



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA
EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

**ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DO TIPO
TIMOSHENKO-EHRENFEST COM BASE
NAS CONSEQUÊNCIAS DO SEGUNDO
ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS**

Luiz Gutemberg Rosário Miranda

Belém-PA

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA
EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

**ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DO TIPO
TIMOSHENKO-EHRENFEST COM BASE
NAS CONSEQUÊNCIAS DO SEGUNDO
ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla Universidade Federal do Pará e Universidade Federal do Amazonas (PDM-UFPA/UFAM) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Luiz Gutemberg Rosário Miranda

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA

2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

M672e Miranda, Luiz Gutemberg Rosário.
Estabilização de sistemas do tipo Timoshenko-Ehrenfest com
base nas consequências do segundo espectro de frequências / Luiz
Gutemberg Rosário Miranda. — 2021.
ix,107 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Timoshenko-Ehrenfest. 2. versão truncada. 3. segundo
espectro de frequências. 4. estabilização exponencial. 5.
velocidade iguais. I. Título.

CDD 519.8

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA
EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

Estabilização de sistemas do tipo Timoshenko-Ehrenfest com base
nas consequências do segundo espectro de frequências

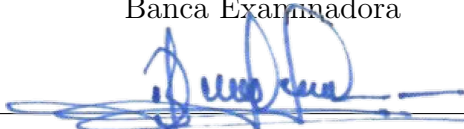
Luiz Gutemberg Rosário Miranda

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla
Universidade Federal do Pará e Universidade Federal do Amazonas (PDM-UFPA/UFAM)
como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

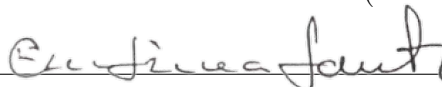
Data da defesa: 31/05/2021

Resultado: Aprovado

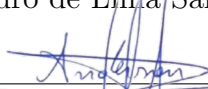
Banca Examinadora



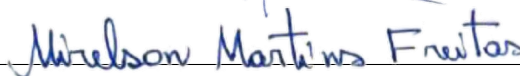
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (PDM-UFPA) (Orientador)



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (PDM-UFPA)



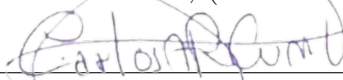
Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (PDM-UFPA/Campus de Salinópolis)



Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas (PDM-UFPA/Campus de Salinópolis)



Prof. Dr. Manoel Jeremias dos Santos (PDM-UFPA/Campus de Abaetetuba)



Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha, (UFSJ) (Membro externo)

Resumo

ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DO TIPO TIMOSHENKO-EHRENFEST COM BASE NAS CONSEQUÊNCIAS DO SEGUNDO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS

Luiz Gutemberg Rosário Miranda

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla Universidade Federal do Pará e Universidade Federal do Amazonas (PDM-UFPA/UFAM) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Nesta tese, consideramos os sistemas que modelam as vibrações em estruturas, conhecidos como sistemas do tipo Timoshenko-Ehrenfest. Precisamente, provamos resultados de estabilidade para o chamado sistema de Timoshenko-Ehrenfest Truncado (ou versão Simplificada das equações de Timoshenko-Ehrenfest segundo contribuições de Elishakoff et al. *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, Solid Mechanics and Its Applications. Springer, Berlim, 249-254. 2010; ASME - The American Society of Mechanical Engineers - Applied Mechanics Reviews. 67(6), 1-11. 2015; International Journal of Solids and Structures. 109, 143-151. 2017*), este sistema está livre do denominado fenômeno do “segundo espectro” que aparece na análise de dispersão do sistema Clássico de Timoshenko-Ehrenfest desenvolvido no ano de 1921. Neste contexto, afirmamos que o segundo espectro de frequências tem consequências importantes no cenário de estabilização exponencial de sistemas de equações acopladas. Para verificarmos isto, colocamos termos de amortecimentos na equação do deslocamento vertical do sistema Timoshenko-Ehrenfest Truncado e mostramos que é possível obtermos a estabilização exponencial da energia definida para o sistema, independentemente de

qualquer relação entre os seus coeficientes, ao contrário do que acontece com o sistema de Timoshenko-Ehrenfest Clássico, onde para todos os casos estudados em que é possível obter estabilidade exponencial, sempre necessitamos de uma relação entre coeficientes, mais precisamente, as velocidades de ondas iguais.

Palavras-chave: Timoshenko-Ehrenfest · versão truncada · segundo espectro de frequências · estabilização exponencial · velocidade iguais.

Belém-Pará

2021

*Abstract*STABILIZATION OF TIMOSHENKO-EHRENFEST TYPE
SYSTEMS BASED ON THE CONSEQUENCES OF
THE FREQUENCY SECOND SPECTRUM

Luiz Gutemberg Rosário Miranda

Advisor: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Abstract of PhD's Thesis submitted to the Program PhD's in Mathematics in association wide Federal University of Pará and Federal University of Amazonas (PDM-UFPA/UFAM) as part of the necessary requirements to obtaining the title of Doctor of Mathematics .

In the thesis, we considers systems that model vibrations in structures, known as Timoshenko-Ehrenfest type systems. Precisely, we proved stability results for the called Truncated Timoshenko-Ehrenfest system (or Simplified version of Timoshenko-Ehrenfest equations according contributions of Elishakoff et al. *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, Solid Mechanics and Its Applications. Springer, Berlím, 249-254. 2010; ASME - The American Society of Mechanical Engineers - Applied Mechanics Reviews. 67(6), 1-11. 2015; International Journal of Solids and Structures. 109, 143-151. 2017*). this system it is free from the so-called phenomenon of the “second spectrum” that appears in the dispersion analysis of the Classic Timoshenko-Ehrenfest system developed in the year 1921. In this context, we claim that the second frequencies spectrum has important consequences in the exponential stabilization scenario of coupled equation systems. To verify this, we put damping terms in the vertical displacement equation of the Truncated Timoshenko-Ehrenfest system and show that it is possible we obtain the exponential stabilization of the energy defined for the system, independently any relation among its coefficients, unlike what happens with the Classic Timoshenko-Ehrenfest system, where for all cases studied in which it is possible

to obtain exponential stability, we always need a relationship between coefficients, more precisely, equal wave velocities.

Key-Words: Timoshenko-Ehrenfest · Truncated version · second frequencies spectrum · exponential stabilization · equal speed.

Belém-Pará

2021

“Dedico as minhas filhas Anna Lara e Ana Luiza por serem a minha inspiração para correr atrás dos meus objetivos. Sou muito grato e muito feliz pelas vidas de vocês duas, minhas filhas queridas e muito amadas. ”

“O temor do Senhor é o princípio da sabedoria.”

(Provérbios 9:10)

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus, criador dos céus, da terra e tudo que existe, pois sei que Ele tem o controle de tudo e me deu esta oportunidade de ser um doutor em matemática, algo que sempre sonhei ser e Ele me deu força para ter esta conquista. A todos os meus familiares, em especial a minha mãe Ana Maria do Rosário Miranda, meu pai Luiz Antônio Mescouto Miranda, a minha esposa Debora Mescouto Miranda por sempre me apoiarem e entender os estresses do dia-a-dia. A todos os meus Professores da Famat do Campus de Bragança que me ensinaram os pilares da Matemática, em especial ao meu amigo Prof. Dr. Elizardo Fabrico Lucena que sempre me apoiou e me encorajou a fazer o mestrado e o doutorado. Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior que nunca se recusou a esclarecer minhas dúvidas, tendo sempre uma enorme paciência em repassar seu conhecimento e orientação excepcional e por ter me ajudado a realizar um dos meus maiores sonhos matemáticos, a saber, publicar artigos científicos. E finalmente, porém não menos importante, aos meus amigos do GPAMN, os quais sempre tiraram as minhas dúvidas.

À todos, meu muitíssimo obrigado.

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 9 |
| 1.1 | Modelos do tipo Timoshenko-Ehrenfest Clássico | 10 |
| 1.1.1 | Cenário de Dispersão | 10 |
| 1.1.2 | Cenário de Estabilização | 13 |
| 1.2 | Modelos do tipo Timoshenko-Ehrenfest Truncado | 15 |
| 1.2.1 | Cenário de Dispersão | 16 |
| 1.2.2 | Cenário de Estabilização | 16 |
| 1.3 | Objetivos da Tese | 17 |
| 1.4 | Resultados preliminares | 18 |
| 1.4.1 | Lista de notações | 18 |
| 1.4.2 | Método da Energia | 19 |
| 2 | Timoshenko-Ehrenfest Truncado com amortecimento do tipo atrito | 21 |
| 2.1 | Existência e Unicidade de Solução | 21 |
| 2.2 | Estabilidade exponencial | 41 |
| 3 | Timoshenko-Ehrenfest Truncado com Viscosidade | 49 |
| 3.1 | Existência e Unicidade de Solução | 49 |
| 3.2 | Estabilidade exponencial | 66 |
| 4 | Timoshenko-Ehrenfest Truncado com Delay | 74 |
| 4.1 | Existência e Unicidade de Solução | 75 |
| 4.2 | Estabilidade Exponencial | 87 |

| | |
|-------------------------|----|
| 5 Discussão e conclusão | 97 |
|-------------------------|----|

| | |
|----------------------------|----|
| Referências Bibliográficas | 99 |
|----------------------------|----|

Capítulo 1

Introdução

Na literatura, as vibrações em estruturas (vigas) são estudadas a muitos anos, no entanto, o interesse intensificou-se a partir do ano de 1921 quando o engenheiro ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko e o físico austríaco Paul Ehrenfest introduziram hipóteses ao fenômeno que ninguém havia usado, a saber, a inércia rotativa e a deformação por cisalhamento, dessa forma conseguiram um modelo matemático mais realístico. O nome de Paul Ehrenfest relacionado a este modelo se justifica, pelo fato que, recentemente descobriu-se que Ehrenfest foi co-autor da Teoria que até 2019 era dedicada apenas a Timoshenko, ver [28], por este motivo, neste trabalho chamaremos de modelo de Timoshenko-Ehrenfest.

O modelo de vibrações de estruturas proposto por Stephen Timoshenko e Paul Ehrenfest a quase 100 anos atrás no artigo [82] tornou-se clássico em engenharia e matemática e tem sido objeto de estudo de mais de 2000 artigos¹. Alias, o motivo de tanto interesse se dá pelos paradoxos físicos que estão presente no modelo quanto a análise de dispersão e também a estabilidade exponencial.

Mais recentemente, em (2010), o engenheiro mecânico israelense Isaac Elishakoff propôs um modelo para vibrações de estruturas usando as hipóteses de inércia rotativa e a deformação por cisalhamento que difere do modelo de Timoshenko-Ehrenfest de 1921, esse está no centro de diversas pesquisas, pois até o presente momento não apresenta nenhum paradoxo físico, a este modelo chamaremos de Timoshenko-Ehrenfest Truncado.

Agora, apresentaremos alguns pontos da Teoria Timoshenko-Ehrenfest, tanto na versão

¹Dado extraído do Google

Clássico quanto na versão Truncada.

1.1 Modelos do tipo Timoshenko-Ehrenfest Clássico

Primeiro de tudo, as equações governantes da teoria clássica do sistema de Timoshenko-Ehrenfest [82] são dadas por

$$\rho A \varphi_{tt} - S_x = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho I \psi_{tt} - M_x + S = 0, \quad (1.2)$$

onde S é a força de cisalhamento, M é o momento fletor, φ é o deslocamento transversal, ψ é o ângulo rotacional, ρ é a densidade do material, A é a área da secção transversal e I é o momento de inércia da área da secção transversal. Pela teoria elementar de acordo com as notações padrões de Timoshenko [82] tem-se

$$M = EI\psi_x, \quad S = k'GA(\varphi_x + \psi), \quad (1.3)$$

onde E é o módulo do Young's, G é o módulo de cisalhamento e k' é o fator de correção de cisalhamento. Então, substituindo (1.3) em (1.1) e (1.2) obtemos as agora conhecidas, equações clássicas de Timoshenko-Ehrenfest (ou um sistema hiperbólico puramente conservado)

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.4)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.5)$$

onde estamos denotando $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $b = EI$ e $\kappa = k'GA$.

1.1.1 Cenário de Dispersão

A parti do modelo desenvolvido por Timoshenko e Ehrenfest chegamos a resultados para a teoria de vigas muito mais precisos do que os modelos antes desenvolvidos, tais como os modelos de Euler e Bousquet (1744) e Rayleigh (1877), no entanto, surgiram novas discussões matemáticas e físicas, entre elas, está a descoberta de dois feixes de ondas, onde a velocidade de um deles se comporta de maneira não física, mais precisamente, esta

velocidade converge para o infinito nas baixas frequências de ondas, a essa velocidade de comportamento físico inesperado deu-se o nome de *Segundo espectro* de frequências. Esta descoberta se dá a parti da análise de dispersão, onde são usadas as soluções harmônicas que estão associadas a frequência w e ao numero de ondas γ , a mera substituição dessas soluções no sistema resulta em uma equação polinomial em w . Além disso, temos que a velocidade de propagação de feixes de ondas é dado por $C = w\gamma$. As duas velocidades do modelo clássico de Timoshenko-Ehrenfest (1.4) – (1.5) são dadas por

$$c_i^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) + \frac{\rho_1 \kappa}{\gamma^2} + (-1)^{i+1} \sqrt{\left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) + \frac{\rho_1 \kappa}{\gamma^2} \right]^2 - 4 \frac{b\kappa}{\rho_1 \rho_2}} \right], \quad (1.6)$$

onde γ representa o número de ondas. Para facilitar a análise temos a seguinte aproximação

$$c_1^2 \approx \frac{b\kappa\gamma^2}{\kappa\rho_1 + (\kappa\rho_2 + \rho_1 b)\gamma^2}, \quad c_2^2 \approx \frac{1}{c_1^2} \frac{b\kappa}{\rho_1\rho_2} - c_1^2. \quad (1.7)$$

Portanto, existem duas assíntotas quando γ vai para infinito. Por outro lado, observe que c_1^2 tende para zero quando γ tende para zero, conseqüentemente, c_2^2 vai para o infinito em baixa frequência.

O gráfico representado na Figura 1.1 mostra que as velocidades dos espectros dadas em (1.7) são completamente opostas (ver Figura 1.1).

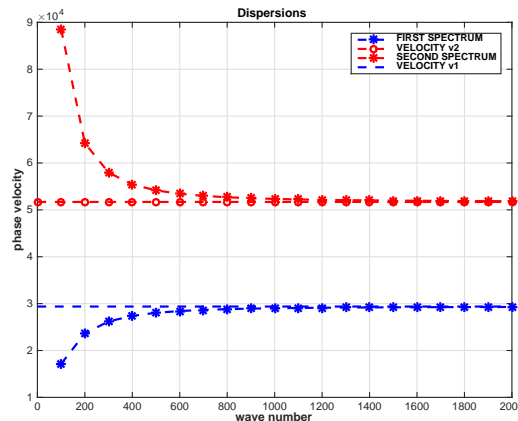


Figura 1.1: Velocidade por número de ondas.

Para esta simulação, usamos o comprimento $L = \pi$, espessura $\epsilon = 0.015$ e largura 0.2. Além disso, $E = 21 \times 10^{12}$, $\rho = 7860$, $\nu = 0.29$ (Relação de Poisson), $k' = 5/6$, $I = 5.6241 \times 10^{-8}$ e $A = 3 \times 10^{-3}$. O domínio da dispersão foi obtido no intervalo $[-\pi/h, \pi/h]$ para $h = 1.5708 \times 10^{-3}$. Em geral, tomamos $G = E/(2 + 2\nu)$.

Como o *Segundo espectro* não tem uma caracterização física para a teoria de vigas, uma parte dos pesquisadores decidiram ignorar a sua existência analisando modelos do tipo Timoshenko-Ehrenfest sem considerar o segundo espectro. No entanto, a outra parte conduziu estudos sobre os espectros de frequências de vibração e tópicos relacionados. Nessa direção, veja as referências devido a Cazzani *et al.* bem como as de Meleshko *et al.* [16, 17, 18, 48, 49].

Dentre as perguntas formadas sobre o cenário de dispersão, uma nos parece muito relevante: Existe uma maneira de controlar o comportamento não físico do *Segundo espectro* de frequências do sistema de Timoshenko-Ehrenfest Clássico?. Nesse contexto, os trabalhos científicos são raros, algumas respostas somente começaram a aparecer com o trabalho de Manevich, A. & Kolakowski, Z. (2011) que mostraram que, introduzindo no sistema clássico de Timoshenko-Ehrenfest um efeito dissipativo visco-elástico do material o *segundo espectro* é limitado na baixa frequência, o sistema estudados por eles é dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} = 0, \quad (1.8)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \kappa(\varphi_x + \psi)_t - b\psi_{txx} = 0, \quad (1.9)$$

Mais recentemente, Almeida Júnior e Ramos [3] deram contribuições importantíssimas como resposta a essa pergunta, eles mostraram que o sistema amortecido dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.10)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu\psi_t = 0, \quad (1.11)$$

sujeito à igualdade $\kappa/\rho_1 = b/\rho_2$ elimina as consequências do *segundo espectro* para um número baixo de ondas.

E importante ressaltar que, esta é uma área muito carente de resultados, não pela falta de interesse dos pesquisadores, mas sim, pela complexidades nos cálculos.

1.1.2 Cenário de Estabilização

Em relação ao cenário de estabilização exponencial, do ponto de vista da modelagem dos sistemas do tipo Timoshenko-Ehrenfest, parece justificado como procedimento universal colocar termos de amortecimento nas equações da evolução.

Quando analisa-se o comportamento assintótico do sistema de Timoshenko-Ehrenfest, mediante a inserção de mecanismos dissipativos, o trabalho de Soufyane [76] foi o primeiro a dá uma contribuição importante quando apenas um mecanismo dissipativo desempenha o papel de lei de dissipação de energia. Para ser mais preciso, como as equações clássicas de Timoshenko-Ehrenfest constituem um sistema 2×2 de equações hiperbólicas, dois mecanismos dissipativos é o caminho natural para obter o decaimento exponencial. Soufyane mostrou que é possível estabilizar exponencialmente as equações de Timoshenko-Ehrenfest pela inserção de um único amortecimento atuando na rotação angular, isto é, ele analisou o seguinte sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.12)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu\psi_t = 0, \quad (1.13)$$

onde $\mu > 0$. No entanto, o preço a pagar é muito alto fisicamente, pois temos que assumir a igualdade entre as velocidades de propagação de ondas, ou seja

$$\kappa/\rho_1 = b/\rho_2. \quad (1.14)$$

E, ao analisarmos esta igualdade, temos que

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \Rightarrow \frac{k'GA}{\rho A} = \frac{EI}{\rho I} \Rightarrow G = \frac{E}{k'}$$

em que $0 < k' < \frac{1}{2}$. Fisicamente, a relação entre os módulos G e E é dada por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

em que ν é a razão de Poisson tal que $\nu \in (0, \frac{1}{2})$. Assim, temos que a relação das velocidades é um fenômeno não físico.

Um resultado similar foi descoberto no trabalho de Rivera (2005) mostrando que a solução do sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \quad (1.15)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.16)$$

tem decaimento exponencial mediante a relação entre as velocidades. Para este propósito usou-se o Método de Semigrupo.

Outro resultado muito relevante ocorre em um cenário de amortecimento viscoelástico fornecido pelo sistema de Timoshenko-Ehrenfest totalmente dissipativo dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \gamma_1(\varphi_x + \psi)_{tx} = 0, \quad (1.17)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \gamma_1(\varphi_x + \psi)_t - \gamma_2 \psi_{txx} = 0, \quad (1.18)$$

onde γ_i , $i = 1, 2$ são constantes não negativas. Malacarne e Muñoz Rivera [46] mostraram que o semigrupo associado ao sistema (1.17) – (1.18) é analítico quando $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$ e portanto exponencialmente estável. No entanto, um resultado interessante do ponto de vista matemático ocorre quando um dos coeficientes γ_i , $i = 1, 2$ é zero. Nesse caso, os autores provaram que o semigrupo associado não é exponencialmente estável, mas decai polinomialmente para zero com a taxa ideal (consulte Teorema 3.5 (ii)). Portanto o sistema não é mais exponencialmente estável.

Outro passo importante para o cenário de estabilização do sistemas de Timoshenko-Ehrenfest está relacionado com termos de delay adicionados ao sistema. A primeira contribuição na literatura é atribuída a Said-Houari & Lasckri (2010) [67]. Eles consideraram o caso do sistema de Timoshenko amortecido com um atraso constante que aparece na segunda equação. Mais precisamente, os autores provaram que o sistema amortecido

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.19)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu_1 \varphi_t + \mu_2 \psi_t(x, t - \tau) = 0, \quad (1.20)$$

tem um resultado de decaimento exponencial sob a suposição de que $\mu_1 > \mu_2$ para o caso de velocidades de propagação de onda iguais. Na sequência o trabalho de Kirane *et al.* (2011) considera o termo de retardo atuando na rotação do ângulo com o tempo variando. Mais precisamente, eles estudaram o sistema dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.21)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu_1 \varphi_t + \mu_2 \psi_t(x, t - \tau(t)) = 0, \quad (1.22)$$

onde $\tau(t) > 0$ representa o retardo variável no tempo. Nesse caso, sob hipóteses adequadas sobre o retardo e se a igualdade (1.14) for verdadeira, então, um resultado de estabilidade exponencial é alcançado usando o método da energia e um funcional Lyapunov apropriado.

Nos dois casos acima, em relação às equações clássicas de Timoshenko-Ehrenfest, o efeito de amortecimento ocorre apenas em uma das duas equações juntamente com termo de atraso que são suficientes para induzir a deterioração exponencial em todo o sistema. Então, além da suposição sobre os coeficientes μ_1 e μ_2 , a hipótese das velocidades de propagação de ondas iguais desempenha um papel importante no cenário dos resultados de decaimento exponencial.

Independentemente desta condição não física prevista pelas velocidades, vários pesquisadores dedicaram esforços em estudos sobre decaimento exponencial e polinomial para sistemas dissipativos de Timoshenko (ver [4, 5, 6, 10, 12, 13, 23, 30, 51, 53, 54, 55, 70, 76, 77]).

1.2 Modelos do tipo Timoshenko-Ehrenfest Truncado

O modelo de Elishakoff [24] desenvolvido em 2010 é uma nova versão para o sistema de Timoshenko-Ehrenfest, de forma simplificada, este modelo se diferencia do modelo Clássico pela substituição do termo $\rho I \psi_{tt}$ na equação (1.2) no lugar do termo $\rho I \varphi_{tt}$, de onde obtemos

$$-\rho_2 \varphi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.23)$$

onde junto com (1.4) nos dá

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.24)$$

$$-\rho_2 \varphi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.25)$$

Daí a justificativa para chamarmos este modelo de Bresse-Timoshenko Truncado.

1.2.1 Cenário de Dispersão

Ao analisarmos o modelo de Timoshenko-Ehrenfest Truncado quanto ao cenário de dispersão, diferentemente do modelo de Timoshenko-Ehrenfest Clássico, obtemos somente uma velocidade para os feixes de ondas, dada por

$$c^2 = \frac{b\kappa\gamma^2}{\rho_1\kappa + \left(\kappa\rho_2 + b\rho_1\right)\gamma^2}. \quad (1.26)$$

Notamos que, c^2 converge para

$$\frac{b\kappa}{\left(\kappa\rho_2 + b\rho_1\right)}, \quad (1.27)$$

quando γ tende ao infinito e c^2 converge para zero quando γ tende para zero. Dessa forma, o modelo desenvolvido por Elishakoff não possui paradoxo físico quanto à análise dispersão.

1.2.2 Cenário de Estabilização

Sobre este contexto, Almeida Júnior e Ramos [3] mostraram um importante resultado de estabilidade ao introduzir o amortecimento $\mu\psi_t$, $\mu > 0$, na equação de rotação angular do sistema Timoshenko-Ehrenfest Truncado. Os autores mostraram que a energia total de sistema

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.28)$$

$$-\rho_2\varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu\psi_t = 0, \quad (1.29)$$

estabilizar-se exponencialmente sem qualquer relação entre os parâmetros de velocidade. Pela primeira vez na literatura, esta relação não é necessária para o decaimento exponencial de um sistema do tipo Timoshenko-Ehrenfest. Aliás, um resultado análogo a este jamais teria acontecido para sistemas acoplados.

