



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**  
**PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA**

**Resultados de estabilidade para problemas  
de dilatação de solos elásticos porosos com  
saturação de fluido**

Alberto Sancho Noé

Belém

2021

Alberto Sancho Noé

**Resultados de estabilidade para problemas de dilatação de solos elásticos porosos com saturação de fluido**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla - UFPA/UFAM, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos**

Co-Orientador: **Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

Belém

2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

N763r Noé, Alberto Sancho Noé.  
Resultados de estabilidade para problemas de dilatação de solos  
elásticos porosos com saturação de fluido / Alberto Sancho Noé  
Noé. — 2021.  
96 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos  
Ramos

Coorientador(a): Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de  
Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Dilatação de solos com saturação. 2. Estabilidade  
exponencial. 3. Termo de delay. 4. Amortecimento não linear.  
5. Diferenças finitas. I. Título.

CDD 510

---

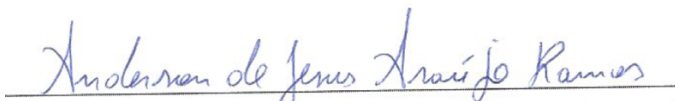
# Resultados de estabilidade para problemas de dilatação de solos elásticos porosos com saturação de fluido

Por

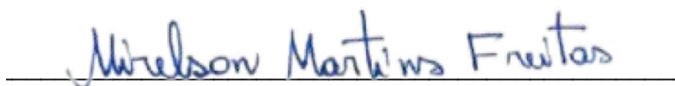
Alberto Sancho Noé

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA - UFPA/UFAM, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

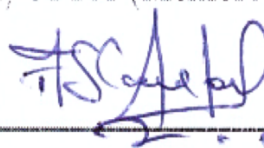
**APROVADO** em 17 de dezembro de 2021, por:



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos  
Orientador (PDM/UFPA) – Presidente



Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas  
Membro interno (PDM/UFPA)



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo  
Membro interno (PDM/UFPA)



Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha  
Membro externo (UFSJ)

*Aos meus antepassados que foram forçados a deixar  
sua terra.*

*O substrato filosófico do pensamento africano é, sem dúvida, a busca da liberdade, devido à situação categorial oprimido/escravo/colonizado/subdesenvolvido na qual os povos africanos se encontram a seguir ao encontro/choque com o ocidente”. (NGOENHA, 2004, p. 74).*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao programa de bolsas CAPES, pelo financiamento desta pesquisa.

Agradeço a todos os professores que me acompanharam nestes quatro anos, em especial aos meus orientadores, Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos e Prof. Dr. Dilberto de Almeida Júnior, pela paciência e disponibilidade.

Agradeço à todos os colegas do Grupo de Pesquisa em Análise Matemática Numérica - GPAMN pela paciência em esclarecer minhas dúvidas.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Em especial, agradeço à minha mãe Lídia Murombo, heroína que me deu apoio, incentivo nos momentos difíceis de cansaço e desânimo. Ao meu pai Noé Alberto que, apesar de todas as dificuldades, me fortaleceu.

Obrigado aos meus irmãos, irmãs, sobrinhos e sobrinhas, que nos momentos de minha ausência dedicados aos estudos, sempre me fizeram compreender que o futuro se faz a partir da dedicação constante no presente.

Obrigado primos, tias e tios pela valiosa contribuição.

Obrigado à família Chicumbi, à Ashish Mishra, à Helen Cristina Machado Rodriguês e ao João Felipe Fonseca Da Silva pelos bons e maus momentos que passamos juntos.

E para finalizar, agradeço à minha namorada Aurilene Ferreira da Silva, pelo amor que vivemos, pelo apoio emocional e pela paciência

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Amostra de mídia porosa de reservatório. Créditos: P. T. P. Aum . . . . .	2
1.2	Níveis de saturação de meios porosos, com a cor vermelha representando o deslocamento do fluido. Créditos: A. J. A. Ramos . . . . .	2
1.3	Processo de intumescimento de argila. Créditos: P. T. P. Aum . . . . .	3
2.1	Solução numérica $z_j^n$ vs. condições de contorno. . . . .	38
2.2	Solução numérica $u_j^n$ vs. condições de contorno. . . . .	39
2.3	Energia discreta. Esta simulação garante uma medida de precisão do método explícito na reprodução do caráter conservativo do esquema numérico (2.46)–(2.48) com $\gamma = 0$ . . . . .	39
2.4	Solução numérica $z_j^n$ vs. condições de contorno. . . . .	40
2.5	Solução numérica $u_j^n$ vs. condições de contorno. . . . .	40
2.6	Energia discreta. Esta simulação garante uma medida de precisão do método explícito na reprodução do caráter dissipativo do esquema numérico (2.46)–(2.48) com $\gamma = 9.75 \times 10^4 N/m^4$ . . . . .	41



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

# Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais  
Programa de Doutorado em Matemática

## **Resultados de estabilidade para problemas de dilatação de solos elásticos porosos com saturação de fluido**

por Alberto Sancho Noé

Nesta tese, consideramos um sistema acoplado de equações diferenciais parciais de segunda ordem, que modela problemas associados à teoria unidimensional de dilatação de solos elásticos porosos com saturação de fluido. Introduzimos diferentes mecanismos dissipativos com o objetivo de estudarmos o comportamento qualitativo das soluções do sistema com relação à boa colocação e à dinâmica de estabilização. Em particular, para um dos casos estudados, onde a dissipação atua somente na equação do deslocamento do material sólido elástico, analisamos o problema totalmente discreto usando o método explícito de diferenças finitas e fornecemos as simulações da solução numérica e da energia discreta.

**Palavras-chave:** Dilatação de solos com saturação; estabilidade exponencial; termo de delay; amortecimento não linear; diferenças finitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

# Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais  
Programa de Doutorado em Matemática

**Stability results for swelling problems of porous elastic soils with fluid saturation.**

by Alberto Sancho Noé

In this thesis, we consider a coupled system of second-order of partial differential equations, which models problems associated with the one-dimensional swelling theory of porous elastic soils with fluid saturation. We introduce different dissipative mechanisms in order to study the qualitative behavior of system solutions with respect to well-posedness and stabilization dynamics. In particular, for one of the cases studied, where dissipation acts only on the displacement equation of the elastic solid material, we analyze the totally discrete problem using the explicit finite difference method and provide simulations of the numerical solution and the discrete energy

**Keywords:** Swelling of soils with saturation; exponential stability; delay term; non-linear damping; finite differences.

---

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Considerações gerais e motivações . . . . .	1
1.2	Problema objeto de estudo . . . . .	9
1.3	Objetivos e organização do trabalho . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Estabilização exponencial e tratamento numérico para o sistema com amorteci- mento viscoso</b>	<b>13</b>
2.1	Existência e unicidade de solução . . . . .	14
2.1.1	Formulação de semigrupos . . . . .	16
2.2	Decaimento exponencial . . . . .	20
2.2.1	Método da energia . . . . .	20
2.3	Abordagem numérica . . . . .	27
2.3.1	Esquema totalmente discreto em diferenças finitas e propriedades . . . . .	28
2.3.2	Simulações numéricas . . . . .	37
2.3.2.1	Sistema conservativo: Caso $\gamma = 0$ . . . . .	38
2.3.2.2	Sistema dissipativo: Caso $\gamma > 0$ . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Estabilização exponencial para o sistema com termo de retardo</b>	<b>42</b>
3.1	Existência e unicidade de solução . . . . .	43
3.2	Decaimento da energia . . . . .	47
3.2.1	Decaimento exponencial . . . . .	49
3.2.2	Prova do Teorema 3.4 . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Estabilização geral para o sistema com amortecimento não linear</b>	<b>59</b>
4.1	Resultado de estabilidade geral . . . . .	60
4.1.1	Alguns resultados auxiliares . . . . .	61

Sumário	ix
4.1.2 Estabilidade geral . . . . .	67
4.1.2.1 Exemplos . . . . .	73
<b>5 Considerações finais</b>	<b>76</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

### **1.1 Considerações gerais e motivações**

As teorias que tratam de sistemas sólidos porosos estão presentes em muitos processos naturais e industriais. Encontramos aplicações destas teorias em sistemas biológicos tais como plantas, ossos, solos, leitos de rios, na engenharia de materiais ([4, 15]), etc. Em particular, encontramos grande relevância desta teoria na indústria do petróleo. Isso ocorre porque fluidos como óleo, água e gás preenchem os poros das rochas, formando um meio poroso saturado denominado reservatório de óleo. A Figura 1.1 ilustra a clássica estrutura geológica que captura hidrocarbonetos, com o detalhe de uma amostra do meio poroso.

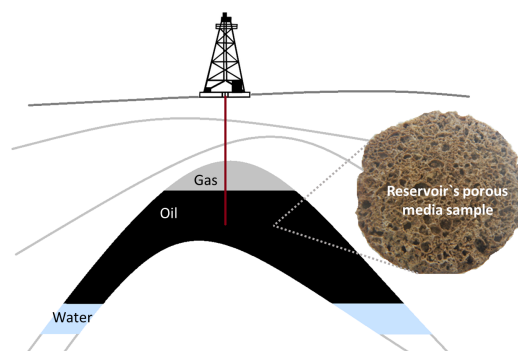


FIGURA 1.1: Amostra de mídia porosa de reservatório. Créditos: P. T. P. Aum

Em diversas operações na construção do poço, fluidos são injetados na formação, alterando a saturação do espaço do meio poroso. Este processo é ilustrado na Figura 1.2, onde são mostradas as diferentes etapas do preenchimento do meio poroso.

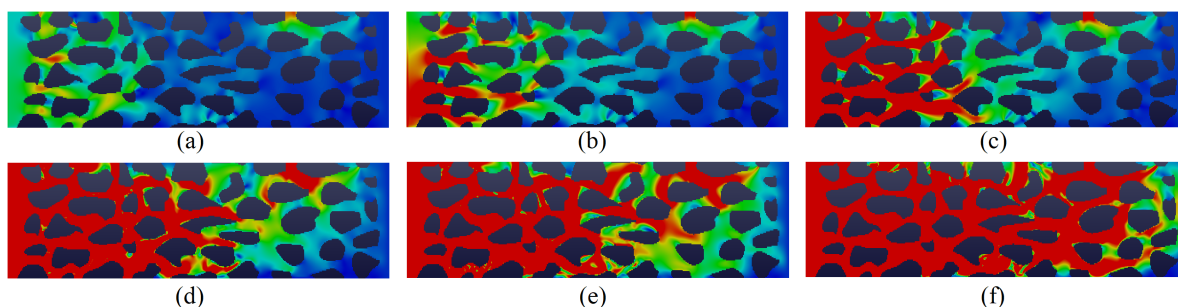


FIGURA 1.2: Níveis de saturação de meios porosos, com a cor vermelha representando o deslocamento do fluido. Créditos: A. J. A. Ramos

A interação dos fluidos com as rochas, em muitos casos promove a dilatação do meio poroso gerando instabilidade. Um exemplo clássico desse fenômeno é a dilatação da formação geológica argilosa quando em contato com a água. Isso pode ocorrer, por exemplo, durante o fluxo de água para recuperação aprimorada de óleo [46] ou no processo de invasão de fluido, em meios porosos, durante as operações de perfuração e completação [1].

O processo de intumescimento (aumento de volume) se deve à diversos fenômenos que ocorrem na escala dos poros, como a presença de forças osmóticas, movimento browniano, forças de hidratação, forças de Van der Waals e eletrostática. A Figura 1.3, mostra o processo de intumescimento, onde as camadas de argila preenchidas por cátions metálicos entram em contato com

as moléculas de água. A água vai dissolvendo os íons entre as camadas de argila promovendo a dilatação da estrutura.

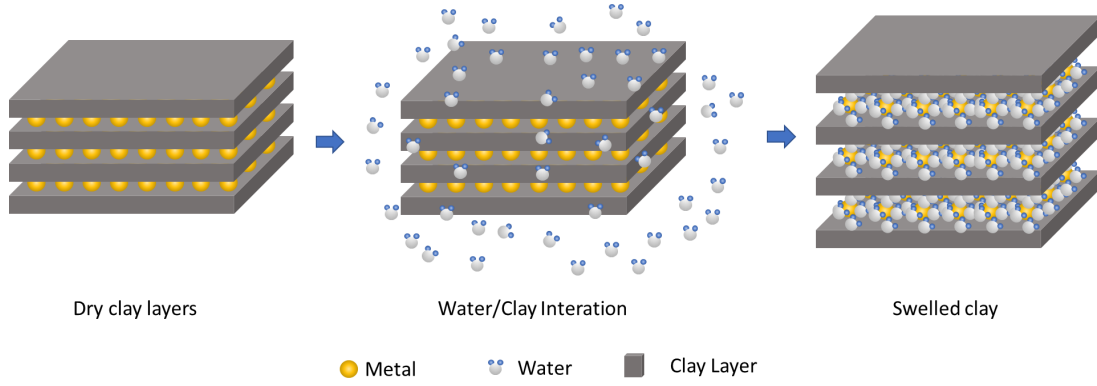


FIGURA 1.3: Processo de intumescimento de argila. Créditos: P. T. P. Aum

A necessidade de entender como a matriz sólida se comporta em função do movimento e da interação com os fluidos, motivou a formulação da teoria da mistura para sólidos elásticos porosos preenchidos com fluido. A teoria das misturas de sólidos tem sido extensivamente investigada nas últimas décadas [7, 8, 10, 11], e o estudo das propriedades qualitativas da solução como existência, singularidade, dependência contínua e estabilidade assintótica para o problema que define esse tipo de material tem despertado o interesse de muitos pesquisadores [3, 4, 22, 26].

O primeiro trabalho sobre a teoria das misturas para saturação de sólidos porosos pela ação de um gás ou fluidos foi desenvolvido por Eringen [14]. Ele estabeleceu um modelo matemático que consiste em três equações diferenciais parciais, dadas por

$$\begin{cases} \rho_0^f \ddot{\mathbf{u}}^f + \sigma^{ff} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f + \sigma^f \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S + (\alpha^f + \gamma^f) \nabla T + \xi^{ff} (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^S) - \rho_0^f \mathbf{f}^f = 0, \\ \rho_0^S \ddot{\mathbf{u}}^S + \sigma^f \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^f - (\gamma^f - \alpha_0) \nabla T - (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}^S - \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^S - \xi^{ff} (\dot{\mathbf{u}}^f - \dot{\mathbf{u}}^S) - \rho_0^S \mathbf{f}^S = 0, \\ \alpha_1 \dot{\mathbf{T}} + \left( \alpha^f + \frac{\xi^f}{T_0} \right) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}^f + \left( \alpha_0 - \frac{\xi^f}{T_0} \right) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}^S - \frac{K}{T_0} \nabla^2 \mathbf{T} - \frac{\rho_0 \mathbf{h}}{T_0} = 0, \end{cases}$$

onde os sobrescritos  $f$  e  $S$  denotam o fluido e o sólido elástico respectivamente. Consequentemente,  $\mathbf{u}^f$  e  $\mathbf{u}^S$  representam os deslocamentos do fluido e do material sólido, e  $\mathbf{T}$  expressa a temperatura. As funções  $\mathbf{f}^f$ ,  $\mathbf{f}^S$  e  $\mathbf{h}$  representam as forças externas;  $\rho_0^f$  e  $\rho_0^S$  são as densidades de cada constituinte;  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\sigma^f$ ,  $\sigma^{ff}$  e  $\xi^{ff}$  são constantes constitutivas;  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha^f$ ,  $\zeta^f$  e  $\gamma^f$  são as

constantes materiais e  $K$  constante de condutividade térmica. Além disso, há as relações

$$\frac{K}{T_0} \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{K\xi^{ff}}{T_0} \geq \frac{1}{4} \left( \gamma^f + \frac{\xi^f}{T_0} \right)^2.$$

Vários resultados relativos à esta teoria podem ser encontrados nos artigos de Galeş [15, 16, 17, 18]. Em Chiriță [12], o autor estuda a unicidade e a dependência contínua do problema de valor inicial e de fronteira associado à teoria de dilatação em sólidos porosos termoelásticos.

Por outro lado, a estabilidade exponencial na teoria isotérmica linear de solos elásticos porosos com saturação, começou a ser estudada por Quintanilla [32]. Na Seção 3 deste artigo, o autor considera o problema dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi(z_t - u_t) - \mu z_{xxt} = 0, \\ \rho_u u_{tt} - \mu u_{xx} - a_2 z_{xx} - \xi(u_t - z_t) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

com condições de contorno de Dirichlet homogêneas dadas por

$$z(0, t) = z(L, t) = u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (1.2)$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} z(x, 0) = z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

onde as variáveis dependentes  $(z, u)$  representam o deslocamento do fluido e do material sólido elástico, respectivamente. As constantes  $\rho_z$  e  $\rho_u$  são as densidades de cada constituinte e as constantes  $a_1, a_2$  e  $\mu$  representam as constantes constitutivas do sistema e satisfazem a relação  $a_2^2 \leq a_1\mu$ . Neste trabalho o autor provou a estabilidade exponencial usando o método da energia e mostrou que os termos dissipativos  $\pm\xi(z_t - u_t)$  e  $\mu z_{xxt}$  são suficientes para estabelecer o resultado.



Para obter o sistema isotérmico (1.1)–(1.3), Quintanilla [32] partiu do sistema termoelástico

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} - \beta_1 T_x + \xi(z_t - u_t) - \mu_z z_{xxt} = 0, \\ \rho_u u_{tt} - a_2 z_{xx} - \mu u_{xx} - \beta_2 T_x - \xi(z_t - u_t) = 0, \\ cT_t - \beta_1 z_{xt} - \beta_2 u_{xt} - \kappa_2 T_{xx} = 0, \end{cases}$$

onde  $(z, u, T)$  representam os deslocamentos de fluidos, do material sólido e variação de temperatura, respectivamente. Considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , ele obteve o sistema (1.1)–(1.3).

Por outro lado, fazendo  $\xi = 0$ , o sistema (1.1)–(1.3) resulta em

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} - \mu z_{xxt} = 0, \\ \rho_u u_{tt} - \mu u_{xx} - a_2 z_{xx} = 0. \end{cases}$$

Considerando os coeficientes  $a_1$  e  $\mu$  positivos e  $a_2$  diferentes de zero, temos a seguinte relação

$$a_2^2 < \mu a_1.$$

Para este sistema, o autor prova o resultado de decaimento exponencial usando o teorema de Hurwitz. Outros problemas relacionados a dilatação de poros em solos elásticos com saturação podem ser encontrados nas seguintes referências [9, 33, 35].

Em [51] Wang e Guo consideraram um problema unidimensional de dilatação de solos elásticos com saturação de fluido dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \gamma(x)z_t = 0, \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} = 0, \end{cases}$$

com condições de fronteira Dirichlet–Neumann

$$z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad (1.4)$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} z(x, 0) = z_0(x), & z_t(x, 0) = z_1(x), \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.5)$$

onde  $\gamma(x)$  é uma função que satisfaz a condição de média positiva, *i.e.*,  $\int_0^L \gamma(\xi) d\xi > 0$ . Este sistema é semelhante ao estudado por Quintanilla [32], diferindo apenas no termo de amortecimento. Matematicamente, o sistema estudado por Wang e Guo é mais interessante, pois apresenta um coeficiente variável no termo de amortecimento, o que aumenta o nível de dificuldade no controle. Eles usaram o método espectral para provar que o sistema é exponencialmente estável. Vale ressaltar, que os autores alcançaram este resultado com apenas um amortecimento interno imposto na equação do fluido e além disso, mostraram que as autofunções generalizadas do sistema formam uma base de Riesz para o espaço de energia.

