 1\right). \tag{3.24}$$

Então

$$
\begin{aligned}
\|f_1(z)-f_1(\hat z)\|_{\hat m}^{\hat m} &= \int_\Omega |f_1(z)-f_1(\hat z)|^{\hat m} dx \\
&\le C\int_\Omega \Big(|u-\hat u|^{\hat m}+|v-\hat v|^{\hat m}\Big)\times\Big(|u|^{(p-1)\hat m}+|\hat u|^{(p-1)\hat m}+|v|^{(p-1)\hat m}+|\hat v|^{(p-1)\hat m}+1\Big)\,dx.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Todas as parcelas do lado direito de (3.25) são estimadas da mesma forma: usando a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev em 2D $H^{1-\epsilon}(\Omega)\hookrightarrow L^{\frac{2}{\epsilon}}(\Omega)$ e as hipóteses $p\hat m\le \dfrac{2}{\epsilon}$ e $\|u\|_{H^{1-\epsilon}(\Omega)}\le R$. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u-\hat u|^{\hat m}|u|^{(p-1)\hat m}dx &\le \left(\int_\Omega |u-\hat u|^{p\hat m}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |u|^{p\hat m}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le C\|u-\hat u\|_{H^{1-\epsilon}(\Omega)}^{\hat m}\|u\|_{H^{1-\epsilon}(\Omega)}^{(p-1)\hat m} \\
&\le CR^{(p-1)\hat m}\|u-\hat u\|_{H^{1-\epsilon}(\Omega)}^{\hat m}.
\end{aligned}
$$

Portanto, existe $C(R)>0$ tal que

$$
\|f_1(z)-f_1(\hat z)\|_{\hat m}\le C(R)\|z-\hat z\|_{(H^{1-\epsilon}(\Omega))^2},
$$

o que mostra que $f_1:(H^{1-\epsilon}(\Omega))^2\to L^{\hat m}(\Omega)$ é localmente Lipschitz.

Agora provaremos que $f_1:V\to L^2(\Omega)$ é localmente Lipschitz. Sejam $z=(u,v),\hat z=(\hat u,\hat v)\in V=(H_0^1(\Omega))^2$ tais que $\|z\|_V,\|\hat z\|_V\le R$, sendo $R>0$. Por (3.24) temos

$$
\begin{aligned}
\|f_1(z)-f_1(\hat z)\|_2^2 &= \int_\Omega |f_1(z)-f_1(\hat z)|^2 dx \\
&\le C\int_\Omega \left(|u-\hat u|^2+|v-\hat v|^2\right)\times\Big(|u|^{2(p-1)}+|\hat u|^{2(p-1)}+|v|^{2(p-1)}+|\hat v|^{2(p-1)}+1\Big)\,dx.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, a imersão $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1\le q<\infty$ e as hipóteses $p\ge 1$ e $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\le R$ temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u-\hat u|^2|u|^{2(p-1)}dx &\le \left(\int_\Omega |u-\hat u|^{2p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |u|^{2p}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le C\|u-\hat u\|_{H_0^1(\Omega)}^2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2(p-1)} \\
&\le CR^{2(p-1)}\|u-\hat u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}
$$

Usando argumento análogo para estimar adequadamente as demais parcelas de (3.26), obtemos

$$\|f_1(z) - f_1(\hat{z})\|_2 \leq C(R)\|z - \hat{z}\|_{(H_0^1(\Omega))^2}.$$

Como a norma $\|\cdot\|_V$ é equivalente à norma usual em V, concluímos que existe $C(R) > 0$ tal que

$$\|f_1(z) - f_1(\hat{z})\|_2 \leq C(R)\|z - \hat{z}\|_V,$$

mostrando que $f_1 : (H^{1-\epsilon}(\Omega))^2 \to L^{\hat{m}}(\Omega)$ é localmente Lipschitz. A prova é análoga para f_2. Isso finaliza a prova. ■

Lema 3.1.3 *Suponha que a Hipótese 3.1.1 seja satisfeita. Então para toda condição inicial $U_0 \in D(\mathcal{A})$, existe um $T_0 = T_0(E(0)) > 0$ tal que o sistema* (3.3) *possui uma única solução local forte U definida em $[0, T_0]$.*

Demonstração: Seguindo as ideias de [24], usaremos o método padrão de truncamento das fontes. Defina

$$f_1^K(u,v) = \begin{cases} f_1(u,v), & \text{se } \|(u,v)\|_V \leq K, \\ f_1\left(\dfrac{Ku}{\|(u,v)\|_V}, \dfrac{Kv}{\|(u,v)\|_V}\right) & \text{se } \|(u,v)\|_V > K, \end{cases}$$

$$f_2^K(u,v) = \begin{cases} f_2(u,v), & \text{se } \|(u,v)\|_V \leq K, \\ f_2\left(\dfrac{Ku}{\|(u,v)\|_V}, \dfrac{Kv}{\|(u,v)\|_V}\right) & \text{se } \|(u,v)\|_V > K, \end{cases}$$

onde K é uma constante positiva tal que $K^2 \geq 4E(0) + 1$. Por [24], temos que os operadores $f_1^K, f_2^K : V \to L^2(\Omega)$ são globalmente Lipschitz. Portanto, pelo Lema 3.1.1, o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} u_t + g_1(u_t) = f_1^K(u,v), & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} - \Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} v_t + g_2(v_t) = f_2^K(u,v), & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ U(0) = (u_0, u_1, v_0, v_1) \in H, \end{cases} \tag{3.27}$$

possui uma única solução global forte $U^K \in W^{1,\infty}(0,T;H)$ para todo $T > 0$ desde que $U(0) \in D(\mathcal{A})$. A fim de simplificar a notação, denotaremos u^K e v^K por u e v, nesta ordem.

O objetivo desta prova é obter um $T_0 > 0$ e mostrar que a solução do problema (3.27) coincide com a solução de problema (1.1)-(1.2) quando $t \in [0, T_0]$. Multiplicando a primeira equação em (3.27) por u_t e a segunda por v_t e integrando integramos por partes sobre $\Omega \times (0,t)$ obtemos

$$\begin{aligned} E(t) &+ \int_0^t (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2) d\tau + \int_0^t [(g_1(u_t), u_t) + (g_2(v_t), v_t)] d\tau \\ &= E(0) + \int_0^t [(f_1^K(u,v), v_t) + (f_2^K(u,v), v_t)] d\tau. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Como $m, r \geq 1$ e $\hat{m} = \dfrac{m+1}{m}, \hat{r} = \dfrac{r+1}{r} \leq 2$, pelo Lema 3.1.2, temos que $f_1 : V \to L^{\hat{m}}(\Omega)$ e $f_2 : V \to L^{\hat{r}}(\Omega)$ são Lipschitz na bola $\{(u,v) \in V; \|(u,v)\|_V \leq K\}$ com constantes de Lipschitz $L_{f_1}(K)$ e $L_{f_2}(K)$, respectivamente. Temos também que $f_1^K : V \to L^{\hat{m}}(\Omega)$ e $f_2^K : V \to L^{\hat{r}}(\Omega)$ são globalmente Lipschitz constante de Lipschitz $L_K = \max\{L_{f_1}(L), L_{f_2}(K)\}$ por [24]. Vamos estimar agora cada integral em (3.28).

Usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (f_1^K(u,v), v_t) d\tau &\leq \int_0^t \|f_1^K(u,v)\|_{\hat{m}} \|u_t\|_{m+1} d\tau \\ &\leq C(\epsilon) \int_0^t \|f_1^K(u,v)\|_{\hat{m}}^{\hat{m}} d\tau + \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} d\tau \\ &\leq C(\epsilon) \int_0^t \|f_1^K(u,v) - f_1^K(0,0) + f_1^K(0,0)\|_{\hat{m}}^{\hat{m}} d\tau \\ &\quad + \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} d\tau \\ &\leq C(\epsilon) L_K^{\hat{m}} \int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{m}} + \|\nabla v\|^{\hat{m}}) d\tau + C(\epsilon) t |\Omega| |f_1^K(0,0)|^{\hat{m}} \\ &\quad + \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} d\tau. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_0^t (f_2^K(u,v), v_t) d\tau \leq C(\epsilon) L_K^{\hat{r}} \int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{r}} + \|\nabla v\|^{\hat{r}}) d\tau + C(\epsilon) t |\Omega| |f_2^K(0,0)|^{\hat{r}} \\ + \epsilon \int_0^t \|v_t\|_{r+1}^{r+1} d\tau. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Pela hipótese (3.7), deduzimos que

$$g_1(u_t) u_t \geq a(|u_t|^{m+1} - 1), \quad g_2(v_t) v_t \geq a(|v_t|^{r+1} - 1)$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned}\int_0^t (g_1(u_t), u_t)d\tau &\geq a\int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1}d\tau - a|\Omega|t,\\ \int_0^t (g_2(v_t), v_t)d\tau &\geq a\int_0^t \|v_t\|_{r+1}^{r+1}d\tau - a|\Omega|t,\end{aligned} \tag{3.31}$$

Usando as estimativas (3.29)-(3.31) em (3.28), obtemos

$$\begin{aligned}&E(t) + \int_0^t \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right)d\tau\\ &\quad + (a-\epsilon)\int_0^t \left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}\right)d\tau\\ &\leq E(0) + 2a|\Omega|t + C(\epsilon)t|\Omega|\left(|f_1^K(0,0)|^{\hat{m}} + |f_2^K(0,0)|^{\hat{r}}\right)\\ &\quad + C(\epsilon)L_K^{\hat{m}}\int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{m}} + \|\nabla v\|^{\hat{m}})d\tau + C(\epsilon)L_K^{\hat{r}}\int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{r}} + \|\nabla v\|^{\hat{r}})d\tau.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Escolhendo $\epsilon < a$, então (3.32) implica

$$\begin{aligned}E(t) &\leq E(0) + 2a|\Omega|t + C(\epsilon)t|\Omega|\left(|f_1^K(0,0)|^{\hat{m}} + |f_2^K(0,0)|^{\hat{r}}\right)\\ &\quad + C(\epsilon)L_K^{\hat{m}}\int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{m}} + \|\nabla v\|^{\hat{m}})d\tau + C(\epsilon)L_K^{\hat{r}}\int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{r}} + \|\nabla v\|^{\hat{r}})d\tau.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Como $1 \leq \hat{m}, \hat{r} \leq 2$, seque-se pela desigualdade de Young que

$$\int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{m}} + \|\nabla v\|^{\hat{m}})d\tau \leq \int_0^t (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + C)d\tau \leq 2\int_0^t E(\tau)d\tau + Ct \tag{3.34}$$

e

$$\int_0^t (\|\nabla u\|^{\hat{r}} + \|\nabla v\|^{\hat{r}})d\tau \leq \int_0^t (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + C)d\tau \leq 2\int_0^t E(\tau)d\tau + Ct. \tag{3.35}$$

onde C é uma constante positiva que depende de m e r. Por (3.33)-(3.35) segue-se que

$$\begin{aligned}E(t) &\leq E(0) + \left[2a|\Omega| + C(\epsilon)|\Omega|\left(|f_1^K(0,0)|^{\hat{m}} + |f_2^K(0,0)|^{\hat{r}}\right) + 2CC(\epsilon)\hat{L}_K\right]t\\ &\quad + 2C(\epsilon)\hat{L}_K\int_0^t E(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Se $t \leq T_0$, com T_0 a determinar, reescrevemos a estimativa anterior

$$E(t) \leq C_1 + C_2\int_0^t E(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [0, T_0] \tag{3.36}$$

onde $C_1 = E(0) + C_0T_0$ com $C_0 = 2a|\Omega| + C(\epsilon)|\Omega|\left(|f_1^K(0,0)|^{\hat{m}} + |f_2^K(0,0)|^{\hat{r}}\right) + 2CC(\epsilon)\hat{L}_K$ e $C_2 = 2C(\epsilon)\hat{L}_K$. Pela desigualdade de Gronwall, temos

$$E(t) \leq C_1 e^{C_2 t}, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Escolhemos

$$T_0 = \min\left\{\frac{1}{4C_0}, \frac{\ln 2}{C_2}\right\}.$$

Teremos então

$$E(t) \leq 2(E(0) + C_0T_0) \leq 2E(0) + \frac{1}{2} \leq \frac{K^2}{2},$$

o que implica

$$\|(u(t), v(t))\|_V \leq K, \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{3.37}$$

Isso mostra que $(u(t), v(t)) \in \{(u, v) \in V : \|(u, v)\|_V \leq K\}$ para todo $t \in [0, T_0]$. Logo, $f_1^K(u(t), v(t)) = f_1(u(t), v(t))$ e $f_2^K(u(t), v(t)) = f_2(u(t), v(t))$ para todo $t \in [0, T_0]$. Como a solução do problema (3.27) é única, concluímos que esta solução coincide com a solução do problema (1.1)-(1.2) para todo $t \in [0, T_0]$. ■

Teorema 3.1.1 (Solução local fraca) *Suponha que a hipótese 3.1.1 seja satisfeita. Então existe uma solução local fraca $U = (u, v, u_t, v_t)$ para o problema de valor inicial* (3.3) *definida em* $[0, T_0]$ *para algum $T_0 > 0$ dependendo da energia inicial $E(0)$.*

Demonstração: Primeiramente, notemos que $D(\Omega)^4 \subset D(\mathcal{A}) \subset H$, onde $H = (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$, e como $D(\Omega)^4$ é denso em H, temos que $D(\mathcal{A})$ é denso em H. Assim, para cada $U_0 \in H$, existe uma sequência (U_0^n) em $D(\mathcal{A})$ tal que $U_0^n \to U_0$ fortemente em H. Denote $U^n = (u^n, v^n, u_t^n, v_t^n)$ e considere o sistema aproximado

$$\begin{cases} \mathcal{A}U^n + U_t^n = 0, \\ U_0^n = U^n(0) \in D(\mathcal{A}). \end{cases} \tag{3.38}$$

Pelo Lema 3.1.3 segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o problema (3.38) possui uma solução local forte $U^n = (u^n, v^n, u_t^n, v_t^n) \in W^{1,\infty}(0, T_0; H)$ tal que $U^n(t) \in D(\mathcal{A}), \forall t \in [0, T_0]$. Denotamos por $E^n(t)$ a energia associada a solução U^n. Como $U_0^n \to U_0$ fortemente em H, podemos escolher K suficientemente grande para que $K \geq \sqrt{4E^n(0) + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Tem-se então que $E^n(t) \leq K^2/2, \forall t \in [0, T_0]$, ou seja,

$$\|U^n(t)\|_H^2 \leq K^2, \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{3.39}$$

Assim, escolhendo $\epsilon \in (0,a)$ em (3.32) e usando as desigualdades (3.34) e (3.35), concluímos que

$$\int_0^{T_0} \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t^n\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t^n\|^2\right) d\tau + \int_0^{T_0} \left(\|u_t^n\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t^n\|_{r+1}^{r+1}\right) d\tau \leq C(K), \tag{3.40}$$

sendo $C(K) > 0$ uma constante. Consequentemente

$$\begin{aligned} u_t^n &\in L^{m+1}(0,T_0; L^{m+1}(\Omega)) \cap L^2(0,T; D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}})), \\ v_t^n &\in L^{r+1}(0,T_0; L^{r+1}(\Omega)) \cap L^2(0,T; D((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}})). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Sejam ϕ, ψ satisfazendo as condições da Definição 3.1.3 de solução fraca. Como $U^n = (u^n, v^n, u_t^n, v_t^n) \in D(\mathcal{A})$ é solução forte de (3.38), temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} &(u_t^n(t), \phi(t)) - (u_t^n(0), \phi(0)) + \int_0^t \big[-(u_t^n(\tau), \phi_t(\tau)) + (\nabla u^n(\tau), \nabla \phi(\tau))\big] d\tau \\ &\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t^n(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} \phi(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_1(u_t^n(\tau)), \phi(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t (f_1(u^n(\tau), v^n(\tau)), \phi(\tau)) d\tau, \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} &(v_t^n(t), \psi(t)) - (v_t^n(0), \psi(0)) + \int_0^t \big[-(v_t^n(\tau), \psi_t(\tau)) + (\nabla v^n(\tau), \nabla \psi(\tau))\big] d\tau \\ &\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t^n(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} \psi(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_2(v_t^n(\tau)), \psi(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t (f_2(u^n(\tau), v^n(\tau)), \psi(\tau)) d\tau. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nosso objetivo é mostrar que existe uma subsequência de (U^n), denotada também por (U^n), que converge para a solução U do problema (3.3).

Note que a estimativa (3.39) nos mostra que (U^n) é limitada em $L^\infty(0,T_0;H)$. Então o teorema de Alaoglu garante a existência de uma subsequência, reindexada por n, tal que

$$U^n \to U = (u, v, u_t, v_t) \ \text{ fracamente-estrela em } \quad L^\infty(0,T_0;H). \tag{3.44}$$

Além disso, por (3.39) podemos concluir que (u^n) é limitada em $L^\infty(0,T_0;H_0^1(\Omega))$ e, portanto, (u^n) é limitada em $L^q(0,T_0;H_0^1(\Omega))$ para todo $q \geq 1$. Por outro lado, a estimativa (3.40) nos diz que (u_t^n) é limitada em $L^{m+1}(0,T_0;L^{m+1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}))$ sendo $m \geq 1$, de onde deduzimos que

$$(u_t^n) \ \text{ é limitada em } \ L^{\hat{m}}(0,T_0;L^{\hat{m}}(\Omega)) \cap L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}})). \tag{3.45}$$

Sabendo-se que $1 \leq \hat{m}, \hat{r} \leq 2$, tem-se $H^{1-\epsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^{\hat{m}}(\Omega)$, e tendo em vista que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{1-\epsilon}(\Omega)$ é compacta, pelo teorema de compacidade de Aubin-Lions segue que existe uma subsequência de (u^n), reindexada por n, tal que

$$u^n \to u \text{ fortemente em } L^q(0,T_0;H^{1-\epsilon}(\Omega)) \text{ para } q>1. \tag{3.46}$$

Analogamente, temos

$$v^n \to v \text{ fortemente em } L^q(0,T_0;H^{1-\epsilon}(\Omega)) \text{ para } q>1. \tag{3.47}$$

Agora, provaremos que (U^n) é uma sequência de Cauchy em $C([0,T_0];H)$. Para isto considere duas soluções (U^n) e (U^j) de (3.38). Para simplificar a notação, façamos $\tilde{u} = u^n - u^j$. Como $U^n, U^j \in W^{1,\infty}(0,T_0;\mathcal{H})$ e $U^n(t), U^j(t) \in D(\mathcal{A})$, então $\tilde{u}_t \in W^{1,\infty}(0,T_0;L^2(\Omega))$ e $\tilde{u}_t(t) \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, por (3.41) temos

$$\tilde{u}_t \in L^{m+1}(0,T_0;L^{m+1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}})).$$

Desta forma, podemos considerar a diferença dos problemas aproximados correspondentes aos parâmetros n e j, em seguida, multiplicamos a primeira equação em (3.38) por $\tilde{U}_t = U_t^n - U_t^j$. Usando integração por partes nesta equação, obtemos a seguinte identidade de energia

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\|\tilde{u}_t(t)\|^2 + \|\nabla\tilde{u}(t)\|^2) + \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\tilde{u}_t\|^2 d\tau + \int_0^t\int_\Omega (g_1(u_t^n) - g_1(u_t^j))\tilde{u}_t dx d\tau \\ &= \frac{1}{2}(\|\tilde{u}_t(0)\|^2 + \|\nabla\tilde{u}(0)\|^2) + \int_0^t\int_\Omega (f_1(u^n,v^n) - f_1(u^j,v^j))\tilde{u}_t dx d\tau. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Mostraremos que cada termo do lado direito de (3.48) converge para 0 quando $n,j\to\infty$. De fato, como

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla(u_0^n - u_0)\| = \lim_{n\to\infty}\|u_1^n - u_1\| = 0.$$

temos

$$\lim_{n,j\to\infty}\|\nabla\tilde{u}(0)\| = \lim_{n,j\to\infty}\|\nabla(u_0^n - u_0^j)\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n,j\to\infty}\|\tilde{u}_t(0)\| = \lim_{n,j\to\infty}\|u_1^n - u_1^j\| = 0. \tag{3.49}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_\Omega (f_1(u^n,v^n) - f_1(u^j,v^j))\tilde{u}_t dx d\tau \leq &\int_0^t\int_\Omega |f_1(u^n,v^n) - f_1(u,v)||\tilde{u}_t| dx d\tau \\ &+ \int_0^t\int_\Omega |f_1(u,v) - f_1(u^j,v^j)||\tilde{u}_t| dx d\tau. \end{aligned} \tag{3.50}$$

A seguir, estimaremos os termos do lado direito em (3.50). Usando o Lema 3.1.2, a limitação uniforme (3.40) e a convergência (3.46), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega |f_1(u^n, v^n) - f_1(u,v)||\tilde{u}_t| dx d\tau \\
&\leq \int_0^t \int_\Omega |f_1(u^n, v^n) - f_1(u,v)||\tilde{u}_t| dx d\tau \\
&\leq \left(\int_0^t \int_\Omega |f_1(u^n, v^n) - f_1(u,v)|^{\hat{m}} dx d\tau \right)^{\frac{m}{m+1}} \left(\int_0^t \int_\Omega |\tilde{u}_t|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}} \\
&\leq C(K) \left(\int_0^t (\|u^n - u\|^{\hat{m}}_{H^{1-\epsilon}(\Omega)} + \|v^n - v\|^{\hat{m}}_{H^{1-\epsilon}(\Omega)}) d\tau \right)^{\frac{m}{m+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

uniformemente em $[0, T_0]$. Analogamente

$$\int_0^t \int_\Omega |f_1(u,v) - f_1(u^j, v^j)||\tilde{u}_t| dx d\tau \xrightarrow{j\to\infty} 0, \tag{3.52}$$

uniformemente em $[0, T_0]$. Assim, combinando (3.50), (3.51) e (3.52), obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega (f_1(u^n, v^n) - f_1(u^j, v^j)) \tilde{u}_t dx d\tau \xrightarrow{n,j\to\infty} 0. \tag{3.53}$$

Usando o fato de que g_1 é monótona crescente e $\displaystyle\int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} \tilde{u}_t\|^2 d\tau \geq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{2}(\|\tilde{u}_t(t)\|^2 + \|\nabla \tilde{u}(t)\|^2) + \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} \tilde{u}_t\|^2 d\tau + \int_0^t \int_\Omega (g_1(u_t^n) - g_1(u_t^j)) \tilde{u}_t dx d\tau \\
&= \frac{1}{2}(\|\tilde{u}_t(0)\|^2 + \|\nabla \tilde{u}(0)\|^2) + \int_0^t \int_\Omega (f_1(u^n, v^n) - f_1(u^j, v^j)) \tilde{u}_t dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

e, pelas convergências (3.49) e (3.53), podemos tomar o limite em (3.54) quando $n, j \to \infty$ para obter que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,j\to\infty} \|\nabla \tilde{u}(t)\| = \lim_{n,j\to\infty} \|\nabla(u^n(t) - u^j(t))\| = 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0], \\
&\lim_{n,j\to\infty} \|\tilde{u}_t(t)\| = \lim_{n,j\to\infty} \|u_t^n(t) - u_t^j(t)\| = 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0],
\end{aligned} \tag{3.55}$$

e

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,j\to\infty} \int_0^t \int_\Omega (g_1(u_t^n) - g_1(u_t^j)) \tilde{u}_t dx d\tau = 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0], \\
&\lim_{n,j\to\infty} \int_0^t \|(-\Delta)^{\alpha_1/2} \tilde{u}_t\|^2 d\tau = 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0].
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
&u^n(t) \to u(t) \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ uniformemente em } [0, T_0],\\
&u_t^n(t) \to u_t(t) \text{ em } L^2(\Omega) \text{ uniformemente em } [0, T_0].
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

Como $u^n \in W^\infty(0; T_0, H_0^1(\Omega))$ e $u_t^n \in W^\infty(0; T_0, L^2(\Omega))$, por (3.57), encontramos que

$$
u \in C(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \quad \text{e} \quad u_t \in C(0, T_0; L^2(\Omega)). \tag{3.58}
$$

Além disso, por (3.57) temos que $u^n(0) \to u(0)$ em $H_0^1(\Omega)$ e $u_t^n(0) \to u_t(0)$ em $L^2(\Omega)$. Como $u^n(0) = u_0^n \to u_0$ e $u_t^n(0) = u_1^n \to u_1$, concluímos pela unicidade do limite que $u(0) = u_0$ e $u_t(0) = u_1$. De forma análoga, podemos mostrar que

$$
\begin{aligned}
&v^n(t) \to v(t) \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ uniformemente em } [0, T_0],\\
&v_t^n(t) \to v_t(t) \text{ em } L^2(\Omega) \text{ uniformemente em } [0, T_0]
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

com $v^n(0) \to v(0)$ em $H_0^1(\Omega)$ e $v_t^n(0) \to v_t(0)$ em $L^2(\Omega)$. Além disso, como $v^n(0) = v_0^n \to v_0$ e $v_t^n(0) = v_1^n \to v_1$, concluímos pela unicidade do limite que $v(0) = v_0$ e $v_t(0) = v_1$ e também temos

$$
v \in C(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \quad \text{e} \quad v_t \in C(0, T_0; L^2(\Omega)). \tag{3.60}
$$

De (3.57) e (3.59) podemos concluir que

$$
U^n \to U = (u, v, u_t, v_t) \ \text{ em } H \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \tag{3.61}
$$

A função vetorial $U = (u, v, u_t, v_t) \in H$ na convergência (3.61), por enquanto, é um candidato a solução do problema de valor inicial (3.3). Agora mostraremos que tal função é, de fato, solução de (3.3). Para isto, fixemos $t \in [0, T_0]$. Como $\phi \in C(0, t; H_0^1(\Omega))$ e $\phi_t \in L^1(0, t; L^2(\Omega))$, segue-se por (3.44) que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^t (\nabla u^n(\tau), \nabla\phi(\tau))d\tau = \int_0^t (\nabla u(\tau), \nabla\phi(\tau))d\tau, \tag{3.62}
$$

e

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^t (u_t^n(\tau), \phi_t(\tau))d\tau = \int_0^t (u_t(\tau), \phi_t(\tau))d\tau. \tag{3.63}
$$

Por (3.45) segue-se que

$$
u_t^n \to u_t \ \text{ fracamente em } \ L^2(0, t; D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}})) \tag{3.64}
$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t^n(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\phi(\tau))d\tau = \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\phi(\tau))d\tau. \tag{3.65}$$

Das hipóteses sobre o damping g_1, temos a desigualdade

$$|g_1(s)| \le b(|s|^m+1), \quad \forall s\in\mathbb{R}.$$

Assim, por (3.40) obtemos

$$\int_0^{T_0}\int_\Omega |g_1(u_t^n)|^{\hat{m}}dxd\tau \le b^{\hat{m}}\int_0^{T_0}\int_\Omega (|u_t^n|^{m+1}+1)dxd\tau \le C(K),$$

ou seja, a sequência $(g_1(u_t^n))$ é limitada em $L^{\hat{m}}(\Omega\times(0,t))$. Então existe uma subsequência, reindexada por n, tal que

$$g_1(u_t^n)\to g_1^* \ \text{ fracamente em } \ L^{\hat{m}}(\Omega\times(0,t)) \tag{3.66}$$

para algum $g_1^*\in L^{\hat{m}}(\Omega\times(0,t))$. Além disso, por (3.40), sabemos que existe uma subsequência reindexada (u_t^n) tal que $u_t^n\to u_t$ fracamente em $L^{m+1}(\Omega\times(0,T_0))$. Agora, nosso objetivo é provar que $g_1(u_t)=g_1^*$. Tendo em vista [7, Lemma 2.3], (3.56) e (3.66) é suficiente provar que o operador

$$g_1 : L^{m+1}(\Omega\times(0,T_0))\to L^{\hat{m}}(\Omega\times(0,T_0))$$

é monótono maximal. Como g_1 é monótona crescente, é imediato que o operador g_1 é monótono. Devemos apenas mostrar que ele é hemicontínuo, isto é,

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^t\int_\Omega g_1(u+\lambda v)wdxd\tau = \int_0^t\int_\Omega g_1(u)wdxd\tau, \quad \forall u,v,w\in L^{m+1}(\Omega\times(0,T_0)).$$

Como g_1 é contínuo, temos que

$$g_1(u+\lambda v)w\to g_1(u)w \quad \text{quando } \lambda\to 0 \ \text{ q.s. em } \ \Omega\times(0,t).$$

Além disso, sabendo que $|g_1(s)|\le b(|s|^m+1)$ para todo $s\in\mathbb{R}$ e usando a desigualdade de Hölder vemos que

$$|g_1(u+\lambda v)w| \le b(|u+\lambda v|^m+1)|w| \le C(|u|^m|w|+|v|^m|w|+|w|)\in L^1(\Omega\times(0,t)).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^t\int_\Omega g_1(u+\lambda v)wdxd\tau=\int_0^t\int_\Omega g_1(u)wdxd\tau.$$

Logo, g_1 é monótono maximal e, consequentemente $g_1(u_t)=g_1^*$, isto é,

$$g_1(u_t^n)\to g_1(u_t) \text{ fraco estrela em } L^{\hat{m}}(\Omega\times(0,T_0)). \tag{3.67}$$

Da convergência (3.67) tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t(g_1(u_t^n),\phi)d\tau=\int_0^t(g_1(u_t),\phi)d\tau. \tag{3.68}$$

Como $\phi\in L^{m+1}(\Omega\times(0,t))$, ao substituir $\tilde{u}_t$ por ϕ em (3.51), deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_\Omega f_1(u^n,v^n)\phi dxd\tau=\int_0^t\int_\Omega f_1(u,v)\phi dxd\tau. \tag{3.69}$$

Finalmente, usando os limites (3.62), (3.63), (3.65), (3.68) e (3.69), podemos passar ao limite em (3.42) para obter

$$\begin{aligned}&(u_t(t),\phi(t))-(u_t(0),\phi(0))+\int_0^t\big[-(u_t(\tau),\phi_t(\tau))+(\nabla u(\tau),\nabla\phi(\tau))\big]d\tau\\&\quad+\int_0^t((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\phi(\tau))d\tau+\int_0^t(g_1(u_t(\tau)),\phi(\tau))d\tau\\&=\int_0^t(f_1(u(\tau),v(\tau)),\phi(\tau))d\tau.\end{aligned}$$

Usando o raciocínio de modo análogo, podemos passar ao limite a equação (3.43) para mostrar que

$$\begin{aligned}&(v_t(t),\psi(t))-(v_t(0),\psi(0))+\int_0^t\big[-(v_t(\tau),\psi_t(\tau))+(\nabla v(\tau),\nabla\psi(\tau))\big]d\tau\\&\quad+\int_0^t((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}\psi(\tau))d\tau+\int_0^t(g_2(v_t(\tau)),\psi(\tau))d\tau\\&=\int_0^t(f_2(u(\tau),v(\tau)),\psi(\tau))d\tau.\end{aligned}$$

Isto mostra que (u,v) é solução fraca do problema (1.1)-(1.2), pois como $U\in C([0,T_0];H)$, tem-se que $u,v\in C(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u(0),v(0)\in H_0^1(\Omega)$ e $u_t(0),v_t(0)\in L^2(\Omega)$ e $u_t\in C(0,T;(L^2(\Omega))^2)\cap L^{m+1}(\Omega\times(0,T))\cap L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}))$, $v_t\in C(0,T;(L^2(\Omega))^2)\cap L^{r+1}(\Omega\times(0,T))\cap L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}))$. Assim a prova está completa. ■

3.2 Unicidade e dependência contínua dos dados iniciais

Posteriormente, no estudo da dinâmica da solução global ao longo do tempo, será imprescindível que nosso problema estudado seja bem posto, isto é, que para ele exista uma única solução fraca local, a qual poderemos, na próxima seção, tomá-la como solução global. Neste momento o nosso objetivo é mostrar que a solução local fornecida pelo Teorema 3.1.1 é única e depende continuamente dos dados iniciais. Antes, porém, provaremos uma identidade importante envolvendo a energia.