Daí nos perguntamos, ao introduzimos outros mecanismos dissipativos nos sistemas do tipo Timoshenko-Ehrenfest Truncado conseguiremos resultados semelhantes ao de Almeida Júnior e Ramos [3] no que refere a estabilização exponencial? A resposta para esta pergunta é positiva e ela é detalhadamente exposta neste trabalho.

1.3 Objetivos da Tese

Motivados por esses contextos já mencionados, o objetivo principal deste trabalho é trazer a seguinte conjectura: Como o sistema de Timoshenko-Ehrenfest Truncado não tem um espectro não físico, então a estabilidade exponencial mediante a introdução de mecanismos dissipativos fracos não necessita de uma relação entre os coeficientes do sistema conservativo.

Para tentar dá uma resposta positiva a esta conjectura, nos propomos neste trabalho a fazer análise assintótica para alguns sistemas de Timoshenko-Ehrenfest Truncado. No segundo capítulo, nosso objetivo é mostrar a boa colocação do sistema de Timoshenko-Ehrenfest Truncado com efeito dissipativo do tipo atrito, ou seja

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0 \quad (1.30)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad (1.31)$$

com condições de fronteira adequadas, para este fim, usaremos o método de Faedo-Galerkin. E, mostrar também que a estabilidade exponencial para este sistema não depende da relação entre coeficientes.

No terceiro capítulo, nosso objetivo é mostrar a boa colocação também usando o método de Faedo-Galerkin. E, também analisar a estabilidade do sistema de Timoshenko-Ehrenfest Truncado com efeito dissipativo do tipo viscosidade, dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_{txx} = 0 \quad (1.32)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (1.33)$$

Verificar que esta estabilidade exponencial não depende da relação entre coeficientes, neste caso específico, a diferença de resultado comparado com o modelo Clássico aumenta, pois para o sistema de Timoshenko-Ehrenfest Clássico não se tem estabilidade exponencial, qualquer que seja os coeficientes.

Finalmente, no quarto capítulo mostraremos a boa colocação usando o Método de Semigrupo para o sistema de Timoshenko-Ehrenfest Truncado com efeito dissipativo do

tipo atrito e termo de delay, dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \mu_2 \varphi_t(x, t - \tau) = 0 \quad (1.34)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.35)$$

com condições de fronteira adequadas, onde o objetivo é mostrar que a estabilidade exponencial não depende da relação entre as velocidades.

1.4 Resultados preliminares

Nesta seção fixaremos algumas notações que serão usadas no texto e aproveitamos esse espaço para citar e demonstrar um dos principais métodos para determinar a estabilidade exponencial de um sistema.

1.4.1 Lista de notações

$$L^2(0, L) = \left\{ f \mid f : (0, L) \rightarrow \mathbf{R} \text{ é mensurável em } (0, L) \text{ e } \int_0^L |f(x)|^2 dx < \infty \right\};$$

$$(f, g) = \int_0^L f(x)g(x)dx \text{ é um produto interno em } L^2(0, L);$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^L |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ é a norma induzida pelo produto interno } (f, f) \text{ em } L^2(0, L);$$

$$L_*^2(0, L) = \left\{ f \in L^2(0, L); \int_0^L f(x)dx = 0 \right\};$$

$$H^m(0, L) = \left\{ f; \frac{d^n}{dx^n} f \in L^2(0, L) \forall n \leq m \right\};;$$

$$H_0^1(0, L) = \{f \in H^1(0, L); f(0) = f(L) = 0\};$$

$$((f, g)) = \int_0^L f_x(x)g_x(x)dx \text{ é um produto interno em } H_0^1(0, L);$$

$$H^{-1}(0, L) \text{ é o dual de } H_0^1(0, L)$$

$$H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L);$$

$$\mathcal{V}_1(0, L) = \{f \in H_0^1(0, L); f_{xx}(0) = f_{xx}(L) = 0\},$$

$$C^k\left([0, \infty[; X\right) = \{\text{funções } k \text{ vezes continuamente diferenciáveis em } [0, \infty[\text{ com valores em } X\}.$$

1.4.2 Método da Energia

Os métodos mais utilizados para mostrar a estabilização exponencial são: o Método da Energia e o Método de Semigrupo. No entanto, estes métodos são equivalentes.

Neste trabalho utilizaremos o Método da Energia, onde mostra-se a seguinte desigualdade para energia $E(t)$ definida do sistema

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.36)$$

com M e w duas constantes positivas. Para chegarmos a esta desigualdade construímos um funcional $\mathcal{L}(t)$ conhecido como funcional de Lyapunov, este deve apresentar as seguintes propriedades:

- i) $\mathcal{L}(t)$ é equivalente à energia $E(t)$, isto é, existem constantes positivas c_1 e c_2 , tais que

$$c_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2E(t), \quad \forall t \geq 0; \quad (1.37)$$

- ii) existe uma constante positiva β , tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.38)$$

Teorema 1.1 (Método da Energia) *Sejam $E(t)$ e $\mathcal{L}(t)$ dois funcionais definidos em R_+ , onde $\mathcal{L}(t) \neq 0$. Se são satisfeitas as seguintes condições (i) e (ii). Então, existem duas constantes positivas M e ω que não dependem de t , tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}. \quad (1.39)$$

Demonstração: A demonstração é muito simples, combinando as condições (i) e (ii) chegamos à

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{\beta}{c_2}\mathcal{L}(t), \quad (1.40)$$

integrando a desigualdade acima sobre $(0, t)$ usando o método das variáveis separáveis chegamos a

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\frac{\beta}{c_2}t}, \quad \forall t > 0. \quad (1.41)$$

Usando novamente a condição (i) concluímos a prova do teorema 1.1. Mais precisamente, temos

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad (1.42)$$

onde $\omega = \frac{\beta}{c_2}$ e $M = \frac{c_2}{c_1}$.

■

Capítulo 2

Timoshenko-Ehrenfest Truncado com amortecimento do tipo atrito

Neste capítulo, analisaremos o modelo de Timoshenko-Ehrenfest Truncado versão de Elishakoff com amortecimento do tipo atrito, dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (2.1)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (2.2)$$

onde todos os coeficientes são positivos e onde $\mu \varphi_t$ representa um amortecimento por atrito. Além disso, consideramos as condições iniciais dadas por

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \psi(x, 0) = \psi_0(x), x \in]0, L[, \quad (2.3)$$

e, condições de contorno Neumann-Dirichlet dada por

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \text{ em }]0, +\infty[. \quad (2.4)$$

Nosso objetivo é estabelecer existência, unicidade e fazer uma análise assintótica.

2.1 Existência e Unicidade de Solução

Nesta seção, estudamos a existência e a unicidade da solução para o sistema (2.1) - (2.3) com condições de contorno Neumann-Dirichlet dada em (2.4). Para este propósito, usaremos o método de Galerkin.

Inicialmente, enunciaremos as definições de solução forte de solução fraca.

Definição 2.1 Dizemos que uma solução forte do sistema (2.1) – (2.3) com condições de contorno (2.4) é uma terna de funções $(\varphi, \varphi_t, \psi)$ tais que

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \mu \varphi_t &= 0, \quad q.s \text{ em }]0, L[\times]0, T[\\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0, \quad q.s \text{ em }]0, L[\times]0, T[\end{aligned}$$

e

$$(\varphi(0), \varphi_t(0), \psi(0)) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0)$$

Definição 2.2 Dizemos que uma solução fraca do sistema (2.1) – (2.3) com condições de contorno (2.4) é uma terna de funções $(\varphi, \varphi_t, \psi)$ tais que

$$\begin{aligned}\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t &= 0, \quad q.s. \text{ em }]0, L[\times]0, T[\\ \rho_2(\varphi_{tt}, w_x) + b(\psi_x, w_x) + \kappa(\varphi_x + \psi, w) &= 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \end{aligned}$$

no sentido $\mathcal{D}'(0, T)$. E, $(\varphi(0), \varphi_t(0), \psi(0)) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0)$

Enunciaremos agora, o resultado que nos garante a existência da solução forte para o sistema (2.1) – (2.4).

Teorema 2.1 Se

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L),$$

então o sistema (2.1) – (2.3) com condições de contorno (2.4) está bem colocado para a solução forte, além disso, temos que

$$\begin{aligned}\varphi &\in L^\infty(]0, T[; H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \\ \varphi_t &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)). \end{aligned}$$

Demonstração: Para este propósito, usaremos o método de Faedo-Galerkin.

Sistema aproximado

Podemos considerar em $H_*^1(0, L)$ e em $H_0^1(0, L)$ as bases $\{w_j(x)\}_j$ e $\{\tilde{w}_j(x)\}_j$, respectivamente, onde $w_j(x) = \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$ e $\tilde{w}_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$. Notamos que

$$w_{j,x}(x) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)\tilde{w}_j(x), \quad (2.5)$$

$$\Delta w_j(x) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 w_j(x), \quad (2.6)$$

$$\tilde{w}_{j,x}(x) = \left(\frac{j\pi}{L}\right)w_j(x), \quad (2.7)$$

$$\Delta \tilde{w}_j(x) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \tilde{w}_j(x), \quad (2.8)$$

e que $\{w_j(x)\}_j$ e $\{\tilde{w}_j(x)\}_j$ são duas bases ortogonais em $L^2(0, L)$. Estas são bases Hilbertianas.

Definimos $W_m = [w_1(x), w_2(x), \dots, w_m(x)]$ e $\widetilde{W}_m = [\tilde{w}_1(x), \tilde{w}_2(x), \dots, \tilde{w}_m(x)]$ dois subespaços m -dimensional, formado pelos m -primeiros elementos da base $\{w_j(x)\}_j$ e pelos m -primeiros elementos da base $\{\tilde{w}_j(x)\}_j$, respectivamente. Desta forma, o problema aproximado consiste em encontrar funções sob a forma

$$(\varphi^m, \psi^m) = \left(\sum_{j=1}^m P_{mj}(t)w_j(x), \sum_{j=1}^m Q_{mj}(t)\tilde{w}_j(x) \right) \in W_m \times \widetilde{W}_m,$$

sendo os coeficientes $P_{mj}(t)$ e $Q_{mj}(t)$ funções determinadas de modo a satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias, dado por

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m, w) - \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, w) + \mu(\varphi_t^m, w) = 0, \quad \forall w \in W_m \quad (2.9)$$

$$-\rho_2(\varphi_{ttx}^m, \tilde{w}) - b(\psi_{xx}^m, \tilde{w}) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \tilde{w}) = 0, \quad \forall \tilde{w} \in \widetilde{W}_m \quad (2.10)$$

$$\varphi^m(x, 0) = \varphi_0^m(x), \quad \varphi_t^m(x, 0) = \varphi_1^m(x), \quad \psi^m(x, 0) = \psi_0^m(x). \quad (2.11)$$

Pela densidade do conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de W_m em $H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L)$ e em $H^2(0, L)$ e pela densidade do conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de \widetilde{W}_m em $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, existem constantes reais

α_{mj} , β_{mj} e ξ_{mj} , tais que

$$\varphi^m(x, 0) = \varphi_0^m(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_{mj}(t)w_j \rightarrow \varphi_0 \quad \text{forte em} \quad H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L), \quad (2.12)$$

$$\varphi_t^m(x, 0) = \varphi_1^m(x) = \sum_{j=1}^m \beta_{mj}(t)w_j \rightarrow \varphi_1(x) \quad \text{forte em} \quad H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L), \quad (2.13)$$

$$\psi^m(x, 0) = \psi_0^m(x) = \sum_{j=1}^m \xi_{mj}(t)\tilde{w}_j \rightarrow \psi_0(x), \quad \text{forte em} \quad H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L). \quad (2.14)$$

E, pela unicidade das combinações lineares temos que $P_{mj}(0) = \alpha_{mj}$, $P'_{mj}(0) = \beta_{mj}$ e $Q_{mj}(0) = \xi_{mj}$.

Substituindo φ^m , ψ^m , $w = w_i$ e $\tilde{w} = \tilde{w}_i$, para $i = 1, 2, \dots, m$ em (2.9)-(2.11) e usando as igualdades de (2.5) a (2.8) juntamente com a ortogonalidade de cada uma das bases chegamos as seguintes equações

$$\rho_1 P''_{mi}(t) + \kappa \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 P_{mi}(t) - \kappa \left(\frac{i\pi}{L} \right) Q_{mi} + \mu P'_{mi}(t) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2.15)$$

$$\rho_2 \left(\frac{i\pi}{L} \right) P''_{mi}(t) + b \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 Q_{mi}(t) - \kappa \left(\frac{i\pi}{L} \right) P_{mi}(t) + \kappa Q_{mi} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2.16)$$

$$P_{mi}(0) = \alpha_{mi}, \quad P'_{mi}(0) = \beta_{mi}, \quad Q_{mi}(0) = \xi_{mi} \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.17)$$

Notamos da forma em que o sistema está não é possível obtermos o problema de Cauchy, por isso, vamos isolar Q_{mi} na equação (2.15) e substituir o resultado na equação (2.16), assim chegamos a seguinte equação

$$P''_{mi}(t) + \frac{\frac{b\mu i\pi}{\kappa L} + \frac{\mu L}{i\pi}}{\left(\rho_2 + \frac{b\rho_1}{\kappa}\right) \frac{i\pi}{L} + \frac{\rho_1 L}{i\pi}} P'_{mi} + \frac{b \left(\frac{i\pi}{L}\right)^3}{\left(\rho_2 + \frac{b\rho_1}{\kappa}\right) \frac{i\pi}{L} + \frac{\rho_1 L}{i\pi}} P_{mi} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2.18)$$

$$P_{mi}(0) = \alpha_{mi}, \quad P'_{mi}(0) = \beta_{mi}, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.19)$$

Fazendo

$$Y_{mi} = \begin{bmatrix} P_{mi} \\ P'_{mi} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

obtemos que

$$Y'_{mi}(t) + \mathcal{A}_i Y_{mi} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (2.21)$$

$$Y_{mi}(0) = [\alpha_{mi}, \beta_{mi}], \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.22)$$

onde

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3}{\left(\rho_2 + \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\frac{i\pi}{L} + \frac{\rho_1 L}{i\pi}} & -\frac{\frac{b\mu i\pi}{\kappa L} + \frac{\mu L}{i\pi}}{\left(\rho_2 + \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\frac{i\pi}{L} + \frac{\rho_1 L}{i\pi}} \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Por fim, obtemos que

$$\begin{bmatrix} Y'_{m1} \\ Y'_{m2} \\ \vdots \\ Y'_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_{m1} \\ Y_{m2} \\ \vdots \\ Y_{mm} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

ou seja, $X'(t) = BX$, onde se tem

$$X = \begin{bmatrix} Y_{m1} \\ Y_{m2} \\ \vdots \\ Y_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathcal{A}_m \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Observe que podemos escrever

$$X'(t) = BX = F(t, X) \quad (2.26)$$

$$X(0) = (Y_{m1}, \dots, Y_{mm})^T = (\alpha_{m1}, \beta_{m1}, \dots, \alpha_{mm}, \beta_{mm})^T \quad (2.27)$$

Temos portanto um sistema matricial equivalente a um sistema de E.D.O's de 1ª ordem. Usando a Teoria de equações diferenciais ordinárias, o problema (2.9) – (2.10) tem solução $P_{mj}(t)$ e $Q_{mj}(t)$ definida sobre um intervalo $[0, t_m]$, onde $0 < t_m < T$.

A estimativa feita a seguir nos permitirá estender essa solução a todo intervalo $[0, T]$.

1ª estimativa

Nas equações (2.9) e (2.10) fazendo $w = \varphi_t^m$ e $\tilde{w} = \psi_t^m$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1(\varphi_{tt}^m, \varphi_t^m) - \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, \varphi_t^m) + \mu(\varphi_t^m, \varphi_t^m) &= 0, \\ -\rho_2(\varphi_{ttx}^m, \psi_t^m) - b(\psi_{xx}^m, \psi_t^m) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \psi_t^m) &= 0, \end{aligned}$$

agora, integrando por partes em x as equações acima e somando os resultados, obtemos

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m, \varphi_t^m) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, (\varphi_x^m + \psi^m)_t) + \mu(\varphi_t^m, \varphi_t^m) + b(\psi_x^m, \psi_{tx}^m) + \rho_2(\varphi_{tt}^m, \psi_t^m) = 0,$$

logo

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 \right\} + \mu \|\varphi_t^m\|_2^2 + \rho_2(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) = 0. \quad (2.28)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) &= \frac{1}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) - (\varphi_{tt}^m, \varphi_{txx}^m) + \frac{\mu}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \varphi_{tt}^m) \\ &= \frac{1}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\mu}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2, \end{aligned} \quad (2.29)$$

substituindo (2.29) e (2.28), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) + \mu \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Agora, fazendo $w = \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m$ em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) &= \frac{1}{\rho_1} \left(\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m, \frac{\kappa}{\rho_1}(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \frac{\mu}{\rho_1}\varphi_{tt}^m \right) \\ &= \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) e (2.30), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2 + \mu \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

agora integrando de 0 à t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2 + \\ + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 \right\} dt = \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_1^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{0,x}^m + \psi_{0,x}^m\|_2^2 + \\ + \frac{b}{2} \|\psi_{0,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{1,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_{0,xx}^m + \psi_{0,x}^m) - \mu\varphi_1^m\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2 + \\ + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 \right\} dt \leq C_1. \end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante que independe de m e t . Então

$$\varphi_x^m + \psi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.33)$$

$$\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (2.34)$$

$$\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.35)$$

$$\psi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \quad (2.36)$$

$$\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.37)$$

$$\varphi_{tt}^m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (2.38)$$

Além disso, existem constantes c_1 e c_2 , tais que

$$\| \varphi_x^m \|_2^2 \leq c_1 (\| \varphi_x^m + \psi^m \|_2^2 + \| \psi^m \|_2^2)$$

$$\| \varphi_{xx}^m \|_2^2 \leq c_2 (\| \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m \|_2^2 + \| \psi_x^m \|_2^2 + \| \varphi_t^m \|_2^2),$$

logo

$$\varphi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)). \quad (2.39)$$

2ª estimativa

Fazendo $w = -\varphi_{txx}$ e $\tilde{w} = -\psi_{txx}$ nas equações (2.9) e (2.10), respectivamente, obtemos

$$-\rho_1(\varphi_{tt}^m, \varphi_{txx}^m) + \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, \varphi_{txx}^m) - \mu(\varphi_t^m, \varphi_{txx}^m) = 0,$$

$$\rho_2(\varphi_{txx}^m, \psi_{txx}^m) + b(\psi_{xx}^m, \psi_{txx}^m) - \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \psi_{txx}^m) = 0,$$

de forma análoga a primeira estimativa, chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \| \varphi_{tx}^m \|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \| \varphi_{xx}^m + \psi_x^m \|_2^2 + \frac{b}{2} \| \psi_{xx}^m \|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \| \varphi_{txx}^m \|_2^2 \right\} + \\ & - \frac{\rho_2}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{txx} - \mu\varphi_{ttxx}^m) + \mu \| \varphi_{tx}^m \|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \| \varphi_{txx}^m \|_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Agora, fazendo $w = \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{txx} - \mu\varphi_{ttxx}^m$ em (2.9), obtemos

$$(\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{txx} - \mu\varphi_{ttxx}^m) = -\frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \| \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} - \mu\varphi_{tx}^m \|_2^2.$$

substituindo (2.41) e (2.40), chegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \| \varphi_{tx}^m \|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \| \varphi_{xx}^m + \psi_x^m \|_2^2 + \frac{b}{2} \| \psi_{xx}^m \|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \| \varphi_{txx}^m \|_2^2 \right\} + \\ & + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \| \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} - \mu\varphi_{tx}^m \|_2^2 + \mu \| \varphi_{tx}^m \|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \| \varphi_{txx}^m \|_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

integrando de 0 à t , obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{xx}^m + \psi_x^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_{xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} - \mu\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 \right\} dt = \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{1,x}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{0,xx}^m + \psi_{0,x}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{b}{2} \|\psi_{0,xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{1,xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\rho_1}{2\kappa} \left\| \frac{\kappa}{\rho_1} (\varphi_{0,xxx}^m + \psi_{0,xxx}^m) - \frac{\mu}{\rho_1} \varphi_{1,x}^m \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{xx}^m + \psi_x^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_{xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} - \mu\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 \right\} dt \leq C_2, \end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante que independe de m e t . Logo

$$\varphi_{txx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.42)$$

$$\psi_{xx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.43)$$

$$\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} - \mu\varphi_{tx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.44)$$

$$\varphi_{tx}^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.45)$$

$$\varphi_{txx}^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (2.46)$$

Além disso, existe constantes c_3 , tal que

$$\|\varphi_{xxx}^m\|_2^2 \leq c_3 (\|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} - \mu\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \|\psi_{xx}^m\|_2^2 + \|\varphi_{tx}^m\|_2^2),$$

logo

$$\varphi_{xxx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (2.47)$$

Das estimativas 1 e 2, obtemos

$$\varphi^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \quad (2.48)$$

$$\varphi_t^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \cap L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (2.49)$$

$$\psi^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \quad (2.50)$$

$$\varphi_{tt}^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)). \quad (2.51)$$

Passagem do limite

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subsequência de (φ^m) e (ψ^m) que ainda denotaremos por (φ^m) e (ψ^m) , tais que

$$\varphi^m \rightharpoonup \varphi \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \quad (2.52)$$

$$\varphi_t^m \rightharpoonup \varphi_t \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \quad (2.53)$$

$$\psi^m \rightharpoonup \psi \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \quad (2.54)$$

$$\varphi_t^m \rightharpoonup \varphi_t \quad \text{Fraco em } L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (2.55)$$

$$\varphi_{tt}^m \rightharpoonup \varphi_{tt} \quad \text{Fraco em } L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)). \quad (2.56)$$

Considerando nas equações (2.9) e (2.10) $w, \tilde{w} \in \mathcal{D}(0, L)$ e, em seguida, multiplicando as mesmas por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $\tilde{\theta} \in \mathcal{D}(0, T)$, respectivamente, e integrando de 0 a T , obtemos

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, w)\theta dt - \kappa \int_0^T ((\varphi_x^m + \psi^m)_x, w)\theta dt + \mu \int_0^T (\varphi_t^m, w)\theta dt = 0 \quad (2.57)$$

$$-\rho_2 \int_0^T (\varphi_{ttx}^m, \tilde{w})\tilde{\theta} dt - b \int_0^T (\psi_{xx}^m, \tilde{w})\tilde{\theta} dt + \kappa \int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m, \tilde{w})\tilde{\theta} dt = 0. \quad (2.58)$$

Portanto, aplicando o limite nas equações (2.57) e (2.58) e usando as convergências (2.52) a (2.56), obtemos

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}, w)\theta dt - \kappa \int_0^T ((\varphi_x + \psi)_x, w)\theta dt + \mu \int_0^T (\varphi_t, w)\theta dt = 0 \quad (2.59)$$

$$-\rho_2 \int_0^T (\varphi_{ttx}, \tilde{w})\tilde{\theta} dt - b \int_0^T (\psi_{xx}, \tilde{w})\tilde{\theta} dt + \kappa \int_0^T (\varphi_x + \psi, \tilde{w})\tilde{\theta} dt = 0. \quad (2.60)$$

Sejam $\zeta = w\theta \in \mathcal{D}((0, L) \times (0, T))$ e $\tilde{\zeta} = \tilde{w}\tilde{\theta} \in \mathcal{D}((0, L) \times (0, T))$, portanto

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}\zeta dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \zeta dx dt + \mu \int_0^T \int_0^L \varphi_t \zeta dx dt &= 0 \\ -\rho_2 \int_0^T \int_0^L \varphi_{ttx} \tilde{\zeta} dx dt - b \int_0^T \int_0^L \psi_{xx} \tilde{\zeta} dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \tilde{\zeta} dx dt &= 0. \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t) \zeta dx dt &= 0 \\ \int_0^T \int_0^L (-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi)) \tilde{\zeta} dx dt &= 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema Du Bois Raymond, segue que

