



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**  
**PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA**  
**UFPA-UFAM**

**Helen Cristina Machado Rodrigues**

**Decaimento uniforme, blow-up e atratores para sistemas de  
mistura ternária de sólidos**

BELÉM-PA  
Dezembro/2021

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**  
**PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA**  
**UFPA-UFAM**

**Helen Cristina Machado Rodrigues**

**Decaimento uniforme, blow-up e atratores para sistemas de  
mistura ternária de sólidos**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Mirelson Freitas Martins - Universidade Federal do Pará  
Co-orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos - Universidade Federal do Pará

BELÉM-PA  
Dezembro/2021

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

R696d Rodrigues, Helen Cristina Machado.  
Decaimento uniforme, blow-up e atratores para sistemas de  
mistura ternária de sólidos / Helen Cristina Machado Rodrigues. —  
2021.  
125 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Mirelson Freitas Martins  
Coorientador(a): Prof. Dr. Mauro de Lima Santos  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de  
Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática e Estatística, Belém, 2021.

1. Misturas ternárias. 2. Decaimento uniforme. 3. Blow-up.  
4. Atrator global. I. Título.

CDD 510

---


**DECAIMENTO UNIFORME, BLOW-UP E ATRADORES PARA MISTURAS  
TERNARIAS DE SÓLIDOS**

Por

Helen Cristina Machado Rodrigues

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA - UFPA/UFAM, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

**APROVADA** em 22 de dezembro de 2021, por



---

Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas

Orientador (PDM/UFPA) - Presidente



---

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos

Membro interno (PDM/UFPA)



---

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Membro interno (PDM/UFPA)



---

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

Membro externo (UFPB)

A todas as mulheres que viram na educação  
uma forma de mudar os seus destinos predeter-  
minados por uma sociedade machista.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre me guiar na direção certa, me acalantar nos momentos difíceis e por sempre me dar coragem para recomeçar.

Ao meus pais, Abilio Rodrigues e Benedita Rodrigues, pelo amor, apoio, confiança e por segurar a minha mão quando mais precisei.

Ao Davison Queiroz, por dividir a sua vida comigo, por se fazer presente nesse período tão tortuoso e por ser um homem paciente, resiliente e pelo seu humor contagiante.

As minhas irmãs, Vanessa Rodrigues e Cássia Rodrigues, pelo apoio nos estudos e na vida.

A minha afilhada, Isabella Rodrigues, pelo amor e carinho.

Ao prof. Dr. Mirelson Freitas, a minha imensa gratidão por ser o meu orientador, por seus ensinamentos, paciência e a sua notável dedicação a Matemática.

Ao prof. Dr. Mauro de Lima Santos, por me iniciar no mundo da pesquisa sendo o meu primeiro orientador no projeto de iniciação científica durante a minha graduação e por toda contribuição nesse trabalho.

A todos que compõe o PDM, pelo trabalho e dedicação aos discentes.

Aos meus amigos de curso, Alberto Noe, Mauricio, Jociane e João Felipe, pela parceria e pela troca de conhecimentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos os citados acima, o meu MUITO OBRIGADA!

## Resumo

Neste trabalho, estudamos o decaimento uniforme, blow-up e a dinâmica a longo prazo das soluções fracas para um sistema unidimensional que modela uma mistura de três materiais com damping não linear e termos de fonte. Primeiro, provamos a boa colocação local e global do sistema usando a teoria de operadores monótonos e semigrupos não lineares. Sob algumas restrições nos parâmetros de crescimento das fontes e damping, provamos que cada solução fraca do sistema com energia total inicial negativa possui blow-up em tempo finito. Usando o método do poço potencial, provamos que as soluções correspondentes aos dados iniciais pertencentes a parte “boa” do poço potencial existem globalmente e mostramos que a energia total do sistema decai exponencialmente ou algébricamente, dependendo do comportamento do damping próximo a origem. Também provamos um resultado de blow-up com energia inicial total positiva. Na última parte deste trabalho, consideramos o sistema de misturas ternárias com forças externas autônomas multiplicadas por uma constante  $\epsilon > 0$ . Provamos que o sistema dinâmico correspondente possui um atrator global suave com dimensão fractal finita e estudamos a continuidade desses atratores com relação ao parâmetro  $\epsilon$  em um subconjunto denso e residual.