Proposição 3.2.1 (Identidade de energia) *Se o par* (u, v) *é uma solução local fraca para o problema* (1.1)-(1.2) *dada pelo Teorema 3.1.1, então a seguinte identidade de energia é satisfeita*

$$\begin{aligned} E(t) &+ \int_0^t \big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2\big) d\tau \\ &+ \int_0^t \big[(g_1(u_t(\tau)), u_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v_t(\tau))\big] d\tau \\ &= E(0) + \int_0^t \big[(f_1(u(\tau), v(\tau)), u_t(\tau)) + (f_2(u(\tau), v(\tau)), v_t(\tau))\big] d\tau. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Demonstração: Fixemos um $t \in [0, T_0]$ e seja (u, v) uma solução fraca do sistema (1.1)-(1.2). Pela regularidade de (u, v), temos que $u \in C([0, t]; H_0^1(\Omega))$ e $u_t \in C([0, t]; L^2(\Omega))$ e $u_t \in L^{m+1}(\Omega \times (0, T)) = L^{m+1}(0, t; L^{m+1}(\Omega))$. Consideremos o quociente da diferença simétrica $D_h u$ de u. Fazendo $X = L^{m+1}(\Omega), Y = L^2(\Omega)$ e $p = m + 1$, pela Proposição 2.5.2, temos que

$$D_h u \in L^{m+1}(0, t; L^{m+1}(\Omega)) \;\text{ e }\; D_h u \to u_t \;\text{ quando } h \to 0 \text{ em }\; L^{m+1}(0, t; L^{m+1}(\Omega)) \tag{3.71}$$

e

$$D_h v \in L^{r+1}(0, t; L^{r+1}(\Omega)) \;\text{ e }\; D_h v \to v_t \;\text{ quando } h \to 0 \text{ em }\; L^{r+1}(0, t; L^{r+1}(\Omega)). \tag{3.72}$$

Como $(u, v) \in C([0, t]; (H_0^1(\Omega))^2)$, temos que

$$(D_h u, D_h v) \in C([0, t]; (H_0^1(\Omega))^2) \tag{3.73}$$

Agora vamos mostrar que

$$((D_h u)_t, (D_h v)_t) \in L^1(0, t; (L^2(\Omega))^2). \tag{3.74}$$

Será necessário apenas mostrar que $(D_h u)_t \in L^1(0,t;L^2(\Omega))$. O caso de $(D_h v)_t \in L^1(0,t;L^2(\Omega))$ será inteiramente análogo.

De fato, para $0 < h < t/2$, temos

$$(D_h u)_t(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h} u_t(\tau + h), & 0 < \tau < h, \\ \dfrac{1}{2h}[u_t(\tau + h) - u_t(\tau - h)], & h < \tau < t - h, \\ -\dfrac{1}{2h} u_t(\tau - h), & t - h < \tau < t. \end{cases}$$

Como $u_t \in C([0,t];L^2(\Omega))$, concluímos que $(D_h u)_t \in L^1(0,t;L^2(\Omega))$. De (3.73), (3.74) e o fato que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{\frac{s}{2}})$ for $0 < s < 1$ concluímos que $D_h u$ e $D_h v$ satisfaz as propriedades de regularidade da Definição 3.1.3 de solução fraca. Então seguintes as identidades são satisfeitas

$$\begin{aligned} &(u_t(t), D_h u(t)) - (u_t(0), D_h u(0)) + \int_0^t \big[-(u_t(\tau), (D_h u)_t(\tau)) + (\nabla u(\tau), \nabla (D_h u)(\tau))\big] d\tau \\ &\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} D_h u(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_1(u_t(\tau)), D_h u(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau)), D_h u(\tau)) d\tau, \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} &(v_t(t), D_h v(t)) - (v_t(0), D_h v(0)) + \int_0^t \big[-(v_t(\tau), (D_h v)_t(\tau)) + (\nabla v(\tau), \nabla (D_h v)(\tau))\big] d\tau \\ &\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} D_h v(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_2(v_t(\tau)), D_h v(\tau)) d\tau \\ &= \int_0^t (f_2(u(\tau), v(\tau)), D_h v(\tau)) d\tau. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Agora precisamos passar ao limite em (3.75) e (3.76) com $h \to 0$ a fim de que possamos finalmente obter a identidade desejada.

Sabemos que $u, u_t \in C([0,t];L^2(\Omega))$. Pelas convergências (2.19) e (2.20) da Proposição 2.5.1 temos

$$D_h u(0) \to \frac{1}{2} u_t(0) \ \text{ fracamente em } \ L^2(\Omega),$$
$$D_h u(t) \to \frac{1}{2} u_t(t) \ \text{ fracamente em } \ L^2(\Omega).$$

Portanto

$$\lim_{h\to 0} (u_t(t), D_h u(t)) - \lim_{h \to 0} (u_t(0), D_h u(0)) = \frac{1}{2}(\|u_t(t)\|^2 - \|u_t(0)\|^2). \tag{3.77}$$

A Proposição 2.5.1, através da identidade (2.17), ainda implica

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t (u_t(\tau),(D_h u)_t(\tau))d\tau = 0. \tag{3.78}$$

Usando o produto interno usual em $H_0^1(\Omega)$ temos

$$\int_0^t (\nabla u(\tau),\nabla(D_h u)(\tau))d\tau = \int_0^t \big(u(\tau),D_h u(\tau)\big)_{H_0^1(\Omega)}d\tau - \int_0^t \big(u(\tau),D_h u(\tau)\big)d\tau. \tag{3.79}$$

Devemos, portanto, verificar a convergência de cada integral na identidade (3.79) quando $h\to 0$. Sabendo-se que $u\in C([0,t];H_0^1(\Omega))$, por (2.16), na Proposição 2.5.1, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_0^t (u(\tau),D_h u(\tau))_{H_0^1(\Omega)} = \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)}),\\
&\lim_{h\to 0}\int_0^t (u(\tau),D_h u(\tau)) = \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2),
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t (\nabla u(\tau),\nabla(D_h u)(\tau))d\tau = \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 - \|\nabla u(0)\|^2\Big). \tag{3.80}$$

Como $\alpha_1\in(0,1)$, tem-se $u\in C([0,t];H_0^1(\Omega))\hookrightarrow C([0,t];D((-\Delta)^{\alpha_1/2}))$. Além disso, como $u_t\in C([0,t];D((-\Delta)^{\alpha_1/2}))$, então podemos usar a convergência (2.18) da Proposição 2.5.1 com $X=D\big((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\big)$ para obter

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}D_h u(\tau))d\tau &= \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau))d\tau\\
&= \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau)\|^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

De (3.67) sabemos que $g_1(u_t)\in L^{\hat{m}}(\Omega\times(0,t))$ e por (3.71) concluímos que

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t (g_1(u_t(\tau)),D_h u(\tau))d\tau = \int_0^t (g_1(u_t(\tau)),u_t(\tau))d\tau. \tag{3.82}$$

Sabendo-se que $(u,v)\in C([0,t];(H_0^1(\Omega))^2)$ e usando a imersão $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega), 1\le q<\infty$, concluímos que $f_1(u,v)\in L^2(\Omega)$. Além disso, como $u\in C([0,t];L^2(\Omega))$ e $u_t\in L^2(0,t;L^2(\Omega))$, pela Proposição 2.5.2 temos

$$D_h u\to u_t \text{ quando } h\to 0 \text{ em } \quad L^2(0,t;L^2(\Omega)).$$

De modo que

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t (f_1(u(\tau),v(\tau)),D_h u(\tau))d\tau = \int_0^t (f_1(u(\tau),v(\tau)),u_t(\tau))d\tau. \tag{3.83}$$

Combinando (3.77)-(3.83), podemos passar ao limite em (3.75) com $h\to 0$ para obter

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{\|u_t(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2\}+\int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 d\tau+\int_0^t (g_1(u_t(\tau)),u_t(\tau))d\tau\\ &=\frac{1}{2}\{\|u_t(0)\|^2+\|\nabla u(0)\|^2\}+\int_0^t (f_1(u(\tau),v(\tau)),u_t(\tau))d\tau.\end{aligned} \tag{3.84}$$

Usando argumentos análogos e passando ao limite em (3.76) com $h\to 0$ vem

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{\|v_t(t)\|^2+\|\nabla v(t)\|^2\}+\int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t(\tau)\|^2 d\tau+\int_0^t (g_2(v_t(\tau)),v_t(\tau))d\tau\\ &=\frac{1}{2}\{\|v_t(0)\|^2+\|\nabla v(0)\|^2\}+\int_0^t (f_2(u(\tau),v(\tau)),v_t(\tau))d\tau.\end{aligned} \tag{3.85}$$

Somando as identidades (3.84) ce (3.85) obtemos a igualdade desejada. ■

Teorema 3.2.1 (Unicidade e dependência contínua) *Suponha que a hipótese 3.1.1 seja satisfeita. Então a solução fraca em $C([0,t];H)$ dada pelo Teorema 3.1.1 depende continuamente dos dados iniciais no espaço H e, consequentemente, esta solução é única.*

Demonstração: Considere (u,v) e $(\tilde{u},\tilde{v})$ duas soluções fracas de (1.1)-(1.2) em $[0,T_0]$. Escreva $\hat{u}=u-\tilde{u}$ e $\hat{v}=v-\tilde{v}$. A energia correspondente à diferença das soluções $(\hat{u},\hat{v})$ será denotada por

$$\hat{E}(t)=\frac{1}{2}(\|\nabla\hat{u}(t)\|^2+\|\nabla\hat{v}(t)\|^2+\|\hat{u}_t(t)\|^2+\|\hat{v}_t(t)\|^2),\quad \forall t\in[0,T_0]. \tag{3.86}$$

Pela Definição 3.1.3, o par $(\hat{u},\hat{v})$ satisfaz

$$\begin{aligned}&(\hat{u}_t(t),\phi(t))-(\hat{u}_t(0),\phi(0))+\int_0^t \big[-(\hat{u}_t(\tau),\phi_t(\tau))+(\nabla\hat{u}(\tau),\nabla\phi(\tau))\big]d\tau\\ &\quad+\int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{u}_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\phi(\tau))d\tau+\int_0^t (g_1(u_t(\tau))-g_1(\tilde{u}_t(\tau)),\phi(\tau))d\tau\\ &=\int_0^t (f_1(u(\tau),v(\tau))-f_1(\tilde{u}(\tau),\tilde{v}(\tau)),\phi(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{3.87}$$

e

$$\begin{aligned}&(\hat{v}_t(t),\psi(t))-(\hat{v}_t(0),\psi(0))+\int_0^t \big[-(\hat{v}_t(\tau),\psi_t(\tau))+(\nabla\hat{v}(\tau),\nabla\psi(\tau))\big]d\tau\\ &\quad+\int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}\hat{v}_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}\psi(\tau))d\tau+\int_0^t (g_2(v_t(\tau))-g_2(\tilde{v}_t(\tau)),\psi(\tau))d\tau\\ &=\int_0^t (f_2(u(\tau),v(\tau))-f_2(\tilde{u}(\tau),\tilde{v}(\tau)),\psi(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{3.88}$$

Fazendo $\phi(\tau) = D_h\hat{u}(\tau)$ em (3.87) e $\psi(\tau) = D_h\hat{v}(\tau)$ em (3.88) para $\tau \in [0,t]$, e usando argumentos similares aos usados na demonstração da identidade de energia (3.70) podemos passar ao limite quando $h \to 0$ para obter

$$\begin{aligned}
&\hat{E}(t) + \int_0^t \big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{u}_t(\tau)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}\hat{v}_t(\tau)\|^2\big)d\tau \\
&\quad + \int_0^t \big[(g_1(u_t(\tau)) - g_1(\tilde{u}_t(\tau)), \hat{u}_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)) - g_2(\tilde{v}_t(\tau)), \hat{v}_t(\tau))\big]d\tau \\
&= \hat{E}(0) + \int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau)) - f_1(\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau)), \hat{u}_t(\tau))d\tau \\
&\quad + \int_0^t (f_2(u(\tau), v(\tau)) - f_2(\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau)), \hat{v}_t(\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Como g_1 e g_2 são monótonos crescentes, temos

$$\int_0^t \big[(g_1(u_t(\tau)) - g_1(\tilde{u}_t(\tau)), \hat{u}_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)) - g_2(\tilde{v}_t(\tau)), \hat{v}_t(\tau))\big]d\tau \geq 0,$$

Portanto temos a estimativa

$$\begin{aligned}
\hat{E}(t) \leq \hat{E}(0) &+ \int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau)) - f_1(\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau)), \hat{u}_t(\tau))d\tau \\
&+ \int_0^t (f_2(u(\tau), v(\tau)) - f_2(\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau)), \hat{v}_t(\tau))d\tau.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Lembramos que $f_1, f_2 : V \to L^2(\Omega)$ são localmente Lipschitz com $V = (H_0^1(\Omega))^2$. Utilizamos também as desigualdades de Hölder e Young para obter

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau)) - f_1(\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau)), \hat{u}_t(\tau))d\tau \\
&\leq \int_0^t \|f_1(u(\tau), v(\tau)) - f_1(\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau))\|\|\hat{u}_t(\tau)\|d\tau \\
&\leq L_{f_1} \int_0^t \|(\hat{u}(\tau), \hat{v}(\tau))\|_V \|\hat{u}_t(\tau)\|d\tau \\
&= L_{f_1} \int_0^t \Big(\|\hat{u}(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\hat{v}(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big)^{1/2} \|\hat{u}_t(\tau)\|d\tau \\
&\leq L_{f_1} \int_0^t \Big(\|\hat{u}(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\hat{v}(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}\Big) \|\hat{u}_t(\tau)\|d\tau \\
&\leq C \int_0^t (\|\nabla\hat{u}(\tau)\| + \|\nabla\hat{v}(\tau)\|) \|\hat{u}_t(\tau)\|d\tau \\
&= C \int_0^t \Big(\|\nabla\hat{u}(\tau)\|\|\hat{u}_t(\tau)\| + \|\nabla\hat{v}(\tau)\|\|\hat{u}_t(\tau)\|\Big)d\tau \\
&\leq C \int_0^t \Big(\|\nabla\hat{u}(\tau)\|^2 + \|\nabla\hat{v}(\tau)\|^2 + \|\hat{u}_t(\tau)\|^2\Big)d\tau \leq C \int_0^t \hat{E}(\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

De forma análoga tem-se

$$\int_0^t (f_2(u(\tau),v(\tau)) - f_2(\tilde{u}(\tau),\tilde{v}(\tau)), \hat{v}_t(\tau))d\tau \leq C\int_0^t \hat{E}(\tau)d\tau. \tag{3.91}$$

Combinando as estimativas (3.89)-(3.91) obtemos a desigualdade

$$\hat{E}(t) \leq \hat{E}(0) + C\int_0^t \hat{E}(\tau)d\tau. \tag{3.92}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall tem-se

$$\hat{E}(t) \leq \hat{E}(0)e^{Ct}, \quad \forall t \in [0,T_0]. \tag{3.93}$$

Nos resta agora provar a unicidade da solução fraca. Sejam (u,v) e $(\tilde{u},\tilde{v})$ duas soluções fracas para o problema (1.1)-(1.2) e considere a solução $(\hat{u},\hat{v}) = (u-\tilde{u}, v-\tilde{v})$. Supondo-se que $(u(0),v(0)) = (\tilde{u}(0),\tilde{v}(0))$ e $(u_t(0),v_t(0)) = (\tilde{u}_t(0),\tilde{v}_t(0))$ em H, obtemos $\hat{E}(0)=0$, o que implica $\hat{E}(t)=0, \forall t \in [0,T_0]$, ou seja, $(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v})$. ■

3.3 Existência global

Nesta seção, utilizamos um argumento padrão de continuação para EDOs para concluir que a solução fraca (u,v) de (1.1)-(1.2) é globalmente definida ou possui blow-up em tempo finito, isto é, existe um $0 < T < \infty$ tal que

$$\lim_{t\to T^-} E_1(t) = +\infty$$

onde $E_1(t)$ é a energia modificada dada por

$$E_1(t) := E(t) + \frac{1}{p+1}\Big(\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(t)\|_{p+1}^{p+1}\Big) \tag{3.94}$$

sendo $E(t)$ como definido em (1.3).

Teorema 3.3.1 *Suponha que (u,v) seja uma solução fraca de (1.1)-(1.2) definida em $[0,T_0]$ de acordo com o Teorema 3.1.1. Então*

(1) Se $p \leq \min\{m,r\}$, então para todo $t \in [0,T_0]$, (u,v) é tal que

$$E_1(t)+\int_0^t \big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\big)d\tau+\int_0^t \big(\|u_t\|_{m+1}^{m+1}+\|v_t\|_{r+1}^{r+1}\big)\,d\tau \leq C(T_0,E_1(0)), \tag{3.95}$$

onde $C(T_0,E_1(0))$ é contínua em T_0 e definida para qualquer $T_0>0$;

(2) Se $p > \min\{m, r\}$, então a desigualdade (3.95) vale para $0 < t < T'$, para algum $T' \leq T_0$, onde T' é uma função contínua e decrescente em relação a $E_1(0)$.

Demonstração: (1) Na identidade de energia (3.70), somamos e subtraímos no lado esquerdo e direito, respectivamente, as parcelas

$$\frac{1}{p+1}\Big(\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(t)\|_{p+1}^{p+1}\Big) \quad \text{e} \quad \frac{1}{p+1}\Big(\|u(0)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(0)\|_{p+1}^{p+1}\Big)$$

e assim obtemos a igualdade

$$\begin{aligned}
&E_1(t) + \int_0^t \big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau)\|^2\big) d\tau \\
&\quad + \int_0^t \big[(g_1(u_t(\tau)), u_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v_t(\tau))\big] d\tau \\
&= E_1(0) + \int_0^t \big[(f_1(u(\tau), v(\tau)), u_t(\tau)) + (f_2(u(\tau), v(\tau)), v_t(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t \int_\Omega (|u(\tau)|^{p-1} u(\tau) u_t(\tau) + |v(\tau)|^{p-1} v(\tau) v_t(\tau)) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Nosso objetivo é estimar as integrais em (3.96). Nas estimativas a seguir, todas as constantes serão representadas por C.

Relembramos que $|f_i(u, v)| \leq C(|u|^p + |v|^p + 1), i = 1, 2$. Usando a desigualdade de Hölder e a de Young na forma $ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q$, onde p e q são expoentes conjugados e $a, b \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_\Omega f_1(u, v) u_t dx d\tau \right| \leq \int_0^t \int_\Omega C(|u|^p + |v|^p + 1)|u_t| dx d\tau \\
&\leq C \int_0^t (\|u\|_{p+1}^p + \|v\|_{p+1}^p + |\Omega|^{\frac{p}{p+1}}) \|u_t\|_{p+1} \, d\tau \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} + |\Omega|) \, d\tau \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{p+1}^{p+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) \, d\tau + C_\epsilon T_0 |\Omega|.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Da mesma forma, tem-se

$$\left| \int_0^t \int_\Omega f_2(u, v) v_t \, dx d\tau \right| \leq \epsilon \int_0^t \|v_t\|_{p+1}^{p+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) \, d\tau + C_\epsilon T_0 |\Omega|. \tag{3.98}$$

Usando-se novamente as desigualdades de Hölder e Young, escrevemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_\Omega(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau)u_t(\tau)+|v(\tau)|^{p-1}v(\tau)v_t(\tau))dxd\tau\right|\\
&\quad\leq\int_0^t\int_\Omega(|u(\tau)|^p|u_t(\tau)|+|v(\tau)|^p|v_t(\tau)|)dxd\tau\\
&\quad\leq\epsilon\int_0^t\left(\|u_t(\tau)\|_{p+1}^{p+1}+\|v_t(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\right)d\tau+C_\epsilon\int_0^t\left(\|u(\tau)\|_{p+1}^{p+1}+\|v(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\right)d\tau\\
&\quad\leq\epsilon\int_0^t\left(\|u_t(\tau)\|_{p+1}^{p+1}+\|v_t(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\right)d\tau+C_\epsilon\int_0^t E_1(\tau)d\tau.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

De (3.31) escrevemos

$$\int_0^t\big[(g_1(u_t(\tau)),u_t(\tau))+(g_2(v_t(\tau)),v_t(\tau))\big]d\tau\geq a\int_0^t\left(\|u_t(\tau)\|_{m+1}^{m+1}+\|v_t(\tau)\|_{r+1}^{r+1}\right)d\tau-2a|\Omega|T_0. \tag{3.100}$$

Escolhendo $p\leq\min\{m,r\}$ e usando as estimativas (3.97)-(3.100) em (3.96), obtemos

$$\begin{aligned}
&E_1(t)+\int_0^t\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right)d\tau+a\int_0^t(\|u_t\|_{m+1}^{m+1}+\|v_t\|_{r+1}^{r+1})\ d\tau\\
&\leq E_1(0)+2\epsilon\int_0^t(\|u_t\|_{p+1}^{p+1}+\|v_t\|_{p+1}^{p+1})\ d\tau+C_\epsilon\int_0^t E_1(\tau)\ d\tau+C_{T_0,\epsilon}\\
&\leq E_1(0)+2\epsilon C\int_0^t(\|u_t\|_{m+1}^{m+1}+\|v_t\|_{r+1}^{r+1})\ d\tau+C_\epsilon\int_0^t E_1(\tau)\ d\tau+C_{T_0,\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Escolhemos $0<2\epsilon C\leq a/2$ e usamos (3.101) para obter

$$\begin{aligned}
&E_1(t)+\int_0^t\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right)d\tau+\frac{a}{2}\int_0^t(\|u_t\|_{m+1}^{m+1}+\|v_t\|_{r+1}^{r+1})\ d\tau\\
&\quad\leq E_1(0)+C_\epsilon\int_0^t E_1(\tau)\ d\tau+C_{T_0,\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Em particular,

$$E_1(t)\leq E_1(0)+C_\epsilon\int_0^t E_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau+C_{T_0,\epsilon}. \tag{3.103}$$

Usando o Lema de Gronwall em (3.103) encontramos que

$$E_1(t)\leq(E_1(0)+C_{T_0,\epsilon})e^{C_\epsilon T_0},\quad\forall t\in[0,T_0], \tag{3.104}$$

Combinando (3.102) e (3.104) obtemos (3.95).

Agora, suponha que $p>\max\{m,r\}$, então devemos fazer pequenas alterações na forma de estimar as integrais do lado direito da igualdade (3.96). Sendo assim, aplicaremos a desigualdade

$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q$, com $a, b > 0$, sendo p e q expoentes conjugados, para estimar a integral que contém as funções f_i, $i = 1, 2$. Tomemos $m+1$ e $\hat{m} = \frac{m+1}{m}$ como expoentes conjugados.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_\Omega f_1(u,v) u_t \; dx d\tau \right| &\leq C \int_0^t \int_\Omega (|u|^p + |v|^p + 1)|u_t| \; dx d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|u_t\|_{m+1} (\|u\|_{p\hat{m}}^p + \|v\|_{p\hat{m}}^p + |\Omega|^{\frac{1}{\hat{m}}}) \; d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \; d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|u\|_{p\hat{m}}^{p\hat{m}} + \|v\|_{p\hat{m}}^{p\hat{m}} + |\Omega|) \; d\tau. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Como $p\hat{m} > 2$ and $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_\Omega f_1(u,v) u_t \; dx d\tau \right| &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \; d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p\hat{m}} + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^{p\hat{m}} + |\Omega|) \; d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \; d\tau + C_\epsilon \int_0^t (E_1(\tau))^{\frac{p\hat{m}}{2}} \; d\tau + C_\epsilon T_0 |\Omega|. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Da mesma forma obtém-se

$$\left| \int_0^t \int_\Omega f_2(u,v) v_t \; dx d\tau \right| \leq \epsilon \int_0^t \|v_t\|_{r+1}^{r+1} \; d\tau + C_\epsilon \int_0^t (E_1(\tau))^{\frac{p\hat{r}}{2}} \; d\tau + C_\epsilon T_0 |\Omega|, \tag{3.107}$$

Procedendo como anteriormente para obter as estimativas (3.105)-(3.107) concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_\Omega (|u|^{p-1} u u_t + |v|^{p-1} v v_t) dx d\tau \right| &\leq \epsilon \int_0^t \left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} \right) d\tau \\ &\quad + C(\epsilon) \int_0^t \left(E_1(\tau)^{\frac{p\hat{m}}{2}} + E_1(\tau)^{\frac{p\hat{r}}{2}} \right) d\tau. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Combinando (3.96) com as desigualdades (3.100), (3.106), (3.107) e (3.108) temos que

$$\begin{aligned} & E_1(t) + \int_0^t \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2 \right) d\tau + a \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}) \; d\tau \\ & \leq E_1(0) + 2\epsilon \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}) \; d\tau + C_\epsilon \int_0^t (E_1(\tau))^\sigma \; d\tau + C_{T_0, \epsilon}, \end{aligned}$$

onde $\sigma = \max\{\frac{p\hat{m}}{2}, \frac{p\hat{r}}{2}\} > 1$. Escolhendo $0 < 2\epsilon < a/2$, obtemos

$$\begin{aligned} & E_1(t) + \int_0^t \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2 \right) d\tau + \frac{a}{2} \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}) \; d\tau \\ & \quad \leq E_1(0) + C_\epsilon \int_0^t (E_1(t))^\sigma \; d\tau + C_{T_0, \epsilon}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Em particular,

$$E_1(t) \leq E_1(0) + C_\epsilon \int_0^t (E_1(\tau))^\sigma \; d\tau + C_{T_0, \epsilon}. \tag{3.110}$$

Usando um teorema de comparação (veja [44], por exemplo), vemos que $E_1(t) \leq \psi(t)$, onde

$$\psi(t) = \left[(E_1(0) + C_{T_0,\epsilon})^{1-\sigma} - C_\epsilon(1-\sigma)t\right]^{-\frac{1}{\sigma-1}}$$

é a solução da equação integral de Volterra

$$\psi(t) = E_1(0) + C(T_0,\epsilon) + 2(\delta C + 1)C(\epsilon)\int_0^t \psi(\tau)^\sigma d\tau. \tag{3.111}$$

Como $\sigma > 1$, a função $\psi(t)$ explode em $T_1 = \frac{1}{C_\epsilon(\sigma-1)}(E_1(0) + C_{T_0,\epsilon})^{1-\sigma}$, ou seja $\lim\limits_{t\to T_1^-}\psi(t) = +\infty$. Note que T_1 depende da energia inicial $E_1(0)$ e do tempo T_0 conforme no Teorema 3.1.1. No entanto, escolhendo $T' = \min\{T_0, \frac{T_1}{2}\}$, temos

$$E_1(t) \leq \psi(t) \leq C_0 := \left[(E_1(0) + C_{T_0,\epsilon})^{1-\sigma} - C_\epsilon(1-\sigma)T'\right]^{-\frac{1}{\sigma-1}}, \quad \forall t \in [0,T'], \tag{3.112}$$

para todo $t \in [0,T']$. Combinando (3.109) e (3.112) obtemos

$$\begin{aligned}
&E_1(t) + \int_0^t \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right)d\tau + \frac{a}{2}\int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1})\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad \leq E_1(0) + C_\epsilon T' C_0^\sigma + C_{T_0,\epsilon}, \quad \forall t \in [0,T_0].
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,T']$, o que completa a demonstração. ■

3.4 Blow-up com energia total inicial negativa

Para estabelecer o resultado de blow-up, precisamos assumir hipóteses adicionais sobre os termos de fonte.

