UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Andréia Gomes Pinheiro

Problemas de Neumann com dois expoentes críticos em espaços generalizados de Lebesgue-Sobolev

BELÉM-PA

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Andréia Gomes Pinheiro

Problemas de Neumann com dois expoentes críticos em espaços generalizados de Lebesgue-Sobolev

Tese apresentada ao colegiado do Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa

BELÉM-PA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P654p Pinheiro, Andréia Gomes.
Problemas de Neumann com dois expoentes críticos em espaços generalizados de Lebesgue-Sobolev / Andréia Gomes Pinheiro. — 2021.
ix, 103 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Espaços de Sobolev com expoentes variáveis . 2. Crescimento crítico . 3. Não linearidade descontínua. 4. p(x)-Laplaciano. 5. Condição de fronteira de Neumann. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Andréia Gomes Pinheiro

Problemas de Neumann com dois expoentes críticos em espaços generalizados de Lebesgue-Sobolev

Tese apresentada ao colegiado do Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Data da defesa: 28 de janeiro de 2021.

Conceito: Aprovada

Banca Examinadora

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (Orientador)

PDM - UFPA

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

DM - UFScar

João Pablo Pinheiro da Silva

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva

PDM - UFPA

Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento

PDM - UFPA

JG Mesquita

Profª. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita

DM - UNB

Dedicatória

Aos meus pais, Maria e Elias, ao meu esposo Sandro e à minha filha Louise.

Agradecimentos

A Deus, por me permitir alcançar esta graça; por estar sempre comigo nesta jornada sendo minha fonte de sabedoria e força e pelo amparo nos momentos de dificuldade.

Aos meus pais, Maria Benedita Gomes Pinheiro e Elias Soares Pinheiro, por todo amor e dedicação que tiveram comigo e com meus irmãos na árdua tarefa de nos educar; por nunca medirem esforços para nos apoiar e conscientizar sobre a importância de uma boa formação.

Ao meu esposo, Sandro do Nascimento da Costa, pelo companheirismo, compreensão e apoio em todos esses anos de curso.

À minha filha, Louise Pinheiro da Costa, pela compreensão nos momentos em que precisei me ausentar por causa dos estudos e, principalmente, por ser minha maior motivação.

À minha irmã, Adriane e meus irmãos André, Adriano e Emanuel que sempre se dispuseram a me ajudar.

Ao meu avô, Raimundo Gomes (*in memorian*), por ter me incentivado e contribuído para que eu pudesse desenvolver o gosto pelo estudo da matemática; mesmo sem formação acadêmica alguma, conseguia despertar a curiosidade com suas brincadeiras e adivinhações envolvendo lógica e matemática.

Aos meus colegas do curso de doutorado, pela convivência e conhecimentos compartilhados.

Ao Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa, por ter aceitado gentilmente me orientar; pela excelente orientação ao longo deste trabalho e por todo aprendizado que obtive com ele, tanto em conhecimentos matemáticos quanto por seu exemplo profissional.

À Profª. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita, à Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento, ao Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki e ao Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva por terem aceitado participar da banca examinadora desta tese e por suas contribuições que ajudaram a aprimorar o nosso trabalho.

Aos professores Dr. Gelson C. G. dos Santos e Dr. Bráulio B. V. Maia, por aceitaram participar como avaliadores suplentes e por suas valorosas contribuições.

A todos os professores, que desde a educação básica até aqui, contribuíram para minha formação. Em especial, ao Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, com quem obtive valiosos ensinamentos no início do doutorado.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados de existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos, não locais, não homogêneos com condição de fronteira de Neumann e com dois expoentes críticos. Usando versões do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, estendidos aos espaços com expoentes variáveis, foi possível contornar a falta de compacidade devido à criticalidade dos expoentes. No primeiro problema, aplicamos um argumento de truncamento e a teoria do gênero para mostrar que este possui infinitas soluções. No segundo problema, usamos o Teorema do Passo da Montanha e provamos a existência de solução para uma versão do problema onde a equação possui um coeficiente singular. No terceiro problema, consideramos a não linearidade descontínua tanto no domínio quanto na fronteira e, usando a teoria dos funcionais localmente Lipschitz e uma versão do Teorema do Passo da Montanha para estes funcionais, mostramos existência de solução para o problema.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev com Expoentes Variáveis; $p(x)$-Laplaciano; Crescimento Crítico; Teoria do Gênero; Coeficiente Singular; Não Linearidade Descontínua; Condição de Fronteira de Neumann.

Abstract

In this work, we present results of the existence and multiplicity of solutions for a class of elliptical, non-local, non-homogeneous problem with Neumann boundary condition and with two critical exponents. Using versions of the Lions' Concentration and Compactness Principle extended to spaces with variable exponents, it was possible to overcome the lack of compactness due the criticality of the exponents. In the first problem, we apply a truncation argument and the theory of genus to show that it has infinite solutions. In the second problem, we use the Mountain Pass Theorem and prove the existence of solution for a version of the problem where the equation has a singular coefficient. In the third problem, we consider discontinuous nonlinearity both in the domain and at the boundary and, using the theory of functional locally lipschitz and a version of the Mountain Pass Theorem for these functional, we show the existence of a solution to the problem.

Keywords: Sobolev Spaces with Variable Exponents; $p(x)$-Laplacian; Critical Growth; Genus Theory; Singular Coefficient; Discontinuous Nolinearity; Neumann boundary condition.

Sumário

Notações:

- $C_+(\overline{\Omega}) := \{h \in C(\overline{\Omega});\ h(x) > 1 \ \text{para todo}\ x \in \overline{\Omega}\}$;
- $h^+ := \max\limits_{\overline{\Omega}} h(x)$;
- $h^- := \min\limits_{\overline{\Omega}} h(x)$;
- $\rho_{h(x)}(u) := \int_\Omega |u(x)|^{h(x)}\, dx$ (função modular relativa ao espaço $L^{h(x)}(\Omega)$);
- $|u|_{L^{q(x)}(\partial\Omega)} := \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\partial\Omega} \left| \frac{u}{\lambda} \right|^{q(x)} d\Gamma \leq 1 \right\}$ é a norma de Luxemburg;
- denotaremos $|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ simplesmente por $|u|_{p(x)}$;
- $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega a(x)|u|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}$;
- $|u|_{L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x),a(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega a(x) \left| \frac{u}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$;
- $\rho_{p(x),a(x)}(u) := \int_\Omega a(x)|u(x)|^{p(x)} dx$ (função modular relativa ao espaço $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$);
- $\rho_{1,p(x)}(u) := \int_\Omega (|u|^{h(x)} + |\nabla u|^{h(x)})\, dx$ (função modular relativa ao espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$);
- $\|u\| := |u|_{h(x)} + |\nabla u|_{h(x)}$;
- $\frac{\partial u}{\partial \nu}$:= derivada normal exterior;
- $|A|$:= medida do conjunto A.

Introdução

Neste trabalho, investigamos questões de existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas elípticos não lineares, não homogêneos com condição de fronteira de Neumann e crescimento crítico simultâneo no domínio e na fronteira envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano, expressos por:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u + |u|^{h(x)-2}u & = & \lambda|u|^{v(x)-2}u + |u|^{r(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = & |u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $p, h, v, r \in C(\overline{\Omega})$, $q \in C(\partial\Omega)$ e λ, α, β são parâmetros positivos. Além disso, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, $N \geq 2$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ a derivada normal exterior e $\Delta_{p(x)}$ o operador $p(x)$-Laplaciano definido por

$$\Delta_{p(x)}u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),\ \ 1 < p(x) < N.$$

Consideramos também os seguintes expoentes críticos de Sobolev

$$p^*(x) = \frac{Np(x)}{N - p(x)} \ \text{ e } \ p_*(x) = \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)},$$

com p_* representando o expoente crítico no sentido do traço.

É importante ressaltar que essa classe de problemas tem várias motivações interessantes, tanto do ponto de vista físico quanto matemático. Surgem, por exemplo, em problemas de elasticidade (ver [57]), fluidos eletroreológicos (ver [1], [38], [49], [50]), restauração de imagem (ver [13]) e fluxo em meios porosos (ver [3]). Estes problemas físicos foram facilitados pelo desenvolvimento dos espaços de Lebesgue e Sobolev com expoentes variáveis.

O chamado modelo de movimento de fluido eletroreológico é caracterizado por sua capacidade de mudar de maneira drástica as propriedades mecânicas quando influenciadas por um campo eletromagnético externo. Algumas aplicações deste incluem: embreagens, amortecedores, equipamentos de reabilitação, etc. (ver [44],[47],[52],[53],[54]).

Entre as aplicações relacionadas a restauração de imagem, destacamos o trabalho de Y. Chen, S. Levine e R. Rao em [13], estes propuseram um modelo envolvendo o $p(x)$-Laplaciano. O modelo proposto consiste em minimizar o funcional

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x) - I(x)|^2 dx,$$

onde I é a imagem real, u é a imagem recuperada e p é uma função variando entre 1 e 2. Nas regiões que existem arestas, a função $p(x)$ tende a 1, enquanto que nas regiões que não há arestas, $p(x)$ assume valores próximos de 2. Com isso, os autores conseguem remover os ruídos da imagem preservando as arestas.

Com relação as peculiaridades matemáticas, observa-se que o operador $p(x)$-Laplaciano é uma generalização natural do operador p-Laplaciano definido por $\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, com $p > 1$ sendo uma constante real. Porém, o operador $p(x)$-Laplaciano em certas situações é mais complexo que o operador p-Laplaciano, pois $\Delta_{p(x)}$ é não homogêneo e, além disso, em espaços com expoentes variáveis a definição

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}}{\int_{\Omega} |u|^{p(x)}}$$

resulta, geralmente, em $\lambda_1 = 0$. Sendo possível obter $\lambda_1 > 0$ apenas sob condições específicas sobre $p(x)$ (ver Fan et al. [32]).

A presença de dois expoentes críticos nos problemas apresentados nesta tese também é um fator interessante e que causa algumas dificuldades a mais na obtenção dos resultados. Devido a esse duplo crescimento crítico precisamos trabalhar com duas versões do princípio de concentração e compacidade estendidos aos espaços com expoentes variáveis, encontras em [7] e [8]. Além disso, precisamos colocar um termo não local junto ao termo crítico para obter o nível minimax desejado o que causou, por outro lado, certas dificuldades operacionais. Um dos trabalhos pioneiros sobre problemas com dois expoentes críticos foi feito por Escobar em [26]. Em [27], este mesmo autor apresenta aplicações para problemas com expoente crítico na fronteira em problemas Yamabe.

Nosso estudo para esta tese foi motivado pelos trabalhos de Garcia Azorero e Peral Alonso [4], Bonder e Silva [7], Bonder, Saintier e Silva [8], Corrêa e Costa [19], [20], Costa, Ferreira e Tavares [21] e Figueiredo e Nascimento [33].

Garcia Azorero e Peral Alonso, em [4], estudaram existência de solução para o problema não linear definido por

$$\begin{cases} -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= |u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{q-2}u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω e p^* é o expoente crítico de Sobolev. Usando métodos da teoria dos pontos críticos, obtiveram a existência de soluções nos seguintes casos: se $p < q < p^*$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda > \lambda_0$, o problema possui uma solução não trivial; se $\max\left\{p, p^* - \dfrac{p}{p-1}\right\} < q < p^*$, existe solução não trivial para todo $\lambda > 0$; se $1 < q < p$, existe λ_1 tal que, para $0 < \lambda < \lambda_1$, o problema possui infinitas soluções. Além disso, obtiveram um resultado de multiplicidade para o problema não crítico quando o funcional associado é não simétrico.

Bonder e Silva [7], em 2010, estenderam o Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [43] para os espaços com expoentes variáveis. Em [7], pode ser encontrado o seguinte resultado:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, $p, m \in C_+(\overline{\Omega}), p^+ < N$ com

$$m(x) \leq p^*(x), \, \forall x \in \overline{\Omega},$$

e (u_j) uma sequência em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Então, existe um conjunto enumerável de índices I_2, números positivos $\{\mu_i\}_{i\in I_2}$ e $\{\nu_i\}_{i\in I_2}$ e pontos $\{x_i\}_{i\in I_2} \subset \{x \in \overline{\Omega}\,;\, m(x) = p^*(x)\}$ tais que

$$|u_j|^{m(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{m(x)} + \sum_{i\in I_2} \nu_i \delta_{x_i} \text{ fraco} - * \text{ em medida},$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I_2} \mu_i \delta_i \text{ fraco} - * \text{ em medida}$$

e

$$S_m \nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I_2,$$

onde S_m é a melhor constante da desigualdade Gagliardo-Nirenberg-Sobolev para o expoente variável, dada por

$$S_m = S_m(\Omega) = \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\| |\nabla \phi| \|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|\phi\|_{L^{m(x)}(\Omega)}}.$$

Além disso, como uma aplicação deste resultado, Bonder e Silva mostraram existência e multiplicidade de soluções para o seguinte problema de Dirichlet envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano com crescimento subcrítico e crítico:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u &= |u|^{q(x)-2}u + \lambda(x)|u|^{r(x)-2}u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^N$, $r(x) < p^*(x) - \delta$, $q(x) \leq p^*(x)$ com $\{q(x) = p^*(x)\} \neq \emptyset$. Utilizaram o Teorema do Passo da Montanha, argumento de truncamento e gênero de Krasnoselskii, inspirados pelo trabalho de Garcia Azorero e Peral Alonso [4]. Ressaltamos que, de forma independente, Fu [35] obteve um resultado similar sobre princípio de concentração e compacidade.

Em 2011, Liang e Zhang [42], estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + |u|^{p(x)-2}u &= f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= |u|^{q(x)-2}u \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

mostraram multiplicidade de soluções para este problema de Neumann envolvendo o $p(x)$-Laplaciano, com crescimento crítico, via argumento de truncamento.

Guo e Zhao [37], em 2012, incluíram um termo não local e estudaram o problem

$$\begin{cases} a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}dx\right)\right)\left(-\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u\right) &= b\left(\int_\Omega F(x,u)dx\right) f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}dx\right)\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} &= g(x,u) \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

provando existência e multiplicidade de soluções para o problema de Neumann não local envolvendo o $p(x)$-Laplaciano, com crescimento subcrítico.

Bonder, Saintier e Silva [8], em 2013, apresentaram o Princípio de Concentração e Compacidade para espaços com expoentes variáveis no sentido do traço, obtendo o seguinte resultado:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, $p \in C_+(\overline{\Omega})$, $l \in C_+(\partial\Omega)$ com

$$l(x) \leq p_*(x),\ \forall x \in \partial\Omega,$$

e $(u_j) \subset W^{1,h(x)}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Então, existe um conjunto enumerável I_1, números positivos $\{\mu_i\}_{i\in I_1}$ e $\{\nu_i\}_{i\in I_1}$ e pontos $\{x_i\}_{i\in I_1} \subset \{x \in \partial\Omega\,;\, l(x) = p_*(x)\}$ tais que

$$|u_j|^{l(x)}\, ds \rightharpoonup \nu = |u|^{l(x)}\, ds + \sum_{i\in I_1} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \text{fraco} - * \text{ em medida,} \tag{3}$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)}\, dx \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} dx + \sum_{i\in I_1} \mu_i \delta_{x_i}, \quad \text{fraco} - * \text{ em medida.} \tag{4}$$

e

$$\overline{T}_{x_i} \nu_i^{\frac{1}{p_*(x_i)}} \leq \mu_i^{\frac{1}{p(x_i)}},\ \forall i \in I_1, \tag{5}$$

onde

$$\overline{T}_{x_i} = \sup_{\epsilon>0} T(h(\cdot), l(\cdot), \Omega_{\epsilon,i}, \Lambda_{\epsilon,i})$$

representa a constante de Sobolev no sentido do traço,

$$\Omega_{\epsilon,i} = \Omega \cap B_\epsilon(x_i) \ \text{ e } \ \Lambda_{\epsilon,i} = \Omega \cap \partial B_\epsilon(x_i).$$

Em [9], estes autores mostraram a existência de solução para o problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + h|u|^{p(x)-2} u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} &= |u|^{r(x)-2} u \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde h é uma função suave que satisfaz alguma condição de coercividade, os expoentes $p : \bar{\Omega} \to (1, +\infty)$ e $r : \partial\Omega \to [1, +\infty)$ são funções contínuas que verificam

$$1 < p^- := \inf_{x \in \Omega} p(x) \leq p^+ := \sup_{x \in \Omega} p(x) < N \ \text{ e } \ r(x) \leq p_*(x) = \frac{(N-1)p(x)}{N - p(x)}.$$

O expoente p_* é crítico no sentido do traço. Além disso, consideraram o conjunto

$$\mathcal{A}_T := \{x \in \partial\Omega; r(x) = p_*(x)\} \neq \emptyset,$$

caracterizando, sobre a fronteira do domínio, um crescimento crítico para o problema. As principais ferramentas para a obtenção dos resultados foram o Princípio de Concentração e Compacidade estendido aos espaços com expoente variável no sentido do traço e o Teorema do Passo da Montanha.

Corrêa e Costa em [19], [20] e Costa, Ferreira e Tavares em [21] estudaram a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx\right) (-\Delta_{p(x)} u + |u|^{p(x)-2}u) \quad + \quad \xi_1 |u|^{h(x)-2}u \\ \qquad\qquad\qquad = \quad \xi_2 |u|^{v(x)-2}u + \lambda |u|^{r(x)-2}u \left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx\right]^\alpha \text{em } \Omega, \\ M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx\right) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \gamma |u|^{q(x)-2}u \left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} d\Gamma\right]^\beta \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 2$, e $p, h, v, r \in C(\overline{\Omega})$, $q \in C(\partial\Omega)$, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal exterior, $d\Gamma$ denota a medida na fronteira, $\lambda, \gamma, \alpha, \beta, \xi_1, \xi_2$ são parâmetros não negativos.

Observamos que, quando $\xi_1 = \xi_2 = \beta = 0$, Corrêa e Costa [19] provaram existência de solução não trivial para o problema com crescimento crítico sobre a fronteira $\partial\Omega$, e crescimento subcrítico em Ω. Além disso, eles também mostraram a existência de solução não trivial para o problema com crescimento crítico em Ω, e crescimento subcrítico sobre $\partial\Omega$ para o caso $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Quando $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \beta = 0$, Corrêa e Costa [20] mostraram multiplicidade de solução para o problema com crescimento crítico sobre $\partial\Omega$ e crescimento subcrítico em Ω. Considerando $\xi_1 = \xi_2 = 0$ e $\lambda, \alpha, \beta > 0$, Costa, Ferreira e Tavares [21] provaram *existência* de solução não trivial para o problema com crescimento crítico, simultaneamente, em Ω e sobre $\partial\Omega$.

Na referência [33], os autores Figueiredo e Nascimento, mostraram a existência de solução positiva para a classe de problemas com não linearidade descontínua envolvendo o operador $p\&q$-Laplaciano, definida por

$$\begin{cases} -div\left(a\left(|\nabla u|^p\right)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) &= f(u)+|u|^{q^*-2}u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $2 \leq p \leq q < q^*$, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um função que possui um conjunto não enumerável de pontos de descontinuidade e a é uma função de classe C^1. Para obter os resultados a principal ferramenta utilizada pelos autores foi uma versão não suave do Teorema do Passo da Montanha para funcionais Lip_{loc}.

Outro trabalho importante em nossos estudos foi a referência [34], onde Figueiredo e Santos estudaram uma classe de problemas do tipo Kirchhoff com não linearidade descontinua e crescimento crítico Caffarelli-Kohn-Nirenberg, neste trabalho os autores apresentaram uma condição que permite "baixar"o nível do Teorema do Passo da Montanha e mostraram existência de solução positiva.

No Capítulo 1 desta tese, estudaremos a *multiplicidade* de soluções para o problema (1). As principais dificuldades no estudo deste problema se dão pela presença do operador não homogêneo $p(x)$-Laplaciano, pela presença de dois expoentes críticos e pelos termos não locais presentes no problema. Para contornar a falta de compacidade causada pela duplo crescimento crítico, aplicaremos o Princípio de Concentração e Compacidade estendido por Bonder e Silva [7] e por Bonder, Saintier e Silva [8]. Em seguida, inspirados pelas ideias apresentadas em [4], usaremos um argumento de truncamento e, através de propriedades clássicas da Teoria do gênero, concluiremos o resultado. Note que este problema é uma variante, sem o termo de Kirchhoff, do problema estudado por Costa, Ferreira e Tavares em [21], no entanto, neste os autores mostraram apenas a existência de solução via Teorema do Passo da Montanha. Em Corrêa e Costa [20], os autores mostraram multiplicidade de soluções para esta classe de problemas, porém consideraram crescimento crítico sobre $\partial\Omega$ e crescimento subcrítico em Ω. O grande diferencial dos resultados apresentados neste capítulo é mostrar a *multiplicidade* de soluções considerando o crescimento crítico simultaneamente em Ω e sobre a fronteira $\partial\Omega$.

No Capítulo 2, inspirados pelas ideias apresentadas por K. Kefi e V. D. Rădulescu em [39], nosso objetivo é mostrar existência de solução, via Teorema do Passo da Montanha, para o problema com coeficiente singular descrito a seguir:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u & = & a(x)|u|^{v(x)-2}u + \lambda|u|^{r(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = & |u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Nossas hipóteses sobre a função singular $a(x)$ são as seguintes:

(i) $a \in L^{k(x)}(\Omega)$, $k \in C(\overline{\Omega})$, $k^- > v^+$;

(ii) $a(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$;

(iii) $\dfrac{k(x)v(x)}{k(x) - v(x)} < p^*(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

Os autores em [39], trabalham com um operador $p(x)$-biarmônico definido por $\Delta^2_{p(x)}u = \Delta\left(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\right)$ e, além disso, consideram uma condição de crescimento subcrítica. Enquanto que, neste trabalho, estamos considerando condição de crescimento crítico ao mesmo tempo no domínio e sobre a fronteira.

No Capítulo 3, motivados pelo trabalho de Figueiredo e Nascimento [33], investigamos a existência de solução positiva para o problema com dois expoentes críticos

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u & = & f(u) + |u|^{r(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = & g(u) + |u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \text{sobre } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

onde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções que possuem conjuntos não enumeráveis de pontos de descontinuidades. Deste modo, precisamos trabalhar com o espaço das funções localmente Lipschitz e a teoria dos pontos críticos aplicada a estes funcionais. Note que em [33] foi considerado o operador $p\&q$-Laplaciano e o problema com condição de fronteira de Dirichlet. No trabalho [34] os autores trabalham com o operador Laplaciono e crescimento crítico Caffarelli-Kohn-Nirenberg. Portanto, no trabalho apresentado neste capítulo temos o diferencial de estarmos trabalhando com o operador $p(x)$-Laplaciano, condição de fronteira de Neumann e dois expoentes críticos, um no domínio e outro na fronteira. Problemas envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano e não linearidade descontínua também foram estudados por Bonanno e Chinnì em [6] onde os autores mostraram multiplicidade de soluções para um problema de Dirichlet e condição de crescimento subcrítica.

No Apêndice 1, faremos uma breve abordagem sobre os espaços generalizados de Lebesgue e Sobolev. Faremos também, uma revisão sucinta acerca dos funcionais localmente Lipschitz, suas propriedades e sobre a teoria dos pontos críticos para estes funcionais, desenvolvida por Clarke [17] e Chang [12]. Veremos ainda algumas propriedades da Teoria do Gênero, muito úteis nesta tese.

No Apêndice 2, apresentamos a diferenciabilidade e regularidade do funcional associado ao problema estudado no capítulo 1.

Capítulo

1

Multiplicidade de soluções para um problema não local, não homogêneo com condição de fronteira de Neumann

Neste capítulo, estudaremos a multiplicidade de soluções para o seguinte problema não local

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u + |u|^{h(x)-2}u = \lambda|u|^{v(x)-2}u + |u|^{r(x)-2}u\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{q(x)-2}u\left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e $p, h, v, r \in C(\overline{\Omega})$, $q \in C(\partial\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal exterior, λ, α, β são parâmetros positivos e $\Delta_{p(x)}$ é o operador $p(x)$-Laplaciano.