**Palavras-chave:** Misturas ternárias, Decaimento uniforme, Blow-up, Atrator global.

## Abstract

In this work, we study the uniform decay, blow-up and long-term dynamics of weak solutions for a one dimensional system that models a mixture of three materials with nonlinear damping and source terms. First, we prove the well-posedness local and global of the system by using the theory of monotone operators and nonlinear semigroups. Under some restrictions on the parameters, we also prove that every weak solution to our system blows up in finite time, provided the initial energy is negative. Using the potential well method, we prove the existence of a global weak solution with initial data coming from the “good” part of the potential well, and we show that the total energy of the system decays exponentially or algebraically, depending on the behavior of the damping near the origin. We also proved a blow-up result with positive total initial energy. In the last part of this work, we consider the system of ternary mixtures with autonomous external forces multiplied by a constant  $\epsilon > 0$ . We prove that the corresponding dynamical system has a smooth global attractor with finite fractal dimension, and we study the continuity of these attractors with respect to the parameter  $\epsilon$  in a dense and residual subset.

**Key-words:** Ternary mixtures, Uniform decay, Blow-up, Global attractor.



# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
0.1 Resultados conhecidos sobre estabilização para sistemas de misturas de sólidos	1
0.2 Resultados conhecidos sobre atratores para sistemas de misturas de sólidos . . .	5
0.3 Problema em estudo e objetivos . . . . .	7
0.4 Organização da tese . . . . .	10
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Notações e definições . . . . .	12
1.1.1 Equações de evolução abstrata . . . . .	14
1.1.2 O Teorema do Passo da Montanha . . . . .	16
1.1.3 Outras definições e resultados auxiliares . . . . .	18
1.2 Sistemas dinâmicos e atratores globais . . . . .	19
1.2.1 Definições básicas . . . . .	19
1.2.2 Sistema gradiente . . . . .	21
1.2.3 Quase-estabilidade e suas consequências . . . . .	23
1.2.4 Semicontinuidade de atratores globais . . . . .	25
<b>2 Existência e unicidade de solução</b>	<b>26</b>
2.1 Formulação via semigrupos e solução local fraca . . . . .	26
2.1.1 Solução local fraca . . . . .	38
2.1.2 Identidade de energia . . . . .	44
2.2 Unicidade e dependência contínua dos dados iniciais . . . . .	46
2.3 Existência global . . . . .	49
2.4 Blow-up de soluções com energia inicial negativa . . . . .	53
2.5 Solução global . . . . .	61

2.6	Blow-up de soluções do poço potencial	68
<b>3</b>	<b>Taxas de decaimento da energia</b>	<b>75</b>
3.1	Desigualdade de estabilidade perturbada	77
3.2	Absorção dos termos de ordem inferior	82
3.3	Taxas de decaimento da energia	89
<b>4</b>	<b>Atratores globais</b>	<b>93</b>
4.1	Notações e hipóteses	93
4.1.1	Identidade de Energia	95
4.2	Boa colocação do problema	98
4.3	Sistema gradiente e pontos estacionários	102
4.4	Estimativa de quase-estabilidade	104
4.5	Existência de atratores globais	108
4.6	Semicontinuidade superior de atratores globais	112
<b>5</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>125</b>

# Introdução

A teoria de mistura de sólidos vem sendo estudada por diversos pesquisadores e tem ganhado destaque principalmente por suas importantes aplicações como o estudo de sistemas biológicos de crescimento tumoral, propriedades de materiais celulares e fluxo multifásico complexo em meios porosos, bem como em vários outros assuntos envolvendo engenharia e modelagem de problemas biológicos [50, 56]. Vários autores contribuíram para o desenvolvimento da teoria moderna da mistura de sólidos, e algumas das bases teóricas podem ser encontradas nas seguintes referências [79, 41, 42, 40, 23, 9, 8, 15, 65].

Uma abordagem importante para a teoria de mistura de sólidos foi dada por Bowen [22], conseguindo uma conexão entre a abordagem de deformação microscópica para a resposta de fluxo macroscópico em meios porosos. Vários trabalhos têm se dedicado ao estudo de efeitos importantes na teoria da mistura de sólidos, como o efeito relativo das frações fluidas que preenchem o meio poroso, conhecido como saturação, estudado em [11, 30, 21, 29].