Por outro lado, bem antes do trabalho Eringen [14] que trata do problema de saturação de fluidos em meios porosos, já eram conhecidos os trabalhos de Goodman e Cowin [19] e Nunziato e Cowin [30] que tratam de sólidos elásticos com vazios (voids) que é uma extensão simples da teoria da elasticidade clássica, que permite o tratamento de sólidos porosos em que o material da matriz é elástico e os interstícios são materiais vazios. Para termos uma visão atual dos resultados, descrevemos alguns dos trabalhos mais recentes sobre o comportamento dissipativo de tais sistemas, mas primeiro, apresentamos as equações de evolução para o sistema elástico poroso unidimensional dadas por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = T_x, \\ J\phi_{tt} = H_x + G, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde  $T$  é o estresse,  $H$  é o estresse equilibrado e  $G$  é a força corporal equilibrada. As variáveis  $u$  e  $\phi$  representam o deslocamento de um material elástico sólido e a fração volumétrica respectivamente. As equações constitutivas são dadas por

$$T = \mu u_x + b\phi, \quad H = \delta\phi_x \quad \text{e} \quad G = -bu_x - \xi\phi. \quad (1.7)$$

As constantes  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $J = \rho\kappa$ ,  $\delta$ ,  $b$ ,  $\kappa$  e  $\xi$  são os coeficientes constitutivos cujo significado físico é bem conhecido (ver [19, 30]). Os coeficientes constitutivos no caso unidimensional satisfazem as relações

$$\rho > 0, \quad \mu > 0, \quad J > 0, \quad \delta > 0, \quad \kappa > 0 \quad \text{e} \quad b^2 < \mu\xi.$$

Substituindo as equações constitutivas (1.7) em (1.6) obtemos o sistema conservativo unidimensional dado por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0, \\ J\phi_{tt} - \delta\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Vários mecanismos dissipativos foram considerados para obter o decaimento exponencial ou polinomial de tais sistemas. Por exemplo, Quintanilla [34] considerou o sistema elástico poroso (1.8) com um amortecimento viscoso na fração volumétrica dado pelo termo  $\tau\phi_t$ . O autor provou o decaimento lento das soluções quando  $J\mu \neq \rho\delta$  usando o critério de Hurwitz (ver [13] p. 9). Por outro lado, Santos *et al.* [45] provaram que o sistema é exponencialmente estável dependendo da condição  $J\mu = \rho\delta$ . Em [25], Magaña e Quintanilla estudaram o comportamento das soluções do sistema (1.8) sob a ação da viscoelasticidade e da dissipação porosa introduzidas pelos termos dissipativos  $\gamma u_{xxt}$  e  $\tau\phi_t$ , respectivamente. Outros problemas relacionados à estabilização de sistemas elásticos porosos podem ser encontrados em [41, 43, 44] e suas referências.

Há também estudos que analisam o comportamento das soluções do sistema elástico poroso levando em consideração os efeitos causados por termos de retardo no tempo e a atuação de amortecimentos não lineares. Por exemplo, Raposo *et al.* [38] estudaram o problema de

transmissão dado por

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - b\varphi_x + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, \\ \varphi_{tt} - \varphi_{xx} + bu_x + a\varphi + \xi\varphi_t = 0, \\ v_{tt} - v_{xx} - \beta\phi_x = 0, \\ \phi_{tt} - \phi_{xx} + \beta v_x + \alpha\phi + \xi\phi_t = 0, \end{cases}$$

onde  $\mu_1 > \mu_2$  são constantes positivas e  $\tau > 0$  é o retardo. Além disso, são consideradas as relações  $a > b^2$  e  $\alpha > \beta^2$ . Usando a teoria de semigrupos, eles provaram a boa colocação do problema e o resultado de analiticidade sob hipóteses adequadas dos coeficientes de amortecimento. Por outro lado, Apalara [6] considera um sistema elástico poroso com amortecimento não linear dado por

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\phi_x = 0, \\ J\phi_{tt} - \gamma\phi_{xx} + bu_x + \xi\phi + \alpha(t)g(\phi_t) = 0, \end{cases}$$

onde  $\alpha(t)g(\phi_t)$  é um termo de amortecimento não linear que atua apenas na segunda equação. Sem impor a hipótese restritiva de crescimento perto da origem no termo de amortecimento, o autor estabelece uma taxa de decaimento geral usando o método da energia e algumas propriedades de funções convexas, desde que seja considerada a relação de igualdade de velocidade de propagação de ondas.

Ressaltamos que os resultados apresentados no trabalho de Apalara [6] foram sem dúvida motivados pelos trabalhos pioneiros de Alabau-Boussouira [2] e Messaoudi e Mustafa [27], que consideram o mesmo tipo de amortecimento não linear para o sistema de vigas de Timoshenko.

Baseado nos trabalhos acima mencionados, percebemos que ainda não havia sido feito nenhum estudo sobre o comportamento assintótico das soluções do sistema elástico poroso com saturação de fluido, levando em consideração a dinâmica do amortecimento dado pela presença de termos de retardo atuando na equação do deslocamento do fluido e de termos lineares e não lineares atuando na equação do deslocamento do material sólido elástico. Além disso, também

não tínhamos conhecimento de nenhum trabalho na literatura que explorasse o problema do ponto de vista numérico, fornecendo simulações da energia e da solução do problema. Todas estas questões nos motivaram a estudarmos os problema aqui apresentados.

## 1.2 Problema objeto de estudo

Neste trabalho, consideramos as equações de campo básicas para a teoria de intumescimento de solos elásticos porosos unidimensionais dada por (ver Ieşan [21])

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} = T_{1x} - P_1 + F_1, \\ \rho_u u_{tt} = T_{2x} + P_2 + F_2, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde  $T_i$  são as tensões parciais,  $F_i$  são as forças externas e  $P_i$  são as forças internas do corpo associadas às variáveis dependentes  $z = z(x, t)$  e  $u = u(x, t)$ , que representam o deslocamento do fluido e do material sólido elástico, respectivamente. As constantes  $\rho_z$  e  $\rho_u$  são as densidades de cada constituinte e assumimos que as equações constitutivas das tensões parciais são dadas por

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}}_{=: \mathcal{A}} \begin{pmatrix} z_x \\ u_x \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

onde  $\mathcal{A}$  é uma matriz simétrica positiva definida, *i.e.*, satisfaz a relação

$$a_1 a_3 - a_2^2 > 0, \quad (1.11)$$

e as forças internas do corpo são consideradas nulas, ou seja,  $P_1 = P_2 = 0$ .

Nesta tese estudamos o problema (1.9)–(1.10) considerando três casos distintos para as funções  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ).

**Caso (I):** Escolhemos as funções

$$F_1 = 0 \quad \text{e} \quad F_2 = -\gamma u_t, \quad \gamma > 0, \quad (1.12)$$

onde  $\gamma u_t$  é o termo de amortecimento linear controlado pelo coeficiente de amortecimento  $\gamma$ .

Note que substituindo (1.12) nas equações de evolução (1.9), temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0 & \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \gamma u_t = 0 & \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1.13)$$

**Caso (II):** Escolhemos as funções

$$F_1 = -\left(\xi_1 z_t + \xi_2 z_t(x, t - \tau)\right) \quad \text{e} \quad F_2 = 0, \quad (1.14)$$

onde  $F_1$  representa um amortecimento interno causado pela interação entre os amortecimentos viscoso  $\xi_1 z_t$  e viscoso com retardo  $\xi_2 z_t(x, t - \tau)$ , desde que seja assumido a relação  $|\xi_2| < \xi_1$  e  $\tau > 0$  representa o tempo de retardo. Substituindo (1.14) nas equações de evolução (1.9), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi_1 z_t + \xi_2 z_t(x, t - \tau) = 0 & \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} = 0 & \text{em} \quad (0, l) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1.15)$$

**Caso (III):** Escolhemos as funções

$$F_1 = 0 \quad \text{e} \quad F_2 = -\gamma(t)g(u_t), \quad (1.16)$$

onde  $\gamma(t)g(u_t)$  é um termo de amortecimento não linear, que atua apenas na equação do deslocamento do material sólido elástico e as funções  $\gamma(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são descritas posteriormente. Substituindo (1.16) nas equações de evolução (1.9), obtemos um sistema fracamente dissipativo

com amortecimento não linear dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \gamma(t)g(u_t) = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1.17)$$

### 1.3 Objetivos e organização do trabalho

O objetivo principal desta presente tese é estudar a boa colocação e o comportamento assintótico do problema (1.9)–(1.10) levando em consideração os mecanismos de dissipação destacados nos Casos (I), (II) e (III). Em particular, no Caso (I), estudamos a contrapartida numérica do problema usando o método de diferenças finitas.

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 2, estudamos o problema apresentado no Caso (I), conhecido como problema isotérmico unidimensional de inchamento de solos elásticos porosos com saturação de fluido, onde consideramos apenas um amortecimento na equação proveniente do material sólido elástico. Iniciamos o nosso estudo apresentando a boa colocação do problema usando a teoria de semigrupos de operadores lineares e posteriormente, usamos o conhecido método da energia para provar o decaimento exponencial da energia total do sistema. Por último, discretizamos o problema contínuo usando o método explícito de diferenças finitas e fornecemos as simulações da solução numérica e da energia discreta. Os resultados deste capítulo deram origem ao artigo intitulado “*Stabilization and numerical treatment for swelling porous elastic soils with fluid saturation*” publicado no periódico ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.
- No Capítulo 3, estudamos o problema apresentado no Caso (II), que leva em consideração o amortecimento viscoso com retardo, atuando na equação proveniente do deslocamento do fluido. Também provamos a boa colocação do problema usando a teoria de semigrupos de operadores lineares e provamos o decaimento exponencial da energia do sistema,

desde que, seja considerado uma relação entre os coeficiente de amortecimento. Os resultados deste capítulo deram origem ao artigo intitulado “*Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation and delay time terms*” publicado no periódico Journal of Mathematical Physics.

- No Capítulo 4, estudamos o problema apresentado no Caso (III), com um amortecimento não linear atuando na equação proveniente do material sólido elástico. Neste caso, provamos o decaimento geral do problema usando o método da energia. Os resultados deste capítulo deram origem ao artigo intitulado “*Stability results for elastic porous media swelling with nonlinear damping*” publicado no periódico Journal of Mathematical Physics.



## CAPÍTULO 2

---

### Estabilização exponencial e tratamento numérico para o sistema com amortecimento viscoso

---

Neste capítulo consideramos um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem, associado ao problema de dilatação de solos elásticos porosos com saturação de fluido, onde o termo de amortecimento atua somente na equação do material sólido elástico. Mais precisamente, consideramos o sistema dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \gamma u_t = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

com condições de contorno

$$z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

e condições iniciais

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l). \quad (2.3)$$

Nossos principais resultados são a boa colocação do problema, a estabilização exponencial da energia total e um estudo numérico do problema, onde fornecemos as simulações da solução numérica do problema aproximado e da energia discreta. A boa colocação do sistema é obtida usando a teoria de semigrupos de operadores lineares [31], enquanto que a estabilização exponencial é obtida pelo método da energia [40, 42]. Já os resultados numéricos são obtidos usando o método explícito de diferenças finitas.

## 2.1 Existência e unicidade de solução

Iniciamos esta seção construindo a energia total do sistema (2.1)–(2.3) e provando a lei de dissipação da energia. As operações realizadas nesta demonstração, são apenas formais, pois, posteriormente, provamos a boa colocação do sistema, desta forma garantimos a regularidade das soluções aplicadas nessa demonstração.

**Proposição 2.1.** *Supondo a relação (1.11), a energia total associada ao sistema (2.1)–(2.3) é dada por*

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (a_3 - a_2^2/a_1) \int_0^l |u_x|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

e satisfaz a seguinte lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

**Prova.** Multiplicando a equação (2.1)<sub>1</sub> por  $z_t$  e integrando por partes no intervalo  $[0, l]$  temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{a_1}{2} \int_0^l |z_x|^2 dx + a_2 \int_0^l u_x z_{tx} dx = 0. \quad (2.6)$$

Analogamente, multiplicando a equação (2.1)<sub>2</sub> por  $u_t$  temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_u}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{a_3}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^l z_x u_{tx} dx + \gamma \int_0^l |u_t|^2 dx = 0. \quad (2.7)$$

Adicionando as equações (2.6) e (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l \left( \rho_z |z_t|^2 + \rho_u |u_t|^2 \right) dx + \frac{d}{dt} \frac{a_3}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l \left( 2a_2 u_x z_x + a_1 |z_x|^2 \right) dx \\ & + \gamma \int_0^l |u_t|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Consequentemente, completando o quadrado da soma na equação acima, obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l \left( \rho_z |z_t|^2 + \rho_u |u_t|^2 + \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) |u_x|^2 + \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 \right) dx = -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx,$$

de onde obtemos a taxa de variação

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma \int_0^l |u_t|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.9)$$

Isto conclui a prova. ■

### 2.1.1 Formulação de semigrupos

Aqui, estudamos a boa colocação do sistema (2.1)–(2.3) usando a teoria de semigrupo de operadores lineares. Inicialmente, consideramos o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  dado por

$$\mathcal{H} := \left( H_*^1(0, l) \times L^2(0, l) \right)^2 \quad \text{com} \quad H_*^1(0, l) := \left\{ f \in H^1(0, l); f(0) = 0 \right\},$$

onde  $H^1(0, l)$  denota o espaço de Sobolev usual. Devido ao funcional energia (2.4), é natural introduzirmos o produto interno em  $\mathcal{H}$  dado por

$$\begin{aligned} \langle W, \tilde{W} \rangle_{\mathcal{H}} &:= \rho_z \int_0^l z_1 \tilde{z}_1 dx + \rho_u \int_0^l u_1 \tilde{u}_1 dx + \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l u_{0,x} \tilde{u}_{0,x} dx \\ &\quad + \int_0^l \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_{0,x} + \sqrt{a_1} z_{0,x} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \tilde{u}_{0,x} + \sqrt{a_1} \tilde{z}_{0,x} \right) dx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $W = (z_0, z_1, u_0, u_1)^T$ ,  $\tilde{W} = (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1)^T \in \mathcal{H}$ . Em seguida, o sistema (2.1)–(2.3) pode ser reescrito na forma de Cauchy

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t), & \forall t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

onde  $U(t) = (z, z_t, u, u_t)^T$  é a solução do sistema,  $U_0 = (z_0, z_1, u_0, u_1)^T$  é a condição inicial e  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é um operador definido por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 & 0 \\ \frac{a_1(\cdot)_{xx}}{\rho_z} & 0 & \frac{a_2(\cdot)_{xx}}{\rho_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) \\ \frac{a_2(\cdot)_{xx}}{\rho_u} & 0 & \frac{a_3(\cdot)_{xx}}{\rho_u} & -\frac{\gamma}{\rho_u} I(\cdot) \end{pmatrix},$$

onde denotamos por  $(\cdot)_{xx}$  a derivada de segunda ordem com relação a  $x$  e  $I(\cdot)$  o operador identidade. O domínio de  $\mathcal{A}$  é dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left\{ W \in \mathcal{H}; z_0, u_0 \in H^2(0, l) \cap H_*^1(0, l), z_1, u_1 \in H_*^1(0, l), z_{0,x}(L) = u_{0,x}(L) = 0 \right\},$$

onde  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ .

Agora provamos a seguinte proposição:

**Proposição 2.2.** *O operador  $\mathcal{A}$  é  $m$ -dissipativo no espaço de fase  $\mathcal{H}$ .*

**Prova.** Dividimos a prova em duas etapas, sendo que na primeira etapa provamos a dissipatividade de  $\mathcal{A}$ . De fato, dado  $W = (z_0, z_1, u_0, u_1)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  e usando (2.10), obtemos a dissipatividade do operador dada por

$$\langle \mathcal{A}W, W \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma \int_0^l |u_1|^2 dx \leq 0. \quad (2.12)$$

Na segunda etapa, provamos a maximalidade. Seja  $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$ . Procuramos um único elemento  $W = (z_0, z_1, u_0, u_1)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  de modo que

$$-\mathcal{A}W = F. \quad (2.13)$$

De (2.13) implica imediatamente que

$$\begin{cases} z_1(x) = -f_1(x) \in H_*^1(0, l), \\ u_1(x) = -f_3(x) \in H_*^1(0, l), \end{cases} \quad (2.14)$$

Além disso, obtemos o sistema dado por

$$\begin{cases} -(a_1 z_{0,xx} + a_2 u_{0,xx}) = \rho_z f_2 \in L^2(0, l), \\ -(a_3 u_{0,xx} + a_2 z_{0,xx}) = \gamma f_3 + \rho_u f_4 \in L^2(0, l). \end{cases} \quad (2.15)$$

Para resolver o sistema (2.15), consideramos o problema variacional

$$a\left((z_0, u_0), (\tilde{z}_0, \tilde{u}_0)\right) = \Gamma(\tilde{z}_0, \tilde{u}_0), \quad (2.16)$$

onde  $a(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear em  $H_*^1(0, l) \times H_*^1(0, l)$  dada por

$$\begin{aligned} a\left((z_0, u_0), (\tilde{z}_0, \tilde{u}_0)\right) &:= (a_3 - a_2^2/a_1)\langle u_{0,x}, \tilde{u}_{0,x} \rangle \\ &+ \left\langle \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_{0,x} + \sqrt{a_1}z_{0,x}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}\tilde{u}_{0,x} + \sqrt{a_1}\tilde{z}_{0,x} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.17)$$

satisfazendo a relação (1.11) e

$$\Gamma(\tilde{z}_0, \tilde{u}_0) := \rho_z \langle f_2, \tilde{z}_0 \rangle + \langle \gamma f_3 + \rho_u f_4, \tilde{u}_0 \rangle, \quad (2.18)$$

é uma forma linear contínua em  $H_*^1(0, l) \times H_*^1(0, l)$ . O problema variacional (2.16) é obtido multiplicando (2.15)<sub>1</sub> (resp. (2.15)<sub>2</sub>) por  $\tilde{z}_0 \in H_*^1(0, l)$  (resp.  $\tilde{u}_0 \in H_*^1(0, l)$ ) integrando por partes em  $(0, l)$ , somando os resultados e em seguida, adicionando e subtraindo o termo  $\frac{a_2^2}{a_1} \langle u_{0,x}, \tilde{u}_{0,x} \rangle$ . Desde que

$$a\left((z_0, u_0), (z_0, u_0)\right) = (a_3 - a_2^2/a_1)\|u_{0,x}\|^2 + \left\| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_{0,x} + \sqrt{a_1}z_{0,x} \right\|^2, \quad (2.19)$$

seja uma forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  contínua, fortemente coerciva em  $H_*^1(0, l) \times H_*^1(0, l)$ , segue pelo Lema de Lax-Milgram que o problema (2.15) admite uma solução única  $(z_0, u_0) \in H_*^1(0, l) \times H_*^1(0, l)$ . Em seguida, tomando funções teste da forma  $(\phi, 0)$  e  $(0, \psi)$  com  $\phi, \psi \in \mathcal{D}(0, l)$  (espaço das funções teste), é fácil ver que  $(z_0, u_0)$  satisfaz o sistema (2.15) no sentido das distribuições. Desde que  $a_2^2 < a_1 a_3$ , para mostrar que  $z_0, u_0 \in H^2(0, l)$ , escrevemos o sistema (2.15) da forma

$$\begin{cases} (a_1 a_3 - a_2^2) z_{0,xx} = -a_3 \rho_z f_2 + a_2 \gamma f_3 + a_2 \rho_u f_4 \in L^2(0, l), \\ (a_1 a_3 - a_2^2) u_{0,xx} = -a_1 \gamma f_3 - a_1 \rho_u f_4 + a_2 \rho_z f_2 \in L^2(0, l), \end{cases} \quad (2.20)$$

usando operações elementares sobre as linhas do sistema. Por outro lado, pelas condições de contorno  $z_0(0) = z_{0,x}(l) = u_0(0) = u_{0,x}(l) = 0$  e por (2.20) obtemos as soluções da forma

$$\begin{aligned} z_0(x) = & -\frac{a_3}{a_1 a_3 - a_2^2} \rho_z \int_0^x \int_l^r f_2(s) ds dr + \frac{a_2}{a_1 a_3 - a_2^2} \gamma \int_0^x \int_l^r f_3(s) ds dr \\ & + \frac{a_2}{a_1 a_3 - a_2^2} \rho_u \int_0^x \int_l^r f_4(s) ds dr \end{aligned} \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} u_0(x) = & -\frac{a_1}{a_1 a_3 - a_2^2} \gamma \int_0^x \int_l^r f_3(s) ds dr - \frac{a_1}{a_1 a_3 - a_2^2} \rho_u \int_0^x \int_l^r f_4(s) ds dr \\ & + \frac{a_2}{a_1 a_3 - a_2^2} \rho_z \int_0^x \int_l^r f_2(s) ds dr. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Tendo em mente (2.14), (2.21) e (2.22), concluímos que  $W = (z_0, z_1, u_0, u_1)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Portanto, deduzimos que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ . Então, pela identidade resolvente, para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno, temos  $R(\lambda I - A) = \mathcal{H}$  (ver Teorema 1.2.4 em [52]). Isto conclui a prova. ■

Usando o Teorema de Lumer-Phillips (ver [31], Teorema 1.4.3), o operador  $\mathcal{A}$  é um gerador infinitesimal de um  $C_0$ -semigrupo de contrações  $e^{\mathcal{A}t}$  em  $\mathcal{H}$ . Então temos provado o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.** *O operador  $\mathcal{A}$  é um gerador de um  $C_0$ -semigrupo  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$  de contrações sobre o espaço  $\mathcal{H}$ . Assim, para qualquer  $U_0 \in \mathcal{H}$ , o problema (2.11) possui uma única solução fraca  $U(t) = e^{\mathcal{A}t}U_0 \in C^0([0, \infty), \mathcal{H})$ . Além disso, se  $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , então  $U(t)$  é a solução forte do problema (2.11), ou seja  $U(t) \in C^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ .*

## 2.2 Decaimento exponencial

Nesta seção, provamos a estabilização exponencial do sistema (2.1)–(2.3), usando o método da energia.