Ao longo desta tese, vamos considerar os conjuntos não vazios e disjuntos

$$\mathcal{A}_1 := \{x \in \partial\Omega; q(x) = p_*(x)\}$$

e

$$\mathcal{A}_2 := \{x \in \overline{\Omega}; r(x) = p^*(x)\},$$

onde

$$p^*(x) = \frac{Np(x)}{N - p(x)} \text{ e } p_*(x) = \frac{(N-1)p(x)}{N - p(x)},$$

representam os expoentes críticos de Sobolev com p_* significando o expoente crítico no sentido do traço.

Para demonstrar o principal resultado deste capítulo, enunciado a seguir, usaremos um argumento de truncamento; uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade para espaços de Sobolev generalizados, estendido por Bonder e Silva em [7], e outra versão deste mesmo princípio no sentido do traço, estendido por Bonder, Saintier e Silva em [8], Fu [35]; usaremos também, uma classe minimax apropriada de pontos críticos, através do conceito clássico do gênero e suas propriedades.

Apresentamos neste capítulo o seguinte Teorema:

Teorema 1.1 *Assuma a existência de funções* $p(x), h(x), v(x), r(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ *e* $q(x) \in C_+(\partial\Omega)$ *satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$v^{\pm} < p^- \leq p^+ < h^+ < \min\left\{\frac{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}{(r^+)^{\alpha}}, \frac{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}{(q^+)^{\beta}}\right\}. \tag{1.2}$$

Então, existe $\bar{\lambda} > 0$ *tal que para todo* $0 < \lambda < \bar{\lambda}$ *o problema* (1.1) *possui infinitas soluções em* $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

1.1 Caracterização Variacional

Problemas do tipo apresentado em (1.1) são associados ao funcional energia

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx + \int_\Omega \frac{1}{h(x)}|u|^{h(x)}dx - \lambda\int_\Omega \frac{1}{v(x)}|u|^{v(x)}dx \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\left[\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}, \end{aligned}$$

para todo $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, onde $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é o espaço generalizado de Lebesgue-Sobolev.

Esse funcional pertence a $C^1(W^{1,p(x)}(\Omega),\mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned}
J'_\lambda(u)w &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla w dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uwdx + \int_\Omega |u|^{h(x)-2}uwdx \\
&- \lambda\int_\Omega |u|^{v(x)-2}uwdx - \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)-2}uwdx \\
&- \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)-2}uwd\Gamma,
\end{aligned}$$

para todo $u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ (ver Apêndice B). Assim, $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1.1) se, e somente se, u é um ponto crítico de J_λ.

A seguir, temos uma definição essencial para o nosso estudo.

Definição 1.1 *Sejam X um espaço de Banach e um funcional $J \in C^1(X,\mathbb{R})$. Dizemos que uma sequência $(u_j) \subset X$ é uma sequência Palais-Smale com nível de energia d, $(PS)_d$, para o funcional J quando*

$$J(u_j) \to d \ \text{ e } \ J'(u_j) \to 0 \ \text{ em } \ X'.$$

Quando toda $(PS)_d$ para J possui uma subsequência que converge forte em X, dizemos que J satisfaz a condição Palais-Smale no nível d (ou abreviadamente, J é $(PS)_d$).

1.2 Lemas Auxiliares

Para demonstrar o principal resultado deste capítulo, precisaremos de alguns lemas técnicos enunciados e demonstrados neste tópico.

Lema 1.1 *Se $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_d$ para J_λ, então (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. Uma vez que $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_d$ para J_λ, temos $J_\lambda(u_j) \to d$ e $J'_\lambda(u_j) \to 0$. Então, considerando θ satisfazendo

$$h^+ < \theta < min\left\{\frac{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}{(r^+)^\alpha}, \frac{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}{(q^+)^\beta}\right\}, \tag{1.3}$$

e $C > 0$ tal que

$$C \geq J_\lambda(u_j), \ \ \forall j \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\begin{array}{rcl} C + \|u_j\| & \geq & J_\lambda(u_j) - \dfrac{1}{\theta} J'_\lambda(u_j) u_j \\ & \geq & \left(\dfrac{1}{p^+} - \dfrac{1}{\theta}\right) \rho_{1,p(x)}(u_j) + \left(\dfrac{1}{h^+} - \dfrac{1}{\theta}\right) \displaystyle\int_\Omega |u_j|^{h(x)} dx + \left(\dfrac{\lambda}{\theta} - \dfrac{\lambda}{v^-}\right) \int_\Omega |u_j|^{v(x)} dx \\ & + & \left(\dfrac{1}{\theta} \cdot \dfrac{1}{(r^+)^\alpha} - \dfrac{1}{\alpha+1} \cdot \dfrac{1}{(r^-)^{\alpha+1}}\right) \left[\displaystyle\int_\Omega |u_j|^{r(x)} dx\right]^{\alpha+1} \\ & + & \left(\dfrac{1}{\theta} \cdot \dfrac{1}{(q^+)^\beta} - \dfrac{1}{\beta+1} \cdot \dfrac{1}{(q^-)^{\beta+1}}\right) \left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta+1}. \end{array}$$

Suponhamos, por contradição, que (u_j) seja ilimitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\|u_j\| > 1$ e, pela Proposição A.10, obtemos

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_j\|^{p^-} + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{v^-}\right) \rho_{v(x)}(u_j).$$

Além disso, da Proposição A.2 segue que

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_j\|^{p^-} + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{v^-}\right) |u_j|_{v(x)}^{v^+}.$$

Então, pelas imersões contínuas de Sobolev, temos

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_j\|^{p^-} + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{v^-}\right) \|u_j\|^{v^\pm},$$

que é uma contradição, pois $p^- > v^\pm > 1$. Portanto, (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 1.2 *Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para J_λ. Se*

$$
\begin{aligned}
d &< \min\left\{ L_1 \inf_{i\in I_1}\left(\overline{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{(\beta+1)p_*(x_i)p(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}, L_2 \inf_{i\in I_2}\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{(\alpha+1)p^*(x_i)p(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right\} \\
&\quad + K\min\left\{\lambda^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^--1}}, \lambda^{\frac{(h/v)^+}{(h/v)^+-1}}\right\}
\end{aligned}
$$

onde

$$
L_1 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q_{A_1}^+)^\beta} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q_{A_1}^-)^{\beta+1}}\right) \text{ e } L_2 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r_{A_2}^+)^\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r_{A_2}^-)^{\alpha+1}}\right).
$$

Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$ os conjuntos de índices I_1 e I_2 dados nas Proposições A.19 e A.20 são vazios e

$$
u_j \to u \textit{ fortemente em } L^{q(x)}(\partial\Omega) \textit{ e em } L^{r(x)}(\Omega).
$$

Demonstração. Pelo Lema 1.1, sabemos que a sequência (u_j) é limitada. Então, existe uma subsequência, que também será denotada por (u_j), tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$, e assim estamos em condições de usar as Proposições A.19 e A.20. Note que, para termos $I_1 \cup I_2 \neq \emptyset$, precisaríamos ter $I_1 \neq \emptyset$ ou $I_2 \neq \emptyset$, mostraremos que isto não ocorre.

De fato, primeiro, vamos supor que $I_1 \neq \emptyset$. Seja $x_i \in \mathcal{A}_1$ um ponto singular de medida μ e ν. Consideremos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $0 \le \phi(x) \le 1$, $\phi(0) = 1$ e $supp\,\phi \subset B_1(0)$.

Agora, para cada $i \in I_1$ e $\varepsilon > 0$ considere as funções

$$
\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^N.
$$

Desde que $J'_\lambda(u_j) \to 0$, obtemos

$$
J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon} u_j) \to 0.
$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \quad &+ \quad \int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dx + \int_\Omega |u_j|^{h(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dx \\
&- \quad \lambda\int_\Omega |u_j|^{v(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dx - \left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dx \\
&- \quad \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right)^\beta \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j d\Gamma \to 0,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j dx \quad &+ \quad \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon} dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx + \int_\Omega |u_j|^{h(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \\
&- \quad \lambda\int_\Omega |u_j|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx - \left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \\
&- \quad \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right)^\beta \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)}\phi_{i,\varepsilon}d\Gamma \to 0.
\end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$, temos

$$\begin{aligned}
0 = \lim \Bigg[\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j dx \quad &+ \quad \int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx + \int_\Omega |u_j|^{h(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \\
- \quad \lambda\int_\Omega |u_j|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx &- \left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \Bigg] \\
+ \quad \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu &- \int_{\partial\Omega}\phi_{i,\varepsilon}d\bar{\nu},
\end{aligned}$$

onde

$$\lim_{j\to\infty}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right)^\beta |u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \bar{\nu}. \tag{1.4}$$

Podemos mostrar que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_\Omega u|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi_{i,\varepsilon}dx = 0$ ver Shang-Wang [51]. Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = \mu\phi(0) \ \text{ e } \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega}\phi_{i,\varepsilon}d\bar{\nu} = \bar{\nu}\phi(0).$$

Sendo $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, para $j \to \infty$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to \left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx,$$

$$\int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to \int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx, \quad \int_\Omega |u_j|^{h(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to \int_\Omega |u|^{h(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx,$$

$$\text{e} \ \ \lambda\int_\Omega |u_j|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to \lambda\int_\Omega |u|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx.$$

Uma vez que, quando $\varepsilon \to 0$,

$$\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0, \quad \int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0,$$

$$\int_\Omega |u|^{h(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0 \text{ e } \ \lambda\int_\Omega |u|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0,$$

temos

$$\mu_i\phi(0) = \bar{\nu}_i\phi(0).$$

Implicando que

$$\mu_i \leq \bar{c}\nu_i,$$

onde $\bar{c}$ surge da convergência (1.4).

De $\overline{T}_{x_i}\nu_i^{\frac{1}{p_*(x_i)}} \leq \mu_i^{\frac{1}{p(x_i)}}$, obtemos $(\overline{T}_{x_i})^{p(x_i)}\nu_i^{\frac{p(x_i)}{p_*(x_i)}} \leq \mu_i \leq \bar{c}\nu_i$. Então $(\overline{T}_{x_i})^{p(x_i)} \leq \bar{c}\nu_i^{\frac{p_*(x_i)-p(x_i)}{p_*(x_i)}}$, que implica

$$\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i} \leq \nu_i^{\frac{p_*(x_i)-p(x_i)}{p(x_i)p_*(x_i)}}.$$

Portanto,

$$\nu_i \geq \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{(p(x_i)p_*(x_i)/p_*(x_i)-p(x_i))}.$$

Além disso, sabemos que

$$d = \lim J_\lambda(u_j) = \lim\left(J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_j)u_j\right),$$

então, usando θ satisfazendo (1.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
d &\geq \lim \left\{ \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{\theta} \right) \int_\Omega |u_j|^{h(x)} dx + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{v^-} \right) \int_\Omega |u_j|^{v(x)} dx \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+)^\beta} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-)^{\beta+1}} \right) \left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)} d\Gamma \right]^{\beta+1} \right\}.
\end{aligned}
$$

Agora, definindo $\mathcal{A}_\delta = \bigcup_{x \in \mathcal{A}_1} (B_\delta(x) \cap \Omega) = \{x \in \Omega : dist(x, \mathcal{A}_1) < \delta\}$, segue que

$$
\begin{aligned}
d &\geq \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{\theta} \right) \int_\Omega |u|^{h(x)} dx + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{v^-} \right) \int_\Omega |u|^{v(x)} dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_\delta})^\beta} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_\delta})^{\beta+1}} \right) \inf_{i \in I_1} \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i} \right)^{\frac{(\beta+1)p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i))}}.
\end{aligned}
$$

Desde que $\delta > 0$ é arbitrário e q é contínua, concluímos que

$$
\begin{aligned}
d &\geq \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{\theta} \right) \int_\Omega |u|^{h(x)} dx + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{v^-} \right) \int_\Omega |u|^{v(x)} dx \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}} \right) \inf_{i \in I_1} \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i} \right)^{\frac{(\beta+1)p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i))}}.
\end{aligned}
$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, mostramos que

$$
\begin{aligned}
d &\geq \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{\theta} \right) \int_\Omega |u|^{h(x)} dx + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{v^-} \right) \cdot \left(||u|^{v(x)}|_{\frac{h(x)}{v(x)}} \cdot |\Omega|^{\frac{h^+-v^-}{h^-}} \right) \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}} \right) \inf_{i \in I_1} \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i} \right)^{\frac{(\beta+1)p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i))}}.
\end{aligned}
$$

Se $||u|^{v(x)}|_{\frac{h(x)}{v(x)}} \geq 1$, temos

$$
d \geq c_1 \left| |u|^{v(x)} \right|_{\frac{h(x)}{v(x)}}^{(h/v)^-} - \lambda c_2 \left| |u|^{v(x)} \right|_{\frac{h(x)}{v(x)}} + c_3
$$

onde

$$c_1 = \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{\theta}\right) > 0, \;\; c_2 = \left(\frac{1}{v^-} - \frac{1}{\theta}\right) \cdot |\Omega|^{\frac{h^+ - v^-}{h^-}} > 0$$

e

$$c_3 = \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right) \inf_{i \in I_1} \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{(\beta+1)p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i) - p(x_i))}}.$$

Assim, definindo $g_1(t) = c_1 t^{(h/v)^-} - \lambda c_2 t$, esta função atinge seu mínimo absoluto para $t > 0$, no ponto

$$\bar{t} = \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{1}{(h/v)^- - 1}}.$$

Note que

$$g_1(\bar{t}) = c_1 \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}} - \lambda c_2 \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{1}{(h/v)^- - 1}},$$

que implica

$$g_1(\bar{t}) = c_1 \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}} - \frac{c_1 (h/v)^-}{c_1 (h/v)^-} \cdot \lambda c_2 \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{1}{(h/v)^- - 1}}.$$

Então,

$$g_1(\bar{t}) = c_1 \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}} - c_1 (h/v)^- \cdot \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{1}{(h/v)^- - 1} + 1}.$$

Logo,

$$g_1(\bar{t}) = c_1 \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^-}\right)^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}} \cdot (1 - (h/v)^-).$$

Usando o fato de que $v^\pm < h^+$, podemos escrever

$$g_1(\bar{t}) = \lambda^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}} \cdot k_1,$$

onde k_1 é uma constante negativa dependendo apenas de h, v e Ω.

Se $||u|^{v(x)}|_{\frac{h(x)}{v(x)}} < 1$, temos

$$d \geq c_1 \left| |u|^{v(x)} \right|^{(h/v)^+}_{\frac{h(x)}{v(x)}} - \lambda c_2 \left| |u|^{v(x)} \right|_{\frac{h(x)}{v(x)}} + c_3,$$

onde

$$c_1 = \left(\frac{1}{h^+} - \frac{1}{\theta}\right) > 0, \;\; c_2 = \left(\frac{1}{v^-} - \frac{1}{\theta}\right) \cdot |\Omega|^{\frac{h^+ - v^-}{h^-}} > 0$$

e

$$c_3 = \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^{\beta}} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right) \inf_{i \in I_1} \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{(\beta+1)p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i))}}.$$

Logo, definindo $g_2(t) = c_1 t^{(h/v)^+} - \lambda c_2 t$, esta função atinge seu mínimo, para $t > 0$, no ponto

$$\underline{t} = \left(\frac{\lambda c_2}{c_1 (h/v)^+}\right)^{\frac{1}{(h/v)^+ - 1}}.$$

Assim, obtemos

$$g_2(\underline{t}) = \lambda^{\frac{(h/v)^+}{(h/v)^+ - 1}} \cdot k_2$$

onde k_2 é uma constante negativa dependendo apenas de h, v e Ω.

Então

$$d \;\; \geq \;\; L_1 \inf_{i \in I_1} \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{(\beta+1)p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i))}} + K \min\left\{\lambda^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}}, \lambda^{\frac{(h/v)^+}{(h/v)^+ - 1}}\right\},$$

onde $L_1 = \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^{\beta}} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right)$ e $K = \min\{k_1, k_2\}$. Portanto $I_1 = \emptyset$.

Agora, consideremos $I_2 \neq \emptyset$, seguindo os mesmos passos do caso anterior, obtemos

$$d \;\; \geq \;\; L_2 \inf_{i \in I_2} \left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \sigma_m\right)^{\frac{(\alpha+1)p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}} + K \min\left\{\lambda^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}}, \lambda^{\frac{(h/v)^+}{(h/v)^+ - 1}}\right\},$$

onde $L_2 = \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(r^+_{\mathcal{A}_2})^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{(r^-_{\mathcal{A}_2})^{\alpha+1}}\right)$ e $K = \min\{k_1, k_2\}$. Portanto $I_2 = \emptyset$.

■

Lema 1.3 *Seja* $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ *uma sequência* $(PS)_d$ *para* J_λ. *Se*

$$
\begin{aligned}
d \quad < \quad & \min\left\{ L_1 \inf_{i\in I_1}\left(\overline{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{(\beta+1)p_*(x_i)p(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}, L_2 \inf_{i\in I_2}\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{(\alpha+1)p^*(x_i)p(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right\} \\
& + K \min\left\{\lambda^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- -1}}, \lambda^{\frac{(h/v)^+}{(h/v)^+ -1}}\right\}
\end{aligned}
$$

onde

$$
L_1 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q_{A_1}^+)^\beta} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q_{A_1}^-)^{\beta+1}}\right) \; e \; L_2 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r_{A_2}^+)^\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r_{A_2}^-)^{\alpha+1}}\right),
$$

então existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração. Pelo Lema 1.1, a menos de subsequência, existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Além disso, da convergência $J'_\lambda(u_j) \to 0$, concluímos que $J'_\lambda(u_j)(u_j - u) \to 0$. Logo, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx \; &+ \; \int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx + \int_\Omega |u_j|^{h(x)-2}u_j(u_j-u)dx \\
-\lambda\int_\Omega |u_j|^{v(x)-2}u_j(u_j-u)dx \; &- \; \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx \\
&- \; \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma \to 0.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$
\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \;\leq\; \int_\Omega |u_j|^{p(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_1 \left||u_j|^{p(x)-1}\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} |u_j-u|_{p(x)},
$$

$$
\left|\int_\Omega |u_j|^{h(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \;\leq\; \int_\Omega |u_j|^{h(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_2 \left||u_j|^{h(x)-1}\right|_{\frac{h(x)}{h(x)-1}} |u_j-u|_{h(x)},
$$

$$
\left|\int_\Omega |u_j|^{v(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \;\leq\; \int_\Omega |u_j|^{v(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_3 \left||u_j|^{v(x)-1}\right|_{\frac{v(x)}{v(x)-1}} |u_j-u|_{v(x)},
$$

$$\left| \int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx \right| \leq \int_\Omega |u_j|^{r(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_4 \left||u_j|^{r(x)-1}\right|_{\frac{r(x)}{r(x)-1}} |u_j-u|_{r(x)},$$

$$\left| \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma \right| \leq \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-1}|u_j-u|d\Gamma \leq C_5 \left||u_j|^{q(x)-1}\right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} |u_j-u|_{q(x)},$$

onde C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 são constantes positivas. Uma vez que a imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ é compacta e, pelo Lema 1.2, $u_j \to u$ em $L^{r(x)}(\Omega)$ e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$, obtemos

$$\left| \int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx \right| \to 0, \quad \left| \int_\Omega |u_j|^{h(x)-2}u_j(u_j-u)dx \right| \to 0,$$

$$\left| \int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx \right| \to 0, \quad \left| \int_\Omega |u_j|^{v(x)-2}u_j(u_j-u)dx \right| \to 0$$

e

$$\left| \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma \right| \to 0.$$

Deste modo, considerando

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx,$$

concluímos que

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) \to 0.$$

Analogamente,

$$L_{p(x)}(u)(u_j-u) \to 0.$$

Portanto,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j-u) \to 0$$

e da Proposição A.18 segue que

$$u_j \to u \ \text{ em } \ W^{1,p(x)}(\Omega).$$

■

Lema 1.4 *O funcional energia J_λ associado ao problema (1.1) não é limitado inferiormente.*

Demonstração. Considere $0 < w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t > 1$, temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(tw) &\leq \frac{t^{p^+}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(w) + \frac{t^{h^+}}{h^-}\int_\Omega |w|^{h(x)}dx - \lambda\frac{t^{v^+}}{v^+}\int_\Omega |w|^{v(x)}dx \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\frac{t^{r^-(\alpha+1)}}{(r^+)^{\alpha+1}}\left[\int_\Omega |w|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\frac{t^{q^-(\beta+1)}}{(q^+)^{\beta+1}}\left[\int_{\partial\Omega} |w|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Da desigualdade (1.2), obtemos

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda(tw) = -\infty,$$

e isto conclui a prova.

■

1.3 Truncamento do funcional energia J_λ

Inspirados pelos trabalhos de Garcia Azorero e Peral Alonso em [4], e de Corrêa e Costa em [18] faremos um truncamento sobre o funcional J_λ com o objetivo de obter uma limitação inferior especial para este funcional.

Sabemos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) + \frac{1}{h^+}\rho_{h(x)}(u) - \frac{\lambda}{v^-}\rho_{v(x)}(u) \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{(r^-)^{\alpha+1}}(\rho_{r(x)}(u))^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\frac{1}{(q^-)^{\beta+1}}(\rho_{q(x)}(u))^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Além disso, pela Proposição A.3 segue que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) + \frac{1}{h^+}\rho_{h(x)}(u) - \frac{\lambda}{v^-}\max\left\{|u|_{v(x)}^{v^-}, |u|_{v(x)}^{v^+}\right\} \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{(r^-)^{\alpha+1}}\left(\max\left\{|u|_{r(x)}^{r^-}, |u|_{r(x)}^{r^+}\right\}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\frac{1}{(q^-)^{\beta+1}}\left(\max\left\{|u|_{q(x)}^{q^-}, |u|_{q(x)}^{q^+}\right\}\right)^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Sendo $\dfrac{1}{h^+}\rho_{h(x)}(u) \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) - \frac{\lambda}{v^-}\max\left\{|u|_{v(x)}^{v^-}, |u|_{v(x)}^{v^+}\right\} - \frac{1}{\alpha+1}\frac{1}{(r^-)^{\alpha+1}}\left(\max\left\{|u|_{r(x)}^{r^-}, |u|_{r(x)}^{r^+}\right\}\right)^{\alpha+1} \\ &- \frac{1}{\beta+1}\frac{1}{(q^-)^{\beta+1}}\left(\max\left\{|u|_{q(x)}^{q^-}, |u|_{q(x)}^{q^+}\right\}\right)^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Das imersões contínuas de Sobolev,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) - \frac{\lambda}{v^-}(\sigma_v^{v^-} + \sigma_v^{v^+})\max\left\{\|u\|^{v^-}, \|u\|^{v^+}\right\} \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\frac{(\sigma_r^{r^-} + \sigma_r^{r^+})^{\alpha+1}}{(r^-)^{\alpha+1}}\left(\max\left\{\|u\|^{r^-}, \|u\|^{r^+}\right\}\right)^{\alpha+1} \\ &- \frac{1}{\beta+1}\frac{(\sigma_q^{q^-} + \sigma_q^{q^+})^{\beta+1}}{(q^-)^{\beta+1}}\left(\max\left\{\|u\|^{q^-}, \|u\|^{q^+}\right\}\right)^{\beta+1}, \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) - \lambda K_1\max\left\{\|u\|^{v^-}, \|u\|^{v^+}\right\} \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\frac{K_2}{(r^-)^{\alpha+1}}\left(\max\left\{\|u\|^{r^-}, \|u\|^{r^+}\right\}\right)^{\alpha+1} \\ &- \frac{1}{\beta+1}\frac{K_3}{(q^-)^{\beta+1}}\left(\max\left\{\|u\|^{q^-}, \|u\|^{q^+}\right\}\right)^{\beta+1}, \end{aligned}$$

onde $K_1 = \dfrac{\sigma_v^{v^-} + \sigma_v^{v^+}}{v^-}$, $K_2 = (\sigma_r^{r^-} + \sigma_r^{r^+})^{\alpha+1}$ e $K_3 = (\sigma_q^{q^-} + \sigma_q^{q^+})^{\beta+1}$.