Hipótese 3.4.1 (Blow up)

- *Existe uma função positiva $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\nabla\mathcal{F} = (f_1, f_2). \tag{3.113}$$

- *Existem constantes $c_0 > 0$ e $c_1 > 3 + 2C^2$ tais que*

$$\mathcal{F}(u,v) \geq c_0(|u(\tau)|^{p+1} + |v|^{p+1}),\ uf_1(u,v) + vf_2(u,v) \geq c_1\mathcal{F}(u,v),\ \forall u,v \in \mathbb{R}. \tag{3.114}$$

com $C > 0$ é uma constante determinada posteriormente.

Teorema 3.4.1 (Blow-up em tempo finito) *Suponha que as Hipóteses 3.1.1 e 3.4.1 sejam satisfeitas. Se* $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{1}{2}), p > \max\{m, r\}$ *e* $\mathcal{E}(0) < 0$ *onde*

$$\mathcal{E}(t) = E(t) - \int_0^T \mathcal{F}(u(t), v(t))dt, \tag{3.115}$$

então toda solução fraca (u, v) *de* (1.1)-(1.2) *possui blow-up em tempo finito, ou seja, existe um tempo* $T < \infty$ *tal que*

$$\lim_{t \to T^-} E(t) = \infty. \tag{3.116}$$

Demonstração: Seja (u, v) solução fraca de (1.1)-(1.2) conforme a definição (3.1.3) e T o supremo de todos os $T^\star > 0$ tais que (u, v) é solução fraca de (1.1)-(1.2) no intervalo $[0, T^\star]$. Nosso objetivo é mostrar que T é necessariamente finito obtendo para ele uma limitação superior.

Para $t \in [0, T]$ definimos as funções

$$A(t) = -\mathcal{E}(t), \;\; N(t) = \|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2, \;\; B(t) = \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t))dx. \tag{3.117}$$

sendo $\mathcal{E}(t)$ a energia total definida em (3.115). Conforme o que foi definido, podemos escrever

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{1}{2}(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2) + B(t) \\ N'(t) &= 2\int_\Omega \Big[u(t)u_t(t) + v(t)v_t(t)\Big]dx. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Usando-se a hipótese (3.114) temos

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_\Omega \mathcal{F}(u(\tau), v(\tau))dx \geq c_0 \int_\Omega (|u(\tau)|^{p+1} + |v(\tau)|^{p+1})dx \\ &= c_0\Big(\|u(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\Big). \end{aligned} \tag{3.119}$$

Seja

$$0 < \xi < \min\left\{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{p+1}, \frac{1}{r+1} - \frac{1}{p+1}, \frac{p-1}{2(p+1)}\right\}. \tag{3.120}$$

Em particular, $\xi < 1/2$. Para simplificar a notação introduzimos as seguintes constantes

$$\begin{aligned} K_1 =& b|\Omega|^{\frac{p-m}{(m+1)(p+1)}} c_0^{-\frac{1}{p+1}}, \quad K_2 = b|\Omega|^{\frac{p-r}{(p+1)(r+1)}} c_0^{-\frac{1}{p+1}}, \\ \delta_1 =& \frac{\lambda}{4} A(0)^{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{p+1}}, \quad \delta_2 = \frac{\lambda}{4} A(0)^{\frac{1}{r+1} - \frac{1}{p+1}}, \end{aligned} \tag{3.121}$$

onde $\lambda = c_1 - 2 > 0$.

Da hipótese $\nabla \mathcal{F}(u(\tau), v(\tau)) = \Big(f_1(u(\tau), v(\tau)), f_2(u(\tau), v(\tau)) \Big)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau))u_t(\tau) + f_2(u(\tau), v(\tau))v_t(\tau))d\tau dx \\
&\quad = \int_\Omega \int_0^t \left(\frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau), v(\tau))}{\partial u} \frac{\partial u(\tau)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau), v(\tau))}{\partial v} \frac{\partial v(\tau)}{\partial t} \right) d\tau dx \\
&\quad = \int_\Omega \int_0^t \frac{\partial \mathcal{F}(u(\tau), v(\tau))}{\partial t} d\tau dx = \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t))dx - \int_\Omega \mathcal{F}(u(0), v(0))dx,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau))u_t(\tau) + f_2(u(\tau), v(\tau))v_t(\tau))d\tau dx \\
&\quad = \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t))dx - \int_\Omega \mathcal{F}(u(0), v(0))dx.
\end{aligned} \tag{3.122}
$$

Substituindo (3.122) na identidade de energia (3.70) obtemos a identidade

$$
\begin{aligned}
A(t) = A(0) &+ \int_0^t \left[\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau)\|^2 \right] d\tau \\
&+ \int_0^t \left[(g_1(u_t(\tau)), u_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v_t(\tau)) \right] d\tau.
\end{aligned}
$$

Da Hipótese 3.1.1 e pela regularidade da solução fraca (u, v) podemos concluir que a função $A(t)$ é absolutamente contínua e

$$
\begin{aligned}
A'(t) &= \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(t)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(t)\|^2 + (g_1(u_t(\tau)), u_t(t)) + (g_2(v_t(t)), v_t(t)) \\
&\geq \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(t)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(t)\|^2 + a\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + a\|v_t(t)\|_{m+1}^{m+1} \geq 0,
\end{aligned} \tag{3.123}
$$

quase sempre em $[0, T)$, de onde temos que $A(t)$ é não decrescente e como $A(0) = -\mathcal{E}(0)$, temos

$$
0 < A(0) \leq A(t) \leq B(t), \quad \forall t \in [0, T). \tag{3.124}
$$

Defina a função

$$
Y(t) = A(t)^{(1-\xi)} + \epsilon N'(t), \tag{3.125}
$$

com $0 < \epsilon \leq A(0)$. Vamos mostrar que

$$
Y'(t) = (1 - \xi)A(t)^{-\xi} A'(t) + \epsilon N''(t), \tag{3.126}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
N''(t) &= 2\big(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\big) - 2\big(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\big) \\
&\quad - 2\Big(((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v)\Big) \\
&\quad - 2\Big((g_1(u_t), u) + (g_2(v_t), v)\Big) + 2(f_1(u,v), u) + 2(f_2(u,v), v),
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

quase sempre em $[0,T)$. Em (3.127) estamos omitindo o parâmetro t no lado direito para simplificar a notação. Para provar (3.127), observe que, pela regularidade da solução fraca (u,v) e pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$, temos de imediato que

$$
(u_t, v_t) \in L^{m+1}(\Omega \times (0,t)) \times L^{r+1}(\Omega \times (0,t)) \hookrightarrow L^1(0,t;L^2(\Omega)) \times L^1(0,t;L^2(\Omega)),
$$

para todo $t \in [0,T)$, ou seja, o par (u,v) possui a mesma regularidade das funções teste conforme a Definição 3.1.3, quando restringimos tais funções ao intervalo $(0,t)$. Substituindo ϕ por u em (3.5) e ψ por v em (3.6) obtemos

$$
\begin{aligned}
&(u_t(t), u(t)) - (u_t(0), u(0)) + \int_0^t \big[- (u_t(\tau), u_t(\tau)) + (\nabla u(\tau), \nabla u(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_1(u_t(\tau)), u(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^t (f_1(u(\tau), v(\tau)), u(\tau)) d\tau,
\end{aligned}
\tag{3.128}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(v_t(t), v(t)) - (v_t(0), v(0)) + \int_0^t \big[- (v_t(\tau), v_t(\tau)) + (\nabla v(\tau), \nabla v(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_2(v_t(\tau)), v(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^t (f_2(u(\tau), v(\tau)), v(\tau)) d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

Note que

$$
\int_0^t (u_t(\tau), u_t(\tau))_2 d\tau = \int_0^t \|u_t(\tau)\|^2 d\tau, \quad \int_0^t (\nabla u, (\tau), \nabla u(\tau)) d\tau = \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2 d\tau, \tag{3.130}
$$

$$
\int_0^t (v_t(\tau), v_t(\tau))_2 d\tau = \int_0^t \|v_t(\tau)\|^2 d\tau, \quad \int_0^t (\nabla v(\tau), \nabla v(\tau)) d\tau = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|^2 d\tau. \tag{3.131}
$$

Substituindo (3.130) e (3.131) em (3.128), (3.129), respectivamente, e somando as identidades resultantes tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N'(t) &= (u_t(0), u(0)) - (v_t(0), v(0)) \\ &+ \int_0^t \Big(\|u_t(\tau)\|^2 + \|v_t(\tau)\|^2\Big)d\tau - \int_0^t \Big(\|\nabla u(\tau)\|^2 + \|\nabla v(\tau)\|^2\Big)d\tau \\ &- \int_0^t \Big[((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u(\tau)) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v(\tau))\Big]d\tau \\ &- \int_0^t \Big[(g_1(u_t(\tau)), u(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v(\tau))\Big]d\tau \\ &+ \int_0^t \Big[((f_1(u(\tau), v(\tau)), u(\tau)) + (f_2(u(\tau), v(\tau)), v(\tau))\Big]d\tau.\end{aligned} \tag{3.132}$$

Usando a Hipóteses 3.1.1 e o Teorema do Valor Médio, podemos mostrar que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f_i(u, v)| \leq C(|u|^p + |v|^p + 1), \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}, i = 1, 2.$$

Donde obtemos que

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t \Big[((f_1(u(\tau), v(\tau)), u(\tau)) + (f_2(u(\tau), v(\tau)), v(\tau))\Big]d\tau\right| \\ &\quad \leq \int_0^t \int_\Omega (|f_1(u(\tau), v(\tau))||u(\tau)| + |f_2(u(\tau), v(\tau))||v(\tau)|)dxd\tau \\ &\quad \leq C\int_0^t \int_\Omega ((|u(\tau)|^p + |v(\tau)|^p + 1))(|u(\tau)| + |v(\tau)|)dxd\tau,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t \Big[((f_1(u(\tau), v(\tau)), u(\tau)) + (f_2(u(\tau), v(\tau)), v(\tau))\Big]d\tau\right| \\ &\quad \leq C\int_0^t \int_\Omega (|u(\tau)|^p|u(\tau)| + |v(\tau)|^p|v(\tau)| + |u(\tau)|^p|v(\tau)| + |v(\tau)|^p|u(\tau)|)dxd\tau \\ &\quad + C\int_0^t \int_\Omega (|u(\tau)| + |v(\tau)|)dxd\tau.\end{aligned} \tag{3.133}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$, escrevemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega |u(\tau)|^p|u(\tau)|dxd\tau &\leq \left(\int_0^t \|u(\tau)\|_{\frac{p(m+1)}{m}}^{\frac{p(m+1)}{m}} d\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \left(\int_0^t \|u(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau\right)^{\frac{1}{m+1}} \\ &\leq C'\left(\int_0^t \|u(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{p(m+1)}{m}} d\tau\right)^{\frac{m}{m+1}} \|u\|_{L^{m+1}(\Omega\times(0,t))} < \infty,\end{aligned}$$

pois $u \in C([0,t];H_0^1(\Omega))$ e $u \in L^{m+1}(\Omega \times (0,t))$. Faz-se o mesmo para as demais parcelas em (3.133) e conclui-se que

$$\Big| \int_0^t \Big[((f_1(u(\tau),v(\tau)),u(\tau)) + (f_2(u(\tau),v(\tau)),v(\tau)) \Big] d\tau \Big| < \infty, \quad \forall t \in [0,T). \tag{3.134}$$

Usando que $D((-\Delta)^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow D((-\Delta)^{\frac{s}{2}})$ para $s \in (0,1)$ e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \Big[((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u(\tau)) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v(\tau)) \Big] d\tau \right| \\
&\leq \int_0^t (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u\| \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\| + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v\| \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|) d\tau \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v\|^2) d\tau \\
&\quad + \int_0^t (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2) d\tau < \infty, \quad \forall t \in [0,T).
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Usando a regularidade da solução (u,v) e as hipóteses sobre os parâmetros do damping, temos

$$\left| \int_0^t \Big[(g_1(u_t(\tau)),u(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)),v(\tau)) \Big] d\tau \right| < \infty, \quad \forall t \in [0,T). \tag{3.136}$$

De (3.132), (3.134), (3.135) e (3.136) concluímos que $N'(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, (3.127) é válida.

Relembrando (3.118), podemos escrever

$$\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 = -\Big(\|u_t(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2 \Big) + 2B(t) - 2A(t). \tag{3.137}$$

De (3.126), (3.127), (3.137) e considerando a hipótese (3.114), obtemos

$$\begin{aligned}
Y'(t) \geq (1-\xi)A(t)^{-\xi}A'(t) &+ 4\epsilon\Big(\|u_t(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2 \Big) - 4\epsilon B(t) + 4\epsilon A(t) \\
&- 2\epsilon\Big[((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v) \Big] \\
&- 2\epsilon\Big[(g_1(u_t),u) + (g_2(v_t),v) \Big] + 2\epsilon\lambda B(t).
\end{aligned} \tag{3.138}$$

Agora vamos estimar cada parcela da última linha de (3.138). Por definição temos

$$(g_1(u_t),u) + (g_2(v_t),v) = \int_\Omega g_1(u_t)u dx + \int_\Omega g_2(v_t)v dx. \tag{3.139}$$

Usamos a hipótese $g_i(s)s \leq b|s|^{m+1}, i = 1, 2$, o fato de $p > m$ e a desigualdade (3.119) para fazer estimativas adequadas para a integral em (3.139) usando a desigualdade de Hölder.

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega g_1(u_t(t))u(t)dx\right| &\leq b\int_\Omega |u_t(t)|^m|u(t)|dx \\ &\leq b\|u_t(t)\|_{m+1}^m\|u(t)\|_{m+1} \leq K_1 B(t)^{\frac{1}{p+1}}\|u_t(t)\|_{m+1}^m.\end{aligned} \tag{3.140}$$

onde K_1 é uma constante definida em (3.121). Além disso, por definição de ξ, nós encontramos que $\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{m+1} - \xi < 0$. Pela desigualdade de Young vem

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega g_1(u_t(t))u(t)dx\right| &\leq K_1 B(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}B(t)^{\frac{1}{m+1}}\|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq A(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}\left(\delta_1 B(t) + K_1^{\frac{m+1}{m}}C_{\delta_1}\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1}\right) \\ &\leq \delta_1 A(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}B(t) + a^{-1}C_{\delta_1}K_1^{\frac{m+1}{m}}A'(t)A(t)^{-\xi}A(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi} \\ &\leq \delta_1 A(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}}B(t) + a^{-1}C_{\delta_1}K_1^{\frac{m+1}{m}}A'(t)A(t)^{-\xi}A(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi} \\ &= \frac{\lambda}{4}B(t) + a^{-1}C_{\delta_1}K_1^{\frac{m+1}{m}}A'(t)A(t)^{-\xi}A(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi}.\end{aligned} \tag{3.141}$$

Analogamente temos

$$\left|\int_\Omega g_2(v_t(t))v(t)dx\right| \leq \frac{\lambda}{4}B(t) + a^{-1}C_{\delta_2}K_2^{\frac{r+1}{r}}A'(t)A(t)^{-\xi}A(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{r+1}+\xi}. \tag{3.142}$$

Usando que $(-\Delta)^s$ é autoadjunto, a imersão $D((-\Delta)^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow D((-\Delta)^s)$ para $s \in (0, \frac{1}{2})$ e as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}&\left|((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v)\right| \\ &= |(u_t, (-\Delta)^{\alpha_1}u) + (v_t, (-\Delta)^{\alpha_2}v)| \\ &\leq \|u_t\|\|(-\Delta)^{\alpha_1}u\| + \|v_t\|\|(-\Delta)^{\alpha_2}v\| \\ &\leq C\|u_t\|\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\| + \|v_t\|\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v\| \\ &\leq \frac{C^2}{4}\left(\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v\|^2\right) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2.\end{aligned}$$

Como $A(t) \geq 0$, de (3.137) temos que $\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq 2B(t)$. Assim

$$\left|((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v)\right| \leq \frac{C^2}{2}B(t) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2. \tag{3.143}$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned}&\left|((-\Delta)^{\alpha_1/2}u_t,(-\Delta)^{\alpha_1/2}u)+((-\Delta)^{\alpha_2/2}v_t,(-\Delta)^{\alpha_2/2}v)\right|\\&\leq C(\Omega)^2B(t)+C(K)^{\xi}A(t)^{-\xi}A'(t).\end{aligned}\tag{3.144}$$

Agora, como $0<\xi<\frac{1}{2}$, podemos escolher $0<\epsilon<1$ suficientemente pequeno tal que

$$\chi_0:=1-\xi-2\epsilon C_{\delta_1}K_1^{\frac{m+1}{m}}a^{-1}A(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi}-2\epsilon C_{\delta_2}K_2^{\frac{r+1}{r}}a^{-1}A(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{r+1}+\xi}\geq 0.\tag{3.145}$$

Substituindo as estimativas (3.141), (3.142) e (3.144) em (3.138), e usando (3.123), (3.124) e (3.145), concluímos que

$$Y'(t)\geq \chi_0A'(t)A^{-\xi}(t)+2\epsilon\left(\|u_t\|^2+\|v_t\|^2+2A(t)\right)+\epsilon(\lambda-C^2)B(t).\tag{3.146}$$

Como $\lambda-C^2>0$ por hipótese, a desigualdade (3.146) mostra que $Y(t)$ é crescente em $[0,T)$ e assim

$$Y(t)=A(t)^{1-\xi}+\epsilon N'(t)\geq A(0)^{1-\xi}+\epsilon N'(0).\tag{3.147}$$

Se $N'(0)>0$, não é necessário impor nenhuma outra condição para ϵ. Se $N'(0)<0$, basta tomar ϵ tal que $0<\epsilon<-\frac{A(0)^{1-\xi}}{2N'(0)}$. Nos dois casos teremos

$$Y(t)\geq\frac{1}{2}A(0)^{1-\xi}>0,\quad \forall t\in[0,T).\tag{3.148}$$

Agora resta mostrar que

$$Y'(t)\geq C\epsilon^{1+\sigma}Y(t)^{\eta},\tag{3.149}$$

onde

$$1<\eta=\frac{1}{1-\xi}<2,\quad \sigma=1-\frac{2}{(1-2\xi)(p+1)}\tag{3.150}$$

e $C>0$ é uma constante genérica que não depende de ϵ. Como $\xi<\frac{p-1}{2(p+1)}$, temos que $\sigma>0$. A demonstração da desigualdade (3.149) será dividida em duas partes, como segue.

Parte 1: Se $N'(t)\leq 0$ para algum $t\in[0,T)$, então para este t escrevemos

$$Y(t)^{\eta}=[A(t)^{1-\xi}+\epsilon N'(t)]^{\eta}\leq A(t).\tag{3.151}$$

Segue de (3.146) e (3.151) que

$$Y'(t) \geq 4\epsilon A(t) \geq 4\epsilon^{1+\sigma} A(t) \geq 4\epsilon^{1+\sigma} Y(t)^{\eta}. \tag{3.152}$$

mostrando que (3.149) é válida para todo $t \in [0, T)$ para o qual $N'(t) \leq 0$.

Parte 2: Suponha agora que $t \in [0, T)$ é tal que $N'(t) > 0$. Note que

$$Y(t) = A(t)^{1-\xi} + \epsilon N'(t) \leq A(t)^{1-\xi} + N'(t). \tag{3.153}$$

Então

$$Y(t)^{\eta} \leq 2^{\eta - 1}[A(t) + N'(t)^{\eta}]. \tag{3.154}$$

Relembrando a definição de $N(t)$ em (3.117) e usando as desigualdades de Hölder e Young obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} N'(t)^{\eta} &\leq 2^{\eta} \left(\|u(t)\| \|u_t(t)\| + \|v(t)\| \|v_t(t)\|\right)^{\eta} \\ &\leq C(\eta, L) \left(\|u(t)\|_{p+1}^{\eta} \|u_t(t)\|^{\eta} + \|v(t)\|_{p+1}^{\eta} \|v_t(t)\|^{\eta}\right) \\ &\leq C(\eta, L) \left(\|u(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \|u_t(t)\|^2 + \|v(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \|v_t(t)\|^2\right). \end{aligned} \tag{3.155}$$

Como $\eta = \frac{1}{1-\xi}$ e $\sigma > 0$, é fácil ver que

$$\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)} - 1 = \frac{2}{(1-2\xi)(p+1)} - 1 = -\sigma < 0. \tag{3.156}$$

Então por (3.119), (3.124), (3.155) e por $0 < \epsilon \leq A(0)$ temos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} &= \left(\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\right)^{\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)}} \leq CB(t)^{\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)}} \\ &\leq CB(t)^{\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)} - 1} B(t) \leq CA(0)^{-\sigma} B(t) \leq C\epsilon^{-\sigma} B(t). \end{aligned} \tag{3.157}$$

Da mesma forma obtemos

$$\|v(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} \leq C\epsilon^{-\sigma} B(t). \tag{3.158}$$

Por (3.155), (3.157), (3.158) e lembrando que $\epsilon^{-\sigma} > 1$ obtemos

$$\begin{aligned} N'(t)^{\eta} &\leq C(\|u_t(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2 + \epsilon^{-\sigma} B(t)) \\ &\leq C\epsilon^{-\sigma}(\|u_t(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2 + B(t)). \end{aligned} \tag{3.159}$$

Usando (3.146) (3.154) e (3.159) tem-se

$$\begin{aligned} Y'(t) &\geq C\epsilon[A(t) + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + B(t)] \geq C\epsilon[A(t) + \epsilon^\sigma N'(t)^\eta] \\ &\geq C\epsilon^{\sigma+1}[A(t) + N'(t)^\eta] \geq C\epsilon^{\sigma+1} Y(t)^\eta \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T)$ para o qual $N'(t) > 0$. Portanto a desigualdade (3.149) é válida para todo $t \in [0, T)$. De (3.148) e (3.149) segue que T é necessariamente finito e

$$T < C\epsilon^{-(1+\sigma)} Y(0)^{-\frac{\xi}{1-\xi}} \leq C\epsilon^{-(1+\sigma)} A(0)^{-\xi}, \tag{3.160}$$

e o teorema está provado. ■

3.5 Solução global

Nesta seção, desenvolvemos a teoria de poço de potencial (do inglês "potential well") para estudar a existência global das soluções fracas do problema (1.1)-(1.2). Para este fim, precisamos introduzir hipóteses adicionais:

Hipótese 3.5.1 *Existe uma função não negativa* $\mathcal{F} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *tal que*

$$\nabla \mathcal{F} = (f_1, f_2), \tag{3.161}$$

que é homogênea de grau $p + 1$*, ou seja,*

$$\mathcal{F}(\lambda u, \lambda v) = \lambda^{p+1} \mathcal{F}(u, v), \ \ \forall \lambda > 0, \ (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.162}$$

Como $\mathcal{F}$ é homogênea, pelo Teorema da Função Homogênea de Euler temos a seguinte identidade

$$f_1(u, v)u + f_2(u, v)v = (p + 1)\mathcal{F}(u, v). \tag{3.163}$$

Segue da hipótese (3.8) que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\mathcal{F}(u, v) \leq M(|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + 1). \tag{3.164}$$

Além disso, sendo $\mathcal{F}$ homogênea temos

$$\mathcal{F}(u, v) \leq M(|u|^{p+1} + |v|^{p+1}). \tag{3.165}$$

Notemos que as funções $f_i, i = 1, 2$, são funções homogêneas de grau p e existe uma constante $C > 0$ tal que

$$f_i(u, v) \leq C(|u|^p + |v|^p), \quad i = 1, 2. \tag{3.166}$$

Relembramos o de Hilbert $V = (H_0^1(\Omega))^2$ munido com a norma

$$\|(u, v)\|_V^2 = \|\nabla v\|^2 + \|\nabla u\|^2. \tag{3.167}$$

Definimos o funcional $J : V \to \mathbb{R}$ por

$$J(u, v) := \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - \int_\Omega \mathcal{F}(u, v)dx. \tag{3.168}$$

Consequentemente,

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + J(u, v). \tag{3.169}$$

A derivada Frechét de J em $(u, v) \in V$ é dada por

$$J'(u, v)(\phi, \psi) = (\nabla u, \nabla \phi) + (\nabla v, \nabla \psi) - \int_\Omega (f_1(u, v)\phi + f_2(u, v)\psi)dx. \tag{3.170}$$

Definimos a variedade de Nehari associada ao funcional J por

$$\mathcal{N} = \big\{(u, v) \in V \setminus \{(0, 0)\} : J'(u, v)(u, v) = 0\big\}. \tag{3.171}$$

De (3.163) e (3.170) segue-se que

$$\mathcal{N} = \left\{(u, v) \in V \setminus \{0\} : \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 = (p + 1)\int_\Omega F(u, v)\, dx\right\}. \tag{3.172}$$

Pelo Lema 2.7 em [31], J satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e o nível do passo da montanha d satisfaz

$$d := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} J(u, v) = \inf_{(u,v)\in V\setminus\{(0,0)\}} \sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda(u, v)). \tag{3.173}$$

O seguinte lema nos permite introduzir o chamado poço de potencial .

Lema 3.5.1 *Suponhamos que as Hipóteses 3.1.1 e 3.5.1 sejam satisfeitas e que $p > 1$, então*

$$d := \inf_{(u,v)\in\mathcal{N}} J(u, v) > 0. \tag{3.174}$$

Demonstração: Seja $(u,v) \in \mathcal{N}$. Assim, por (3.172) temos

$$J(u,v) = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_V^2 - \int_0^L F(u,v)\ dx = \frac{1}{2}\|(u,v)\|_V^2 - \frac{1}{p+1}\|(u,v)\|_V^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\|(u,v)\|_V^2 > 0.$$

Usando que $(u,v) \in \mathcal{N}$, a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e (3.165), obtemos

$$\|(u,v)\|_V^2 = (p+1)\int_0^L F(u,v)\ dx \leq (p+1)M\left(\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|u\|_{p+1}^{p+1}\right) \leq C\|(u,v)\|_V^{p+1}.$$

Como $p > 1$, deduzimos que $\|(u,v)\|_V \geq C^{-\frac{1}{p-1}} > 0$. Assim

$$d \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) C^{-\frac{2}{p-1}} > 0.$$

Isso finaliza a prova. ■

De acordo com [2], introduzimos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} W &:= \{(u,v) \in V : J(u,v) < d\}, \\ W_1 &:= \left\{(u,v) \in W : \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 > (p+1)\int_\Omega \mathcal{F}(u,v)dx\right\} \cup \{(0,0)\}, \\ W_2 &:= \left\{(u,v) \in W : \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 < (p+1)\int_\Omega \mathcal{F}(u,v)dx\right\}. \end{aligned} \tag{3.175}$$

Observemos que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ e $W_1 \cup W_2 = W$. Nos referimos ao conjunto W como o **poço de potencial** e d como a profundidade do poço. Provaremos que se $\mathcal{E}(0) < d$ e $(u_0, v_0) \in W_1$, então a solução do problema (1.1) é globalmente definida. Por este motivo, o conjunto W_1 é considerado como a "parte boa"do poço de potencial. Além disso, provaremos que se $(u_0, v_0) \in W_2$ e as fontes forem mais dominantes que os dampings, isto é, $p > \max\{m, r\}$ então a solução fraca do problema (1.1) possui blow-up em tempo finito.

A seguir, provaremos algumas propriedades do conjunto W_1 que serão úteis para o desenvolvimento desta seção. Defina a função

$$\mathcal{G}(s) = \frac{1}{2}s^2 - MRs^{p+1} \tag{3.176}$$

onde $M > 0$ é dado em (3.165) e

$$R := \sup_{(u,v)\in V/\{0\}} \frac{\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1}}{\|(u,v)\|_V^{p+1}}. \tag{3.177}$$

Como $p > 1$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \infty$, segue-se que $0 < R < \infty$. De (3.165) temos que

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - \int_\Omega \mathcal{F}(u,v)dx \\ &\geq \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - M(\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1}) \\ &\geq \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - MR\|(u,v)\|_V^{p+1} \\ &= \mathcal{G}(\|(u,v)\|_V). \end{aligned} \tag{3.178}$$

Um cálculo simples mostra que a função $\mathcal{G}$ atinge seu máximo absoluto no intervalo $[0,\infty)$ no único ponto crítico

$$s_0 = ((p+1)MR)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{3.179}$$

Então o valor máximo de $\mathcal{G}$ é

$$\hat{d} := \sup_{s\in[0,\infty)} \mathcal{G}(s) = \mathcal{G}(s_0) = \frac{p-1}{2(p+1)}((p+1)MR)^{-\frac{2}{p-1}}. \tag{3.180}$$

Agora definimos

$$\widetilde{W_1} = \big\{(u,v) \in V : \|(u,v)\|_V < s_0, J(u,v) < \mathcal{G}(s_0)\big\}. \tag{3.181}$$

É importante notar que $\widetilde{W_1} \neq \emptyset$. De fato, dado $(u,v) \in V$, existe um escalar $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon(u,v) \in \widetilde{W_1}$. Além disso, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.5.1 *$\mathcal{G}(s_0) \leq d$ e $\widetilde{W_1} \subset W_1$.*

Demonstração: Primeiramente, vamos provar que $\mathcal{G}(s_0) \leq d$. De fato, fixemos $(u,v) \in V \setminus \{0\}$, então (3.178) implica que $J(\lambda(u,v)) \geq \mathcal{G}(\lambda\|(u,v)\|_V)$ para todo $\lambda \geq 0$. Assim

$$\sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda(u,v)) \geq \mathcal{G}(s_0).$$

Da caracterização (3.173) segue-se que

$$d = \inf_{(u,v)\in V\setminus\{0\}} \sup_{\lambda\geq 0} J(\lambda(u,v)) \geq \mathcal{G}(s_0). \tag{3.182}$$

Além disso, dado $\|(u,v)\|_V < s_0$, de (3.165) e (3.177) resulta que

$$
\begin{aligned}
(p+1)\int_0^L F(u,v)\,dx &\le (p+1)M\big(\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1}\big) \\
&\le (p+1)MR\|(u,v)\|_V^{p+1} \\
&= \|(u,v)\|_V^2((p+1)MR\|(u,v)\|_V^{p-1}) \\
&< \|(u,v)\|_V^2((p+1)MRs_0^{p-1}) \\
&= \|(u,v)\|_V^2.
\end{aligned} \tag{3.183}
$$

Assim, pela definição de W_1, temos $\widetilde{W}_1 \subset W_1$. A prova está completa. ■

Para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeno, podemos definir um subconjunto fechado de $\widetilde{W}_1$ como

$$
\widetilde{W}_1^\delta = \big\{(u,v) \in V; \|(u,v)\|_V \le s_0 - \delta, J(u,v) \le \mathcal{G}(s_0-\delta)\big\}. \tag{3.184}
$$

Da Proposição 3.5.1 segue imediatamente que $\widetilde{W}_1^\delta \subset W_1$.