### 2.2.1 Método da energia

Mostramos que a energia total do sistema (2.1)–(2.3) decai exponencialmente para zero quando  $t \rightarrow \infty$ , usando o método da energia. Para isso, precisamos construir alguns lemas técnicos.

**Lema 2.4.** *Seja  $(z, u)$  a solução do sistema (2.1)–(2.3). Então, o funcional*

$$\mathcal{F}(t) := -\rho_z \int_0^l z_t z \, dx - \rho_u \int_0^l u_t u \, dx - \frac{\gamma}{2} \int_0^l |u|^2 \, dx,$$

*satisfaz a seguinte identidade*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) &= -\rho_z \int_0^l |z_t|^2 \, dx - \rho_u \int_0^l |u_t|^2 \, dx + \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 \, dx \\ &\quad + \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 \, dx. \end{aligned}$$

**Prova.** Multiplicando a equação (2.1)<sub>1</sub> por  $z$  e integração por partes no intervalo  $[0, l]$  temos

$$\rho_z \int_0^l z_{tt} z \, dx - a_1 \int_0^l z_{xx} z \, dx - a_2 \int_0^l u_{xx} z \, dx = 0. \quad (2.23)$$

Usando a identidade  $z_{tt} z = \frac{\partial}{\partial t} (z_t z) - |z_t|^2$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \rho_z \int_0^l z_t z \, dx - \rho_z \int_0^l |z_t|^2 \, dx + a_1 \int_0^l |z_x|^2 \, dx + a_2 \int_0^l u_x z_x \, dx = 0. \quad (2.24)$$



Analogamente, multiplicando a equação (2.1)<sub>2</sub> por  $u$  ficamos com

$$\frac{d}{dt} \rho_u \int_0^l u_t u dx - \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx + a_3 \int_0^l |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^l z_x u_x dx + \frac{d}{dt} \frac{\gamma}{2} \int_0^l |u|^2 dx = 0. \quad (2.25)$$

Adicionando as equações (2.24) e (2.25) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^l z_t z dx + \rho_u \int_0^l u_t u dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^l |u|^2 dx \right) - \rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx - \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx \\ & + a_1 \int_0^l |z_x|^2 dx + a_3 \int_0^l |u_x|^2 dx + 2a_2 \int_0^l z_x u_x dx = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Agora adicionando e subtraindo o termo  $(a_2^2/a_1) \int_0^l |u_x|^2 dx$  na equação acima, temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^l z_t z dx + \rho_u \int_0^l u_t u dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^l |u|^2 dx \right) - \rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx - \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx \\ & + \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx + \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) &= -\rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx - \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx + \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx \\ &+ \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Isto conclui a prova. ■

**Lema 2.5.** *Seja  $(z, u)$  a solução do sistema (2.1)–(2.3). Então, o funcional*

$$\mathcal{G}(t) := a_2 \rho_u \int_0^l u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u + \sqrt{a_1} z \right) dx$$

satisfaz a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) &\leq \sqrt{a_1}\left(a_3 - a_2^2/a_1\right)^2 \int_0^l |u_x|^2 dx - \frac{a_2^2}{2\sqrt{a_1}} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx \\ &\quad + C_\varepsilon \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{4\varepsilon} \int_0^l |z_t|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

onde  $C_\varepsilon := \gamma^2\sqrt{a_1}c_p + a_2^2\rho_u/\sqrt{a_1} + a_1a_2^2\varepsilon\rho_u$  e  $c_p > 0$  denota a constante de Poincaré.

**Prova.** Multiplicando a equação (2.1)<sub>1</sub> por  $a_2\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z\right)$  e integrando por partes no intervalo  $[0, l]$  temos

$$a_2\rho_u \int_0^l u_{tt} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx = a_2 \int_0^l \left( a_3u_{xx} + a_2z_{xx} - \gamma u_t \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx.$$

Usando a identidade

$$u_{tt} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) = \frac{\partial}{\partial t} u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) - u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_t + \sqrt{a_1}z_t \right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_2\rho_u \int_0^l u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx &= a_2 \int_0^l \left( a_3u_{xx} + a_2z_{xx} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx \\ &\quad - a_2\gamma \int_0^l u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx + a_2\rho_u \int_0^l u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_t + \sqrt{a_1}z_t \right) dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por outro lado, observando a identidade abaixo

$$a_3u_{xx} + a_2z_{xx} = \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) u_{xx} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_{xx} + \sqrt{a_1}z_{xx} \right), \quad (2.30)$$

podemos reescrever (2.29) como

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) = -a_2\left(a_3 - a_2^2/a_1\right) \int_0^l u_x \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right) dx \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{a_2^2}{\sqrt{a_1}} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx - a_2\gamma \int_0^l u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u + \sqrt{a_1}z \right) dx \\ & + a_2\rho_u \int_0^l u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_t + \sqrt{a_1}z_t \right) dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Finalmente, usando as desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) & \leq \sqrt{a_1}\left(a_3 - a_2^2/a_1\right)^2 \int_0^l |u_x|^2 dx - \frac{a_2^2}{2\sqrt{a_1}} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}}u_x + \sqrt{a_1}z_x \right|^2 dx \\ & + \left( \gamma^2\sqrt{a_1}c_p + \frac{a_2^2\rho_u}{\sqrt{a_1}} + a_1a_2^2\varepsilon\rho_u \right) \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{4\varepsilon} \int_0^l |z_t|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

onde  $c_p > 0$  denota a constante de Poincaré. Isto conclui a prova. ■

**Lema 2.6.** *Seja  $(z, u)$  a solução do sistema (2.1)–(2.3). Então, o funcional*

$$\mathcal{H}(t) := \rho_u \int_0^l u_t u dx - \frac{a_2\rho_z}{a_1} \int_0^l z_t u dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^l |u|^2 dx,$$

*satisfaz a seguinte estimativa*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(t) \leq \left( \rho_u + \frac{\eta a_2^2 \rho_z}{a_1^2} \right) \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{\rho_z}{4\eta} \int_0^l |z_t|^2 dx - \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx, \quad \forall \eta > 0.$$

**Prova.** Multiplicando a equação (2.1)<sub>1</sub> por  $-\frac{a_2}{a_1}u$  e integrando por partes no intervalo  $[0, l]$  temos

$$-\frac{a_2\rho_z}{a_1} \int_0^l z_{tt}u dx + a_2 \int_0^l z_{xx}u dx + \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^l u_{xx}u dx = 0. \quad (2.33)$$

Em seguida, usando a identidade  $z_{tt}u = \frac{\partial}{\partial t}z_tu - z_tu_t$  obtemos

$$-\frac{d}{dt} \frac{a_2\rho_z}{a_1} \int_0^l z_tu dx + \frac{a_2\rho_z}{a_1} \int_0^l z_tu_t dx - a_2 \int_0^l z_xu_x dx - \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^l |u_x|^2 dx = 0. \quad (2.34)$$

Da equação (2.25) temos

$$\frac{d}{dt} \rho_u \int_0^l u_tu dx - \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx + a_3 \int_0^l |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^l z_xu_x dx + \frac{d}{dt} \frac{\gamma}{2} \int_0^l |u|^2 dx = 0. \quad (2.35)$$

Adicionando as equações (2.34) e (2.35) ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_u \int_0^l u_tu dx - \frac{a_2\rho_z}{a_1} \int_0^l z_tu dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^l |u|^2 dx \right) &= \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx \\ &- a_3 \int_0^l |u_x|^2 dx - \frac{a_2\rho_z}{a_1} \int_0^l z_tu_t dx + \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^l |u_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo temos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) = \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx - a_3 \int_0^l |u_x|^2 dx - \frac{a_2\rho_z}{a_1} \int_0^l z_tu_t dx + \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^l |u_x|^2 dx. \quad (2.36)$$

Usando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t) &\leq \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx - \left(a_3 - a_2^2/a_1\right) \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{\rho_z}{4\eta} \int_0^l |z_t|^2 dx \\ &\quad + \frac{\eta a_2^2 \rho_z}{a_1^2} \int_0^l |u_t|^2 dx, \quad \forall \eta > 0. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. ■

Agora estamos em condições de provarmos um dos principais resultados deste capítulo.

**Teorema 2.7 (Decaimento exponencial).** *A energia total do sistema (2.1)–(2.3) satisfazendo a relação (1.11), decai exponencialmente para zero com  $t \rightarrow \infty$ . Isto é, existem constantes  $M > 0$  e  $\omega > 0$  independentemente das condições iniciais, tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.37)$$

**Prova.** Definimos o funcional Lyapunov dado por

$$\mathcal{L}(t) := N_1 E(t) + N_2 \mathcal{F}(t) + N_3 \mathcal{G}(t) + N_4 \mathcal{H}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.38)$$

onde  $N_1, N_2, N_3$  e  $N_4$  são constantes positivas definidas posteriormente. Além disso, verificamos que  $\mathcal{L}(t)$  e  $E(t)$  são equivalentes, ou seja, existem constantes positivas  $K_1$  e  $K_2$  tais que

$$K_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq K_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.39)$$

De fato, observamos que

$$|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| = N_2 |\mathcal{F}(t)| + N_3 |\mathcal{G}(t)| + N_4 |\mathcal{H}(t)| \leq \sigma E(t), \quad (2.40)$$

para algum  $\sigma > 0$ , e portanto a desigualdade (2.39) se sustenta para  $K_1 := N_1 - \sigma > 0$  e  $K_2 := N_1 + \sigma > 0$  com  $N_1 > \sigma$ . Decorre da lei de dissipação (2.5) e dos Lemas (2.4)–(2.6) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq & - \left[ \frac{N_1 \gamma}{\rho_u} + N_2 - N_3 \frac{C_\varepsilon}{\rho_u} - N_4 \left( 1 + \eta \frac{a_2^2 \rho_z}{a_1^2 \rho_u} \right) \right] \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx \\ & - \left( N_2 - \frac{N_3 \rho_u}{4\varepsilon \rho_z} - \frac{N_4}{4\eta} \right) \rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx - \left( \frac{N_3 a_2^2}{2\sqrt{a_1}} - N_2 \right) \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \\ & - \left[ N_4 - N_2 - N_3 \sqrt{a_1} \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \right] \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Escolhendo adequadamente as constantes abaixo

$$\varepsilon := \frac{N_3 \rho_u}{2\rho_z} \quad \text{e} \quad \eta := \frac{N_4}{2}, \quad (2.41)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq & - \left[ \frac{N_1 \gamma}{\rho_u} + N_2 - N_3 \frac{C_{N_3}}{\rho_u} - N_4 \left( 1 + N_4 \frac{a_2^2 \rho_z}{2a_1^2 \rho_u} \right) \right] \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx \\ & - (N_2 - 1) \rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx - \left( \frac{N_3 a_2^2}{2\sqrt{a_1}} - N_2 \right) \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx \\ & - \left[ N_4 - N_2 - N_3 \sqrt{a_1} \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \right] \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora escolhemos  $N_2 > 1$  e  $N_3 > (2\sqrt{a_1}/a_2^2)N_2$ . Desde que  $N_2$  e  $N_3$  estão fixos, escolhemos  $N_4$  suficientemente grande, *i.e.*,

$$N_4 > N_2 + N_3 \sqrt{a_1} \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \quad \text{com} \quad a_2^2 < a_1 a_3, \quad (2.42)$$

seguido por

$$N_1 > \max \left\{ N_3 \frac{C_{N_3}}{\gamma} + N_4 \frac{\rho_u}{\gamma} \left( 1 + N_4 \frac{a_2^2 \rho_z}{2a_1^2 \rho_u} \right), \sigma \right\}. \quad (2.43)$$

Portanto, garantimos que

$$\begin{aligned} \xi_1 &:= \frac{N_1 \gamma}{\rho_u} + N_2 - N_3 \frac{C_{N_3}}{\rho_u} - N_4 \left( 1 + N_4 \frac{a_2^2 \rho_z}{2a_1^2 \rho_u} \right) > 0, & \xi_2 &:= N_2 - 1 > 0, \\ \xi_3 &:= \frac{N_3 a_2^2}{2\sqrt{a_1}} - N_2 > 0 & \text{e} & \xi_4 := N_4 - N_2 - N_3 \sqrt{a_1} (a_3 - a_2^2/a_1) > 0. \end{aligned}$$

Consequentemente concluímos que existe uma constante  $N_0 := 2 \min_{1 \leq i \leq 4} \{\xi_i\} > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -N_0 E(t) \iff \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\frac{N_0}{K_2} \mathcal{L}(t) \forall t \geq 0. \quad (2.44)$$

Devido à equivalência entre  $\mathcal{L}(t)$  e  $E(t)$  temos que

$$E(t) \leq \frac{N_1 + \sigma}{N_1 - \sigma} E(0) e^{-\frac{N_0}{N_1 + \sigma} t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.45)$$

Isto conclui a prova. ■

## 2.3 Abordagem numérica

Nesta seção, o foco principal é a discretização do sistema (2.1)–(2.3) e a reprodução a nível discreto dos resultados obtidos nos Teoremas 2.3 e 2.7, usando o método explícito de diferenças finitas. É importante ressaltar que não estamos interessados em analisar questões referentes à convergência da solução numérica para a solução exata, mas vale ressaltar que os esquemas numéricos utilizados são todos consistentes e possuem ordem de  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$  (ver [24]).

### 2.3.1 Esquema totalmente discreto em diferenças finitas e propriedades

Aqui consideramos  $J, N \in \mathbb{N}$ , definimos  $\Delta x = L/(J + 1)$ ,  $\Delta t = T/(N + 1)$  e construímos a seguinte malha

$$\begin{cases} 0 = x_0 < x_1 = \Delta x < \dots < x_j = j\Delta x < \dots < x_J < x_{J+1} = (J + 1)\Delta x = L, \\ 0 = t_0 < t_1 = \Delta t < \dots < t_n = n\Delta t < \dots < t_N < t_{N+1} = (N + 1)\Delta t = T, \end{cases}$$

Considerando o sistema de equações (2.1)–(2.3), nosso problema discreto consiste em obter  $(z_j^n, u_j^n)$  tal que

$$\begin{cases} \rho_z \nabla_t \bar{\nabla}_t z_j^n - a_1 \nabla_x \bar{\nabla}_x z_j^n - a_2 \nabla_x \bar{\nabla}_x u_j^n = 0, \\ \rho_u \nabla_t \bar{\nabla}_t u_j^n - a_3 \nabla_x \bar{\nabla}_x u_j^n - a_2 \nabla_x \bar{\nabla}_x z_j^n + \gamma \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} \right) u_j^n = 0, \end{cases} \quad (2.46)$$

satisfazendo a relação (1.11), para todo  $j = 1, 2, \dots, J$  e  $n = 1, 2, \dots, N$ . Aqui assumimos os seguintes operadores numéricos de diferenças finitas

$$\begin{cases} \nabla_t z_j^n := \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t}, & \bar{\nabla}_t z_j^n := \frac{z_j^n - z_j^{n-1}}{\Delta t}, & \nabla_t \bar{\nabla}_t z_j^n := \frac{z_j^{n+1} - 2z_j^n + z_j^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ \nabla_x z_j^n := \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x}, & \bar{\nabla}_x z_j^n := \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{\Delta x}, & \nabla_x \bar{\nabla}_x z_j^n := \frac{z_{j+1}^n - 2z_j^n + z_{j-1}^n}{\Delta x^2}, \\ \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} u_j^n := \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}, \end{cases}$$

com expressões semelhantes para  $\nabla_t u_j^n$ ,  $\bar{\nabla}_t u_j^n$ ,  $\nabla_x u_j^n$ ,  $\bar{\nabla}_x u_j^n$ ,  $\nabla_t \bar{\nabla}_t u_j^n$  e  $\nabla_x \bar{\nabla}_x u_j^n$ . Denotamos por  $z_j^n$  e  $u_j^n$  a aproximação numérica para as soluções  $z$  e  $u$  em pontos  $(x_j, t_n)$  da malha. Para as condições iniciais, usamos

$$z_j^0 = z_{0j}, \quad \frac{z_j^1 - z_j^{-1}}{2\Delta t} = z_{1j}, \quad u_j^0 = u_{0j}, \quad \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\Delta t} = u_{1j}, \quad j = 0, 1, \dots, J + 1, \quad (2.47)$$



e para as condições de contorno adotamos

$$\begin{cases} z_0^n = z_{J+1}^n - z_J^n = 0, & \forall n = 0, 1, \dots, N + 1, \\ u_0^n = u_{J+1}^n - u_J^n = 0, & \forall n = 0, 1, \dots, N + 1. \end{cases} \quad (2.48)$$

A energia discreta associada ao esquema numérico (2.46)–(2.48) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n := & \rho_z \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J (\nabla_t z_j^n)^2 + \rho_u \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J (\nabla_t u_j^n)^2 + (a_3 - a_2^2/a_1) \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J (\nabla_x u_j^{n+1} \cdot \nabla_x u_j^n) \\ & + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \nabla_x u_j^{n+1} + \sqrt{a_1} \nabla_x z_j^{n+1} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \nabla_x u_j^n + \sqrt{a_1} \nabla_x z_j^n \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

para todo  $n = 0, 1, \dots, N$ .