Da Proposição A.14, obtemos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) - \lambda K_1\max\left\{\rho_{1,p(x)}(u)^{\frac{v^-}{p^+}}, \rho_{1,p(x)}(u)^{\frac{v^+}{p^-}}\right\} \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\frac{K_2}{(r^-)^{\alpha+1}}\left(\max\left\{\rho_{1,p(x)}(u)^{\frac{r^-}{p^+}}, \rho_{1,p(x)}(u)^{\frac{r^+}{p^-}}\right\}\right)^{\alpha+1} \\ &- \frac{1}{\beta+1}\frac{K_3}{(q^-)^{\beta+1}}\left(\max\left\{\rho_{1,p(x)}(u)^{\frac{q^-}{p^+}}, \rho_{1,p(x)}(u)^{\frac{q^+}{p^-}}\right\}\right)^{\beta+1} \\ &= \xi(\rho_{1,p(x)}(u)). \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que existem $R > 0$ e $\lambda_1 > 0$ tal que $\xi(R) > 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$. De fato, considere a função $\eta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\eta(x) = \frac{1}{p^+}x - \lambda K_1 x^{\frac{v^-}{p^+}} - \frac{1}{\alpha+1}\frac{K_2}{(r^-)^{\alpha+1}}x^{\frac{r^-(\alpha+1)}{p^+}} - \frac{1}{\beta+1}\frac{K_3}{(q^-)^{\beta+1}}x^{\frac{q^-(\beta+1)}{p^+}}.$$

Uma vez que $1 < \dfrac{r^-(\alpha+1)}{p^+}$ e $1 < \dfrac{q^-(\beta+1)}{p^+}$, existe $R \in (0,1)$ tal que

$$0 \leq \frac{1}{2p^+}R - \frac{1}{\alpha+1}\frac{K_2}{(r^-)^{\alpha+1}}R^{\frac{r^-(\alpha+1)}{p^+}} - \frac{1}{\beta+1}\frac{K_3}{(q^-)^{\beta+1}}R^{\frac{q^-(\beta+1)}{p^+}},$$

implicando que

$$\eta(R) \geq \frac{1}{2p^+}R - \lambda K_1 R^{\frac{v^-}{p^+}}.$$

Assim, podemos escolher $\lambda_1 > 0$ suficientemente pequeno, verificando

$$\frac{1}{2p^+}R - \lambda_1 K_1 R^{\frac{v^-}{p^+}} > 0.$$

Tomando $R_0 = \max\{[0,R] \cap \xi^{-1}((-\infty,0])\}$, temos $0 < R_0 < R$ e $\xi(R_0) = 0$, para todo $\lambda \in (0,\lambda_1)$.

Considerando $\tau : [0,\infty) \to [0,1]$ de classe $C^\infty([0,\infty))$ tal que

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq R_0 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq R \end{cases},$$

podemos definir, para $x \in [0,\infty)$,

$$\begin{aligned}\overline{\xi}(x) \;=\; & \frac{1}{p^+}x - \lambda K_1 \max\left\{x^{\frac{v^-}{p^+}}, x^{\frac{v^+}{p^-}}\right\} - \frac{1}{\alpha+1}\frac{K_2}{(r^-)^{\alpha+1}}\left(\max\left\{x^{\frac{r^-}{p^+}}, x^{\frac{r^+}{p^-}}\right\}\right)^{\alpha+1}\tau(x) \\ & - \frac{1}{\beta+1}\frac{K_3}{(q^-)^{\beta+1}}\left(\max\left\{x^{\frac{q^-}{p^+}}, x^{\frac{q^+}{p^-}}\right\}\right)^{\beta+1}\tau(x).\end{aligned}$$

Note que $\overline{\xi}$ verifica as seguintes propriedades:

$$\overline{\xi}(x) = \xi(x), \quad \text{se} \quad x \leq R_0;$$

$$\overline{\xi}(x) \leq \xi(x), \quad \text{para todo} \quad x \in [0, \infty);$$

$$\overline{\xi}(x) = \frac{1}{p^+}x - \lambda K_1 \max\left\{x^{\frac{v^-}{p^+}}, x^{\frac{v^+}{p^-}}\right\}, \quad \text{se} \quad x \geq R;$$

$$\overline{\xi}(x) > 0, \quad \text{para} \quad x > R_0.$$

Agora, consideremos o funcional truncado, com $0 < \lambda < \lambda_1$,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx + \int_\Omega \frac{1}{h(x)}|u|^{h(x)}dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{v(x)}|u|^{v(x)}dx \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\tau(\rho_{1,p(x)}(u))\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\tau(\rho_{1,p(x)}(u))\left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}. \end{aligned}$$

onde $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Além disso, $I_\lambda(u) \geq \overline{\xi}(\rho_{1,p(x)}(u))$ e $I_\lambda(u) = J_\lambda(u)$, se $\rho_{1,p(x)}(u) \leq R_0$.

Definido desta forma, I_λ é coercivo. Logo, é limitado inferiormente.

1.4 Demonstração do Teorema 1.1

Mostraremos algumas propriedades relacionadas ao funcional truncado I_λ. Em seguida, mostraremos que este possui infinitas soluções e, por construção de I_λ, estas soluções também são soluções do funcional J_λ.

Lema 1.5 *$I_\lambda \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$, se $I_\lambda(u) \leq 0$ então $\rho_{1,p(x)}(u) < R_0$ e $I_\lambda(v) = J_\lambda(v)$ para todo v em uma vizinhança suficientemente pequena de u. Além disso, I_λ satisfaz a condição Palais-Smale local para $d \leq 0$.*

Demonstração. É imediato que $I_\lambda \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$. Se $I_\lambda(u) \leq 0$ então $\rho_{1,p(x)}(u) < R_0$ por construção do funcional truncado, basta observar que $\overline{\xi}(\rho_{1,p(x)}(u)) \geq 0$ se $\rho_{1,p(x)}(u) \geq R_0$. Agora, para todo $u \in B_{R_0}(0)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(u) \subset B_{R_0}(u)$ e $I_\lambda(v) = J_\lambda(v)$ para todo $v \in B_\epsilon(u)$. Para provar a condição Palais-Smale local, seja (u_j) uma sequência $(PS)_d$ para I_λ

com $d \leq 0$. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $I_\lambda(u_j) \leq 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, $\rho_{1,p(x)}(u_j) < R_0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por isso, temos

$$I_\lambda(u_j) = J_\lambda(u_j) \quad \text{e} \quad I'_\lambda(u_j) = J'_\lambda(u_j) \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Além disso, (u_j) é uma sequência $(PS)_d$ para J_λ, logo, se considerarmos

$$\begin{aligned} d \leq 0 \quad &< \quad \min\left\{ L_1 \inf_{i \in I_1} \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i} \right)^{\frac{(\beta+1)p_*(x_i)p(x_i)}{p_*(x_i)+p(x_i)}}, L_2 \inf_{i \in I_2} \left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \sigma_m \right)^{\frac{(\alpha+1)p^*(x_i)p(x_i)}{p^*(x_i)+p(x_i)}} \right) \right\} \\ &+ \quad K \min\left\{ \lambda^{\frac{(h/v)^-}{(h/v)^- - 1}}, \lambda^{\frac{(h/v)^+}{(h/v)^+ - 1}} \right\}, \end{aligned}$$

pelo Lema 1.2, existe λ_0 tal que para $0 < \lambda < \lambda_0$

$$u_j \to u \;\text{ em }\; L^{q(x)}(\partial\Omega) \;\text{ e }\; \text{em }\; L^{r(x)}(\Omega).$$

Portanto, pelo Lema 1.3, concluímos que I_λ verifica a condição Palais-Smale local.

$\blacksquare$

Lema 1.6 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(I_\lambda^{-\epsilon}) \geq n$, onde*

$$I_\lambda^{-\epsilon} = \{u \in W^{1,p(x)}(\Omega); I_\lambda(u) \leq -\epsilon\}$$

e γ é o gênero de Krasnoselskii.

Demonstração. Seja $E_n \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ um subespaço n-dimensional. Então, para $u \in E_n$ com

$\|u\| = 1$ e $0 < t < R_0$, temos

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(tu) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\Big(|\nabla(tu)|^{p(x)} + |tu|^{p(x)}\Big)dx + \int_\Omega \frac{1}{h(x)}|tu|^{h(x)}dx - \lambda\int_\Omega \frac{1}{v(x)}|tu|^{v(x)}dx \\
&- \frac{1}{\alpha+1}\Bigg[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|tu|^{r(x)}\tau(\rho_{1,p(x)}(tu))dx\Bigg]^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\Bigg[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|tu|^{q(x)}\tau(\rho_{1,p(x)}(tu))d\Gamma\Bigg]^{\beta+1} \\
&\leq \frac{t^{p^-}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(u) + \frac{t^{h^-}}{h^-}\int_\Omega |u|^{h(x)}dx - \lambda\frac{t^{v^+}}{v^+}\int_\Omega |u|^{v(x)}dx \\
&- \frac{t^{r^+(\alpha+1)}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}\Bigg(\int_\Omega |u|^{r(x)}dx\Bigg)^{\alpha+1} - \frac{t^{q^+(\beta+1)}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}\Bigg(\int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)}d\Gamma\Bigg)^{\beta+1} \\
&\leq \frac{t^{p^-}}{p^-} + \frac{t^{h^-}}{h^-}\cdot a_n - \lambda\frac{t^{v^+}}{v^+}\cdot b_n - \frac{t^{r^+(\alpha+1)}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}\cdot c_n - \frac{t^{q^+(\beta+1)}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}\cdot d_n,
\end{aligned}
$$

onde

$$a_n = \sup\Bigg\{\Bigg(\int_\Omega |u|^{h(x)}dx\Bigg); u \in E_n, \|u\| = 1\Bigg\},$$

$$b_n = \inf\Bigg\{\Bigg(\int_\Omega |u|^{v(x)}dx\Bigg); u \in E_n, \|u\| = 1\Bigg\},$$

$$c_n = \inf\Bigg\{\Bigg(\int_\Omega |u|^{r(x)}dx\Bigg)^{\alpha+1}; u \in E_n, \|u\| = 1\Bigg\}$$

e

$$d_n = \inf\Bigg\{\Bigg(\int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)}d\Gamma\Bigg)^{\beta+1}; u \in E_n, \|u\| = 1\Bigg\}.$$

Assim,

$$I_\lambda(tu) \leq \frac{t^{p^-}}{p^-} + \frac{t^{h^-}}{h^-}\cdot a_n - \lambda\frac{t^{v^+}}{v^+}\cdot b_n.$$

Note que o fato de E_n ter dimensão finita implica que as normas de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, $L^{h(x)}(\Omega)$, $L^{v(x)}(\Omega)$, $L^{r(x)}(\Omega)$ e $L^{q(x)}(\partial\Omega)$ são equivalentes em E_n, logo $a_n > 0$, $b_n > 0$, $c_n > 0$ e $d_n > 0$.

Uma vez que $v^+ < p^-$ e $0 < t < R_0$, garantimos a existência de constantes positivas ρ e ϵ verificando $I_\lambda(\rho u) < -\epsilon$ para $u \in E_n$, $\|u\| = 1$.

Portanto, se definirmos $\mathcal{U}_{\rho,n} = \{u \in E_n; \|u\| = \rho\}$, temos que $\mathcal{U}_{\rho,n} \subset I_\lambda^{-\epsilon}$. Logo, pela monotonicidade do gênero, $\gamma(I_\lambda^{-\epsilon}) \geq \gamma(\mathcal{U}_{\rho,n}) = n$.

∎

Lema 1.7 *Seja* $\sum = \{A \subset W^{1,p(x)}(\Omega) - 0; A \text{ é fechado}, A = -A\}$ *e* $\sum_k = \{A \subset \sum; \gamma(A) \geq k\}$

onde γ representa o gênero de Krasnoselskii. Então

$$d_k = \inf_{A \in \sum_k} \sup_{u \in A} I_\lambda(u)$$

é um valor crítico negativo de I_λ e, além disso, se $d = d_k = \cdots = d_{k+r}$, então $\gamma(K_d) \geq r + 1$ onde

$$K_d = \{u \in W^{1,p(x)}(\Omega); I_\lambda(u) = d, I'_\lambda(u) = 0\}.$$

Demonstração. Observe que $-\infty < d < \infty$. De fato, pelo Lema 1.6, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\gamma(I_\lambda^{-\epsilon}) \geq k.$$

Sendo I_λ um funcional par e contínuo, $I_\lambda^{-\epsilon} \in \sum_k$, assim

$$d_k \leq \sup_{u \in I_\lambda^{-\epsilon}} I_\lambda(u) \leq -\epsilon < 0$$

para todo k. Além disso, I_λ é limitado inferiormente, portanto $d_k > -\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desde que $d < 0$, I_λ verifica a condição $(PS)_d$ localmente. Então, K_d é um conjunto compacto e simétrico, mostrando que $\gamma(K_d)$ está bem definido.

Suponha, por contradição, que $d = d_k = \cdots = d_{k+r}$ e $\gamma(K_d) < r + 1$. Do Teorema A.4, obtemos uma vizinhança K de K_d com $\gamma(K) = \gamma(K_d) < r + 1$. Pelo Lema de Deformação, existe um homeomorfismo ímpar $\eta : W^{1,p(x)}(\Omega) \to W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$\eta(I_\lambda^{d+\delta} \setminus K) \subset I_\lambda^{d-\delta},$$

para algum $\delta > 0$. Em particular, podemos escolher $0 < \delta < -d$, pois I_λ verifica a condição Palais-Smale sobre I_λ^0. Por definição,

$$d = d_{k+r} = \inf_{A \in \sum_{k+r}} \sup_{u \in A} I_\lambda(u).$$

Então, existe $A \in \sum_{k+r}$, tal que $\sup_{u \in A} I_\lambda(u) < d + \delta$, que implica $A \subset I_\lambda^{d+\delta}$, e

$$\eta(A \setminus K) \subset \eta(I_\lambda^{d+\delta} \setminus K) \subset I_\lambda^{d-\delta}. \tag{1.5}$$

Segue do Teorema A.4, que

$$\gamma(\eta(\overline{A \setminus K})) \geq \gamma(\overline{A \setminus K}) \geq \gamma(A) - \gamma(K) \geq (k+r) - r = k.$$

Assim, $\eta(\overline{A \setminus K}) \in \sum_k$. Logo, teríamos $\sup_{u \in \eta(\overline{A \setminus K})} I_\lambda(u) \geq d_k = d$, mas isto contradiz (1.5). Portanto, se $d = d_k = \cdots = d_{k+r}$, então $\gamma(K_d) \geq r + 1$.

■

Observe que a conclusão do Lema acima garante que d_k é valor crítico de I_λ, pois, $\gamma(K_{d_k}) \geq 1$, ou seja, K_{d_k} é não vazio para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, se os valores d_k não forem todos distintos, teremos $\gamma(K_d) > 1$ e isto significa que K_d é um conjunto infinito. Dessa forma, chegamos a uma quantidade infinita de pontos críticos de I_λ com energia negativa, para $0 < \lambda < \overline{\lambda} = \min\{\lambda_0, \lambda_1\}$. Pelo Lema 1.5 esses são pontos críticos de J_λ. Disto, concluímos que existem infinitas soluções fracas para o problema (1.1).

Capítulo

2

Existência de solução para um problema de Neumann com coeficiente singular

Neste capítulo, investigaremos a existência de solução para uma variante do problema (1.1), onde consideramos na equação a presença de uma função singular $a(x)$ cujas propriedades serão descritas a seguir. Este problema é definido da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u = a(x)|u|^{v(x)-2}u + \lambda|u|^{r(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \text{ em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 2$, e $p, h, v, r \in C(\overline{\Omega})$, $q \in C(\partial\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal exterior, λ, α, β são parâmetros positivos e $\Delta_{p(x)}$ é o operador $p(x)$-Laplaciano.

As condições sobre a função $a(x)$ são as seguintes:

(i) $a \in L^{k(x)}(\Omega)$, $k \in C(\overline{\Omega})$, $k^- > v^+$;

(ii) $a(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$;

(iii) $\dfrac{k(x)v(x)}{k(x)-v(x)} < p^*(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

Nessas condições, o termo $a(x)$ pode ser da seguinte forma:

$$a(x) = |x|^{-\tilde{s}(x)}$$

com $0 \leq \tilde{s}(x) < N$ para $x \in \overline{\Omega}$ e

$$1 \leq v(x) < \frac{N - \tilde{s}(x)}{N} p^*(x)$$

(ver [28]).

Temos como principal objetivo neste capítulo demonstrar o Teorema a seguir:

Teorema 2.1 *Considere a função $a(x)$ satisfazendo $(i)-(iii)$ e assuma a existência de funções $p(x), v(x), r(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ e $q(x) \in C_+(\partial\Omega)$ satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$p^- \leq p^+ < v^- \leq v^+ < \min\left\{\frac{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}{(r^+)^{\alpha}}, \frac{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}{(q^+)^{\beta}}\right\}. \tag{2.2}$$

Então, existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda > \bar{\lambda}$ o problema (2.1) possui solução em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

2.1 Caracterização Variacional

Definimos o funcional energia $J_{\lambda,a} : W^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (2.1) como

$$\begin{aligned} J_{\lambda,a}(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx - \int_\Omega \frac{a(x)}{v(x)} |u|^{v(x)} dx \\ &- \frac{\lambda}{\alpha+1} \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx\right]^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta+1}, \end{aligned}$$

para todo $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Este funcional é diferenciável e sua derivada de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,a}(u)w &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla w dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2} uw dx - \int_\Omega a(x)|u|^{v(x)-2} uw dx \\ &- \lambda \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx\right]^{\alpha} \int_\Omega |u|^{r(x)-2} uw dx - \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta} \int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)-2} uw d\Gamma, \end{aligned}$$

para todo $u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (2.1) se, e somente se, u é um ponto crítico de $J_{\lambda,a}$.

2.2 Lemas Auxiliares

Para demonstrar o principal resultado deste capítulo, precisamos primeiro, estabelecer alguns lemas técnicos.

Lema 2.1 *Para cada $\lambda > 0$,*

1. *existem constantes $c > 0$, $\varrho > 0$ tais que $J_{\lambda,a}(u) \geq c$ e $\|u\| = \varrho$;*

2. *existe um elemento $w_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w_0\| > \varrho$ e $J_{\lambda,a}(w_0) \leq 0$.*

Demonstração. Para demonstrar o item **1.**, observe que

$$\begin{aligned} J_{\lambda,a}(u) &\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx - \frac{1}{v^-}\int_\Omega a(x)|u|^{v(x)}dx \\ &- \frac{\lambda}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\left[\int_\Omega |u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} - \frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\left[\int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,a}(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) - \frac{1}{v^-}\rho_{v(x),a(x)}(u) - \frac{\lambda}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\left(\rho_{r(x)}(u)\right)^{\alpha+1} \\ &- \frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\left(\rho_{q(x)}(u)\right)^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$ é suficientemente pequeno, da Proposição A.10 sabemos que

$$\rho_{1,p(x)}(u) \geq \|u\|^{p^+}.$$

Das imersões contínuas $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{v(x)}_{a(x)}(\Omega)$ e das Proposições A.2 e A.8, obtemos

$$\rho_{v(x),a(x)}(u) \leq M_1^{v^-}\|u\|^{v^-},$$

$$\rho_{r(x)}(u) \leq M_2^{r^-}\|u\|^{r^-}$$

e

$$\rho_{q(x)}(u) \leq M_3^{q^-}\|u\|^{q^-}$$

onde M_1, M_2 e M_3 são constantes positivas. Portanto,

$$J_{\lambda,a}(u) \;\; \geq \;\; \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{1}{v^-}M_1^{v^-}\|u\|^{v^-} - \frac{\lambda M_2^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\|u\|^{(\alpha+1)r^-} - \frac{M_3^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\|u\|^{(\beta+1)q^-}.$$

Da estimativa em (2.2), obtemos

$$v^- < (\alpha+1)r^- \text{ e } v^- < (\beta+1)q^-,$$

logo, podemos escrever

$$J_{\lambda,a}(u) \;\; \geq \;\; \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{1}{v^-}M_1^{v^-}\|u\|^{v^-} - \frac{\lambda M_2^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\|u\|^{v^-} - \frac{M_3^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\|u\|^{v^-}.$$

Considerando $\varrho = \|u\|$, temos

$$J_{\lambda,a}(u) \;\; \geq \;\; \varrho^{p^+}\left[\frac{1}{p^+} - \left(\frac{1}{v^-}M_1^{v^-} + \frac{\lambda M_2^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} + \frac{M_3^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\right)\varrho^{v^- - p^+}\right],$$

de onde segue o resultado.

Para demonstrar o item **2.**, considere $t > 0$ e tomemos $0 < w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,a}(tw) \;\; &\leq \;\; \frac{t^{p^+}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(w) - \frac{t^{v^-}}{v^+}\rho_{v(x),a(x)}(w) - \frac{\lambda t^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}\left[\rho_{r(x)}(w)\right]^{\alpha+1} \\ &- \;\; \frac{t^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}\left[\rho_{q(x)}(w)\right]^{\beta+1}. \end{aligned}$$

De (2.2) concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} J_{\lambda,a}(tw) = -\infty,$$

isto encerra a prova.

■

Lema 2.2 *Se* $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ *é uma sequência* $(PS)_d$ *para* $J_{\lambda,a}$*, então* (u_j) *é limitada em*

$W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração. Uma vez que $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_d$ para $J_{\lambda,a}$, temos

$$J_{\lambda,a}(u_j) \to d \text{ e } J'_{\lambda,a}(u_j) \to 0.$$

Então, para $C > 0$ tal que

$$C \geq J_{\lambda,a}(u_j), \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
C + \|u_j\| &\geq J_{\lambda,a}(u_j) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,a}(u_j)u_j \\
&\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right) \rho_{1,p(x)}(u_j) + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{v^-}\right) \rho_{v(x),a(x)}(u) \\
&+ \lambda \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(r^+)^\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{(r^-)^{\alpha+1}}\right) \left[\int_\Omega |u_j|^{r(x)} dx\right]^{\alpha+1} \\
&+ \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+)^\beta} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-)^{\beta+1}}\right) \left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Considerando θ satisfazendo

$$p^+ < \theta < v^-, \tag{2.3}$$

segue que

$$\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{v^-}\right) \rho_{v(x),a(x)}(u) > 0,$$

$$\lambda \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(r^+)^\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{(r^-)^{\alpha+1}}\right) \left[\int_\Omega |u_j|^{r(x)} dx\right]^{\alpha+1} > 0$$

e

$$\left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{(q^+)^\beta} - \frac{1}{\beta+1} \cdot \frac{1}{(q^-)^{\beta+1}}\right) \left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta+1} > 0.$$

Suponhamos, por contradição, que (u_j) seja ilimitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\|u_j\| > 1$ e obtemos

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right) \rho_{1,p(x)}(u_j).$$

Da Proposição A.10,

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-},$$

que é uma contradição, pois $p^- > 1$. Portanto, (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 2.3 *Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para $J_{\lambda,a}$. Se*

$$d < c_* := \min\left\{L_1 \inf_{i\in I_1}\left[\left(\overline{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1}, L_2 \inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}\right\}$$

onde

$$L_1 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^{\beta}} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right) \text{ e } L_2 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r^+_{\mathcal{A}_2})^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r^-_{\mathcal{A}_2})^{\alpha+1}}\right),$$

então, os conjuntos de índices I_1 e I_2 dados nas Proposições A.19 e A.20 são vazios e

$$u_j \to u \text{ fortemente em } L^{q(x)}(\partial\Omega) \text{ e em } L^{r(x)}(\Omega).$$

Demonstração. Pelo Lema 2.2, a menos de subsequência, temos $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, podemos usar as Proposições A.19 e A.20.

Primeiramente, vamos supor que $I_1 \neq \emptyset$. Seja $x_i \in \mathcal{A}_1$ um ponto singular de medida μ e ν. Consideremos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e *supp* $\phi \subset B_1(0)$.