Teorema 3.5.1 *Além das Hipóteses 3.1.1 e 3.5.1, suponha que* $(u_0,v_0) \in W_1$ *e* $\mathcal{E}(0) < d$. *Se* $p > 1$, *então a solução fraca* (u,v) *de* (1.1)-(1.2) *é uma solução global, ou seja, ela pode ser estendida ao intervalo* $[0,\infty)$. *Além disso, temos*

(i) $J(u(t),v(t)) \le \mathcal{E}(t) \le \mathcal{E}(0)$;

(ii) $(u(t),v(t)) \in W_1$;

(iii) $E(t) \le d\rho$;

(iv) $\frac{1}{\rho}E(t) \le \mathcal{E}(t) \le E(t)$;

para todo $t \ge 0$, *onde* $\rho = \frac{p+1}{p-1}$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que W_1 é invariante pela dinâmica, isto é, que $(u(t),v(t)) \in W_1, \forall t \in [0,T)$ onde $[0,T)$ é o intervalo maximal de existência da solução. Observe que como $\nabla\mathcal{F} = (f_1,f_2)$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \big[(f_1(u(\tau),v(\tau)),u_t(\tau)) + (f_2(u(\tau),v(\tau)),v_t(\tau))\big]d\tau \\
&\quad = \int_\Omega \mathcal{F}(u(t),v(t))dx - \int_\Omega \mathcal{F}(u(0),v(0))dx.
\end{aligned}
$$

Assim temos que a identidade de energia (3.70) é equivalente a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &+ \int_0^t \big[\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau)\|^2\big] d\tau \\ &+ \int_0^t \big[(g_1(u_t(\tau)), u_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v_t(\tau))\big] d\tau = \mathcal{E}(0).\end{aligned} \tag{3.185}$$

Como g_1 e g_2 são monótonas crescente, segue-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'(t) = &-\big[\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau)\|^2\big] \\ &- \big[(g_1(u_t(\tau)), u_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v_t(\tau))\big] \leq 0.\end{aligned}$$

Portanto

$$J(u(t), v(t)) \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d, \quad \forall t \in [0, T) \tag{3.186}$$

e a propriedade (i) está provada e $(u(t), v(t)) \in W, \forall t \in [0, T)$.

Provaremos agora a propriedade (ii). Suponha por absurdo que existe um $t_1 \in (0, T)$ tal que $(u(t_1), v(t_1)) \notin W_1$. Como $W = W_1 \cup W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, devemos ter $(u(t_1), v(t_1)) \in W_2$. De $|\nabla f_i(u, v)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + 1)$ e pelo fato de $\mathcal{F}$ ser homogênea de grau $p+1$ é possível mostrar que a função $t \longmapsto \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t))dx$ é contínua em $[0, T)$. Então, como $(u(0), v(0)) \in W_1$ e $(u(t_1), v(t_1)) \in W_2$, da definição de W_1 e W_2, usando o Teorema do Valor Intermediário temos que existe um $s \in (0, t_1)$ tal que

$$\|\nabla u(s)\|^2 + \|\nabla v(s)\|^2 = (p+1) \int_\Omega \mathcal{F}(u(s), v(s))dx. \tag{3.187}$$

Seja

$$t^* = \sup\left\{t \in (0, t_1) : \|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 = (p+1) \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t))dx\right\}. \tag{3.188}$$

É imediato que $t^* \in (0, t_1)$ e $(u(t), v(t)) \in W_2, \forall t \in (t^*, t_1]$. Temos então dois casos a considerar:

Caso 1: Suponha que $(u(t^*), v(t^*)) \neq 0$. Como t^* satisfaz (3.187), então $(u(t^*), v(t^*)) \in \mathcal{N}$ e por (3.173) segue-se que $J(u(t^*), v(t^*)) \geq d$. Como $\mathcal{E}(t) \geq J(u(t), v(t)), \forall t \in [0, T)$, temos que $\mathcal{E}(t^*) \geq d$, o que é absurdo, pois contradiz (3.186).

Caso 2: Suponha que $(u(t^*), v(t^*)) = 0$. Como $(u(t), v(t)) \in W_2, \forall t \in (t^*, t_1]$, então por (3.165) e pela definição de W_2, obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 &< M(p+1)\Big(\|\nabla u(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|\nabla v(t)\|_{p+1}^{p+1}\Big) \\ &\leq C\Big(\|\nabla u(t)\|^{p+1} + \|\nabla v(t)\|^{p+1}\Big), \quad \forall t \in (t^*, t_1].\end{aligned}$$

Então

$$\|(u(t),v(t))\|_V^2 < C\|(u(t),v(t))\|_V^{p+1}, \quad \forall t \in (t^*, t_1],$$

a qual implica

$$\|(u(t),v(t))\|_V > s_1, \quad \forall t \in (t^*, t_1], \text{ onde } s_1 = C^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Pela continuidade da solução fraca $(u,v) \in C([0,T);V)$, teremos

$$\|(u(t^*),v(t^*))\|_V \geq s_1 > 0,$$

o que é absurdo. Portanto devemos ter $(u(t),v(t)) \in W_1, \forall t \in [0,T)$.

Mostraremos agora que a solução fraca é global. De (3.186) e da primeira parte da demonstração tem-se que $J(u(t),v(t)) < d$ e $(u(t),v(t)) \in W_1, \forall t \in [0,T)$, assim

$$\begin{aligned} d > J(u(t),v(t)) &= \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\Big) - \int_\Omega \mathcal{F}(u(t),v(t))dx \\ &> \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\Big) - \frac{1}{p+1}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\Big) \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\Big). \end{aligned}$$

Então

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u(t),v(t))dx < \frac{1}{p+1}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\Big) < \frac{2d}{p-1}, \quad \forall t \in [0,T). \tag{3.189}$$

De (3.185) e (3.189) segue-se que

$$\begin{aligned} E(t) &+ \int_0^t \big[\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau)\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau)\|^2\big] d\tau \\ &+ \int_0^t \big[(g_1(u_t(\tau)), u_t(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v_t(\tau))\big] d\tau \\ &= \mathcal{E}(0) + \int_\Omega F(u(t),v(t))dx < d + \frac{2d}{p-1} = d\rho, \end{aligned}$$

onde $\rho = \dfrac{p+1}{p-1}$. Então, por um argumento de continuação, concluímos que a solução fraca (u,v) é, de fato, uma solução global e ela pode se estendida ao intervalo $[0,\infty)$.

Sendo $\mathcal{F}$ uma função não negativa, temos que $\mathcal{E}(t) < E(t), \forall t \in [0, \infty)$. Por outro lado, pelo fato de $(u(t), v(t)) \in W_1, \forall t \in [0, \infty)$ e pela definição de $\mathcal{E}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\Big(\|u_t(t)\|^2 + \|v_t(t)\|^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\Big) - \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t))dx \\ &\geq E(t) - \frac{1}{p+1}\Big(\|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2\Big) \geq \frac{1}{\rho}E(t).\end{aligned}$$

e o teorema está provado. ■

3.6 Blow-up com dado inicial em W_2

No Teorema 3.5.1 vimos que as soluções com condições iniciais em $(u_0, v_0) \in W_1$ são soluções globais. No próximo teorema veremos que isso não ocorre para aquelas soluções cujas condições iniciais (u_0, v_0) estão em W_2, ou seja, tais soluções possuem blow-up em tempo finito. A fim de estabelecer este resultado, vamos considerar as seguintes hipóteses.

Hipótese 3.6.1 (Blow-up para soluções com dado inicial em W_2)

- ***Damping:*** *Suponha que existam constantes $a, b > 0$ tais que para todo $s \in \mathbb{R}$*

$$a|s|^{m+1} \leq g_1(s)s \leq b|s|^{m+1}, \quad m \geq 1,$$
$$a|s|^{r+1} \leq g_2(s)s \leq b|s|^{r+1}, \quad r \geq 1.$$

- ***Fontes:*** *Suponha que*

$$\mathcal{F}(u, v) \geq \alpha_0(|u|^{p+1} + |v|^{p+1}), \quad \textit{para algum } \alpha_0 > 0.$$

Primeiro, mostraremos que o conjunto W_2 é invariante pela dinâmica. Mais precisamente, temos o lema a seguir.

Lema 3.6.1 *Suponha que as hipóteses 3.1.1 e 3.5.1 sejam satisfeitas e ainda que $p > 1$, $(u_0, v_0) \in W_2$ e $\mathcal{E}(0) < d$. Então a solução fraca do problema* (3.3) *é tal que $(u(t), v(t)) \in W_2$ para todo $t \in [0, T)$. Além disso,*

$$\|(u(t), v(t))\|_V^2 > 2\rho d, \ \ \forall t \in [0, T), \tag{3.190}$$

sendo $\rho := \dfrac{p+1}{p-1}$, $V = (H_0^1(\Omega))^2$ e $[0, T)$ é o intervalo máximo de existência.

Demonstração: Passo 1. Considerando $(u_0, v_0) \in W_2$, primeiro vamos mostrar que $(u(t), v(t)) \in W_2$ para todo $t \in [0, T)$. A prova é feita por contradição. Supondo que existe $t_0 \in [0, T)$ tal que $(u(t_0), v(t_0)) \notin W_2$, temos

$$\|(u(t_0), v(t_0))\|_V^2 \geq (p+1) \int_\Omega \mathcal{F}(u(t_0), v(t_0))\, dx.$$

Usando o fato de que $(u, v) \in C([0, T); (H_0^1(\Omega))^2)$ e a hipótese $(u_0, v_0) \in W_2$, concluímos que existe $s \in (0, t_0]$ tal que

$$\|(u(s), v(s))\|_V^2 = (p+1) \int_\Omega \mathcal{F}(u(s), v(s))\, dx. \tag{3.191}$$

Agora definimos t^* como o ínfimo de todos os $s \in (0, t_0]$ satisfazendo (3.191). É imediato que $t^* \in (0, t_0]$ satisfaz (3.191) e $(u(t), v(t)) \in W_2$ para todo $t \in [0, t^*)$. Assim, temos dois casos a considerar.

Caso 1: Suponha que $(u(t^*), v(t^*)) \neq (0, 0)$. Como t^* satisfaz (3.191), então $(u(t^*), v(t^*)) \in \mathcal{N}$, e por (3.174), sabemos que $J(u(t^*), v(t^*)) \geq d$. Então $\mathcal{E}(t^*) \geq d$, o que contradiz o fato de que $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d$ para todo $t \in [0, T)$.

Caso 2: Suponha que $(u(t^*), v(t^*)) = (0, 0)$. Como $(u(t), v(t)) \in W_2$ para todo $[0, t^*)$, usando argumentos similares aos usados para obter as estimativas (3.185) e (3.186) obtemos $\|(u(t), v(t)\|_V > s_1$, para todo $[0, t^*)$, para algum $s_1 > 0$. Pela continuidade da solução fraca $(u(t), v(t))$, temos que $\|(u(t^*), v(t^*))\|_V \geq s_1 > 0$, o que contradiz a hipótese $(u(t^*), v(t^*)) = (0, 0)$.

As contradições nos casos 1 e 2 acima nos mostram que devemos ter $(u(t), v(t)) \in W_2$ para todo $t \in [0, T)$.

Passo 2: Resta mostrar que vale a desigualdade (3.190). Seja $(u, v) \in W_2$ fixado. Pela Hipótese 3.5.1, temos que

$$J(\lambda(u, v)) = \|\lambda(u, v)\|_V^2 - \int_\Omega \mathcal{F}(\lambda(u, v))\, dx = \frac{\lambda^2}{2}\|(u, v)\|_V^2 - \lambda^{p+1} \int_\Omega \mathcal{F}(u, v)\, dx, \tag{3.192}$$

para todo $\lambda \geq 0$. Portanto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} J(\lambda(u, v)) = \lambda \|(u, v)\|_V^2 - (p+1) \int_\Omega \lambda^p \mathcal{F}(u, v)\, dx. \tag{3.193}$$

Por isso, a função $\lambda \mapsto J(\lambda(u, v))$ possui um único ponto crítico λ_0 que satisfaz

$$\|(u, v)\|_V^2 = (p+1)\lambda_0^{p-1} \int_\Omega \mathcal{F}(u, v)\, dx. \tag{3.194}$$

Como $(u,v) \in W_2$, então $\lambda_0 < 1$. Além disso, sabendo-se que a função $\lambda \mapsto J(\lambda(u,v))$ atinge seu máximo absoluto em seu ponto crítico $\lambda = \lambda_0$. Assim, por (3.174) e (3.194), segue-se que

$$d \leq \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda(u,v)) = \frac{\lambda_0^2}{2}\|(u,v)\|_V^2 - \lambda_0^{p+1}\int_\Omega \mathcal{F}(u,v)\,dx = \frac{\lambda_0^2}{2}\frac{(p-1)}{(p+1)}\|(u,v)\|_V^2. \tag{3.195}$$

Sendo $\lambda_0 < 1$, temos que $\|(u,v)\|_V^2 > 2d\frac{p-1}{p+1} = 2\rho d$, o que completa a demonstração. ∎

Teorema 3.6.1 (Blow-up em tempo finito) *Considere as hipóteses 3.1.1, 3.5.1 e 3.6.1. Além disso, suponha que* $p > \max\{m,r\}, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{1}{2}), 0 \leq \mathcal{E}(0) < d$ *e* $(u_0, v_0) \in W_2$. *Então qualquer solução fraca* (u,v) *dada pelo Teorema 3.1.1 possui blow-up em tempo finito, ou seja,*

$$\limsup_{t \to T^-} E(t) = +\infty$$

para algum $0 < T < \infty$.

Demonstração: A fim de mostrar que o tempo máximo de existência T é necessariamente finito, vamos argumentar por contradição. Suponha que a solução fraca $(u(t), v(t))$ possa ser estendida ao intervalo $[0,\infty)$. Então, o Lema 3.6.1 nos diz que $(u(t), v(t)) \in W_2$ para todo $t \in [0,\infty)$, ou seja,

$$\|(u(t),v(t))\|_V^2 < (p+1)\int_0^L \mathcal{F}(u(t),v(t))\,dx, \quad \forall t \in [0,\infty). \tag{3.196}$$

Além disso, pela hipótese $0 \leq \mathcal{E}(0) < d$, a energia $\mathcal{E}(t)$ satisfaz

$$0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d, \quad \forall t \in [0,\infty). \tag{3.197}$$

Para ver isso, suponha que $\mathcal{E}(t_0) < 0$ para algum $t_0 \in (0,\infty)$. Então, de acordo como Teorema 3.4.1, $\|(u(t), v(t))\|_V \to \infty$ quando $t \to T^{-1}$, para algum $0 < T < \infty$, ou seja, a solução fraca $(u(t), v(t))$ possui blow-up em tempo finito, o que contradiz a hipótese. Portanto, concluímos que $\mathcal{E}(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$.

Agora definimos as funções

$$N(t) = \|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2, \quad B(t) = \int_\Omega \mathcal{F}(u(t),v(t))\,dx \geq 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{3.198}$$

Passo 1: Mostraremos que $N(t)$ tem crescimento quadrático quando $t \to \infty$. Assim como obtemos a identidade (3.127) na prova do Teorema 3.4.1, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} N''(t) &= 2\Big(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\Big) - 2\Big(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\Big) \\ &\quad - 2\Big[((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v)\Big] \\ &\quad - 2\Big[(g_1(u_t), u) + (g_2(v_t), v)\Big] + 2(p+1)\int\limits_{\Omega} \mathcal{F}(u,v)dx. \end{aligned} \tag{3.199}$$

A hipótese $|g_1(s)| \leq b|s|^m$ para todo $s \in \mathbb{R}$ implica

$$\left|\int_\Omega g_1(u_t)u\,dx\right| \leq b\|u\|_{m+1}\|u_t\|_{m+1}^m. \tag{3.200}$$

Desde que $1 \leq \max\{m, r\} < p$, usando a desigualdade de interpolação para espaços L^p temos

$$\|u\|_{m+1} \leq \|u\|_2^\theta \|u\|_{p+1}^{1-\theta}, \tag{3.201}$$

onde θ satisfaz $\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{p+1} = \frac{1}{m+1}$. Usando (3.196), o fato de que $\mathcal{F}(u,v) \geq \alpha_0\big(|u|^{p+1} + |v|^{p+1}\big)$ e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$, obtemos

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C\|(u(t), v(t))\|_V^2 \leq CB(t), \tag{3.202}$$

$$\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \leq \|u(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(t)\|_{p+1}^{p+1} \leq CB(t). \tag{3.203}$$

Segue-se de (3.200)-(3.203) que

$$\begin{aligned} \left|2\int_\Omega g_1(u_t(t))u(t)\,dx\right| &\leq C\|u(t)\|_2^\theta \|u(t)\|_{p+1}^{1-\theta}\|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq CB(t)^{\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{p+1}}\|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &= CB(t)^{\frac{1}{m+1}}\|u_t(t)\|_{m+1}^m, \end{aligned} \tag{3.204}$$

onde usamos o fato de que $\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{p+1} = \frac{1}{m+1}$. Aplicando a desigualdade de Young à estimativa (3.204) obtemos

$$\left|2\int_\Omega g_1(u_t(t))u(t)\,dx\right| \leq \epsilon B(t) + C_\epsilon\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1}. \tag{3.205}$$

Analogamente,

$$\left|2\int_\Omega g_2(v_t(t))v(t)\ dx\right| \leq \epsilon B(t) + C_\epsilon\|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1}. \tag{3.206}$$

Usando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^s), s \in (0, 1/2)$, temos

$$
\begin{aligned}
\left|2((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u)\right| &\leq \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\| \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u\| \\
&\leq \epsilon \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u\|^2 + C_\epsilon \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 \\
&\leq \epsilon C \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + C_\epsilon \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 \\
&\leq \epsilon C \|(u, v)\|_V^2 + C_\epsilon \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 \\
&\leq \epsilon C B(t) + C_\epsilon \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2.
\end{aligned}
\tag{3.207}
$$

Da mesma fora,

$$
\left|2((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t, (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v)\right| \leq \epsilon C B(t) + C_\epsilon \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2. \tag{3.208}
$$

Agora definimos a função

$$
K(t) := \|(u(t), v(t))\|_V^2 - (p+1) \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t)) dx \tag{3.209}
$$

Portanto, de (3.199) e (3.205)-(3.208) segue-se que

$$
\begin{aligned}
N''(t) \geq\ & 2 \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - 2K(t) - 2\epsilon (C+1) B(t) \\
& - C_\epsilon \left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}\right) - C_\epsilon \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.210}
$$

Agora, seja $\delta > 0$ a ser determinado posteriormente. Como $0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d$, temos $K(t) \leq K(t) + \delta(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(t))$. Portanto, de (3.198) temos que

$$
\begin{aligned}
K(t) \leq\ & \|(u(t), v(t))\|_V^2 - (p+1) \int_\Omega \mathcal{F}(u(t), v(t)) dx + \delta \mathcal{E}(0) \\
& - \delta \left[\frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right) - B(t)\right] \\
=\ & \|(u(t), v(t))\|_V^2 - (p+1) B(t) + \delta \mathcal{E}(0) + \delta B(t) \\
& - \frac{\delta}{2} \|(u(t), v(t))\|_V^2 - \frac{\delta}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) \\
=\ & \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \|(u(t), v(t))\|_V^2 + (\delta - p - 1) B(t) + \delta \mathcal{E}(0) - \frac{\delta}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.211}
$$

Aplicando a estimativa (3.211) em (3.210), temos

$$
\begin{aligned}
N''(t) \geq\ & 2\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - 2\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\|(u(t), v(t))\|_V^2 - 2(\delta - p - 1)B(t) \\
& - 2\delta\mathcal{E}(0) + \delta\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) - 2\epsilon(C+1)B(t) \\
& - C_\epsilon\left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}\right) - C_\epsilon\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right) \\
=\ & (2+\delta)\left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2\right) + (\delta - 2)\|(u(t), v(t))\|_V^2 - 2\delta\mathcal{E}(0) \\
& + 2(p + 1 - \delta - \epsilon(C+1))B(t) - C_\epsilon\left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}\right) \\
& - C_\epsilon\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.212}
$$

Escolhemos δ de modo que

$$
2 < \frac{2d(p+1)}{d(p+1) - (p-1)\mathcal{E}(0)} < \delta < p + 1. \tag{3.213}
$$

Essa escolha de δ é possível porque $\mathcal{E}(0) < d$. Por (3.190) e pela escolha de δ obtemos

$$
\begin{aligned}
(\delta - 2)\|(u(t), v(t))\|_V^2 - 2\delta\mathcal{E}(0) &> 2d(\delta - 2)\frac{p+1}{p-1} - 2\delta\mathcal{E}(0) \\
&= \frac{2\delta[d(p+1) - \mathcal{E}(0)(p-1)] - 4d(p+1)}{p-1} > 0.
\end{aligned}
\tag{3.214}
$$

Agora escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$
A := 2(p + 1 - \delta - \epsilon(C+1)) > 0.
$$

Então, segue-se de (3.190), (3.196), (3.212) e (3.214) que

$$
\begin{aligned}
N''(t) &+ C_\epsilon\left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}\right) + C_\epsilon\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right) \\
&\geq AB(t) > \frac{A}{p+1}\|(u(t), v(t))\|_V^2 > \frac{2dA}{p-1} := 2B > 0.
\end{aligned}
\tag{3.215}
$$

Integrando (3.215) de 0 a t temos

$$
\begin{aligned}
N'(t) &+ C_\epsilon\int_0^t \left(\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1}\right) d\tau + C_\epsilon\int_0^t \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\right) d\tau \\
&> Bt + N'(0).
\end{aligned}
\tag{3.216}
$$

Por (3.185), (3.186) e Hipótese 3.6.1,

$$
C_\epsilon\int_0^t \left(\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1}\right) d\tau \leq C(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(t)) < Cd, \quad \forall t \in [0, \infty). \tag{3.217}
$$

Analogamente

$$C_\epsilon \int_0^t \left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2\right) d\tau \leq C\left(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(t)\right) < Cd, \ \ \forall t \in [0, \infty). \tag{3.218}$$

Combinando (3.216), (3.217) e (3.218) obtemos

$$N'(t) > Bt + N'(0) - 2Cd, \quad \forall t \in [0, \infty). \tag{3.219}$$

Integrando (3.219) temos

$$N(t) > Bt^2 + \left(N'(0) - 2Cd\right) t + N(0), \quad \forall t \in [0, \infty). \tag{3.220}$$

Portanto, $N(t)$ tem crescimento quadrático quando $t \to \infty$.

Passo 2: Agora vamos estimar $N(t)$ diretamente. Observe que

$$\|u(t)\|^2 = \int_\Omega \left| u(0) + \int_0^t u_t(\tau) \mathrm{d}\tau \right|^2 dx \leq 2\|u(0)\|^2 + 2t \int_0^t \int_\Omega |u_t(\tau)|^2 \, dx d\tau. \tag{3.221}$$

Similarmente,

$$\|v(t)\|^2 = \int_\Omega \left| v(0) - \int_0^t v_t(t) \, \mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}x \leq 2\|v(0)\|^2 + 2t \int_0^t \int_\Omega |v_t(\tau)|^2 \, dx d\tau. \tag{3.222}$$

Então, de (3.221) e (3.222), segue-se que

$$N(t) = \|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 \leq 2\left(\|u(0)\|^2 + \|v(0)\|^2\right) + 2t \int_0^t \int_\Omega \left(|u_t(\tau)|^2 + |v_t(\tau)|^2\right) dx d\tau. \tag{3.223}$$

Pela desigualdade de Hölder e (3.217) temos

$$\int_0^t \int_\Omega |u_t(\tau)|^2 dx d\tau \leq (|\Omega| t)^{\frac{m-1}{m+1}} \left(\int_0^t \int_\Omega |u_t(\tau)|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{2}{m+1}} < C d^{\frac{2}{m+1}} t^{\frac{m-1}{m+1}}. \tag{3.224}$$

Analogamente,

$$\int_0^t \int_\Omega |v_t(\tau)|^2 dx d\tau \leq (|\Omega| t)^{\frac{r-1}{r+1}} \left(\int_0^t \int_\Omega |v_t(\tau)|^{r+1} dx d\tau \right)^{\frac{2}{r+1}} < C d^{\frac{2}{r+1}} t^{\frac{r-1}{r+1}}. \tag{3.225}$$

Por (3.223)-(3.225), segue-se que

$$N(t) \leq 2\left(\|u(0)\|^2 + \|v(0)\|^2\right) + C\left(d^{\frac{2}{m+1}} t^{\frac{m-1}{m+1}} + d^{\frac{2}{r+1}} t^{\frac{r-1}{r+1}}\right), \quad \forall t \in [0, \infty). \tag{3.226}$$

Como $\frac{2m}{m+1}, \frac{2r}{r+1} < 2$, então (3.226) contradiz o crescimento quadrático de $N(t)$ quando $t \to \infty$, conforme foi mostrado no Passo 1. Portanto, concluímos que a solução fraca (u, v) não pode ser estendida ao intervalo $[0, \infty)$. Isso completa a prova do teorema. ∎

Capítulo 4

Taxas de decaimento da energia

Neste capítulo estudamos a taxa de decaimento uniforme da energia da solução global dada pelo Teorema 3.5.1.

4.0.1 Estimativa de estabilização perturbada

Defina as funções

$$
\begin{aligned}
D(t) &= \int_0^t \Big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} v_t\|^2 \Big) d\tau, \\
G(t) &= \int_0^t \int_\Omega \Big(g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t \Big) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Temos que $D(t) \geq 0$ e $G(t) \geq 0$ e a identidade de energia (3.185) pode ser reescrita como

$$
\mathcal{E}(t) + D(t) + G(t) = \mathcal{E}(0). \tag{4.2}
$$

Vamos mostrar que $\mathcal{E}(t)$ decai como a solução de uma EDO da forma

$$
S'(t) + Q(S(t)) = 0, \ \ S(0) = \mathcal{E}(0), \tag{4.3}
$$

sendo a função Q dada por $Q = (I + C(\Omega)\Phi)^{-1}$ para certa função côncava crescente Φ que se anula em zero. Vamos introduzir as funções Q e Φ como em [45, 46]. Sejam $\varphi_i : [0, \infty) \to [0, \infty), i = 1, 2,$ funções côncavas, contínuas, crescentes, que se anulam em 0 e tais que

$$
\varphi_i(g_i(s)s) \geq |g_i(s)|^2 + s^2, \ \ i = 1, 2. \tag{4.4}
$$

Definimos $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por

$$\Phi(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s) + s, \;\; s \geq 0. \tag{4.5}$$

As funções ϕ_1 e ϕ_2 com as propriedades (4.4) e (4.5) sempre podem ser construídas (veja [51, Exemplos 4.1 e 4.2]). Para ver isso, lembramos de que o damping g_1 e g_2 são funções crescentes monótonas que passam pela origem. Se g_1 e g_2 são limitados acima e abaixo por funções lineares ou superlineares perto da origem, isto é,

$$c_1|s|^m \leq |g_1(s)| \leq c_2|s|^m, \quad c_3|s|^r \leq |g_2(s)| \leq c_4|s|^r, \quad \forall |s| < 1, \tag{4.6}$$

onde $c_j > 0, j = 1,2,3,4$, e $m, r \geq 1$. Definimos

$$\phi_1(s) = c_1^{-\frac{2}{m+1}}(1 + c_2^2)s^{\frac{2}{m+1}}, \; \phi_2(s) = c_3^{-\frac{2}{r+1}}(1 + c_4^2)s^{\frac{2}{r+1}}. \tag{4.7}$$

Afirmamos que as funções em (4.7) satisfaz (4.4). De fato, considere ϕ_1 por exemplo. Então

$$\begin{aligned}\phi_1(g_1(s)s) &= c_1^{-\frac{2}{m+1}}(1 + c_2^2)(g_1(s)s)^{\frac{2}{m+1}} \geq c_1^{-\frac{2}{m+1}}(1 + c_2^2)(c_1|s|^{m+1})^{\frac{2}{m+1}} \\ &= (1 + c_2^2)|s|^2 \geq s^2 + (c_2|s|^m)^2 \geq s^2 + |g_1(s)|^2, \quad \forall |s| < 1.\end{aligned}$$

Em particular, observamos que, se g_1 e g_2 são todos linearmente limitados perto da origem (veja Definição 2.5.2), então (4.7) mostra que ϕ_1 e ϕ_2 são todas funções lineares.