*Observação 2.8.* O procedimento usado na construção da energia discreta (2.49) é análogo ao usado no problema contínuo (2.1)–(2.3). Ele está baseado no trabalho de Strauss e Vazquez [49] e Negreanu e Zuazua [28]. Note que comparando (2.4) e (2.49) observamos que

$$\begin{cases} \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J (\nabla_x u_j^{n+1} \cdot \nabla_x u_j^n) \approx \frac{1}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx, \\ \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \nabla_x u_j^{n+1} + \sqrt{a_1} \nabla_x z_j^{n+1} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \nabla_x u_j^n + \sqrt{a_1} \nabla_x z_j^n \right) \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx, \end{cases}$$

que não são quantidades positivas definidas e, portanto, a energia discreta não é positiva definida. No entanto, os experimentos numéricos mostram valores positivos para a energia  $\mathcal{E}^n$ .

O teorema seguinte, além de tratar da construção da energia discreta e da taxa de variação, também garante a sua monotonicidade.

**Teorema 2.9 (Lei de dissipação de energia).** *Seja  $(z_j^n, u_j^n)$  a solução numérica do problema (2.46)–(2.48) satisfazendo a relação (1.11). Então, para todo  $\Delta t, \Delta x \in (0, 1)$ , a taxa de*

variação da energia discreta  $\mathcal{E}^n$  no instante  $t_n$  é dada por

$$\frac{\mathcal{E}^n - \mathcal{E}^{n-1}}{\Delta t} = -\gamma \Delta x \sum_{j=0}^J \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} u_j^n \right)^2 \leq 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.50)$$

**Prova.** Multiplicando a equação (2.46)<sub>1</sub> por  $\Delta x \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} z_j^n \right)$  e adicionando para  $j \in \{1, 2, \dots, J\}$  obtemos

$$\Delta x \sum_{j=1}^J \left( \rho_z \nabla_t \bar{\nabla}_t z_j^n - a_1 \nabla_x \bar{\nabla}_x z_j^n - a_2 \nabla_x \bar{\nabla}_x u_j^n \right) \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} z_j^n \right) = 0. \quad (2.51)$$

Fazendo algumas simplificações nos termos de (2.51) e tendo em mente a condição de contorno  $z_0^n = 0$  para todo  $n = 1, 2, \dots, N$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^n &:= \rho_z \Delta x \sum_{j=1}^J \left( \nabla_t \bar{\nabla}_t z_j^n \right) \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} z_j^n \right) = \frac{\rho_z \Delta x}{2 \Delta t^3} \sum_{j=1}^J \left[ \left( z_j^{n+1} - z_j^n \right) \left( z_j^{n+1} - z_j^n + z_j^n - z_j^{n-1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( z_j^n - z_j^{n-1} \right) \left( z_j^{n+1} - z_j^n + z_j^n - z_j^{n-1} \right) \right] \\ &= \frac{\rho_z \Delta x}{2 \Delta t^3} \sum_{j=0}^J \left[ \left( z_j^{n+1} - z_j^n \right)^2 - \left( z_j^n - z_j^{n-1} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\mathcal{I}_1^n = \frac{\rho_z \Delta x}{2 \Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \frac{\rho_z \Delta x}{2 \Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_j^n - z_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2. \quad (2.52)$$

Da mesma forma, após algumas simplificações, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2^n &:= -a_1 \Delta x \sum_{j=1}^J \left( \nabla_x \bar{\nabla}_x z_j^n \right) \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} z_j^n \right) \\ &= a_1 \frac{\Delta x}{\Delta x} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_{j+1}^{n-1}}{2 \Delta t} - \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n-1}}{2 \Delta t} \right) \\ &\quad + a_1 \frac{\Delta x}{\Delta x} \left( \frac{z_1^n - z_0^n}{\Delta x} \frac{z_0^{n+1} - z_0^{n-1}}{2 \Delta t} - \frac{z_{J+1}^n - z_J^n}{\Delta x} \frac{z_{J+1}^{n+1} - z_{J+1}^{n-1}}{2 \Delta t} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

e também

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_3^n &:= -a_2 \Delta x \sum_{j=1}^J (\nabla_x \bar{\nabla}_x u_j^n) \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} z_j^n \right) = -a_2 \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n-1} - z_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
 &+ a_2 \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n+1}}{\Delta x} \right) - a_2 \frac{\Delta x}{\Delta x} \left( \frac{u_{J+1}^n - u_J^n}{\Delta x} \frac{z_{J+1}^{n+1} - z_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
 &+ a_2 \frac{\Delta x}{\Delta x} \left( \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} \frac{z_0^{n+1} - z_0^{n-1}}{2\Delta t} \right). \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

Substituindo  $\mathcal{I}_1^n$ ,  $\mathcal{I}_2^n$  e  $\mathcal{I}_3^n$  na equação (2.51) temos

$$\begin{aligned}
 &\frac{\rho_z \Delta x}{2\Delta t^3} \sum_{j=0}^J (z_j^{n+1} - z_j^n)^2 - \frac{\rho_z \Delta x}{2\Delta t^3} \sum_{j=0}^J (z_j^n - z_j^{n-1})^2 \\
 &+ a_1 \frac{\Delta x}{\Delta x} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n-1} - z_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
 &+ a_2 \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n+1}}{\Delta x} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n-1} - z_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
 &+ a_2 \frac{\Delta x}{\Delta x} \left( \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} \frac{z_0^{n+1} - z_0^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{J+1}^n - u_J^n}{\Delta x} \frac{z_{J+1}^{n+1} - z_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
 &+ a_1 \frac{\Delta x}{\Delta x} \left( \frac{z_1^n - z_0^n}{\Delta x} \frac{z_0^{n+1} - z_0^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{z_{J+1}^n - z_J^n}{\Delta x} \frac{z_{J+1}^{n+1} - z_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) = 0. \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Analogamente, a partir da equação (2.46)<sub>2</sub> obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_u \Delta x}{2\Delta t^3} \sum_{j=0}^J \left( u_j^{n+1} - u_j^n \right)^2 - \frac{\rho_u \Delta x}{2\Delta t^3} \sum_{j=0}^J \left( u_j^n - u_j^{n-1} \right)^2 \\
& + a_3 \frac{\Delta x}{\Delta x} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{2\Delta t} - \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
& + a_2 \frac{\Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} - \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& + a_2 \frac{\Delta x}{\Delta x} \left( \frac{z_1^n - z_0^n}{\Delta x} \frac{u_0^{n+1} - u_0^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{z_{J+1}^n - z_J^n}{\Delta x} \frac{u_{J+1}^{n+1} - u_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
& + a_3 \frac{\Delta x}{\Delta x} \left( \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} \frac{u_0^{n+1} - u_0^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{J+1}^n - u_J^n}{\Delta x} \frac{u_{J+1}^{n+1} - u_{J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \\
& + \gamma \Delta x \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 = 0. \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Adicionando as equações (2.55), (2.56) e usando as condições de contorno (2.48) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_z \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{\rho_u \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \frac{a_3 \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{a_2 \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} + \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{a_1 \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \right) - \frac{\rho_z \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_j^n - z_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\
& - \frac{\rho_u \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{a_3 \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{a_2 \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n-1} - z_j^{n-1}}{\Delta x} + \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\
& - \frac{a_1 \Delta x}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \frac{z_{j+1}^{n-1} - z_j^{n-1}}{\Delta x} \right) + \gamma \Delta x \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Agora adicionando e subtraindo os termos

$$\frac{a_2^2 \Delta x}{a_1 \Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \quad \text{e} \quad \frac{a_2^2 \Delta x}{a_1 \Delta t} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \quad (2.57)$$

na equação acima, temos

$$\begin{aligned} & \rho_z \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_u \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 \\ & + \left( a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \\ & + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} + \sqrt{a_1} \frac{z_{j+1}^{n+1} - z_j^{n+1}}{\Delta x} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \sqrt{a_1} \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \right) \\ & - \rho_z \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{z_j^n - z_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - \rho_u \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \\ & - \left( a_3 - \frac{a_2^2}{a_1} \right) \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ & - \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^J \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \sqrt{a_1} \frac{z_{j+1}^n - z_j^n}{\Delta x} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1}}{\Delta x} + \sqrt{a_1} \frac{z_{j+1}^{n-1} - z_j^{n-1}}{\Delta x} \right) \\ & + \gamma \Delta x \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Finalmente, usando a energia  $\mathcal{E}^n$  dada em (2.49), obtemos

$$\frac{\mathcal{E}^n - \mathcal{E}^{n-1}}{\Delta t} = -\gamma \Delta x \sum_{j=0}^J \left( \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \leq 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.59)$$

Portanto,

$$\mathcal{E}^n \leq \mathcal{E}^0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.60)$$

Isto conclui a prova. ■

**Corolário 2.10 (Lei de conservação de energia).** *Seja  $(z_j^n, u_j^n)$  solução do esquema numérico (2.46)–(2.48) satisfazendo a relação (1.11) com  $\gamma = 0$ . Então, para todo  $\Delta t, \Delta x \in (0, 1)$ , temos*

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.61)$$

Os esquemas numéricos explícitos de integração no tempo, como os adotados em (2.46)–(2.48) são condicionalmente estáveis e, portanto, dependem de uma relação entre os parâmetros de malha  $\Delta t$  e  $\Delta x$ . No caso aqui tratado, a condição Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [39, 47] é dada por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}, \quad (2.62)$$

onde  $c > 0$  é uma constante que depende dos parâmetros físicos do problema. A proposição seguinte trata desse resultado.

**Proposição 2.11 (Condição de estabilidade).** *O esquema de diferenças finitas (2.46)–(2.48) satisfazendo a relação (1.11) é condicionalmente estável se*

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}, \quad (2.63)$$

onde  $c := \sqrt{\lambda_1 / \min\{\rho_z, \rho_u\}}$  e  $\lambda_1 > 0$  é o maior autovalor da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Em particular, se  $a_1 = a_3 = \rho_z = \rho_u = 1$  e  $a_2 = 0$ , obtemos  $\Delta t \leq \Delta x$ .

**Prova.** Inicialmente escrevemos o sistema (2.1)–(2.3) com  $\gamma = 0$  na forma

$$\begin{pmatrix} \rho_z & 0 \\ 0 & \rho_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}_{tt} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}}_{A:=} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}_{xx}, \quad (2.65)$$

onde  $A$  satisfazendo a relação (1.11), é uma matriz simétrica positiva definida. Como  $A$  é simétrica, implica que é diagonalizável, ou seja, existe uma matriz inversível  $P$  tal que  $A = P^{-1}DP$  onde  $D$  é uma matriz diagonal formada pelos autovalores de  $A$ , *i.e.*,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}}_{A:=} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}:=}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{D:=} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{P:=}, \quad (2.66)$$

onde  $V_1 = (x_1, y_1)$  e  $V_2 = (x_2, y_2)$  são autovetores associados ao autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) respectivamente. Logo podemos reescrever (2.65) na forma

$$\begin{pmatrix} \rho_z & 0 \\ 0 & \rho_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}_{tt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}_{xx}. \quad (2.67)$$

Além disso, como  $A$  é positiva definida, os seus autovalores são positivos, *i.e.*,

$$\lambda_k = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_1 - a_3)^2 + 4a_2^2} > 0, \quad k \in \{1, 2\}. \quad (2.68)$$

Fazendo a mudança de variável

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

obtemos as equações desacopladas nas variáveis  $(\phi, \psi)$  dadas por

$$\begin{cases} \rho_z \phi_{tt} - \lambda_1 \phi_{xx} = 0, \\ \rho_u \psi_{tt} - \lambda_2 \psi_{xx} = 0. \end{cases} \quad (2.70)$$

Em seguida, discretizando qualquer uma das equações dadas acima obtemos

$$\rho_\alpha \frac{\varphi_j^{n+1} - 2\varphi_j^n + \varphi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \lambda_k \frac{\varphi_{j+1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad (2.71)$$

com  $j = 1, 2, \dots, J$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $\varphi_j^n \in \{\phi_j^n, \psi_j^n\}$ ,  $\alpha \in \{z, u\}$  e  $k \in \{1, 2\}$ , respectivamente.

Agora, seguindo os passos de Strikwerda [50], para obtermos o fator de amplificação  $g$ , substituímos  $\varphi_j^n$  por  $g^n e^{i\theta j}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) no esquema numérico dado acima e obtemos

$$\rho_\alpha \frac{g - 2 + g^{-1}}{\Delta t^2} g^n e^{i\theta j} - \lambda_k \frac{e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}}{\Delta x^2} g^n e^{i\theta j} = 0. \quad (2.72)$$

Consequentemente, usando a relação de Euler  $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$ , temos

$$g^2 - 2 \left( 1 - 2 \frac{\lambda_k}{\rho_\alpha} \sigma^2 \sin^2(\theta/2) \right) g + 1 = 0, \quad (2.73)$$

onde  $\sigma := \Delta t / \Delta x$ . Assim, o fator de amplificação é dado por

$$g = 1 - 2 \frac{\lambda_k}{\rho_\alpha} \sigma^2 \sin^2(\theta/2) \pm \sqrt{\left( 1 - 2 \frac{\lambda_k}{\rho_\alpha} \sigma^2 \sin^2(\theta/2) \right)^2 - 1}. \quad (2.74)$$

A fim de obtermos  $|g| \leq 1$ , assumimos  $\left| 1 - 2 \frac{\lambda_k}{\rho_\alpha} \sigma^2 \sin^2(\theta/2) \right| \leq 1$  o que implica em

$$\sigma^2 \leq \frac{\rho_\alpha}{\lambda_k} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad (2.75)$$

com  $\alpha \in \{z, u\}$  e  $k \in \{1, 2\}$ . Portanto,

$$\sigma^2 \leq \frac{\rho_z}{\lambda_1} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad \text{e} \quad \sigma^2 \leq \frac{\rho_u}{\lambda_2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \theta \in (0, 2\pi). \quad (2.76)$$

Agora devemos garantir que

$$\sigma^2 \leq \min \left\{ \frac{\rho_z}{\lambda_1} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}, \frac{\rho_u}{\lambda_2} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right\} = \min_{\substack{\alpha \in \{z, u\} \\ k \in \{1, 2\}}} \left\{ \frac{\rho_\alpha}{\lambda_k} \right\} \min_{\theta \in (0, 2\pi)} \left\{ \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right\}.$$



De fato, como  $\lambda_2 < \lambda_1$  e  $\min_{\theta \in (0, 2\pi)} \left\{ \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right\} = 1$ , temos que

$$\sigma^2 \leq \frac{\min \{ \rho_z, \rho_u \}}{\lambda_1}. \quad (2.77)$$

Consequentemente, concluímos que

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}, \quad (2.78)$$

onde  $c := \sqrt{\lambda_1 / \min \{ \rho_z, \rho_u \}}$ . ■

### 2.3.2 Simulações numéricas

Nesta seção, apresentamos as simulações numéricas obtidas a partir do esquema de diferenças finitas (2.46)–(2.48).

Para estas simulações, adotamos as condições iniciais

$$z_{0j} = 2 \sin \left( \frac{(2n+1)\pi x_j}{2L} \right), \quad u_{0j} = \sin \left( \frac{(2n+1)\pi x_j}{2L} \right), \quad z_{1j} = u_{1j} = 0, \quad (2.79)$$

com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j = 0, 1, \dots, J+1$ , satisfazendo as condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann (2.48) e consideramos os seguintes dados de malha:  $L = 3m$ ,  $J = 64$ ,  $T = 8s$  e  $N = 3600$ . Além disso, adotamos os valores adequados de cada grandeza física, *i.e.*,  $\rho_z = 5 \times 10^5 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\rho_u = 6 \times 10^4 \text{ Kg/m}^3$ ,  $a_1 = 5,2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $a_2 = 1,3 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $a_3 = 3,7 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ .

O principal objetivo destas simulações é verificar empiricamente que o esquema numérico explícito de diferenças finitas é preciso em reproduzir as propriedades presentes no modelo contínuo, desde que, observada a condição (2.62). Nesse sentido, seguimos a terminologia utilizada por Anguelov *et al.* [5], de onde asseguramos que nossos resultados da energia discreta estão de acordo com a seguinte definição geral:

**Definição 2.12.** Seja  $P$  alguma propriedade da solução exata  $u$  de um problema. Um esquema numérico que produz uma sequência  $(u_i^n)$  de soluções aproximadas para  $u$  é denominado qualitativamente estável com respeito a  $P$  se, para todos os tamanhos de passo  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , as soluções discretas replicam a propriedade  $P$ .

A seguir, fornecemos as simulações numéricas da solução  $(z_j^n, u_j^n)$  e da energia discreta  $\mathcal{E}^n$  associada ao esquema numérico (2.46)–(2.48) considerando dois casos distintos.

### 2.3.2.1 Sistema conservativo: Caso $\gamma = 0$

As simulações a seguir, mostram o comportamento conservativo do esquema numérico (2.46)–(2.48) e estão de acordo com a definição usada por Anguelov *et al.* [5], com relação à lei de conservação de energia (ver Corolário 2.10).

Nas Figuras 2.1 e 2.2 observamos o comportamento das solução numérica  $(z_j^n, u_j^n)$  na ausência do termo dissipativo  $\gamma \left( \frac{\nabla_t + \bar{\nabla}_t}{2} \right) u_j^n$ . Além disso, destacamos as condições de contorno do tipo Dirichlet–Neumann.

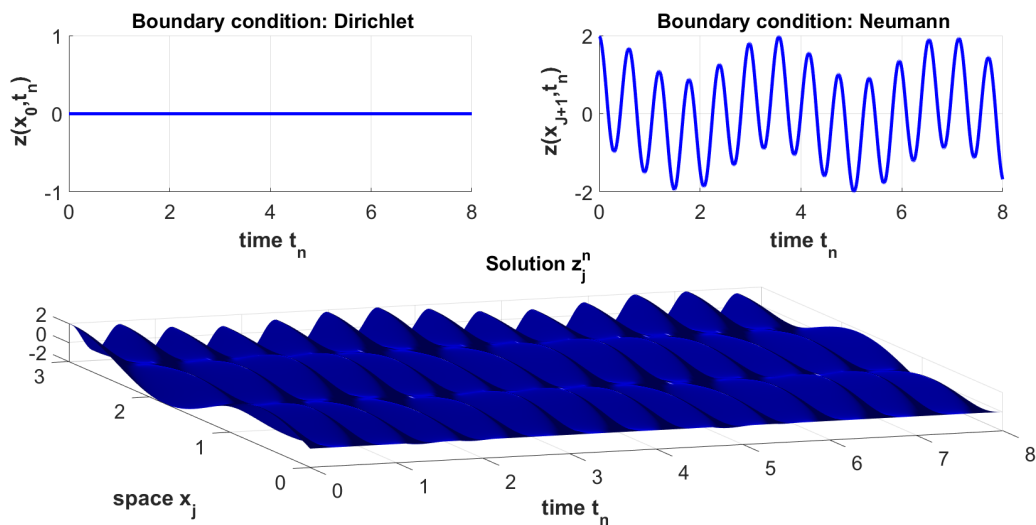


FIGURA 2.1: Solução numérica  $z_j^n$  vs. condições de contorno.