Agora, para cada $i \in I_1$ e $\varepsilon > 0$ considere as funções

$$\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right), \; \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que $J'_{\lambda,a}(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_j|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla \phi_{i,\varepsilon}dx \;&+\; \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx - \int_\Omega a(x)|u_j|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \\
&- \lambda\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \\
&- \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right)^\beta \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)}\phi_{i,\varepsilon}d\Gamma \to 0.
\end{aligned}$$

Fazendo $j \to \infty$ segue que

$$\begin{aligned}
0 \;=\; \lim &\left[\int_\Omega u_j|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla \phi_{i,\varepsilon}dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx - \int_\Omega a(x)|u_j|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx\right. \\
- \;&\left.\lambda\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx\right] + \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu - \int_{\partial\Omega} \phi_{i,\varepsilon}d\bar{\nu},
\end{aligned}$$

onde

$$\lim_{j\to\infty}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right)^\beta |u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \bar{\nu}. \tag{2.4}$$

Podemos mostrar que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \phi_{i,\varepsilon}dx = 0$ ver Shang-Wang [51]. Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = \mu\phi(0) \;\text{ e }\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega} \phi_{i,\varepsilon}d\bar{\nu} = \bar{\nu}\phi(0)$$

e sendo $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\lambda\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to \lambda\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx,$$

$$\int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to \int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx$$

$$\text{e} \quad \int_\Omega a(x)|u_j|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to \int_\Omega a(x)|u|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx.$$

Uma vez que, quando $\varepsilon \to 0$,

$$\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right)^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0, \quad \int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0,$$

$$\int_\Omega |u|^{h(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0, \text{ e } \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{v(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0,$$

podemos concluir que

$$\mu_i \leq \bar{c}\nu_i,$$

onde $\bar{c}$ surge da convergência (2.4). Da Proposição A.19, temos

$$(\overline{T}_{x_i})^{p(x_i)}\nu_i^{\frac{p(x_i)}{p_*(x_i)}} \leq \mu_i \leq \bar{c}\nu_i.$$

Portanto,

$$\nu_i \geq \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}. \tag{2.5}$$

Além disso, sabemos que

$$d = \lim J_{\lambda,a}(u_j) = \lim\left(J_{\lambda,a}(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_{\lambda,a}(u_j)u_j\right),$$

então, usando θ satisfazendo (2.3), obtemos

$$d \geq \lim\left\{\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+)^\beta} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-)^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}\right\}.$$

Agora, definindo $\mathcal{A}_\delta = \bigcup_{x\in\mathcal{A}_1}(B_\delta(x)\cap\Omega) = \{x \in \Omega : dist(x, \mathcal{A}_1) < \delta\}$, segue que

$$d \geq \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_\delta})^\beta} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_\delta})^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}d\Gamma + \sum_{i\in I_1}\nu_i\right]^{\beta+1}.$$

Desde que $\delta > 0$ é arbitrário e q é contínua, concluímos que

$$d \geq \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}d\Gamma + \sum_{i\in I_1}\nu_i\right]^{\beta+1}.$$

Por (2.5), temos

$$
\begin{aligned}
d &\geq \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^+)^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^-)^{\beta+1}}\right)\nu_i^{\beta+1}\\
&\geq \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^+)^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^-)^{\beta+1}}\right)\inf_{i\in I_1}\left[\left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto de índices I_1 é vazio se

$$
d<\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^+)^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^-)^{\beta+1}}\right)\inf_{i\in I_1}\left[\left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1}.
$$

Agora, consideremos $I_2\neq\emptyset$, seguindo os mesmos passos do caso anterior, obtemos

$$
d\geq\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r_{\mathcal{A}_2}^+)^\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r_{\mathcal{A}_2}^-)^{\alpha+1}}\right)\inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}.
$$

Portanto, o conjunto de índices $I_2=\emptyset$ se

$$
d<\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r_{\mathcal{A}_2}^+)^\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r_{\mathcal{A}_2}^-)^{\alpha+1}}\right)\inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}.
$$

■

Lema 2.4 *Seja $(u_j)\subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para $J_{\lambda,a}$. Se*

$$
d<c_*:=\min\left\{L_1\inf_{i\in I_1}\left[\left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1},L_2\inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}\right\}
$$

onde

$$
L_1=\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^+)^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q_{\mathcal{A}_1}^-)^{\beta+1}}\right)\ e\ L_2=\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r_{\mathcal{A}_2}^+)^\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r_{\mathcal{A}_2}^-)^{\alpha+1}}\right),
$$

então, existe $u\in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j\to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.2, a menos de subsequência, $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Além disso, da convergência $J'_{\lambda,a}(u_j) \to 0$, concluímos que $J'_{\lambda,a}(u_j)(u_j - u) \to 0$. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx &+ \int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx - \int_\Omega a(x)|u_j|^{v(x)-2}u_j(u_j-u)dx \\ &- \lambda\Big[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\Big]^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx \\ &- \Big[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\Big]^\beta \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma \to 0.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \le \int_\Omega |u_j|^{p(x)-1}|u_j-u|dx \le C_1 \left||u_j|^{p(x)-1}\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} |u_j-u|_{p(x)},$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega a(x)|u_j|^{v(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| &\le \int_\Omega |a(x)||u_j|^{v(x)-1}|u_j-u|dx \\ &\le C_2|a(x)|_{k(x)} \left||u_j|^{v(x)-1}\right|_{\frac{v(x)}{v(x)-1}} |u_j-u|_{\frac{k(x)v(x)}{k(x)-v(x)}},\end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \le \int_\Omega |u_j|^{r(x)-1}|u_j-u|dx \le C_3 \left||u_j|^{r(x)-1}\right|_{\frac{r(x)}{r(x)-1}} |u_j-u|_{r(x)},$$

$$\left|\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma\right| \le \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-1}|u_j-u|d\Gamma \le C_4 \left||u_j|^{q(x)-1}\right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} |u_j-u|_{q(x)},$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes positivas. Note que $|a(x)|_{k(x)} < \infty$. Do Lema A.1, se $|u_j|_{v(x)} \ge 1$ então

$$\left||u_j|^{v(x)-1}\right|_{\frac{v(x)}{v(x)-1}} \le |u_j|^{v^+}_{v(x)}.$$

Faz-se da mesma forma para o caso $|u_j|_{v(x)} \le 1$.

Usando a imersão contínua $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{v(x)}(\Omega)$, obtemos

$$|u_j|^{v^+}_{v(x)} \le c\|u_j\|^{v^+}.$$

Analogamente,

$$\left||u_j|^{p(x)-1}\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \leq c\|u_j\|^{p^+},$$

$$\left||u_j|^{r(x)-1}\right|_{\frac{r(x)}{r(x)-1}} \leq c\|u_j\|^{r^+},$$

$$\left||u_j|^{q(x)-1}\right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \leq c\|u_j\|^{q^+}.$$

Note que $\dfrac{k(x)v(x)}{k(x)-v(x)} < p^*(x)$, logo a imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{k(x)v(x)}{k(x)-v(x)}}(\Omega)$ é compacta. Além disso, a imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ também é compacta e, pelo Lema 2.3, $u_j \to u$ em $L^{r(x)}(\Omega)$ e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$, assim,

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0, \quad \left|\int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0,$$

e

$$\left|\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma\right| \to 0, \quad \left|\int_\Omega a(x)|u_j|^{v(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0$$

Deste modo, considerando

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx,$$

concluímos que

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) \to 0.$$

Analogamente,

$$L_{p(x)}(u)(u_j-u) \to 0.$$

Portanto,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \to 0$$

e da Proposição A.18 segue que

$$u_j \to u \ \text{ em } \ W^{1,p(x)}(\Omega).$$

■

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

O Lema 2.1 mostra que o funcional $J_{\lambda,a}$ possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha (ver referência [55]). Assim, podemos aplicar este teorema e obter uma sequência $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ satisfazendo

$$J_{\lambda,a}(u_j) \to c_{\lambda,a} \ \text{ e } \ J'_{\lambda,a}(u_j) \to 0,$$

onde

$$c_{\lambda,a} = \inf_{z\in\mathcal{C}} \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,a}(z(t))$$

e

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in C([0,1], W^{1,p(x)}(\Omega)); z(0) = 0, \ J_{\lambda,a}(z(1)) < 0 \right\}.$$

Considere a função w_0 dada no Lema 2.1 e $0 < t < 1$, então

$$\begin{aligned} J_{\lambda,a}(tw_0) \ &\leq \ \frac{t^{p^-}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(w_0) - \frac{t^{v^+}}{v^+}\rho_{v(x),a(x)}(w_0) - \frac{\lambda t^{(\alpha+1)r^+}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}[\rho_{r(x)}(w_0)]^{\alpha+1} \\ &- \ \frac{t^{(\beta+1)q^+}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}[\rho_{q(x)}(w_0)]^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$J_{\lambda,a}(tw_0) \leq \frac{t^{p^-}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(w_0) - \frac{\lambda t^{(\alpha+1)r^+}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}[\rho_{r(x)}(w_0)]^{\alpha+1}.$$

Definindo

$$g_\lambda(t) = \frac{b_1}{p^-}t^{p^-} - \frac{\lambda b_2}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}t^{(\alpha+1)r^+},$$

onde

$$b_1 = \rho_{1,p(x)}(w_0) \ \text{ e } \ b_2 = [\rho_{r(x)}(w_0)]^{\alpha+1}$$

obtemos

$$J_{\lambda,a}(tw_0) \leq g_\lambda(t).$$

Podemos observar que $g_\lambda(t)$ possui um ponto crítico de máximo em

$$t_\lambda = \left[\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{b_1(\alpha+1)(r^+)^\alpha}{b_2}\right]^{\frac{1}{(\alpha+1)r^+-p^-}}$$

e que $t_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Pela geometria do funcional $J_{\lambda,a}$ e pela continuidade da função g_λ, obtemos

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,a}(tw_0)\right) = 0.$$

Logo, podemos concluir que existe um $\overline{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \overline{\lambda}$,

$$\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,a}(tw_0) < c_*.$$

Uma vez que

$$c_{\lambda,a} \leq \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda,a}(tw_0),$$

para $\lambda \geq \overline{\lambda}$, temos

$$c_{\lambda,a} < c_*.$$

Do Lema 2.2, segue que a sequência obtida no Teorema do Passo da Montanha é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$, logo existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Além disso, pelo Lema 2.4 e pelo fato de $J_{\lambda,a}$ ser de classe C^1, concluímos que

$$J_{\lambda,a}(u_j) \to J_{\lambda,a}(u) \ \text{ e } \ J'_{\lambda,a}(u_j) \to J'_{\lambda,a}(u).$$

Pela unicidade do limite,

$$J_{\lambda,a}(u) = c_{\lambda,a} \ \text{ e } \ J'_{\lambda,a}(u) = 0,$$

mostrando, assim, que u é um ponto crítico de $J_{\lambda,a}$ e, portanto, solução não trivial do problema (2.1).

Capítulo

3

Existência de solução para um problema de Neumann com dois expoentes críticos e não linearidade descontínua

Neste capítulo, nosso interesse será investigar questões relacionadas a existência de solução positiva para o problema elíptico com dois expoentes críticos, condição de fronteira de Neumann e não linearidade descontínua envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano, definido por:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u &= f(u) + |u|^{r(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \text{em } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= g(u) + |u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 2$, $p, r \in C(\overline{\Omega})$, $q \in C(\partial\Omega)$, α e β são parâmetros positivos, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções que possuem conjuntos não enumeráveis de pontos de descontinuidades.

Além disso, suponha válida a seguinte desigualdade:

$$p^+ < \min\left\{\frac{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}{(r^+)^\alpha}, \frac{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}{(q^+)^\beta}, p^*, p_*\right\}. \tag{3.2}$$

Para demonstrar o principal resultado deste capítulo, enunciado a seguir, precisaremos considerar os conjuntos

$$\mathcal{A}_1 := \{x \in \partial\Omega; q(x) = p_*(x)\}$$

e

$$\mathcal{A}_2 := \{x \in \overline{\Omega}; r(x) = p^*(x)\},$$

disjuntos e não vazios.

Antes de enunciarmos as hipóteses sobre as funções f e g, vamos recordar a definição de função N-mensurável. Recorde que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **N-mensurável** quando a composição $f \circ v : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, para cada função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável.

As hipóteses sobre a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

($\mathbf{f}_1$) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $C_1 > 0$ e $s_1 \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) < s_1(x) < p^*(x)$ tal que

$$|f(t)| \leq C_1(1 + |t|^{s_1(x)-1})$$

($\mathbf{f}_2$) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $\theta_1 \in (p^+, p^*)$ tal que

$$0 \leq \theta_1 F(t) = \theta_1 \int_0^t f(\sigma) d\sigma \leq t\underline{f}(t),$$

onde

$$\underline{f}(t) := \lim_{\epsilon \to 0^+} ess \inf_{|t-\sigma|<\epsilon} f(\sigma) \text{ e } \overline{f}(t) := \lim_{\epsilon \to 0^+} ess \sup_{|t-\sigma|<\epsilon} f(\sigma)$$

são N-mensuráveis.

($\mathbf{f}_3$) Existe $a_1 > 0$, que será definido posteriormente, verificando

$$H(t - a_1) \leq f(t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde H é a função de Heaviside, ou seja,

$$H(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \leq 0, \\ 1, \text{ se } t > 0. \end{cases}$$

($\mathbf{f}_4$) $\limsup_{t\to 0^+} \dfrac{f(t)}{t^{s_1(x)-1}} = 0$ e $f(t) = 0$ se $t \leq 0$.

As hipóteses sobre a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as seguintes:

($\mathbf{g}_1$) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $C_2 > 0$ e $s_2 \in C(\partial\Omega)$ com $p(x) < s_2(x) < p_*(x)$ tal que

$$|g(t)| \leq C_2(1 + |t|^{s_2(x)-1}).$$

($\mathbf{g}_2$) Para todo $t \in \mathbb{R}$, existe $\theta_2 \in (p^+, p_*)$ tal que

$$0 \leq \theta_2 G(t) = \theta_2 \int_0^t g(\sigma)d\sigma \leq t\underline{g}(t),$$

onde

$$\underline{g}(t) := \lim_{\epsilon\to 0^+} ess \inf_{|t-\sigma|<\epsilon} g(\sigma) \text{ e } \overline{g}(t) := \lim_{\epsilon\to 0^+} ess \sup_{|t-\sigma|<\epsilon} g(\sigma)$$

são N-mensuráveis.

($\mathbf{g}_3$) Existe $a_2 > 0$, que será definido posteriormente, verificando

$$H(t - a_2) \leq g(t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde H é a função de Heaviside, ou seja,

$$H(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \leq 0, \\ 1, \text{ se } t > 0. \end{cases}$$

($\mathbf{g}_4$) $\limsup_{t\to 0^+} \dfrac{g(t)}{t^{s_2(x)-1}} = 0$ e $g(t) = 0$ se $t \leq 0$.

A seguir, definiremos solução fraca para o problema (3.1) baseada na teoria dos funcionais localmente Lipschitz desenvolvida por Chang [12], Clarke [17], uma vez que f e g são apenas mensuráveis. Para um estudo mais aprofundado sobre esta teoria veja também a referência [36].

Definição 3.1 *Uma* **solução fraca** *para o problema (3.1) é uma função* $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$

satisfazendo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uvdx &= \int_\Omega \varrho_1 v\, dx + \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)-2}uvdx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \varrho_2 v\, d\Gamma + \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)-2}uvd\Gamma\end{aligned}$$

para todo $v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\varrho^1(x) \in \left[\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))\right] \ \ q.t.p. \ em \ \Omega \ e$$

$$\varrho_2(x) \in \left[\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))\right] \ \ q.t.p. \ sobre \ \partial\Omega.$$

Dessa forma, uma solução fraca para o problema (3.1) será um ponto crítico do funcional $J : W^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(u) = Q(u) - \Psi_1(u) - \Psi_2(u),$$

onde

$$\begin{aligned}Q(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx - \frac{1}{\alpha+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} \\ &- \frac{1}{\beta+1}\left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1},\end{aligned}$$

$$\Psi_1(u) = \int_\Omega F(u)dx \ \text{ e } \ \Psi_2(u) = \int_{\partial\Omega} G(u)d\Gamma.$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte Teorema:

Teorema 3.1 *Suponha que* $(f_1) - (f_4)$ *e* $(g_1) - (g_4)$ *ocorram. Então, o problema (3.1) possui uma solução positiva. Além disso, se* $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *é uma solução do problema (3.1), então* $|\{x \in \Omega; u(x) > a_1\} \cup \{x \in \partial\Omega; u(x) > a_2\}| > 0$.

3.1 Resultados Preliminares

A demonstração do Teorema 3.1 será baseada em uma versão não suave do Teorema do Passo da Montanha para funcionais Lip_{loc} (ver Teorema A.7). Para isso, precisamos demonstrar alguns lemas técnicos.

Lema 3.1 *Se* $\Psi_1(u) = \displaystyle\int_\Omega F(u)dx$*, então* $\Psi_1 \in Lip_{loc}(L^{s_1(x)}(\Omega), \mathbb{R})$ *e* $\partial\Psi_1(u) \subset L^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}(\Omega)$. *Além disso, se* $\xi^1 \in \partial\Psi_1(u)$*, então*

$$\xi^1(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \ \ q.t.p. \ \ em \ \Omega.$$

Demonstração. Dado $w \in L^{s_1(x)}(\Omega)$ e $R > 0$ fixo. Para cada $u, v \in B_R(w)$, onde $B_R(w) = \{z \in L^{s_1(x)}(\Omega); |z - w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)} < R\}$, temos

$$|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| = \left| \int_\Omega \int_0^u f(\sigma)d\sigma dx - \int_\Omega \int_0^v f(\sigma)d\sigma dx \right| \leq \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\zeta(x)} |f(\sigma)|d\sigma dx,$$

onde $\zeta(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $\eta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$.

Por (f_1), temos

$$|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| \leq C_1 \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\zeta(x)} d\sigma dx + C_1 \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\zeta(x)} |\sigma|^{s_1(x)-1} d\sigma dx.$$

Para cada $s_1(x)$, a função $\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{L}(\sigma) = \frac{\sigma|\sigma|^{s_1(x)-1}}{s_1(x)}$ é de classe C^1 com $\mathcal{L}'(\sigma) = |\sigma|^{s_1(x)-1}$, para todo $\sigma \in \mathbb{R}$. Então,

$$|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| \leq C_1 \int_\Omega |\zeta(x) - \eta(x)|dx + C_1 \int_\Omega \int_{\eta(x)}^{\zeta(x)} \mathcal{L}'(\sigma)d\sigma dx,$$

segue do Teorema Fundamental do Cálculo, que

$$|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| \leq C_1 \int_\Omega (\zeta(x) - \eta(x))dx + C_1 \int_\Omega [\mathcal{L}(\zeta(x)) - \mathcal{L}(\eta(x))]\, dx.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\varsigma(x) \in (\eta(x), \zeta(x))$ tal que

$$|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| \leq C_1 \int_\Omega (\zeta(x) - \eta(x))dx + C_1 \int_\Omega \mathcal{L}^{'}(\varsigma(x))(\zeta(x) - \eta(x))dx.$$

Observe que $\zeta(x) - \eta(x) = |u(x) - v(x)|$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| &\leq C_1 \int_\Omega |u - v|dx + C_1 \int_\Omega \mathcal{L}^{'}(\varsigma)|u - v|dx \\
&\leq C_1 \int_\Omega |u - v|dx + C_1 \int_\Omega (|u| + |v|)^{s_1(x)-1}|u - v|dx \\
&\leq C_1 \int_\Omega |u - v|dx + C_1 \int_\Omega \left(|u|^{s_1(x)-1} + |v|^{s_1(x)-1}\right)|u - v|dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| \leq C_1 \int_\Omega |u - v|dx + C_1 \int_\Omega |u|^{s_1(x)-1}|u - v|dx + C_1 \int_\Omega |v|^{s_1(x)-1}|u - v|dx.$$

Sendo $u \in L^{s_1(x)}(\Omega)$, segue que $|u|^{s_1(x)-1} \in L^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}(\Omega)$. Assim, pelas imersões contínuas de Sobolev e pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| &\leq \tilde{C}_1 |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)} + C_1 |u^{s_1(x)-1}|_{L^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}(\Omega)} |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)} \\
&+ C_1 |v^{s_1(x)-1}|_{L^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}(\Omega)} |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| &\leq \tilde{C}_1 |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)} + C_1 |u|^{s_1(x)-1}_{L^{s_1(x)}(\Omega)} |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)} \\
&+ C_1 |v|^{s_1(x)-1}_{L^{s_1(x)}(\Omega)} |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(u) - \Psi_1(v)| &\leq \tilde{C}_1 |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)} + C_1 |u - w + w|^{s_1(x)-1}_{L^{s_1(x)}(\Omega)} |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)} \\
&+ C_1 |v - w + w|^{s_1(x)-1}_{L^{s_1(x)}(\Omega)} |u - v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Da Desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}|\Psi_1(u)-\Psi_1(v)| &\leq \tilde{C}_1|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}+C_1(|u-w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}+|w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)})^{s_1(x)-1}|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}\\ &+ C_1(|v-w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}+|w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)})^{s_1(x)-1}|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Uma vez que $u, v \in B_R(w)$, temos

$$\begin{aligned}|\Psi_1(u)-\Psi_1(v)| &\leq \tilde{C}_1|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}+C_1(R+|w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)})^{s_1(x)-1}|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}\\ &+ C_1(R+|w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)})^{s_1(x)-1}|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}\\ &\leq \tilde{C}_1|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}+C_1(R+|w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)})^{s_1^+-1}|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}\\ &+ C_1(R+|w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)})^{s_1^+-1}|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}\end{aligned}$$

Tomando $K_w = \tilde{C}_1 + 2C_1(R+|w|_{L^{s_1(x)}(\Omega)})^{s_1^+-1}$, obtemos

$$|\Psi_1(u)-\Psi_1(v)| \leq K_w|u-v|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}, \ \forall u, v \in B_R(w),$$

mostrando que $\Psi_1 \in Lip_{loc}(L^{s_1(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Para demonstrar a segunda parte do Lema, recordamos que o gradiente generalizado de Ψ_1 em u é dado por

$$\partial\Psi_1(u) = \{\xi^1 \in (L^{s_1(x)}(\Omega))'; \langle \xi^1, v\rangle \leq \Psi_1^0(u; v), \ \forall v \in L^{s_1(x)}(\Omega)\},$$

onde $\Psi_1^0(u; v)$ é a derivada direcional generalizada de Ψ_1 no ponto u na direção v, ou seja,

$$\Psi_1^0(u; v) = \limsup_{h\to 0, \lambda\to 0^+} \frac{\Psi_1(u+h+\lambda v)-\Psi_1(u+h)}{\lambda}.$$

Considere $(h_n) \subset L^{s_1(x)}(\Omega)$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$ tais que $h_n \to 0$ em $L^{s_1(x)}(\Omega)$ e $\lambda_n \to 0$ em $\mathbb{R}$. Assim, temos

$$\Psi_1^0(u; v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\Psi_1(u+h_n+\lambda_n v)-\Psi_1(u+h_n)}{\lambda_n}.$$

Aplicando a definição de Ψ_1, segue que

$$\Psi_1^0(u;v) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega F(u+h_n+\lambda_n v)dx - \int_\Omega F(u+h_n)dx}{\lambda_n}.$$

Definindo

$$F_n(v) = \frac{1}{\lambda_n}(F(u+h_n+\lambda_n v) - F(u+h_n)),$$

podemos escrever

$$\Psi_1^0(u;v) = \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega F_n(v)dx.$$

Desde que $h_n \to 0$ em $L^{s_1(x)}(\Omega)$, então, a menos de subsequência,

$$h_n(x) \to 0 \ \text{ q.t.p. } \ \Omega$$

e

$$|h_n(x)| \leq K(x) \in L^{s_1(x)}(\Omega) \ \text{ q.t.p. } \ \Omega. \tag{3.3}$$

Pela definição de F e pela propriedade (f_1), tem-se

$$\begin{aligned} |F_n(v)| &= \left|\frac{1}{\lambda_n}(F(u+h_n+\lambda_n v) - F(u+h_n))\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{\lambda_n}\int_{(u+h_n)}^{(u+h_n+\lambda_n v)} C_1(1+|t|^{s_1(x)-1})dt\right| \\ &\leq C_1|v| + \frac{C_1}{s_1(x)}\frac{|u+h_n+\lambda_n v|^{s_1(x)} - |u+h_n|^{s_1(x)}}{\lambda_n}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, definamos a função $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\tau(z) = |u+h_n+z\lambda_n v|^{s_1(x)}.$$