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \text{ q.s. em }]0, L[\times]0, T[\quad (2.61)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ q.s. em }]0, L[\times]0, T[. \quad (2.62)$$

Condições iniciais

- $\varphi(x, 0) = \varphi_0$

Da convergência (2.53), obtemos

$$\int_0^T (\varphi_t^m, w) \theta dt \rightarrow \int_0^T (\varphi_t, w) \theta dt, \quad \forall w \in \mathcal{D}(0, L) \text{ e } \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \quad (2.63)$$

Integrando por partes (2.63), podemos escrever

$$(\varphi^m, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\varphi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\varphi, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\varphi, w) \theta' dt. \quad (2.64)$$

Escolhendo $\theta \in C^1([0, T[; \mathbf{R})$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, chegamos ao seguinte resultado

$$(\varphi_0^m, w) - \int_0^T (\varphi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\varphi(x, 0), w) - \int_0^T (\varphi, w) \theta' dt. \quad (2.65)$$

Agora, de (2.52), obtemos que

$$\int_0^T (\varphi^m, w) \theta' dt \rightarrow \int_0^T (\varphi, w) \theta' dt, \quad (2.66)$$

dessa forma, obtemos que

$$(\varphi_0^m, w) \rightarrow (\varphi(x, 0), w). \quad (2.67)$$

Por outro lado, de (2.12), temos que

$$(\varphi_0^m, w) \longrightarrow (\varphi_0, w).$$

Pela unicidade do limite, podemos concluir que

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0. \quad (2.68)$$

- $\varphi_t(x, 0) = \varphi_1$

Da convergência (2.56), obtemos

$$\int_0^T (\varphi_{tt}^m, w) \theta dt \rightarrow \int_0^T (\varphi_{tt}, w) \theta dt, \quad \forall w \in \mathcal{D}(0, L) \text{ e } \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \quad (2.69)$$

Escolhamos $\theta \in C^1([0, T[; \mathbf{R})$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e, integramos por partes, para obtermos

$$(\varphi_1^m, w) - \int_0^T (\varphi_t^m, w) \theta' dt \rightarrow (\varphi_t(x, 0), w) - \int_0^T (\varphi_t, w) \theta' dt. \quad (2.70)$$

Pela convergência anterior e, da convergência (2.53), obtemos que

$$(\varphi_1^m, w) \rightarrow (\varphi_t(x, 0), w). \quad (2.71)$$

Por outro lado, de (2.13), temos que

$$(\varphi_1^m, w) \rightarrow (\varphi_1, w).$$

Pela unicidade do limite, podemos concluir que

$$\varphi_t(x, 0) = \varphi_1. \quad (2.72)$$

- $\psi(x, 0) = \psi_0$

Pela definição de convergência em $\mathcal{D}'(0, T)$ temos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (\psi^m, w) \theta dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (\psi, w) \theta dt, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \quad (2.73)$$

Escolhendo $\theta \in C^1([0, T[; \mathbf{R})$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, e integrando por partes (2.73), obtemos

$$(\psi^m, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\psi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\psi, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\psi, w) \theta' dt. \quad (2.74)$$

Dessa forma, Temos

$$(\psi_0^m, w) - \int_0^T (\psi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\psi(x, 0), w) - \int_0^T (\psi, w) \theta' dt. \quad (2.75)$$

portanto

$$(\psi_0^m, w) \rightarrow (\varphi(x, 0), w). \quad (2.76)$$

De (2.14), temos que

$$(\psi_0^m, w) \longrightarrow (\varphi_0, w).$$

Pela unicidade do limite, podemos concluir que

$$\psi_t(x, 0) = \psi_0. \quad (2.77)$$

Dependência contínua e Unicidade

Sejam $\{\varphi, \varphi_t, \psi\}$ e $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\psi}\}$ soluções fortes do sistema (2.1) – (2.3) com condições de contorno (2.4) correspondentes as condições iniciais $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0\}$ e $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_0\}$, respectivamente. Nessas condições, temos que $\{y, y_t, z\} = \{\varphi - \tilde{\varphi}, \varphi_t - \tilde{\varphi}_t, \psi - \tilde{\psi}\}$ satisfazem as seguintes equações

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + z)_x + \mu y_t = 0, \quad (2.78)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa(y_x + z) = 0. \quad (2.79)$$

Com as condições iniciais $\{y(x, 0), y_t(x, 0), z(x, 0)\} = \{\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0, \varphi_1 - \tilde{\varphi}_1, \psi_0 - \tilde{\psi}_0\}$, onde

$$y \in L^\infty(]0, T[; H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L))$$

$$y_t \in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L))$$

$$z \in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)).$$

Multiplicando as equações (2.78) e (2.79) por y_t e z_t , respectivamente. Posteriormente integrando em $(0, L)$ e somando os resultados, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 \|y_t\|_2^2 + \kappa \|y_x + z\|_2^2 + b \|z_x\|_2^2 \right\} + \rho_2 (y_{tt}, z_{tx}) + \mu \|y_t\|_2^2 = 0. \quad (2.80)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (y_{tt}, z_{tx}) &= \frac{1}{\kappa} (y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x - \mu y_t)_t) - (y_{tt}, y_{txx}) + \frac{\mu}{\kappa} \|y_{tt}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\kappa} (y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x - \mu y_t)_t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_{tx}\|_2^2 + \frac{\mu}{\kappa} \|y_{tt}\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Substituindo (2.81) em (2.80), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \rho_1 \| y_t \|_2^2 + \kappa \| y_x + z \|_2^2 + b \| z_x \|_2^2 + \rho_2 \| y_{tx} \|_2^2 \} + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} (y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x - \mu y_t)_t) + \mu \| y_t \|_2^2 + \frac{\mu}{\kappa} \| y_{tt} \|_2^2 = 0. \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \rho_1 \| y_t \|_2^2 + \kappa \| y_x + z \|_2^2 + b \| z_x \|_2^2 + \rho_2 \| y_{tx} \|_2^2 \} + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} (y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x - \mu y_t)_t) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Agora, multiplicando a equação (2.78) por $(\kappa(y_x + z)_x - \mu y_t)_t$ e integrando em $0, L$ resulta que

$$(y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x - \mu y_t)_t) = \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \| \kappa(y_x + z)_x - \mu y_t \|_2^2. \quad (2.83)$$

Assim, substituindo (2.83) em (2.82) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \rho_1 \| y_t \|_2^2 + \kappa \| y_x + z \|_2^2 + b \| z_x \|_2^2 + \rho_2 \| y_{tx} \|_2^2 \} + \\ \frac{\rho_2}{\rho_1 \kappa} \frac{d}{dt} \| \kappa(y_x + z)_x - \mu y_t \|_2^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (2.84)$$

Integrando (2.84) em $(0, t)$ e tomando $N = \min \left\{ \rho_1, \kappa, b, \rho_2, \frac{\rho_2}{\rho_1 \kappa} \right\} > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \| y_t \|_2^2 + \| y_x + z \|_2^2 + \| z_x \|_2^2 + \| y_{tx} \|_2^2 + \| \kappa(y_x + z)_x - \mu y_t \|_2^2 \leq \| y_1 \|_2^2 + \\ + \| y_{0,x} + z_0 \|_2^2 + \| z_{0,x} \|_2^2 + \| y_{1,x} \|_2^2 + \| \kappa(y_{0,x} + z_0)_x - \mu y_1 \|_2^2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Da desigualdade (2.85) resulta a dependência contínua dos dados iniciais para as soluções fortes. E, em particular, temos a unicidade de solução forte.

Concluimos assim a demonstração deste Teorema. ■

Agora, enunciaremos e demonstraremos a boa colocação para solução Forte.

Teorema 2.2 *Se $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$, então a solução fraca do sistema (2.1) – (2.4) está bem colocada, tal que*

$$\begin{aligned}\varphi &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \\ \varphi_t &\in L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; L_*^2(0, L)).\end{aligned}$$

Demonstração: A existência de solução fraca será provada por aproximação de uma sequência de soluções fortes encontradas no Teorema 2.1.

Existência

Dados $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$, existem sequências (φ_0^m) , (φ_1^m) e (ψ_0^m) em $H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L)$, $H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$ e $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, respectivamente, tais que

$$\varphi_0^m \rightarrow \varphi_0 \quad \text{forte em} \quad H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L), \quad (2.86)$$

$$\varphi_1^m \rightarrow \varphi_1 \quad \text{forte em} \quad H_*^1(0, L), \quad (2.87)$$

$$\psi_0^m \rightarrow \psi_0 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(0, L). \quad (2.88)$$

Para cada m , o Teorema 2.1, garante a existência de uma única solução $\{\varphi^m, \varphi_t^m, \psi^m\}$, tal que

$$\varphi^m \in L^\infty(]0, T[; H^3(0, L) \cap H_*^1(0, L))$$

$$\varphi_t^m \in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L))$$

$$\psi^m \in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)).$$

$$\rho_1 \varphi_{tt}^m + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m) + \mu \varphi_t^m = 0, \quad \text{q.s em }]0, L[\times]0, T[\quad (2.89)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx}^m - b \psi_{xx}^m + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m) = 0, \quad \text{q.s em }]0, L[\times]0, T[\quad (2.90)$$

e

$$(\varphi^m(0), \varphi_t^m(0), \psi^m(0)) = (\varphi_0^m, \varphi_1^m, \psi_0^m).$$

Multiplicando as equações (2.89) e (2.90) por φ_t^m e ψ_t^m , respectivamente, e depois integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\begin{aligned}\rho_1(\varphi_{tt}^m \varphi_t^m) - \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, \varphi_t^m) + \mu(\varphi_t^m, \varphi_t^m) &= 0, \\ -\rho_2(\varphi_{tt}^m, \psi_t^m) - b(\psi_{xx}^m, \psi_t^m) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \psi_t^m) &= 0,\end{aligned}$$

agora, integrando por partes em x as equações acima e somando os resultados, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 \right\} + \mu \|\varphi_t^m\|_2^2 + \rho_2(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) = 0. \quad (2.91)$$

Novamente, usando o fato de que

$$(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) = \frac{1}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\mu}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2,$$

ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) + \mu \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 = 0.\end{aligned} \quad (2.92)$$

Agora, multiplicando (2.89) por $\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m$, obtemos

$$(\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) = \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2. \quad (2.93)$$

Substituindo (2.93) e (2.92), chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2 + \mu \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 = 0.\end{aligned} \quad (2.94)$$

Agora, integrando de 0 à t , obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2 + \\ + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 \right\} dt = \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_1^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{0,x}^m + \psi_0^m\|_2^2 + \\ + \frac{b}{2} \|\psi_{0,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{1,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_{0,xx}^m + \psi_{0,x}^m) - \mu\varphi_1^m\|_2^2.\end{aligned}$$

Assim, pelas convergências (2.86), (2.87) e (2.88) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2 + \\ + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{tt}^m\|_2^2 \right\} dt \leq C_1,\end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante que independe de m e t . Então

$$\varphi_x^m + \psi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.95)$$

$$\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (2.96)$$

$$\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.97)$$

$$\psi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \quad (2.98)$$

$$\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.99)$$

$$\varphi_{tt}^m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (2.100)$$

Além disso, existem constantes c_1 e c_2 , tais que

$$\|\varphi_x^m\|_2^2 \leq c_1(\|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \|\psi^m\|_2^2)$$

$$\|\varphi_{xx}^m\|_2^2 \leq c_2(\|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x - \mu\varphi_t^m\|_2^2 + \|\psi_x^m\|_2^2 + \|\varphi_t^m\|_2^2),$$

logo

$$\varphi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)). \quad (2.101)$$

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subsequência de (φ^m) e (ψ^m) que ainda denotaremos por (φ^m) e (ψ^m) tais que:

$$\varphi^m \rightharpoonup \varphi \quad \text{Fraco estrela em} \quad L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \quad (2.102)$$

$$\varphi_t^m \rightharpoonup \varphi_t \quad \text{Fraco estrela em} \quad L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (2.103)$$

$$\psi^m \rightharpoonup \psi \quad \text{Fraco estrela em} \quad L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \quad (2.104)$$

$$\varphi_t^m \rightharpoonup \varphi_t \quad \text{Fraco em} \quad L^2(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (2.105)$$

$$\varphi_{tt}^m \rightharpoonup \varphi_{tt} \quad \text{Fraco em} \quad L^2(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (2.106)$$

Dessa forma, aplicando o limite na equação

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, w)\theta dt - \kappa \int_0^T ((\varphi_x^m + \psi^m)_x, w)\theta dt + \mu \int_0^T (\varphi_t^m, w)\theta dt = 0. \quad (2.107)$$

onde $w, \in \mathcal{D}(0, L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, obtemos

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}, w)\theta dt - \kappa \int_0^T ((\varphi_x + \psi)_x, w)\theta dt + \mu \int_0^T (\varphi_t, w)\theta dt = 0. \quad (2.108)$$

Seja $\zeta = w\theta \in \mathcal{D}((0, L) \times (0, T))$, assim ficamos com

$$\langle \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t, \zeta \rangle = 0. \quad (2.109)$$

Logo, pelo Lema Du Bois Raymond, segue que

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_t = 0, \text{ q.s. em }]0, L[\times]0, T[. \quad (2.110)$$

Por outro lado, como

$$\rho_2(\varphi_{tt}^m, \tilde{w}_x) + b(\psi_x^m, \tilde{w}_x) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \tilde{w}) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \quad (2.111)$$

então, multiplicando (2.111) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando em $(0, T)$, obtemos

$$\rho_2 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, \tilde{w}_x) \theta dx + b \int_0^T (\psi_x^m, \tilde{w}_x) \theta dx + \kappa \int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m, \tilde{w}) \theta dx = 0, \quad \forall \tilde{w} \in H_0^1(0, L),$$

Aplicando o limite, obtemos

$$\rho_2 \int_0^T (\varphi_{tt}, w_x) \theta dx + b \int_0^T (\psi_x, w_x) \theta dx + \kappa \int_0^T (\varphi_x + \psi, w) \theta dx = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L).$$

Logo

$$\langle \rho_2(\varphi_{tt}, w_x), \theta \rangle + b \langle (\psi_x, w_x), \theta \rangle + \kappa \langle (\varphi_x + \psi, w), \theta \rangle = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L),$$

ou seja,

$$\langle \rho_2(\varphi_{tt}, w_x) + b(\psi_x, w_x) + \kappa(\varphi_x + \psi, w), \theta \rangle = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Assim,

$$\rho_2(\varphi_{tt}, w_x) + b(\psi_x, w_x) + \kappa(\varphi_x + \psi, w) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T).$$

Condições iniciais

Para mostrarmos as condições iniciais, basta usarmos o mesmo raciocínio do teorema anterior.

Unicidade

Sejam $\{\varphi, \varphi_t, \psi\}$ e $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\psi}\}$ soluções fracas do sistema (2.1) – (2.4) correspondentes as condições iniciais $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0\}$. Nessas condições, temos que $\{y, y_t, z\} = \{\varphi - \tilde{\varphi}, \varphi_t - \tilde{\varphi}_t, \psi - \tilde{\psi}\}$ satisfazem as seguintes equações

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + z)_x + \mu y_t = 0, \text{ q.s em }]0, L[\times]0, T[\quad (2.112)$$

$$\rho_2(y_{tt}, w_x) + b(z_x, w_x) + \kappa(y_x + z, w) = 0, \forall w \in H_0^1(0, L). \quad (2.113)$$

Com as condições iniciais $\{y(x, 0), y_t(x, 0), z(x, 0)\} = \{0, 0, 0\}$, onde

$$y \in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L))$$

$$y_t \in L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L))$$

$$z \in L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)).$$

Observemos que como não temos o espaço da z_t , não faz sentido a dualidade (y_{tt}, z_{tx}) .

Para resolvermos este definiremos os seguintes funcionais:

$$\sigma^1(t) = \begin{cases} -\int_t^s y(r)dr, & 0 < t < s; \\ 0, & s \leq t < T \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma^2(t) = \begin{cases} -\int_t^s z(r)dr, & 0 < t < s; \\ 0, & s \leq t < T \end{cases}$$

Portanto, $\sigma^2 \in L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L))$ e faz sentido a dualidade (y_{tt}, σ_x^2) . Assim

$$\rho_1 \int_0^s (y_{tt}, \sigma^1) dt + \kappa \int_0^s (y_x + z, \sigma_x^1) dt + \mu \int_0^s (y_t, \sigma^1) dt = 0, \quad (2.114)$$

$$\rho_2 \int_0^s (y_{tt}, \sigma_x^2) dt + b \int_0^s (z_x, \sigma_x^2) dt + \kappa \int_0^s (y_x + z, \sigma^2) dt = 0. \quad (2.115)$$

Somando as equações (2.114) e (2.114), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^s (y_{tt}, \sigma^1) dt + \kappa \int_0^s (y_x + z, \sigma_x^1 + \sigma^2) dt + b \int_0^s (z_x, \sigma_x^2) dt + \\ + \rho_2 \int_0^s (y_{tt}, \sigma_x^2) dt + \mu \int_0^s (y_t, \sigma^1) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Agora, iremos analisar cada integral separadamente. inicialmente, sejam

$\sigma_1^1(l) = \int_0^l y(r)dr$ e $\sigma_1^2(l) = \int_0^l z(r)dr$, logo temos que $\sigma^i(t) = \sigma_1^i(t) - \sigma_1^i(s)$, para $i = 1, 2$, e $\sigma_t^1(t) = y(t)$ e $\sigma_t^2(t) = z(t)$, para $t \in (0, s)$. logo

$$\int_0^s (y_{tt}, \sigma^1) dt = (y_t, \sigma^1) \Big|_0^s - \int_0^s (y_t, \sigma_t^1) dt = -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|y_t\|_2^2 dt = -\frac{1}{2} \|y(s)\|_2^2 \quad (2.117)$$

e,

$$\begin{aligned} \int_0^s (y_x + z, \sigma_x^1 + \sigma^2) dt &= \int_0^s ((\sigma_x^1 + \sigma^2)_t, \sigma_x^1 + \sigma^2) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|\sigma_x^1 + \sigma^2\|_2^2 dt \\ &= -\frac{1}{2} \|\sigma_x^1(0) + \sigma^2(0)\|_2^2, \end{aligned} \quad (2.118)$$

e,

$$\int_0^s (z_x, \sigma_x^2) dt = \int_0^s (\sigma_{tx}^2, \sigma_x^2) dt = \int_0^s \frac{d}{dt} \|\sigma_x^2\|_2^2 dt = -\frac{1}{2} \|\sigma_x^2(0)\|_2^2, \quad (2.119)$$

e,

$$\begin{aligned} \int_0^s (y_{tt}, \sigma_x^2) dt &= (y_t, \sigma_x^2) \Big|_0^s - \int_0^s (y_t, \sigma_{tx}^2) dt \\ &= - \int_0^s (y_t, z_x) dt \\ &= - \int_0^s \left(y_t, \frac{\rho_1}{\kappa} y_{tt} - y_{xx} + \frac{\mu}{\kappa} y_t \right) dt \\ &= - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^s (y_t, y_{tt}) dt + \int_0^s (y_t, y_{xx}) dt - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^s (y_t, y_t) dt \\ &= - \frac{\rho_1}{2\kappa} \int_0^s \frac{d}{dt} \|y_t\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|y_x\|_2^2 dt - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^s \|y_t\|_2^2 dt \\ &= - \frac{\rho_1}{2\kappa} \|y_t(s)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|y_x(s)\|_2^2 - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^s \|y_t\|_2^2 dt \end{aligned} \quad (2.121)$$

e, por fim

$$\int_0^s (y_t, \sigma^1) dt = (y, \sigma^1) \Big|_0^s - \int_0^s (y, \sigma_t^1) dt = - \int_0^s (y, y) dt = - \int_0^s \|y(t)\|_2^2 dt. \quad (2.122)$$

Substituindo (2.117), (2.118), (2.119), (2.120) e (2.122) em (2.116), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \|y(s)\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\sigma_x^1(0) + \sigma^2(0)\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\sigma_x^2(0)\|_2^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \|y_t(s)\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|y_x(s)\|_2^2 + \\ + \frac{\mu \rho_2}{\kappa} \int_0^s \|y_t\|_2^2 dt + \mu \int_0^s \|y(t)\|_2^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Então $y = 0$ e $y_t = 0$, portanto, $\varphi = \tilde{\varphi}$ e $\varphi_t = \tilde{\varphi}_t$. Além disso, de (2.112), temos que $z_x = 0$. Desde que $z \in H_0^1(0, L)$ então $z = 0$, portanto, $\psi = \tilde{\psi}$, obtemos assim a unicidade.

Dependência Contínua

A dependência contínua dos dados iniciais para soluções fracas seguem diretamente da desigualdade (2.85) que nos dá a dependência contínua para soluções fortes, de argumentos de densidade e da unicidade de solução. Finalizamos a demonstração. ■

Observamos ainda que, se considerarmos as condições de contorno Dirichlet-Neumann, isto é

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \text{ em }]0, +\infty[, \quad (2.123)$$

com raciocínio análogo, mostra-se a demonstração para os seguintes Teoremas

Teorema 2.3 *Se*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in H^3(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L),$$

então a solução Forte do sistema (2.1) – (2.3) com condição de contorno (2.123) está bem colocada, tal que

$$\begin{aligned} \varphi &\in L^\infty(]0, T[; H^3(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \\ \varphi_t &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; H_0^1(0, L)) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)). \end{aligned}$$

e,

Teorema 2.4 *Se* $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$, *então a solução Fraca do sistema (2.1) – (2.3) com condição de contorno (2.123) está bem colocada, tal que*

$$\begin{aligned} \varphi &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \\ \varphi_t &\in L^2(]0, T[; H_0^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; L_2(0, L)) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)). \end{aligned}$$

Assim finalizamos esta subseção. Passaremos agora, à analisar o comportamento assintótico do sistema.

2.2 Estabilidade exponencial

Agora, o nosso objetivo é mostrar que a energia do modelo de Timoshenko-Ehrenfest desenvolvido por Elishakoff com atrito decai exponencialmente sem que haja a relação entre as velocidades.

Inicialmente, definiremos esta energia. Para todo $t \geq 0$, a energia do sistema (2.1) – (2.3) com as condições de contorno (2.4) ou (2.123) é dada por,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx}^2 + b \psi_x^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} (\kappa (\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t)^2 \right] dx. \quad (2.124)$$

Temos que o nosso primeiro resultado é a natureza dissipativa da energia $E(t)$ dado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.5 *A energia $E(t)$ do sistema (2.1) – (2.3) com as condições de contorno (2.4) ou (2.123) satisfaz a lei de dissipação de energia dada por*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^L \varphi_t^2 dx - \mu \frac{\rho_2}{k} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx. \quad (2.125)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.1) por φ_t e a equação (2.2) por ψ_t e depois integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx + \mu \int_0^L \varphi_t^2 dx = 0, \quad (2.126)$$

$$-\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0, \quad (2.127)$$

integrando por parte e usando as condições de contorno (2.4) ou (2.123), obtemos

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \varphi_t^2 dx \right] + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \mu \int_0^L \varphi_t^2 dx = 0, \quad (2.128)$$

$$\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_{tx} dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \psi_x^2 dx \right] + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0, \quad (2.129)$$

somando as equações (2.128) e (2.129), temos que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 + b \psi_x^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 \right] dx + \mu \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_{tx} dx = 0. \quad (2.130)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_{tx} dx &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} - \mu\varphi_{tt}) dx - \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{txx} dx + \frac{\mu}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{tt} dx \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} - \mu\varphi_{tt}) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \frac{\mu}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx, \end{aligned} \quad (2.131)$$

substituindo 2.131 e (2.130), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 + b\psi_x^2 + \kappa(\varphi_x + \psi)^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right] dx + \mu \int_0^L \varphi_t^2 dx + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} - \mu\varphi_{tt}) dx + \frac{\mu\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Agora, multiplicando a equação (2.1) por $\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} - \mu\varphi_{tt}$ e integrando em 0 a L , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} - \mu\varphi_{tt}) dx &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu\varphi_t) (\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} - \mu\varphi_{tt}) dx \\ &= \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu\varphi_t)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Substituindo (2.133) em (2.132) e pela definição de $E(t)$ obtemos (2.125). ■

Para mostrar que a energia $E(t)$ decai exponencialmente, basta provar o seguinte resultado.