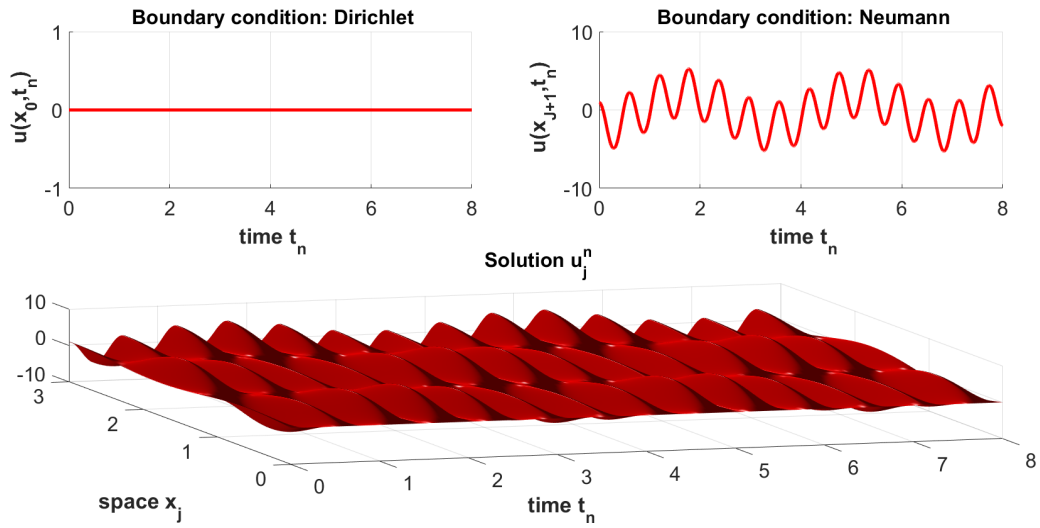


FIGURA 2.2: Solução numérica  $u_j^n$  vs. condições de contorno.

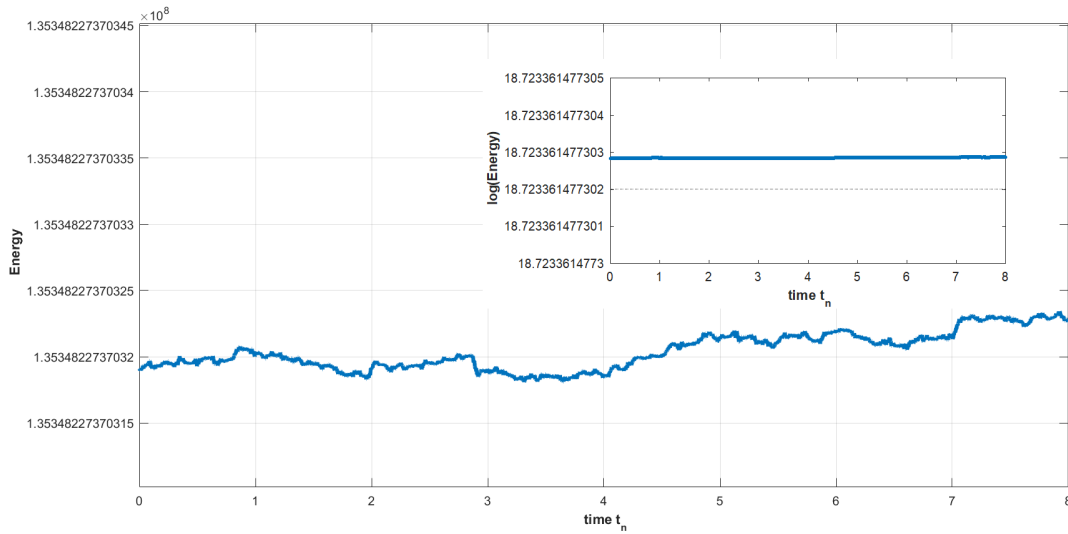


FIGURA 2.3: Energia discreta. Esta simulação garante uma medida de precisão do método explícito na reprodução do caráter conservativo do esquema numérico (2.46)–(2.48) com  $\gamma = 0$ .

*Observação 2.13.* Ressaltamos que o ruído numérico observado no gráfico da energia (Fig. 2.3) não é significativo, trata-se apenas de uma questão de escala gráfica no eixos horizontal e vertical. O gráfico constante de  $y = \log(\text{Energy})$  confirma nossa afirmação.

### 2.3.2.2 Sistema dissipativo: Caso $\gamma > 0$

As simulações a seguir, mostram o comportamento dissipativo da energia discreta  $\mathcal{E}^n$  em relação à lei de dissipação (ver Teorema 2.9). Como no caso anterior, os resultados para os casos dissipativos estão de acordo com a definição usada por Anguelov *et al.* [5].

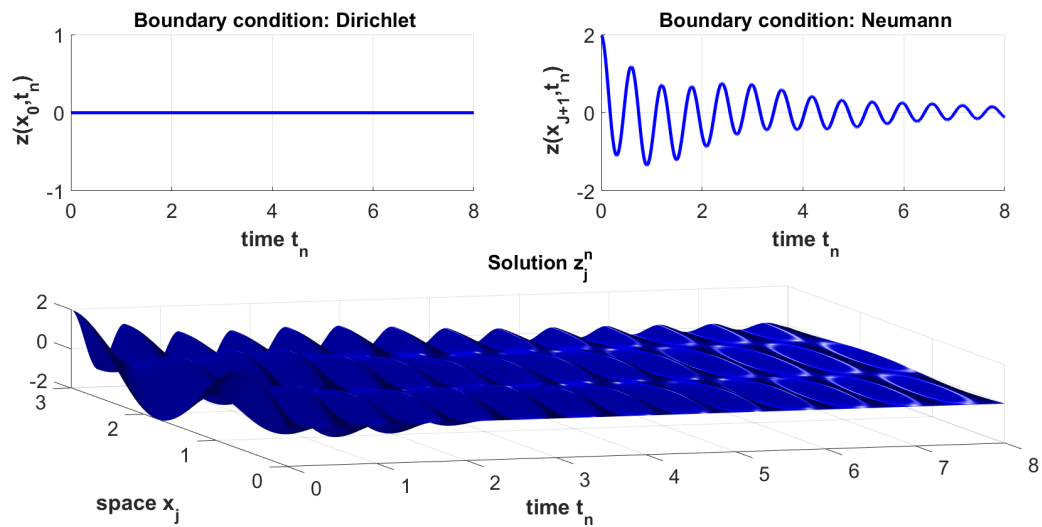


FIGURA 2.4: Solução numérica  $z_j^n$  vs. condições de contorno.

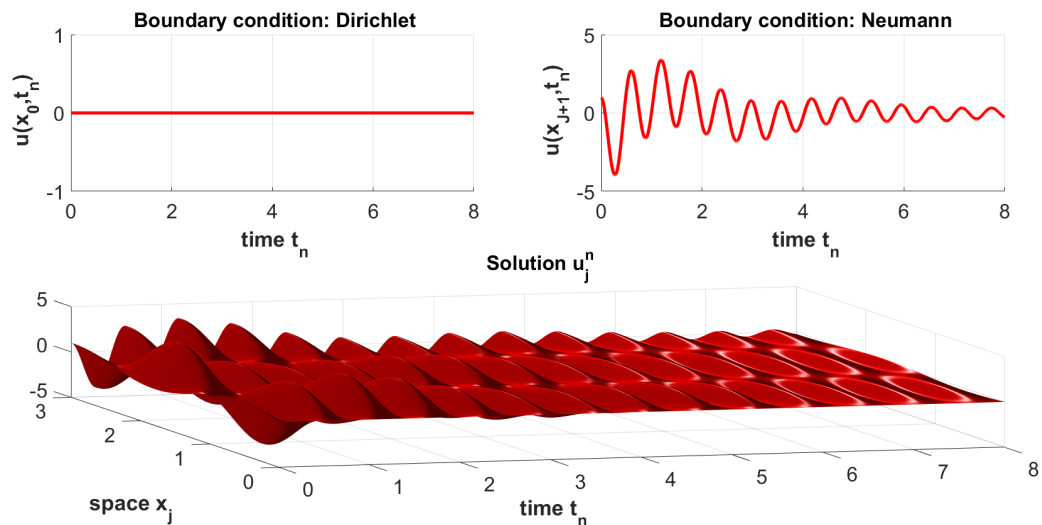


FIGURA 2.5: Solução numérica  $u_j^n$  vs. condições de contorno.

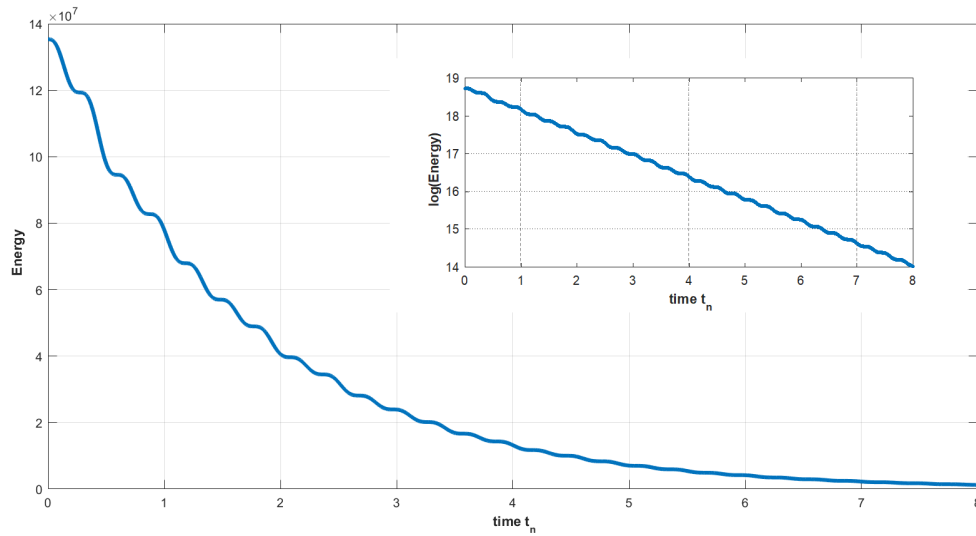


FIGURA 2.6: Energia discreta. Esta simulação garante uma medida de precisão do método explícito na reprodução do caráter dissipativo do esquema numérico (2.46)–(2.48) com  $\gamma = 9.75 \times 10^4 \text{ N/m}^4$ .

*Observação 2.14.* Aqui, observamos no gráfico de  $y = \log(\text{Energy})$ , que a energia discreta possui a propriedade de decaimento exponencial.

## CAPÍTULO 3

---

### Estabilização exponencial para o sistema com termo de retardo

---

Na modelagem de problemas envolvendo o inchamento de solos argilosos, é extremamente importante ter uma descrição adequada do comportamento microscópico da água adsorvida (água entre as plaquetas). É bem conhecido que o processo de consolidação geralmente envolve dois estágios de compressão diferentes, o primário e o secundário. No estágio primário a pressão de fase é gradualmente transferida para o esforço efetivo, enquanto que na compressão secundária ocorre uma deformação contínua depois que a água a granel é substancialmente drenada. Além disso, ambos podem ocorrer simultaneamente.

Devido a fatores intrínsecos que caracterizam o comportamento viscoso à fluência da estrutura argilosa no estágio secundário, ainda não há uma compreensão completa dos mecanismos subjacentes a esse fenômeno. No entanto, Sridharan e Rao [48] sugeriram que a compressão secundária está relacionada à deformação retardada da partícula de argila depois que a água bruta é drenada dos poros maiores na estrutura primária (ver também Hueckel [20]). Esta deformação

secundária surge de alguma forma devido à drenagem retardada da água adsorvida em relação ao fluxo da fase a granel. Assim, é natural querermos estudar o comportamento de sistemas de inchamento de solos levando em consideração os efeitos do retardo no deslocamento do fluido. Mais precisamente, considerando o seguinte problema

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi_1 z_t + \xi_2 z_t(x, t - \tau) = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.1)$$

com condições de contorno

$$z(0, t) = z_x(l, t) = u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

e condições iniciais

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l). \quad (3.3)$$

### 3.1 Existência e unicidade de solução

Nesta seção, estudamos a boa colocação do problema (3.1) usando a teoria de semigrupos de operadores lineares [31]. Para isso, seguimos os passos de Nicaise e Pignotti [29], usando a mudança de variável,

$$\eta(x, \rho, t) = z_t(x, t - \tau\rho), \quad x \in (0, l), \quad \rho \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Em seguida, consideramos equação diferencial parcial dada por

$$\tau\eta_t + \eta_\rho = 0, \quad x \in (0, l), \quad \rho \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (3.5)$$

Com isso temos um novo sistema dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi_1 z_t + \xi_2 \eta(x, 1, t) = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \tau \eta_t + \eta_\rho = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.6)$$

com condições de contorno

$$z(0, t) = z_x(l, t) = u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l), \\ \eta(x, \rho, 0) &= f_0(x, -\rho\tau), \quad (x, \rho) \in (0, l) \times (0, 1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

A energia total do sistema dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &:= \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx + \frac{\tau \xi_1}{2} \int_0^l \int_0^1 |\eta(x, 1, t)|^2 d\rho dx, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

é positiva definida desde que a relação (1.11) seja satisfeita.

*Observação 3.1.* A construção da energia segue de modo análogo os passos da Proposição 2.1. Porém, como o amortecimento atua na primeira equação, precisamos destacar na energia (3.9) o termo  $\int_0^l |z_x|^2 dx$  ao invés do termo  $\int_0^l |u_x|^2 dx$  destacado em (2.4). Ver Proposição 3.3.

A seguir, definimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_*^1(0, l) \times L^2(0, l) \times H_*^1(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2((0, l) \times (0, 1)), \quad (3.10)$$



denominado espaço de fase, onde

$$H_*^1(0, l) := \left\{ f \in H^1(0, l); f(0) = 0 \right\}, \quad (3.11)$$

é um espaço de Sobolev. Além disso, em  $\mathcal{H}$  consideramos o produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &:= \rho_z \int_0^l z_1 \tilde{z}_1 dx + \rho_u \int_0^l u_1 \tilde{u}_1 dx + (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l z_{0,x} \tilde{z}_{0,x} dx \\ &+ \int_0^l \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_{0,x} + \sqrt{a_3} u_{0,x} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \tilde{z}_{0,x} + \sqrt{a_3} \tilde{u}_{0,x} \right) dx \\ &+ \tau \xi_1 \int_0^l \int_0^1 \eta_0 \tilde{\eta}_0 d\rho dx, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $U = (z_0, z_1, u_0, u_1, \eta_0)^T$  e  $\tilde{U} = (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{\eta}_0)^T$ . A norma induzida pelo produto interno é

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 := \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (3.13)$$

Note que o sistema (3.6) pode ser reescrito como um problema de Cauchy

$$\begin{cases} \Phi_t(t) = \mathcal{A}\Phi(t), & t > 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde  $\Phi(t) = \left( z(\cdot, t), z_t(\cdot, t), u(\cdot, t), u_t(\cdot, t), \eta(\cdot, 1, t) \right)^T$  é a solução de (3.14) e  $\Phi_0 = \left( z_0(\cdot), z_1(\cdot), u_0(\cdot), u_1(\cdot), f_0(\cdot, -\tau) \right)^T$  a condição inicial.

O operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é definido por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ a_1 \rho_z^{-1}(\cdot)_{xx} & -\rho_z^{-1}(\xi_1 + \xi_2)I(\cdot) & a_2 \rho_z^{-1}(\cdot)_{xx} & 0 & -\xi_2 \rho_z^{-1} \int_0^1 (\cdot)_\rho d\rho \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) & 0 \\ a_2 \rho_u^{-1}(\cdot)_{xx} & 0 & a_3 \rho_u^{-1}(\cdot)_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau^{-1}(\cdot)_\rho \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde  $I(\cdot)$  denota o operador identidade. O domínio de  $\mathcal{A}$  é dado por

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ U = (z_0, z_1, u_0, u_1, \eta_0)^T \in \mathbf{H}; z_{0,x}(L) = u_{0,x}(L) = 0 \right\},$$

onde

$$\mathbf{H} := \left( (H^2(0, l) \cap H_*^1(0, l)) \times H_*^1(0, l) \right)^2 \times L^2((0, l); H^1(0, l)). \quad (3.16)$$

O operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo, pois para  $|\xi_2| < \xi_1$  e para cada  $U = (z_0, z_1, u_0, u_1, \eta_0)^T \in D(\mathcal{A})$  temos

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq -C_1 \int_0^l \left( |z_1|^2 + |\eta_0(x, 1)|^2 \right) dx \leq 0, \quad (3.17)$$

onde  $C_1 := (\xi_1 - |\xi_2|)/2 > 0$ . Desde que  $\mathcal{A}$  seja um operador dissipativo e o 0 pertence ao conjunto resolvente de  $\mathcal{A}$ , temos pelo Teorema de Lumer–Phillips ([31], Teorema 4.3) que o operador  $\mathcal{A}$  é um gerador infinitesimal de  $C_0$ -semigrupo de contrações  $S(t) = e^{At}$  sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . A partir disso, provamos o seguinte resultado:

**Teorema 3.2.** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{H}$  definidos como anteriormente. Para qualquer  $U_0 \in \mathcal{H}$ , o sistema (3.14) possui uma única solução fraca  $U(t) = e^{At}U_0 \in C([0, \infty); \mathcal{H})$ . Além disso, se  $U_0 \in D(\mathcal{A})$ ,  $U(t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathcal{A}))$  é a solução forte do sistema (3.14).*

## 3.2 Decaimento da energia

Nesta seção estudamos o decaimento exponencial da energia associada ao sistema (3.6) usando o método da energia. Mas antes, precisamos garantir a dissipação de energia do sistema. A proposição seguinte trata desse resultado.

**Proposição 3.3.** *Seja  $(z, u, \eta)$  a solução do sistema (3.6) satisfazendo a relação (1.11). Então para  $|\xi_2| < \xi_1$ , a energia total do sistema satisfaz a lei de dissipação dada por*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq -\frac{\gamma}{2} \int_0^l \left( |z_t|^2 + |\eta(x, 1, t)|^2 \right) dx, \quad (3.18)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva.