Observe que τ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, então, pelo Teorema do Valor Médio, dado $0 < |\lambda_n| < 1$, existe $\varsigma_n \in (0,1)$, tal que

$$\tau(1) - \tau(0) = \tau'(\varsigma_n).$$

Portanto,

$$\frac{1}{s_1(x)}\frac{|u+h_n+\lambda_n v|^{s_1(x)}-|u+h_n|^{s_1(x)}}{\lambda_n}=|u+h_n+\varsigma_n\lambda_n v|^{s_1(x)-1}|v|. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.4), temos

$$|F_n(v)|\leq C_1|v|+C_1|u+h_n+\varsigma_n\lambda_n v|^{s_1(x)-1}|v|.$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}
|u+h_n+\varsigma_n\lambda_n v|^{s_1(x)-1} &\leq (3\max\{u,h_n,\varsigma_n\lambda_n v\})^{s_1(x)-1}\\
&\leq 3^{s_1(x)-1}\max\{u^{s_1(x)-1},h_n^{s_1(x)-1},(\varsigma_n\lambda_n v)^{s_1(x)-1}\}\\
&\leq 3^{s_1(x)-1}(|u|^{s_1(x)-1}+|h_n|^{s_1(x)-1}+|\varsigma_n\lambda_n v|^{s_1(x)-1})\\
&\leq 3^{s_1(x)-1}(|u|^{s_1(x)-1}+|h_n|^{s_1(x)-1}+|\varsigma_n|^{s_1(x)-1}|\lambda_n|^{s_1(x)-1}|v|^{s_1(x)-1}).
\end{aligned}$$

Desde que $\varsigma_n\in(0,1)$ e $0<|\lambda_n|<1$, segue que $0<|\varsigma_n|^{s_1(x)-1}|\lambda_n|^{s_1(x)-1}<1$. Logo,

$$\begin{aligned}
|F_n(v)| &\leq C_1|v|+C_1 3^{s_1(x)-1}(|u|^{s_1(x)-1}+|h_n|^{s_1(x)-1}+|v|^{s_1(x)-1})|v|\\
&\leq C_1|v|+C_1 3^{s_1^+-1}(|u|^{s_1(x)-1}|v|+|h_n|^{s_1(x)-1}|v|+|v|^{s_1(x)}).
\end{aligned}$$

Então, obtemos

$$|F_n(v)| \leq C_1|v|+\bar{C}_1(|u|^{s_1(x)-1}|v|+|h_n|^{s_1(x)-1}|v|+|v|^{s_1(x)}),$$

com $\bar{C}_1=C_1 3^{s_1^+-1}>0$. De (3.3), sabemos que existe $K(x)\in L^{s_1(x)}(\Omega)$ tal que

$$|h_n(x)|\leq K(x)\ \text{ q.t.p. }\ \Omega. \tag{3.6}$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$C_1|v|+\bar{C}_1(|u|^{s_1(x)-1}|v|+|K(x)|^{s_1(x)-1}|v|+|v|^{s_1(x)})\in L^1(\Omega).$$

Note que

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(v) = F^0(u;v),$$

então, pelo Lema de Fatou, segue que

$$\Psi_1^0(u;v) = \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega F_n(v)dx \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} F_n(v)dx \leq \int_\Omega F^0(u;v)dx.$$

Do Lema A.5, sabemos que

$$F^0(u;v) \leq \begin{cases} \overline{f}(u)v, & \text{se } v > 0, \\ \underline{f}(u)v, & \text{se } v < 0, \end{cases}$$

logo,

$$\Psi_1^0(u;v) \leq \int_{\{v>0\}} \overline{f}(u)vdx + \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u)vdx, \quad \forall v \in L^{s_1(x)}(\Omega). \tag{3.7}$$

Considere $\xi^1(x) \in \partial\Psi_1(u) \subset (L^{s_1(x)}(\Omega))'$ e suponhamos, por contradição, que existe um conjunto $A \subset \Omega$ com $|A| > 0$ tal que $\xi^1(x) < \underline{f}(u)$ em A. Assim,

$$\int_A \xi^1(x)dx < \int_A \underline{f}(u)dx. \tag{3.8}$$

Observe que

$$\int_\Omega \xi^1(x)(-\chi_A)dx = -\int_A \xi^1(x)dx,$$

onde χ_A é a função característica do conjunto A e $-\chi_A \in L^{s_1(x)}(\Omega)$. Pela definição de $\partial\Psi_1(u)$,

$$\langle \xi^1, (-\chi_A)\rangle \leq \Psi_1^0(u; -\chi_A),$$

logo,

$$-\int_A \xi^1(x)dx = \int_\Omega \xi^1(x)(-\chi_A)dx = \langle \xi^1, (-\chi_A)\rangle \leq \Psi_1^0(u; -\chi_A).$$

Segue de (3.7) que

$$
\begin{aligned}
-\int_A \xi^1(x)dx &\leq \int_{\{-\chi_A>0\}} \overline{f}(u)(-\chi_A)dx + \int_{\{-\chi_A<0\}} \underline{f}(u)(-\chi_A)dx \\
&\leq \int_{\{-\chi_A<0\}} \underline{f}(u)(-\chi_A)dx \\
&= -\int_A \underline{f}(u)dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int_A \xi^1(x)dx \;\geq\; \int_A \underline{f}(u)dx,
$$

o que contradiz (3.8). Assim, temos

$$
\underline{f}(u(x)) \leq \xi^1(x) \;\text{ q.t.p. em } \Omega.
$$

Analogamente, mostra-se que

$$
\xi^1(x) \leq \overline{f}(u(x)) \;\text{ q.t.p. em } \Omega.
$$

De onde concluímos que

$$
\xi^1(x) \in [\underline{f}(u(x)), \overline{f}(u(x))] \;\text{ q.t.p. em } \Omega.
$$

■

Lema 3.2 *Se* $\Psi_2(u) = \int_{\partial\Omega} G(u)d\Gamma$, *então* $\Psi_2 \in Lip_{loc}(W^{1,p(x)}(\partial\Omega), \mathbb{R})$ *e* $\partial\Psi_2(u) \subset L^{\frac{s_2(x)}{s_2(x)-1}}(\partial\Omega)$. *Além disso, se* $\xi_2 \in \partial\Psi_2(u)$, *então*

$$
\xi_2(x) \in [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] \;\textit{ q.t.p. sobre } \partial\Omega.
$$

Demonstração. Dado $w \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega)$ e $R > 0$ fixo. Para cada $u, v \in B_R(w)$, onde

$B_R(w) = \{z \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega); |z-w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} < R\}$, temos

$$|\Psi_2(u) - \Psi_2(v)| = \left| \int_{\partial\Omega} \int_0^u f(\sigma) d\sigma d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \int_0^v f(\sigma) d\sigma d\Gamma \right| \leq \int_{\partial\Omega} \int_{\eta(x)}^{\zeta(x)} |f(\sigma)| d\sigma d\Gamma,$$

onde $\zeta(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $\eta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$.

Por (g_1), temos

$$|\Psi_2(u) - \Psi_2(v)| \leq C_2 \int_{\partial\Omega} \int_{\eta(x)}^{\zeta(x)} d\sigma d\Gamma + C_2 \int_{\partial\Omega} \int_{\eta(x)}^{\zeta(x)} |\sigma|^{s_2(x)-1} d\sigma d\Gamma.$$

De modo análogo à demonstração do Lema 3.1, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema do Valor Médio para obter

$$|\Psi_2(u) - \Psi_2(v)| \leq C_2 \int_{\partial\Omega} |u-v| d\Gamma + C_2 \int_{\partial\Omega} |u|^{s_2(x)-1} |u-v| d\Gamma + C_2 \int_{\partial\Omega} |v|^{s_2(x)-1} |u-v| d\Gamma.$$

Sendo $u \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega)$, segue que $|u|^{s_2(x)-1} \in L^{\frac{s_2(x)}{s_2(x)-1}}(\partial\Omega)$. Assim, pelas imersões contínuas de Sobolev e pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |\Psi_2(u) - \Psi_2(v)| &\leq \bar{C}_2 |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} + C_2 |u|^{s_2(x)-1}_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} \\ &+ C_2 |v|^{s_2(x)-1}_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_2(u) - \Psi_2(v)| &\leq \bar{C}_2 |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} + C_2 (|u-w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} + |w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)})^{s_2(x)-1} |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} \\ &+ C_2 (|v-w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} + |w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)})^{s_2(x)-1} |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Uma vez que $u, v \in B_R(w)$, temos

$$\begin{aligned} |\Psi_2(u) - \Psi_2(v)| &\leq \bar{C}_2 |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} + C_2 (R + |w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)})^{s_2^+ - 1} |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} \\ &+ C_2 (R + |w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)})^{s_2^+ - 1} |u-v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

Tomando $K_w = \bar{C}_2 + 2C_2(R + |w|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)})^{s_2^+ - 1}$, obtemos

$$|\Psi_2(u) - \Psi_2(v)| \;\; \leq \;\; K_w |u - v|_{L^{s_2(x)}(\partial\Omega)}, \;\; \forall u, v \in B_R(w),$$

mostrando que $\Psi_2 \in Lip_{loc}(L^{s_2(x)}(\partial\Omega), \mathbb{R})$.

Agora, recordemos que o gradiente generalizado de Ψ_2 em u é dado por

$$\partial\Psi_2(u) = \{\xi_2 \in (L^{s_2(x)}(\partial\Omega))'; \langle \xi_2, v \rangle \leq \Psi_2^0(u; v), \; \forall v \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega)\},$$

onde $\Psi_2^0(u; v)$ é a derivada direcional generalizada de Ψ_2 no ponto u na direção v, ou seja,

$$\Psi_2^0(u; v) = \limsup_{h \to 0, \lambda \to 0^+} \frac{\Psi_2(u + h + \lambda v) - \Psi_2(u + h)}{\lambda}.$$

Considere $(h_n) \subset L^{s_2(x)}(\partial\Omega)$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$ tais que $h_n \to 0$ em $L^{s_2(x)}(\partial\Omega)$ e $\lambda_n \to 0$ em $\mathbb{R}$. Assim, temos

$$\Psi_2^0(u; v) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\Psi_2(u + h_n + \lambda_n v) - \Psi_2(u + h_n)}{\lambda_n}.$$

Aplicando a definição de Ψ_2, segue que

$$\Psi_2^0(u; v) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\int_{\partial\Omega} G(u + h_n + \lambda_n v) d\Gamma - \int_{\partial\Omega} G(u + h_n) d\Gamma}{\lambda_n}.$$

Definindo

$$G_n(v) = \frac{1}{\lambda_n}(G(u + h_n + \lambda_n v) - G(u + h_n)),$$

podemos escrever

$$\Psi_2^0(u; v) = \limsup_{n \to \infty} \int_{\partial\Omega} G_n(v) d\Gamma.$$

Desde que $h_n \to 0$ em $L^{s_2(x)}(\partial\Omega)$, então, a menos de subsequência,

$$h_n(x) \to 0 \;\; \text{q.t.p.} \;\; \partial\Omega$$

e

$$|h_n(x)| \leq K(x) \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega) \quad \text{q.t.p.} \quad \partial\Omega. \tag{3.9}$$

Pela definição de G e pela propriedade (g_1) tem-se

$$\begin{aligned}
|G_n(v)| &= \left|\frac{1}{\lambda_n}(G(u+h_n+\lambda_n v) - G(u+h_n))\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\lambda_n}\int_{G(u+h_n)}^{G(u+h_n+\lambda_n v)} C_2(1+|t|^{s_2(x)-1})dt\right| \\
&\leq C_2|v| + \frac{C_2}{s_2(x)}\frac{|u+h_n+\lambda_n v|^{s_2(x)} - |u+h_n|^{s_2(x)}}{\lambda_n}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Agora, definamos a função $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\tau(z) = |u+h_n+z\lambda_n v|^{s_2(x)}.$$

Observe que τ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, então, pelo Teorema do Valor Médio, dado $0 < |\lambda_n| < 1$, existe $\varsigma_n \in (0,1)$, tal que

$$\tau(1) - \tau(0) = \tau^{'}(\varsigma_n).$$

Portanto,

$$\frac{1}{s_2(x)}\frac{|u+h_n+\lambda_n v|^{s_2(x)} - |u+h_n|^{s_2(x)}}{\lambda_n} = |u+h_n+\varsigma_n\lambda_n v|^{s_2(x)-1}|v|. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) em (3.10), temos

$$|G_n(v)| \leq C_2|v| + C_2|u+h_n+\varsigma_n\lambda_n v|^{s_2(x)-1}|v|.$$

Além disso, note que

$$|u+h_n+\varsigma_n\lambda_n v|^{s_2(x)-1}|v| \quad \leq \quad 3^{s_2(x)-1}(|u|^{s_2(x)-1} + |h_n|^{s_2(x)-1} + |\varsigma_n|^{s_2(x)-1}|\lambda_n|^{s_2(x)-1}|v|^{s_2(x)-1}).$$

Desde que $\varsigma_n \in (0,1)$ e $0 < |\lambda_n| < 1$, segue que $0 < |\varsigma_n|^{s_2(x)-1}|\lambda_n|^{s_2(x)-1} < 1$. Logo,

$$\begin{aligned} |G_n(v)| &\leq C_2|v| + C_2 3^{s_2(x)-1}(|u|^{s_2(x)-1} + |h_n|^{s_2(x)-1} + |v|^{s_2(x)-1})|v| \\ &\leq C_2|v| + C_2 3^{s_2(x)-1}(|u|^{s_2(x)-1}|v| + |h_n|^{s_2(x)-1}|v| + |v|^{s_2(x)}). \end{aligned}$$

De onde obtemos

$$|G_n(v)| \leq C_2|v| + \bar{C}_2(|u|^{s_2(x)-1}|v| + |h_n|^{s_2(x)-1}|v| + |v|^{s_2(x)}),$$

para algum $\bar{C}_2 > 0$. De (3.9), sabemos que existe $K(x) \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega)$ tal que

$$|h_n(x)| \leq K(x) \quad \text{q.t.p.} \quad \partial\Omega. \tag{3.12}$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$C|v| + C_2(|u|^{s_2(x)-1}|v| + |K(x)|^{s_2(x)-1}|v| + |v|^{s_2(x)}) \in L^1(\partial\Omega).$$

Note que

$$\limsup_{n\to\infty} G_n(v) = G^0(u;v),$$

então, pelo Lema de Fatou, segue que

$$\Psi_2^0(u;v) = \limsup_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} G_n(v)d\Gamma \leq \int_{\partial\Omega} \limsup_{n\to\infty} G_n(v)d\Gamma \leq \int_{\partial\Omega} G^0(u;v)d\Gamma.$$

Do Lema A.5, sabemos que

$$G^0(u;v) \leq \begin{cases} \overline{g}(u)v, & \text{se } v > 0, \\ \underline{g}(u)v, & \text{se } v < 0, \end{cases}$$

logo,

$$\Psi_2^0(u;v) \leq \int_{\{v>0\}} \overline{g}(u)vd\Gamma + \int_{\{v<0\}} \underline{g}(u)vd\Gamma, \quad \forall v \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega). \tag{3.13}$$

Considere $\xi_2(x) \in \partial\Psi_2(u) \subset (L^{s_2(x)}(\partial\Omega))'$ e suponhamos, por contradição, que existe um conjunto $B \subset \partial\Omega$ com $|B| > 0$ tal que $\xi_2(x) < \underline{g}(u)$ em B. Assim,

$$\int_B \xi_2(x) d\Gamma < \int_B \underline{g}(u) d\Gamma. \tag{3.14}$$

Observe que

$$\int_{\partial\Omega} \xi_2(x)(-\chi_B) d\Gamma = -\int_B \xi_2(x) d\Gamma,$$

onde χ_B é a função característica do conjunto B e $-\chi_B \in L^{s_2(x)}(\partial\Omega)$. Pela definição de $\partial\Psi_2(u)$,

$$\langle \xi_2, (-\chi_B) \rangle \leq \Psi_2^0(u; -\chi_B),$$

logo,

$$-\int_B \xi_2(x) d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \xi_2(x)(-\chi_B) d\Gamma = \langle \xi_2, (-\chi_B) \rangle \leq \Psi_2^0(u; -\chi_B).$$

Segue de (3.7) que

$$\begin{aligned}
-\int_B \xi_2(x) d\Gamma &\leq \int_{\{-\chi_B > 0\}} \overline{g}(u)(-\chi_B) d\Gamma + \int_{\{-\chi_B < 0\}} \underline{g}(u)(-\chi_B) d\Gamma \\
&\leq \int_{\{-\chi_B < 0\}} \underline{g}(u)(-\chi_B) d\Gamma \\
&= -\int_B \underline{g}(u) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_B \xi_2(x) d\Gamma \geq \int_B \underline{g}(u) d\Gamma,$$

o que contradiz (3.8). Assim, temos

$$\underline{g}(u(x)) \leq \xi_2(x) \quad \text{q.t.p. em } \partial\Omega.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\xi_2(x) \leq \overline{g}(u(x)) \quad \text{q.t.p. em } \partial\Omega.$$

De onde concluímos que

$$\xi_2(x) \in [\underline{g}(u(x)), \overline{g}(u(x))] \text{ q.t.p. em } \partial\Omega.$$

$\blacksquare$

Pelos Lemas 3.1 e 3.2, concluímos que o funcional $J \in Lip_{loc}(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\partial J(u) = \{Q^{'}(u)\} - \partial\Psi_1(u) - \partial\Psi_2(u), \ \ \forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Lema 3.3 *Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para J, então (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para J. Então,

$$J(u_j) \to d \ \text{ e } \ \lambda_J(u_j) \to 0,$$

onde $\lambda_J(u_j) = \min\{\|\xi\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}; \xi \in \partial J(u_j)\}$.

Considere $(w_j) \subset \partial J(u_j)$ tal que

$$\|w_j\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \lambda_J(u_j) = o_j(1)$$

e

$$w_j = Q^{'}(u_j) - (\xi^1)_j - (\xi_2)_j,$$

onde $(\xi^1)_j \in \partial\Psi_1(u_j)$ e $(\xi_2)_j \in \partial\Psi_2(u_j)$. Assim, temos

$$\langle w_j, u_j\rangle = Q^{'}(u_j)u_j - \langle(\xi^1)_j, u_j\rangle - \langle(\xi_2)_j, u_j\rangle, \ \ \forall u_j \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle w_j, u_j\rangle \ &= \ \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)}dx - \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}dx \\ &- \ \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)}d\Gamma - \int_\Omega (\varrho^1)_j u_j \, dx - \int_{\partial\Omega} (\varrho_2)_j u_j \, d\Gamma,\end{aligned}$$

para todo $u_j \in W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Tomando θ satisfazendo

$$p^+ < \theta < \min\left\{\frac{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}{(r^+)^\alpha}, \frac{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}{(q^+)^\beta}, p^*, p_*\right\}, \tag{3.15}$$

temos

$$J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle \leq \left|J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle\right| \leq |J(u_j)| + \left|\frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle\right|.$$

Além disso,

$$-\langle w_j, u_j\rangle \leq |\langle w_j, u_j\rangle| \leq \|w_j\|\|u_j\| \leq \theta\|u_j\|, \quad \forall j \geq j_0$$

e $|J(u_j)| < M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, temos

$$J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle \leq M + \|u_j\|, \quad \forall j > j_0. \tag{3.16}$$

Por outro lado, usando a definição do funcional J, de $Q^{'}(u_j)$ e o Teorema da Representação de Riesz, segue que

$$\begin{aligned}
J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle &= J(u_j) - \frac{1}{\theta}Q^{'}(u_j)u_j + \frac{1}{\theta}\langle(\xi^1)_j, u_j\rangle + \frac{1}{\theta}\langle(\xi_2)_j, u_j\rangle \\
&= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx - \frac{1}{\alpha+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} \\
&- \frac{1}{\beta+1}\left[\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1} - \int_\Omega F(u_j)dx - \int_{\partial\Omega} G(u_j)d\Gamma \\
&- \frac{1}{\theta}\Bigg(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)}dx - \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)}dx \\
&- \left[\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\Bigg) + \frac{1}{\theta}\int_\Omega (\varrho^1)_j u_j\,dx + \frac{1}{\theta}\int_{\partial\Omega}(\varrho_2)_j u_j\,d\Gamma,
\end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle \;\geq\;& \frac{1}{p^+}\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx - \frac{1}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\left[\int_\Omega |u_j|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1}\\
&- \frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1} - \int_\Omega F(u_j)dx - \int_{\partial\Omega} G(u_j)d\Gamma\\
&- \frac{1}{\theta}\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx + \frac{1}{\theta(r^+)^\alpha}\left[\int_\Omega |u_j|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1}\\
&+ \frac{1}{\theta(q^+)^\beta}\left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1} + \frac{1}{\theta}\int_\Omega (\varrho^1)_j u_j\, dx + \frac{1}{\theta}\int_{\partial\Omega} (\varrho_2)_j u_j\, d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Temos,

$$
\begin{aligned}
J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle \;\geq\;& \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx\\
&+ \left(\frac{1}{\theta(q^+)^\beta} - \frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}\\
&+ \left(\frac{1}{\theta(r^+)^\alpha} - \frac{1}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\right)\left[\int_\Omega |u_j|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1}\\
&+ \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta}(\varrho^1)_j u_j - F(u_j)\right) dx + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{\theta}(\varrho_2)_j u_j - G(u_j)\right) d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Usando as condições (f_2), (g_2) e os Lemas 3.1 e 3.2, obtemos

$$
\frac{1}{\theta}(\varrho^1)_j(x)u_j(x) \geq \frac{1}{\theta}\underline{f}(u_j(x))u_j(x) \geq F(u_j(x)) \;\; \text{q.t.p em } \Omega
$$

e

$$
\frac{1}{\theta}(\varrho_2)_j(x)u_j(x) \geq \frac{1}{\theta}\underline{g}(u_j(x))u_j(x) \geq G(u_j(x)) \;\; \text{q.t.p sobre } \partial\Omega,
$$

implicando que,

$$
0 \leq \frac{1}{\theta}(\varrho^1)_j(x)u_j(x) - F(u_j(x)) \;\; \text{q.t.p em } \Omega
$$

e

$$
0 \leq \frac{1}{\theta}(\varrho_2)_j(x)u_j(x) - G(u_j(x)) \;\; \text{q.t.p sobre } \partial\Omega.
$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle \;&\geq\; \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx \\ &+\; \left(\frac{1}{\theta(q^+)^\beta} - \frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta+1} \\ &+\; \left(\frac{1}{\theta(r^+)^\alpha} - \frac{1}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\right)\left[\int_{\Omega} |u_j|^{r(x)} dx\right]^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Da desigualdade (3.15), temos

$$J(u_j) - \frac{1}{\theta}\langle w_j, u_j\rangle \;\geq\; \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx.$$

Então, por (3.16), segue que

$$M + \|u_j\| \;\geq\; \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\rho_{1,p(x)}(u_j).$$

Agora, suponha por contradição, que (u_j) seja ilimitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\|u_j\| > 1$ e, pela Proposição A.10, obtemos

$$M + \|u_j\| \;\geq\; \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-},$$

que é uma contradição, pois $p^- > 1$. Logo, (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Com os dois Lemas seguintes, mostraremos que o funcional J satisfaz a condição Palais-Smale local abaixo de um certo nível d.

Lema 3.4 *Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para J. Se*

$$d < c_* := \min\left\{ L_1 \inf_{i\in I_1}\left[\left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1}, L_2 \inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}\right\}$$

onde

$$L_1 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^{\beta}} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right) \text{ e } L_2 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r^+_{\mathcal{A}_2})^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r^-_{\mathcal{A}_2})^{\alpha+1}}\right)$$

então, os conjuntos de índices I_1 e I_2 dados nas Proposições A.19 e A.20 são vazios e

$$u_j \to u \text{ fortemente em } L^{q(x)}(\partial\Omega) \text{ e em } L^{r(x)}(\Omega).$$

Demonstração. Pelo Lema 3.3, sabemos que (u_j) é uma sequência limitada. Assim, podemos aplicar as Proposições A.19 e A.20. Primeiramente, suponha por contradição, que $I_1 \neq \emptyset$. Considere $x_i \in \mathcal{A}_1$ um ponto singular de medida μ e ν, e tomemos uma função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $0 \le \phi(x) \le 1$, $\phi(0) = 1$ e $supp\,\phi \subset B_1(0)$.