Por outro lado, se g_1 e g_2 são limitadas por funções sublineares próximo a origem, ou seja,

$$c_1|s|^{\theta_1} \leq |g_1(s)| \leq c_2|s|^{\theta_2}, \;\; c_3|s|^{\theta_1} \leq |g_2(s)| \leq c_4|s|^{\theta_2}, \;\; \forall |s| < 1, \tag{4.8}$$

onde $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ e $c_j > 0, j = 1,2,3,4$, então podemos tomar

$$\varphi_1(s) = c_1^{-\frac{2\theta_1}{\theta_1+1}}(1 + c_2^2)s^{\frac{2\theta_1}{\theta_1+1}} \;\text{ e }\; \varphi_2(s) = c_3^{-\frac{2\theta_2}{\theta_2+1}}(1 + c_4^2)s^{\frac{2\theta_2}{\theta_2+1}}. \tag{4.9}$$

Em resumo, por (4.7) e (4.9), existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\varphi_1(s) = C_1 s^{\xi_1} \;\text{ e }\; \varphi_2(s) = C_2 s^{\xi_2} \tag{4.10}$$

onde

$$\xi_1 = \frac{2}{m+1} \;\text{ ou }\; \frac{2\theta_1}{\theta_1+1}, \;\; \xi_2 = \frac{2}{r+1} \;\text{ ou }\; \frac{2\theta_2}{\theta_2+1}. \tag{4.11}$$

Agora definimos

$$\hat{a} = \max\left\{\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}\right\}. \tag{4.12}$$

Notemos que se uma das funções g_1 ou g_2 não é linearmente limitada próximo a origem, então $\hat{a} > 1$ e neste caso definimos

$$\hat{b} := \frac{1}{\hat{a} - 1} > 0. \tag{4.13}$$

As proposições a seguir serão essenciais para que possamos estabelecer os principais resultados deste capítulo.

Proposição 4.0.1 *Considere as Hipóteses 3.1.1 e 3.5.1 e suponha ainda que* $p > 1, (u_0, v_0) \in W_1$ *e* $\mathcal{E}(0) < d$. *Então a solução global* (u, v) *de* (1.1)-(1.2) *dada pelo Teorema 3.5.1 satisfaz*

$$\mathcal{E}(T) \leq \hat{C}_T \left[\Phi(D(T) + G(T)) + \sup_{s \in [0,T]} \left\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\right\}\right], \quad \forall T > 0, \tag{4.14}$$

onde Φ *é dada em* (4.5) *e* $\hat{C}_T$ *é uma constante positiva.*

Demonstração: Seja $T > 0$ fixado. Observe que a solução fraca (u, v) de (1.1)-(1.2) possui a mesma regularidade das funções testes na Definição 3.1.3. Então, substituindo ϕ por u em (3.5) e ψ por v em (3.6) obtemos

$$\begin{aligned}
&(u_t(t), u(t))|_0^T + \int_0^T \left[\left(\|\nabla u(\tau)\|^2 + \|\nabla v(\tau)\|^2\right) - \left(\|u_t(\tau)\|^2 + \|v_t(\tau)\|^2\right)\right] d\tau \\
&\quad + \int_0^T \left[((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u(\tau)) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v(\tau))\right] d\tau \\
&\quad + \int_0^T \left[(g_1(u_t(\tau)), u(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v(\tau))\right] d\tau \\
&= \int_0^T \left[(f_1(u(\tau), v(\tau)), u(\tau)) + (f_2(u(\tau), v(\tau)), v(\tau))\right] d\tau.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Usando (3.163) e (3.165) tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(\tau) d\tau &\leq \frac{1}{2}\left|(u_t(t), u(t))|_0^T\right| + \int_0^T \left(\|u_t(\tau)\|^2 + \|v_t(\tau)\|^2\right) d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \left|((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u(\tau)) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v(\tau))\right| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T \left|(g_1(u_t(\tau)), u(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v(\tau))\right| d\tau \\
&\quad + \frac{M}{2}(p+1)\int_0^T \left(\|u(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\right) d\tau.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Com exceção da integral da energia, vamos estimar cada parcela de (4.16). A fim de evitar o excesso de notação, todas as constantes positivas que aparecerão nas estimativas até o final desta demonstração serão representadas por C, a menos que alguma delas dependa de $\epsilon > 0$ ou de qualquer outro parâmetro que se queira destacar.

Estimativa para $\left|(u_t(t), u(t))|_0^T\right|$. Usamos as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young para obter

$$\begin{aligned}
\left|(u_t(t), u(t))|_0^T\right| &\leq \|u_t(T)\|\|u(T)\| + \|v_t(T)\|\|v(T)\| + \|u_t(0)\|\|u(0)\| + \|v_t(0)\|\|v(0)\| \\
&\leq \epsilon\Big(\|u_t(T)\|^2 + \|v_t(T)\|^2 + \|u_t(0)\|^2 + \|v_t(0)\|^2\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4\epsilon}\Big(\|u(T)\|^2 + \|v(T)\|^2 + \|u(0)\|^2 + \|v(0)\|^2\Big) \\
&\leq \epsilon(E(T) + E(0)) + \frac{1}{2\epsilon}\sup_{s\in[0,T]}\left\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Pela propriedade (iv) do Teorema 3.5.1 e a identidade (4.2) temos

$$\left|(u_t(t), u(t))|_0^T\right| \leq \epsilon\rho(2\mathcal{E}(T) + D(T) + G(T)) + \frac{1}{2\epsilon}\sup_{s\in[0,T]}\left\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\right\}. \tag{4.17}$$

Estimativa para

$$\int_0^T \Big(\|u(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\Big)d\tau.$$

Usando o fato que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < \infty$, segue-se que

$$\|u\|_{2p} \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|. \tag{4.18}$$

Assim,

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} = \int_\Omega |u|^p|u|dx \leq \|u\|_{2p}^p\|u\| \leq \epsilon_0\|u\|_{2p}^{2p} + \frac{1}{4\epsilon_0}\|u\|^2 \leq \epsilon_0 C\|\nabla u\|^{2p} + \frac{1}{4\epsilon_0}\|u\|^2. \tag{4.19}$$

Pelo Teorema 3.5.1 (i) e (iv), concluímos que

$$\|\nabla u\|^2 \leq 2E(t) \leq 2\rho\mathcal{E}(t) \leq 2\rho\mathcal{E}(0). \tag{4.20}$$

Portanto, por (4.19) e (4.20) encontramos que

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \epsilon_0 C(2E(t))^p + \frac{1}{4\epsilon_0}\|u\|^2 \leq 2\epsilon_0 C(2\rho\mathcal{E}(0))^{p-1}E(t) + \frac{1}{4\epsilon_0}\|u\|^2. \tag{4.21}$$

Para cada $\epsilon > 0$, se escolhermos $\epsilon_0 = \dfrac{\epsilon}{2C(2\rho\mathcal{E}(0))^{p-1}}$, então (4.21) implica

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \epsilon E(t) + C_{\epsilon,\rho}(\mathcal{E}(0))^{p-1}\|u\|^2. \tag{4.22}$$

Analogamente temos

$$\|v\|_{p+1}^{p+1} \leq \epsilon E(t) + C_{\epsilon,\rho}(\mathcal{E}(0))^{p-1}\|v\|^2. \tag{4.23}$$

Assim, de (4.22) e (4.23) obtém-se

$$\begin{aligned}&\int_0^T \Big(\|u(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\Big) d\tau \\ &\leq 2\epsilon \int_0^T E(\tau)d\tau + TC_{\epsilon,\rho}(\mathcal{E}(0))^{p-1} \sup_{s\in[0,T]} \big\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\big\}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Estimativa para:

$$\int_0^T \Big(\|u_t(\tau)\|^2 + \|v_t(\tau)\|^2\Big) d\tau.$$

Introduzimos os conjuntos:

$$\begin{aligned}A &:= \{(x,t) \in \Omega \times (0,T); |u_t(x,t)| < 1\}, \\ B &:= \{(x,t) \in \Omega \times (0,T); |u_t(x,t)| \geq 1\}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Da Hipótese 3.1.1, temos $g_1(s)s \geq \alpha|s|^{m+1}$ for $|s| \geq 1$. Usando (4.4) o fato que ϕ_1 é côncava e crescente e a desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u_t\|^2 d\tau &= \int_A |u_t|^2 dxd\tau + \int_B |u_t|^2 dxd\tau \\ &\leq \int_A \phi_1(g_1(u_t)u_t)dxd\tau + \frac{1}{a}\int_B g_t(u_t)u_t dxd\tau \\ &\leq C\phi_1\Big(\int_0^T\int_\Omega g_1(u_t)u_t dxd\tau\Big) + \frac{1}{a}\int_0^T\int_\Omega g_1(u_t)u_t dxd\tau.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Analogamente,

$$\int_0^T \|v_t\|^2 d\tau \leq C\phi_2\Big(\int_0^T\int_\Omega g_2(v_t)v_t dxd\tau\Big) + \frac{1}{a}\int_0^T\int_\Omega g_2(v_t)v_t dxd\tau. \tag{4.27}$$

Seja $C(T,L) = 1 + TL + \frac{1}{\alpha}C_1$ com $C_1 = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$. Então, de (4.26)-(4.27) e da definição de Φ obtemos

$$\int_0^T \Big(\|u_t(\tau)\|^2 + \|v_t(\tau)\|^2\Big) d\tau \leq C\Phi(G(T)) + \frac{1}{a}\Phi(G(T)) \leq C\Phi(G(T)). \tag{4.28}$$

Estimativa para:

$$\int_0^T \Big|(g_1(u_t(\tau)), u(\tau)) + (g_2(v_t(\tau)), v(\tau))\Big| d\tau.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |g_1(u_t)u|\, dxdt &= \int_A |g_1(u_t)u|\, dxdt + \int_B |g_1(u_t)u|\, dxdt \\
&\leq \left(\int_0^T \|u\|_2^2 \,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A |g_1(u_t)|^2 \,\mathrm{dxdt}\right)^{\frac{1}{2}} + \int_B |g_1(u_t)u|\, dxdt \\
&\leq \epsilon \int_0^T E(t)\, dt + C_\epsilon \int_A |g_1(u_t)|^2\, dxdt + \int_B |g_1(u_t)u|\, dxdt.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Por (4.4) e pela desigualdade de Jensen, temos

$$\int_A |g_1(u_t)|^2 dxd\tau \leq \int_A \phi_1\left(g_1(u_t)u\right) dxd\tau \leq \max\{1, T|\Omega|\}\phi_1\left(\int_0^T \int_\Omega g_1(u_t)u_t dxd\tau\right). \tag{4.30}$$

No que se segue, estimamos o último termo do lado direito de (4.29). Da Hipótese 3.1.1, vemos que $|g_1(s)s| \leq b|s|^m$ para $|s| \geq 1$. Portanto, pela desigualdade de Hölder's concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_B |g_1(u_t)u|\, dxdt &\leq \left(\int_B |u|^{m+1}\, dxdt\right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\int_B |g_1(u_t)|^{\frac{m+1}{m}}\, dxdt\right)^{\frac{m}{m+1}} \\
&\leq b^{\frac{1}{m+1}} \left(\int_0^T \|u\|_{m+1}^{m+1}\, dxdt\right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\int_B |g_1(u_t)||u_t|\, dxdt\right)^{\frac{m}{m+1}}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Usando a desigualdade $E(t) \leq d\rho$ para todo $t \geq 0$ no Teorema 3.5.1, vemos que

$$\int_0^T \|u\|_{m+1}^{m+1}\, dxdt \leq C \int_0^T \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{m+1}\, dxdt \leq C \int_0^T E(t)^{\frac{m+1}{2}}\, dt \leq C \int_0^T E(t)\, dt. \tag{4.32}$$

Combinando (4.31) e (4.32) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_B |g_1(u_t)u|\, dxdt &\leq C\left(\int_0^T E(t)\, dt\right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\int_B g_1(u_t)u_t\, dxdt\right)^{\frac{m}{m+1}} \\
&\leq \epsilon \int_0^T E(t)\, dt + C_\epsilon \int_B g_1(u_t)u_t\, dxdt.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Substituindo as estimativas (4.30) e (4.33) em (4.29) resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |g_1(u_t)u|\, dxdt \leq 2\epsilon \int_0^T E(t)\,\mathrm{dt} + C(T, |\Omega|)C_\epsilon\phi_1\left(\int_0^T \int_\Omega g_1(u_t)u_t\, dxdt\right) \\
+ C_\epsilon \int_B g_1(u_t)u_t\, dxdt.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |g_2(v_t)v|dxd\tau \leq 2\epsilon\int_0^T E(\tau)d\tau + C(T,|\Omega|)C_\epsilon\varphi_2\left(\int_0^T\int_\Omega g_2(v_t)v_tdxd\tau\right)\\ + CC_\epsilon\int_B |g_2(v_t)||v_t|dxd\tau.\end{aligned} \tag{4.35}$$

De (4.34)-(4.35) e do fato que $s\leq \Phi(s)$ para todo $s\geq 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\Big|(g_1(u_t(\tau)),u(\tau))+(g_2(v_t(\tau)),v(\tau))\Big|d\tau &\leq 4\epsilon\int_0^T E(t)\ dt + C(T,|\Omega|)C_\epsilon\Phi(G(T))+C_\epsilon G(T)\\ &\leq 4\epsilon\int_0^T E(t)\ dt + C(\epsilon,|\Omega|,T)\Phi(G(T)).\end{aligned} \tag{4.36}$$

Estimativa para:

$$\int_0^T\Big|((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u(\tau))+((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v(\tau))\Big|d\tau.$$

Usando que $D((-\Delta)^{\frac{1}{2}})\hookrightarrow D((-\Delta)^{\frac{s}{2}})$ para $s\in(0,1)$, as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T\Big|((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u(\tau))+((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t(\tau),(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v(\tau))\Big|d\tau\\ &\leq\int_0^T\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u(\tau)\|\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau)\|+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v(\tau)\|\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t(\tau)\|\right)d\tau\\ &\leq C\int_0^T\left(\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u(\tau)\|\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u_t(\tau)\|+\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v(\tau)\|\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v_t(\tau)\|\right)d\tau\\ &\leq\epsilon\int_0^T(\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}u(\tau)\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v(\tau)\|^2)d\tau\\ &+C_\epsilon\int_0^T(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t(\tau)\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t(\tau)\|^2)d\tau\\ &\leq\epsilon\int_0^T E(\tau)d\tau+C_\epsilon\Phi(D(T)).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Agora, aplicando as estimativas (4.17), (4.24), (4.28), (4.36) e (4.37) para (4.16), concluímos

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)\ dt \leq 4\epsilon\int_0^T E(t)\ dt+\frac{\rho\epsilon}{2}(2\mathcal{E}(T)+D(T)+G(T))+C_\epsilon\Phi(D(T))+C(\epsilon,|\Omega|,T)\Phi(G(T))\\ +\left(\frac{1}{2\epsilon}+C_{\epsilon,\rho}(\mathcal{E}(0))^{p-1}T\right)\left\{\|u(s)\|^2+\|v(s)\|^2\right\}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Portanto, para qualquer T fixado, escolhemos $\epsilon=\min\left\{\frac{1}{8},\frac{T}{4\rho}\right\}$ para obter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T E(t)\ dt\leq\frac{T}{8}(2\mathcal{E}(T)+D(T)+G(T))+C_\epsilon\Phi(D(T))+C(\epsilon,|\Omega|,T)\Phi(G(T))\\ +C_{T,\rho}\left(1+\mathcal{E}(0))^{p-1}\right)\sup_{s\in[0,T]}\left\{\|u(s)\|^2+\|v(s)\|^2\right\}.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Como $E(t) \geq \mathcal{E}(t)$ para todo $t \geq 0$ e $\mathcal{E}(t)$ é não crescente, obtemos

$$\int_0^T E(t)\,dt \geq \int_0^T \mathcal{E}(t)\,dt \geq T\mathcal{E}(T). \tag{4.40}$$

Assim, de (4.39) e (4.40), segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{T}{2}\mathcal{E}(T) \leq \frac{T}{4}\mathcal{E}(T) + \frac{T}{8}D(T) + \frac{T}{8}G(T) + C_\epsilon \Phi(D(T)) + C(\epsilon, L, T)\Phi(G(T)) \\ + C_{T,\rho}\left(1 + \mathcal{E}(0)\right)^{p-1}\Big) \sup_{s\in[0,T]} \left\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Dividindo (4.41) por $T > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\mathcal{E}(T) \leq \frac{1}{8}D(T) + \frac{1}{8}G(T) + C(\epsilon, T)\Phi(D(T)) + C(\epsilon, |\Omega|, T)\Phi(G(T)) \\ + C_{T,\rho}\left(1 + \mathcal{E}(0)\right)^{p-1}\Big) \sup_{s\in[0,T]} \left\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Finalmente, como $G(T) \leq \Phi(G(T))$, se definirmos a constante

$$\hat{C}_T = 4\left(\frac{1}{8} + C(\epsilon, T) + C(\epsilon, |\Omega|, T) + C_{T,\rho}\left(1 + \mathcal{E}(0)\right)^{p-1}\Big)\right),$$

então (4.42) implica

$$\mathcal{E}(T) \leq \hat{C}_T\Big[\Phi(D(T) + G(T)) + \sup_{s\in[0,T]}\left\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\right\}\Big]. \tag{4.43}$$

A prova está completa. ■

Como em [25], a proposição a seguir mostra que $\widetilde{W}_1^\delta$ é invariante sob a dinâmica.

Proposição 4.0.2 *Suponha que $\delta > 0$ seja suficientemente pequeno e $\mathcal{E}(0) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta)$. Se (u, v) é a solução global de* (1.1)-(1.2) *dada pelo Teorema 3.5.1 e $(u_0, v_0) \in \widetilde{W}_1^\delta$, então $(u(t), v(t)) \in \widetilde{W}_1^\delta$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Pelo item (i) do Teorema 3.5.1 temos $J(u(t), v(t)) \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)$ e considerando a hipótese $\mathcal{E}(0) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta)$ vem $J(u(t), v(t)) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta)$. Para mostrar que $\|(u, v)\|_V \leq s_0 - \delta$ para todo $t \geq 0$ vamos argumentar por contradição. Como $\|(u_0, v_0)\|_V \leq s_0 - \delta$ e $(u, v) \in C(\mathbb{R}^+; V)$, vamos supor que existe um $t_1 > 0$ tal que $\|(u(t_1), v(t_1))\|_V \leq s_0 - \delta + \epsilon$ para $\epsilon \in (0, \delta)$. De (3.178) obtemos $J(u(t_1), v(t_1)) \geq \mathcal{G}(s_0 - \delta + \epsilon) > \mathcal{G}(s_0 - \delta)$, pois $\mathcal{G}$ é estritamente crescente em $(0, s_0)$. Isto contradiz o fato que $J(u(t), v(t)) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta)$ para todo $t \geq 0$. ■

4.1 Absorção dos termos de ordem inferior

O seguinte lema mostra que os termos de ordem inferiores são absorvidos. Esse resultado é peça central para a prova do decaimento uniforme da energia, conforme veremos mais adiante.

Proposição 4.1.1 *Considere as Hipóteses 3.1.1 e 3.5.1 e suponha ainda que* $p > 1, (u_0, v_0) \in \widetilde{W}_1^\delta$ *e* $\mathcal{E}(0) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta)$ *para algum* $\delta > 0$*. Então, para qualquer* $T > 0$*, existe uma constante* $C_T > 0$ *tal que a solução* (u, v) *de* (1.1)-(1.2) *dada pelo Teorema 3.5.1 satisfaz*

$$\sup_{s\in[0,T]} \left\{\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2\right\} \leq C_T\Phi(D(T) + G(T)). \tag{4.44}$$

Demonstração: Provaremos este resultado através de um argumento padrão de compacidade-unicidade inspirado por Lasiecka e Tataru [45]. Dividimos a prova em dois passos.

Passo 1: Problema limite da hipótese de contradição. Fixemos $T > 0$ e suponhamos que existe uma sequência de dados iniciais

$$\{(u^n(0), v^n(0), u_t^n(0), v_t^n(0))\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{W}_1^\delta \times (L^2(\Omega))^2 \tag{4.45}$$

tal que

$$\mathcal{E}_n(0) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta) < d \tag{4.46}$$

e a correspondente solução fraca (u^n, v^n) satisfaz

$$\sup_{s\in[0,T]} \left\{\|u^n(s)\|^2 + \|v^n(s)\|^2\right\} \geq n\Phi(D_n(T) + G_n(T)), \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4.47}$$

onde

$$D_n(T) = \int_0^T \Big[\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t^n\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t^n\|^2\Big] d\tau \tag{4.48}$$

e

$$G_n(T) = \int_0^T \int_\Omega \Big[g_1(u_t^n)u_t^n + g_2(v_t^n)v_t^n\Big] dx d\tau. \tag{4.49}$$

Então temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(D_n(T) + G_n(T))}{\sup\limits_{s\in[0,T]} \{\|u^n(s)\|^2 + \|v^n(s)\|^2\}} = 0. \tag{4.50}$$

Pelo item (iii) do Teorema (3.5.1) segue-se que

$$\sup_{s\in[0,T]} \left\{\|u^n(s)\|^2 + \|v^n(s)\|^2\right\} \le 2c \sup_{s\in[0,T]} \{E^n(s)\} \le 2cd\rho, \tag{4.51}$$

de onde concluímos que a sequência $\{(u^n, v^n, u_t^n, v_t^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;H)$, onde $H = V \times (L^2(\Omega))^2$ com $V = (H_0^1(\Omega))^2$. Então existe uma subsequência, reindexada por n, tal que

$$(u^n, v^n, u_t^n, v_t^n) \to (u, v, u_t, v_t) \text{ fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H). \tag{4.52}$$

Note que, para todo $\epsilon \in (0,1)$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^{1-\epsilon}(\Omega)$ é compacta e, pelo Teorema de Compacidade de Simon [55], existe uma subsequência tal que

$$(u^n, v^n) \to (u, v) \text{ fortemente em } L^\infty(0,T;(H^{1-\epsilon}(\Omega))^2). \tag{4.53}$$

Além disso, como $(u^n, v^n) \in C(0,T;(H^{1-\epsilon}(\Omega))^2)$, a sequência $\{(u^n, v^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C(0,T;(H^{1-\epsilon}(\Omega))^2)$ e

$$(u, v) \in C(0,T;(H^{1-\epsilon}(\Omega))^2). \tag{4.54}$$

Agora vamos mostrar que $(u, v) = (0, 0)$ em $[0, T]$. Primeiro mostraremos que $(u, v) \in \mathcal{N} \cup \{0\}$. Considere um par de funções teste (θ^1, θ^2) em $(C(\overline{\Omega \times (0,t)}) \cap C([0,t];H_0^1(\Omega)))^2$ tal que $(\theta^1(t), \theta^2(t)) = (0, 0)$ e $(\theta_t^1, \theta_t^2) \in (L^2(\Omega \times (0,t)))^2$. Então por (3.5) e (3.6) temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \big[-(u_t^n(\tau), \theta_t^1(\tau)) + (\nabla u^n(\tau), \nabla\theta^1(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t^n(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} \theta^1(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_1(u_t^n(\tau)), \theta^1(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^t (f_1(u^n(\tau), v^n(\tau)), \theta^1(\tau)) d\tau, \\
&\int_0^t \big[-(v_t^n(\tau), \theta_t^2(\tau)) + (\nabla v^n(\tau), \nabla\theta^2(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t^n(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} \theta^2(\tau)) d\tau + \int_0^t (g_2(v_t^n(\tau)), \theta^2(\tau)) d\tau \\
&= \int_0^t (f_2(u^n(\tau), v^n(\tau)), \theta^2(\tau)) d\tau.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Passaremos ao limite com n ao infinito nas equações em (4.55). De (4.50) e (4.51) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(D_n(T) + G_n(T)) = 0. \tag{4.56}$$

Por (4.28) e (4.56) deduzimos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \Big(\|u_t^n(\tau)\|^2+\|v_t^n(\tau)\|^2\Big)d\tau=0. \tag{4.57}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t (u_t^n(\tau),\theta_t^1(\tau))d\tau=\lim_{n\to\infty}\int_0^t (v_t^n(\tau),\theta_t^2(\tau))d\tau=0, \quad \forall t\in[0,T]. \tag{4.58}$$

Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^n &:= \{(x,t)\in\Omega\times(0,T) : |u_t^n(x,t)|<1\},\\ \mathcal{B}^n &:= \{(x,t)\in\Omega\times(0,T) : |u_t^n(x,t)|\geq 1\}.\end{aligned} \tag{4.59}$$

Pela hipótese sobre g_1, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}}dxd\tau &= \int_{\mathcal{A}^n}|g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}}dxd\tau+\int_{\mathcal{B}^n}|g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}}dxd\tau\\ &\leq bT|\Omega|+\frac{1}{a}b^{\frac{m+1}{m}}\int_0^t\int_\Omega g_1(u_t^n)u_t^n dxd\tau.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Levando em conta (4.56), temos que $\int_0^T\int_\Omega g_1(u_t^n)u_t^n\,dxdt\to 0$ quando $n\to\infty$, assim (4.60) implica

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_0^T\int_\Omega |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}}\,dxdt<\infty. \tag{4.61}$$

Observe que (4.57) implica a menos de subsequência que $u_t^n\to 0$ a.e. in $\Omega\times(0,T)$. Assim, pela continuidade de g_1, teremos $g_1(u_t^n)\to 0$ q.s. em $\Omega\times(0,T)$. Portanto, por (4.61) e o fato de $\frac{m+1}{m}>1$ permite concluir que

$$g_1(u_t^n)\to 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega\times(0,T)). \tag{4.62}$$

De (4.62) tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t (g_1(u_t^n),\theta^1)d\tau=0. \tag{4.63}$$

Analogamente

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t (g_2(v_t^n),\theta^2)d\tau=0. \tag{4.64}$$

Agora usando que

$$|f_j(u^n,v^n)|\leq C(|u|^p+|v^n|^p), \;\; j=1,2, \tag{4.65}$$

(4.53) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t (f_1(u^n(\tau),v^n(\tau)),\theta^1)d\tau = \int_0^t (f_1(u(\tau),v(\tau)),\theta^1)d\tau. \tag{4.66}$$

Analogamente

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t (f_2(u^n(\tau),v^n(\tau)),\theta^2)d\tau = \int_0^t (f_2(u(\tau),v(\tau)),\theta^2)d\tau. \tag{4.67}$$

Sabemos que $\Phi(s) \geq s$ para todo $s \geq 0$. Assim

$$0 \leq D_n(T) \leq D_n(T) + G_n(T) \leq \Phi(D_n(T) + G_n(T)). \tag{4.68}$$

Então (4.56) implica

$$\lim_{n\to\infty} D_n(T) = 0. \tag{4.69}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} &u_t^n \to 0 \text{ fortemente em } L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}})),\\ &v_t^n \to 0 \text{ fortemente em } L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}})), \end{aligned} \tag{4.70}$$

Usando (4.52), (4.58), (4.63), (4.67) e (4.70), podemos passar ao limite em (4.55) para obter

$$\begin{aligned} &\int_0^t \Big[(\nabla u(\tau),\nabla\theta^1(\tau)) + (\nabla v(\tau),\nabla\theta^2(\tau))\Big]d\tau\\ &\quad = \int_0^t \Big[(f_1(u(\tau),v(\tau)),\theta^1(\tau)) + (f_2(u(\tau),v(\tau)),\theta^2(\tau))\Big]d\tau. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Agora fixemos $(\hat\theta_1,\hat\theta_2) \in (H_0^1(\Omega)\cap C(\Omega))^2$ e substituimos $\theta^1(x,\tau) = \tau(t-\tau)\hat\theta_1(x)$ e $\theta^2(x,\tau) = \tau(t-\tau)\hat\theta_2(x)$ em (4.71). Derivando o resultado duas vezes em relação a t obtém-se

$$\begin{aligned} &(\nabla u(t),\nabla\hat\theta_1(t)) + (\nabla v(t),\nabla\hat\theta_2(t))\\ &\quad = \int_\Omega \Big[f_1(u(t),v(t))\hat\theta_1(t) + f_2(u(t),v(t))\hat\theta_2(t)\Big]dx. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Seja $((\hat\theta_1)_n,(\hat\theta_2)_n) \in (H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}))^2$ tal que $((\hat\theta_1)_n,(\hat\theta_2)_n) \to (u(t),v(t))$ em $H_0^1(\Omega)$ para algum t fixado. Tomando $n\to\infty$ em (4.72), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t)\|^2 + \|\nabla v(t)\|^2 &= \int_\Omega \Big[f_1(u(t),v(t))u(t) + f_2(u(t),v(t))v(t)\Big]dx\\ &= (p+1)\int_\Omega F(u(t),v(t))dx. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Concluímos que $(u(t), v(t)) = (0,0)$ ou $(u(t), v(t)) \in \mathcal{N}$ para $t \in [0,T]$.