**Prova.** Multiplicando a equação (3.6)<sub>1</sub> por  $z_t$ , integrando por partes  $[0, l]$  e levando em consideração as condições de contorno, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_z}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |z_x|^2 dx + a_2 \int_0^l u_x z_{xt} dx + \xi_1 \int_0^l |z_t|^2 dx \\ & + \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z_t dx = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De modo análogo, multiplicando a equação (3.6)<sub>2</sub> por  $u_t$  temos

$$\frac{\rho_u}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{a_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^l z_x u_{xt} dx = 0. \quad (3.20)$$

Agora, multiplicando a equação (3.6)<sub>3</sub> por  $\xi_1 \eta$  e integrando em  $[0, l] \times [0, 1]$  obtemos

$$\frac{\tau \xi_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 |\eta|^2 d\rho dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} |\eta|^2 d\rho dx = 0.$$

Consequentemente,

$$\frac{\tau\xi_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 |\eta|^2 d\rho dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l \left( |\eta(x, 1, t)|^2 - |\eta(x, 0, t)|^2 \right) dx = 0.$$

Usando (3.4), concluímos que

$$\frac{\tau\xi_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 |\eta|^2 d\rho dx - \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |\eta(x, 1, t)|^2 dx = 0. \quad (3.21)$$

Adicionando as equações (3.19), (3.20) e (3.21) temos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_z}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |z_x|^2 dx + a_2 \frac{d}{dt} \int_0^l z_x u_x dx + \frac{a_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |u_x|^2 dx \\ & + \frac{\tau\xi_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 |\eta|^2 d\rho dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |\eta(x, 1, t)|^2 dx + \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z_t dx = 0. \end{aligned}$$

Após adicionarmos e subtrairmos o termo  $\frac{a_2^2}{2a_3} \frac{d}{dt} \int_0^l |z_x|^2 dx$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_z}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \frac{d}{dt} \int_0^l |z_x|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} u_x + \sqrt{a_3} z_x \right|^2 dx + \frac{\tau\xi_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \int_0^1 |\eta|^2 d\rho dx = -\frac{\xi_1}{2} \int_0^l |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\ & - \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z_t dx - \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Finalmente, usando a desigualdade de Young temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq -\frac{\gamma}{2} \int_0^l \left( |z_t|^2 + |\eta(x, 1, t)|^2 \right) dx \quad (3.23)$$

onde  $\mathcal{E}(t)$  é definida em (3.9) e  $\gamma := \xi_1 - |\xi_2| > 0$ , desde que  $|\xi_2| < \xi_1$ . ■

### 3.2.1 Decaimento exponencial

Aqui, provamos que a energia total do sistema (3.6) decai exponencialmente para zero com o tempo  $t$  tendendo ao infinito. Mais precisamente, provamos o seguinte teorema:

**Teorema 3.4.** *Assuma que  $|\xi_2| < \xi_1$ . Então, a energia  $\mathcal{E}(t)$  do sistema (3.6) satisfazendo a relação (1.11), decai exponencialmente para zero com  $t \rightarrow \infty$ . Isto é, existem constantes positivas  $M$  e  $\omega$ , independentes dos dados iniciais, tais que*

$$\mathcal{E}(t) \leq M\mathcal{E}(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.24)$$

Para provar o Teorema 3.4, construímos alguns lemas técnicos usando o método dos multiplicadores. A seguir, definimos os funcionais  $\mathcal{W}(t)$ ,  $\mathcal{Q}(t)$ ,  $\mathcal{V}(t)$  e  $\mathcal{J}(t)$  e provamos algumas estimativas.

Definimos

$$\mathcal{W}(t) := \rho_z \int_0^l z_t z \, dx - \frac{a_2}{a_3} \rho_u \int_0^l u_t z \, dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z|^2 \, dx. \quad (3.25)$$

**Lema 3.5.** *Seja  $(z, u, \eta)$  a solução do sistema (3.6) satisfazendo a relação (1.11). Então o funcional  $\mathcal{W}(t)$  satisfaz a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{W}(t) &\leq -\frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 \, dx + \left( \rho_z + \frac{a_2^2 \rho_u^2}{4\varepsilon a_3^2} \right) \int_0^L |z_t|^2 \, dx + \varepsilon \int_0^L |u_t|^2 \, dx \\ &\quad + \frac{\xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 \, dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré.

**Prova.** Multiplicando a equação (3.6)<sub>1</sub> por  $z$  e integrando por parte em  $[0, l]$  temos

$$\begin{aligned} & \rho_z \int_0^l z_{tt} z \, dx + (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 \, dx - \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \int_0^l \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_{xx} + \sqrt{a_3} u_{xx} \right) z \, dx \\ & + \frac{\xi_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l |z|^2 \, dx + \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Usando a identidade  $z_{tt}z = \frac{\partial}{\partial t}(z_t z) - |z_t|^2$  obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^l z_t z \, dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z|^2 \, dx \right) - \rho_z \int_0^l |z_t|^2 \, dx + (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 \, dx \\ & - \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \int_0^l \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_{xx} + \sqrt{a_3} u_{xx} \right) z \, dx + \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Segue da equação (3.6)<sub>2</sub> que  $(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_{xx} + \sqrt{a_3} u_{xx}) = (\rho_u/\sqrt{a_3}) u_{tt}$ . Usando em (3.28) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^l z_t z \, dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z|^2 \, dx \right) - \rho_z \int_0^l |z_t|^2 \, dx + (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 \, dx \\ & - \frac{a_2}{a_3} \rho_u \int_0^l u_{tt} z \, dx + \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agora, levando em consideração a identidade  $u_{tt}z = \frac{\partial}{\partial t}(u_t z) - u_t z_t$  temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^l z_t z \, dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z|^2 \, dx - \frac{a_2}{a_3} \rho_u \int_0^l u_t z \, dx \right) - \rho_z \int_0^l |z_t|^2 \, dx \\ & + (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 \, dx + \frac{a_2}{a_3} \rho_u \int_0^l u_t z_t \, dx + \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z \, dx = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Finalmente, usando as desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^L z_t z \, dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^L |z|^2 \, dx - \frac{a_2}{a_3} \rho_u \int_0^L u_t z \, dx \right) &\leq -\frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L |z_x|^2 \, dx \\ + \left( \rho_z + \frac{a_2^2 \rho_u^2}{4\varepsilon a_3^2} \right) \int_0^L |z_t|^2 \, dx + \varepsilon \int_0^L |u_t|^2 \, dx + \frac{\xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Isto conclui o resultado. ■

Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t) &:= a_2 \rho_z \int_0^l z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) \, dx - \frac{a_2^2 \rho_u}{a_3} \int_0^l u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) \, dx \\ &\quad + \frac{\xi_1 a_2^2}{2\sqrt{a_3}} \int_0^l |z|^2 \, dx + a_2 \xi_1 \sqrt{a_3} \int_0^l z u \, dx. \end{aligned} \quad (3.32)$$

**Lema 3.6.** *Seja  $(z, u, \eta)$  a solução do sistema (3.6). Então, o funcional  $\mathcal{Q}(t)$  satisfaz a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{Q}(t) &\leq -\frac{a_2^2 \rho_u}{2\sqrt{a_3}} \int_0^L |u_t|^2 \, dx + C_1 \int_0^L |z_t|^2 \, dx + C_\varepsilon \int_0^L |z_x|^2 \, dx + \frac{a_2^2 \xi_2^2}{4\varepsilon} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 \, dx \\ &\quad + C_2 \varepsilon \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 \, dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde  $C_1, C_2, C_\varepsilon$  são constantes positivas e  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré.

**Prova.** Multiplicando a equação (3.6)<sub>1</sub> por  $a_2\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u\right)$  e integrando por partes no intervalo  $[0, l]$ , temos

$$\begin{aligned}
& a_2\rho_z \int_0^l z_{tt} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx + a_2 \int_0^l (a_1 - a_2^2/a_3) z_x \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_x + \sqrt{a_3}u_x \right) dx \\
& - \frac{a_2^2}{\sqrt{a_3}} \int_0^l \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_{xx} + \sqrt{a_3}u_{xx} \right) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx + a_2\xi_1 \int_0^l z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx \\
& + a_2\xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx = 0. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Agora, levando em consideração a identidade  $\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_{xx} + \sqrt{a_3}u_{xx}\right) = (\rho_u/\sqrt{a_3})u_{tt}$  temos

$$\begin{aligned}
& a_2\rho_z \int_0^l z_{tt} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx + a_2(a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l z_x \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_x + \sqrt{a_3}u_x \right) dx \\
& - \frac{a_2^2\rho_u}{a_3} \int_0^l u_{tt} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx + a_2\xi_1 \int_0^l z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx \\
& + a_2\xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) dx = 0. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Usando as identidades

$$z_{tt} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) \right] - z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_t + \sqrt{a_3}u_t \right), \tag{3.36}$$

$$u_{tt} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z + \sqrt{a_3}u \right) \right] - u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_t + \sqrt{a_3}u_t \right), \tag{3.37}$$



obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[ \rho_z a_2 \int_0^L z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx - \frac{a_2^2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx + \frac{\xi_1 a_2^2}{2\sqrt{a_3}} \int_0^L |z|^2 dx \right] \\
 & - \rho_z a_2 \int_0^L z_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_t + \sqrt{a_3} u_t \right) dx + a_2 (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^L z_x \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right) dx \\
 & + \xi_1 a_2 \sqrt{a_3} \int_0^L z_t u dx + \frac{a_2^2 \rho_u}{a_3} \int_0^L u_t \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_t + \sqrt{a_3} u_t \right) dx \\
 & + \xi_2 a_2 \int_0^L \eta(x, 1, t) \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z + \sqrt{a_3} u \right) dx = 0.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Finalmente, tendo em mente a identidade  $z_t u = \frac{\partial}{\partial t}(zu) - zu_t$  e usando as desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} Q(t) & \leq -\frac{a_2^2 \rho_u}{2\sqrt{a_3}} \int_0^L |u_t|^2 dx + \left( \frac{a_2^2 \rho_z}{\sqrt{a_3}} + \frac{3a_3 \sqrt{a_3} \rho_z^2}{2\rho_u} + \frac{3\sqrt{a_3} a_2^4 \rho_u}{2a_3^3} \right) \int_0^L |z_t|^2 dx \\
 & + \left( \frac{a_2^2 |a_1 - a_2^2/a_3|^2}{4\epsilon} + \frac{3\xi_1^2 a_3 \sqrt{a_3} c_p}{2\rho_u} \right) \int_0^L |z_x|^2 dx + \frac{a_2^2 \xi_2^2}{4\epsilon} \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx \\
 & + (1 + c_p) \epsilon \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

■

Definimos

$$\mathcal{V}(t) := \rho_z \int_0^l z_t z dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z|^2 dx + \rho_u \int_0^l u_t u dx. \tag{3.40}$$

**Lema 3.7.** *Seja  $(z, u, \eta)$  a solução do sistema (3.6) satisfazendo a relação (1.11). Então o funcional  $\mathcal{V}(t)$  satisfaz a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) \leq & \rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx + \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 dx \\ & - \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx + \frac{\xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} \int_0^l |\eta(x, 1, t)|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré.

**Prova.** De (3.28) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^l z_t z dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z|^2 dx \right) &= \rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx - (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 dx \\ &- \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} \int_0^l \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right) z_x dx - \xi_2 \int_0^l \eta(x, 1, t) z dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Multiplicando a equação (3.6)<sub>2</sub> por  $u$  e integrando por partes no intervalo  $[0, l]$  temos

$$\frac{d}{dt} \left( \rho_u \int_0^l u_t u dx \right) = \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx - \sqrt{a_3} \left( \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right) u_x. \quad (3.43)$$

Somando as equações (3.42), (3.43) e usando as desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_z \int_0^l z_t z dx + \frac{\xi_1}{2} \int_0^l |z|^2 dx + \rho_u \int_0^l u_t u dx \right) &= \rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx + \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx \\ &- \frac{1}{2} (a_1 - a_2^2/a_3) \int_0^l |z_x|^2 dx - \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx \\ &+ \frac{\xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} \int_0^l |\eta(x, 1, t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Isto conclui a prova. ■

Finalmente, definimos

$$\mathcal{J}(t) := \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} |\eta|^2 d\rho dx. \quad (3.45)$$

**Lema 3.8.** *Seja  $(z, u, \eta)$  a solução do sistema (3.6). Então o funcional  $\mathcal{J}(t)$  satisfaz a seguinte identidade*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) = -2\mathcal{J}(t) - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_0^l |\eta(x, 1, t)|^2 dx + \frac{1}{\tau} \int_0^l |z_t|^2 dx. \quad (3.46)$$

**Prova.** A prova é bem simples. Derivando o funcional  $\mathcal{J}(t)$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) = 2 \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta \eta_t d\rho dx.$$

Usando a equação (3.6)<sub>3</sub> temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^l \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} |\eta|^2 d\rho dx.$$

A conclusão segue da integração por partes em  $[0, 1]$ . Isto conclui a prova. ■

### 3.2.2 Prova do Teorema 3.4

Aqui provamos o Teorema 3.4 que trata do decaimento exponencial do sistema (3.6). Para isso, definimos o funcional de Lyapunov  $\mathcal{L}(t)$  da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(t) := N_1 \mathcal{E}(t) + N_2 \mathcal{W}(t) + N_3 \mathcal{Q}(t) + 2\mathcal{V}(t) + \frac{\tau \xi_1}{2} \mathcal{J}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.47)$$

onde  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são constantes positivas definidas posteriormente. Os funcionais  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{J}$  satisfazem os Lemas 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8, respectivamente. Primeiramente, provamos que os funcionais  $\mathcal{L}(t)$  e  $\mathcal{E}(t)$  são equivalentes, *i.e.*, existem constantes positivas  $K_1$  e  $K_2$  tais que

$$K_1\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq K_2\mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.48)$$

De fato, segue da definição de  $\mathcal{L}(t)$  que

$$|\mathcal{L}(t) - N_1\mathcal{E}(t)| \leq N_2|\mathcal{W}(t)| + N_3|\mathcal{Q}(t)| + 2|\mathcal{V}(t)| + \frac{\tau\xi_1}{2}|\mathcal{J}(t)|. \quad (3.49)$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré, existe uma constante  $K > 0$  tal que

$$|\mathcal{L}(t) - N_1\mathcal{E}(t)| \leq K\mathcal{E}(t) \iff (N_1 - K)\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N_1 + K)\mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.50)$$

Tomando  $N_1 > K$ , definimos  $K_1 := N_1 - K$  e  $K_2 := N_1 + K$  e portanto, concluímos a afirmação (3.48). Agora estamos em condição de provar o Teorema 3.4.

Derivando o funcional  $\mathcal{L}(t)$  e usando os lemas construídos à priori, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\left(\frac{N_1\gamma}{2} - N_2(\rho_z + a_2^2\rho_u^2/4\epsilon a_3^2) - N_3C_1 - 2\rho_z - \xi_1/2\right) \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \left(N_3 \frac{a_2^2\rho_u}{2\sqrt{a_3}} - N_2\epsilon - 2\rho_u\right) \int_0^L |u_t|^2 dx \\ &\quad - \left((N_2 + 2)(a_1 - a_2^2/a_3) - 2N_3C_\epsilon\right) \frac{1}{2} \int_0^L |z_x|^2 dx \\ &\quad - \left(2 - N_3C_2\epsilon\right) \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}}z_x + \sqrt{a_3}u_x \right|^2 dx - \tau\xi_1 e^{-2\tau} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 d\rho dx \\ &\quad - \left(\frac{N_1\gamma}{2} + \frac{\xi_1 e^{-2\tau}}{2} - \frac{\xi_2^2 c_p}{a_1 - a_2^2/a_3} - \frac{N_2\xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} - \frac{a_2^2\xi_2^2}{4\epsilon} N_3\right) \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Escolhendo apropriadamente as constantes, *i.e.*,

$$\epsilon := 3/2N_3C_2 \quad \text{e} \quad \varepsilon := \rho_u N_3 a_2^2 / 4\sqrt{a_3} N_2, \quad (3.51)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\left(\frac{N_1\gamma}{2} - N_2(\rho_z + a_2^2\rho_u^2/4\varepsilon a_3^2) - N_3C_1 - 2\rho_z - \xi_1/2\right) \int_0^L |z_t|^2 dx \\ &\quad - \left(N_3\frac{a_2^2}{2\sqrt{a_3}} - 4\right) \frac{\rho_u}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx - \left((N_2 + 2)(a_1 - a_2^2/a_3) - 2N_3C_\epsilon\right) \frac{1}{2} \int_0^L |z_x|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx - \tau\xi_1 e^{-2\tau} \int_0^L \int_0^1 |\eta|^2 d\rho dx \\ &\quad - \left(\frac{N_1\gamma}{2} + \frac{\xi_1 e^{-2\tau}}{2} - \frac{\xi_2^2 c_p}{a_1 - a_2^2/a_3} - \frac{N_2 \xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} - \frac{a_2^2 \xi_2^2}{4\epsilon} N_3\right) \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora escolhemos  $N_3 > 8\sqrt{a_3}/a_2^2$ ,  $N_2 > 2N_3C_\epsilon/(a_1 - a_2^2/a_3)$  e  $N_1$  suficientemente grande tal que  $N_1 > K$  (ver (3.50)) e

$$\begin{aligned} N_1 > \max \left\{ \frac{2}{\gamma} \left[ N_2(\rho_z + \rho_u \sqrt{a_3} N_2 / a_3^2 N_3) + N_3 C_1 + 2\rho_z + \xi_1/2 \right], \right. \\ \left. \frac{2}{\gamma} \left[ \frac{N_2 \xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} + \frac{\xi_2^2 c_p}{a_1 - a_2^2/a_3} + \frac{a_2^2 \xi_2^2 N_3^2 C_2}{6} \right] \right\}. \quad (3.52) \end{aligned}$$

Em seguida, definimos

$$\begin{aligned} \zeta_1 &:= \frac{N_1\gamma}{2} - N_2(\rho_z + a_2^2\rho_u^2/4\varepsilon a_3^2) - N_3C_1 - 2\rho_z - \xi_1/2 > 0, \\ \zeta_3 &:= (N_2 + 2)(a_1 - a_2^2/a_3) - 2N_3C_\epsilon > 0, \quad \zeta_2 := N_3\frac{a_2^2}{2\sqrt{a_3}} - 4 > 0, \\ \zeta_4 &:= \frac{N_1\gamma}{2} + \frac{\xi_1 e^{-2\tau}}{2} - \frac{\xi_2^2 c_p}{a_1 - a_2^2/a_3} - \frac{N_2 \xi_2^2 c_p}{2(a_1 - a_2^2/a_3)} - \frac{a_2^2 \xi_2^2}{4\epsilon} N_3 > 0. \quad (3.53) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & -\zeta_1 \int_0^L |z_t|^2 dx - \zeta_2 \frac{\rho_u}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx - \zeta_3 \int_0^L |z_x|^2 dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_3}} z_x + \sqrt{a_3} u_x \right|^2 dx - \zeta_4 \int_0^L |\eta(x, 1, t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Agora podemos concluir que existe uma constante positiva

$$N_0 := \min \left\{ 1, 2\zeta_1/\rho_z, \zeta_2, 2\zeta_3/(a_1 - a_2^2/a_3), 2e^{-2\tau} \right\} > 0,$$

tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -N_0\mathcal{E}(t), \quad \forall t \geq 0,$$

onde  $\mathcal{E}(t)$  é dado em (3.9). Além disso, devido a equivalência entre  $\mathcal{L}(t)$  and  $\mathcal{E}(t)$  obtemos que

$$\mathcal{E}(t) \leq M\mathcal{E}(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.55)$$

onde  $M := K_2/K_1 \geq 1$  e  $\omega := N_0/K_2$ .

## CAPÍTULO 4

---

### Estabilização geral para o sistema com amortecimento não linear

---

Neste capítulo, estudamos a estabilização geral do problema de dilatação de solos elásticos porosos com amortecimento não linear dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \gamma(t)g(u_t) = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

com condições de contorno

$$z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.2)$$

e condições iniciais

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l). \quad (4.3)$$

Para a obtenção dos resultados, precisamos levar em consideração as seguintes hipóteses adicionais.

**Hipótese 4.1.** *Assumimos que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e crescente. Além disso, existem  $k_1, k_2, s_0 > 0$  e uma função estritamente crescente  $\varphi \in C^1([0, \infty))$  com  $\varphi(0) = 0$ , e  $\varphi$  sendo uma função  $C^2$  linear ou estritamente convexa em  $(0, s_0]$  tal que*

$$(i) \quad s^2 + g^2(s) \leq \varphi^{-1}(sg(s)) \quad \forall |s| \leq s_0 \text{ e } k_1|s| \leq |g(s)| \leq k_2|s|, \quad \forall |s| \geq s_0;$$

(ii)  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  é uma função diferenciável não crescente.