Agora, para cada $i \in I_1$ e $\varepsilon > 0$, considere as funções

$$\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right),\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Desde que (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$, segue que a sequência $(\phi_{i,\varepsilon}u_j)$ também é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Logo,

$$\langle w_j, \phi_{i,\varepsilon}u_j\rangle \le \|w_j\|_{1,p(x)}\|\phi_{i,\varepsilon}u_j\| \to 0.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_j|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla\phi_{i,\varepsilon}dx &+ \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \\
&- \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right]^{\alpha}\int_\Omega |u_j|^{r(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \\
&- \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta}\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)}\phi_{i,\varepsilon}d\Gamma \\
&- \int_\Omega (\varrho^1)_j(\phi_{i,\varepsilon}u_j)\,dx - \int_{\partial\Omega}(\varrho_2)_j(\phi_{i,\varepsilon}u_j)\,d\Gamma = o_j(1).
\end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$ temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim \left[\int_\Omega u_j |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \nabla \phi_{i,\varepsilon} dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx \right. \\
&- \left. \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u_j|^{r(x)} dx \right]^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx - \int_\Omega (\varrho^1)_j (\phi_{i,\varepsilon} u_j)\, dx - \int_{\partial\Omega} (\varrho_2)_j (\phi_{i,\varepsilon} u_j)\, d\Gamma \right] \\
&+ \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon} d\mu - \int_{\partial\Omega} \phi_{i,\varepsilon} d\bar{\nu},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\lim_{j\to\infty} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)} |u_j|^{q(x)} d\Gamma \right)^\beta |u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \bar{\nu}. \tag{3.17}
$$

Em Shang-Wang [51], mostrou-se que

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \phi_{i,\varepsilon} dx = 0.
$$

Por outro lado,

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon} d\mu = \mu_i \phi(0) \;\text{ e } \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega} \phi_{i,\varepsilon} d\bar{\nu} = \bar{\nu}_i \phi(0)
$$

e sendo $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$
\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u_j|^{r(x)} dx \right)^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx \to \left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx \right)^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx,
$$

$$
\int_\Omega |u_j|^{p(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx \to \int_\Omega |u|^{p(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx.
$$

Além disso, quando $\varepsilon \to 0$,

$$
\left(\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx \right)^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx \to 0, \quad \int_\Omega |u|^{p(x)} \phi_{i,\varepsilon} dx \to 0.
$$

Note ainda que, pelos Lemas 3.1, 3.2 e pelas hipóteses (f_1) e (g_1), temos

$$
0 \le (\varrho^1)_j \le C(1 + |u_j|^{s_1(x)-1}) \;\text{ q.t.p. em } \Omega
$$

e

$$0 \leq (\varrho_2)_j \leq C(1 + |u_j|^{s_2(x)-1}) \text{ q.t.p. em } \partial\Omega.$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\lim_{j \to \infty} \int_{\Omega} (\varrho^1)_j \phi_{i,\varepsilon} u_j \, dx \right] = 0$$

e

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\lim_{j \to \infty} \int_{\partial\Omega} (\varrho_2)_j \phi_{i,\varepsilon} u_j \, d\Gamma \right] = 0.$$

Deste modo, temos

$$\mu_i \phi(0) = \bar{\nu}_i \phi(0),$$

isto é,

$$\mu_i \leq \bar{c} \nu_i.$$

onde $\bar{c}$ surge da convergência (3.17).

De $\overline{T}_{x_i} \nu_i^{\frac{1}{p_*(x_i)}} \leq \mu_i^{\frac{1}{p(x_i)}}$, obtemos $(\overline{T}_{x_i})^{p(x_i)} \nu_i^{\frac{p(x_i)}{p_*(x_i)}} \leq \mu_i \leq \bar{c}\nu_i$. Então $(\overline{T}_{x_i})^{p(x_i)} \leq \bar{c} \nu_i^{\frac{p_*(x_i)-p(x_i)}{p_*(x_i)}}$, que implica

$$\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i} \leq \nu_i^{\frac{p_*(x_i)-p(x_i)}{p(x_i)p_*(x_i)}}.$$

Portanto,

$$\nu_i \geq \left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}} \overline{T}_{x_i} \right)^{(p(x_i)p_*(x_i)/p_*(x_i)-p(x_i))}. \tag{3.18}$$

Agora, observe que

$$d + o_j(1) \geq J(u_j) \geq J(u_j) - \frac{1}{\theta} \langle w_j, u_j \rangle.$$

De onde segue que

$$
\begin{aligned}
d+o_j(1) &\geq \left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)}\right)dx\\
&+ \left(\frac{1}{\theta(q^+)^\beta}-\frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}\\
&+ \left(\frac{1}{\theta(r^+)^\alpha}-\frac{1}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\right)\left[\int_{\Omega}|u_j|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1}\\
&+ \int_\Omega\left(\frac{1}{\theta}(\varrho^1)_j u_j - F(u_j)\right)\,dx+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{\theta}(\varrho_2)_j u_j-G(u_j)\right)\,d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Tomando

$$
p^+<\theta<\min\left\{\frac{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}{(r^+)^\alpha},\frac{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}{(q^+)^\beta},p^*,p_*\right\},
$$

usando as hipóteses (f_2), (g_2) e os Lemas 3.1 e 3.2 obtemos

$$
d+o_j(1) \geq \left(\frac{1}{\theta(q^+)^\beta}-\frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}.
$$

Agora, definindo $\mathcal{A}_\delta=\bigcup_{x\in\mathcal{A}_1}(B_\delta(x)\cap\Omega)=\{x\in\Omega : dist(x,\mathcal{A}_1)<\delta\}$, segue que

$$
d\geq\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_\delta})^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_\delta})^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}d\Gamma+\sum_{i\in I_1}\nu_i\right]^{\beta+1}.
$$

Desde que $\delta>0$ é arbitrário e q é contínua, concluímos que

$$
d\geq\left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}d\Gamma+\sum_{i\in I_1}\nu_i\right]^{\beta+1}.
$$

Por (3.18) temos

$$
\begin{aligned}
d &\geq \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right)\nu_i^{\beta+1}\\
&\geq \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta}-\frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right)\inf_{i\in I_1}\left[\left(\overline{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto de índices I_1 é vazio se

$$d < \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right)\inf_{i\in I_1}\left[\left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1}.$$

Agora, consideremos $I_2 \neq \emptyset$, seguindo os mesmos passos do caso anterior, obtemos

$$d \geq \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r^+_{\mathcal{A}_2})^\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r^-_{\mathcal{A}_2})^{\alpha+1}}\right)\inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}.$$

Portanto, o conjunto de índices $I_2 = \emptyset$ se

$$d < \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r^+_{\mathcal{A}_2})^\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r^-_{\mathcal{A}_2})^{\alpha+1}}\right)\inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}.$$

■

Lema 3.5 *Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_d$ para J. Se*

$$d < c_* := \min\left\{L_1\inf_{i\in I_1}\left[\left(\bar{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\beta+1}, L_2\inf_{i\in I_2}\left[\left(\tilde{c}^{-\frac{1}{p(x_i)}}\sigma_m\right)^{\frac{p(x_i)p^*(x_i)}{p^*(x_i)-p(x_i)}}\right]^{\alpha+1}\right\}$$

onde

$$L_1 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(q^+_{\mathcal{A}_1})^\beta} - \frac{1}{\beta+1}\cdot\frac{1}{(q^-_{\mathcal{A}_1})^{\beta+1}}\right) \text{ e } L_2 = \left(\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{(r^+_{\mathcal{A}_2})^\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{(r^-_{\mathcal{A}_2})^{\alpha+1}}\right)$$

então, existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração. Se $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_d$ para J, então (u_j) é limitada. Logo, existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Uma vez que, $\|w_j\|_{1,p(x)} = o_j(1)$ e $(u_j - u)$ é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$, obtemos

$$\langle w_j, u_j - u\rangle = o_j(1).$$

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
o_j(1) \quad \geq \quad & \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx + \int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx \\
- \quad & \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u_j|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx \\
- \quad & \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma \\
- \quad & \int_\Omega (\varrho^1)_j(u_j-u)\,dx - \int_{\partial\Omega} (\varrho_2)_j(u_j-u)\,d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$
\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \leq \int_\Omega |u_j|^{p(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_1 \left||u_j|^{p(x)-1}\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} |u_j-u|_{p(x)},
$$

$$
\left|\int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \leq \int_\Omega |u_j|^{r(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_2 \left||u_j|^{r(x)-1}\right|_{\frac{r(x)}{r(x)-1}} |u_j-u|_{r(x)},
$$

$$
\left|\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma\right| \leq \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-1}|u_j-u|d\Gamma \leq C_3 \left||u_j|^{q(x)-1}\right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} |u_j-u|_{q(x)},
$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas. Do Lema A.1, se $|u_j|_{p(x)} > 1$ então

$$
\left||u_j|^{p(x)-1}\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \leq |u_j|_{p(x)}^{p^+},
$$

usando a imersão contínua $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, obtemos

$$
|u_j|_{p(x)}^{p^+} \leq c\|u_j\|^{p^+}.
$$

Analogamente,

$$
\left||u_j|^{r(x)-1}\right|_{\frac{r(x)}{r(x)-1}} \leq c\|u_j\|^{r^+},
$$

$$
\left||u_j|^{q(x)-1}\right|_{\frac{q(x)}{q(x)-1}} \leq c\|u_j\|^{q^+}.
$$

Note que a imersão $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ é compacta e, pelo Lema 3.4, $u_j \to u$ em $L^{r(x)}(\Omega)$ e

$u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$, assim,

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0, \ \left|\int_\Omega |u_j|^{r(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)d\Gamma\right| \to 0.$$

Além disso, de (f_1), (g_1) e pelos Lemas 3.1 e 3.2, temos

$$0 \leq (\varrho^1)_j \leq \overline{f}(u_j) \leq |f(u_j)| \leq C(1+|u_j|)^{s_1(x)-1},$$

então

$$0 \leq (\varrho^1)_j \leq C(1+|u_j|)^{s_1(x)-1}.$$

De onde obtemos

$$|(\varrho^1)_j|^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}} \leq \left[C(1+|u_j|)^{s_1(x)-1}\right]^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}} \leq C2^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}\max\{1,|u_j|^{s_1(x)}\} \leq C + C|u_j|^{s_1(x)},$$

logo

$$\int_\Omega |(\varrho^1)_j|^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}dx \ \ \leq \ \ C + C\int_\Omega |u_j|^{s_1(x)}dx = C + C\rho_{s_1(x)}(u_j).$$

Desde que (u_j) é uma sequência limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $|u_j| < 1$. Assim, pela Proposição A.2, segue que

$$\rho_{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}((\varrho^1)_j) \ \ \leq \ \ C + C|u|_{s_1(x)}^{s_1^-}.$$

Pela imersões contínuas de Sobolev,

$$\rho_{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}((\varrho^1)_j) \ \ \leq \ \ C + C_1\|u\|_{1,s_1(x)}^{s_1^-}.$$

Suponhamos, por contradição, que a sequência $((\varrho^1)_j)$ não seja limitada. Então, podemos supor

$|(\varrho^1)_j| > 1$ e, pela Proposição A.2

$$|(\varrho^1)_j|^{s_\varrho^-}_{s_\varrho(x)} \quad \leq \quad C + C_1 \|u\|^{s_1^-}_{1,s_1(x)},$$

onde $s_\varrho(x) = \dfrac{s_1(x)}{s_1(x)-1}$. Portanto, a sequência $((\varrho^1)_j)$ é limitada em $L^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}(\Omega)$.

Da Desigualdade de Hölder, com os expoentes conjugados $s_1(x)$ e $\dfrac{s_1(x)}{s_1(x)-1}$, segue que

$$\int_\Omega (\varrho^1)_j (u_j - u)\, dx \quad \leq \quad |(\varrho^1)_j|_{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}} |u_j - u|_{s_1(x)}.$$

Desde que $((\varrho^1)_j)$ é limitada em $L^{\frac{s_1(x)}{s_1(x)-1}}(\Omega)$ e $u_j \to u$ em $L^{s_1(x)}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega (\varrho^1)_j (u_j - u)\, dx \to 0.$$

Analogamente, mostrar-se que

$$\int_{\partial\Omega} (\varrho_2)_j (u_j - u)\, d\Gamma \to 0.$$

Deste modo, considerando

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \nabla (u_j - u) dx,$$

concluímos que

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) \to 0.$$

Analogamente,

$$L_{p(x)}(u)(u_j - u) \to 0.$$

Portanto,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \to 0$$

e da Proposição A.18 segue que

$$u_j \to u \;\; \text{em} \;\; W^{1,p(x)}(\Omega).$$

$\blacksquare$

Lema 3.6 **1.** *Existem* $v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *e* $T > 0$, *tais que*

$$\max_{t\in[0,T]} J(tv) < d;$$

2. *Existem* $e \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *e* $r > 0$ *tal que* $J(e) < 0$ *para todo* e *com* $\|e\| > r$;

3. *Existe* $\varrho > 0$ *tal que* $J(u) \geq \varrho$ *para todo* $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ *com* $\|u\| = r$.

Demonstração. Considere $v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $\|v\| = 1$, $|\Upsilon_1 = \{x \in \Omega; Tv > a_1\}| > 0$, $|\Upsilon_2 = \{x \in \partial\Omega; Tv > a_2\}| > 0$ e a função $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\tau(t) = \frac{t^{p^+}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(v) - \frac{t^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}\left[\rho_{r(x)}(v)\right]^{\alpha+1} - \frac{t^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}\left[\rho_{q(x)}(v)\right]^{\beta+1}.$$

Note que, existe $t_* > 0$ tal que $\tau'(t_*) = 0$ e, observe que $\tau'(t) > 0$ para todo $t \in (0, t_*)$ e $\tau'(t) < 0$ para todo $t \in (t_*, +\infty)$. Assim, τ é crescente em $(0, t_*)$ e decrescente em $(t_*, +\infty)$. Portanto,

$$\tau(t_*) = \max_{t\geq 0} \tau(t).$$

Deste modo, podemos escolher $T > 0$ tal que

$$T < t_*; \quad \tau(T) < \tau(t_*); \quad \tau(T) < d.$$

Então, sendo $F(tv) \geq 0$ e $G(tv) \geq 0$ segue que

$$\begin{aligned}
J(tv) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla(tv)|^{p(x)} + |tv|^{p(x)})dx - \frac{1}{\alpha+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|tv|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} \\
&- \frac{1}{\beta+1}\left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|tv|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1} - \int_\Omega F(tv)dx - \int_{\partial\Omega} G(tv)d\Gamma \\
&\leq \frac{t^{p^+}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(v) - \frac{t^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}\left[\rho_{r(x)}(v)\right]^{\alpha+1} - \frac{t^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}\left[\rho_{q(x)}(v)\right]^{\beta+1} \\
&= \tau(t) \leq \max_{t\in[0,T]} \tau(t) \leq \tau(T) \leq \tau(t_*) < d.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,T]} J(tv) < c.$$

Para demonstrar o item **2.**, observe que, usando as hipóteses (f_2), (f_3), (g_2), (g_3) e fixando $a_1 = a_2 = \dfrac{T}{2}$, temos $e = Tv$ com $\|e\| = T$ tal que

$$F(Tv) = \int_0^{Tv} f(\sigma)d\sigma \geq \int_0^{Tv} H(\sigma - a_1)d\sigma$$

e

$$G(Tv) = \int_0^{Tv} g(\sigma)d\sigma \geq \int_0^{Tv} H(\sigma - a_2)d\sigma,$$

onde

$$\int_0^{Tv} H(\sigma - a_1)d\sigma = \begin{cases} 0, \ Tv \leq a_1 \\ Tv - a_1, \ Tv > a_1. \end{cases}$$

e

$$\int_0^{Tv} H(\sigma - a_2)d\sigma = \begin{cases} 0, \ Tv \leq a_2 \\ Tv - a_2, \ Tv > a_2. \end{cases}$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}
J(e) &= J(Tv) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla(Tv)|^{p(x)} + |Tv|^{p(x)})dx - \frac{1}{\alpha+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|Tv|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} \\
&- \frac{1}{\beta+1}\left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|Tv|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1} - \int_\Omega F(Tv)dx - \int_{\partial\Omega} G(Tv)d\Gamma \\
&\leq \frac{T^{p^+}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(v) - \frac{T^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}\left[\rho_{r(x)}(v)\right]^{\alpha+1} - \frac{T^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}\left[\rho_{q(x)}(v)\right]^{\beta+1} \\
&- \int_\Omega F(Tv)dx - \int_{\partial\Omega} G(Tv)d\Gamma \\
&\leq \frac{T^{p^+}}{p^-}\rho_{1,p(x)}(v) - \frac{T^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^+)^{\alpha+1}}\left[\rho_{r(x)}(v)\right]^{\alpha+1} - \frac{T^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^+)^{\beta+1}}\left[\rho_{q(x)}(v)\right]^{\beta+1} \\
&- \int_{\Upsilon_1} (Tv - a_1)dx - \int_{\Upsilon_2} (Tv - a_2)d\Gamma \\
&\leq \tau(T) - \int_{\Upsilon_1} (Tv - a_1)dx - \int_{\Upsilon_2} (Tv - a_2)d\Gamma < 0,
\end{aligned}$$

para $T \approx 0$. Assim, $J(e) < 0$.

Para demonstrar o item **3.** observe que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx - \frac{1}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\left[\int_\Omega |u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} \\ &- \frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\left[\int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1} - \int_\Omega F(u)dx - \int_{\partial\Omega} G(u)d\Gamma. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p^+}\rho_{1,p(x)}(u) - \frac{1}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\left(\rho_{r(x)}(u)\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\left(\rho_{q(x)}(u)\right)^{\beta+1} \\ &- \int_\Omega F(u)dx - \int_{\partial\Omega} G(u)d\Gamma. \end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$ é suficientemente pequeno, da Proposição A.10 sabemos que

$$\rho_{1,p(x)}(u) \geq \|u\|^{p^+}.$$

Das imersões contínuas $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ e das Proposições A.2 e A.8, obtemos

$$\rho_{r(x)}(u) \leq M_1^{r^-}\|u\|^{r^-}$$

e

$$\rho_{q(x)}(u) \leq M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}$$

onde M_1 e M_2 são constantes positivas.

Portanto,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\|u\|^{(\alpha+1)r^-} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\|u\|^{(\beta+1)^{q^-}} \\ &- \int_\Omega F(u)dx - \int_{\partial\Omega} G(u)d\Gamma. \end{aligned}$$

Além disso, de (f_1) e (f_4), temos

$$F(u) \leq \int_0^u f(\sigma)d\sigma \leq C_1\int_0^u d\sigma + C_1\int_0^u |\sigma|^{s_1(x)-1}d\sigma = C_1|u| + C_1|u|^{s_1(x)},$$

de onde obtemos

$$\int_\Omega F(u)dx \leq C_1\int_\Omega |u|dx + C_1\int_\Omega |u|^{s_1(x)}dx = C_1\int_\Omega |u|dx + C_1\rho_{s_1(x)}(u)$$

Analogamente, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} G(u)d\Gamma \leq C_2\int_{\partial\Omega} |u|d\Gamma + C_2\rho_{s_2(x)}(u).$$

Da Proposição A.2 e das imersões contínuas de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\|u\|^{(\alpha+1)r^-} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\|u\|^{(\beta+1)^{q^-}} \\ &- C_1\|u\| - C_1\|u\|^{s_1^-} - C_2\|u\| - C_2\|u\|^{s_2^-} \\ &= \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\|u\|^{(\alpha+1)r^-} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\|u\|^{(\beta+1)^{q^-}} \\ &- C_3\|u\| - C_1\|u\|^{s_1^-} - C_2\|u\|^{s_2^-}. \end{aligned}$$

Da estimativa em (2.2), obtemos

$$p^+ < (\alpha+1)r^- \text{ e } p^+ < (\beta+1)q^-,$$

logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}}\|u\|^{p^+} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\|u\|^{p^+} \\ &- C_3\|u\| - C_1\|u\|^{s_1^-} - C_2\|u\|^{s_2^-}. \end{aligned}$$

Considerando $\varrho = \|u\|$, temos

$$J(u) \geq \varrho^{p^+}\left(\frac{1}{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}} - C_3\varrho^{1-p^+} - C_1\varrho^{s_1^- - p^+} - C_2\varrho^{s_2^- - p^+}\right),$$

sabemos que $\varrho^{p^+} > 0$, então, devemos ter

$$\frac{1}{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}} - \left(C_3\varrho^{1-p^+} + C_1\varrho^{s_1^- - p^+} + C_2\varrho^{s_2^- - p^+}\right) > 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}} - \left(C_3 + C_1\varrho^{s_1^- -1} + C_2\varrho^{s_2^- -1}\right)\varrho^{1-p^+} > 0.$$

Note que, $0 < \varrho < 1$, então

$$C_1\varrho^{s_1^- -1} + C_2\varrho^{s_2^- -1} < C_1 + C_2,$$

logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} &- \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}} - \left(C_3 + C_1\varrho^{s_1^- -1} + C_2\varrho^{s_2^- -1}\right)\varrho^{1-p^+} \\ &> \frac{1}{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}} - (C_3 + C_1 + C_2)\varrho^{1-p^+}.\end{aligned}$$

Fazendo $C_0 = C_3 + C_1 + C_2$, devemos ter

$$\frac{1}{p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}} - C_0\varrho^{1-p^+} > 0,$$

ou seja,

$$\varrho < \left(\frac{1}{C_0 p^+} - \frac{M_1^{(\alpha+1)r^-}}{C_0(\alpha+1)(r^-)^{\alpha+1}} - \frac{M_2^{(\beta+1)q^-}}{C_0(\beta+1)(q^-)^{\beta+1}}\right)^{\frac{1}{1-p^+}}.$$

Assim, tomando α e β suficientemente grandes, segue o resultado.

$\blacksquare$

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Pelo Lema 3.5 concluímos que o funcional J satisfaz a condição $(PS)_d$ e o Lema 3.6 garante que este funcional satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha. Portanto, d é um valor crítico para o funcional J, isto é, existe um $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $0 \in \partial J(u)$. Sendo assim, podemos concluir que u é uma solução fraca para o problema (3.1). Além disso, podemos usar u_- como função teste e concluir que $u = u_+ \geq 0$.

Agora, provaremos que o conjunto

$$\{x \in \Omega; u(x) > a_1\} \cup \{x \in \partial\Omega; u(x) > a_2\},$$

possui medida positiva.