A seguir, para mostrar que $(u(t), v(t)) = (0,0)$ em $[0,T]$, é suficiente mostrar que $(u(t), v(t)) \in \widetilde{W}_1^\delta \subset W_1$ em $[0,T]$, pois $W_1 \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Lembramos que (u^n, v^n) é limitada em $C([0,T]; (H_0^1(\Omega))^2)$ e que $(u^n, v^n) \to (u,v)$ fortemente em $C(0,T; (H^{1-\epsilon}(\Omega))^2)$. Como a condição inicial $(u^n(0), v^n(0)) \in \widetilde{W}_1^\delta$ e $\mathcal{E}_n(0) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta)$, então a Proposição 4.0.2 nos diz que $(u^n(t), v^n(t)) \in \widetilde{W}_1^\delta$ para todo $t \geq 0$. Então, pela definição de $\widetilde{W}_1^\delta$

$$\|(u^n(t), v^n(t))\|_V \leq s_0 - \delta \text{ and } J(u^n(t), v^n(t)) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta), \ \forall t \geq 0. \tag{4.74}$$

Notemos que para cada t fixado em $[0,T]$, temos

$$\|(u(t), v(t))\|_V \leq \liminf_{n\to\infty} \|(u^n(t), v^n(t))\|_V \leq s_0 - \delta. \tag{4.75}$$

Além disso, como F é contínua, então (3.165) e a convergência dominada por Lebesgue implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^L F(u^n, v^n)\, dx = \int_0^L F(u,v)\, dx. \tag{4.76}$$

Para mostra que $\mathcal{G}(s_0 - \delta) \geq J(u(t), v(t))$ em $[0,T]$, notemos que

$$\mathcal{G}(s_0 - \delta) \geq J(u^n(t), v^n(t)) = \frac{1}{2}\{\|\nabla u^n\|^2 + \|\nabla v^n\|^2\} - \int_\Omega F(u,v) dx. \tag{4.77}$$

Tendo em conta (4.75) e (4.76), podemos tomar o limite inferior na desigualdade (4.77) para obter

$$\mathcal{G}(s_0 - \delta) \geq J(u(t), v(t)) \text{ on } [0,T]. \tag{4.78}$$

Portanto $(u(t), v(t)) \in \widetilde{W}_1^\delta \subset W_1$ em $[0,T]$. Assim, por definição de W_1, necessariamente temos

$$(u(t), v(t)) = (0,0), \quad \text{em} \quad [0,T]. \tag{4.79}$$

Passo 2: Normalização da sequência $\{(u^n, v^n)\}$. Defina

$$N_n := \sup_{s\in[0,T]} \Big(\|u^n(s)\|^2 + \|v^n(s)\|^2\Big)^{1/2}. \tag{4.80}$$

De (4.53) e (4.79) segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} N_n = 0. \tag{4.81}$$

Definimos $y^n := \dfrac{u^n}{N_n}$ e $w^n := \dfrac{v^n}{N_n}$ então é claramente temos

$$\sup_{s\in[0,T]} \Big\{ \|y^n(s)\|^2 + \|w^n(s)\|^2 \Big\} = 1. \tag{4.82}$$

Cada (u^n, v^n) satisfaz a identidade variacional

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \big[-(y_t^n(\tau), \theta_t^1(\tau)) + (\nabla y^n(\tau), \nabla\theta^1(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} y_t^n(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}\theta^1(\tau)) d\tau + \int_0^t \Big(\frac{g_1(u_t^n(\tau))}{N_n}, \theta^1(\tau)\Big) d\tau \\
&= \int_0^t \Big(\frac{f_1(u^n(\tau), v^n(\tau))}{N_n}, \theta^1(\tau)\Big) d\tau, \\
&\int_0^t \big[-(w_t^n(\tau), \theta_t^2(\tau)) + (\nabla w^n(\tau), \nabla\theta^2(\tau))\big] d\tau \\
&\quad + \int_0^t ((-\Delta)^{\alpha_2/2} w_t^n(\tau), (-\Delta)^{\alpha_2/2}\theta^2(\tau)) d\tau + \int_0^t \Big(\frac{g_2(v_t^n(\tau))}{N_n}, \theta^2(\tau)\Big) d\tau \\
&= \int_0^t \Big(\frac{f_2(u^n(\tau), v^n(\tau))}{N_n}, \theta^2(\tau)\Big) d\tau.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

onde $(\theta^1, \theta^2) \in (C(\overline{\Omega \times (0,t)}) \cap C([0,t]; H_0^1(\Omega)))^2$ é tal que $\theta^1(0) = \theta^1(t) = \theta^2(0) = \theta^2(t) = 0$ e $(\theta_t^1, \theta_t^2) \in (L^2(\Omega \times (0,t)))^2$. Pela hipótese de contradição (4.50), temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(D_n(T) + G_n(T))}{N_n^2} = 0, \tag{4.84}$$

e juntamente com (4.28) implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \frac{1}{N_n^2} \Big(\|u_t^n(\tau)\|^2 + \|v_t^n(\tau)\|^2 \Big) d\tau = 0,$$

que é equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big(\|y_t^n(\tau)\|^2 + \|w_t^n(\tau)\|^2 \Big) d\tau = 0. \tag{4.85}$$

Denotamos por $\mathcal{E}_n$ a energia total correspondente a solução (u^n, v^n). As desigualdades (iii) e (iv) do Teorema 3.5.1 mstram que $0 \le \mathcal{E}_n(t) \le d\rho$ para todo $t \ge 0$. Além disso, de (4.14), (4.82) e (4.84), obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{E}_n(T)}{N_n^2} \le \tilde{C}. \tag{4.86}$$

A identidade energia (4.2) implica que $\mathcal{E}_n(t) + D_n(t) + G_n(t) = \mathcal{E}_n(0)$,e assim $\frac{\mathcal{E}_n(t)}{N_n^2} \leq \frac{\mathcal{E}_n(0)}{N_n^2}$. Pelo Teorema 3.5.1 (iv) concluímos que a sequência

$$\frac{E_n(t)}{N_n^2} = \frac{1}{2}\big\{\|\nabla y^n\|^2 + \|\nabla w^n\|^2 + \|y_t^n\|^2 + \|w_t^n\|^2\big\}, \tag{4.87}$$

é uniformemente limitada em $[0,T]$, onde $E_n(t)$ é a energia quadrática correspondente a (u^n, v^n). Portanto, $\{(y^n, w^n, y_t^n, w_t^n)\}$ é uma sequência limitada em $L^\infty(0,T;\mathcal{H})$. Portanto, a menos de subsequência,

$$(y^n, w^n) \to (y, w) \quad \text{fracamente-estrela em} \quad L^\infty(0,T;V). \tag{4.88}$$

Analogamente ao caso com (u^n, v^n), o teorema de compacidade de Simon implica que

$$(y^n, w^n) \to (y, w) \quad \text{fortemente em} \quad L^\infty\big(0,T;(H^{1-\epsilon}(\Omega))^2\big). \tag{4.89}$$

De (4.82) e (4.89) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in[0,T]} \Big\{\|y^n(s)\|^2 + \|w^n(s)\|^2\Big\} = \sup_{s\in[0,T]} \Big\{\|y(s)\|^2 + \|w(s)\|^2\Big\} = 1. \tag{4.90}$$

Assim, $(y, w) \neq (0, 0)$.

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \Big[\Big(\frac{g_1(u_t^n(\tau))}{N_n}, \theta^1(\tau)\Big) + \Big(\frac{g_2(v_t^n(\tau))}{N_n}, \theta^2(\tau)\Big)\Big] d\tau = 0. \tag{4.91}$$

De fato, como $(\theta^1, \theta^1) \in (C(\overline{\Omega \times (0,t)}))^2$ é suficiente provar que $\frac{g_j(u_t^n)}{N_n} \to 0$ em $L^1(\Omega \times (0,T))$, $j = 1, 2$. Provaremos que

$$\frac{g_1(u_t^n)}{N_n} \to 0 \quad \text{fortemente em} \quad L^{\frac{m+1}{m}}(\Omega \times (0,T)). \tag{4.92}$$

Relembramos os conjuntos $\mathcal{A}^n$ e $\mathcal{B}^n$ dados em (4.59). Como $N_n \to 0$ quando $n \to \infty$, podemos tomar n suficientemente grande tal que $N_n < 1$. Usando a desigualdade de Hölder deduzimos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \left|\frac{g_1(u_t^n)}{N_n}\right|^{\frac{m+1}{m}} dx d\tau \\
&\leq C(T, |\Omega|) \left(\int_{A_n} \left|\frac{g_1(u_t^n)}{N_n}\right|^2 dx d\tau\right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{1}{N_n^2} \int_{B_n} |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Por (4.30), (3.7) e pela desigualdade de Jensen, temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \left| \frac{g_1(u_t^n)}{N_n} \right|^{\frac{m+1}{m}} dxd\tau \\
&\leq C(T, |\Omega|) \left(\frac{1}{N_n^2} \int_{A_n} \varphi(g_1(u_t^n)u_t^n)\, dxd\tau \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{\beta^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha N_n^2} \int_{B_n} g_1(u_t^n)u_t^n\, dxd\tau \qquad (4.93)\\
&\leq C(T, |\Omega|) \left(\frac{\Phi(G(T))}{N_n^2} \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{\beta^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha} \frac{\Phi(G(T))}{N_n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Isso prova (4.92). Analogamente,

$$\frac{g_2(v_t^n)}{N_n} \to 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega \times (0,T)). \qquad (4.94)$$

A seguir mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \Big[\Big(\frac{f_1(u^n(\tau), v^n(\tau))}{N_n}, \theta^1(\tau) \Big) + \Big(\frac{f_2(u^n(\tau), v^n(\tau))}{N_n}, \theta^2(\tau) \Big) \Big] d\tau = 0. \qquad (4.95)$$

Usando (3.166), vemos que

$$\int_0^t \int_\Omega \Big| \frac{f_j(u^n(\tau), v^n(\tau))}{N_n} \theta^j(\tau) \Big| dxd\tau \leq C \int_0^t \int_\Omega (|y^n||u^n|^{p-1} + |w^n||v^n|^{p-1}) dxd\tau. \qquad (4.96)$$

Pela desigualdade de Hölder, (4.53), (4.79) e (4.88) segue-se que

$$\int_0^t \int_\Omega |y^n||u^n|^{p-1} dxd\tau \leq \Big(\int_0^t \int_\Omega |y^n|^p dxd\tau \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^t \int_\Omega |u^n|^p dxd\tau \Big)^{\frac{p-1}{p}} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad (4.97)$$

Analogamente,

$$\int_0^t \int_\Omega |w^n||v^n|^{p-1} dxd\tau \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad (4.98)$$

Assim, (4.95) é estabelecido.

Agora provaremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \Big[((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} y_t^n(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} \theta^1(\tau)) + ((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} w_t^n(\tau), (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} \theta^2(\tau)) \Big] d\tau = 0. \qquad (4.99)$$

De fato, como $N_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de (4.68) temos

$$\frac{1}{N_n^2} D_n(T) \leq \frac{\Phi(D_n(T) + G_n(T))}{N_n^2}. \qquad (4.100)$$

Por (4.84) e (4.100) obtemos que

$$\begin{aligned} &y_t^n \to 0 \ \text{ fortemente em } \ L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}})) \\ &w_t^n \to 0 \ \text{ fortemente em } \ L^2(0,T;D((-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}})). \end{aligned} \tag{4.101}$$

Como $\theta^j \in C(\overline{\Omega \times (0,t)}), j = 1,2$, por (4.101) obtemos (4.99).

Usando (4.85), (4.88), (4.91), (4.95) e (4.99), podemos passar ao limite em (4.83) para obter

$$\int_0^t \Big[(\nabla y(\tau), \nabla\theta^1(\tau)) + (\nabla w(\tau), \nabla\theta^2(\tau))\Big] d\tau = 0, \quad \forall t \in (0,T). \tag{4.102}$$

Agora, fixemos arbitrariamente $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \in (H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}))^2$ e substituímos $\theta^1(x,\tau) = \tau(t-\tau)\hat{\theta}_1(x)$ e $\theta^2(x,\tau) = \tau(t-\tau)\hat{\theta}_2(x)$ em (4.102). Derivando o resultado duas vezes obtemos

$$(\nabla y, \nabla\hat{\theta}_1) + (\nabla w, \nabla\hat{\theta}_2) = 0, \quad \forall t \in (0,T). \tag{4.103}$$

que por densidade implica $(y,w) = (0,0)$ em V para todo $t \in (0,T)$. Isso contradiz o fato (4.90). Portanto a prova da Proposição 4.1.1 está completa. ■

4.2 Taxas de decaimento da energia

Eta seção é dedicada a provar o decaimento uniforme das soluções fracas do problema (1.1)-(1.2).

Teorema 4.2.1 (Taxa de decaimento uniforme) *Suponhamos que as Hipóteses 3.1.1 e 3.5.1 sejam satisfeitas. Suponhamos também que $p > 1$, $\mathcal{E}(0) \leq \mathcal{G}(s_0 - \delta)$ para algum $\delta > 0$. Seja $\varphi_j : [0,\infty) \to [0,\infty)$ contínua, estritamente crescente, côncava próximo a origem e satisfazendo*

$$\varphi_j(g_j(s)s) \geq |g_j(s)|^2 + s^2 \ \text{ para } \ |s| < 1, j = 1,2. \tag{4.104}$$

Defina a função $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por

$$\Phi(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s) + s, \ \ s \geq 0. \tag{4.105}$$

Então, para dado $T > 0$, existe uma função côncava crescente $Q = (I + \hat{C}\Phi)^{-1}$, onde $\hat{C} = \hat{C}(T, \mathcal{E}(0))$ tal que

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq S\Big(\frac{1}{T} - 1\Big) \ \forall t \geq T, \tag{4.106}$$

onde S satisfaz a EDO

$$S'(t) + Q(S(t)) = 0, \quad S(0) = \mathcal{E}(0). \tag{4.107}$$

Demonstração: Combinando as Proposições 4.0.1 e 4.1.1 temos

$$\mathcal{E}(T) \leq \hat{C}_T(1 + C_T)\Phi(D(T) + G(T)). \tag{4.108}$$

Definimos $\Phi_T = \hat{C}_T(1 + C_T)\Phi(D(T) + G(T))$. Assim, por (4.2) temos

$$\mathcal{E}(T) \leq \Phi_T(D(T) + G(T)) = \Phi_T(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)),$$

o que implica

$$\mathcal{E}(T) + \Phi_T^{-1}(\mathcal{E}(T)) \leq \mathcal{E}(0). \tag{4.109}$$

Considerando a estimativa anterior em intervalos da forma $[mT, (m+1)T], m \in \mathbb{N}$, temos

$$\mathcal{E}((m+1)T) + \Phi_T^{-1}(\mathcal{E}((m+1)T)) \leq \mathcal{E}(mT), \;\; m \in \mathbb{N}. \tag{4.110}$$

Por [45, Lema 3.3] segue-se que

$$\mathcal{E}(mT) \leq S(m), \;\; \forall m = 0, 1, 2, ... \tag{4.111}$$

onde S é a solução da EDO

$$S' + \left[I - (I + \Phi_T^{-1})^{-1}\right] S = 0, \quad S(0) = \mathcal{E}(0), \tag{4.112}$$

onde I denota a função identidade. É possível mostrar que

$$I - (I + \Phi_T^{-1})^{-1} = (I + \Phi_T)^{-1}. \tag{4.113}$$

Assim a equação (4.112) pode ser rescrita como

$$S' + (I + \Phi_T)^{-1} S = 0, \quad S(0) = \mathcal{E}(0), \tag{4.114}$$

que possui uma única solução definida em $[0, \infty)$. Como Φ_T é crescente e passa pela origem, temos que $(I + \Phi_T)^{-1}$ é também crescente e tende a zero. Então escrevemos (4.114) na forma $S' = -(I + \Phi_T)^{-1} S$, de onde segue que $S(t)$ é decrescente e $\lim\limits_{t \to 0} S(t) = 0$.

Para qualquer $t > T > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t = mT + \delta$ com $0 \leq \delta < T$, portanto $m = \dfrac{t}{T} - \dfrac{\delta}{T} > \dfrac{t}{T} - 1$. Por (4.111) e pelo fato de $\mathcal{E}(t)$ e $S(t)$ serem monótonas decrescentes obtemos

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(mT + \delta) \leq \mathcal{E}(mT) \leq S(m) \leq S\Big(\frac{t}{T} - 1\Big), \quad \forall t > T, \tag{4.115}$$

o que completa a prova do teorema. ■

Corolário 4.2.1 (Decaimento exponencial) *Sob as hipóteses do Teorema 4.2.1, se g_1 e g_2 são linearmente limitadas próximo a origem, então $Q(s) = \omega s$ para algum ω dependendo de $\mathcal{E}(0)$ e de T. A energia total $\mathcal{E}(t)$ e a energia $E(t)$ decaem exponencialmente conforme a estimativa a seguir*

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq e^{\omega}\mathcal{E}(0)e^{-(\omega/T)t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.116}$$

Demonstração: Como g_1 e g_2 são linearmente limitadas próximo a origem, então (4.10) mostra que φ_1 e φ_2 são lineares, de onde seque que Φ_T é linear e, portanto, $(I + \Phi_T)^{-1}$ é também linear. Assim, (4.114) é da forma $S' + \omega S = 0$, para alguma constante $\omega > 0$, cuja solução única é $S(t) = \mathcal{E}(0)e^{-\omega t}$. Então por (4.115) temos

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{-\omega\left(\frac{t}{T}-1\right)} = e^{\omega}\mathcal{E}(0)e^{-(\omega/T)t}. \tag{4.117}$$

A prova está completa. ■

Corolário 4.2.2 (Decaimento polinomial) *Sob as hipóteses do Teorema 4.2.1, se ao menos uma das funções g_1 e g_2 não é linearmente limitada próximo a origem e satisfazem*

$$c_1|s|^{\hat{m}} \leq |g_1(s)| \leq C_2|s|^{\hat{m}}, \;\; c_3|s|^{\hat{r}} \leq |g_2(s)| \leq c_4|s|^{\hat{r}}, \quad \forall |s| < 1, \tag{4.118}$$

onde $\hat{m}, \hat{r} > 0$ e $c_j > 0, j = 1, \ldots, 4$, então a EDO (4.107) pode ser aproximada por

$$\hat{S}'(t) + C_0\hat{S}(t)^{\hat{a}} = 0, \quad \hat{S}(t_0) = S(t_0), \quad t \geq t_0 > 0, \tag{4.119}$$

para algum $t_0 > 0$, e a energia decai conforme a estimativa

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq C(1+t)^{-\hat{b}}, \quad \forall t \geq t_0, \tag{4.120}$$

onde $\hat{b} = (\hat{a} - 1)^{-1}$ e $\hat{a} > 0$ são como em (4.12) e (4.13) e dependem das constantes $\hat{m}$ e $\hat{r}$. As constantes C_0 e C dependem de T e $\mathcal{E}(0)$.

Demonstração: Se ao menos uma das funções g_1 e g_2 não é linearmente limitada próximo a origem, então por (4.10) podemos escolher $\varphi_1(s) = C_1 s^{\xi_1}$ e $\varphi_2(s) = C_2 s^{\xi_2}$, onde $0 < \xi_1, \xi_2 \leq 1$ são dados em (4.11). Note que $\hat{a} = \max\left\{\dfrac{1}{\xi_1}, \dfrac{1}{\xi_2}\right\} > 1$ conforme em (4.12).

Seja $h = \varphi_1 + \varphi_2$. Existem $h_b = Cs^{\min\{\xi_1,\xi_2\}}$ e h_s tais que $h = h_b + h_s$ satisfaz as hipóteses de [55, Corolario 1]. Segue-se que existe um $t_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{E}(t) \leq \hat{S}\Big(\frac{t}{T} - 1\Big), \quad \forall t \geq t_0, \tag{4.121}$$

onde $\hat{S}$ é solução da equação

$$\hat{S}'(t) + C_0 \hat{S}(t)^{\hat{a}} = 0, \quad \hat{S}(t_0) = S(t_0). \tag{4.122}$$

Como a solução de (4.122) é

$$\hat{S}(t) = \left[C_0(\hat{a} - 1)(t - t_0) + S(t_0)^{1-\hat{a}}\right]^{-\frac{1}{\hat{a}-1}}, \quad \forall t \geq t_0, \tag{4.123}$$

basta tomar $\hat{b} = \frac{1}{\hat{a}-1}$ e a prova está completa. ■

Capítulo 5

Dinâmica de longo prazo

Neste capítulo, investigamos o comportamento de longo prazo das soluções do problema (1.1)-(1.2) sujeito a pequenas perturbações de forças externas autônomas. Mais precisamente, consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} u_t + g_1(u_t) = f_1(u,v) + \epsilon h_1, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} v_t + g_2(v_t) = f_2(u,v) + \epsilon h_2, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, & \text{em } \Omega, \\ v(0) = v_0, v_t(0) = v_1, & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $\epsilon > 0$ é uma constante positiva suficientemente pequena. Nosso principal objetivo é provar a existência de atrator global e exponencial para o sistema dinâmico associado e sua estabilidade sob perturbação.

5.1 Preliminares e boa colocação

Nesta seção investigamos a existência global de soluções fraca e forte para o problema (5.1).

5.1.1 Hipóteses e notações

Inicialmente, introduziremos algumas hipóteses e notações que serão utilizadas neste capítulo.

Hipótese 5.1.1 *Suponhamos que*

(i) As forças externas $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$.

(ii) Existe uma função $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\nabla F = (f_1, f_2) \tag{5.2}$$

e existem $p \geq 1$ e $C > 0$ tais que

$$|\nabla f_i(u,v)| \leq C(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

(iii) Existem constantes $\beta_0 > 0$ e $m_F > 0$ de modo que

$$F(u,v) \leq \beta_0(|u|^2 + |v|^2) + m_F, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

onde $0 \leq \beta_0 < \frac{\lambda_1}{2}$ e $\lambda_1 > 0$ denota a constante de Poincaré. Além disso,

$$\nabla F(u,v) \cdot (u,v) - F(u,v) \leq \beta_0(|u|^2 + |v|^2) + m_F, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

(iv) Em relação aos dampings não lineares g_i, suponhamos que

$$g_i \in C^1(\mathbb{R}), \;\; g_i(0) = 0, \tag{5.6}$$

e que existem constantes $m, M_1, q \geq 1$, tais que

$$m \leq g_i'(u) \leq M_1(1 + |u|^{q-1}), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

e, se $q \geq 3$, existem $l > q - 1$ e $M_2 > 0$ tais que

$$g_i(u)u \geq M_2|u|^l, \quad |u| \geq 1. \tag{5.8}$$

Observação 5.1.1 *Note que pelo Teorema do Valor Médio existe $\zeta \in (0,1)$ tal que*

$$g_i(u) - g_i(v) = g_i'(\zeta u + (1-\zeta)v)(u - v).$$

Multiplicando a desigualdade acima por $u - v$ e usando (5.7) obtemos facilmente que

$$(g_i(u) - g_i(v))(u - v) \geq m|u - v|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Observação 5.1.2 *Um exemplo simples de função F na Hipótese 5.1.1 é a função*

$$F(u,v) = -|u+v|^4 + |u+v|^2 - c_1|uv|^2, \quad c_1 > 0.$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= \frac{\partial F}{\partial u} = -4(u+v)^3 + 2(u+v) - 2c_1uv^2, \\ f_2(u,v) &= \frac{\partial F}{\partial v} = -4(u+v)^3 + 2(u+v) - 2c_1u^2v. \end{aligned}$$

Como

$$F(u,v) \leq \max_{\xi\in\mathbb{R}}\{-\xi^4 + \xi^2\} = \frac{1}{4},$$

as hipóteses (5.3)-(5.4) *são válidas com $m_F = 1/4$ e $p = 3$. Observe que*

$$\nabla F(u,v)\cdot(u,v) - F(u,v) \leq -3|u+v|^4 + |u+v|^2 \leq \frac{1}{12} \leq m_F,$$

então (5.5) *também é válida.*

5.1.2 Boa colocação

Nesta subseção, iremos estabelecer a boa colocação do problema (5.1). Para isto, vamos considerar o espaço de Hilbert

$$H = H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \tag{5.10}$$

munido com o produto interno usual, isto é, dados $U_1 = (u_1, v_1, w_1, z_1), U_2 = (u_2, v_2, w_2, z_2) \in H$, então definimos

$$(U_1, U_2)_H = (\nabla u_1, \nabla u_2) + (\nabla v_1, \nabla v_2) + (w_1, w_2) + (z_1, z_2).$$

Dado $U = (u, v, w, z) \in H$, a norma de U é dada por

$$\|U\|_H^2 = \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|w\|^2 + \|z\|^2.$$

Usando as notações acima, podemos escrever o problema (5.1) na forma do seguinte problema de Cauchy equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \mathbb{A}U = \mathbb{F}(U), \\ U(0) = U_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1) \in H, \end{cases} \tag{5.11}$$

onde

$$U(t) = (u(t), v(t), \phi(t), \varphi(t)) \in H, \quad \phi = u_t, \quad \varphi = v_t,$$

com H definido como em (5.10) e sendo $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset H \to H$ um operador não linear definido por

$$\mathbb{A}U = \begin{pmatrix} -\phi \\ -\varphi \\ -\Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1}\phi + g_1(\phi) \\ -\Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2}\varphi + g_2(\varphi) \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

cujo domínio $D(\mathbb{A})$ é dado por

$$\begin{aligned} D(\mathbb{A}) = \big\{ & U = (u, v, \phi, \varphi) \in H : \phi \in H_0^1(\Omega), \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ & -\Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1}\phi + g_1(\phi) \in L^2(\Omega), \\ & -\Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2}\varphi + g_2(\varphi) \in L^2(\Omega) \big\}. \end{aligned}$$

A força externa é representada por uma função não linear $\mathbb{F} : H \to H$ definida por

$$\mathbb{F}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1(u, v) + \epsilon h_1 \\ f_2(u, v) + \epsilon h_2 \end{pmatrix}.$$

Temos o seguinte resultado de existência global para o problema (5.11).

Teorema 5.1.1 *Suponhamos que as hipóteses 5.1.1 sejam satisfeitas, então temos:*

(i) *Se o dado inicial $U(0) = U_0 \in H$, então o problema* (5.11) *possui uma única solução fraca $U \in C([0, \infty), H)$.*

(ii) *Se $U_0 \in D(\mathbb{A})$, então a solução fraca é uma solução forte.*

(iii) *Se $U^1(t)$ e $U^2(t)$ são duas soluções para o problema* (5.11)*, então existe uma constante positiva $C_0 = C(U^1(0), U^2(0))$, tal que*

$$\|U^1(t) - U^2(t)\|_H \leq e^{C_0 T}\|U^1(0) - U^2(0)\|_H, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5.13}$$

Demonstração: Notemos que a prova foi apresentada rigorosamente no Capítulo 3. Faremos aqui um resumo dos principais passos. Sabemos que o operador $\mathbb{A}$ é monótono maximal e que por (5.3) $\mathbb{F}$ é localmente Lipschitz em H (veja Lema 3.1.2). Aplicando-se a teoria dos operadores monótonos maximais não lineares (veja [23, 7]) obtemos a prova dos itens (i)-(ii). A dependência contínua da solução $U(t)$ em relação aos dados iniciais pode ser obtida usando uma técnica clássica para a diferença de duas soluções (veja Lema 3.2.1), o que prova o item (iii). ■

De acordo com o Teorema 5.1.1, podemos definir uma família de operadores $S_\epsilon(t) : H \to H$ dada por

$$S_\epsilon(t)(u_0, v_0, u_1, v_1) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)), \quad t \geq 0, \tag{5.14}$$

onde (u, v, u_t, v_t) é a única solução fraca do problema (5.11). Assim, o par $(H, S_\epsilon(t))$ constitui um sistema dinâmico que irá descrever o comportamento de longo prazo para as soluções do problema (5.11).

5.1.3 Identidade energia

Aqui apresentaremos alguns lemas técnicos que serão utilizados mais adiante.

A energia ao longo das soluções do sistema (5.1) é definida como

$$E(t) = \frac{1}{2}\|(u, v, u_t, v_t)\|_H^2 = \frac{1}{2}\big(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\big), \tag{5.15}$$

e a energia total é definida por

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) = E(t) - \int_\Omega F(u, v)\, dx - \epsilon \int_\Omega (h_1 u + h_2 v) dx. \tag{5.16}$$

Assim temos o lema a seguir.

Lema 5.1.1 *Seja* $U = (u, v, u_t, v_t)$ *uma solução forte de* (5.11). *Então a energia total dada em* (5.16) *satisfaz*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\epsilon(t) \leq -\big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2\big) - m(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2). \tag{5.17}$$

Além disso, existe uma constante positiva C_0 *tal que*

$$C_0\|(u, v, u_t, v_t)\|_H^2 - C_F \leq \mathcal{E}_\epsilon(t) \leq C_F(1 + \|(u, v, u_t, v_t)\|_H^{p+1}), \quad \forall \epsilon \in [0, 1]. \tag{5.18}$$

Demonstração: Multiplicando a primeira equação em (1.1) por u_t, a segunda por v_t, respectivamente, e fazendo integração por partes, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_\epsilon(t) = -\big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2\big) - \int_\Omega (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t)dx$$

Portanto, usando o fato que $g_i(0) = 0$ e a propriedade (5.9), obtemos facilmente (5.17).