Teorema 2.6 *Existem duas constantes positivas M e ω que não dependem das condições iniciais e não dependem de qualquer relação entre seus coeficiente, tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}; \quad \forall t > 0. \quad (2.134)$$

A ideia da demonstração para este Teorema é construir um funcional de Liapunov $\mathcal{L}(t)$ e usar o o Método da Energia. Primeiro, definimos

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{\mu\rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x dx \quad (2.135)$$

Lema 2.1 *Seja $(\varphi, \varphi_t, \psi)$ uma solução do sistema (2.1) – (2.3) com as condições de contorno (2.4) ou (2.123). Então temos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) &= -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t)^2 dx + \\ &+ \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Demonstração: Multiplicamos a equação (2.1) por φ e integramos em $(0, L)$, obtemos que

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi dx + \mu \int_0^L \varphi_t \varphi dx = 0,$$

integrando por parte, e usando as condições de contorno, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx = 0, \quad (2.137)$$

analogamente, multiplicando a equação (2.2) por ψ e integrando em $(0, L)$, obtemos que

$$-\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx = 0,$$

integrando por parte, e usando as condições de contorno, obtemos

$$\rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx = 0, \quad (2.138)$$

somando as equações (2.137) e (2.138), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t) dx - \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + \frac{\mu}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t) dx - \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + \frac{\mu}{2\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 dx, \end{aligned} \quad (2.140)$$

substituindo 2.140 e (2.139), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t) dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Agora, multiplicando a equação (2.1) por $\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t$ e integrando em 0 a L , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t) dx &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t) (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t) dx \\ &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t)^2 dx, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t)^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx = 0. \end{aligned}$$

E, integrando por partes o termo $\int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t)^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela identidade $\varphi_{txx} \varphi_x = \frac{d}{dt}(\varphi_{tx} \varphi_t) - \varphi_{tx}^2$ chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \\ + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t)^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.142)$$

e pela substituição de (2.135) em (2.142), obtemos (2.136). ■

Agora vamos introduzir o funcional

$$\mathcal{G}(t) = - \int_0^L \left(\frac{\mu}{2} \varphi_t^2 + \kappa \varphi_{tx} \varphi_x \right) dx \quad (2.143)$$

Lema 2.2 *Seja $(\varphi, \varphi_t, \psi)$ uma solução do sistema (2.1) – (2.3) com as condições de contorno (2.4) ou (2.123). Então o funcional $\mathcal{G}(t)$ satisfaz, para todo $\epsilon > 0$, a estimativa*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) \leq \left(\rho_1 + \frac{\kappa^2}{2\epsilon}\right) \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx. \quad (2.144)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.1) por φ_{tt} e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{xx} \varphi_{tt} dx - \kappa \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx + \mu \int_0^L \varphi_t \varphi_{tt} dx = 0,$$

de onde obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^L \left(\frac{\mu}{2} \varphi_t^2 + \kappa \varphi_{tx} \varphi_x \right) dx \right] + \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - \kappa \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx = 0. \quad (2.145)$$

e então, substituindo (2.143) em (2.145) obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) = \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - \kappa \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx.$$

Para finalizar a demonstração, usamos a desigualdade de Young e assim conclui-se a veracidade da inequação (2.144). ■

Agora, definimos o funcional de Liapunov \mathcal{L} do seguinte modo

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{F}(t) + 2\frac{\rho_2}{\kappa}\mathcal{G}(t) + NE(t) \quad (2.146)$$

onde N é uma constante positiva que será fixada posteriormente e os funcionais \mathcal{F} e \mathcal{G} são dados nos Lemas 2.1 e 2.2, respectivamente.

Para provarmos o Teorema 2.6, de acordo com o Método da Energia é suficiente provar duas condições. Primeiramente, provaremos que \mathcal{L} e $E(t)$ são equivalentes de acordo com o teorema abaixo

Teorema 2.7 *Existem constantes positivas c_1 e c_2 , tais que*

$$c_1 NE(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 NE(t). \quad (2.147)$$

Demonstração: Assumindo a existência de uma constante positiva (grande o suficiente) N e da definição de \mathcal{L} temos

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 - \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 - \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x dx + NE(t),$$

de onde segue, usando a desigualdade de Young, que

$$\mathcal{L}(t) \leq \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} (\rho_1 + \mu) \varphi^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_x^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right] dx + NE(t),$$

e da desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} ((\rho_1 + \mu)c_p + \rho_2) \varphi_x^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right] dx + NE(t). \quad (2.148)$$

onde c_p é a constante de Poincaré. Substituindo a desigualdade dada por

$$\frac{1}{2} \int_0^L \varphi_x^2 dx \leq \int_0^L [(\varphi_x + \psi)^2 + c_p \psi^2] dx, \quad (2.149)$$

na equação (2.148), chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) \leq & \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 + ((\rho_1 + \mu)c_p + \rho_2) (\varphi_x + \psi)^2 + c_p ((\rho_1 + \mu)c_p + \rho_2) \psi_x^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right] dx + \\ & + NE(t). \end{aligned}$$

Tomando

$$N_1 = \max \left\{ 1, 2 \frac{(\rho_1 + \mu)c_p + \rho_2}{\kappa}, 2c_p \frac{(\rho_1 + \mu)c_p + \rho_2}{b} \right\}$$

e

$$c_2 = N_1 + N,$$

concluimos que

$$\mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t).$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Young e de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi^2 - \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 - \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right] dx + NE(t) \\ &\geq \int_0^L \left[-\rho_1 |\varphi_t| |\varphi| - \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 - \rho_2 |\varphi_{tx}| |\varphi_x| \right] dx + NE(t) \\ &\geq \int_0^L \left[-\frac{1}{2} \left(\rho_1 + \frac{\mu \rho_2}{\kappa} \right) \varphi_t^2 - \frac{\rho_1}{2} \varphi^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_x^2 \right] dx + NE(t) \quad (2.150) \end{aligned}$$

e usando a desigualdade (2.149) e a desigualdade de Poincaré na desigualdade (2.150), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &\geq \int_0^L \left[-\frac{1}{2} \left(\rho_1 + \frac{\mu\rho_2}{\kappa} \right) \varphi_t^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 - \frac{1}{2} (\rho_1 c_p + \rho_2) \varphi_x^2 \right] dx + NE(t) \\ &\geq \int_0^L \left[-\frac{1}{2} \left(\rho_1 + \frac{\mu\rho_2}{\kappa} \right) \varphi_t^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 - (\rho_1 c_p + \rho_2) (\varphi_x + \psi)^2 - c_p (\rho_1 c_p + \rho_2) \psi_x^2 \right] dx + \\ &\quad + NE(t).\end{aligned}$$

Escolhendo $N > \max \left\{ 1 + \frac{\mu\rho_2}{\rho_1\kappa}, 1, 2\frac{\rho_1 c_p + \rho_2}{\kappa}, 2\frac{\rho_1 c_p + \rho_2}{b} \right\}$, concluímos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}(t) \geq c_1 E(t), \quad (2.151)$$

finalizando a demonstração. ■

Agora, mostraremos a seguinte condição:

Teorema 2.8 *Existe uma constante positiva β tal que*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t). \quad (2.152)$$

Demonstração: De fato, segue do Teorema 2.7 e dos Lemas 2.1 e 2.2 que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &= \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) + 2\frac{\rho_2}{\kappa} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) + N \frac{d}{dt} E(t) \\ &\leq -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu\varphi_t)^2 dx + \\ &\quad + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + 2\frac{\rho_2}{\kappa} \left(\rho_1 + \frac{\kappa^2}{2\epsilon} \right) \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - 2\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \\ &\quad + \frac{\rho_2}{\kappa} \epsilon \int_0^L \psi_x^2 dx - N\mu \int_0^L \varphi_t^2 dx - N\frac{\mu\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx \\ &\leq -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \left(b - \frac{\rho_2}{\kappa} \epsilon \right) \int_0^L \psi_x^2 dx + \\ &\quad - \frac{\rho_2}{\kappa\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu\varphi_t)^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - (N\mu - \rho_1) \int_0^L \varphi_t^2 dx + \\ &\quad - \left(N\frac{\mu\rho_2}{\kappa} - 2\frac{\rho_2}{\kappa} \left(\rho_1 + \frac{\kappa^2}{2\epsilon} \right) \right) \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx\end{aligned}$$

agora escolhendo $\epsilon = \frac{b\kappa}{2\rho_2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu\varphi_t)^2 dx + \\ &\quad - (N\mu - \rho_1) \int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \\ &\quad - \left(N \frac{\mu\rho_2}{\kappa} - 2 \frac{\rho_2}{\kappa} \left(\rho_1 + \frac{\kappa\rho_2}{b} \right) \right) \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx, \end{aligned}$$

e tomando N suficientemente grande tal que o Teorema 2.7 seja verdadeiro e

$$N \geq \frac{2}{\mu} \left(\rho_1 + \frac{\kappa\rho_2}{b} \right),$$

podemos assegurar a existência de uma constante $N_3 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu\varphi_t)^2 dx + \\ &\quad - \frac{N_3}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx. \end{aligned}$$

Finalmente, escolhendo $\beta = \min \left\{ 1, \frac{N_3}{\rho_1} \right\}$, chegamos a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t). \quad (2.153)$$

■

Desta forma, estamos nas condições do Método da Energia, logo temos que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0. \quad (2.154)$$

onde $\omega = \frac{\beta}{c_2}$ e $M = \frac{c_2}{c_1}$. Concluimos assim, a prova do Teorema 2.6.

Capítulo 3

Timoshenko-Ehrenfest Truncado com Viscosidade

Apresentaremos neste capítulo, um modelo de Timoshenko-Ehrenfest truncado com amortecimento do tipo viscosidade. O sistema que consideraremos é dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_{txx} = 0, \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (3.1)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (3.2)$$

onde todos os coeficientes são positivos e onde $\mu \varphi_{txx}$ representa a visco-elasticidade da estrutura. Além disso, consideramos as condições iniciais dadas por

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in]0, L[, \quad (3.3)$$

e, condições de contorno Neumann-Dirichlet dada por

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

Nosso objetivo é mostrar resultados de boa colocação do problema e analisar o comportamento assintótico do sistema.

3.1 Existência e Unicidade de Solução

Nesta seção estudamos a existência e unicidade da solução para o sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno Neumann-Dirichlet dadas em (3.4). Novamente, usaremos o

método de Galerkin como ferramenta matemática para conseguirmos o resultado desejado.

Inicialmente, introduzimos os seguintes espaços de Hilbert

$$\mathcal{H} = \{(u, v) \in H_*^1(0, L) \times H_*^1(0, L), \quad \kappa u_{xx} + \mu v_{xx} \in L^2(0, L)\},$$

e

$$\mathcal{V} = \{(u, v) \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L); \quad \kappa u_{xxx} + \mu v_{xxx} \in L^2(0, L)\},$$

Agora, temos as seguintes definições de Solução Forte e Solução Fraca, respectivamente:

Definição 3.1 Dizemos que uma solução forte do sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.4) é uma terna de funções $(\varphi, \varphi_t, \psi)$ tais que:

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} + k(\varphi_x + \psi) - \mu \varphi_{txx} &= 0, \quad q.s \text{ em }]0, L[\times]0, T[\\ -\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) &= 0, \quad q.s \text{ em }]0, L[\times]0, T[\end{aligned}$$

e

$$(\varphi(0), \varphi_t(0), \psi(0)) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0)$$

Definição 3.2 Dizemos que uma solução fraca do sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.4) é uma terna de funções $(\varphi, \varphi_t, \psi)$ tais que:

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x - \psi)_x + \mu \varphi_{txx} &= 0, \quad q.s. \text{ em }]0, L[\times]0, T[\\ \rho_2(\varphi_{tt}, w_x) + b(\psi_x, w_x) + k(\varphi_x + \psi, w) &= 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \end{aligned}$$

no sentido $\mathcal{D}'(0, T)$. E, $(\varphi(0), \varphi_t(0), \psi(0)) = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0)$

Enunciaremos agora, o resultado que nos garante a existência da solução forte para o sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.4).

Teorema 3.1 Se $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in \mathcal{V} \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, então o sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.4) está bem colocado para a solução forte, além disso,

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_t) &\in L^\infty(]0, T[; \mathcal{V}) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)). \end{aligned}$$

Demonstração: Para este propósito, usaremos o método de Faedo-Galerkin.

Sistema aproximado

Podemos considerar em $H_*^1(0, L)$ e em $H_0^1(0, L)$ as bases $\{w_j(x)\}_j$ e $\{\tilde{w}_j(x)\}_j$, respectivamente, onde $w_j(x) = \cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$ e $\tilde{w}_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$. Notemos que

$$\Delta w_j(x) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 w_j(x) \quad \text{e} \quad \Delta \tilde{w}_j(x) = -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \tilde{w}_j(x).$$

Além disso, $\{w_j(x)\}_j$ e $\{\tilde{w}_j(x)\}_j$ são ortogonais em $L^2(0, L)$.

Definimos $W_m = [w_1(x), w_2(x), \dots, w_m(x)]$ e $\widetilde{W}_m = [\tilde{w}_1(x), \tilde{w}_2(x), \dots, \tilde{w}_m(x)]$ subespaço m -dimensional, formado pelos m -primeiros elementos da base $\{w_j(x)\}_j$ e $\{\tilde{w}_j(x)\}_j$, respectivamente. Desta forma, o problema aproximado consiste em encontrar funções sob a forma

$$(\varphi^m, \psi^m) = \left(\sum_{j=1}^m P_{mj}(t) w_j(x), \sum_{j=1}^m Q_{mj}(t) \tilde{w}_j(x) \right) \in W_m \times \widetilde{W}_m,$$

sendo os coeficientes $P_{mj}(t), Q_{mj}(t)$, determinados de modo a satisfazer o sistema de equações diferenciais ordinárias dado por

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m, w) - \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, w) - \mu(\varphi_{txx}^m, w) = 0, \quad \forall w \in W_m \quad (3.5)$$

$$-\rho_2(\varphi_{ttx}^m, \tilde{w}) - b(\psi_{xx}^m, \tilde{w}) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \tilde{w}) = 0, \quad \forall \tilde{w} \in \widetilde{W}_m \quad (3.6)$$

$$\varphi^m(x, 0) = \varphi_0^m(x), \quad \varphi_t^m(x, 0) = \varphi_1^m(x), \quad \psi^m(x, 0) = \psi_0^m(x). \quad (3.7)$$

Por argumento de densidade, temos a seguintes convergências

$$(\varphi_0^m(x), \varphi_1^m(x)) \rightarrow (\varphi_0, \varphi_1) \text{ forte em } \mathcal{V}_1, \quad (3.8)$$

$$\psi_0^m(x) \rightarrow \psi_0(x), \text{ forte em } H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L). \quad (3.9)$$

Com o mesmo raciocínio feito para o problema do capítulo anterior chegamos a um sistema matricial equivalente a um sistema de E.D.O's de 1ª ordem e usando a Teoria de equações diferenciais ordinárias, o problema (3.5)–(3.6) tem solução $P_{mj}(t)$ e $Q_{mj}(t)$ definida sobre um intervalo $[0, t_m]$, onde $0 < t_m < T$.

A estimativa feita a seguir nos permitirá estender essa solução a todo intervalo $[0, T]$.

1ª estimativa

Nas equações (3.5) e (3.6) fazendo $w = \varphi_t^m$ e $\tilde{w} = \psi_t^m$, obtemos

$$\begin{aligned}\rho_1(\varphi_{tt}^m, \varphi_t^m) - \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, \varphi_t^m) + \mu(\varphi_{tx}^m, \varphi_{tx}^m) &= 0, \\ -\rho_2(\varphi_{ttx}^m, \psi_t^m) - b(\psi_{xx}^m, \psi_t^m) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \psi_t^m) &= 0,\end{aligned}$$

agora, integrando por partes em x as equações acima e somando os resultados, obtemos

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m, \varphi_t^m) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, (\varphi_x^m + \psi^m)_t) + \mu(\varphi_{tx}^m, \varphi_{tx}^m) + b(\psi_x^m, \psi_{tx}^m) + \rho_2(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) = 0,$$

logo

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 \right\} + \mu \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \rho_2(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) = 0. \quad (3.10)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) &= \frac{1}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m) - (\varphi_{tt}^m, \varphi_{txx}^m) - \frac{\mu}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \varphi_{ttxx}^m) \\ &= \frac{1}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\mu}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2,\end{aligned} \quad (3.11)$$

substituindo (3.11) e (3.10), ficamos com

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m) + \mu \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 = 0.\end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora, fazendo $w = \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m$ em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}(\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m) &= \frac{1}{\rho_1} (\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m) \\ &= \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2.\end{aligned} \quad (3.13)$$

substituindo (3.13) e (3.12), chegamos a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \mu \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 = 0.\end{aligned} \quad (3.14)$$

agora integrando de 0 à t , obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \\ + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 \right\} dt = \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_1^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{0,x}^m + \psi_0^m\|_2^2 + \\ + \frac{b}{2} \|\psi_{0,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{1,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_{0,xx}^m + \psi_{0,x}^m) + \mu\varphi_{1,xx}^m\|_2^2.\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \\ + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 \right\} dt \leq C_1. \end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante que independe de m e t . Então

$$\varphi_x^m + \psi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.15)$$

$$\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.16)$$

$$\varphi_t^m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.17)$$

$$\psi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \quad (3.18)$$

$$\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.19)$$

$$\varphi_{tt}^m \quad \text{é limitada em} \quad L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)). \quad (3.20)$$

Além disso, existe uma constante c_1 , tal que

$$\|\varphi_x^m\|_2^2 \leq c_1(\|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \|\psi^m\|_2^2),$$

logo

$$\varphi^m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)). \quad (3.21)$$

2ª estimativa

Fazendo $w = -\varphi_{txx}$ e $\tilde{w} = -\psi_{txx}$ nas equações (3.5) e (3.6), respectivamente, obtemos

$$-\rho_1(\varphi_{tt}^m, \varphi_{txx}^m) + \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, \varphi_{txx}^m) + \mu(\varphi_{txx}^m, \varphi_{txx}^m) = 0, \quad (3.22)$$

$$\rho_2(\varphi_{ttx}^m, \psi_{txx}^m) + b(\psi_{xx}^m, \psi_{txx}^m) - \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \psi_{txx}^m) = 0, \quad (3.23)$$

de forma análoga a primeira estimativa, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{xx}^m + \psi_x^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_{xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 \right\} + \\ - \frac{\rho_2}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{txx} + \mu\varphi_{txx}^m) + \mu \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 = 0. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Agora, fazendo $w = \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{txx} + \mu\varphi_{txx}^m$ em (2.9), obtemos

$$(\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} - \mu\varphi_{tt}^m) = -\frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} - \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2.$$

Substituindo (3.25) e (3.24), chegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{xx}^m + \psi_x^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_{xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 \right\} + \\ & + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} + \mu\varphi_{txxx}^m\|_2^2 + \mu \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{ttxx}^m\|_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

agora, integrando de 0 à t , obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{xx}^m + \psi_x^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_{xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} + \mu\varphi_{txxx}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{ttxx}^m\|_2^2 \right\} dt = \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{1,x}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{0,xx}^m + \psi_{0,x}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{b}{2} \|\psi_{0,xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{1,xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_{0,xxx}^m + \psi_{0,xx}^m) + \mu\varphi_{1,xxx}^m\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{xx}^m + \psi_x^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_{xx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} + \mu\varphi_{txxx}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{ttxx}^m\|_2^2 \right\} dt \leq C_2. \end{aligned}$$

onde C_2 é uma constante que independe de m e t . Logo

$$\varphi_{txx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.26)$$

$$\psi_{xx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.27)$$

$$\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} + \mu\varphi_{txxx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.28)$$

$$\varphi_{txx}^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.29)$$

$$\varphi_{ttxx}^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (3.30)$$

Além disso, existem constantes c_2 e c_3 , tal que

$$\begin{aligned} \|\varphi_{xx}^m\|_2^2 & \leq c_2 (\|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \|\psi_x^m\|_2^2 + \|\varphi_{txx}^m\|_2^2) \\ \|\kappa\varphi_{xxx}^m + \mu\varphi_{txxx}^m\|_2^2 & \leq c_3 (\|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{xx} + \mu\varphi_{txxx}^m\|_2^2 + \|\psi_{xx}^m\|_2^2), \end{aligned}$$

logo

$$\varphi_{xx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.31)$$

$$\kappa\varphi_{xxx}^m + \mu\varphi_{txxx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (3.32)$$

Das estimativas 1 e 2, obtemos

$$(\varphi^m, \varphi_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; \mathcal{V}) \quad (3.33)$$

$$\varphi_t^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \quad (3.34)$$

$$\psi^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \quad (3.35)$$

$$\varphi_{tt}^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)). \quad (3.36)$$

Passagem do limite

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subsequência de (φ^m) e (ψ^m) que ainda denotaremos por (φ^m) e (ψ^m) tais que:

$$(\varphi^m, \varphi_t^m) \rightharpoonup (\varphi, \varphi_t) \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; \mathcal{V}) \quad (3.37)$$

$$\varphi_t^m \rightharpoonup \varphi_t \quad \text{Fraco em } L^2(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \quad (3.38)$$

$$\psi^m \rightharpoonup \psi \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \quad (3.39)$$

$$\varphi_{tt}^m \rightharpoonup \varphi_{tt} \quad \text{Fraco em } L^2(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)). \quad (3.40)$$

Considerando nas equações (3.5) e (3.6) $w, \tilde{w} \in \mathcal{D}(0, L)$ e, em seguida, multiplicando as mesmas por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $\tilde{\theta} \in \mathcal{D}(0, T)$, respectivamente, e integrando de 0 a T , obtemos

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, w) \theta dt - \kappa \int_0^T ((\varphi_x^m + \psi^m)_x, w) \theta dt - \mu \int_0^T (\varphi_{txx}^m, w) \theta dt = 0 \quad (3.41)$$

$$-\rho_2 \int_0^T (\varphi_{ttx}^m, \tilde{w}) \tilde{\theta} dt - b \int_0^T (\psi_{xx}^m, \tilde{w}) \tilde{\theta} dt + \kappa \int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m, \tilde{w}) \tilde{\theta} dt = 0. \quad (3.42)$$

Portanto, aplicando o limite nas equações (3.41) e (3.42) e usando as convergências (3.37) a (3.40), obtemos

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}, w) \theta dt - \kappa \int_0^T ((\varphi_x + \psi)_x, w) \theta dt + \mu \int_0^T (\varphi_{txx}, w) \theta dt = 0 \quad (3.43)$$

$$-\rho_2 \int_0^T (\varphi_{ttx}, \tilde{w}) \tilde{\theta} dt - b \int_0^T (\psi_{xx}, \tilde{w}) \tilde{\theta} dt + \kappa \int_0^T (\varphi_x + \psi, \tilde{w}) \tilde{\theta} dt = 0. \quad (3.44)$$

Sejam $\zeta = w\theta \in \mathcal{D}((0, L) \times (0, T))$ e $\tilde{\zeta} = \tilde{w}\tilde{\theta} \in \mathcal{D}((0, L) \times (0, T))$, portanto

$$\int_0^T \int_0^L \{ \rho_1 \varphi_{tt}^m \zeta - \kappa (\varphi_x^m + \psi^m)_x \zeta - \mu \varphi_{txx}^m \zeta \} dx dt = 0 \quad (3.45)$$

$$\int_0^T \int_0^L \{ -\rho_2 \varphi_{ttx}^m \tilde{\zeta} - b \psi_{xx}^m \tilde{\zeta} + \kappa (\varphi_x^m + \psi^m) \tilde{\zeta} \} dx dt = 0. \quad (3.46)$$

Logo, pelo Lema Du Bois Raymond, segue que

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_{txx} = 0, \text{ q.s. em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.47)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ q.s. em }]0, L[\times]0, T[. \quad (3.48)$$