Suponhamos, por contradição, que $u(x) \leq a_1$ q.t.p. em Ω e $u(x) \leq a_2$ q.t.p. sobre $\partial\Omega$. Assim, como u é solução do problema (3.1), segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx + \int_\Omega |u|^{p(x)-2}uv dx &= \int_\Omega \varrho^1 v\, dx + \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)-2}uv dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \varrho_2 v\, d\Gamma + \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)-2}uv d\Gamma, \end{aligned}$$

para todo $v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Em particular, tomando $v = u$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{1,p(x)}(u) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |u|^{p(x)}dx \leq \int_\Omega \varrho^1 u\, dx + \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^\alpha \int_\Omega |u|^{r(x)}dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \varrho_2 v\, d\Gamma + \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^\beta \int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)}d\Gamma \\ &\leq \int_\Omega \varrho^1 u\, dx + \frac{1}{(r^-)^\alpha}\left[\int_\Omega |u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} + \int_{\partial\Omega} \varrho_2 u\, d\Gamma + \frac{1}{(q^-)^\beta}\left[\int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Pelos Lemas 3.1 e 3.2, temos

$$\varrho^1 \leq \overline{f}(u) \leq C_1(1 + |u|^{s_1(x)-1})$$

e

$$\varrho_2 \leq \overline{g}(u) \leq C_2(1 + |u|^{s_2(x)-1}).$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}\rho_{1,p(x)}(u) &\leq C_1\int_\Omega (|u|+|u|^{s_1(x)})\,dx + \frac{1}{(r^-)^\alpha}\left[\int_\Omega |u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1}\\ &+ C_2\int_{\partial\Omega}(|u|+|u|^{s_2(x)})\,d\Gamma + \frac{1}{(q^-)^\beta}\left[\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\rho_{1,p(x)}(u) &\leq C_1(|a_1|+|a_1|^{s_1^-})|\Omega| + \frac{|a_1|^{r^-(\alpha+1)}}{(r^-)^\alpha}|\Omega|^{\alpha+1}\\ &+ C_2(|a_2|+|a_2|^{s_2^-})|\Omega| + \frac{|a_2|^{q^-(\beta+1)}}{(q^-)^\beta}|\Omega|^{\beta+1}.\end{aligned}$$

Tomando $\hat{C} = \max\left\{C_1, C_2, \frac{1}{(r^-)^\alpha}, \frac{1}{(q^-)^\beta}\right\}$ e $a_1, a_2 < 1$, segue que

$$\begin{aligned}\rho_{1,p(x)}(u) &\leq 3\hat{C}a_1|\Omega|^{\alpha+1} + 3\hat{C}a_2|\Omega|^{\beta+1}\\ &\leq 3\hat{C}|\Omega|^{\hat{\eta}}(a_1+a_2),\end{aligned}$$

onde $\hat{\eta} = \max\{\alpha+1, \beta+1\}$. Desde que estamos supondo $u(x) < a_1 < 1$, pela Proposição A.10, temos

$$\|u\|^{p^+} \leq 3\hat{C}|\Omega|^{\hat{\eta}}(a_1+a_2).$$

Uma vez que $J(u) = d$, existe $M > 0$ tal que $\|u\| \geq M$. Então,

$$M^{p^+} \leq 3\hat{C}|\Omega|^{\hat{\eta}}(a_1+a_2).$$

No entanto, esta desigualdade não é possível se escolhermos

$$a_1 + a_2 = \min = \left\{\frac{1}{2}, \frac{T}{2}, \frac{M^{p^+}}{3\hat{C}|\Omega|^{\hat{\eta}}(a_1+a_2)}\right\}.$$

Portanto,

$$|\{x\in\Omega; u(x) > a_1\}\cup\{x\in\partial\Omega; u(x) > a_2\}| > 0.$$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados Básicos

Neste apêndice, reunimos algumas definições e propriedades acerca dos espaços de Lebesgue-Sobolev com expoentes variáveis. A demonstração dos resultados apresentados e uma abordagem mais completa sobre este assunto, podem ser encontrados nas seguintes referências [14], [15], [23], [29], [30] e [31].

1.1 Os Espaços Generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável. Considere o conjunto

$$C_+(\overline{\Omega}) := \big\{h \in C(\overline{\Omega});\ h(x) > 1 \ \text{ para todo } \ x \in \overline{\Omega}\big\}.$$

Para cada $h \in C_+(\overline{\Omega})$, definimos o **espaço de Lebesgue generalizado** (ou **espaço de Lebesgue com expoente variável**) como sendo

$$L^{h(x)}(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^{h(x)}\, dx < \infty\right\}.$$

E ainda, para $h \in C_+(\overline{\Omega})$, definimos também

$$h^+ := \max_{\overline{\Omega}} h(x) \ \text{ e } \ h^- := \min_{\overline{\Omega}} h(x).$$

Definição A.1 *O funcional* $\rho_{h(x)} : L^{h(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\rho_{h(x)}(u) := \int_\Omega |u(x)|^{h(x)}\, dx,$$

é denominado a **função modular relativa ao espaço** $\mathbf{L}^{h(x)}(\Omega)$.

Consideremos $L^{h(x)}(\Omega)$ equipado com a **norma de Luxemburg**

$$|u|_{h(x)} := \inf\left\{\mu > 0; \rho_{h(x)}\left(\frac{u}{\mu}\right) \leq 1\right\}.$$

De acordo com [23], [30], [31], o espaço $L^{h(x)}(\Omega)$ munido com esta norma é Banach reflexivo e separável.

A norma de Luxemburg possui uma expressão que, à primeira vista, parece inadequada para aplicação dos métodos variacionais, pois não é parte integrante dos funcionais energias correspondentes aos problemas considerados, como ocorre no caso de expoentes constantes. Por isso, as seguintes proposições serão muito úteis no decorrer desta tese. As demonstração podem ser encontradas em Diening, Harjulehto, Hästö e Růžička [23], Fan e Zhang [30], Fan e Zhao [31].

Proposição A.1 *Seja* $u \in L^{h(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$. *Então,* $|u|_{h(x)} = \mu$ *se, e somente se,* $\rho_{h(x)}\left(\frac{u}{\mu}\right) = 1$.

Proposição A.2 *Seja* $u \in L^{h(x)}(\Omega)$. *Então*

1. $|u|_{h(x)} < 1$ $(= 1; > 1)$ *se, e somente se,* $\rho_{h(x)}(u) < 1$ $(\rho_{h(x)}(u) = 1;\ \rho_{h(x)}(u) > 1)$;

2. *Se* $|u|_{h(x)} > 1$, *então* $|u|_{h(x)}^{h^-} \leq \rho_{h(x)}(u) \leq |u|_{h(x)}^{h^+}$;

3. *Se* $|u|_{h(x)} < 1$, *então* $|u|_{h(x)}^{h^+} \leq \rho_{h(x)}(u) \leq |u|_{h(x)}^{h^-}$.

Proposição A.3 *Para quaisquer* $u, w \in L^{h(x)}(\Omega)$, *são válidos:*

1. $\min\left\{|u|_{h(x)}^{h^-}, |u|_{h(x)}^{h^+}\right\} \leq \rho_{h(x)}(u) \leq \max\left\{|u|_{h(x)}^{h^-}, |u|_{h(x)}^{h^+}\right\}$;

2. $\min\left\{\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h^-}}, \rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h^+}}\right\} \leq |u|_{h(x)} \leq \max\left\{\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h^-}}, \rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h^+}}\right\}$;

3. w *é limitado em* $L^{h(x)}(\Omega)$ *se, e somente se,* $\rho_{h(x)}(w)$ *é limitado em* $\mathbb{R}$.

Proposição A.4 *Seja* $(u_j) \subset L^{h(x)}(\Omega)$. *Se* $u \in L^{h(x)}(\Omega)$, *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\lim_{j\to\infty} |u_j - u|_{h(x)} = 0$;

2. $\lim_{j\to\infty} \rho_{h(x)}(u_j - u) = 0$;

3. $u_j \to u$ *em* Ω *e* $\lim_{n\to\infty} \rho_{h(x)}(u_j) = \rho_{h(x)}(u)$.

Proposição A.5 *Sejam* $u, u_j \in L^{h(x)}(\Omega)$, *então as afirmações abaixo são verdadeiras:*

1. $\lim\limits_{j\to+\infty} |u_j|_{h(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{h(x)}(u_j) = 0$;

2. $\lim\limits_{j\to+\infty} |u_j|_{h(x)} = +\infty \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{h(x)}(u_j) = +\infty$.

O *espaço dual* de $L^{h(x)}(\Omega)$ é $L^{h'(x)}(\Omega)$ onde

$$\frac{1}{h(x)} + \frac{1}{h'(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Proposição A.6 (Desigualdade de Hölder) *Para* $u \in L^{h(x)}(\Omega)$ *e* $w \in L^{h'(x)}(\Omega)$, *temos* $uw \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\left|\int_\Omega uw\,dx\right| \leq \left(\frac{1}{h^-} + \frac{1}{h'^-}\right)|u|_{h(x)}|w|_{h'(x)}.$$

Proposição A.7 *Se* $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} + \dfrac{1}{p''(x)} = 1$, *então para quaisquer* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ *e* $w \in L^{p''(x)}(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega uvw\,dx\right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-} + \frac{1}{p''^-}\right)|u|_{p(x)}|v|_{p'(x)}|w|_{p''(x)} \leq 3|u|_{p(x)}|v|_{p'(x)}|w|_{p''(x)}.$$

Seja $q \in C_+(\partial\Omega)$, onde

$$C_+(\partial\Omega) := \{h \in C(\partial\Omega);\ h(x) > 1 \text{ para todo } x \in \partial\Omega\}.$$

O espaço de Lebesgue sobre $\partial\Omega$ é definido por

$$L^{q(x)}(\partial\Omega) := \left\{u : \partial\Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_{\partial\Omega} |u(x)|^{q(x)}\,d\Gamma < \infty\right\},$$

onde $d\Gamma$ é a medida na fronteira e a correspondente norma de Luxemburg é dada por

$$|u|_{L^{q(x)}(\partial\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0; \int_{\partial\Omega} \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{q(x)} d\Gamma \leq 1\right\}.$$

E ainda, seja a uma função mensurável real tal que $a(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Podemos definir também o seguinte espaço de Lebesgue com expoente variável

$$L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega a(x)|u|^{p(x)}\, dx < \infty\right\},$$

munido com a norma

$$|u|_{L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)} = |u|_{p(x),a(x)} := \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega a(x) \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Definido como acima, o espaço $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

As Proposições a seguir podem ser demonstradas facilmente pela definição de $|u|_{L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)}$, ver as referências [31], [40].

Proposição A.8 *Seja* $\rho_{p(x),a(x)}(u) = \displaystyle\int_\Omega a(x)|u(x)|^{p(x)}dx$. *Para* $u, u_j \in L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ *temos:*

1. *Se* $u \neq 0$, *então* $|u|_{p(x),a(x)} = \mu$ *se, e somente se,* $\rho_{p(x),a(x)}\left(\frac{u}{\mu}\right) = 1$;

2. $|u|_{p(x),a(x)} < 1\ (= 1; > 1)$ *se, e somente se,* $\rho_{p(x),a(x)}(u) < 1\ (\rho_{p(x),a(x)}(u) = 1; \rho_{p(x),a(x)}(u) > 1)$;

3. *Se* $|u|_{p(x),a(x)} > 1$, *então* $|u|^{p^-}_{p(x),a(x)} \leq \rho_{p(x),a(x)}(u) \leq |u|^{p^+}_{p(x),a(x)}$;

4. *Se* $|u|_{p(x),a(x)} < 1$, *então* $|u|^{p^+}_{p(x),a(x)} \leq \rho_{p(x),a(x)}(u) \leq |u|^{p^-}_{p(x),a(x)}$;

5. $\lim\limits_{j\to+\infty} |u_j|_{p(x),a(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{p(x),a(x)}(u_j) = 0$;

6. $\lim\limits_{j\to+\infty} |u_j|_{p(x),a(x)} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{p(x),a(x)}(u_j) = +\infty$.

Proposição A.9 *Para quaisquer* $u \in L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ *e* $(u_j) \subset L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ *são válidas:*

1. $\min\left\{|u|^{p^-}_{p(x),a(x)}, |u|^{p^+}_{p(x),a(x)}\right\} \leq \rho_{p(x),a(x)}(u) \leq \max\left\{|u|^{p^-}_{p(x),a(x)}, |u|^{p^+}_{p(x),a(x)}\right\}$;

2. $\min\left\{\rho_{p(x),a(x)}(u)^{\frac{1}{p^-}}, \rho_{p(x),a(x)}(u)^{\frac{1}{p^+}}\right\} \leq |u|_{p(x),a(x)} \leq \max\left\{\rho_{p(x),a(x)}(u)^{\frac{1}{p^-}}, \rho_{p(x),a(x)}(u)^{\frac{1}{p^+}}\right\}$;

3. *(u_j) é limitada em $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ se e somente se, $\rho_{p(x),a(x)}(u_j)$ é limitada em $\mathbb{R}$.*

Lema A.1 (**Edmunds e Rakosnik** [25]) *Sejam p e q funções mensuráveis tais que $p \in L^\infty(\Omega)$ e $1 \leq p(x)q(x) \leq \infty$ quase sempre em Ω. Seja $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, $u \neq 0$. Então*

$$|u|^{p^+}_{p(x)q(x)} \leq |u|^{p(x)}_{q(x)} \leq |u|^{p^-}_{p(x)q(x)} \quad \text{se} \quad |u|_{p(x)q(x)} \leq 1;$$

$$|u|^{p^-}_{p(x)q(x)} \leq |u|^{p(x)}_{q(x)} \leq |u|^{p^+}_{p(x)q(x)} \quad \text{se} \quad |u|_{p(x)q(x)} \geq 1.$$

1.2 Os Espaços Generalizados de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, estudaremos o espaço de Sobolev generalizado (ou espaço de Sobolev com expoente variável). Neste estudo, vamos considerar somente os espaços $W^{1,h(x)}(\Omega)$, o caso mais geral, $W^{k,h(x)}(\Omega)$ com $k > 1$, pode ser encontrado nas referências citadas no início deste capítulo. O conhecimento sobre estes espaços é extremamente importante neste trabalho, pois é neles que buscamos soluções para os problemas estudados.

Definição A.2 *Para cada $h \in C_+(\overline{\Omega})$, definimos o* **espaço de Sobolev com expoente variável** $W^{1,h(x)}(\Omega)$ *como*

$$W^{1,h(x)}(\Omega) := \left\{u \in L^{h(x)}(\Omega); |\nabla u| \in L^{h(x)}(\Omega)\right\},$$

munido da norma

$$\|u\| := |u|_{h(x)} + |\nabla u|_{h(x)}.$$

De acordo com Fan e Zhao [31], temos o seguinte teorema:

Teorema A.1 *O espaço $W^{1,h(x)}(\Omega)$ é Banach reflexivo e separável, se $h^- > 1$.*

No que segue, para $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$, vamos considerar a modular

$$\rho_{1,h(x)} := \int_\Omega (|u|^{h(x)} + |\nabla u|^{h(x)})\, dx.$$

Assim, podemos enunciar as proposições abaixo que contém algumas propriedades relacionadas a norma e a função modular de $W^{1,h(x)}(\Omega)$. As demonstrações podem ser encontradas em [23],[31].

Proposição A.10 *Seja* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$. *Então*

1. $\|u\| < 1\ (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho_{1,h(x)}(u) < 1\ (= 1; > 1)$;

2. *Se* $\|u\| > 1$, *então* $\|u\|^{h^-} \leq \rho_{1,h(x)}(u) \leq \|u\|^{h^+}$;

3. *Se* $\|u\| < 1$, *então* $\|u\|^{h^+} \leq \rho_{1,h(x)}(u) \leq \|u\|^{h^-}$.

Proposição A.11 *Seja* $(u_j) \subset W^{1,h(x)}(\Omega)$. *Se* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$, *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\| = 0$;

2. $\lim_{j\to\infty} \rho_{1,h(x)}(u_j - u) = 0$;

3. $u_j \to u$ *em* Ω *e* $\lim_{n\to\infty} \rho_{1,h(x)}(u_j) = \rho_{1,h(x)}(u)$.

Proposição A.12 *Sejam* $u, u_j \in W^{1,h(x)}(\Omega)$, *então as afirmações abaixo são verdadeiras:*

1. $\lim\limits_{j\to+\infty} \|u_j\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{1,h(x)}(u_j) = 0$;

2. $\lim\limits_{j\to+\infty} \|u_j\| = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{1,h(x)}(u_j) = +\infty$.

Proposição A.13 *Para quaisquer* $u, w \in W^{1,h(x)}(\Omega)$ *são válidos:*

1. $\min\left\{\|u\|^{h^-}, \|u\|^{h^+}\right\} \leq \rho_{1,h(x)}(u) \leq \max\left\{\|u\|^{h^-}, \|u\|^{h^+}\right\}$;

2. $\min\left\{\rho_{1,h(x)}(u)^{\frac{1}{h^-}}, \rho_{1,h(x)}(u)^{\frac{1}{h^+}}\right\} \leq \|u\| \leq \max\left\{\rho_{1,h(x)}(u)^{\frac{1}{h^-}}, \rho_{1,h(x)}(u)^{\frac{1}{h^+}}\right\}$;

3. w *é limitado em* $W^{1,h(x)}(\Omega)$ *se, e somente se,* $\rho_{1,h(x)}(w)$ *é limitado em* $\mathbb{R}$.

Proposição A.14 *Seja* $m \in L^\infty(\Omega)$ *com* $m^- > 0$. *Então, dado* $u \in W^{1,h(x)}(\Omega)$, *temos*

$$\max\left\{\|u\|^{m^-}, \|u\|^{m^+}\right\} \leq \max\left\{\rho_{1,h(x)}(u)^{\frac{m^-}{h^+}}, \rho_{1,h(x)}(u)^{\frac{m^+}{h^-}}\right\}.$$

1.3 Imersões em Espaços Generalizados de Lebesgue-Sobolev

Neste tópico, abordaremos alguns resultados de imersão que serão úteis nos capítulos seguintes. Podemos encontrar as demonstrações destes resultados nas referências [23],[29].

Proposição A.15 *Se* $h_1, h_2 \in C_+(\overline{\Omega})$ *e* $h_1(x) \leq h_2(x)$ *para todo* $x \in \Omega$*, então temos a imersão contínua* $L^{h_2}(x) \hookrightarrow L^{h_1(x)}(\Omega)$*.*

Proposição A.16 *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio suave e limitado e* $h, h_1 \in C_+(\overline{\Omega})$ *com* $N > h^+$*. Se* $h_1(x) \leq h^*(x)$ *(respectivamente,* $h_1(x) < h^*(x)$*), para todo* $x \in \overline{\Omega}$*, então a imersão*

$$W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{h_1(x)}(\Omega),$$

é contínua (respectivamente, compacta).

Proposição A.17 *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é um domínio suave e limitado,* $q \in C_+(\partial\Omega)$ *e* $p \in C_+(\overline{\Omega})$ *com* $N > p^+$*. Então, se* $q(x) < p_*(x)$*, para todo* $x \in \partial\Omega$*, a imersão*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega),$$

é compacta.

O próximo teorema é uma importante ferramenta que usaremos no terceiro capítulo desta tese, sua demonstração pode ser encontrada em Fan [28].

Teorema A.2 *Assuma que a fronteira de* Ω *possui a propriedade do cone e* $p \in C(\overline{\Omega})$*. Suponha que* $a \in L^{k(x)}(\Omega)$*,* $a(x) > 0$ *para* $x \in \Omega$*,* $k \in C(\overline{\Omega})$ *e* $k^- > 1$*. Se* $v \in C(\overline{\Omega})$ *e*

$$1 \leq v(x) < \frac{k(x) - 1}{k(x)} p^*(x),$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$*. Então, a imersão* $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{v(x)}_{a(x)}(\Omega)$ *é compacta.*

A proposição seguinte, devido a Fan e Zhang [30], será de grande importância para obtermos convergência forte em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Proposição A.18 *Seja* $L_{p(x)} : W^{1,p(x)}(\Omega) \to (W^{1,p(x)}(\Omega))'$ *definido por*

$$L_{p(x)}(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall\ u, v \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Então:

1. $L_{p(x)}: W^{1,p(x)}(\Omega) \to (W^{1,p(x)}(\Omega))'$ *é um operador contínuo, limitado e estritamente monótono;*

2. $L_{p(x)}$ *é uma aplicação do tipo* S_+*, i.e., se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *e*

$$\limsup (L_{p(x)}(u_n) - L_{p(x)}(u), u_n - u) \leq 0,$$

então $u_n \to u$ *em* $W^{1,p(x)}(\Omega)$*;*

3. $L_{p(x)} : W^{1,p(x)}(\Omega) \to (W^{1,p(x)}(\Omega))'$ *é um homeomorfismo.*

As duas proposições que seguem, correspondem às extensões do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [43] aos espaços com expoentes variáveis, fundamentais para conseguirmos contornar a falta de compacidade nos problemas estudados nesta tese.

Proposição A.19 **(Bonder, Saintier e Silva [8])** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio suave e limitado,* $h \in C_+(\overline{\Omega})$*,* $l \in C_+(\partial\Omega)$ *com*

$$l(x) \leq h^*(x), \forall x \in \partial\Omega,$$

e $(u_j) \subset W^{1,h(x)}(\Omega)$ *uma sequência tal que* $u_j \rightharpoonup u$ *em* $W^{1,h(x)}(\Omega)$*. Então, existe um conjunto enumerável* I_1*, números positivos* $\{\mu_i\}_{i\in I_1}$ *e* $\{\nu_i\}_{i\in I_1}$ *e pontos* $\{x_i\}_{i\in I_1} \subset \{x \in \partial\Omega\,;\, l(x) = h_*(x)\}$ *tais que*

$$|u_j|^{l(x)}\, ds \rightharpoonup \nu = |u|^{l(x)}\, ds + \sum_{i\in I_1} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \textit{fraco} - * \textit{ em medida}, \tag{A.1}$$

$$|\nabla u_j|^{h(x)}\, dx \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{h(x)} dx + \sum_{i\in I_1} \mu_i \delta_{x_i}, \quad \textit{fraco} - * \textit{ em medida} \tag{A.2}$$

e

$$\overline{T}_{x_i} \nu_i^{\frac{1}{h_*(x_i)}} \leq \mu_i^{\frac{1}{h(x_i)}}, \forall i \in I_1, \tag{A.3}$$

onde

$$\overline{T}_{x_i} = \sup_{\epsilon>0} T(h(\cdot), l(\cdot), \Omega_{\epsilon,i}, \Lambda_{\epsilon,i})$$

representa a constante de Sobolev no sentido do traço

$$\Omega_{\epsilon,i} = \Omega \cap B_\epsilon(x_i) \quad e \quad \Lambda_{\epsilon,i} = \Omega \cap \partial B_\epsilon(x_i).$$

Proposição A.20 (**Bonder e Silva** [7]) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio suave e limitado, $h, m \in C_+(\overline{\Omega}), h^+ < N$ com*

$$m(x) \leq h^*(x), \, \forall x \in \overline{\Omega},$$

e (u_j) uma sequência em $W^{1,h(x)}(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,h(x)}(\Omega)$. Então, existe um conjunto enumerável de índices I_2, números positivos $\{\mu_i\}_{i\in I_2}$ e $\{\nu_i\}_{i\in I_2}$ e pontos $\{x_i\}_{i\in I_2} \subset \{x \in \overline{\Omega}\,;\, m(x) = h^*(x)\}$ tais que

$$|u_j|^{m(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{m(x)} + \sum_{i\in I_2} \nu_i \delta_{x_i} \ fraco - * \ em \ medida,$$

$$|\nabla u_j|^{h(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{h(x)} + \sum_{i\in I_2} \mu_i \delta_i \ fraco - * \ em \ medida$$

e

$$\sigma_m \nu_i^{1/h^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/h(x_i)}, \quad \forall i \in I_2,$$

onde σ_m é a melhor constante da desigualdade Gagliardo-Nirenberg-Sobolev para o expoente variável, dada por

$$\sigma_m = \sigma_m(\Omega) = \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\||\nabla\phi|\|_{L^{h(x)}(\Omega)}}{\|\phi\|_{L^{m(x)}(\Omega)}}.$$

1.4 O Gênero de Krasnoselskii

Nesta seção, faremos uma revisão sobre os conceitos básicos e alguns resultados importantes referentes ao gênero de Krasnoselskii.

Seja X um espaço de Banach real. Denotaremos por Σ a classe de todos os subconjuntos fechados $A \subset X \setminus \{0\}$ que são simétricos em relação à origem, ou seja, $u \in A$ implica $-u \in A$.

Definição A.3 *Seja $A \in \Sigma$. O* **gênero de** *A, denotado por $\gamma(A) = k$, é definido como sendo o menor inteiro positivo tal que existe uma aplicação ímpar $\phi \in C(A, \mathbb{R}^k)$ onde $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Se tal k não existir, dizemos que $\gamma(A) = \infty$. Além disso, por definição, $\gamma(\emptyset) = 0$.*

Abaixo, listamos algumas propriedades do gênero utilizadas neste trabalho. Para ver as demonstrações e outras informações sobre esse tema, consultar as referências Ambrosetti e Malchiodi [2], Castro [11], G. Costa [22], Krasnoselskii [41] e Rabinowitz [48].

Teorema A.3 *Seja $X = \mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ a fronteira de um aberto, simétrico e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $0 \in \Omega$. Então $\gamma(\partial\Omega) = N$.*

Proposição A.21 *$\gamma(\mathbb{S}^{N-1}) = N$, onde $\mathbb{S}^{N-1}$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.*

Uma consequência da Proposição A.21 é que, se X tem dimensão infinita, separável e $\mathbb{S}$ é a esfera unitária em X, então $\gamma(\mathbb{S}) = \infty$.