De (5.4) e da desigualdade de Poincaré segue

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(u,v)dx &\leq \beta_0(\|u\|^2 + \|v\|^2) + m_F|\Omega| \\ &\leq \frac{\beta_0}{\lambda_1}(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + m_F|\Omega| \\ &\leq \frac{\beta_0}{\lambda_1}\|(u,v,u_t,v_t)\|_H^2 + m_F|\Omega|,\end{aligned}$$

e assim

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta_0}{\lambda_1}\right)\|(u,v,u_t,v_t)\|_H^2 - m_F|\Omega| - \epsilon\int_\Omega (h_1u + h_2v)dx.$$

Tomando

$$C_0 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2\beta_0}{\lambda_1}\right) > 0, \tag{5.19}$$

e usando a estimativa

$$\epsilon\int_\Omega (h_1u + h_2v)\,dx \leq C_0\lambda_1\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) + \frac{1}{4C_0\lambda_1}\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right), \tag{5.20}$$

obtemos a primeira estimativa em (5.18) com

$$C_F = m_F|\Omega| + \frac{1}{4C_0\lambda_1}\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right).$$

Usando (5.3) e a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega F(u,v)\,dx\& \leq C\big(1 + \|\nabla u\|^{p+1} + \|\nabla v\|^{p+1}\big) \leq C\big(1 + (\|\nabla u\| + \|\nabla v\|)^{p+1}\big). \tag{5.21}$$

Assim, usando as estimativas (5.20) e (5.21) vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\epsilon(t) &= \frac{1}{2}\|(u,v,u_t,v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \int_\Omega F(u,v)\,dx - \epsilon\int_\Omega (h_1u + h_2v)dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|(u,v,u_t,v_t)\|_H^2 + C\big(1 + (\|\nabla u\| + \|\nabla v\|)^{p+1}\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\|(u,v,u_t,v_t)\|_H^2 + C\big(1 + \|(u,v,u_t,v_t)\|_H^{p+1}\big),\end{aligned}$$

donde concluímos que existe $C_F > 0$ satisfazendo a segunda desigualdade em (5.18). A prova está completa. ■

5.2 Quase-estabilidade

O lema a seguir nos fornece uma estimativa de quase-estabilidade, que é a principal ferramenta para mostrar a existência de atrator global e suas propriedades.

Lema 5.2.1 *Suponhamos que a Hipótese 5.1.1 seja satisfeita. Sejam $B \subset H$ um conjunto positivamente invariante e limitado e $S_\epsilon(t)U^i = (u^i(t), v^i(t), u_t^i(t), v_t^i(t))$, $i = 1, 2$, uma solução fraca de (5.1) com condição inicial $U^i \in B$. Então existem constantes $\omega_B, \vartheta_B, C_B > 0$ independentes de ϵ tais que*

$$E(t) \leq \vartheta_B E(0) e^{-\omega_B t} + C_B \sup_{\sigma \in [0,t]} (\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2), \quad \forall t \geq 0, \tag{5.22}$$

para algum $\theta \geq 2$, onde $u = u^1 - u^2$ e $v = v^1 - v^2$.

Demonstração: Usando as notações

$$F_i(u,v) = f_i(u^1, v^1) - f_i(u^2, v^2),\ G_1(u) = g_1(u^1) - g_1(u^2),\ G_2(v) = g_2(v^1) - g_2(v^2),$$

então as funções $u = u^1 - u^2$ e $v = v^1 - v^2$ satisfazem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} u_t + G_1(u_t) = F_1(u,v), & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} - \Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} v_t + G_2(v_t) = F_2(u,v), & \text{em } \Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{5.23}$$

com condições de fronteira do tipo Dirichlet e dado inicial

$$(u(0), v(0), u_t(0), v_t(0)) = U^1 - U^2. \tag{5.24}$$

Multiplicando as equações (5.23) por u e v, respectivamente, e integrando o resultado em $[0,T] \times \Omega$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t)dt = &-\frac{1}{2}\int_\Omega (uu_t + vv_t)dx\Big|_0^T + \int_0^T (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2)dt \\ &- \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \big((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u + (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v\big) dxdt \\ &- \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (G_1(u_t)u + G_2(v_t)v)dxdt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (F_1(u,v)u + F_2(u,v)v)dxdt. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Faremos estimativas adequadas para cada parcela do lado direito de (5.25).

Passo 1. Das desigualdades de Hölder e Poincaré, deduzimos

$$\int_\Omega (uu_t + vv_t)dx\Big|_0^T \leq C(E(T) + E(0))$$

para alguma constante $C > 0$. Usando a hipótese (5.9) obtemos

$$\int_0^T (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2)dt \leq \frac{1}{m}\int_0^T\int_\Omega (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t)dxdt. \tag{5.26}$$

Passo 2. Pela desigualdade de Young e pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{\frac{s}{2}})$ for $0 < s < 1$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u dxdt &\leq \int_0^T \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u\| dt \\ &\leq C\int_0^T \|\nabla u\|\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\| dt \\ &\leq \frac{1}{4}\int_0^T \|\nabla u\|^2 dt + C\int_0^T \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 dt.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_0^T\int_\Omega (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v dxdt \leq \frac{1}{4}\int_0^T \|\nabla v\|^2 dt + C\int_0^T \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2 dt.$$

Então

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega \big((-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t (-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u + (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t (-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v\big) dxdt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T E(t)dt + C\int_0^T (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2)dt.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Passo 3. Pela desigualdade de Young e por (5.9) obtemos

$$\int_0^T\int_\Omega G_1(u_t)udxdt \leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega G_1(u_t)u_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega G_1(u_t)\frac{|u|^2}{u_t}dxdt.$$

Usando a hipótese (5.7) temos que

$$\int_\Omega G_1(u_t)udx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega G_1(u_t)u_t dx + \frac{M_1}{2}\int_\Omega (1 + |u_t^1|^{q-1} + |u_t^2|^{q-1})|u|^2 dx. \tag{5.28}$$

A fim de estimar o segundo termo do lado direito de (5.28), vamos considerar três casos separadamente:

Caso 1. $q = 1$. Neste caso, é fácil ver que

$$\int_\Omega (1 + |u_t^1|^{q-1} + |u_t^2|^{q-1})|u|^2 dx \leq 3\|u\|^2 \left(1 + \int_\Omega (g_1(u_t^1)u_t^1 + g_1(u_t^2)u_t^2) dx\right).$$

Caso 2. $q \geq 3$. Usamos (5.8) e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}\int_\Omega (1 + |u_t^1|^{q-1} + |u_t^2|^{q-1})|u|^2 dx &\leq C\|u\|^2_{\frac{2l}{l-q+1}} \left(\int_\Omega (1 + |u_t^1|^l + |u_t^2|^l) dx\right)^{\frac{q-1}{l}} \\ &\leq C\|u\|^2_{\frac{2l}{l-q+1}} \left(\int_\Omega (1 + g_1(u_t^1)u_t^1 + g_1(u_t^2)u_t^2) dx\right)^{\frac{q-1}{l}} \\ &\leq C\|u\|^2_{\frac{2l}{l-q+1}} \left(\int_\Omega (1 + g_1(u_t^1)u_t^1 + g_1(u_t^2)u_t^2) dx\right),\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\frac{q-1}{l} < 1$.

Caso 3. $1 < q < 3$. Assim como no Caso 2, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega (1 + |u_t^1|^{q-1} + |u_t^2|^{q-1})|u|^2 dx &\leq C\|u\|^2_{\frac{4}{3-q}} \left(\int_\Omega (1 + |u_t^1|^2 + |u_t^2|^2) dx\right)^{\frac{q-1}{2}} \\ &\leq C\|u\|^2_{\frac{4}{3-q}} \left(\int_\Omega (1 + g_1(u_t^1)u_t^1 + g_1(u_t^2)u_t^2) dx\right)^{\frac{q-1}{2}} \\ &\leq C\|u\|^2_{\frac{4}{3-q}} \left(\int_\Omega (1 + g_1(u_t^1)u_t^1 + g_1(u_t^2)u_t^2) dx\right).\end{aligned}$$

Combinando a três últimas estimativas e (5.28) concluímos que existe $C > 0$ e $\theta \geq 2$ tais que

$$\int_\Omega G_1(u_t) u dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega G_1(u_t)u_t dx + C\|u\|_\theta^2 \left(\int_\Omega (1 + g_1(u_t^1)u_t^1 + g_1(u_t^2)u_t^2) dx\right). \tag{5.29}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega G_2(v_t) v dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega G_2(v_t)v_t dx + C\|v\|_\theta^2 \left(\int_\Omega (1 + g_2(v_t^1)v_t^1 + g_1(v_t^2)v_t^2) dx\right). \tag{5.30}$$

Assim, como $U^1, U^2 \in B$, de (5.17) e (5.18) temos que existe $C_B > 0$ tal que

$$\int_\Omega (1 + g_1(u_t^1)u_t^1 + g_1(u_t^2)u_t^2) dx \leq C_B,$$
$$\int_\Omega (1 + g_2(v_t^1)v_t^1 + g_1(v_t^2)v_t^2) dx \leq C_B.$$

Combinando as duas últimas estimativas acima com (5.29) e (5.30) e aplicando a imersão $L^{2\theta}(\Omega) \hookrightarrow L^\theta(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (G_1(u_t)u + G_2(v_t)v) dxdt &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t) dxdt \\ &\quad + C_{B,T} \sup_{\sigma\in[0,T]} \left(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\right).\end{aligned}$$

Passo 4. Usando (5.3), a desigualdade de Hölder com expoentes conjugados $\tilde{\theta} = \frac{2\theta}{\theta-1}$, 2θ e 2, e a imersão (em 2D) $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, $1 \leq s < \infty$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega F_1(u,v)udx &\leq C(\nabla f_1)(\|u\|_{2\theta} + \|v\|_{2\theta})\|v\| \\ &\leq C_B\big(\|u\|_{2\theta} + \|v\|_{2\theta}\big)\|v\| \\ &\leq C_B\big(\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2\big)\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde

$$C(\nabla f_1) = C\big(1 + \|u^1\|_{(p-1)\tilde{\theta}}^{p-1} + \|u^2\|_{(p-1)\tilde{\theta}}^{p-1} + \|v^1\|_{(p-1)\tilde{\theta}}^{p-1} + \|v^2\|_{(p-1)\tilde{\theta}}^{p-1}\big).$$

Analogamente,

$$\int_\Omega F_2(u,v)vdx \leq C_B\big(\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2\big).$$

Combinando as duas últimas estimativas, temos que existe uma constante $C_{B,T} > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (F_1(u,v)u + F_2(u,v)v)dxdt \leq C_{B,T} \sup_{\sigma\in[0,T]} \big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big). \tag{5.32}$$

Substituindo as estimativas (5.26)-(5.32) em (5.25), concluímos que existem constantes $C_B > 0$ e $C_{B,T} > 0$ tais que

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \leq C(E(T) + E(0)) \\ &+ C_B \int_0^T (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2)dt \\ &+ C_B \int_0^T \int_\Omega (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t)dxdt \\ &+ C_{B,T} \sup_{\sigma\in[0,T]} \big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big).\end{aligned} \tag{5.33}$$

Passo 5. Multiplicando a primeira e a segunda equações de (5.23) por u_t e v_t, respectivamente, e integrando em $[s,T] \times \Omega$ vem

$$\begin{aligned}E(T) = E(s) &- \int_0^T (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2)dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t)dxdt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega (F_1(u,v)u_t + F_2(u,v)v_t)dxdt.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Como

$$-\int_0^T\int_\Omega (G_1(u_t)u_t+G_2(v_t)v_t)dxdt \leq 0,$$

temos

$$E(T) \leq E(s)+\int_0^T\int_\Omega (F_1(u,v)u_t+F_2(u,v)v_t)dxdt. \tag{5.35}$$

Similarmente à (5.31), deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega F_1(u,v)u_t dx &\leq C_B(\|u\|_{2\theta}+\|v\|_{2\theta})\|u_t\| \\ &\leq \epsilon\|u_t\|^2+\frac{C_B}{4\epsilon}\big(\|u\|_{2\theta}^2+\|v\|_{2\theta}^2\big).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Da mesma forma,

$$\int_\Omega F_2(u,v)v_t dx \leq \epsilon\|v_t\|^2+\frac{C_B}{4\epsilon}\big(\|u\|_{2\theta}^2+\|v\|_{2\theta}^2\big). \tag{5.37}$$

Portanto,

$$\int_\Omega (F_1(u,v)u_t+F_2(u,v)v_t)dx \leq \epsilon E(t)+\frac{C_B}{4\epsilon}\big(\|u\|_{2\theta}^2+\|v\|_{2\theta}^2\big). \tag{5.38}$$

Substituindo (5.38) em (5.35) com $\epsilon=\frac{1}{T}$ temos que

$$E(T) \leq E(s)+\frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt+TC_B\int_0^T \big(\|u\|_{2\theta}^2+\|v\|_{2\theta}^2\big)dt$$

Integrando a desigualdade anterior sobre $[0,T]$ em relação a s, concluímos que existe uma constante $C_{B,T}>0$ tal que

$$TE(T) \leq 2\int_0^T E(t)dt+C_{B,T}\sup_{\sigma\in[0,T]}\big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2+\|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big). \tag{5.39}$$

Passo 6. As estimativas (5.34) e (5.38) com $\epsilon=1$ implicam

$$\begin{aligned}\int_0^T (\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2)dt+\int_0^T\int_\Omega (G_1(u_t)u_t+G_2(v_t)v_t)dxdt \\ \leq E(T)+E(0)+\int_0^T E(t)dt+TC_B\sup_{\sigma\in[0,T]}\big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2+\|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big).\end{aligned} \tag{5.40}$$

Substituindo a estimativa acima em (5.33) temos que

$$\int_0^T E(t)dt \leq C_B(E(T)+E(0))+C_{B,T}\sup_{\sigma\in[0,T]}\big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2+\|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big).$$

Essa estimativa e (5.39) nos fornecem

$$TE(T) \leq C_B(E(T)+E(0)) + C_{B,T} \sup_{\sigma\in[0,T]} \big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big).$$

Escolhendo $T > 2C_B$, obtemos

$$E(T) \leq \gamma_T E(0) + C_{B,T} \sup_{\sigma\in[0,T]} \big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big), \tag{5.41}$$

onde

$$\gamma_T = \frac{C_B}{T - C_B} < 1.$$

Definindo

$$\chi_m = \sup_{\sigma\in[m,(m+1)T]} \big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big), \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

a estimativa (5.41) pode ser reescrita como

$$E(T) \leq \gamma_T E(0) + C_{B,T}\chi_0. \tag{5.42}$$

Aplicando iteradamente a estimativa (5.42) em intervalos da forma $[mT, (m+1)T]$, $m \in \mathbb{N}$, deduzimos

$$\begin{aligned} E(mT) &\leq \gamma_T^m E(0) + C_{B,T} \sum_{k=1}^{m} \gamma_T^{m+1-l} \chi_{k-1} \\ &\leq \gamma_T^m E(0) + \frac{C_{B,T}}{1-\gamma_T} \sup_{\sigma\in[0,mT]} \big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big). \end{aligned}$$

Para todo $t \geq 0$, existem $m \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, T)$ tais que $t = mT + r$. Então, por (5.13) obtemos

$$E(t) \leq E(mT) \leq \gamma_T^{-1}\gamma_T^{\frac{t}{T}} E(0) + \frac{C_{B,T}}{1-\gamma_T} \sup_{\sigma\in[0,t]} \big(\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2\big).$$

Logo,

$$E(t) \leq \vartheta_B E(0) e^{-\omega_B t} + C_B \sup_{\sigma\in[0,t]} (\|u(\sigma)\|_{2\theta}^2 + \|v(\sigma)\|_{2\theta}^2), \quad \forall t \geq 0,$$

com

$$\vartheta_B = \gamma_T^{-1}, \quad \omega_B = -\frac{\ln(\gamma_T)}{T}, \quad C_B = \frac{C_{B,T}}{1-\gamma_T}.$$

A prova do lema está completa. ■

Lema 5.2.2 *Suponhamos que a Hipótese 5.1.1 seja satisfeita. Então o sistema dinâmico* $(H, S_\epsilon(t))$ *é gradiente, ou seja, existe uma função de Lyapunov estrita* Φ_ϵ *definida em* H*. Além disso,*

$$\Phi_\epsilon(U) \to \infty \Longleftrightarrow \|U\|_H \to \infty. \tag{5.43}$$

Demonstração: Considere a função $\Phi_\epsilon : H \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_\epsilon(S_\epsilon(t)U) = \frac{1}{2}\|(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))\|_H^2 - \int_\Omega F(u(t), v(t))\, dx - \epsilon \int_\Omega (h_1 u + h_2 v) dx. \tag{5.44}$$

Seja $U = (u_0, v_0, u_1, v_1) \in H$, então (5.17) implica que

$$\frac{d}{dt}\Phi_\epsilon(S_\epsilon(t)U) \leq -\big(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2\big) - m(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2). \tag{5.45}$$

Portanto $t \mapsto \Phi_\epsilon(S_\epsilon(t)U_0)$ é uma função não crescente.

Agora suponhamos que $\Phi_\epsilon(S_\epsilon(t)U_0) = \Phi(U_0), \ \forall t \geq 0$. Usando (5.45), podemos concluir que

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}} u_t\|^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}} v_t\|^2 = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$u_t = v_t = 0, \quad \text{para todo } t \geq 0, \text{ q.s. em } \Omega.$$

Logo $u_t(t) = u_0$ e $v_t(t) = v_0$ para todo $t \geq 0$. Assim temos que $U(= (u_0, v_0, 0, 0)$ é um ponto estacionário de $(H, S_\epsilon(t))$. Isso prova que Φ_ϵ é uma função de Lyapunov estrita.

Da segunda desigualdade em (5.18) temos

$$\Phi_\epsilon(U) \leq C_F(1 + \|U\|_H^{p+1}), \quad \forall t \geq 0. \tag{5.46}$$

Fazendo $\Phi_\epsilon(U) \to \infty$ na estimativa anterior, temos que $\|U\|_H \to \infty$. Por outro lado, pela primeira desigualdade (5.18) obtemos

$$\|U\|_H^2 \leq \frac{\Phi_\epsilon(U) + C_F}{C_0}, \tag{5.47}$$

de onde concluímos que $\|U\|_H \to \infty$ implica $\Phi_\epsilon(U) \to \infty$, o que prova (5.43). ∎

Lema 5.2.3 *Suponhamos que a Hipótese 5.1.1 seja satisfeita. Então o conjunto* $\mathcal{N}_\epsilon$ *dos pontos estacionário do sistema dinâmico* $(H, S_\epsilon(t))$ *é limitado em* H*.*

Demonstração: Seja $U \in \mathscr{N}_\epsilon$ arbitrário. Sabemos que $U = (u, v, 0, 0)$ e satisfaz as equações

$$-\Delta u = f_1(u, v) + \epsilon h_1, \tag{5.48}$$

$$-\Delta v = f_2(u, v) + \epsilon h_2. \tag{5.49}$$

Multiplicando (5.48) e (5.49) por u e v, respectivamente, e integrando sobre Ω, obtemos

$$\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 = \int_\Omega (f_1(u,v)u + f_2(u,v)v)\,dx + \epsilon \int_\Omega (h_1 u + h_2 v) dx,$$

Por (5.4) e (5.5) temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f_1(u,v)u + f_2(u,v)v)\,dx &\leq 2\beta_0 \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) + 2m_F|\Omega| \\ &\leq \frac{2\beta_0}{\lambda_1}\left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2\right) + 2m_F|\Omega|, \end{aligned}$$

e então, à luz de (5.19),

$$4C_0\|U\|_H^2 \leq 2m_F|\Omega| + \epsilon \int_\Omega (h_1 u + h_2 v) dx.$$

Assim, usando a estimativa (5.20), deduzimos

$$3C_0\|U\|_H^2 \leq 2m_F|\Omega| + \frac{1}{4C_0\lambda_1}\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right), \tag{5.50}$$

o que completa a demonstração. ■

Agora estamos em posição de enunciar e provar o principal resultado sobre a dinâmica de longo prazo para o nosso sistema.

Teorema 5.2.1 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema* 5.1.1, *temos:*

(i) O sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ definido em (5.14) *é quase-estável sobre qualquer conjunto positivamente invariante e limitado $B \subset H$.*

(ii) O sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ possui atrator global $\mathfrak{A}_\epsilon \subset H$, que é caracterizado como sendo a variedade instável $\mathfrak{A}_\epsilon = W^u(\mathscr{N}_\epsilon)$ do conjunto dos pontos estacionários

$$\mathscr{N}_\epsilon = \left\{ (u, v, 0, 0) \in H \;\middle|\; \begin{array}{l} -\Delta u = f_1(u,v) + \epsilon h_1 \\ -\Delta u = f_2(u,v) + \epsilon h_2 \end{array} \right\}.$$

(iii) Qualquer trajetória se estabiliza no conjunto $\mathscr{N}_\epsilon$, ou seja, para qualquer $U \in H$, temos

$$\lim_{t\to+\infty} dist_H(S(t)U, \mathscr{N}_\epsilon) = 0.$$

Em particular, existe um atrator global minimal $\mathfrak{A}_\epsilon^{\min}$ dado por $\mathfrak{A}_\epsilon^{\min} = \mathscr{N}_\epsilon$.

(iv) O atrator $\mathfrak{A}_\epsilon$ tem dimensão fractal finita $dim_f^H \mathfrak{A}_\epsilon < \infty$.

(v) Se $\alpha_i \in (0, 1/2), i = 1, 2$, o atrator global $\mathfrak{A}_\epsilon$ é limitado em

$$H_1 = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2.$$

Além disso, toda trajetória $U = (u, v, u_t, v_t)$ possui a regularidade

$$\|(u,v)\|^2_{(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2} + \|(u_t, v_t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^2} + \|(u_{tt}, v_{tt})\|^2_{(L^2(\Omega))^2} \le R_1^2, \tag{5.51}$$

para alguma constante $R_1 > 0$ independente de $\epsilon \in [0, 1]$.

(vi) O sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ possui um atrator exponencial generalizado. Mais precisamente, dado $\delta \in (0, 1]$ existe um atrator exponencial generalizado $\mathfrak{A}^{\exp}_{\epsilon,\delta} \subset H$, com dimensão fractal finita no espaço estendido $\widetilde{H}_{-\delta}$, definido como interpolação dos espaços

$$\widetilde{H}_0 := H, \quad e \quad \widetilde{H}_{-1} := [L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)]^2.$$

Demonstração: (i) Consideremos um conjunto $B \subset H$ positivamente invariante e limitado para o sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$. Denotemos $S_\epsilon(t)U^i = (u^i(t), v^i(t), u_t^i(t), v_t^i(t))$ para $U^i \in B$, $i = 1, 2$, e sejam $u = u^1 - u^2, v = v^1 - v^2$. Segue de (5.13) que

$$\|S_\epsilon(t)U^1 - S_\epsilon(t)U^2\|_H^2 \le a(t)\|U^1 - U^2\|_H^2, \tag{5.52}$$

com $a(t) = e^{C_0 T}$. Consideremos o espaço $X = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ munido da semi-norma

$$n_X(u, v) := \left(\|u\|_{2\theta}^2 + \|v\|_{2\theta}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como a imersão (em 2D) $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\theta}(\Omega)$ é compacta, então n_X é uma semi-norma compacta em X.

Pelo Lema 5.2.1 obtemos

$$\|S_\epsilon(t)U^1 - S_\epsilon(t)U^2\|_H^2 \leq b(t)\|U_1 - U_2\|_H^2 + c(t) \sup_{s\in[0,t]} \left[n_X(u(s), v(s))\right]^2, \tag{5.53}$$

onde $b(t) = \vartheta_B e^{-\omega_B t}$ e $c(t) = C_B$. É imediato que

$$b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} b(t) = 0.$$

Como $B \subset H$ é limitado, temos que $c(t)$ localmente limitada em $[0, \infty)$. Assim temos que o sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ é quase-estável em qualquer conjunto positivamente invariante e limitado $B \subset H$.

(ii) Como o sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ é quase-estável, pelo Teorema 2.3.5, temos que $(H, S_\epsilon(t))$ é assintoticamente compacto. Portanto, tendo em vista os Lemas 5.2.2 e 5.2.3, podemos aplicar o Teorema 2.3.3 para concluir que $(H, S_\epsilon(t))$ possui um atrator global dado por $\mathfrak{A}_\epsilon = W^u(\mathscr{N}_\epsilon)$.

(iii) Combinando o Teorema 5.2.1-(ii) e o Teorema 2.3.4 o resultado segue.

(iv) De acordo com o que foi visto acima, em particular, o sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ é quase-estável sobre o atrator $\mathfrak{A}_\epsilon$. Assim, pelo Teorema 2.3.6, temos que o atrator $\mathfrak{A}_\epsilon$ tem dimensão fractal finita $\dim_f^H \mathfrak{A}_\epsilon < \infty$.

(v) Como o sistema $(H, S_\epsilon(t))$ é quase-estável no atrator $\mathfrak{A}_\epsilon$, segue do Teorema 2.3.7 que qualquer trajetória completa $U = (u, v, u_t, v_t)$ possui a seguinte regularidade

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\Omega)), \quad v_t \in L^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\Omega)),$$

e

$$u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega)), \quad v_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\Omega)).$$

Além disso, existe $R > 0$ tal que

$$\|(u_t, v_t)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^2} + \|(u_{tt}, v_{tt})\|^2_{(L^2(\Omega))^2} \leq R^2. \tag{5.54}$$

De (5.54), (1.1), da imersão $L^\infty(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}; D((-\Delta)^{\alpha_i}))$ para $0 < \alpha_i < 1/2$ e do fato de que $0 < \epsilon < 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\Delta u\| &\leq \|u_{tt}\| + \|(-\Delta)^{\alpha_1} u_t\| + \|g_1(u_t)\| + \|f_1(u, v)\| + \|h_1\| \leq C, \\ \|\Delta v\| &\leq \|v_{tt}\| + \|(-\Delta)^{\alpha_2} v_t\| + \|g_2(v_t)\| + \|f_2(u, v)\| + \|h_2\| \leq C. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Portanto obtemos (5.51) a partir de (5.54) e (5.55). Como os atratores globais $\mathcal{A}_\epsilon$ são também caracterizados por

$$\mathfrak{A}_\epsilon = \big\{U(0) \in H : U \text{ é uma trajetória completa do semigrupo } S_\epsilon(t)\big\},$$

concluímos que $\mathfrak{A}_\epsilon$ é limitado em H_1.

(vi) Consideremos $\Phi_R^\epsilon = \{U : \Phi_\epsilon(U) \leq R\}$, onde Φ_ϵ é a função de Lyapunov estrita considerada no Lema 5.2.2. Então temos que o conjunto Φ_R^ϵ é positivamente invariante, limitado e absorvente para algum $R > 0$ suficientemente grande. De fato, primeiramente provaremos que o conjunto Φ_R^ϵ é limitado. Suponhamos por contradição que Φ_R^ϵ não seja limitado, então obtemos uma sequência (U^n) em Φ_R^ϵ tal que $\|U^n\|_H \to \infty$. Pelo Lema 5.2.2 concluímos que $\Phi_\epsilon(U^n) \to \infty$, o que contradiz o fato de que $\Phi_\epsilon(U^n) \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, Φ_R^ϵ é limitado. Provemos que Φ_R^ϵ é positivamente invariante. Dado $U \in \Phi_R^\epsilon$, como $[0, \infty) \ni t \longmapsto \Phi(S(t)U)$ é não crescente, deduzimos que

$$\Phi(S_\epsilon(t)U) \leq \Phi(U) \leq R, \quad \forall t \geq 0.$$

Consequentemente $S_\epsilon(t)\Phi_R^\epsilon \subset \Phi_R^\epsilon$ para todo $t \geq 0$, donde concluímos que Φ_R^ϵ é positivamente invariante. Agora provaremos que Φ_R^ϵ é um conjunto absorvente para algum $R > 0$ suficientemente grande. De fato, dado um conjunto limitado $B \subset H$, então

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_H(S(t)B, \mathfrak{A}_\epsilon) = 0.$$

Portanto existe $\tau > 0$ tal que

$$S(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon := \big\{U \in H : \operatorname{dist}_H(U, \mathfrak{A}_\epsilon) < 1\big\}, \quad \forall t \geq \tau.$$

Como $\mathcal{O}_\epsilon$ é limitado, podemos tomar $R > 0$ suficientemente grande tal que $\mathcal{O}_\epsilon \subset \Phi_R^\epsilon$. Assim,

$$S(t)B \subset \mathcal{O}_\epsilon \subset \Phi_R^\epsilon, \quad \forall t \geq \tau.$$

Isso mostra que Φ_R^ϵ é um conjunto absorvente. Portanto, o sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ é quase-estável em $\mathcal{B}_\epsilon := \Phi_R^\epsilon$.

Para uma solução $U(t)$ com dado inicial $z = U(0) \in \mathcal{B}_\epsilon$, pela invariância positiva de $\mathcal{B}_\epsilon$, concluímos que existe $C_{\mathcal{B}_\epsilon} > 0$ tal que para qualquer $0 \leq t \leq T$,

$$\|U_t(t)\|_{\widetilde{H}_{-1}} \leq C_{\mathcal{B}_\epsilon},$$

de onde obtemos, para quaisquer t_1 e t_2 com $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$,

$$\|S_\epsilon(t_1)z - S_\epsilon(t_2)z\|_{\widetilde{H}_{-1}} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|U_t(\tau)\|_{\widetilde{H}_{-1}} d\tau \leq C_{\mathcal{B}_\epsilon}|t_1 - t_2|. \tag{5.56}$$

De (5.56), concluímos que para qualquer $z \in \mathcal{B}_\epsilon$, a função $t \mapsto S_\epsilon(t)z$ é Hölder contínua no espaço estendido $\widetilde{H}_{-1}$ com expoente $\delta = 1$. Aplicando o Teorema 2.3.8 obtemos a existência de um atrator exponencial generalizado cuja dimensão fractal é finita em $\widetilde{H}_{-1}$.