Condições iniciais

- $\varphi(x, 0) = \varphi_0$

Da convergência (3.37), obtemos

$$\int_0^T (\varphi_t^m, w) \theta dt \rightarrow \int_0^T (\varphi_t, w) \theta dt, \quad (3.49)$$

onde $w \in \mathcal{D}(0, L)$ e $\theta \in C^1([0, T], \mathbb{R})$. Integrando por partes (3.49), podemos escrever

$$(\varphi^m, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\varphi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\varphi, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\varphi, w) \theta' dt.$$

Escolhendo θ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, obtemos

$$(\varphi_0^m, w) - \int_0^T (\varphi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\varphi(x, 0), w) - \int_0^T (\varphi, w) \theta' dt.$$

Novamente, de (3.37), obtemos que

$$\int_0^T (\varphi^m, w) \theta' dt \rightarrow \int_0^T (\varphi, w) \theta' dt,$$

portanto,

$$(\varphi_0^m, w) \rightarrow (\varphi(x, 0), w).$$

Por outro lado, de (3.8), temos que

$$(\varphi_0^m, w) \rightarrow (\varphi_0, w).$$

Pela unicidade do limite, podemos concluir que

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0.$$

- $\varphi_t(x, 0) = \varphi_1$

Da convergência (3.40), obtemos

$$\int_0^T (\varphi_{tt}^m, w) \theta dt \rightarrow \int_0^T (\varphi_{tt}, w) \theta dt, \quad \forall w \in \mathcal{D}(0, L) \text{ e } \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \quad (3.50)$$

Escolhamos $\theta \in C^1([0, T[, \mathbf{R})$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e, integramos por partes, para obtermos

$$(\varphi_1^m, w) - \int_0^T (\varphi_t^m, w) \theta' dt \rightarrow (\varphi_t(x, 0), w) - \int_0^T (\varphi_t, w) \theta' dt. \quad (3.51)$$

Pela convergência anterior e, da convergência (3.37), obtemos que

$$(\varphi_1^m, w) \rightarrow (\varphi_t(x, 0), w). \quad (3.52)$$

Por outro lado, de (3.9), temos que

$$(\varphi_1^m, w) \rightarrow (\varphi_1, w).$$

Pela unicidade do limite, podemos concluir que

$$\varphi_t(x, 0) = \varphi_1. \quad (3.53)$$

- $\psi(x, 0) = \psi_0$

Pela definição de convergência em $\mathcal{D}'(0, T)$ temos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (\psi^m, w) \theta dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (\psi, w) \theta dt, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T). \quad (3.54)$$

Escolhendo $\theta \in C^1([0, T[, \mathbf{R})$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, e integrando por partes (3.54), obtemos

$$(\psi^m, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\psi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\psi, w) \theta \Big|_0^T - \int_0^T (\psi, w) \theta' dt.$$

Dessa forma, Temos

$$(\psi_0^m, w) - \int_0^T (\psi^m, w) \theta' dt \rightarrow (\psi(x, 0), w) - \int_0^T (\psi, w) \theta' dt.$$

portanto

$$(\psi_0^m, w) \rightarrow (\psi(x, 0), w).$$

De (3.9), temos que

$$(\psi_0^m, w) \longrightarrow (\psi_0, w).$$

Pela unicidade do limite, podemos concluir que

$$\psi(x, 0) = \psi_0.$$

Dependência contínua e Unicidade

Sejam $\{\varphi, \varphi_t, \psi\}$ e $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\psi}\}$ soluções fortes do sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.4) correspondentes as condições iniciais $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0\}$ e $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_0\}$, respectivamente. Nessas condições, temos que $\{y, y_t, z\} = \{\varphi - \tilde{\varphi}, \varphi_t - \tilde{\varphi}_t, \psi - \tilde{\psi}\}$ satisfazem as seguintes equações

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + z)_x - \mu y_{txx} = 0, \quad (3.55)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa(y_x + z) = 0. \quad (3.56)$$

Com as condições iniciais $\{y(x, 0), y_t(x, 0), z(x, 0)\} = \{\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0, \varphi_1 - \tilde{\varphi}_1, \psi_0 - \tilde{\psi}_0\}$, onde

$$\begin{aligned} (y, y_t) &\in L^\infty(]0, T[; \mathcal{V}) \\ z &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)). \end{aligned}$$

Multiplicando as equações (3.55) e (3.56) por y_t e z_t , respectivamente. Posteriormente integrando em $(0, L)$ e somando os resultados, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 \|y_t\|_2^2 + \kappa \|y_x + z\|_2^2 + b \|z_x\|_2^2 \right\} + \rho_2 (y_{tt}, z_{tx}) + \mu \|y_{tx}\|_2^2 dx = 0. \quad (3.57)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (y_{tt}, z_{tx}) &= \frac{1}{\kappa} (y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx})_t) - (y_{tt}, y_{txx}) + \frac{\mu}{\kappa} \|y_{tx}\|_2^2 dx \\ &= \frac{1}{\kappa} (y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx})_t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|y_{tx}\|_2^2 + \frac{\mu}{\kappa} \|y_{tx}\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Substituindo (3.58) em (3.57), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 \|y_t\|_2^2 + \kappa \|y_x + z\|_2^2 + b \|z_x\|_2^2 + \rho_2 \|y_{tx}\|_2^2 \right\} + \\ \frac{\rho_2}{\kappa} (y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx})_t) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Agora , multiplicando a equação (3.55) por $(\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx})_t$ resulta que

$$(y_{tt}, (\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx})_t) = \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx}\|_2^2 .$$

Assim, chegamos a

$$\frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 \|y_t\|_2^2 + \kappa \|y_x + z\|_2^2 + b \|z_x\|_2^2 + \rho_2 \|y_{tx}\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 \kappa} \|\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx}\|_2^2 \right\} \leq 0,$$

logo,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \|y_t\|_2^2 + \|y_x + z\|_2^2 + \|z_x\|_2^2 + \|y_{tx}\|_2^2 + \|\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx}\|_2^2 \right\} \leq 0. \quad (3.60)$$

Integrando (3.60) em $(0, t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_t\|_2^2 + \|y_x + z\|_2^2 + \|z_x\|_2^2 + \|y_{tx}\|_2^2 + \|\kappa(y_x + z)_x + \mu y_{txx}\|_2^2 &\leq \|y_1\|_2^2 + \\ &+ \|y_{0,x} + z_0\|_2^2 + \|z_{0,x}\|_2^2 + \|y_{1,x}\|_2^2 + \|\kappa(y_{0,x} + z_0)_x + \mu y_{1,xx}\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

A dependência contínua dos dados iniciais para as soluções fortes se verifica diretamente da desigualdade acima. E, em particular, temos a unicidade de solução forte, finalizando a demonstração. ■

Por conseguinte, enunciaremos e demonstraremos o resultado para a boa colocação para solução fraca.

Teorema 3.2 *Se $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in \mathcal{H} \times H_0^1(0, L)$, então o sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.4) está bem colocado para a solução fraca, tal que*

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_t) &\in L^\infty(]0, T[; \mathcal{H}) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)). \end{aligned}$$

Demonstração:

A existência de solução fraca será provada por aproximação de uma sequência de soluções fortes encontradas no Teorema 3.1.

Existência

Dados $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in \mathcal{H} \times H_0^1(0, L)$, existem seqüências $(\varphi_0^m, \varphi_1^m)$ e (ψ_0^m) em \mathcal{V} e $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, respectivamente, tais que

$$(\varphi_0^m, \varphi_1^m) \rightarrow (\varphi_0, \varphi_1) \text{ forte em } \mathcal{H}, \quad (3.62)$$

$$\psi_0^m \rightarrow \psi_0 \text{ forte em } H_0^1(0, L). \quad (3.63)$$

Para cada m , o Teorema 2.1, garante a existem de uma única solução forte $\{\varphi^m, \varphi_t^m, \psi^m\}$, tal que

$$\begin{aligned} (\varphi^m, \varphi_t^m) &\in L^\infty(]0, T[; \mathcal{V}) \\ \psi^m &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)). \end{aligned}$$

$$\rho_1 \varphi_{tt}^m - \kappa(\varphi_x^m + \psi^m) - \mu \varphi_{txx}^m = 0, \text{ q.s em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.64)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx}^m - b \psi_{xx}^m + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m) = 0, \text{ q.s em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.65)$$

e

$$(\varphi^m(0), \varphi_t^m(0), \psi^m(0)) = (\varphi_0^m, \varphi_1^m, \psi_0^m).$$

Multiplicando as equações (3.64) e (3.65) por φ_t^m e ψ_t^m , respectivamente, e depois integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\rho_1(\varphi_{tt}^m \varphi_t^m) - \kappa((\varphi_x^m + \psi^m)_x, \varphi_t^m) - \mu(\varphi_{txx}^m, \varphi_t^m) = 0,$$

$$-\rho_2(\varphi_{ttx}^m, \psi_t^m) - b(\psi_{xx}^m, \psi_t^m) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \psi_t^m) = 0,$$

agora, integrando por partes em x as equações acima e somando os resultados, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \mu \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \rho_2(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) = 0. \quad (3.66)$$

Novamente, usando a seguinte identidade

$$(\varphi_{tt}^m, \psi_{tx}^m) = \frac{1}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu \varphi_{ttxx}^m) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\mu}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ &+ \frac{\rho_2}{\kappa} (\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu \varphi_{ttxx}^m) + \mu \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2 \mu}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 = 0. \quad (3.67) \end{aligned}$$

Agora, multiplicando (3.64) por $\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m$, obtemos

$$(\varphi_{tt}^m, \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}^m) = \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2. \quad (3.68)$$

substituindo (3.68) e (3.67), chegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 \right\} + \\ & + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \mu \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2\mu}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Agora, integrando de 0 à t , obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 \right\} dt = \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_1^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_{0,x}^m + \psi_0^m\|_2^2 + \\ & + \frac{b}{2} \|\psi_{0,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{1,x}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_{0,xx}^m + \psi_{0,x}^m) + \mu\varphi_{1,xx}^m\|_2^2. \end{aligned}$$

Assim, pelas convergências (3.62) e (3.63) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \|\varphi_t^m\|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\psi_x^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \|\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m\|_2^2 + \\ & + \frac{\rho_2}{2} \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \mu \int_0^t \left\{ \|\varphi_{tx}^m\|_2^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \|\varphi_{ttx}^m\|_2^2 \right\} dt \leq C_1. \end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante que independe de m e t . Então

$$\varphi_x^m + \psi^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.70)$$

$$\varphi_t^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.71)$$

$$\varphi_t^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.72)$$

$$\psi^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \quad (3.73)$$

$$\kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.74)$$

$$\varphi_{tt}^m \text{ é limitada em } L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)). \quad (3.75)$$

Além disso, existe uma constante c_1 , tal que

$$\|\varphi_x^m\|_2^2 \leq c_1(\|\varphi_x^m + \psi^m\|_2^2 + \|\psi^m\|_2^2),$$

e

$$\kappa\varphi_{xx}^m + \mu\varphi_{txx}^m = \kappa(\varphi_x^m + \psi^m)_x + \mu\varphi_{txx}^m - \kappa\psi_x^m$$

logo

$$\varphi^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.76)$$

$$\kappa\varphi_{xx}^m + \mu\varphi_{txx}^m \text{ é limitada em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (3.77)$$

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subsequência de (φ^m) e (ψ^m) que ainda denotaremos por (φ^m) e (ψ^m) tais que:

$$\varphi^m \rightharpoonup \varphi \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.78)$$

$$\varphi_t^m \rightharpoonup \varphi_t \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.79)$$

$$\psi^m \rightharpoonup \psi \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)) \quad (3.80)$$

$$\varphi_t^m \rightharpoonup \varphi_t \quad \text{Fraco em } L^2(]0, T[; L^2(0, L)) \quad (3.81)$$

$$\varphi_{tt}^m \rightharpoonup \varphi_{tt} \quad \text{Fraco em } L^2(]0, T[; H_*^1(0, L)) \quad (3.82)$$

$$\kappa\varphi_{xx}^m + \mu\varphi_{txx}^m \rightharpoonup \kappa\varphi_{xx} + \mu\varphi_{txx} \quad \text{Fraco estrela em } L^\infty(]0, T[; L^2(0, L)). \quad (3.83)$$

Dessa forma, aplicando o limite na equação

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, w)\theta dt - \int_0^T (\kappa\varphi_{xx}^m + \mu\varphi_{txx}^m, w)\theta dt + \kappa \int_0^T (\psi_x^m, w)\theta dt = 0. \quad (3.84)$$

onde $w, \in \mathcal{D}(0, L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, obtemos

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_{tt}, w)\theta dt - \int_0^T (\kappa\varphi_{xx} + \mu\varphi_{txx}, w)\theta dt + \kappa \int_0^T (\psi_x, w)\theta dt = 0. \quad (3.85)$$

Seja $\zeta = w\theta \in \mathcal{D}((0, L) \times (0, T))$, assim ficamos com

$$\langle \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu\varphi_{txx}, \zeta \rangle = 0. \quad (3.86)$$

Logo, pelo Lema Du Bois Raymond, segue que

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu\varphi_{txx} = 0, \text{ q.s. em }]0, L[\times]0, T[. \quad (3.87)$$

Por outro lado, como

$$\rho_2(\varphi_{tt}^m, \tilde{w}_x) + b(\psi_x^m, \tilde{w}_x) + \kappa(\varphi_x^m + \psi^m, \tilde{w}) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \quad (3.88)$$

então, multiplicando (3.88) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando em $(0, T)$, obtemos

$$\rho_2 \int_0^T (\varphi_{tt}^m, w_x) \theta dx + b \int_0^T (\psi_x^m, w_x) \theta dx + \kappa \int_0^T (\varphi_x^m + \psi^m, w) \theta dx = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L),$$

Aplicando o limite, obtemos

$$\rho_2 \int_0^T (\varphi_{tt}, w_x) \theta dx + b \int_0^T (\psi_x, w_x) \theta dx + \kappa \int_0^T (\varphi_x + \psi, w) \theta dx = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L).$$

Logo

$$\langle \rho_2(\varphi_{tt}, w_x), \theta \rangle + b \langle (\psi_x, w_x), \theta \rangle + \kappa \langle (\varphi_x + \psi, w), \theta \rangle = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L),$$

ou seja,

$$\langle \rho_2(\varphi_{tt}, w_x) + b(\psi_x, w_x) + \kappa(\varphi_x + \psi, w), \theta \rangle = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Assim,

$$\rho_2(\varphi_{tt}, w_x) + b(\psi_x, w_x) + \kappa(\varphi_x + \psi, w) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T).$$

Condições iniciais

Para mostrarmos as condições iniciais, basta usarmos o mesmo raciocínio do teorema anterior.

Unicidade

Sejam $\{\varphi, \varphi_t, \psi\}$ e $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\psi}\}$ soluções fracas do sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.4) correspondentes as condições iniciais $\{\varphi_0, \varphi_1, \psi_0\}$. Nessas condições, temos que $\{y, y_t, z\} = \{\varphi - \tilde{\varphi}, \varphi_t - \tilde{\varphi}_t, \psi - \tilde{\psi}\}$ satisfazem as seguintes equações

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + z)_x - \mu y_{txx} = 0, \quad \text{q.s em }]0, L[\times]0, T[\quad (3.89)$$

$$\rho_2(y_{tt}, w_x) + b(z_x, w_x) + \kappa(y_x + z, w) = 0, \quad \forall w \in H_0^1(0, L). \quad (3.90)$$

Com as condições iniciais $\{y(x, 0), y_t(x, 0), z(x, 0)\} = \{0, 0, 0\}$, onde

$$\begin{aligned} (y, y_t) &\in L^\infty(]0, T[; \mathcal{H}) \\ z &\in L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L)). \end{aligned}$$

Observemos que como não temos o espaço da z_t , não faz sentido a dualidade (y_{tt}, z_{tx}) .

Para resolvermos este definiremos os seguintes funcionais:

$$\sigma^1(t) = \begin{cases} -\int_t^s y(r)dr, & 0 < t < s; \\ 0, & s \leq t < T \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma^2(t) = \begin{cases} -\int_t^s z(r)dr, & 0 < t < s; \\ 0, & s \leq t < T \end{cases}$$

Portanto, $\sigma^2 \in L^\infty(]0, T[; H_0^1(0, L))$ e faz sentido a dualidade (y_{tt}, σ_x^2) . Assim

$$\rho_1 \int_0^s (y_{tt}, \sigma^1) dt + \kappa \int_0^s (y_x + z, \sigma_x^1) dt + \mu \int_0^s (y_{tx}, \sigma_x^1) dt = 0, \quad (3.91)$$

$$\rho_2 \int_0^s (y_{tt}, \sigma_x^2) dt + b \int_0^s (z_x, \sigma_x^2) dt + \kappa \int_0^s (y_x + z, \sigma^2) dt = 0. \quad (3.92)$$

Somando as equações (3.91) e (3.91), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^s (y_{tt}, \sigma^1) dt + \kappa \int_0^s (y_x + z, \sigma_x^1 + \sigma^2) dt + b \int_0^s (z_x, \sigma_x^2) dt + \\ + \rho_2 \int_0^s (y_{tt}, \sigma_x^2) dt + \mu \int_0^s (y_{tx}, \sigma_x^1) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Agora, iremos analisar cada integral separadamente. inicialmente, sejam

$\sigma_1^1(l) = \int_0^l y(r)dr$ e $\sigma_1^2(l) = \int_0^l z(r)dr$, logo temos que $\sigma^i(t) = \sigma_1^i(t) - \sigma_1^i(s)$, para $i = 1, 2$, e $\sigma_t^1(t) = y(t)$ e $\sigma_t^2(t) = z(t)$, para $t \in (0, s)$. logo

$$\int_0^s (y_{tt}, \sigma^1) dt = (y_t, \sigma^1) \Big|_0^s - \int_0^s (y_t, \sigma_t^1) dt = -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|y_t\|_2^2 dt = -\frac{1}{2} \|y(s)\|_2^2 \quad (3.94)$$

e,

$$\begin{aligned} \int_0^s (y_x + z, \sigma_x^1 + \sigma^2) dt &= \int_0^s ((\sigma_x^1 + \sigma^2)_t, \sigma_x^1 + \sigma^2) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|\sigma_x^1 + \sigma^2\|_2^2 dt \\ &= -\frac{1}{2} \|\sigma_x^1(0) + \sigma^2(0)\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.95)$$

e,

$$\int_0^s (z_x, \sigma_x^2) dt = \int_0^s (\sigma_{tx}^2, \sigma_x^2) dt = \int_0^s \frac{d}{dt} \|\sigma_x^2\|_2^2 dt = -\frac{1}{2} \|\sigma_x^2(0)\|_2^2, \quad (3.96)$$

e,

$$\begin{aligned} \int_0^s (y_{tt}, \sigma_x^2) dt &= (y_t, \sigma_x^2) \Big|_0^s - \int_0^s (y_t, \sigma_{tx}^2) dt \\ &= - \int_0^s (y_t, z_x) dt \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^s \left(y_t, \frac{\rho_1}{\kappa} y_{tt} - y_{xx} + \frac{\mu}{\kappa} y_t \right) dt \\ &= - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^s (y_t, y_{tt}) dt + \int_0^s (y_t, y_{xx}) dt - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^s (y_t, y_t) dt \\ &= - \frac{\rho_1}{2\kappa} \int_0^s \frac{d}{dt} \| y_t \|_2^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \| y_x \|_2^2 dt - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^s \| y_t \|_2^2 dt \\ &= - \frac{\rho_1}{2\kappa} \| y_t(s) \|_2^2 - \frac{1}{2} \| y_x(s) \|_2^2 - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^s \| y_t \|_2^2 dt \end{aligned} \quad (3.98)$$

e, por fim

$$\int_0^s (y_{tx}, \sigma_x^1) dt = (y_x, \sigma_x^1) \Big|_0^s - \int_0^s (y_x, \sigma_{tx}^1) dt = - \int_0^s (y_x, y_x) dt = - \int_0^s \| y_x(t) \|_2^2 dt. \quad (3.99)$$

Substituindo (3.94), (3.95), (3.96), (3.97) e (3.99) em (3.93), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_1}{2} \| y(s) \|_2^2 + \frac{\kappa}{2} \| \sigma_x^1(0) + \sigma^2(0) \|_2^2 + \frac{b}{2} \| \sigma_x^2(0) \|_2^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \| y_t(s) \|_2^2 + \\ &+ \frac{\rho_2}{2} \| y_x(s) \|_2^2 + \frac{\mu \rho_2}{\kappa} \int_0^s \| y_t \|_2^2 dt + \mu \int_0^s \| y_x(t) \|_2^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Então $y = 0$ e $y_t = 0$, portanto, $\varphi = \tilde{\varphi}$ e $\varphi_t = \tilde{\varphi}_t$. Além disso, de (3.89), temos que $z_x = 0$. Desde que $z \in H_0^1(0, L)$, então $z = 0$, portanto, $\psi = \tilde{\psi}$, assim concluímos que a solução é única.

Dependência Contínua

A dependência contínua dos dados iniciais para soluções fracas seguem diretamente da desigualdade (3.61) que nos dá a dependência contínua para soluções fortes e de argumentos de densidade. ■

Observamos novamente que, se considerarmos as condições de contorno Dirichlet-Neumann, isto é

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \text{ em }]0, +\infty[, \quad (3.100)$$

com raciocínio análogo, demonstra-se os seguintes Teoremas

Teorema 3.3 *Se $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in \mathcal{V}_1 \times H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$, então o sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.100) está bem colocado para a solução forte, além disso,*

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_t) &\in L^\infty(]0, T[; \mathcal{V}_1) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)). \end{aligned}$$

onde,

$$\mathcal{V}_1 = \{(u, v) \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); \quad \kappa u_{xxx} + \mu v_{xxx} \in L^2(0, L)\},$$

e

Teorema 3.4 *Se $(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0) \in \mathcal{H}_1 \times H_*^1(0, L)$, então o sistema (3.1)- (3.3) com condições de contorno (3.100) está bem colocado para a solução fraca, tal que*

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_t) &\in L^\infty(]0, T[; \mathcal{H}_1) \\ \psi &\in L^\infty(]0, T[; H_*^1(0, L)) \\ \varphi_{tt} &\in L^2(]0, T[; H_0^1(0, L)). \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{H}_1 = \{(u, v) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L), \quad \kappa u_{xx} + \mu v_{xx} \in L^2(0, L)\},$$

Encerramos então esta subseção. Passaremos agora, à analisar o comportamento assintótico do sistema.

3.2 Estabilidade exponencial

Nesta seção mostraremos que a energia desses modelos decaem exponencialmente independentemente da relação entre as velocidades. inicialmente, definiremos para todo $t \geq 0$,

a energia do sistema (3.1) – (3.3) com as condições de contorno (3.4) ou (3.100) dada por,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx}^2 + b \psi_x^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} (\kappa (\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 \right] dx, \quad (3.101)$$

Novamente, mostrar a natureza dissipativa da energia $E(t)$ é nosso primeiro resultado, dado pelo seguinte teorema

Teorema 3.5 *A energia $E(t)$ do sistema (3.1) – (3.3) com as condições de contorno (3.4) ou (3.100) satisfaz a lei de dissipação de energia dada por*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^L \left(\varphi_{tx}^2 + \frac{\rho_2}{\kappa} \varphi_{ttx}^2 \right) dx. \quad (3.102)$$

Demonstração: De fato, multiplicando a equação (3.1) por φ_t e a equação (3.2) por ψ_t e depois integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_t dx - \mu \int_0^L \varphi_{txx} \varphi_t dx = 0, \quad (3.103)$$

$$-\rho_2 \int_0^L \varphi_{ttx} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0, \quad (3.104)$$

integrando por parte e usando as condições de contorno (3.4) ou (3.100), obtemos

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \varphi_t^2 dx \right] + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx + \mu \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx = 0, \quad (3.105)$$

$$\rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_{tx} dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \psi_x^2 dx \right] + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0, \quad (3.106)$$

somando as equações (3.105) e (3.106), temos que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 + b \psi_x^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 \right] dx + \mu \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_{tx} dx = 0. \quad (3.107)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_{tx} dx &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa (\varphi_x + \psi)_{tx} + \mu \varphi_{ttxx}) dx - \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{ttxx} dx - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{ttxx} dx \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa (\varphi_x + \psi)_{tx} + \mu \varphi_{ttxx}) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \frac{\mu}{\kappa} \int_0^L \varphi_{ttx}^2 dx, \end{aligned} \quad (3.108)$$

substituindo 2.131 e (2.130), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 \varphi_t^2 + b \psi_x^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right] dx + \mu \int_0^L \varphi_t^2 dx + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa (\varphi_x + \psi)_{tx} + \mu \varphi_{ttxx}) dx + \frac{\mu \rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{ttx}^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Agora, multiplicando a equação (3.1) por $\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}$ e integrando em 0 a L , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}) dx &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu\varphi_{txx}) (\kappa(\varphi_x + \psi)_{tx} + \mu\varphi_{ttxx}) dx \\ &= \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu\varphi_{txx})^2 dx. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Substituindo (3.110) em (3.109) e pela definição de $E(t)$ obtemos (3.102). ■

Como no capítulo anterior, Para mostrar que a energia $E(t)$ seja exponencialmente estável basta provar o seguinte Teorema .