*Observação 4.2.* Observe que (i) implica que  $sg(s) > 0$  para todo  $s \neq 0$ .

## 4.1 Resultado de estabilidade geral

Nesta seção, provamos a estabilidade geral do sistema (4.1)–(4.3) usando o método da energia. Desde que a energia seja dissipativa, construímos um funcional Lyapunov  $\mathcal{L}(t)$  usando técnicas multiplicativas.

A proposição seguinte trata da lei de dissipação de energia.

**Proposição 4.3.** *A energia total associada ao sistema (4.1)–(4.3) é dada por*

$$E(t) := \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{a_1}{2} \int_0^l |z_x|^2 dx + \frac{a_3}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^l u_x z_x dx,$$

e satisfaz a lei da dissipação

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma(t) \int_0^l u_t g(u_t) dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.4)$$

**Prova.** Multiplicando a equação (4.1)<sub>1</sub> por  $z_t$  e integrando por partes em  $[0, l]$ , temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{a_1}{2} \int_0^l |z_x|^2 dx + a_2 \int_0^l u_x z_{tx} dx = 0. \quad (4.5)$$



De modo análogo, multiplicando a equação (4.1)<sub>2</sub> por  $u_t$  temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho_u}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{d}{dt} \frac{a_3}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^l z_x u_{tx} dx + \gamma(t) \int_0^l u_t g(u_t) dx = 0. \quad (4.6)$$

Adicionando as equações (4.5) e (4.6) obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^l \left( \rho_z |z_t|^2 + \rho_u |u_t|^2 + a_1 |z_x|^2 + a_3 |u_x|^2 + 2a_2 u_x z_x \right) dx = -\gamma(t) \int_0^l u_t g(u_t) dx. \quad (4.7)$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma(t) \int_0^l u_t g(u_t) dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.8)$$

Isto conclui a prova. ■

*Observação 4.4.* Enfatizamos que a relação (1.11) é fundamental para garantir a positividade da energia, *i.e.*,

$$E(t) = \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{\rho_u}{2} \int_0^l |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} (a_3 - a_2^2/a_1) \int_0^l |u_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left| \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} u_x + \sqrt{a_1} z_x \right|^2 dx.$$

### 4.1.1 Alguns resultados auxiliares

Os resultados seguintes são essenciais para provar a estabilidade geral do sistema (4.1)–(4.3).

**Lema 4.5.** *Seja  $(z, u)$  a solução do sistema (4.1)–(4.3). Então, o funcional*

$$\mathcal{F}(t) := \rho_u \int_0^l u_t u dx - \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^l z_t u dx, \quad (4.9)$$

satisfaz a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq & -\frac{1}{2}(a_3 - a_2^2/a_1) \int_0^l |u_x|^2 dx + \varepsilon \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^l |z_t|^2 dx \\ & + c_\varepsilon \int_0^l |u_t|^2 dx + c \int_0^l |g(u_t)|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

**Prova.** Multiplicando a equação (4.1)<sub>2</sub> por  $u$  e integrando por partes em  $[0, l]$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_u \int_0^l u_t u dx - \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx + a_3 \int_0^l |u_x|^2 dx - a_2 \int_0^l z_{xx} u dx \\ + \gamma(t) \int_0^l g(u_t) u dx = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

De modo análogo, multiplicando a equação (4.1)<sub>1</sub> por  $(a_2/a_1)u$  temos

$$-\frac{d}{dt} \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^l z_t u dx + \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^l z_t u_t dx - \frac{a_2^2}{a_1} \int_0^l |u_x|^2 dx + a_2 \int_0^l z_{xx} u dx = 0. \quad (4.12)$$

Adicionando as equações (4.11) e (4.12), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_u \int_0^l u_t u dx - \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^l z_t u dx \right) = \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx - \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx \\ - \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^l z_t u_t dx - \gamma(t) \int_0^l g(u_t) u dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) &= \rho_u \int_0^l |u_t|^2 dx - \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx - \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \int_0^l z_t u_t dx \\ &\quad - \gamma(t) \int_0^l g(u_t) u dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré na equação acima obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq \frac{a_2 \rho_z}{a_1} \varepsilon \int_0^l |z_t|^2 dx + c_\varepsilon \int_0^l |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \int_0^l |u_x|^2 dx + c \int_0^l |g(u_t)|^2 dx,$$

onde  $c > 0$  é uma constante. ■

**Lema 4.6.** *Seja  $(z, u)$  a solução do sistema (4.1)–(4.3). Então o funcional*

$$\mathcal{G}(t) := a_2 \int_0^l u_t z dx - a_2 \int_0^l z_t u dx, \quad (4.15)$$

satisfaz a seguinte estimativa

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) \leq -\frac{a_2^2}{2\rho_u} \int_0^l |z_x|^2 dx + \frac{a_2^2}{\rho_z} \int_0^l |u_x|^2 dx + c \int_0^l |g(u_t)|^2 dx. \quad (4.16)$$

**Prova.** Multiplicando a equação (4.1)<sub>1</sub> por  $-(a_2/\rho_z)u$  e integrando em  $[0, l]$  temos

$$-a_2 \int_0^l z_{tt} u dx + \frac{a_1 a_2}{\rho_z} \int_0^l z_{xx} u dx + \frac{a_2^2}{\rho_z} \int_0^l u_{xx} u dx = 0. \quad (4.17)$$

Usando a identidade  $z_{tt} u = \frac{\partial}{\partial t}(z_t u) - z_t u_t$  obtemos

$$-a_2 \frac{d}{dt} \int_0^l z_t u dx + a_2 \int_0^l z_t u_t dx - \frac{a_1 a_2}{\rho_z} \int_0^l z_x u_x dx - \frac{a_2^2}{\rho_z} \int_0^l |u_x|^2 dx = 0. \quad (4.18)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.1)<sub>2</sub> por  $(a_2/\rho_u)z$  temos

$$\begin{aligned} & a_2 \frac{d}{dt} \int_0^l u_t z dx - a_2 \int_0^l u_t z_t dx + \frac{a_2 a_3}{\rho_u} \int_0^l u_x z_x dx + \frac{a_2^2}{\rho_u} \int_0^l |z_x|^2 dx \\ & + \frac{a_2 \gamma(t)}{\rho_u} \int_0^l g(u_t) z dx = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Adicionando as equações (4.18) e (4.19), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( a_2 \int_0^l u_t z dx - a_2 \int_0^l z_t u dx \right) = a_2 \left( \frac{a_1}{\rho_z} - \frac{a_3}{\rho_u} \right) \int_0^l z_x u_x dx + \frac{a_2^2}{\rho_z} \int_0^l |u_x|^2 dx \\ & - \frac{a_2^2}{\rho_u} \int_0^l |z_x|^2 dx - \frac{a_2 \gamma(t)}{\rho_u} \int_0^l g(u_t) z dx. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Usando as desigualdades de Young e de Poincaré, e considerando que a relação  $a_1/\rho_z = a_3/\rho_u$  obtemos o resultado

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) \leq -\frac{a_2^2}{2\rho_u} \int_0^l |z_x|^2 dx + \frac{a_2^2}{\rho_z} \int_0^l |u_x|^2 dx + c \int_0^l |g(u_t)|^2 dx. \quad (4.21)$$

■

**Lema 4.7.** *Seja  $(z, u)$  a solução do sistema (4.1)–(4.3). Então o funcional*

$$\mathcal{H}(t) := -\rho_z \int_0^l z_t z dx, \quad (4.22)$$

*satisfaz a seguinte estimativa*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) \leq -\rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx + \frac{3a_1}{2} \int_0^l |z_x|^2 dx + c \int_0^l |u_x|^2 dx. \quad (4.23)$$

**Prova.** Multiplicando a equação (4.1)<sub>1</sub> por  $z$  e integrando por partes em  $[0, l]$  obtemos

$$\rho_z \int_0^l z_{tt} z dx - a_1 \int_0^l z_{xx} z dx - a_2 \int_0^l u_{xx} z dx = 0. \quad (4.24)$$

Em seguida, usamos a identidade  $z_{tt} z = \frac{\partial}{\partial t} z_t z - |z_t|^2$  ficamos com

$$-\frac{d}{dt} \rho_z \int_0^l z_t z dx = -\rho_z \int_0^l |z_t|^2 dx + a_1 \int_0^l |z_x|^2 dx + a_2 \int_0^l u_x z_x dx. \quad (4.25)$$

A estimativa (4.23) segue facilmente usando a desigualdade de Young. ■

Agora estamos em condições de provar o seguinte teorema:

**Teorema 4.8.** *Suponha que 4.1 seja válida. Então, para qualquer solução  $(z, u)$  do sistema (4.1)–(4.3) satisfazendo a relação (1.11), existem constantes  $N_0, K_1, K_2, c > 0$  independentemente das condições iniciais, de modo que o funcional de Lyapunov*

$$\mathcal{L}(t) := N_1 E(t) + N_2 \mathcal{F}(t) + N_3 \mathcal{G}(t) + \mathcal{H}(t), \quad (4.26)$$

satisfaz

$$c_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t), \quad t \geq 0. \quad (4.27)$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -N_0 E(t) + c \int_0^l \left( |u_t|^2 + |g(u_t)|^2 \right) dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.28)$$

**Prova.** A fim de provarmos a equivalência, escrevemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| &\leq N_2 \rho_u \int_0^l |u_t u| dx + \frac{N_2 |a_2| \rho_z}{a_1} \int_0^l |z_t z| dx + N_3 |a_2| \int_0^l |u_t z| dx \\
&\quad + N_3 |a_2| \int_0^l |z_t u| dx + \rho_z \int_0^l |z_t z| dx.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Usando a desigualdade de Young e de Poincaré, concluímos que existe  $c > 0$  tal que

$$|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| \leq c E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.30}$$

Consequentemente,

$$(N_1 - c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N_1 + c)E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.31}$$

Portanto, escolhendo  $N_1$  suficientemente grande, obtemos (4.27).

Por outro lado, segue de (4.4) e dos Lemas 4.5, 4.6 e 4.7 que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -\left(2 - \frac{2\varepsilon N_2}{\rho_z}\right) \frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx - \left(\frac{a_2^2 N_3}{a_1 \rho_u} - 3\right) \frac{a_1}{2} \int_0^l |z_x|^2 dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(N_2 \left(a_3 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) - \frac{2a_2^2 N_3}{\rho_z} - 2c\right) \int_0^l |u_x|^2 dx \\
&\quad + c \int_0^l \left(|u_t|^2 + |g(u_t)|^2\right) dx.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Escolhendo adequadamente a constante

$$\varepsilon := \frac{\rho_z}{2N_2}, \tag{4.33}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\frac{\rho_z}{2} \int_0^l |z_t|^2 dx - \left( \frac{a_2^2 N_3}{a_1 \rho_u} - 3 \right) \frac{a_1}{2} \int_0^l |z_x|^2 dx \\
&\quad - \left[ \frac{N_2}{a_3} \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) - \frac{2a_2^2 N_3}{a_3 \rho_z} - \frac{2c}{a_3} \right] \frac{a_3}{2} \int_0^l |u_x|^2 dx \\
&\quad + c \int_0^l \left( |u_t|^2 + |g(u_t)|^2 \right) dx.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Agora escolhemos  $N_3 > 3a_1\rho_u/a_2^2$ . Como  $N_3$  está fixo, escolhemos  $N_2$  suficientemente grande, *i.e.*,

$$N_2 > \left( \frac{2a_2^2 N_3}{\rho_z} + 2c \right) / \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) \quad \text{com} \quad a_2^2 < a_1 a_3. \tag{4.35}$$

Com isso, garantimos que

$$\xi_1 := \frac{a_2^2 N_3}{a_1 \rho_u} - 3 > 0 \quad \text{e} \quad \xi_2 := \frac{N_2}{a_3} \left( a_3 - a_2^2/a_1 \right) - \frac{2a_2^2 N_3}{a_3 \rho_z} - \frac{2c}{a_3} > 0. \tag{4.36}$$

Assim, podemos concluir que existe uma constante  $N_0 := \min \{1, \xi_1, \xi_2\} > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -N_0 E(t) + c \int_0^l \left( |u_t|^2 + |g(u_t)|^2 \right) dx, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.37}$$

Isto conclui a prova. ■

## 4.1.2 Estabilidade geral

Aqui, provamos o principal resultado deste capítulo, que trata da estabilidade geral do sistema (4.1)–(4.3).

**Teorema 4.9.** *Suponha que a Hipótese 4.1 é válida. Então, existem constantes  $\beta_1, \beta_2 > 0$  e  $\beta_3 \geq 0$  de modo que a solução  $(z, u)$  do sistema (4.1)–(4.3) satisfaz*

$$E(t) \leq \beta_1 \varphi_1^{-1} \left( \beta_2 \int_0^t \gamma(r) dr + \beta_3 \right), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.38)$$

onde

$$\varphi_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi_0(s)} ds \quad \text{com} \quad \varphi_0(t) = t\varphi'(\epsilon t). \quad (4.39)$$

*Observação 4.10.* A função  $\varphi_1$  é estritamente decrescente e convexa em  $(0, 1]$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_1(t) = \infty$ .

**Prova.** Multiplicando a estimativa (4.28) por  $\gamma(t)$  e usando os itens (i) e (ii) da Hipótese 4.1 obtemos

$$\gamma(t) \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -N_0 \gamma(t) E(t) + c \gamma(t) \int_0^l \left( u_t^2 + g^2(u_t) \right) dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.40)$$

A partir daqui, consideramos dois casos separadamente.

Caso 1. A função  $\varphi$  é linear em  $[0, s_0]$ . Usando (4.4) e (4.40) temos que

$$\gamma(t) \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -N_0 \gamma(t) E(t) + c \gamma(t) \int_0^l u_t g(u_t) dx = -N_0 \gamma(t) E(t) - c \frac{d}{dt} E(t). \quad (4.41)$$

Note que  $\gamma(t) \mathcal{L}'(t) = (\gamma(t) \mathcal{L}(t))' - \gamma'(t) \mathcal{L}(t)$ . Portanto

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma(t) \mathcal{L}(t) + c E(t) \right) - \frac{d\gamma(t)}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -N_0 \gamma(t) E(t). \quad (4.42)$$

Usando o item (ii) da Hipótese 4.1 obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma(t) \mathcal{L}(t) + c E(t) \right) + N_0 \gamma(t) E(t) \leq 0. \quad (4.43)$$



Aqui, usamos (4.27) e definimos

$$\Psi(t) := \gamma(t)\mathcal{L}(t) + cE(t) \sim E(t). \quad (4.44)$$

Consequentemente, usando (4.43) e (4.44) existe  $\kappa > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) + \kappa\gamma(t)\Psi(t) \leq 0. \quad (4.45)$$

Portanto, combinando (4.44) e (4.45), temos

$$\begin{aligned} \frac{dE(\tau)}{d\tau} \leq -\kappa\gamma(\tau)E(\tau) &\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{E(\tau)} dE(\tau) \leq -\kappa \int_0^t \gamma(\tau) d\tau. \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right) \leq -\kappa \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \\ &\Rightarrow E(t) \leq E(0)e^{-\kappa \int_0^t \gamma(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$

Sendo  $\varphi$  linear, então  $\varphi(s) = s, \forall s \in [0, s_0]$ . Logo  $\varphi'(s) = 1$  e assim  $\varphi'(\epsilon_0 t) = 1$ . Desta forma  $\varphi_0(t) = t\varphi'(\epsilon_0 t) = t$  e consequentemente,

$$\varphi_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi_0(s)} ds = - \int_1^t \frac{1}{s} ds = -\ln t.$$

Portanto, a sua inversa é  $\varphi_1^{-1}(t) = e^{-t}$  e concluimos que

$$E(t) \leq E(0)e^{-\kappa \int_0^t \gamma(\tau) ds} = E(0)\varphi_1^{-1}\left(\kappa \int_0^t \gamma(r) dr\right). \quad (4.46)$$

Caso 2. A função  $\varphi$  é não linear em  $[0, s_0]$ . Seja  $s_1 \in (0, s_0]$  tal que

$$sg(s) \leq \min\{s_0, \varphi(s_0)\}, \quad \forall |s| \geq s_0. \quad (4.47)$$

Definimos os conjuntos

$$A := \{x \in (0, l) : |u_t| \leq s_1\} \quad \text{e} \quad B := \{x \in (0, l) : |u_t| > s_1\}. \quad (4.48)$$

Da Hipótese 4.1, podemos verificar o seguinte

$$s^2 + g^2(s) \leq \varphi^{-1}(sg(s)) \quad \forall |s| \leq s_1 \quad \text{e} \quad k_1|s| \leq |g(s)| \leq k_2|s|, \quad \forall |s| \geq s_1. \quad (4.49)$$

Usando (4.4), (4.49), o fato de  $\varphi^{-1}$  ser côncava e a desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(t) \int_0^l (u_t^2 + g^2(u_t)) dx &= \gamma(t) \int_A (u_t^2 + g^2(u_t)) dx + \gamma(t) \int_B (u_t^2 + g^2(u_t)) dx \\ &\leq \gamma(t) \int_A \varphi^{-1}(g(u_t)u_t) dx + c\gamma(t) \int_B u_t g(u_t) dx \\ &\leq c\gamma(t) \varphi^{-1} \left( \int_A g(u_t)u_t dx \right) - c \frac{d}{dt} E(t). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Substituindo a última estimativa em (4.40), usando (4.44) e a Hipótese 4.1, obtemos

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) \leq -N_0 \gamma(t) E(t) + c\gamma(t) \varphi^{-1} \left( \int_A g(u_t)u_t dx \right). \quad (4.51)$$

Para  $\epsilon < s_0$  e  $\delta > 0$ , definimos o funcional

$$\Psi_1(t) := \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) \Psi(t) + \delta E(t). \quad (4.52)$$

Pela desigualdade (4.51) e a hipótese sobre  $\varphi$ , verificaremos que existe  $\beta_1, \beta_2 > 0$ , tal que

$$\beta_1 \Psi_1(t) \leq E(t) \leq \beta_2 \Psi_1(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.53)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\Psi'_1(t) &= \epsilon \frac{E'(t)}{E(0)} \varphi'' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) \Psi(t) + \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) \Psi'(t) + \delta E'(t) \\ &\leq -N_0 \gamma(t) E(t) \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) + c \gamma(t) \varphi^{-1} \left( \int_A g(u_t) u_t dx \right) \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + \delta E'(t).\end{aligned}\tag{4.54}$$

Definimos  $\varphi^*$  sendo o conjugado convexo de  $\varphi$ , *i.e.*,

$$\varphi^*(s) = s(\varphi')^{-1}(s) - \varphi\left((\varphi')^{-1}(s)\right), \quad s \in \left(0, \varphi'(s_0)\right],\tag{4.55}$$

satisfazendo a seguinte desigualdade geral de Young

$$PQ \leq \varphi^*(P) + \varphi(Q),\tag{4.56}$$

com  $P \in (0, \varphi'(s_0)]$  e  $Q \in (0, s_0]$  onde  $P = \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right)$  e  $Q = \varphi^{-1} \left( \int_A g(u_t) u_t dx \right)$ . Por (4.47) temos

$$c \gamma(t) \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) \varphi^{-1} \left( \int_A g(u_t) u_t dx \right) \leq c \gamma(t) \varphi^* \left( \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c \gamma(t) \int_A g(u_t) u_t dx.$$