Agora provaremos a existência de atrator exponencial generalizado em $\widetilde{H}_{-\delta}$ para todo $\delta \in (0, 1)$. Pelo teorema de interpolação, temos

$$\|U\|_{\widetilde{H}_{-\delta}} \leq C\|U\|^{1-\delta}_{\widetilde{H}_0}\|U\|^{\delta}_{\widetilde{H}_{-1}} \leq C^{1-\delta}_{\mathcal{B}_\epsilon}\|U\|^{\delta}_{\widetilde{H}_{-1}}.$$

Em particular,

$$\|S_\epsilon(t)U - S_\epsilon(t)U\|_{\widetilde{H}_{-\delta}} \leq C^{1-\delta}_{\mathcal{B}_\epsilon} \|S_\epsilon(t)U - S_\epsilon(t)U\|^{\delta}_{\widetilde{H}_{-1}}.$$

Usando a última estimativa em (5.56) obtemos

$$\|S_\epsilon(t)U - S_\epsilon(t)U\|_{\widetilde{H}_{-\delta}} \leq C_{\mathcal{B}_\epsilon}|t_1 - t_t|^{\delta}, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

Usando novamente o Teorema 2.3.8 concluímos que existe um atrator exponencial generalizado com dimensão fractal finita em $\widetilde{H}_{-\delta}$. A prova está completa. ■

5.3 Semicontinuidade superior de atratores globais

Nesta seção, vamos investigar a continuidade do atrator $\mathfrak{A}_\epsilon$ quando $\epsilon \to \epsilon_0$. Primeiramente, provamos que esta família de atratores é contínua em um subconjunto denso residual de $[0, 1]$, usando os resultados abstratos recentes em [38, Teorema 5.2], onde os resultados foram obtidos como uma extensão dos resultados anteriores em [4]. Finalmente, a semicontinuidade superior é provada para todo $\epsilon_0 \in [0, 1]$.

Definição 5.3.1 *Sejam X um espaço métrico completo e $\mathfrak{A}_\lambda$ uma família de atratores globais para um semigrupo $S_\lambda(\cdot)$ sobre X, onde λ pertence a um espaço métrico completo Λ. Dizemos que o atrator global $\mathfrak{A}_\lambda$ é*

- ***Semicontínuo superiormente*** *em* $\lambda_0 \in \Lambda$ *se*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \mathrm{dist}_X(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_{\lambda_0}) = 0.$$

- ***Semicontínuo inferiormente*** *em* $\lambda_0 \in \Lambda$ *se*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \mathrm{dist}_X(\mathfrak{A}_{\lambda_0}, \mathfrak{A}_\lambda) = 0.$$

- ***Contínuo*** *em* $\lambda_0 \in \Lambda$ *se*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \mathrm{d}_X(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_{\lambda_0}) = 0.$$

Definição 5.3.2 *Seja X um espaço métrico e $A \subset X$. Dizemos que A é* ***denso em nenhum lugar*** *se* $int\bar{A} = \varnothing$. *Um conjunto é* ***residual*** *se seu complemento for a união enumerável de conjuntos densos em nenhum lugar.*

O resultado em [38, Teorema 5.2] fornece condições suficientes para a continuidade de atratores globais em um subconjunto residual e denso.

Teorema 5.3.1 *Seja Λ um espaço métrico completo e $S_\lambda(t)$ uma família parametrizada de semigrupos em um espaço métrico X. Suponhamos que*

(L1) $S_\lambda(\cdot)$ *possui atrator global* $\mathfrak{A}_\lambda$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$;

(L2) Existe um subconjunto limitado D de X tal que $\mathfrak{A}_\lambda \subset D$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$;

(L3) Para $t > 0$, $S_\lambda(t)x$ *é contínua em* λ, *uniformemente para x em subconjuntos limitados de X.*

Então $\mathfrak{A}_\lambda$ *é contínuo sobre todo* $\lambda \in J$, *onde J é um conjunto residual e denso em* Λ.

O seguinte lema será usado para obter uma limitação uniforme com relação ao parâmetro ϵ do nosso problema (veja [23, Remark 7.5.8]).

Lema 5.3.1 *Sob as hipóteses do Lema 5.2.2, a seguinte desigualdade é válida:*

$$\sup_{U \in \mathfrak{A}_\epsilon} \Phi_\epsilon(U) \leq \sup_{U \in \mathscr{N}_\epsilon} \Phi_\epsilon(U).$$

Lema 5.3.2 *O sistema dinâmico* $(H, S_\epsilon(t))$ *possui um conjunto absorvente e limitado* $\mathcal{B}$ *independente de* $\epsilon \in [0,1]$.

Demonstração: Por (5.18) e pelo Lema 5.3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{U\in\mathfrak{A}_\epsilon} \|U\|_H^2 &\leq \frac{\sup\limits_{U\in\mathfrak{A}_\epsilon} \Phi_\epsilon(U) + C_F}{C_0} \\
&\leq \frac{\sup\limits_{U\in\mathcal{N}_\epsilon} \Phi_\epsilon(U) + C_F}{C_0} \\
&\leq \frac{C_F \sup\limits_{U\in\mathcal{N}_\epsilon} \|U\|_H^{p+1} + 2C_F}{C_0}.
\end{aligned}$$

Assim, por (5.50), concluímos que existe uma constante $C_0 > 0$ independente de ϵ tal que

$$\sup_{U\in\mathfrak{A}_\epsilon} \|U\|_H^2 \leq R_0, \quad \forall \epsilon \in [0,1].$$

Portanto a bola fechada $\mathcal{B} = B(0, R_0+1) = \{U \in \mathcal{H} : \|U\|_H \leq R_0 + 1\}$ é um conjunto absorvente e limitado independentemente de $\epsilon \in [0,1]$. Isso conclui a prova. ■

Teorema 5.3.2 (Continuidade residual) *Sob as hipóteses do Teorema 5.2.1, existe um conjunto* J *residual e denso em* $[0,1]$ *tal que* $\mathfrak{A}_\epsilon$ *é contínuo em* $\epsilon_0 \in J$*, isto é,*

$$\lim_{\epsilon\to\epsilon_0} \mathrm{d}_H(\mathfrak{A}_\epsilon, \mathfrak{A}_{\epsilon_0}) = 0, \quad \forall \epsilon_0 \in J. \tag{5.57}$$

Demonstração: Aplicaremos o Teorema 5.3.1 com $\Lambda = [0,1]$. O argumento segue as mesmas idéias da prova do Teorema 4.1 em [48]. O Teorema 5.2.1-(ii) nos mostra que a propriedade (L1) é satisfeita. Consideramos o conjunto absorvente e limitado $\mathcal{B}$ independente de ϵ dado pelo Lema 5.3.2. Portanto a propriedade (L2) é satisfeita. Falta mostrar a propriedade (L3).

Seja B um subconjunto limitado de H. Dados $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0,1]$ e $U_0 \in B$, denotamos

$$S_{\epsilon_i}(t)U_0 = (u^i(t), v^i(t), u_t^i(t), v_t^i(t)), \quad i = 1,2,$$

e

$$u = u^1 - u^2, \quad v = v^1 - v^2.$$

Então $U=(u,v,u_t,v_t)$ satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+(-\Delta)^{\alpha_1}u_t=F_1(u,v)-G_1(u_t)+(\epsilon_1-\epsilon_2)h_1, \\ v_{tt}-\Delta v+(-\Delta)^{\alpha_2}v_t=F_2(u,v)-G_2(v_t)+(\epsilon_1-\epsilon_2)h_2, \end{cases} \tag{5.58}$$

onde

$$F_i(u,v)=f_i(u^1,v^1)-f_i(u^2,v^2), \quad i=1,2,$$

e

$$G_1(u_t)=g_1(u_t^1)-g_1(u_t^2), \;\; G_2(v_t)=g_2(v_t^1)-g_2(v_t^2).$$

Multiplicando a primeira equação em (5.58) por u_t e a segunda por v_t, respectivamente, e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|U\|_H^2 = & \int_\Omega (F_1(u,v)u_t+F_2(u,v)v_t)\,\mathrm{d}x \\ & -(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{2}}u_t\|^2+\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{2}}v_t\|^2) \\ & -\int_\Omega (G_1(u_t)u_t+G_2(v_t)v_t)\,\mathrm{d}x \\ & -(\epsilon_1-\epsilon_2)\int_\Omega (h_1u_t+h_2v_t)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Usando a estimativa (5.3), a desigualdade de Hölder e a imersão (em 2D) $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$ para $1\le s<\infty$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega F_1(u,v)u_t\,\mathrm{d}x & \le C(1+\|S_{\epsilon_1}(t)U_0\|_H^{p-1}+\|S_{\epsilon_2}(t)U_0\|_H^{p-1})(\|u\|_{2p}+\|v\|_{2p})\|u_t\| \\ & \le C(1+\|S_{\epsilon_1}(t)U_0\|_H^{p-1}+\|S_{\epsilon_2}(t)U_0\|_H^{p-1})(\|\nabla u\|+\|\nabla v\|)\|u_t\|. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Usando o fato de que $\mathcal{E}_\epsilon(t)$ é uma função não crescente e (5.18), temos que para $i=1,2$,

$$\|S_{\epsilon_i}(t)U_0\|_H^{p-1}\le \frac{\mathcal{E}_{\epsilon_i}(0)+C_F}{C_0}\le \frac{C_F(1+\|U_0\|_H^{p+1})+C_F}{C_0}\le C_B, \quad \forall U_0\in B.$$

Substituindo a estimativa anterior em (5.60) e usando a desigualdade de Young vemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega F_1(u,v)u_t\,\mathrm{d}x & \le C_B(\|\nabla u\|+\|\nabla v\|)\|u_t\| \\ & \le C_B(\|\nabla u\|^2+\|\nabla v\|^2)+\|u_t\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega F_2(u,v)v_t \,\mathrm{d}x \le C_B(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) + \|v_t\|^2.$$

Somando as duas últimas desigualdades obtidas concluímos que

$$\int_\Omega (F_1(u,v)u_t + F_2(u,v)v_t) \,\mathrm{d}x \le C_B\|U\|_H^2. \tag{5.61}$$

Pela propriedade (5.9) obtemos

$$-\int_\Omega (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t + G_3(w_t)w_t) \,\mathrm{d}x \le 0. \tag{5.62}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\int_\Omega (h_1u_t + h_2v_t) \,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2}(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \frac{1}{2}|\epsilon_1 - \epsilon_2|^2\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right)\\ &\le \frac{1}{2}\|U\|_H^2 + \frac{1}{2}|\epsilon_1 - \epsilon_2|^2\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right).\end{aligned} \tag{5.63}$$

Substituindo as desigualdades (5.61)-(5.63) em (5.59), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|U\|_H^2 \le C_B\|U\|_H^2 + |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right). \tag{5.64}$$

Aplicando a desigualdade de Grönwall à estimativa (5.64) e usando o fato de que $\|U(0)\|_H^2 = 0$, concluímos que

$$\|U(t)\|_H^2 \le \frac{1}{C_B}\left(e^{C_Bt} - 1\right)\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right)|\epsilon_1 - \epsilon_2|^2, \quad t > 0.$$

Isso implica

$$\|S_{\epsilon_1}(t)U_0 - S_{\epsilon_2}(t)U_0\|_H \le \sqrt{\frac{1}{C_D}\left(e^{C_Dt} - 1\right)\left(\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2\right)}|\epsilon_1 - \epsilon_2|, \quad t > 0,$$

o que mostra a validade da propriedade (L3). Temos então que todas as hipóteses do Teorema 5.3.1 são satisfeitas. Logo, existe um conjunto residual e denso $J \subset [0,1]$ tal que o limite (5.57) é satisfeito, o que prova o teorema. ∎

Teorema 5.3.3 (Semicontinuidade superior) *Sob as hipóteses do Teorema 5.2.1, a família de atratores globais $\mathfrak{A}_\epsilon$ é semicontínua superiormente em $\epsilon \in [0,1]$, ou seja,*

$$\lim_{\epsilon\to\epsilon_0} \mathrm{dist}_H(\mathfrak{A}_\epsilon, \mathfrak{A}_{\epsilon_0}) = 0, \quad \forall \epsilon \in [0,1]. \tag{5.65}$$

Demonstração: A prova é feita por contradição. Suponhamos que (5.65) não seja satisfeito. Então existe um $\delta > 0$ e sequências $\epsilon_n \to \epsilon_0$ e $U_0^n \in \mathfrak{A}_{\epsilon_n}$ tais que

$$\mathrm{dist}_H(U_0^n, \mathfrak{A}_{\epsilon_0}) \geq \delta > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.66}$$

Seja $U^n(t) = (u^n(t), v^n(t), u_t^n(t), v_t^n(t))$ uma trajetória completa em $\mathfrak{A}_{\epsilon_n}$ tal que $U^n(0) = U_0^n$. De acordo com a estimativa uniforme (5.51), sabemos que

$$\{U^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(\mathbb{R}; H_1). \tag{5.67}$$

Como H_1 é compactamente imerso em H, pelo teorema de compacidade de Simon (veja [55]), obtemos uma subsequência $\{U^{n_k}\}$ e $U \in C([-T,T]; H)$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t\in[-T,T]} \|U^{n_k}(t) - U(t)\|_H = 0. \tag{5.68}$$

Por (5.67) e (5.68), concluímos que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|U(t)\|_H < \infty.$$

Usando um argumento análogo como na prova da propriedade (L3), vemos que

$$U(t) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$$

resolve as equações limite ($\epsilon = \epsilon_0$)

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} u_t + g_1(u_t) = f_1(u,v) + \epsilon_0 h_1, \\ v_{tt} - \Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} v_t + g_2(v_t) = f_2(u,v) + \epsilon_0 h_2. \end{cases}$$

Portanto $U(t)$ é uma trajetória completa limitada para o semigrupo limite $S_{\epsilon_0}(t)$. Consequentemente,

$$U_0^{n_k} \to U(0) \in \mathfrak{A}_0,$$

o que contradiz (5.66). Isso finaliza a prova. ∎

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

Nesta tese foi estudada a boa colocação, solução global e a dinâmica de longo prazo para um sistema de ondas acopladas que estão sujeitas à influência de forças externas $f_i \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tais que $|\nabla f_i(u,v)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + 1), p \geq 1$, para todo $u, v \in \mathbb{R}$, e forças de atrito, que são representadas pelos dampings não lineares g_i satisfazendo $a|s|^{m+1} \leq g_i(s)s \leq b|s|^{m+1}$, para todo $|s| \geq 1$, com $a, b > 0$ e $m, r \geq 1$, e pelas potências fracionárias $(-\Delta)^{\frac{\alpha_i}{2}}$ do operador laplaciano, sendo $i \in \{1, 2\}$.

Uma vez estabelecida a solução fraca, foi mostrado, usando-se a teoria do poço de potencial, que esta solução é global quando a energia total inicial satisfaz $\mathcal{E}(0) < d$, sendo d conforme em (3.174), e quando a condição inicial (u_0, v_0) pertence ao conjunto W_1, que chamamos de "parte boa"do poço de potencial $W = W_1 \cup W_2$ cuja profundidade é d. Por outro lado, foi provado que se o parâmetro p das fontes domina os parâmetros m e r dos dampings não lineares g_i, a solução explode em tempo finito, mesmo quando restringimos os parâmetros α_1 e α_2 do laplaciano fracionário ao intervalo $(0, \frac{1}{2})$. A energia das soluções globais tem decaimento exponencial quando ambas funções g_1 e g_2 são linearmente limitadas próximo à origem. Se ao menos um dos dampings não lineares g_1 ou g_2 possui esta propriedade, o decaimento polinomial é garantido.

Quanto à dinâmica das soluções globais em longo prazo, considerando-se hipóteses adequadas sobre os dampings mão lineares g_1 e g_2 e sobre as fontes f_1 e f_2, temos que o sistema dinâmico $(H, S(t))$ associado ao problema (1.1)-(1.2) possui um único atrator global $\mathfrak{A}$ com dimensão fractal finita, próximo do qual as soluções globais se estabilizam. Além disso, foi mostrada a existência de um atrator exponencial generalizado que possui dimensão fractal finita num espaço de interpolação entre o espaço de fase H e $(L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))^2$.

Considerando-se perturbações autônomas ϵh_1 e ϵh_2 das forças externas, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, pode-se obter um atrator global $\mathfrak{A}_\epsilon$ para o sistema dinâmico $(H, S_\epsilon(t))$ associado ao problema perturbado

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} u_t + g_1(u_t) = f_1(u,v) + \epsilon h_1(x), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} v_t + g_2(v_t) = f_2(u,v) + \epsilon h_2(x), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, & \text{em } \Omega, \\ v(0) = v_0, v_t(0) = v_1, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Foi mostrado que o atrator $\mathfrak{A}_\epsilon$ é uma aproximação para o atrator $\mathfrak{A}$ do problema original e tal aproximação é dada no sentido do Teorema (5.3.3) fazendo-se ϵ tender a zero. Portanto, o atrator global $\mathfrak{A}$ associado ao sistema dinâmico $(H, S(t))$ e com as regularidades citadas é obtido como um caso limite quanto tomamos $\epsilon = 0$ no problema perturbado e assim fica estabelecida a dinâmica de longo prazo de nosso problema original.

Finalizamos este capítulo com dois problemas em aberto que acreditamos ser interessantes para uma pesquisa futura.

Problema 1. Usando a teoria do poço de potencial provamos que se os dados iniciais do problema (1.1)-(1.2) pertencem à parte boa do poço de potencial a solução correspondente existe globalmente (Veja Teorema 3.5.1). Por outro lado, se os dados iniciais estão "fora" da parte boa do poço de potencial, a solução correspondente possui blow-up em tempo finito (veja Teorema 3.6.1). Neste trabalho, consideramos apenas o caso $\mathcal{E}(0) < d$. No caso $\mathcal{E}(0) < d$, com a idéia de transformação de escala [59], podemos facilmente estender os resultados em nível de energia inicial subcrítico para nível de energia inicial crítico. É um desafio discutir o blow-up de soluções em nível de energia inicial arbitrariamente alto, ou seja, $\mathcal{E}(0) > d$. Embora possamos provar invariância da variedade na energia inicial subcrítica e crítica com o auxílio da energia inicial restrita pela profundidade do poço de potencial, parece que não temos como provar a invariância com energia inicial alta.

Isso traz não apenas as dificuldades no controle da energia inicial, mas também os argumentos que podem eliminar a estrutura variacional. Portanto, é um problema em aberto a questão "Que tipo de dados iniciais podem levar ao blow-up em tempo finito da solução para o problema (1.1)-(1.2)?"

Problema 2. No Capítulo 5 estudamos o sistema (1.1) considerando uma perturbação autônoma de forças externas. Pretendemos considerar nesse sistema uma perturbação não autônoma de forças externas, isto é, o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + (-\Delta)^{\alpha_1} u_t + g_1(u_t) = f_1(u,v) + \epsilon h_1(t), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} - \Delta v + (-\Delta)^{\alpha_2} v_t + g_2(v_t) = f_2(u,v) + \epsilon h_2(t), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = v = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1, & \text{em } \Omega, \\ v(0) = v_0, v_t(0) = v_1, & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde $\epsilon > 0$ é uma constante positiva suficientemente pequena. Provaremos a continuidade residual de atratores pullback e uniforme. Para isto, utilizaremos os resultados recentes em [37].

Bibliografia

[1] K. AGRE AND M. A. RAMMAHA, *Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms*, Differential Integral Equations 19 (2006), pp. 1235–1270.

[2] C. O. ALVES AND M.M. CAVALCANTI, *On existence, uniform decay rates and blow up for solutions of the 2-D wave equation with exponential source*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 34 (3) (2009), pp. 377–411.

[3] C. O. ALVES, M.M. CAVALCANTI, V. N. DOMINGOS CAVALCANTI, M. A. RAMMAHA AND D. TOUNDYKOV, *On existence, uniform decay rates and blow up for solutions of systems of nonlinear wave equations with damping and source terms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 2 (3) (2009), pp. 583–608.

[4] A. V. BABIN AND S. Y. PILYUGIN, *Continuous dependence of attractors on the shape of domain*, J. Math. Sci., 87 (1997), pp. 3304–3310.

[5] A. V. BABIN AND M. I. VISHIK, *Attractors of evolution equations*, North Holland, Amsterdam, 1992.

[6] V. BARBU, *Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems*, Vol. 190, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press Inc, Boston, 1993.

[7] V. BARBU, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Vol. 190 of Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[8] V. BARBU, I. LASIECKA AND M. A. RAMMAHA, *On nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 7, pp. 2571–2611.

[9] V. BARBU, I. LASIECKA AND M. A. RAMMAHA, *Blow-up of generalized solutions to wave equations with nonlinear degenerate damping and source terms*, Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), no. 3, pp. 995–1021.

[10] E. BELCHEV, M. KEPKA AND Z. ZHOU, *Finite-Time Blow-Up of Solutions to Semilinear Wave Equations*. Journal of Functional Analysis, 190(1) (2002), pp. 233–254.

[11] J. E. BILLOTTI AND J. P. LASALLE, *Dissipative periodic processes*, Bull Am Math Soc, 77(1971), pp. 1082–1088.

[12] L. BOCIU, *Local and global wellposedness of weak solutions for the wave equation with nonlinear boundary and interior sources of supercritical exponents and damping*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 12, pp. 560–575.

[13] L. BOCIU AND I. LASIECKA, *Blow-up of weak solutions for the semilinear wave equations with nonlinear boundary and interior sources and damping*, Appl. Math. (Warsaw) 35 (2008) (3), pp. 281–304.

[14] L. BOCIU AND I. LASIECKA, *Uniqueness of weak solutions for the semilinear wave equations with supercritical boundary/interior sources and damping*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 22 (2008), no. 4, pp. 835–860.

[15] L. BOCIU AND I. LASIECKA, *Local Hadamard well-posedness for nonlinear wave equations with supercritical sources and damping*, J. Differential Equations 249 (2010), no. 3, pp. 654–683.

[16] L. BOCIU, M. A. RAMMAHA AND D. TOUNDYKOV, *On a wave equation with supercritical interior and boundary sources and damping terms*, Mathematische Nachrichten 284 (16) (2011), pp. 2032–2064.

[17] A. N. CARVALHO AND J. W. CHOLEWA, *Local well posedness for strongly damped wave equations with critical nonlinearities*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 66(3) (2002), pp. 443–463.

[18] M. M. CAVALCANTI, *Semigrupos lineares e não lineares e aplicações*, Universidade Federal de Maringá, Departamento de Matemática, Maringá, 2016.

[19] M. M. CAVALCANTI, V. N. DOMINGOS CAVALCANTI AND P. MARTINEZ, *Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term*, J. Differential Equations, 203 (2004), pp. 119–158.

[20] M. M. CAVALCANTI, V. N. DOMINGOS CAVALCANTI AND I. LASIECKA, *Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction* J. Differential Equations, 236 (2007), pp. 407–459.

[21] F. CHEN, B. GUO AND P. WANG, *Long time behavior of strongly damped nonlinear wave equations*, Journal of Differential Equations, Volume 147, Issue 2 (1998), pp. 231–241.

[22] I. CHUESHOV, M. ELLER AND I. LASIECKA, *Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation*. Communications in Partial Differential Equations, 29(11-12) (2005), pp. 1847–1876.

[23] I. CHUESHOV AND I. LASIECKA, *Von Karman Evolution Equations. Well-posedness and Long Time Dynamics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[24] I. CHUESHOV, M. ELLER, AND I. LASIECKA, *On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation*, Comm. Partial Differential Equations 27 (2002), pp. 1901–1951.

[25] M. M. FREITAS, M. L. SANTOS AND J. A. LANGA, *Porous elastic system with nonlinear damping and sources terms*, Journal of Differential Equations, 2017, pp. 2970–3051.

[26] F. GAZZOLA AND SQUASSIANA, *Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations*, Ann. H. Poincaré 23 (2006) 185–207.

[27] V. GEORGIEV, G. TODOROVA, *Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms*, J. Differential Equations, 109 (1994), pp. 295–308.

[28] P. G. GEREDELI AND I. LASIECKA, *Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to rotational inertia of attractors to von karman plates with geometrically localized dissipation and critical nonlinearity*, Nonlinear Anal., 91(2013), pp.72–92.

[29] Y. GUO, *Systems of Nonlinear wave equations with damping and supercritical sources*, Ph.D thesis, University of Nebraska-Lincoln, 2012.

[30] Y. GUO AND M. A. RAMMAHA, *Global existence and decay of energy to systems of wave equations with damping and supercritical sources*, Z. Angew. Math. Phys. 64 (3) (2013), pp. 621–658.

[31] Y. GUO AND M. A. RAMMAHA, *Systems of nonlinear wave equations with damping and supercritical sources*, Transactions of the American Mathematical Society 336 (5) (2014), pp. 2265–2325.

[32] T. G. HA, D. JIM AND I.H. JUNG, *Global existence and uniform decay rates for the semi-linear wave equation with damping and source terms*, Computers and Mathematics with Applications, 67 (2014), pp. 692–707.

[33] J. K. HALE, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical surveys and monographs, American Mathematival Society, Providence, RI, 1988.

[34] J. K. HALE AND G. RAUGEL, *Upper semicontinuity of the attractors for a singulary perturber hyperbolic equation*, J. Differential Equations, 73(1988), pp197-214.

[35] W. HAN, *Global well-posedness for the nonlinear wave equation with a cubic nonlinearity in two space dimensions*. Nonlinear Analysis, 132 (2016), 274–287.

[36] B. D. HENRY, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, vol. 840 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin 1981.

[37] L. HOANG, E. OLSON AND J. ROBINSON, *Continuity of pullback and uniform attractors*, J. Differential Equations, 264 (2018), pp. 4067–4093.

[38] L. HOANG, E. OLSON AND J. ROBINSON, *On the continuity of global attractors*, Proceedings of the American Mathematical Society, 143 (2015), pp. 4389–4395.

[39] R. IKEHATA, *Improved decay rates for solutions to one-dimensional linear and semilinear dissipative wave equations in all space*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 277(2) (2003), pp. 555–570.

[40] N. I. KARACHALIOS AND N. M. STAVRAKAKIS, *Existence of a global attractor for semilinear dissipative wave equations on Rn*, Journal of Differential Equations, Volume 157, Issue 1 (1999), pp. 183–205.

[41] H. KOCK, I. LASIECKA, *Hadamad well-posedness of weak solutions in nonlinear dynamics elasticity-full von Karman systems*, Vol. 50, Evolutions Equations, semigroups and functional analysis (Milano, 2000), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, Basel, (2002), pp. 197–216.

[42] I. N. KOSTIN, *Long-Time Behavior of Solutions to a Semilinear Wave Equation with Boundary Damping*, Dynamics and Control 11 (2001), pp. 371–388.

[43] O. A. LADYZHENSKAYA, *Attractors for semigroups and evolution equations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[44] V. LAKSHMIKANTHAM AND S. LEELA, *Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications*. Vol I: Ordinary Differential Equations, in: Mathematicas in Science and Engineering, Vol. 55-I, Academic Press, Neq York, 1969.

[45] I. LASIECKA AND D. TATARU, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*, Differential Integral Equations 6 (3) (1993), pp. 507–533.

[46] I. LASIECKA AND D. TOUNDYKOV, *Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms*, Nonlinear Anal. 64 (2006), pp. 1757–1797.

[47] J. L. LIONS, *Quelques Méthodes de Résolutions de Problèms aux Limites Non-Linéaires.* Dunod, Paris. 1969.

[48] T. F. MA AND P. N. SEMINARIO-HUERTAS, *Attractors for semilinear wave equations with localized damping and external forces*, Communications on Pure and Applied Analysis, 19 (2020), pp. 2219–2233.

[49] T. F. MA AND R. N. MONTEIRO, *Singular limit and long-time dynamics of bresse systems*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 49(2017), pp.2468–2495.

[50] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential equations*, Springer-Verlag, New York 1983.

[51] P. PEI, M. A. RAMMAHA AND D. TOUNDYKOV, *Globalwell-posedness and stability of semilinear Mindlin-Timoshenko system*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 418 (2014), pp. 535–568.

[52] P. PEI, M. A. RAMMAHA AND D. TOUNDYKOV, *Local and global well-posedness of semilinear Reissner-Mindlin-Timoshenko plate equations*, Nonlinear Analysis 105 (2014), pp. 62–85.

[53] J. C. ROBINSON, *Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, vol. 28, Cambridge University Press, 2001.

[54] R. E. SHOWALTER, *Monotone operators in Banach spaces and nonlinear partial differential equations*, Vol 49, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, 1997.

[55] J. SIMON, *Compact sets in the space* $L^\infty(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata 146 (4) (1987), pp. 65-96.

[56] C. SUN, M. YANG, AND C. ZHONG, *Global attractors for the wave equation with nonlinear damping.* Journal of Differential Equations, 227(2) (2006), pp. 427–443.

[57] N. TATAR AND M. ALAIMA. *A blow up result for a fractionally damped wave equation.* Nonlinear Differential Equations and Applications, 12(2) (2005), pp. 215–226.

[58] R. TEMAM, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Philadelphia, PA: SIAM, 1995.

[59] R. XU, *Initial boundary value problem for semilinear hyperbolic equations and parabolic equations with critical initial data*, Q. Appl. Math. 68 (2010) 459–468.

[60] Y. ZHANG AND C. ZHONG, *Existence of global attractors for a nonlinear wave equation.* Applied Mathematics Letters, 18(1) (2005), pp. 77–84.

[61] Y. ZHOU, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations.* Chinese Annals of Mathematics. Series B. 22B (2001).