Teorema 3.6 *Existem duas constantes positivas M e ω que não dependem das condições iniciais e não dependem de qualquer relação entre seus coeficiente, tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}; \quad \forall t > 0. \quad (3.111)$$

A demonstração do Teorema 3.6 será feita usando o método da energia, e este por sua vez, será estabelecido basicamente com o uso de um só lema . Introduziremos agora, o seguinte funcional

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tx}^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right) dx \quad (3.112)$$

Lema 3.1 *Seja (φ, ψ_t, ψ) uma solução do sistema (3.1) – (3.3) com as condições de contorno (3.4) ou (3.100). Então*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) = -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx. \quad (3.113)$$

Demonstração: Multiplicamos a equação (3.1) por φ e integramos em $(0, L)$, obtemos que

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi dx - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi dx - \mu \int_0^L \varphi_{txx} \varphi dx = 0,$$

integrando por parte, e usando as condições de contorno, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx = 0, \quad (3.114)$$

e multiplicando a equação (3.2) por ψ e integrando em $(0, L)$, obtemos que

$$-\rho_2 \int_0^L \varphi_{ttx} \psi dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx = 0,$$

integrando por parte, e usando as condições de contorno, obtemos

$$\rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx = 0, \quad (3.115)$$

somando as equações (3.114) e (3.115), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + \\ + b \int_0^L \psi_x^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx}) dx - \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx - \frac{\mu}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{txx} dx \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu \varphi_t) dx - \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + \frac{\mu}{2\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx, \end{aligned} \quad (3.116)$$

substituindo 3.116 e (3.115), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tx}^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx}) dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Agora, multiplicando a equação (3.1) por $\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx}$ e integrando em 0 a L , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx}) dx &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx}) (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx}) dx \\ &= \frac{1}{\rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tx}^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.118)$$

E, integrando por partes o termo $\int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tx}^2 dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{ttx} \varphi_x dx = 0. \end{aligned}$$

Da identidade $\varphi_{ttx} \varphi_x = \frac{d}{dt}(\varphi_{tx} \varphi_t) - \varphi_{tx}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^L \rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tx}^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x dx \right] - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Substituindo a equação (3.112) em (3.119), obtemos o resultado de (3.113). ■

Agora definimos o funcional de Lyapunov \mathcal{L} por

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{F}(t) + NE(t) \quad (3.120)$$

onde N é uma constante positiva que será fixada posteriormente e o funcional \mathcal{F} é dado no Lema 3.1. Primeiramente, provaremos que $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ são equivalentes, isto é, que vale a condição 1 do método da energia de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 3.7 *Existem constantes positivas c_1 e c_2 , tais que*

$$c_1 NE(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 NE(t). \quad (3.121)$$

Demonstração: Assumindo a existência de uma constante positiva (grande o suficiente) N e da definição de $\mathcal{L}(t)$ temos

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tx}^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right] dx + NE(t). \quad (3.122)$$

Usando a desigualdade de Young's e a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} (\rho_1 c_p + \mu + \rho_2) \varphi_x^2 + \frac{\rho_2}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\kappa} \right) \varphi_{tx}^2 \right] dx + NE(t).$$

Agora, usando a desigualdade (2.149) chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &\leq \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 + (\rho_1 c_p + \mu + \rho_2) (\varphi_x + \psi)^2 + c_p (\rho_1 c_p + \mu + \rho_2) \psi_x^2 \right] dx + \\ &+ \int_0^L \frac{\rho_2}{2} \left(1 + \frac{\mu}{\kappa} \right) \varphi_{tx}^2 dx + NE(t). \end{aligned}$$

Por fim, tomando $N_1 = \max \left\{ 1, 2 \frac{\rho_1 c_p + \mu + \rho_2}{\kappa}, 2 c_p \frac{\rho_1 c_p + \mu + \rho_2}{b}, \left(1 + \frac{\mu}{\kappa} \right) \right\}$ e $c_2 = N_1 + N$, concluímos que

$$\mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t).$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Young e de Poincaré, obtemos

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu}{2} \varphi_x^2 + \frac{\mu \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tx}^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right] dx + NE(t). \quad (3.123)$$

usando as desigualdades de Young e de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &\geq \int_0^L [-\rho_1 |\varphi_t| |\varphi| - \rho_2 |\varphi_{tx}| |\varphi_x|] dx + NE(t) \\ &\geq \int_0^L \left[-\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 - \frac{\rho_1}{2} \varphi^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_x^2 \right] dx + NE(t) \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade (2.149), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &\geq \int_0^L \left[-\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 - \frac{1}{2} (\rho_1 c_p + \rho_2) \varphi_x^2 \right] dx + NE(t) \\ &\geq \int_0^L \left[-\frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 - \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 - (\rho_1 c_p + \rho_2) (\varphi_x + \psi)^2 - c_p (\rho_1 c_p + \rho_2) \psi_x^2 \right] dx + NE(t). \end{aligned}$$

Tomando $N_2 = \max \left\{ 1, 2\frac{\rho_1 c_p + \rho_2}{\kappa}, 2\frac{\rho_1 c_p + \rho_2}{b} \right\}$ e $N > N_2$ concluímos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}(t) \geq c_1 E(t), \quad (3.124)$$

que conclui a demonstração. ■

Agora, mostraremos que vale a segunda condição do método da energia de acordo com seguinte teorema:

Teorema 3.8 *Existe uma constante positiva β tal que*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t). \quad (3.125)$$

Demonstração: De fato, segue do Teorema 3.7 e do Lema 4.2 que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &= \frac{d}{dt} \mathcal{I}(t) + N \frac{d}{dt} E(t) \\ &\leq -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx + \\ &+ \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - N\mu \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - N \frac{\mu \rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{ttx}^2 dx \\ &\leq -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx + \\ &- \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + 2\rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - N\mu \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx + \\ &- \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx - [N\mu - (2\rho_1 c_p + \rho_2)] \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx, \end{aligned}$$

e, tomando N suficientemente grande tal que o Teorema 3.7 seja verdadeiro e

$N \geq \frac{2\rho_1 c_p + \rho_2}{\mu}$ podemos assegurar a existência de uma constante $N_3 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L (\kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu \varphi_{txx})^2 dx + \\ &- \frac{\rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{N_3}{2} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\beta = \min \left\{ 1, \frac{N_3}{\rho_2} \right\}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t). \quad (3.126)$$

■

Desta forma, estamos nas condições do Método da Energia, logo temos que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0, \quad (3.127)$$

onde $\omega = \frac{\beta}{c_2}$ e $M = \frac{c_2}{c_1}$. Concluimos assim, a prova do Teorema 2.6.

Capítulo 4

Timoshenko-Ehrenfest Truncado com Delay

Nesta seção, analisaremos um modelo de Timoshenko-Ehrenfest versão de Elishakoff com termo de retardo no tempo, este termo é conhecido como Delay, mostraremos que este, diferentemente do que acontece com o modelo clássico de Timoshenko-Ehrenfest, decai exponencialmente independentemente da igualdade de velocidade de propagação de ondas. Estudamos o sistema dissipativo Timoshenko-Ehrenfest com atraso interno dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x + \mu_1 \varphi_t + \mu_2 \varphi_t(x, t - \tau) = 0, \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (4.1)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (4.2)$$

onde todos os coeficientes são positivos e onde $\mu_1 \varphi_t(x, t)$ representa um amortecimento por atrito, $\mu_2 \varphi_t(x, t - \tau)$ representa o atraso de tempo no deslocamento vertical e $\tau > 0$ representa o respectivo tempo de retardamento. Além disso, consideramos condições iniciais dadas por

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in]0, L[. \quad (4.3)$$

Agora, motivado por técnicas matemáticas devido a Laskri [67] (Veja também Nicaise e Pignotti [56, 57] e Feng e Yang [31]), Introduzimos uma nova variável dependente para lidar com o termo de atraso. Mais precisamente, temos

$$\eta(x, \rho, t) = \varphi_t(x, t - \tau \rho), \quad x \in]0, L[, \quad \rho \in [0, 1], \quad t > 0. \quad (4.4)$$

Naturalmente, temos

$$\tau\eta_t(x, \rho, t) + \eta_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad x \in]0, L[, \quad \rho \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (4.5)$$

de onde reescrevemos as equações (4.1)–(4.2) do seguinte modo

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1\varphi_t + \mu_2\eta(x, 1, t) = 0, \quad \text{em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (4.6)$$

$$-\rho_2\varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad \text{em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (4.7)$$

$$\tau\eta_t(x, \rho, t) + \eta_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad \text{em }]0, L[\times [0, 1] \times]0, \infty[. \quad (4.8)$$

Por sua vez, as condições iniciais são

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in]0, L[, \quad (4.9)$$

$$\eta(x, \rho, 0) = f_0(x, -\rho\tau), \quad (x, \rho) \in]0, L[\times [0, 1]. \quad (4.10)$$

Inicialmente, estudaremos a existência e a unicidade da solução para o sistema.

4.1 Existência e Unicidade de Solução

Para fazermos análise sobre a existência e a unicidade de solução para o sistema (4.6)–(4.8) usaremos o método de semigrupo, pois, não foi possível encontrar trabalhos ou ferramentas matemáticas para usar o Método de Galerkin em sistemas que envolvam termos de Delay. Além disso, somente foi possível, neste trabalho, construir um cenário de semigrupo para o sistema desacoplado, que chamaremos de sistema adjunto, que é dado por

$$B\varphi_{tt} + \mu_1 C\varphi_t + b\kappa\varphi_{xxxx} + \mu_2 C\eta(x, 1, t) = 0, \quad \text{em }]0, L[\times]0, \infty[\quad (4.11)$$

$$\tau\eta_t(x, \rho, t) + \eta_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad \text{em }]0, L[\times [0, 1] \times]0, \infty[, \quad (4.12)$$

onde $B = (\kappa\rho_1 I - (\kappa\rho_2 + b\rho_1) \partial_{xx})$ e $C = (\kappa I - b\partial_{xx})$. E, com as condições iniciais dadas por

$$(\varphi(x, 0), \varphi_t(x, 0)) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x)), \quad \text{em }]0, L[, \quad (4.13)$$

$$\eta(x, \rho, 0) = f_0(x, -\rho\tau), \quad \text{em }]0, L[\times [0, 1]. \quad (4.14)$$

Por consequência do desacoplamento ficamos com uma equação de quarta ordem na variável x , assim, para resolver os problemas que aparecerem, as seguintes condições de contorno são necessárias,

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \varphi_{xxx}(0, t) = \varphi_{xxx}(L, t) = \eta_x(0, \rho, t) = \eta_x(L, \rho, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.15)$$

Para mostrarmos que o sistema (4.11)- (4.15) está bem colocado utilizaremos a abordagem de [56] (ver também [67]) para provar que, o operador \mathcal{A} definido em (4.18) gera um semi-grupo de contração no espaço de Hilbert \mathcal{H} dado por (4.22).

A formulação do semi-grupo do problema de valor inicial (4.11)- (4.14) é da seguinte forma, seja $U = (\varphi, \phi, \eta)'$, onde $\phi = \varphi_t$, então U satisfaz o problema de Cauchy dado por

$$U_t = \mathcal{A}U \quad (4.16)$$

$$U(0) = U_0 \quad (4.17)$$

onde, $U_0 = (\varphi_0, u_1, f_0(x, -\rho\tau))'$ e o operador \mathcal{A} é definido da seguinte forma

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \phi \\ -\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b\kappa B^{-1} \varphi_{xxxx} \\ -\frac{1}{\tau} \eta_\rho \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Para que o operador \mathcal{A} esteja bem definido, precisaremos tomar o operador B definido bijetor.

Lema 4.1 *Sejam $\alpha \geq 0$ e $\beta > 0$. Se definirmos $D := \alpha I - \beta \partial_{xx} : H_*^1(0, L) \rightarrow H^{-*}(0, L)$, onde $H^{-*}(0, L)$ representa o dual de $H_*^1(0, L)$, tal que para todo $u \in H_*^1(0, L)$ temos $Du = D_u$ definida da seguinte forma*

$$D_u(f) = \int_0^L (\alpha u - \beta u_{xx}) \cdot f(x) dx, \quad \forall f \in H_*^1(0, L).$$

Então, D é um operador bijetor.

Demonstração: Primeiramente, notamos que D está bem definido. Com efeito, seja $u \in H_*^1(0, L)$ pela linearidade da integral temos que D_u é linear. Outrossim, integrando por parte e, usando desigualdades envolvendo integrais, obtemos uma constante c , tal que

$$|D_u(f)| \leq c,$$

logo, D_u é limitado. Portanto $D_u \in H^{-*}(0, L)$. Além disso, sejam h_1 e h_2 , tais que $h_1 = D_u$ e $h_2 = D_u$, afirmamos que $h_1 = h_2$. De fato, por definição temos que

$$h_1(f) = \int_0^L (\alpha u - \beta u_{xx}) \cdot f(x) dx, \quad \forall f \in H_*^1(0, L).$$

e

$$h_2(g) = \int_0^L (\alpha u - \beta u_{xx}) \cdot g(x) dx, \quad \forall g \in H_*^1(0, L).$$

Tomando $f = g$ e, subtraindo as duas igualdades, obtemos

$$(h_1 - h_2)(f) = 0, \quad \forall f \in H_*^1(0, L). \quad (4.19)$$

Daí concluímos que $h_1 = h_2$. E, portanto a D está bem definida.

Agora, notamos que D é um operador injetor. De fato, sejam $u \in H_*^1(0, L)$ e $v \in H_*^1(0, L)$, tais que

$$\alpha u - \beta u_{xx} = \alpha v - \beta v_{xx},$$

logo

$$\alpha(u - v) - \beta(u - v)_{xx} = 0. \quad (4.20)$$

Multiplicando a equação (4.20) por $(u - v)$ e integrando em $(0, L)$, obtemos

$$\alpha \int_0^L (u - v)^2 dx + \beta \int_0^L (u - v)_x^2 dx = 0, \quad (4.21)$$

assim $u = v$, portanto, D é um operador injetor.

Por fim, mostra-se que D é um operador sobrejetor. De fato, seja $h \in H^{-*}(0, L)$, usando o Teorema de Lax-Milgram, obtemos a existência de uma função $u \in H_*^1(0, L)$ tal que

$$\int_0^L (\alpha u - \beta u_{xx}) \cdot f(x) dx = \int_0^L h(x) \cdot f(x) dx, \quad \forall f \in H_*^1(0, L).$$

Daí resulta que $D_u = h$, no sentido da integral. Dessa forma, concluímos que D é um operador Bijetor. ■

Assim, o espaço de Hilbert \mathcal{H} é definido como segue:

$$\mathcal{H} := (H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \times H_*^1(0, L) \times L^2[(0, 1); H_*^1(0, L)]. \quad (4.22)$$

E, para $U_1 = (\varphi_1, \phi_1, \eta_1)^T$, $U_2 = (\varphi_2, \phi_2, \eta_2)^T$, definimos o produto interno em \mathcal{H} como segue:

$$\begin{aligned} (U_1, U_2)_{\mathcal{H}} &:= \int_0^L (\kappa\rho_1\phi_1\phi_2 + (\kappa\rho_2 + b\rho_1)\phi_{1x}\phi_{2x} + b\kappa\varphi_{1xx}\varphi_{2xx}) dx + \\ &+ \int_0^L \int_0^1 (\tau\mu_1\kappa\eta_1\eta_2 + b\tau\mu_1\eta_{1,x}\eta_{2,x}) d\rho dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

E, definimos também a norma induzida pelo produto interno acima dada por

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}} &:= \int_0^L (\kappa\rho_1\phi^2 + (\kappa\rho_2 + b\rho_1)\phi_x^2 + b\kappa\varphi_{xx}^2) dx + \\ &+ \int_0^L \int_0^1 (\tau\mu_1\kappa\eta^2 + b\tau\mu_1\eta_x^2) d\rho dx, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $U = (u, \phi, \eta)$.

Alem disso, o domínio do operador \mathcal{A} é definido de tal forma que tenhamos

$$\varphi \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L); \quad (4.25)$$

$$\phi \in H_*^1(0, L); \quad (4.26)$$

$$\eta \in L^2[(0, 1); H_*^1(0, L)] \quad (4.27)$$

$$\phi \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L); \quad (4.28)$$

$$B^{-1}(-b\kappa\varphi_{xxxx} - \mu_1 C\phi - \mu_2 C\eta(\cdot, 1)) \in H_*^1(0, L); \quad (4.29)$$

$$-\frac{1}{\tau}\eta_\rho \in L^2[(0, 1); H_*^1(0, L)]. \quad (4.30)$$

Para que (4.29) seja verdadeiro, primeiro consideramos o operador C definido em $H_*^1(0, L)$ e assumindo imagem em $H^{-*}(0, L)$, posteriormente, basta considerarmos $\varphi_{xx} \in$

$H_*^1(0, L)$. Assim sendo, vem que

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^3(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)) \times (H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \times H^1[(0, 1); H_*^1(0, L)],$$

onde

$$\mathcal{V}(0, L) = \{\varphi \in H_*^1(0, L); \quad \varphi_{xxx}(0) = \varphi_{xxx}(L) = 0\}.$$

A existência e unicidade de solução resulta do seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Considerando $\mu_1 > \mu_2$. Para qualquer $U_0 \in \mathcal{H}$, Existe uma solução única $U \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$ do problema (4.16). Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então*

$$U \in C([0, \infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty[; \mathcal{H})$$

Demonstração: Para provar o Teorema 4.1 usaremos a técnica de semi-grupo, ou seja, mostraremos que o operador \mathcal{A} gera um C_0 -semigrupo em \mathcal{H}_1 . É evidente que \mathcal{A} é denso em \mathcal{H} . Nesta etapa, nos preocupamos em provar que o operador \mathcal{A} é dissipativo. De fato, para $U = (\varphi, \phi, \eta)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \kappa \rho_1 (-\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx}) \phi \, dx + \\ &+ \int_0^L (\kappa \rho_2 + b \rho_1) (-\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx})_x \phi_x \, dx \\ &+ \int_0^L b \kappa \phi_{xx} \varphi_{xx} \, dx + \int_0^L \int_0^1 (-\mu_1 \kappa \eta_\rho \eta - b \mu_1 \eta_{\rho,x} \eta_x) \, d\rho dx \\ &= \int_0^L \kappa \rho_1 (-\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx}) \phi \, dx + \\ &- \int_0^L (\kappa \rho_2 + b \rho_1) (-\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx})_{xx} \phi \, dx + \\ &+ \int_0^L b \kappa \phi_{xx} \varphi_{xx} \, dx - \int_0^L \int_0^1 \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \eta^2 + \frac{b \mu_1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \eta_x^2 \right) \, d\rho dx \\ &= \int_0^L \kappa \rho_1 (-\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx}) \phi \, dx + \\ &- \int_0^L (\kappa \rho_2 + b \rho_1) \partial_{xx} (-\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx}) \phi \, dx + \\ &+ \int_0^L b \kappa \phi_{xx} \varphi_{xx} \, dx - \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \eta^2(\cdot, 1) + \frac{b \mu_1}{2} \eta_x^2(\cdot, 1) \right) \, dx + \\ &+ \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \eta^2(\cdot, 0) + \frac{b \mu_1}{2} \eta_x^2(\cdot, 0) \right) \, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L B(-\mu_1 B^{-1} C \phi - \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) - b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx}) \phi dx + \\
&+ \int_0^L b \kappa \phi_{xx} \varphi_{xx} dx - \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \eta^2(\cdot, 1) + \frac{b \mu_1}{2} \eta_x^2(\cdot, 1) \right) dx + \\
&+ \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \phi^2 + \frac{b \mu_1}{2} \phi_x^2 \right) dx \\
&= \int_0^L ((-\mu_1 C \phi - \mu_2 C \eta(\cdot, 1) - b \kappa \varphi_{xxxx}) \phi + b \kappa \phi_{xx} \varphi_{xx}) dx \\
&- \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \eta^2(\cdot, 1) + \frac{b \mu_1}{2} \eta_x^2(\cdot, 1) \right) dx + \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \phi^2 + \frac{b \mu_1}{2} \phi_x^2 \right) dx \\
&= \int_0^L (-b \kappa \varphi_{xxxx} \phi - \mu_1 \kappa \phi^2 + b \mu_1 \phi_{xx} \phi + \mu_2 \kappa \eta(\cdot, 1) \phi - b \mu_2 \eta_{xx}(\cdot, 1) \phi) dx + \\
&+ \int_0^L b \kappa \phi_{xx} \varphi_{xx} dx - \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \eta^2(\cdot, 1) + \frac{b \mu_1}{2} \eta_x^2(\cdot, 1) \right) dx + \\
&+ \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \phi^2 + \frac{b \mu_1}{2} \phi_x^2 \right) dx. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Consequentemente (4.31), fica da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= - \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \phi^2 + \frac{b \mu_1}{2} \phi_x^2 - \mu_2 \kappa \eta(\cdot, 1) \phi - b \mu_2 \eta_{xx}(\cdot, 1) \phi_x \right) dx + \\
&- \int_0^L \left(\frac{\mu_1 \kappa}{2} \eta^2(\cdot, 1) + \frac{b \mu_1}{2} \eta_x^2(\cdot, 1) \right) dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &\leq - \int_0^L \left(\kappa \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right] \phi^2 + b \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right] \phi_x^2 \right) dx + \\
&- \int_0^L \left(\kappa \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right] \eta^2(\cdot, 1) + b \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \right] \eta_x^2(\cdot, 1) \right) dx. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Desde que $\mu_1 > \mu_2$, temos que o operador \mathcal{A} é dissipativo.