Destacamos o teorema a seguir, devido a Rabinowitz [48], como uma das principais ferramentas na obtenção dos resultados centrais desta tese.

Teorema A.4 *Seja $A, B \in \Sigma$. Então:*

1. *Se $\gamma(A) > 1$, então A contém uma quantidade infinita de pontos distintos;*

2. *Se existe uma aplicação ímpar $h \in C(A, B)$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*

3. *Se $A \subset B$ então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;*

4. *$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;*

5. *Se V é um subespaço de X de codimensão k e $\gamma(A) > k$, então $A \cap V \neq \emptyset$;*

6. *Se A é um compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe um $\delta > 0$ tal que $N_\delta(A) \in \Sigma$ e $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$ onde $N_\delta(A) = \{u \in X; \|u - a\| \leq \delta, \forall a \in A\}$;*

7. *Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$;*

8. *Se W é uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^k$ e existe um homeomorfismo ímpar $h \in C(A, \partial W)$ então $\gamma(A) = k$.*

O seguinte resultado pode ser encontrado em Clark [16] e também é de grande relevância em nosso trabalho.

Teorema A.5 *Seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale. Além disso, vamos supor que:*

1. *J é par e limitado inferiormente;*

2. *Existe um conjunto compacto $K \in \Sigma$ tal que $\gamma(K) = k$ e $\sup_{x \in K} J(x) < J(0) = 0$.*

Então, J possui pelo menos k pares de pontos críticos distintos e seus correspondentes valores criticos são menores do que $J(0)$.

1.5 Resultados sobre Funcionais Localmente Lipschitzianos

Nesta seção, faremos uma breve revisão sobre algumas propriedades envolvendo funcionais localmente Lipschitz e gradiente generalizado da teoria dos pontos críticos desenvolvida por Clarke [17] e Chang [12]. Enunciaremos algumas definições e propriedades que serão de grande importância nesta tese, porém, nos limitaremos a demonstrar apenas alguns resultados, para ver a demonstração dos demais resultados, consultar a referência [36].

No que segue, X denota um espaço de Banach separável e reflexivo.

Definição A.4 *Considere o funcional $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é um* **funcional localmente Lipschitz**, *$f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, se dado $u \in X$, existir uma vizinhança $V = V_u \subset X$ de u e uma constante $K = K_u > 0$ tal que*

$$|f(v_1) - f(v_2)| \leq K\|v_1 - v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in V. \tag{A.4}$$

Quando (A.4) ocorrer em todo o espaço X, a função f é dita ser Lipschitz.

1.6 Gradiente Generalizado

Definição A.5 *A* **derivada direcional generalizada** *de um funcional localmente Lipschitz $f : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $u \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $f^0(u;v)$ é definida por*

$$f^0(u;v) = \limsup_{h \to 0, \delta \to 0^+} \frac{f(u+h+\delta v) - f(u+h)}{\delta}, \ \ v \in X.$$

A respeito da derivada direcional generalizada, temos o seguinte Teorema:

Teorema A.6 *Se f é contínua e a derivada de Gâteaux $f' : X \to X'$ é contínua na topologia fraca $-*$, então $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ e $f^0(u;v) = \langle f'(x), v \rangle$.*

Demonstração. Ver [36].

■

Segue abaixo algumas propriedades da derivada direcional generalizada.

(P$_1$) A função $f^0(u,.) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homogênea positiva, isto é,

$$f^0(u, v_1 + v_2) \leq f^0(u, v_1) + f^0(u, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in X$$

e

$$f^0(u, \lambda v) = \lambda f^0(u, v), \quad \forall v \in X \ \text{ e } \ \lambda \geq 0;$$

(P$_2$) $f^0(u,.)$ é um funcional convexo;

(P$_3$) $|f^0(u;v)| \leq K\|v\|$, onde $K > 0$ satisfaz (A.4) e depende do conjunto aberto $V = V_u$, para cada $u \in X$;

(P$_4$) $|f^0(u;v) - f^0(u;t)| \leq K\|v - t\|$, para todo $v, t \in X$, ou seja, $f^0(u;.) : X \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz com constante K;

(P$_5$) $f^0(u;-v) = (-f)^0(u;v)$, para todo $u, v \in X$;

(P$_6$) $f^0(u;v)$ é uma função semicontínua superiormente, isto é,

$$\limsup_{j \to +\infty} f^0(u_j; v_j) \leq f^0(u;v),$$

onde $\lim\limits_{j\to+\infty}(u_j;v_j)=(u;v)$, com $(u,v)\in X\times X$.

Definiremos, agora, o Gradiente Generalizado de um funcional localmente Lipschitz.

Definição A.6 *Seja $f\in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$. Definimos o* **Gradiente Generalizado** *de f no ponto $u\in X$, e denotamos por $\partial f(u)$, o subconjunto de X' dado por*

$$\partial f(u)=\{\xi\in X';f^0(u;v)\geq\langle\xi,v\rangle\},\quad\forall v\in X.$$

Lema A.2 *O gradiente generalizado de uma função $f\in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ é sempre um conjunto não vazio.*

Demonstração. Ver [12].

■

Lema A.3 *Dados $u,v\in X$ tem-se $f^0(u;v)=\max\{\langle\xi,v\rangle;\xi\in\partial f(u)\}$.*

Demonstração. Ver [12].

■

As propriedades a seguir estão relacionadas ao gradiente generalizado.

($\mathbf{G}_1$) Para todo $u\in X$, o conjunto $\partial f(u)\subset X'$ é convexo e compacto na topologia fraca $-*$. Além disso, para $\xi\in\partial f(u)$ temos $\|\xi\|_{X'}\leq K_u$.

($\mathbf{G}_2$) Para cada $f,g\in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$, e $\lambda\in\mathbb{R}$ tem-se que

$$\partial(f+g)(u)\subset\partial f(u)+\partial g(u)$$

e

$$\partial(\lambda f)(u)=\lambda\partial f(u).$$

($\mathbf{G}_3$) O funcional $\lambda_f:X\to\mathbb{R}$ definido por

$$\lambda_f(u)=\min\{\|\xi\|_{X'};\xi\in\partial f(u)\},$$

é semicontínuo inferiormente, isto é,

$$\liminf_{u \to u_0} \lambda_f(u) \geq \lambda_f(u_0).$$

(G$_4$) Se f é continuamente diferenciável a Fréchet numa vizinhança aberta de $u \in X$, temos

$$\partial f(u) = \{f^{'}(u)\}.$$

(G$_5$) Se $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, então para $u \in X$, temos

$$\partial(f+g)(u) = \partial f(u) + \partial g(u).$$

Lema A.4 *Para cada $u \in X$, existe $\xi_0 \in \partial f(X)$ tal que*

$$\|\xi_0\|_{X'} = \min\{\|\xi\|_{X'}; \xi \in \partial f(u)\}.$$

Demonstração. Ver [12].

∎

A seguir, denotemos

$$\underline{f}(t) := \lim_{\epsilon \to 0^+} ess \inf_{|t-\sigma|<\epsilon} f(\sigma) \text{ e } \overline{f}(t) := \lim_{\epsilon \to 0^+} ess \sup_{|t-\sigma|<\epsilon} f(\sigma).$$

Lema A.5 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional localmente Lipschitz, $\overline{f}$ e $\underline{f}$ as funções definidas anteriormente. Então*

$$f^0(u; v) \leq \begin{cases} \overline{f}(u)v, & se \ v > 0, \\ \underline{f}(u)v, & se \ v < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [12].

∎

As definições a seguir podem ser encontradas em [36] e são de fundamental importância neste trabalho.

Definição A.7 *Um ponto* $u \in X$ *é dito ser* **ponto crítico** *do funcional* $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$*, se* $0 \in \partial f(u)$*, isto é,*

$$0 \leq f^0(u; v), \quad \forall v \in X.$$

Definição A.8 *Dizemos que* $c \in \mathbb{R}$ *é* **valor crítico** *de* f *se existe um ponto crítico* $u \in X$ *tal que* $f(u) = c$*.*

Definição A.9 *Uma sequência* $(u_j) \subset X$ *é uma* **sequência Palais-Smale no nível** c*,* $(PS)_c$*, se*

$$f(u_j) \to c \quad e \quad \lambda_f(u_j) \to 0.$$

Definição A.10 *Um funcional* $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *satisfaz a* **condição Palais-Smale no nível** c *se toda sequência* $(PS)_c$ *possui uma subsequência que converge forte em* X*.*

Uma ferramenta importante nesta tese é o Teorema do Passo da Montanha voltado para os funcionais localmente Lipschitz, que recordaremos abaixo.

Teorema A.7 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e* $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *um funcional satisfazendo a condição* $(PS)_c$*, com* $f(0) = 0$*. Suponhamos que:*

(i) Existem constantes $a, b > 0$ *tais que* $f(u) \geq a > 0$ *para todo* $u \in X$ *com* $\|u\| = b$*;*

(ii) Existe $e \in X$ *tal que* $\|e\| > b$ *e* $f(e) < 0$*.*

Então, f *possui um valor crítico* $c \geq a$*, com*

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \;\; e \;\; \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração. Ver [36].

Apêndice

$\mathcal{B}$

Regularidade do funcional J_λ

Neste apêndice, mostraremos que o funcional $J_\lambda : W^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx + \int_\Omega \frac{1}{h(x)}|u|^{h(x)}dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{v(x)}|u|^{v(x)}dx \\ &- \frac{1}{\alpha+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}d\Gamma\right]^{\beta+1}, \end{aligned}$$

associado ao problema (1.1) é de classe $C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

2.1 O funcional J_λ é de classe $C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$

Para isso, é suficiente mostrar que a derivada no sentido de Gateaux deste funcional existe e é contínua.

Para facilitar os cálculos, consideremos os funcionais $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 : W^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$J_1(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx,$$

$$J_2(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|u|^{p(x)}dx,$$

$$J_3(u) = \int_\Omega \frac{1}{h(x)}|u|^{h(x)}dx,\ J_4(u) = \int_\Omega \frac{1}{v(x)}|u|^{v(x)}dx,$$

$$J_5(u) = \frac{1}{\alpha+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)}|u|^{r(x)}dx\right]^{\alpha+1}$$

e

$$J_6(u) = \frac{1}{\beta+1}\left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta+1}.$$

Dessa forma $J_\lambda = J_1 + J_2 + J_3 - \lambda J_4 - J_5 - J_6$.

Afirmação B.1 *O funcional* $J_1 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Considere a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = \frac{1}{p(x)}|\nabla u + st\nabla w|^{p(x)}$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi(x,t) = \xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{|\nabla u + t\nabla w|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \xi t\nabla w|^{p(x)-2}(\nabla u + t\nabla w)\nabla w.$$

Note que, quando $t \to 0$, temos

$$\psi = |\nabla u + \xi t\nabla w|^{p(x)-2}(\nabla u + t\nabla w)\nabla w \to |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla w \text{ q.s. em } \Omega.$$

Observe ainda que

$$|\psi| \leq |\nabla u + \xi t\nabla w|^{p(x)-1}|\nabla w| \leq (|\nabla u| + |\nabla w|)^{p(x)-1}|\nabla w|.$$

Uma vez que

$$|\nabla u|, |\nabla w| \in L^{p(x)}(\Omega),$$

temos

$$(|\nabla u| + |\nabla w|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Portanto, da Desigualdade de Hölder, segue que

$$(|\nabla u| + |\nabla w|)^{p(x)-1}|\nabla w| \in L^1(\Omega),$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+tw)|^{p(x)}-|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla w dx,$$

mostrando que J_1 é Gateaux diferenciável. Agora, mostraremos que a derivada $J_1^{'}$ é contínua no dual de $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Para isso, seja $(u_j)\subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_j\to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, $|\nabla u_j|\to|\nabla u|$ em $L^{p(x)}(\Omega)$. Logo, a menos de subsequência,

$$\nabla u_j(x)\to\nabla u(x) \text{ q.s. em } \Omega \tag{B.1}$$

e

$$|\nabla u_j(x)|\le g(x) \text{ q.s. em } \Omega, \tag{B.2}$$

onde $g\in L^{p(x)}(\Omega)$. Para todo $w\in W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w\|\le 1$ temos

$$\begin{aligned}\left|J_1^{'}(u_n)w-J_1^{'}(u)w\right| &= \left|\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla w dx-\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla w dx\right|\\ &\le \int_\Omega \left||\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right||\nabla w|dx.\end{aligned}$$

Fazendo

$$f_j=\left||\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j-|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right|,\ j\in\mathbb{N}$$

e aplicando a Desigualdade de Hölder com os expoentes $\dfrac{p(x)}{p(x)-1}$ e $p(x)$, obtemos

$$\left|J_1^{'}(u_j)w-J_1^{'}(u)w\right| \le C|f_j|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}|\nabla w|_{p(x)}\le C|f_j|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\|w\|,$$

de onde concluímos que

$$\left\|J_1^{'}(u_j)w-J_1^{'}(u)w\right\| \le C|f_j|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}. \tag{B.3}$$

Segue de (B.1) que

$$f_j(x)\to 0 \text{ q.s. em } \Omega$$

e por (B.2)

$$f_j(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \text{ q.s. em } \Omega.$$

Daí,

$$f_j(x)^{m(x)} \leq 2^{m^+} \left(g(x)^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)} \right) \in L^1(\Omega) \text{ q.s. em } \Omega,$$

onde $m(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left| |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right|^{m(x)} dx = 0.$$

De (B.3), quando $j \to \infty$,

$$\left\| J_1'(u_j) - J_1'(u) \right\| \to 0, \text{ quando } j \to \infty,$$

ou seja, a derivada de Gateaux J_1' é contínua. Portanto, $J_1 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação B.2 *O funcional* $J_2 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. De forma análoga à demonstração da Afirmação B.1 podemos mostrar que o funcional J_2 possui derivada de Gateaux, sendo

$$J_2'(u)w = \int_\Omega |u|^{p(x)-2} uw dx, \text{ para } u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega),$$

e que esta derivada é contínua. Logo, $J_2 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação B.3 *O funcional* $J_3 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Seguindo os mesmos passos da demonstração da Afirmação B.1, mostra-se que o funcional J_3 possui derivada de Gateaux dada por

$$J_3'(u)w = \int_\Omega |u|^{h(x)-2} uw dx, \text{ para } u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega),$$

e que esta derivada é contínua. Portanto, $J_3 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação B.4 *O funcional* $J_4 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Análogo à demonstração da Afirmação B.1, mostra-se que o funcional J_4 possui derivada de Gateaux dada por

$$J_4'(u)w = \int_\Omega |u|^{v(x)-2} uw dx, \text{ para } u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega),$$

e que esta derivada é contínua. Assim, $J_4 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação B.5 *O funcional* $J_5 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Primeiramente, considere o funcional $\tilde{J}_5(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx$. Seguindo os mesmos passos da demonstração da Afirmação B.1 é possível mostrar que este funcional é Gateaux diferenciável com derivada dada por

$$\tilde{J}_5'(u)w = \int_\Omega |u|^{r(x)-2} uw dx, \text{ para } u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega),$$

e que esta derivada é contínua. Observe que $J_5(u) = \dfrac{1}{\alpha+1}\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx\right]^{\alpha+1}$ é a composição da função $h(s) = \dfrac{1}{\alpha+1} s^{\alpha+1}$ com $\tilde{J}_5(u)$. Logo, pela Regra da Cadeia,

$$J_5'(u)w = \left[\int_\Omega \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} dx\right]^{\alpha} \int_\Omega |u|^{r(x)-2} uw dx, \text{ para } u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega).$$

Além disso, como a função $\tilde{J}_5'$ é contínua e h é diferenciável com derivada contínua, temos que J_5' é uma aplicação contínua. Portanto, $J_5 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação B.6 *O funcional* $J_6 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. De forma análoga à demonstração da Afirmação B.5, podemos mostrar que o funcional J_6 possui derivada de Gateaux, sendo

$$J_6'(u)w = \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} d\Gamma\right]^{\beta} \int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)-2} uw d\Gamma, \text{ para } u, w \in W^{1,p(x)}(\Omega),$$

e que esta derivada é contínua. Logo, $J_6 \in C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Portanto, como

$$J_\lambda = J_1 + J_2 + J_3 - \lambda J_4 - J_5 - J_6,$$

pelas afirmações B.1, B.2, B.3, B.4, B.5 e B.6, o funcional J_λ é de classe $C^1(W^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$.

Referências Bibliográficas

[1] R. Aboulaich, D. Meskine, and A. Souissi, *New diffusion models in image processing*, Comput. Math. Appl. 56 (2008), no. 4, 874–882.

[2] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge Stud. Adv. Math. 14 (2007).

[3] S. N. Antontsev and S. I. Shmarev, *A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions*, Nonlinear Anal. 60 (2005), 515–545.

[4] J. Garcia Azorero and I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term*, Trans. Amer. Math. Soc., 323 (1991), 877–895.

[5] P. A. Binding, P. Drabek, Y. X. Huang, *On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations*, Electron. J. Differential Equations 5 (1997) 1–11.

[6] G. Bonanno and A. Chinnì, *Discontinuous elliptic problems involving the $p(x)$-Laplacian*, Math. Nachr., (2011), 1–14.

[7] J. F. Bonder and A. Silva, *Concentration-compactness principle for variable exponent spaces and application*, Eletron. J. Differential Equations, (141) (2010), 1–18.

[8] J. F. Bonder, N. Saintier and A. Silva, *On the Sobolev trace theorem for variable exponent spaces in the critical range*, Ann. Mat. Pura Appl., 6 (2014), 1607–1628.

[9] J.F. Bonder, N. Saintier and A. Silva, *Existence of solutions to a critical trace equation with variable exponent*, Asymptot. Anal., 93 (2015), 161–185.

[10] K. J. Brown, Y. Zhang, *The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign-changing weight function*, J. Differential Equations 193 (2003) 481–499.

[11] A. Castro, *Metodos variacionales y analisis functional no linear*, in: X Coloquio Colombiano de Matematica, 1980.

[12] K. C. Chang, *Variational methods for nondiferentiable functionals and their applications to partial diferential equations*, J. Math. Anal. 80 (1981)102–129.

[13] Yunmei Chen, Stacey Levine, and Murali Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math. 66 (2006), no. 4, 1383–1406.

[14] M. Chipot, P. Quittner, *Handbook of Differential Equations*, Vol. 2, Elsevier, 2005.

[15] M. Chipot, P. Quittner, *Handbook of Differential Equations*, Vol. 3, Elsevier, 2006.

[16] D. C. Clark, *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory*, Indiana Univ. Math. J., 22 (1972) 65–74.

[17] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Jonh Wiley Sons, N. Y, 1983.

[18] F. J. S. A. Corrêa and A. C. R. Costa, *On a $p(x)$-Kirchhoff equation with critical exponent and an additional nonlocal term via truncation argument*, Math. Nachr., Vol. 288, 11-12, (2015), 1226–1240.

[19] F. J. S. A. Corrêa and A. C. R. Costa, *Existence and Multiplicity of Solutions for Nonlocal Neumann Problem with Non-standard Growth*, Differential Integral Equations, Volume 29, Number 3/4 (2016), 377–400.

[20] F. J. S. A. Corrêa and A. C. R. Costa, *Nonlocal Neumann problem with critical exponent from the point of view of the trace*, J. Elliptic Parabol. Equ., Vol 2, (2016), 323–339.

[21] A. C. R. Costa, M. C. Ferreira and L. S. Tavares *On a nonlocal nonhomogeneous Neumann boundary problem with two critical exponents*, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol 64, 2019, 1954–1972.

[22] D. G. Costa, *Tópicos em análise não-linear e aplicações às equações diferenciais*, in: Escola Latino-Americana de Matemática, 1986.

[23] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, SPIN Springer's internal project number, 2010.

[24] P. Drábek, S. I. Pohozaev, *Positive solutions for the p-laplacian: application of the fibrering method*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 127(4), 703–726, 1997.

[25] D. Edmunds and J. Rakosnik, *Sobolev embeddings with variable exponent*, Studia Math. 143 (2000), 267–293.

[26] J. F. Escobar, *Sharp Constant in a Sobolev Trace Inequality*, Indiana University Mathematics Journal. 37 (1988), no. 3.

[27] J. F. Escobar, *The yamabe problem on manifolds with boundary*, J. Diferential Geometry. 35 (1992), no. 21-84.

[28] X. Fan, *Solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients*, J. Math. Anal. Appl., 312 (2005) 464–477.

[29] X. L. Fan, J. S. Shen and D. Zhao, *Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl., 262 (2001), 749–760.

[30] X. L. Fan and Q. H. Zhang, *Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems*, Nonlinear Anal., 52 (2003), 1843–1852.

[31] X. L. Fan and D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$*, J. Math. Anal. Appl., 263 (2001), 424–446.

[32] X. Fan, Y. Zhao and D. Zhao, *Compact embedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\mathbb{R})$*, J. Math. Anal. Appl., 255 (2001), 333–348.

[33] G.M. Figueiredo, R.G. Nascimento, *Existence of positive solutions for a class of p&q elliptic problem with critical exponent and discontinuous nonlinearity*, Monatsh Math (2018).

[34] G. M. Figueiredo and G. G. Santos, *Solutions for a Kirchhoff equation with critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg growth and discontinuous nonlinearity*, Z. Angew. Math. Phys. (2018) 69–75.

[35] Y. Fu, *The principle of concentration compactness in $L^{p(x)}$ spaces and its application*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 1876–1892.

[36] M. R. Grossinho, S. A. Tersian, *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Diferential Equations*, Springer-Science+Business Media, B.Y., (2001).

[37] E, Guo, P. Zhao, *Existence and multiplicity of solutions for nonlocal p(x)-Laplacian equations with nonlinear Neumann boundary conditions*. Bound Value Probl. (2012), 79:15.

[38] P. Harjulehto, P. Hästö, V. Latvala, and O. Toivanen, *Critical variable exponent functionals in image restoration*, Appl. Math. Lett. 26 (2013), no. 1, 56–60.

[39] K. Kefi and V. D. Rădulescu, *On a $p(x)$-biharmonic problem with singular weights*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, (2017).

[40] O. Kovacik, J. Rakosnik, *On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$*, Czechoslovak Math. J. 41 (1991) 592–618.

[41] M. A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, MacMillan, New York, 1964.

[42] S. Liang and J. Zhang, *Infinitely many small solutions for the $p(x)$-Laplacian operator with nonlinear boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. v.192, n.1, (2013), 1–16.

[43] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana, 1 (1985), 145–201.

[44] M. Mihailescu and V. Radulescu, *A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids*, Proceedings of the Royal Society A, 462 (2006), 2625–2641.

[45] Z. Nehari, *On a class of nonlinear second-order differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101–123.

[46] Z. Nehari, *Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations*, Acta Math. 105 (1961), 141–175.

[47] J. Nikitczuk, B. Weinberg, P. Canavan and C. Mavroidis *Active knee rehabilitation orthotic device with variable damping characteristics implemented via an electrorheological fluid*, Mechatronics, IEEE/ASME Transactions 15(6) (2009), 952–960.

[48] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Reg. Conf. series in math. 65 (1984).

[49] M. Rů̌žička, *Flow of shear dependent electrorheological fluids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), no. 5, 393–398.

[50] M. Rů̌žička, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[51] X. Shang and Z. Wang, *Existence of solutions for discontinuous $p(x)$-Laplacian problems with critical exponents*, Eletron. J. Differential Equations, (2012), n.25, 1–12.

[52] A. J. Simmonds *Electro-rheological valves in a hydraulic circuit*, IEE Proseedings-D 138(4) (1991), 400–404.

[53] R. Stanway, J. L. Sprostonz and A. K. El-Wahed *Applications of electro-rheological fluids in vibration control: a survey*, Smart Mater. Struct. 5(1996), 464–482.

[54] W. Wen, X. Huang, S. Yang, K. Lu and P. Sheng *The giant electrorheological effect in suspensions of nanoparticles*, Nat. Mater. 2(2003), 727–730.

[55] M. Willem, *Minimax Theorems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birth auser, 1996.

[56] X. Zhang and X. Liu, *The local boundedness and Harnack inequality of p(x)-Laplace equation*, J. Math. Anal. Appl., 332 (2007), 209–218.

[57] V. V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 29 (1987), 33–66.