Em seguida, usamos (4.4) e a desigualdade  $\varphi^*(s) \leq s(\varphi')^{-1}(s)$  para obter

$$c \gamma(t) \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) \varphi^{-1} \left( \int_A g(u_t) u_t dx \right) \leq c \epsilon \gamma(t) \frac{E(t)}{E(0)} \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) - c E'(t).\tag{4.57}$$

Usando a última estimativa em (4.54), concluímos que

$$\Psi'_1(t) \leq -\left(N_0 E(0) - c \epsilon\right) \gamma(t) \frac{E(t)}{E(0)} \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) + (\delta - c) E'(t).\tag{4.58}$$

Escolhendo  $\epsilon = \frac{N_0 E(0)}{2c}$ ,  $\delta = 2c$  e usando o fato de que  $E'(t) \leq 0$ , (cf. (4.4)), temos

$$\Psi_1'(t) \leq -\frac{N_0 E(0)}{2} \gamma(t) \frac{E(t)}{E(0)} \varphi' \left( \epsilon \frac{E(t)}{E(0)} \right) = -\xi \gamma(t) \varphi_0 \left( \frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad (4.59)$$

onde  $\xi = \frac{N_0 E(0)}{2}$  e  $\varphi_0(t) = t \varphi'(\epsilon t)$ . Desde que

$$\varphi_0'(t) = \varphi'(\epsilon t) + \epsilon t \varphi''(\epsilon t), \quad (4.60)$$

usando a convexidade estrita de  $\varphi$  em  $(0, s_0]$ , concluímos que  $\varphi_0(t), \varphi_0'(t) > 0$  para todo  $t \in (0, 1]$ . Agora definimos

$$\Psi(t) := \frac{\beta_1 \Psi_1(t)}{E(0)}. \quad (4.61)$$

Então, por (4.53) concluímos que

$$\Psi(t) \leq \frac{E(t)}{E(0)} \leq 1. \quad (4.62)$$

Usando (4.53) e (4.62) obtemos

$$\Psi(t) \sim E(t) \quad (4.63)$$

e

$$\Psi'(t) \leq -\beta_2 \gamma(t) \varphi_0(\Psi(t)), \quad (4.64)$$

para algum  $\beta_2 > 0$  independente de  $t$ . Segue que

$$\frac{d}{dt} \left( \varphi_1(\Psi(t)) \right) \geq \beta_2 \gamma(t), \quad (4.65)$$

onde

$$\varphi_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi_0(s)} ds. \quad (4.66)$$

Integrando (4.65) de 0 à  $t$  obtemos

$$\Psi(t) \leq \varphi_1^{-1} \left( \beta_2 \int_0^t \gamma(r) dr + \beta_3 \right). \quad (4.67)$$

para algum  $\beta_3 > 0$  independente de  $t$ , onde usamos a hipóteses sobre  $\varphi_0$ , o fato de que  $\varphi_1$  ser estritamente decrescente em  $(0, 1]$ . Então, a afirmação (4.38) segue de (4.63) e (4.67). Isto conclui a prova. ■

#### 4.1.2.1 Exemplos

Apresentamos nessa subseção alguns exemplos que ilustram o decaimento da taxa da energia dada pelo teorema (4.9).

**Exemplo 4.1.** *Assuma que o termo de amortecimento satisfaz*

$$\kappa_1 \min\{|s|, |s|^q\} \leq |g(s)| \leq \kappa_2 \max\{|s|, |s|^{\frac{1}{q}}\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (4.68)$$

para constantes  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$  e  $q \geq 1$ . Temos

$$|s|^{\frac{1}{q}} \leq |s| \leq |s|^q, \quad \forall |s| \geq 1. \quad (4.69)$$

Portanto, de 4.68, temos

$$\kappa_1 |s| \leq |g(s)| \leq \kappa_2 |s|, \quad \forall |s| \geq 1. \quad (4.70)$$

*Definimos*

$$\varphi(s) = cs^{\frac{q+1}{2}}. \quad (4.71)$$

Então,  $\varphi$  é uma função estritamente convexa de classe  $C^2$  em  $(0, \infty)$  e satisfaz a suposição 4.1 (i). Usando a forma geral (4.39), se  $q = 1$ , temos

$$\varphi_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{cs} ds = -\frac{1}{c} \ln t. \quad (4.72)$$

De  $\varphi_1^{-1}(t) = e^{-a}$ . Por outro lado, se  $q > 1$ , então temos

$$\varphi_1(t) = \int_t^1 \frac{2\varepsilon^{-\frac{q-1}{2}}}{c(q+1)} s^{-\frac{q+1}{2}} ds = \frac{4\varepsilon^{-\frac{q-1}{2}}}{c(q^2-1)} [t^{-\frac{q-1}{2}} - 1]. \quad (4.73)$$

Portanto

$$\varphi_1^{-1}(t) = \left( \frac{c(q^2-1)\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}}{4} t + 1 \right)^{-\frac{2}{q-1}}. \quad (4.74)$$

Então, usando o teorema (4.9), obtemos a seguinte taxa de decaimento de energia.

$$E(t) \leq \beta_1 e^{-c\beta_2 \int_0^t \gamma(s) ds + \beta_3} \quad \text{se } q = 1, \quad (4.75)$$

e

$$E(t) \leq \beta_1 \left( \frac{c(q^2-1)\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}}{4} \left( \beta_2 \int_0^t \gamma(r) dr + \beta_3 \right) + 1 \right)^{-\frac{2}{q-1}} \quad \text{se } q \geq 1, \quad (4.76)$$

**Exemplo 4.2.** Se  $\varphi(s) = e^{-1/s}$  próximo de zero, então obtemos a seguinte taxa de decaimento de energia

$$E(t) \leq \frac{c}{\ln(\kappa_4 \int_0^t \gamma(s) ds + \kappa_5)}, \quad (4.77)$$

onde  $c, \kappa_4, \kappa_5 \in \mathbb{R}$ .

## CAPÍTULO 5

---

### Considerações finais

---

Nesta tese, estudamos questões relacionadas à boa colocação e a estabilidade assintótica da solução de um modelo de equações diferenciais parciais de segunda ordem, relacionado à problemas de dilatação de solos elásticos porosos com saturação de fluidos. De modo geral, a questão central desta tese foi entender como cada tipo de mecanismo de dissipação influencia na estabilidade do modelo.

Após realizarmos um vasto levantamento bibliográfico dos trabalhos realizados sobre o sistema unidimensional de dilatação de sólidos elásticos porosos com saturação de fluido, percebemos que, a partir do trabalho de Quintanilha [32], o modelo passou a ser preterido pelos pesquisadores e portanto havia muitas lacunas à serem investigadas.

No primeiro momento, analisamos o problema contínuo considerando um mecanismo de dissipação viscoso atuando na equação do material sólido elástico. Além do resultado de estabilização exponencial, conseguimos fazer um estudo do problema discreto, comprovando numericamente nossos resultados. As simulações são interessantes do ponto de vista numérico,



porque além de usarmos as condições de contorno clássicas (Dirichlet–Neumann) do modelo, obtemos um critério de estabilidade para o esquema numérico explícito.

No segundo momento, motivado por questões físicas relacionadas ao retardo do fluido ocasionado pelo processo de drenagem, estudamos o comportamento do modelo com amortecimento viscoso levando em consideração um termo de retardo. Além do resultado de boa colocação do problema, conseguimos provar a estabilização exponencial do problema considerando uma conhecida relação entre os coeficientes de dissipação.

Por fim, estudamos o problema com amortecimento não linear considerando um coeficiente variável dependendo do tempo. Para este caso, conseguimos prova a estabilização geral do modelo.

Nossos avanços no contexto da estabilização de tais modelos, usando o método da energia, abriram espaço na literatura para que outras variações do modelo pudessem ser exploradas, pois os nossos resultados forneceram os multiplicares adequados e os passos a serem seguidos na construção das estimativas, necessárias para a aplicação do método da energia.

A partir da publicação dos resultados desta tese [23, 36, 37], notamos que houve um aumento significativo de artigos publicados sobre o tema/modelo com citações dos trabalhos que foram frutos desta tese.

Abaixo descrevemos os principais trabalhos da literatura que citam os artigos provenientes da nossa tese, incluindo autocitações.

- [1] **A. M. Al-Mahdi, M. M. Al-Gharabli and M. Alahyane.** Theoretical and numerical stability results for a viscoelastic swelling porous-elastic system with past history. *AIMS Mathematics*, 6(11): 11921–11949 (2021).
- [2] **T. A. Apalara, M. O. Yusuf, B. A. Salami.** On the control of viscoelastic damped swelling porous elastic soils with internal delay feedbacks. *J. Math. Anal. Appl.*, 504(2): 125429 (2021).

- [3] **T. A. Apalara, A. Soufyane, M. Afilal and M. Alahyane.** A general stability result for swelling porous elastic media with nonlinear damping. *Applicable Analysis*, 1-16 (2021).
- [4] **C. A. S. Nonato, A. J. A. Ramos, C. A. Raposo, M. J. Dos Santos, M. M. Freitas.** Stabilization of Swelling porous elastic soils with fluid saturation, time varying-delay and time-varying weights. *Z. für Angew. Math. Phys.*, 2021 (aceito).
- [5] **M. M. Freitas, A. J. A. Ramos, M. J. Dos Santos, L. G. R. Miranda, J. L. L. Almeida.** Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to delay term of attractors to binary mixtures of solids. *Asymptotic Analysis* (2021).
- [6] **M. M. Freitas, A. J. A. Ramos, D. S. Almeida Júnior, P. T. P. Aum, J. L. L. Almeida.** Global and exponential attractors for mixtures of solids with Fourier's law. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* (2021).

Seguiremos estudando novos fatos relacionados à problemas de dilatação de solos elásticos porosos com saturação de fluidos, analisando outros mecanismos dissipativos. Acreditamos que nossos resultados continuarão incentivando pesquisadores à estudarem variantes deste interessante modelo desenvolvido por Eringen [14].

---

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] I. Aksu, E. Bazilevskaya, and Z.T. Karpyn. Swelling of clay minerals in unconsolidated porous media and its impact on permeability. *GeoResJ*, 7:1–13, sep 2015. doi: 10.1016/j.grj.2015.02.003.
- [2] F. Alabau-Boussouira. Asymptotic behavior for timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 14(5-6):643–669, dec 2007. doi: 10.1007/s00030-007-5033-0.
- [3] M. S. Alves, J. E. M. Rivera, and R. Quintanilla. Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 46(7-8):1659–1666, apr 2009. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.12.005.
- [4] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, and O.V. Villagrán. Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 46(24):4151–4162, dec 2009. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.07.026.
- [5] R. Anguelov, J. K. Djoko, and J. M.-S. Lubuma. Energy properties preserving schemes for Burger’s equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1):41–59, 2007. doi: 10.1002/num.20227.

- [6] T. A. Apalara. A general decay for a weakly nonlinearly damped porous system. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 25(3):311–322, jun 2018. doi: 10.1007/s10883-018-9407-x.
- [7] R. J. Atkin and R. E. Craine. Continuum theories of mixtures basic theory and historical development. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 29(2):209–244, 1976. doi: 10.1093/qjmam/29.2.209.
- [8] A. Bedford and D. S. Drumheller. Theories of immiscible and structured mixtures. *International Journal of Engineering Science*, 21(8):863–960, jan 1983. doi: 10.1016/0020-7225(83)90071-x.
- [9] F. Bofill and R. Quintanilla. Anti-plane shear deformations of swelling porous elastic soils. *International Journal of Engineering Science*, 41(8):801–816, may 2003. doi: 10.1016/s0020-7225(02)00281-1.
- [10] R. M. Bowen. Continuum physics iii: Theory of mixtures, A. C. Eringen. ed. *Academic Press*, pages 689–722, 1976.
- [11] R. M. Bowen and J. C. Wiese. Diffusion in mixtures of elastic materials. *International Journal of Engineering Science*, 7(7):689–722, jul 1969. doi: 10.1016/0020-7225(69)90048-2.
- [12] S. Chiriță. On the uniqueness and continuous data dependence of solutions in the theory of swelling porous thermoelastic soils. *International Journal of Engineering Science*, 41(20):2363–2380, dec 2003. doi: 10.1016/s0020-7225(03)00238-6.
- [13] J. Dieudonné. *La théorie analytique des polynômes d’une variable à coefficients quelconques*. Gauthier-Villars, 1938.
- [14] A. C. Eringen. A continuum theory of swelling porous elastic soils. *International Journal of Engineering Science*, 32(8):1337–1349, aug 1994. doi: 10.1016/0020-7225(94)90042-6.

- [15] C. Galeş. Some uniqueness and continuous dependence results in the theory of swelling porous elastic soils. *International Journal of Engineering Science*, 40(11):1211–1231, jul 2002. doi: 10.1016/s0020-7225(02)00010-1.
- [16] C. Galeş. On the spatial behavior in the theory of swelling porous elastic soils. *International Journal of Solids and Structures*, 39(16):4151–4165, aug 2002. doi: 10.1016/s0020-7683(02)00336-0.
- [17] C. Galeş. Waves and vibrations in the theory of swelling porous elastic soils. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(2):345–357, mar 2004. doi: 10.1016/j.euromechsol.2003.10.004.
- [18] C. Galeş. Potential method in the linear theory of swelling porous elastic soils. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(6):957–973, nov 2004. doi: 10.1016/j.euromechsol.2004.07.003.
- [19] M. A. Goodman and S. C. Cowin. A continuum theory for granular materials. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44(4):249–266, jan 1972. doi: 10.1007/bf00284326.
- [20] T. A. Hueckel. Water–mineral interaction in hygromechanics of clays exposed to environmental loads: a mixture-theory approach. 29(6):1071–1086, dec 1992. doi: 10.1139/t92-124.
- [21] D. Ieşan. On the theory of mixtures of thermoelastic solids. *Journal of Thermal Stresses*, 14(4):389–408, oct 1991. doi: 10.1080/01495739108927075.
- [22] D. Iesan and R. Quintanilla. Existence and continuous dependence results in the theory of microstretch elastic bodies. *International Journal of Engineering Science*, 32(6):991–1001, jun 1994. doi: 10.1016/0020-7225(94)90051-5.
- [23] D. S. Almeida Júnior, A. J. A. Ramos, A. S. Noé, M. M. Freitas, and P. T. P. Aum. Stabilization and numerical treatment for swelling porous elastic soils with fluid saturation. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 101(11), jun 2021. doi: 10.1002/zamm.202000366.

- [24] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9(2):267–293, may 1956. doi: 10.1002/cpa.3160090206.
- [25] A. Magaña and R. Quintanilla. On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 43(11-12):3414–3427, jun 2006. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.077.
- [26] F. Martinez and R. Quintanilla. Some qualitative results for the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids. *Collectanea Mathematica* 46.3 (1995): 263-277, 1995.
- [27] M. I. Mustafa and S. A. Messaoudi. General energy decay rates for a weakly damped Timoshenko system. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 16(2):211–226, apr 2010. doi: 10.1007/s10883-010-9090-z.
- [28] M. Negreanu and E. Zuazua. Uniform boundary controllability of a discrete 1-d wave equation. 48(3-4):261–279, mar 2003. doi: 10.1016/s0167-6911(02)00271-2.
- [29] S. Nicaise and C. Pignotti. Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. 45(5):1561–1585, jan 2006. doi: 10.1137/060648891.
- [30] J. W. Nunziato and S. C. Cowin. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 72(2):175–201, jun 1979. doi: 10.1007/bf00249363.
- [31] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer New York, 1983. doi: 10.1007/978-1-4612-5561-1.
- [32] R. Quintanilla. Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 145(2):525–533, aug 2002. doi: 10.1016/s0377-0427(02)00442-9.
- [33] R. Quintanilla. On the linear problem of swelling porous elastic soils. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 269(1):50–72, may 2002. doi: 10.1016/s0022-247x(02)00003-3.

- [34] R. Quintanilla. Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity. *Applied Mathematics Letters*, 16(4):487–491, may 2003. doi: 10.1016/s0893-9659(03)00025-9.
- [35] R. Quintanilla. Exponential stability of solutions of swelling porous elastic soils. *Meccanica*, 39(2):139–145, apr 2004. doi: 10.1023/b:mecc.0000005105.45175.61.
- [36] A. J. A. Ramos, M. M. Freitas, D. S. Almeida, A. S. Noé, and M. J. Dos Santos. Stability results for elastic porous media swelling with nonlinear damping. *Journal of Mathematical Physics*, 61(10):101505, oct 2020. doi: 10.1063/5.0014121.
- [37] A. J. A. Ramos, D. S. Almeida Júnior, M. M. Freitas, A. S. Noé, and M. J. Dos Santos. Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation and delay time terms. *Journal of Mathematical Physics*, 62(2):021507, feb 2021. doi: 10.1063/5.0018795.
- [38] C. A. Raposo, T. A. Apalara, and J. O. Ribeiro. Analyticity to transmission problem with delay in porous-elasticity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 466(1): 819–834, oct 2018. doi: 10.1016/j.jmaa.2018.06.017.
- [39] E. I. R. D. Richtmyer and K. W. Morton. Difference methods for initial-value problems. *Mathematics of Computation*, 22(102):465, apr 1968. doi: 10.2307/2004698.
- [40] J. E. M. Rivera. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1992.
- [41] J. E. M. Rivera and R. Quintanilla. On the time polynomial decay in elastic solids with voids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338(2):1296–1309, feb 2008. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.06.005.
- [42] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. *Stability Theory by Liapunov's Direct Method*. Springer New York, 1977. doi: 10.1007/978-1-4684-9362-7.
- [43] M. L. Santos and D. S. Almeida Júnior. On porous-elastic system with localized damping. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 67(3), may 2016. doi: 10.1007/s00033-016-0622-6.

- [44] M. L. Santos and D. S. Almeida Júnior. On the porous-elastic system with kelvin–voigt damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 445(1):498–512, jan 2017. doi: 10.1016/j.jmaa.2016.08.005.
- [45] M. L. Santos, A. D. S. Campelo, and D. S. Almeida Júnior. Rates of decay for porous elastic system weakly dissipative. *Acta Applicandae Mathematicae*, 151(1):1–26, may 2017. doi: 10.1007/s10440-017-0100-y.
- [46] M. Sharifipour, P. Pourafshary, and A. Nakhaee. Study of the effect of clay swelling on the oil recovery factor in porous media using a glass micromodel. *Applied Clay Science*, 141:125–131, jun 2017. doi: 10.1016/j.clay.2017.02.020.
- [47] G. D. Smith. *Numerical solution of partial differential equations : finite difference methods*. Clarendon Press Oxford University Press, Oxford Oxfordshire New York, 1985. ISBN 0198596413.
- [48] A. Sridharan and A. S. Rao. Mechanisms controlling the secondary compression of clays. 32(3):249–260, sep 1982. doi: 10.1680/geot.1982.32.3.249.
- [49] W. Strauss and L. Vazquez. Numerical solution of a nonlinear klein-gordon equation. *Journal of Computational Physics*, 28(2):271–278, aug 1978. doi: 10.1016/0021-9991(78)90038-4.
- [50] J. C. Strikwerda. *Finite Dierence Schemes and Partial Dierential Equations*. SIAM, 2004.
- [51] Jun-Min Wang and Bao-Zhu Guo. On the stability of swelling porous elastic soils with fluid saturation by one internal damping. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 71(4): 565–582, aug 2006. doi: 10.1093/imamat/hxl009.
- [52] L. Zhuangyi. *Semigroups associated with dissipative systems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 1999. ISBN 0849306159.