Com a intenção de usar o teorema de Lummer-Philips, mostraremos que o zero pertence ao conjunto resolvente. Isto é, dado $F = (f_1, f_2, f_3)' \in \mathcal{H}$, mostraremos que existe $U = (\varphi, \phi, \eta)' \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solução de

$$-\mathcal{A}U = F \tag{4.33}$$

ou seja, as equações resolventes são dadas por

$$-\phi = f_1 \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L) \quad (4.34)$$

$$\mu_1 B^{-1} C \phi + \mu_2 B^{-1} C \eta(\cdot, 1) + b \kappa B^{-1} \varphi_{xxxx} = f_2 \in H_*^1(0, L) \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{\tau} \eta_\rho = f_3 \in L^2[(0, 1); H_*^1(0, L)]. \quad (4.36)$$

Note que $\phi = -f_1 \in H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$. Além disso, a equação (4.36) é uma E.D.O., logo,

$$\eta(x, \rho) = \phi(x) + \tau \int_0^\rho f_3(x, s) ds \quad (4.37)$$

assim,

$$\eta(x, \rho) = -f_1(x) + \tau \int_0^\rho f_3(x, s) ds, \quad (4.38)$$

Por outro lado, a equação (4.35) pode ser escrita da seguinte forma

$$b \kappa \varphi_{xxxx} = B f_2 + \mu_1 C f_1 - \mu_2 C \eta(\cdot, 1) \in H^{-*}(0, L) \subset (H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L))'. \quad (4.39)$$

onde $(H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L))'$ é dual de $H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)$. Por sua vez, o problema (4.39) pode ser reformulado como

$$\int_0^L b \kappa \varphi_{xxxx} \cdot \omega \, dx = \int_0^L (B f_2 + \mu_1 C f_1 - \mu_2 C \eta(\cdot, 1)) \cdot \omega \, dx, \quad \forall \omega \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L).$$

Integrando o lado esquerdo da equação (4.39) por partes, obtemos

$$\int_0^L b \kappa \varphi_{xx} \cdot \omega_{xx} \, dx = \int_0^L (B f_2 + \mu_1 C f_1 - \mu_2 C \eta(\cdot, 1)) \cdot \omega \, dx, \quad \forall \omega \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L). \quad (4.40)$$

Usando (4.40), o problema (4.39) é equivalente a,

$$\mathbf{X}(\varphi, \omega) = \mathbf{L}(\omega), \quad (4.41)$$

onde a forma bilinear

$$\mathbf{X} : (H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)) \times (H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)) \longrightarrow \mathcal{R}$$

e a forma linear

$$\mathbf{L} : (H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)) \longrightarrow \mathcal{R}$$

são definidas por

$$\mathbf{X}(\varphi, \omega) = \int_0^L b\kappa\varphi_{xx} \cdot \omega_{xx} dx,$$

e

$$\mathbf{L}(\omega) = \int_0^L (Bf_2 + \mu_1 Cf_1 - \mu_2 C\eta(\cdot, 1)) \cdot \omega dx.$$

É fácil verificar que \mathbf{X} é contínua e coerciva, e \mathbf{L} é contínua. Portanto, aplicando o Lema de Lax-Milgram, deduzimos que para todos $\omega \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)$, o problema 4.41 admite uma única solução $\varphi \in H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)$. Segue-se da equação (4.39) que,

$$u \in H^3(0, L).$$

Portanto, o zero está no resolvente de \mathcal{A} . Daí, o resultado de boa colocação do problema (4.16) segue-se pelo Teorema de Lummer-Philips. ■

Os resultados que correspondem a boa colocação do sistema (4.6)- (4.10) é o seguinte:

Teorema 4.2 *Para toda condição inicial*

$$(\varphi_0(x), \varphi_1(x), f_0(x, -\rho\tau), \psi_0(x)) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L),$$

a solução forte $(\varphi, \varphi_t, \eta, \psi)$ do sistema (4.6)- (4.10) está bem colocada, onde

$$(\varphi, \varphi_t, \eta) \in C\left([0, \infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0, \infty[; \mathcal{H}\right) \quad (4.42)$$

$$\psi \in C\left([0, \infty[; H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)\right). \quad (4.43)$$

e

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1\varphi_t + \mu_2\eta(x, 1, t) = 0, \quad em]0, L[\times]0, \infty[\quad (4.44)$$

$$\rho_2\varphi_{ttx} + b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad em (0, L) \times (0, \infty) \quad (4.45)$$

$$\tau\eta_t(x, \rho, t) + \eta_\rho(x, \rho, t) = 0, \quad em]0, L[\times]0, 1[\times]0, \infty[. \quad (4.46)$$

Existência

Pelo Teorema 4.1 existe uma única Solução $(\varphi, \varphi_t, \eta)$ para sistema

$$\begin{aligned} -(\kappa\rho_2 + b\rho_1)\varphi_{ttxx} + \kappa\rho_1\varphi_{tt} - b\mu_1\varphi_{txx} + \kappa\mu_1\varphi_t + b\kappa\varphi_{xxxx} + \mu_2\kappa\eta(x, 1, t) &+ \\ &- \mu_2b\eta_{xx}(x, 1, t) = 0 \\ \tau\eta_t(x, \rho, t) + \eta_\rho(x, \rho, t) &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$(\varphi, \varphi_t, \eta) \in C\left([0, \infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0, \infty[; \mathcal{H}\right).$$

Agora, tomando

$$\psi(x, t) = \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^x \varphi_{tt}(s, t) ds - \varphi_x + \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^x \varphi_t(s, t) ds + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^x \eta(s, 1, t) ds, \quad (4.47)$$

em $(0, L) \times (0, \infty)$, com condições de contorno dada por

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = \psi_{xx}(0, t) = \psi_{xx}(L, t) = 0; \quad \text{em }]0, \infty[.$$

Temos que,

$$\psi(x, t) \in C\left([0, \infty[; H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)\right).$$

Além disso,

$$\psi_x = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{\mu_1}{\kappa} \varphi_t + \frac{\mu_2}{\kappa} \eta(x, 1, t), \quad \text{em }]0, L[\times]0, \infty[, \quad (4.48)$$

daí

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \mu_1\varphi_t + \mu_2\eta(x, 1, t) = 0, \quad \text{em }]0, L[\times]0, \infty[. \quad (4.49)$$

Também, por sua vez, temos de (4.47), (4.48) e (4.49) que

$$-\rho_2\varphi_{ttxx} - b\psi_{xxx} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{em }]0, L[\times]0, \infty[.$$

Portanto, integrando a equação acima, obtemos

$$-\rho_2\varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (4.50)$$

Dependência contínua e Unicidade

Sejam $\{\varphi, \varphi_t, \eta, \psi\}$ e $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\eta}, \tilde{\psi}\}$ soluções fortes do sistema (4.6) – (4.9) correspondentes as condições iniciais $\{\varphi_0, \varphi_1, f_0(x, -\rho\tau), \psi_0\}$ e $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{f}_0(x, -\rho\tau), \tilde{\psi}_0\}$, respectivamente. Nessas condições, temos que $\{y, y_t, \gamma, z\} = \{\varphi - \tilde{\varphi}, \varphi_t - \tilde{\varphi}_t, \eta - \tilde{\eta}, \psi - \tilde{\psi}\}$ satisfazem as seguintes equações

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + z)_x + \mu_1 y_t + \mu_2 \gamma(x, 1, t) = 0, \quad (4.51)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa(y_x + z) = 0, \quad (4.52)$$

$$\tau \gamma_t(x, \rho, t) + \gamma_\rho(x, \rho, t) = 0. \quad (4.53)$$

Com as condições iniciais

$$\{y(x, 0), y_t(x, 0), \gamma(x, 0), z(x, 0)\} = \{\varphi_0 - \tilde{\varphi}_0, \varphi_1 - \tilde{\varphi}_1, f_0(x, -\rho\tau) - \tilde{f}_0(x, -\rho\tau), \psi_0 - \tilde{\psi}_0\},$$

onde

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_t, \eta) &\in C\left([0, \infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0, \infty[; \mathcal{H}\right) \\ \psi &\in C\left([0, \infty[; H^2(0, L) \cap \mathcal{V}(0, L)\right). \end{aligned}$$

Multiplicando as equações (4.51) por y_t , posteriormente integrando em $(0, L)$ e somando os resultados, obtemos

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |y_t|^2 dx + \kappa \int_0^L (y_x + z) y_{tx} dx = -\mu_1 \int_0^L |y_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^L y_t \gamma(x, 1, t) dx. \quad (4.54)$$

Analogamente, multiplicando a equação (4.52) por z_t , obtemos

$$\rho_2 \int_0^L y_{tt} z_{tx} dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L z_x^2 dx + \kappa \int_0^L (y_x + z) z_t dx = 0. \quad (4.55)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L y_{tt} z_{tx} dx &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L y_{tt} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))_t dx + \\ &- \int_0^L y_{tt} y_{txx} dx + \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^L |y_{tt}|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L y_{tt} \gamma_t(x, 1, t) dx \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L y_{tt} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))_t dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |y_{tx}|^2 dx + \\ &+ \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^L |y_{tt}|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L y_{tt} \gamma_t(x, 1, t) dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (4.51) por $(\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))_t$ resulta que

$$\int_0^L y_{tt} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))_t dx = \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \int_0^L |\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t)|^2 dx.$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^L y_{tt} z_{tx} dx &= \frac{1}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \int_0^L |\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |y_{tx}|^2 dx + \\ &+ \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^L |y_{tt}|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L y_{tt} \gamma_t(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Substituindo (4.56) em (4.55) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{xt}^2 + \frac{b}{2} z_x^2 \right] dx + \\ + \kappa \int_0^L (y_x + z) z_t dx = -\mu_1 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L y_{tt}^2 dx - \mu_2 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L y_{tt} \gamma_t(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Somando as equações (4.54) e (4.57), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} y_t^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{xt}^2 + \frac{b}{2} z_x^2 + \frac{\kappa}{2} (y_x + z)^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))^2 \right] dx = \\ = -\mu_1 \int_0^L |y_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^L y_t \gamma(x, 1, t) dx - \mu_1 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L y_{tt}^2 dx - \mu_2 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L y_{tt} \gamma_t(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Agora, multiplicando a equação (4.53) por $\mu_1 \gamma$ e, posteriormente, integrando em $(0, L) \times (0, 1)$, obtemos, obtemos

$$\frac{\tau\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma^2(x, \rho, t) d\rho dx = \frac{\mu_1}{2} \int_0^L y_t^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^L \gamma^2(x, 1, t) dx, \quad (4.59)$$

além disso, multiplicando a equação (4.53) por $\frac{\rho_2\mu_1}{\kappa\tau} \gamma_{t\rho}$ e, posteriormente, integrando em $(0, L) \times (0, 1)$, obtemos

$$\frac{\rho_2\mu_1}{2\tau\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx = \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa} \int_0^L y_{tt}^2 dx - \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa} \int_0^L \gamma_t^2(x, 1, t) dx. \quad (4.60)$$

Portanto, adicionando as equações (4.58), (4.59) e (4.59) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} y_t^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{xt}^2 + \frac{b}{2} z_x^2 + \kappa(y_x + z)^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))^2 \right] dx + \\ + \frac{\tau\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa\tau} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx = -\frac{\mu_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \\ - \frac{\rho_2\mu_1}{\kappa} \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^L \gamma^2(x, 1, t) dx - \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa} \int_0^L \gamma_t^2(x, 1, t) dx + \\ - \mu_2 \int_0^L \varphi_t \gamma(x, 1, t) dx - \frac{\rho_2\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \gamma_t(x, 1, t) dx, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} y_t^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{xt}^2 + \frac{b}{2} z_x^2 + \kappa(y_x + z)^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))^2 \right] dx + \\ + \frac{\tau\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa\tau} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx \leq \\ \leq - \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa} \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx + \\ - \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_0^L \gamma^2(x, 1, t) dx + \\ - \frac{\rho_2}{\kappa} \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2} \right) \int_0^L \gamma_t^2(x, 1, t) dx. \end{aligned}$$

Portanto, para $\mu_2 < \mu_1$, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} y_t^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{xt}^2 + \frac{b}{2} z_x^2 + \kappa(y_x + z)^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))^2 \right] dx + \\ + \frac{\tau\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa\tau} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \gamma_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx \leq 0, \end{aligned}$$

logo, integrando sob a variável t , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\frac{\rho_1}{2} y_t^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{xt}^2 + \frac{b}{2} z_x^2 + \kappa(y_x + z)^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(y_x + z)_x - \mu_1 y_t - \mu_2 \gamma(x, 1, t))^2 \right] dx + \\ + \frac{\tau\mu_1}{2} \int_0^L \int_0^1 \gamma^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa\tau} \int_0^L \int_0^1 \gamma_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx \leq \\ \leq \int_0^L \left[y_1^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{1,x}^2 + \frac{b}{2} z_{0,x}^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(y_{0,x} + z_0)_x - \mu_1 y_1 - \mu_2 f_0(x, -\tau))^2 \right] dx + \\ + \kappa \int_0^L (y_{0,x} + z_0)^2 dx + \frac{\tau\mu_1}{2} \int_0^L \int_0^1 f_0^2(x, -\rho\tau) d\rho dx + \frac{\rho_2\tau\mu_1}{2\kappa} \int_0^L \int_0^1 f_{0,\rho}^2(x, -\rho\tau) d\rho dx. \end{aligned}$$

Daí, resulta a dependência contínua dos dados iniciais. Em particular, também resulta a unicidade da solução. ■

Encerramos assim a boa colocação para o sistema Bresse-Timoshenko Truncado com termos de Delay. Passaremos agora, à analisar o comportamento assintótico do sistema.

4.2 Estabilidade Exponencial

É claro que, um importante funcional não-linear e dependente do tempo associado ao sistema (4.6)–(4.10) é a sua energia, que é definida por

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} (\kappa (\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t))^2 + \rho_2 \varphi_{tx}^2 + b \psi_x^2 \right] dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^L \kappa (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\tau \mu_1}{2} \int_0^L \int_0^1 \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \\
&+ \frac{\rho_2 \mu_1}{2 \kappa \tau} \int_0^L \int_0^1 \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

E, para a sua energia, temos um primeiro resultado sobre a natureza dissipativa de $E(t)$. Nós formulamos o seguinte.

Teorema 4.3 *Seja (φ, ψ, η) uma solução do sistema (4.6)–(4.10). Para $\mu_2 < \mu_1$, a energia $E(t)$ do sistema (4.6)–(4.10) satisfaz a lei de dissipação de energia dada por*

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -C \int_0^L \left[\varphi_t^2 + \varphi_{tt}^2 + \eta^2(x, 1, t) + \eta_t^2(x, 1, t) \right] dx, \quad \forall t \geq 0, \tag{4.62}$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração: Usualmente, multiplicando a equação (4.6) por φ_t , integrando o resultado sobre $(0, L)$ em relação a x , obtemos

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{tx} dx = -\mu_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^L \varphi_t \eta(x, 1, t) dx. \tag{4.63}$$

Analogamente, multiplicando a equação (4.7) por ψ_t , obtemos

$$\rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_{tx} dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \tag{4.64}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi_{tt} \psi_{tx} dx &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa (\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t))_t dx + \\
&- \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{txx} dx + \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta_t(x, 1, t) dx \\
&= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa (\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t))_t dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + \\
&+ \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta_t(x, 1, t) dx.
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (4.6) por $(\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t))_t$ resulta que

$$\int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t))_t dx = \frac{1}{2\rho_1} \frac{d}{dt} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t)|^2 dx.$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt}\psi_{tx} dx &= \frac{1}{2\kappa\rho_1} \frac{d}{dt} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + \\ &+ \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}\eta_t(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Substituindo (4.65) em (4.64) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t))^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{xt}^2 + \frac{b}{2} \psi_x^2 \right] dx + \\ + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\psi_t dx = -\mu_1 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \mu_2 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}\eta_t(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Somando as equações (4.63) e (4.66), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\varphi_t^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{xt}^2 + \frac{b}{2} \psi_x^2 + \kappa(\varphi_x + \psi)^2 + \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t))^2 \right] dx = \\ = -\mu_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \mu_2 \int_0^L \varphi_t\eta(x, 1, t) dx - \mu_1 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \mu_2 \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}\eta_t(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Agora, multiplicando a equação (4.8) por $\mu_1\eta$ e, posteriormente, integrando em $(0, L) \times (0, 1)$, obtemos

$$\frac{\tau\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx = \frac{\mu_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^L \eta(x, 1, t)^2 dx, \quad (4.68)$$

além disso, multiplicando a equação (4.8) por $\frac{\rho_2\mu_1}{\kappa\tau}\eta_{t\rho}$ e, posteriormente, integrando em $(0, L) \times (0, 1)$, chegamos ao seguinte resultado

$$\frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa\tau} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^1 \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx = \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa} \int_0^L \eta_t^2(x, 1, t) dx. \quad (4.69)$$

Portanto, adicionando as equações (4.67), (4.68) e (4.69) chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= -\frac{\mu_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa} \frac{\mu_1}{2} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^L \eta^2(x, 1, t) dx + \\ &- \frac{\rho_2\mu_1}{2\kappa} \int_0^L \eta_t^2(x, 1, t) dx - \mu_2 \int_0^L \varphi_t\eta(x, 1, t) dx - \frac{\rho_2\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}\eta_t(x, 1, t) dx, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &\leq -\left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^L \varphi_t^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa} \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx + \\ &\quad - \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^L \eta^2(x, 1, t) dx - \frac{\rho_2}{\kappa} \left(\frac{\mu_1}{2} - \frac{\mu_2}{2}\right) \int_0^L \eta_t^2(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Portanto, para $\mu_2 < \mu_1$ existe uma constante positiva C de onde concluímos a prova deste teorema. ■

Nosso principal objetivo é mostrar que a energia do sistema (4.6)–(4.10) decai Exponencialmente para quaisquer valores dos coeficientes do sistema com $\mu_2 < \mu_1$. O teorema a seguir é o principal resultado desta seção:

Teorema 4.4 *Assuma isso $\mu_2 < \mu_1$. Então, a energia $E(t)$ do sistema (4.6)–(4.10) decai exponencialmente como o tempo t tende a infinito. Ou seja, existem duas constantes positivas M e ω que independem dos dados iniciais e de quaisquer relações entre coeficientes, tais que*

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.71)$$

Novamente utilizaremos o Método da energia para provar o teorema 4.4 e, esse vai ser estabelecido através de três lemas. Primeiro, definimos

$$\mathcal{F}(t) := \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu_1}{2} \varphi^2 + \frac{\mu_1 \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right] dx. \quad (4.72)$$

Lema 4.2 *Seja (φ, ψ, η) uma solução do sistema (4.6)–(4.10). Então para qualquer $\epsilon_1 > 0$, temos*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) &\leq -(\kappa - (3/2)c_p \mu_2 \epsilon_1) \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \left(b - c_p^2 \mu_2 \epsilon_1\right) \int_0^L \psi_x^2 dx + \\ &\quad - \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)|^2 dx + \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\rho_1 \mu_2}{2\kappa} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \\ &+ \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_1}{\kappa}\right) \int_0^L \eta^2(x, 1, t) dx, \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Demonstração: Multiplicando a equação (4.6) por φ e integrando sobre o intervalo $(0, L)$, é imediato que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu_1}{2} \varphi^2 \right) dx - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx + \\ + \mu_2 \int_0^L \eta(x, 1, t) \varphi dx = 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Analogamente, multiplicando a equação (4.7) by ψ , obtemos

$$\rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx = 0, \quad (4.76)$$

e somando as equações (4.75) e (4.76), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu_1}{2} \varphi^2 \right) dx - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + \mu_2 \int_0^L \eta(x, 1, t) \varphi dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx = 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)) dx + \\ &- \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_{xx} dx + \frac{\mu_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx \\ &= \frac{1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)) dx + \int_0^L \varphi_{ttx} \varphi_x dx + \\ &+ \frac{\mu_1}{2\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (4.6) por $(\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t))$ resulta que

$$\int_0^L \varphi_{tt} (\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)) dx = \frac{1}{\rho_1} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)|^2 dx.$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx &= \frac{1}{\kappa \rho_1} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)|^2 dx + \int_0^L \varphi_{ttx} \varphi_x dx + \\ &+ \frac{\mu_1}{2\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Substituindo (4.78) em (4.77) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu_1}{2} \varphi^2 + \frac{\rho_2 \mu_1}{2\kappa} \varphi_t^2 \right) dx - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \\ + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)|^2 dx + \\ + \mu_2 \int_0^L \eta(x, 1, t) \varphi dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx + \frac{\rho_2 \mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Por outro lado, da identidade $\varphi_{tx} \varphi_x = \frac{d}{dt}(\varphi_{tx} \varphi_x) - \varphi_{tx}^2$ chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu_1}{2} \varphi^2 + \frac{\rho_2 \mu_1}{2\kappa} \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right) dx - \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + \\ + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)|^2 dx + \\ - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \mu_2 \int_0^L \eta(x, 1, t) \varphi dx + \frac{\rho_2 \mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) &= -\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{\rho_2}{\kappa \rho_1} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1 \varphi_t - \mu_2 \eta(x, 1, t)|^2 dx + \\ &- b \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - \mu_2 \int_0^L \varphi \eta(x, 1, t) dx + \\ &+ \frac{\rho_1 \mu_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, usando as desigualdades de Young e Poincaré e a desigualdade (2.149) concluímos a prova deste lema para $\mathcal{F}(t)$ dado em (4.72). ■

Agora, vamos introduzir o funcional

$$\mathcal{G}(t) := -\frac{\mu_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx. \quad (4.80)$$

Lema 4.3 *Seja (φ, ψ, η) uma solução do sistema. Então, o funcional $\mathcal{G}(t)$ satisfaz, para qualquer $\epsilon_2 > 0$, a estimativa*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) &\leq \left(\rho_1 + \frac{\kappa^2}{2\epsilon_2} + \frac{\mu_2}{2} \right) \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx + \frac{\epsilon_2}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \\ &+ \frac{\mu_2}{2} \int_0^L \eta^2(x, 1, t) dx. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Demonstração: Multiplicando a equação (4.6) por φ_{tt} e integrando por partes no intervalo $(0, L)$, temos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx + \kappa \int_0^L \varphi_x \varphi_{ttx} dx - \kappa \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx + \frac{\mu_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \\ + \mu_2 \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx = 0, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\frac{\mu}{2} \varphi_t^2 + \kappa \varphi_{tx} \varphi_x \right) dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - \kappa \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx + \\ + \mu_2 \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx = 0, \end{aligned}$$

e por conseguinte, temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - \kappa \int_0^L \psi_x \varphi_{tt} dx + \mu_2 \int_0^L \varphi_{tt} \eta(x, 1, t) dx. \quad (4.82)$$

Para completar esta prova, usamos a desigualdade de Young. ■

Agora, a fim de obter estimativas para η introduzimos as seguintes funções

$$\mathcal{J}(t) = \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{1}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx. \quad (4.83)$$

Lema 4.4 *Seja (φ, ψ, η) uma solução do sistema (4.6)–(4.10). Então o funcional $\mathcal{J}(t)$ satisfaz,*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) &= -2\mathcal{J}(t) - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_0^L \eta^2(x, 1, t) dx - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_0^L \eta_t^2(x, 1, t) dx + \\ &+ \frac{1}{\tau} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{1}{\tau} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Demonstração: Derivando o funcional $\mathcal{J}(t)$, temos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) = 2 \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta \eta_t d\rho dx + \frac{2}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta_\rho \eta_{\rho t} d\rho dx. \quad (4.85)$$

Usando a equação (4.8) em (4.85), obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) = -\frac{1}{\tau} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \eta^2 d\rho dx - \frac{1}{\tau} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \eta_t^2 d\rho dx, \quad (4.86)$$

e para completar esta prova, é suficiente executar a integração por partes em (4.86) no intervalo $(0, 1)$. ■

Agora, definimos o funcional de Lyapunov \mathcal{L} do seguinte modo

$$\mathcal{L}(t) := \mathcal{F}(t) + 2\frac{\rho_2}{\kappa}\mathcal{G}(t) + \mathcal{J}(t) + NE(t), \quad (4.87)$$

onde N é uma constante positiva a ser fixada mais tarde e os funcionais \mathcal{F} , \mathcal{G} e \mathcal{J} são dado nos Lemas 4.2, 4.3 e 4.4, respectivamente. Primeiro de tudo, provamos que $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ são equivalentes de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 4.5 *Existem constantes positivas c_1 e c_2 tal que*

$$c_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.88)$$

Demonstração: Assumindo a existência de uma constante positiva (grande o suficiente) N , da definição de $\mathcal{L}(t)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu_1}{2} \varphi^2 - \frac{\mu_1 \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 - \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right) dx + \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \\ &+ \frac{1}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx + NE(t). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Definimos o funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t) &= \int_0^L \left(\rho_1 \varphi_t \varphi + \frac{\mu_1}{2} \varphi^2 - \frac{\mu_1 \rho_2}{2\kappa} \varphi_t^2 - \rho_2 \varphi_{tx} \varphi_x \right) dx + \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \\ &+ \frac{1}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx, \end{aligned} \quad (4.90)$$

assim temos que

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| = |\mathcal{Z}(t)|, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.91)$$

Segue-se, usando a desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}(t)| &\leq \int_0^L \left(\left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1 \rho_2}{2\kappa} \right) \varphi_t^2 + \frac{1}{2} (\rho_1 + \mu_1) \varphi^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_x^2 \right) dx + \\ &+ \int_0^L \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 dx + \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{1}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Poincaré temos

$$|\mathcal{Z}(t)| \leq \int_0^L \left(\left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1 \rho_2}{2\kappa} \right) \varphi_t^2 + \frac{1}{2} [(\rho_1 + \mu_1)c_p + \rho_2] \varphi_x^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right) dx + \\ + \int_0^L \int_0^1 \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{1}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx,$$

Agora, usando a desigualdade (2.149) chegamos a

$$|\mathcal{Z}(t)| \leq \int_0^L \left\{ \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1 \rho_2}{2\kappa} \right) \varphi_t^2 + [(\rho_1 + \mu_1)c_p + \rho_2] (\varphi_x + \psi)^2 \right\} dx + \\ + \int_0^L \left\{ [(\rho_1 + \mu_1)c_p + \rho_2] \psi^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right\} dx + \\ + \int_0^L \int_0^1 \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{1}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx.$$

Usando novamente a desigualdade de Poincaré, temos

$$|\mathcal{Z}(t)| \leq \int_0^L \left\{ \left(\frac{\rho_1}{2} + \frac{\mu_1 \rho_2}{2\kappa} \right) \varphi_t^2 + [(\rho_1 + \mu_1)c_p + \rho_2] (\varphi_x + \psi)^2 \right\} dx + \\ + \int_0^L \left\{ c_p [(\rho_1 + \mu_1)c_p + \rho_2] \psi_x^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 \right\} dx + \\ + \int_0^L \int_0^1 \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx + \frac{1}{\tau^2} \int_0^L \int_0^1 \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx,$$

e tomando

$$M = \max \left\{ 1 + \frac{\mu_1 \rho_2}{\kappa \rho_1}, 2 \frac{(\rho_1 + \mu_1)c_p + \rho_2}{\kappa}, 2c_p \frac{(\rho_1 + \mu_1)c_p + \rho_2}{b}, \frac{2}{\tau \mu_1}, 2 \frac{\kappa}{\rho_2 \mu_1 \tau} \right\}$$

concluimos que

$$|\mathcal{Z}(t)| \leq ME(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.92)$$

de onde obtemos

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| = |\mathcal{Z}(t)| \leq ME(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.93)$$

e depois

$$(N - M)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (M + N)E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.94)$$

Portanto, tomando $N > M$ terminamos a prova. ■

Agora, provaremos a segunda condição do Método da energia. Para isso, temos seguinte teorema

Teorema 4.6 *Existe uma constante positiva β tal que*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t). \quad (4.95)$$

Demonstraçãõ: De fato, segue do Teorema 4.3 e dos Lemas 4.2, 4.3 e 4.4 que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &= \frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) + 2\frac{\rho_2}{\kappa}\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t) + \frac{d}{dt}\mathcal{J}(t) + N\frac{d}{dt}E(t) \\ &\leq -\left(\kappa - (3/2)\mu_2c_p\epsilon_1\right)\int_0^L(\varphi_x + \psi)^2 dx - \left(b - \mu_2c_p^2\epsilon_1 - \frac{\rho_2}{\kappa}\epsilon_2\right)\int_0^L\psi_x^2 dx \\ &\quad - \left\{NC - 2\frac{\rho_2}{\kappa}\left(\rho_1 + \frac{\kappa^2}{\epsilon_2} + \mu_2\right) - \frac{\rho_1\mu_2}{2\kappa} - \frac{1}{\tau}\right\}\int_0^L\varphi_{tt}^2 dx + \\ &\quad - \rho_2\int_0^L\varphi_{tx}^2 dx - \left(NC - \rho_1 - \frac{1}{\tau}\right)\int_0^L\varphi_t^2 dx + \\ &\quad - \frac{\rho_2}{\kappa\rho_1}\int_0^L|\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t)|^2 dx + \\ &\quad - \left\{NC - \frac{\mu_2}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{\kappa}\right)\right\}\int_0^L\eta^2(x, 1, t) dx + \\ &\quad - 2e^{-2\tau}\int_0^L\int_0^1\eta^2(x, \rho, t)d\rho dx - \frac{2}{\tau^2}e^{-2\tau}\int_0^L\int_0^1\eta_\rho^2(x, \rho, t)d\rho dx. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $\epsilon_1 = \min\left\{\frac{\kappa}{6\mu_2c_p}, \frac{b}{4\mu_2c_p^2}\right\}$ e $\epsilon_2 = \frac{\kappa b}{4\rho_2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\frac{\kappa}{2}\int_0^L(\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2}\int_0^L\psi_x^2 dx + \\ &\quad - \left\{NC - 2\frac{\rho_2}{\kappa}\left(\rho_1 + \frac{4\kappa\rho_2}{b} + \mu_2\right) - \frac{\rho_1\mu_2}{2\kappa} - \frac{1}{\tau}\right\}\int_0^L\varphi_{tt}^2 dx + \\ &\quad - \rho_2\int_0^L\varphi_{tx}^2 dx - \left(NC - \rho_1 - \frac{1}{\tau}\right)\int_0^L\varphi_t^2 dx + \\ &\quad - \frac{\rho_2}{\kappa\rho_1}\int_0^L|\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t)|^2 dx + \\ &\quad - \left\{NC - \frac{\mu_2}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{\kappa}\right)\right\}\int_0^L\eta^2(x, 1, t) dx + \\ &\quad - 2e^{-2\tau}\int_0^L\int_0^1\eta^2(x, \rho, t)d\rho dx - \frac{2}{\tau^2}e^{-2\tau}\int_0^L\int_0^1\eta_\rho^2(x, \rho, t)d\rho dx, \end{aligned}$$

e, tomando

$$N \geq \frac{2}{C} \max\left\{\frac{\rho_2}{\kappa}\left(\rho_1 + \frac{4\kappa\rho_2}{b} + \mu_2\right) + \frac{\rho_1\mu_2}{2\kappa} + \frac{1}{\tau}, \rho_1 + \frac{1}{\tau}, \frac{\mu_2}{2}\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{\kappa}\right)\right\}$$

podemos assegurar a existência de duas constantes $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\frac{\kappa}{2} \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - \frac{N_1}{2} \int_0^L \varphi_{tt}^2 dx - \frac{N_2}{2} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \\ &- \frac{\rho_2}{2} \int_0^L \varphi_{tx}^2 dx - \frac{\rho_2}{2\kappa\rho_1} \int_0^L |\kappa(\varphi_x + \psi)_x - \mu_1\varphi_t - \mu_2\eta(x, 1, t)|^2 dx + \\ &- 2e^{-2\tau} \int_0^L \int_0^1 \eta^2(x, \rho, t) d\rho dx - \frac{2}{\tau^2} e^{-2\tau} \int_0^L \int_0^1 \eta_\rho^2(x, \rho, t) d\rho dx. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando $\beta = \min \left\{ 1, \frac{\kappa N_1}{\rho_1 \rho_2}, \frac{N_2}{\rho_1}, 4\frac{e^{-2\tau}}{\tau \mu_1}, 4\frac{e^{-2\tau} \kappa}{\rho_2 \tau \mu_1} \right\} > 0$ chegamos a

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta E(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.96)$$

onde $E(t)$ é dada em (4.61).

Desta forma, estamos nas condições do Método da Energia, logo temos que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0. \quad (4.97)$$

onde $\omega = \frac{\beta}{c_2}$ e $M = \frac{c_2}{c_1}$. Concluimos assim, a prova do Teorema 2.6. ■

Capítulo 5

Discussão e conclusão

Neste trabalho conseguimos mostrar que na presença de termos dissipativos dos tipos atrito, viscosidade e de delay não há necessidade de exigimos qualquer relação para que a versão truncada de Timoshenko-Ehrenfest tenha a estabilidade exponencial. Só para resaltar a importância deste, os resultados obtidos nos capítulos 2 e 4 foram publicados nas revistas *Zamm* DOI:101002/201700211 e *IMA Journal of Applied Mathematics (2019)* 00 1 -34 DOI: 10.1093/imamat/hxz014, respectivamente.

Observamos que os resultados obtido neste trabalho difere dos que temos na literatura para os sistemas de Timoshenko-Ehrenfest Clássico, por isso nos perguntamos, qual o motivo para que isso aconteça? Acreditamos que a resposta está relaciona ao fato de que a versão truncada do modelo de Timoshenko-Ehrenfest está livre de um “segundo espectro” que seja não físico. Dessa forma, somos levado a ter a seguinte conclusão, que, se há estabilidade exponencial mediante a inclusão de quaisquer mecanismos dissipativos fraco ao sistema de Timoshenko-Ehrenfest Truncado esta não necessita de relação entre seus coeficiente.

Outrossim, é que toda a narrativa de estabilidade exponencial para sistemas de equações acopladas nos conduzem a trazer outra conjectura ainda mais forte: Seja um sistema de equações acopladas S conservativo. Se algum espectro de frequências de S tem um comportamento não físico, então caso o sistema seja exponencialmente estável por meio da introdução de dissipação fraca, esta estabilidade só acontece usando alguma relação entre os coeficientes das equações de S . Caso S não possua espectro de frequências com

paradoxo físico, então se é possível a estabilização exponencial mediante a introdução de mecanismos fracamente dissipativos, esta não precisa da condição necessária anterior.

Destacamos especificamente, que há uma quantidade grande de problemas sem resposta quando se fala de versões truncadas, entre elas podemos citar que em todos os sistemas estudados neste trabalho não usamos as condições de contorno do tipo Dirichlet-Dirichlet, pois a mesma, não nos permitiu visualizar uma forma matricial para os sistemas. Sendo que, a forma matricial do sistema é de extrema importância tanto para usarmos o Método de Galerkin quanto o Método de Semigrupo.

Também, outros tipos de mecanismos dissipativos podem ser colocados no sistema de Timoshenko-Ehrenfest Truncados, tais como, a história, térmicos, delay dependente do tempo, etc. Espera-se que em todos esses sistemas o decaimento exponencial ocorra independentemente de qualquer relação entre os coeficientes do sistema conservativo. Claro, a prova precisa ser feita.

Por fim, existe a necessidade de formalizarmos uma teoria que confirme ou não as conjecturas feitas neste trabalho, a tarefa não é fácil, mas acreditamos que as respostas algum dia serão desenvolvida.

Referências Bibliográficas

- [1] ABBAS, B.A.H. & THOMAS, J. (1977) The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*. **51(1)**, 123–137.
- [2] ABRAMOVICH, H. & ELISHAKOFF, I. (1987) Application of the Krein's Method for Determination of Natural Frequencies of Periodically Supported Beam Based on Simplified Brese-Timoshenko Equations. *Acta Mechanica*. **66 (1-4)** 39–59.
- [3] ALMEIDA JÚNIOR, D.S. & RAMOS, A.J.A. (2017) On the nature of dissipative Timoshenko systems at light of the second spectrum. To appear in *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*.
- [4] ALMEIDA JÚNIOR, D.S., SANTOS, M.L. & MUÑOZ RIVERA, J.E. (2014) Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. **65**, 1233–1249.
- [5] ALMEIDA JÚNIOR, D.S., SANTOS, M.L. & MUÑOZ RIVERA, J.E. (2013) Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. **36**, 1965–1976.
- [6] AMMAR-KHODJA, F., BENABDALLAH, A., MUÑOZ RIVERA, J.E. & RACKE, R. (2003) Energy decay for Timoshenko system of memory type. *Journal of Differential Equations*. **194**, 82–115.
- [7] ANDERSON, R. A. (1953) Flexural vibration in uniform beams according to the Timoshenko theory. *Journal of Applied Mechanics*. **75**, 504–510.

- [8] BHASKAR, A. (2009) Elastic waves in Timoshenko beams: the 'lost' and 'found' of an eigenmode. *Proceedings of the Royal Society*. **465**, 239–255.
- [9] BHASHYAM, G.R. & PRATHAP, G. (1981) The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of sound and Vibration*. **76 (3)**, 407-420.
- [10] BOUSSOUIRA, F.A., RIVERA, J.E.M. & ALMEIDA JÚNIOR, D.S. (2011) Stability to weak dissipative Bresse system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **374**, 481–498.
- [11] BRESSE, M. (1859) Cours de mécanique appliquée. *Paris: Mallet-Bachelier*.
- [12] CAMPELO, A.D.S., ALMEIDA JÚNIOR, D.S. & SANTOS, M.L. (2016) Stability to the dissipative Reissner-Mindlin-Timoshenko acting on displacement equation. *European Journal of Applied Mathematics*. **27 (2)**, 157-193
- [13] CAMPELO, A.D.S., ALMEIDA JÚNIOR, D.S. & SANTOS, M.L. (2017) Stability of dissipative Reissner-Mindlin-Timoshenko plates: a sharp result. *European Journal of Applied Mathematics*. 27 pages.
- [14] CASAS, P. S. E QUINTANILLA, R.(2005) Exponential decay in one-dimensional porous-thermoelasticity. *Mechanics Research Communications*. **32**, **652-658**
- [15] CASAS, P. S. E QUINTANILLA, R.(2005) Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures. *International Journal of Engineering Science*. **43**, **33-47**
- [16] CAZZANI, A., STOCHINO, F. & TURCO, E. (2016) On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part I: a theoretical revisitacion. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. **67 (2)**, Article 24.
- [17] CAZZANI, A., STOCHINO, F. & TURCO, E. (2016) On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part II: further applications. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. **67 (2)**, Article 25.

- [18] CAZZANI, A., STOCHINO, F. & TURCO, E. (2016) An analytical assessment of finite element and isogeometric analyses of the whole spectrum of Timoshenko beams. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. **96(10)**, 1220-1244.
- [19] DATKO, R. (1978) Representation of solutions and stability of linear differential-difference equations in Banach space. *Journal of Differential Equations*. **29**, 105-166.
- [20] DATKO, R. (1988) Not all feedbacks stabilized hyperbolic systems are robust with respect to small time delays in their feedbacks. *SIAM Journal, Control and Optimization*. **26(3)**, 697-713.
- [21] DATKO, R. (1991) Two questions concerning the boundary control of certain elastic systems. *Journal of Differential Equations*. **92**, 27-44.
- [22] DATKO, R., LAGNESE, J. & POLIS, M.P. (1986) An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM Journal, Control and Optimization*. **22**, 152-156.
- [23] DELL'ORO, F. & PATA, V. (2013) On the stability of Timoshenko systems with Gurtin-Pipkin thermal law. *Journal of Differential Equations* **257(2)**, 523–548.
- [24] ELISHAKOFF, I. (2010) An equation both more consistent and simpler than the Bresse–Timoshenko equation. *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, Solid Mechanics and Its Applications*. Springer, Berlin. 249–254.
- [25] ELISHAKOFF, I., KAPLUNOV, J. & NOLDE, E. (2015) Celebrating the Centenary of Timoshenko's study of effects of shear deformation and rotary inertia. *ASME - The American Society of Mechanical Engineers - Applied Mechanics Reviews*. **67(6)**, 1–11.
- [26] ELISHAKOFF, I., HACHE, F. & CHALLAMEL, N. (2017) Critical contrasting of three versions of vibrating Bresse-Timoshenko beam with a crack. *International Journal of Solids and Structures*. **109**, 143–151.

- [27] ELISHAKOFF, I., HACHE, F. & CHALLAMEL, N. (2017) Variational derivation of governing equations for truncated version of Bresse-Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*. Article in press.
- [28] ELISHAKOFF, I. (2019) Who developed the so-called Timoshenko beam theory? *Department of Ocean and Mechanical Engineering*. Florida Atlantic University.
- [29] FAREH, A.; MESSAOUDI, S. Energy decay for a porous thermoelastic system with thermoelasticity of second sound and with a non-necessary positive definite energy. *Applied Mathematics and Computation*, v. 293, p. 493–507, 2017.
- [30] FATORI, L.H., MUÑOZ RIVERA, J.E. & MONTEIRO, R.N. (2014) Energy decay to Timoshenko's system with thermoelasticity of type III. *Asymptotic Analysis*. **86**, 227–247.
- [31] FENG, B. & YANG, X-G. (2017) Long-time dynamics for a nonlinear Timoshenko system with delay. *Applicable Analysis*. **96**, 606–625.
- [32] GUESMIA, A. (2017) Well-posedness and energy decay for Timoshenko systems with discrete time delay under frictional damping and/or infinity memory in the displacement. *Afrika Matematika*, **28**, 1253–1284.
- [33] GRAFF, K.F. (1991) Wave motion in elastic solids. *Dover Publication*, New York.
- [34] HAN, S.M., BENAROYA, H & TIMOTHY, W. (1999) Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*. **225(5)**, 935–988.
- [35] HUANG, T.C. (1961) The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Journal of Applied Mechanics*. **28**, 579–584.
- [36] IESAN, D. Thermoelastic models os continua. [S.l.]: *Springer*, 2004.

- [37] KIRANE, M., SAID-HOUARI, B. & ANWAR, M.N. (2011) Stability result for the Timoshenko system with a time-varying delay term in the internal feedbacks. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **10:2**, 667–686.
- [38] KOITER, W.T. (1977) "Timoshenko beam theory is not always more accurate than elementary theory". *Journal of Applied Mechanics*, **44**, 357-358.
- [39] KOLMANOVSKII, V & MISHKIS, A. (1999) An Introduction of the Theory and Applications of Functional and Differential Equations. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, **463**.
- [40] LEVINSON, M. & COOKE, D.W. (1982) On the two frequency spectra of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*. **84 (3)**, 319-326.
- [41] LIONS, J.L. (1969) Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes Aux Limites Non Linéaris, *Dunod, Paris*, 1969.
- [42] LIU, Z. & RAO, B. (2009) Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. **60 (1)**, 54-69. 67, 1-10
- [43] MAGAÑA, A. & QUINTANILLA, R. (2006) On the exponential decay of solutions in one-dimensional generalized porous-thermo-elasticity. *Asymptot. Anal.* **49**, **173-187**.
- [44] MAGAÑA, A. & QUINTANILLA, R. (2006) On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials. *Internat. J. Solids Struct.* **43**, **3414-3427**,.
- [45] MAGAÑA, A. & QUINTANILLA, R. (2006) On the time decay of solutions in porous elasticity with quasi-static microvoids. *J. Math. Anal. Appl.* **331**, **617-630**,.
- [46] MALACARNE, A. & MUÑOZ RIVERA, J.E. (2016) Lack of exponential stability to Timoshenko system with viscoelastic Kelvin-Voigt type. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. **67**, 1-10.

- [47] MANEVICH, A. & KOLAKOWSKI, Z. (2011) Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. **49** (1), 3–16;
- [48] MELESHKO, V.V., BONDARENKO, A.A., DOVGIY, S.A., TROFIMCHUK, A.N. & VAN HEIJST, G.J.F. (2009) Elastic waveguides: history and the state of the art. I *Journal of Mathematical Sciences*. **162**, 1, 99–120.
- [49] MELESHKO, V.V., BONDARENKO, A.N., TROFIMCHUK, A.N. & ABASOV, R.Z. (2010) Elastic waveguides: history and the state of the art. II *Journal of Mathematical Sciences*. **167**, 2, 197–216.
- [50] MESSAOUDI, S.A. & FAREH, A. (2013) Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with different wave-propagation speeds. *Arabian Journal of Mathematics*. **2**, 199–207.
- [51] MESSAOUDI, S.A. & SAID-HOUARI, B. (2008) Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **348**, 298–307.
- [52] MUÑOZ RIVERA, J.E. (2008) Estabilização de Semigrupos e Aplicações. *S´erie de M´etodos Matem´aticos Rio de Janeiro*.
- [53] MUÑOZ RIVERA, J.E. & RACKE, R. (2002) Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems - global existence and exponential stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **276**, 248–278.
- [54] MUÑOZ RIVERA, J.E. & RACKE, R. (2003) Global stability for damped Timoshenko systems. *Discrete Continuous and Dynamical Systems. B*, **9**, 1625–1639.
- [55] MUÑOZ RIVERA, J.E. & RACKE, R. (2008) Timoshenko systems with indefinite damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **341**, 1068–1083.
- [56] NICAISE, S. & PIGNOTTI, C. (2006) Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. *SIAM Journal Control and Optimization*, **45**, 1561–1585.

- [57] NICAISE, S. & PIGNOTTI, C. (2008) Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay. *Differential and Integral Equations*, **21**, 935–958.
- [58] NICAISE, S., VALEIN, J. & FRIEDMAN, E. (2009) Stabilization of the heat and the wave equation with boundary time-varying delays. *Discrete Continuous and Dynamic Systems*, **S2**, 559–581.
- [59] NICULESCU, S.I. (2001) Delay effects on stability. *Lectures Notes in Control and Information Sciences*. Springer, Berlin, **269**.
- [60] NUNZIATO, J., COWIN, S. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Arquive for Rational Mechanical Analysis*, v. 2, p. 175–201, 1979.
- [61] PRATHAP, G. (1983) The two frequency spectra of Timoshenko beams: a reassessment. *Journal of sound and Vibration*. **90**, 443-445.
- [62] QUINTANILLA, R. (2003) Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity. *Applied Mathematics Letters*. **16**, 487-491;
- [63] RAYLEIGH, J.W.S. (1877) Theory of Sound. London: Macmillan Publications Co., Inc.
- [64] RAPOSO, C.A., FERREIRA, J., SANTOS, M.L. & CASTRO, N. N. O. (2005) Exponential stability for the Timoshenko beam with two weak damping. *Applied Mathematics Letters*. **18**, 535-541.
- [65] RIBEIRO, L. M. (2005) Sobre um Sistema Acoplado de E.D.P'S do Tipo Klein - Gordon com Não-Linearidades do Tipo Kirchhoff - Carrier em Domínio Limitado, *Dissertação de Mestrado*.
- [66] RICHARD, J.P. (2003) Time-delay systems: An overview of some recent advances problems. *Automatica*. **39**, 1667-1694.
- [67] SAID-HOUARI, B. & LASKRI, Y. (2010) A stability result of a Timoshenko system with a delay term in the internal feedback. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 2857–2869.

- [68] SAID-HOUARI, B. & RAHALI, B. (2011) A stability result for a Timoshenko system with past history and a delay term in the internal feedback. *Dynamic Systems and Applications*, **20**, 327–354.
- [69] SAID-HOUARI, B. & SOUFYANE, A. (2012) Stability result of the Timoshenko system with delay and boundary feedback. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **29: 3**, 383–389.
- [70] SANTOS, M.L., ALMEIDA JÚNIOR, D. S. & MUÑOZ RIVERA, J.E. (2012) The stability number of the Timoshenko system with second sound. *Journal of Differential Equations*, **253 (9)**, 2715–2733.
- [71] SANTOS, M. L, JÚNIOR & D. S. A. & CAMPELO, A. D. S. (2007) Rates of Decay for Porous Elastic System Weakly Dissipative. *Acta Appl Math* **151: 1-26**.
- [72] SANTOS, M. L & JÚNIOR, D. S. A. (2016) On porous-elastic system with localized damping. *Z. Angew. Math. Phys*, **67:63**.
- [73] SANTOS, M. L, JÚNIOR & D. S. A. & CAMPELO, A. D. S. (2016). On the Decay Rates of Porous Elastic Systems. *J Elast.* **127:79-101**.
- [74] SHI, D-H. & FENG, D-X. (1999) Exponential decay of Timoshenko beam with locally distributed feedback. *Proceeding of the 99'IFAC World Congress*. **F**, Beijing.
- [75] SMITH, R.W.M. (2008) Graphical representation of Timoshenko beam modes for clamped-clamped boundary conditions at high frequency: Beyond transverse deflection. *Wave Motion*. **45**, 785–794.
- [76] SOUFYANE, A. (1999) Stabilisation de la poutre de Timoshenko. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*. **328(8)**, 731–734.
- [77] SOUFYANE, A. & WEHBE, A. (2003) Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping. *Electronic Journal of Differential Equations*. **29**, 1–14.

- [78] STEPHEN, N.G. (1982) The second frequency spectrum of Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*. **80**, 578-582.
- [79] STEPHEN, N.G. (2006) The second frequency spectrum of Timoshenko beams theory - Further assessment. *Journal of Sound and Vibration*. **192**, 372-389.
- [80] STEPHEN, N.G. & PUCHEGGER, S. (2006) On the valid frequency range of Timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*. **297** (3/5), 1082-1087.
- [81] TRAILL-NASH, R.W. & COLLAR, A.R. (1953) The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. *The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*. **6**, 186-222.
- [82] TIMOSHENKO, S. P. (1921) On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*. **6** (41/245), 744-746.