## 0.1 Resultados conhecidos sobre estabilização para sistemas de misturas de sólidos

Nos últimos anos, um interesse crescente tem sido direcionado para o estudo das propriedades qualitativas de soluções relacionadas a misturas compostas por duas equações que interagem continuamente. Vários resultados referentes à existência, unicidade, dependência contínua das condições iniciais e estabilidade assintótica podem ser encontrados na literatura [49, 63, 64]. Em particular, a estabilidade assintótica de soluções para tais modelos tem atraído a atenção de renomados pesquisadores. Em [62], Quintanilla estudou a estabilidade exponencial na teoria isotérmica linear de solos elásticos porosos expansivos. O autor considerou o sistema dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi(z_t - u_t) - \mu_z z_{xxt} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - \mu u_{xx} - a_2 z_{xx} - \xi(z_t - u_t) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

onde as variáveis dependentes  $z = z(x, t)$  e  $u = u(x, t)$  representam o deslocamento do fluido e do material sólido elástico, respectivamente. Ele provou que os termos dissipativos  $\pm \xi(z_t - u_t)$  e  $\mu_z z_{xxt}$  são suficientes para estabelecer a estabilidade exponencial usando o método da energia.

No trabalho de Alves, Rivera e Quintanilla [4] é investigado a estabilidade assintótica para o problema de uma mistura unidimensional de sólidos termoelásticos dado por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} w_{xx} + \alpha(u - w) - \beta_1 \theta_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} w_{xx} - \alpha(u - w) - \beta_2 \theta_x = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ c\theta_t - k\theta_{xx} - \beta_1 u_{tx} - \beta_2 w_{tx} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (2)$$

Aqui,  $u$  e  $w$  denotam o deslocamento das partículas no tempo e  $\theta$  representa a temperatura. As constantes  $\rho_1, \rho_2, \kappa, c$  e  $\alpha$  são positivas, e além disso, os coeficientes satisfazem a relação  $a_{11} > 0$  e  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ . As condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), & \quad \text{em } (0, L), \\ w_t(x, 0) = w_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), & \quad \text{em } (0, L), \end{aligned}$$

e as condições de fronteira por

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, & \quad \text{em } (0, \infty), \\ \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, & \quad \text{em } (0, \infty). \end{aligned}$$

O resultado principal apresentado em [4], foi o decaimento exponencial do semigrupo associado ao sistema (2). Mais precisamente, os autores provaram que o semigrupo associado decai exponencialmente se, e somente se, as seguintes relações são satisfeitas

$$\beta_2(\beta_1 \rho_2 a_{11} + \beta_2 \rho_1 a_{12}) \neq \beta_1(\beta_2 \rho_1 a_{22} + \beta_1 \rho_2 a_{12}), \quad (3)$$

e

$$\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \neq \frac{\alpha((\rho_1 \beta_2^2 - \rho_2 \beta_1^2) + \beta_1 \beta_2 (\rho_1 - \rho_2))}{\beta_1 \beta_2 (\rho_2 a_{11} - a_{22} \rho_1) - a_{12} (\beta_1^2 \rho_2 - \beta_2^2 \rho_1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Em [5], Alves et al. investigaram o comportamento assintótico de soluções para o problema de uma mistura unidimensional de sólidos termoviscoelásticos dado por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} w_{xx} - b_{11} u_{xxt} - b_{12} w_{xxt} + \alpha(u - w) + \alpha_1(u_t - w_t) + \beta_1 \theta_x = 0, \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} w_{xx} - b_{12} u_{xxt} - b_{22} w_{xxt} - \alpha(u - w) - \alpha_1(u_t - w_t) + \beta_2 \theta_x = 0, \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \beta_1 u_{xt} + \beta_2 w_{xt} = 0, \end{cases}$$

com  $0 < x < L, t > 0, k = KT_0^{-1}, \beta_1 = b_1 + \alpha_2$  e  $\beta_2 = -b_2 + \alpha_2$ . Aqui  $\rho_1, \rho_2, c, k,$  e  $\alpha$  são constantes positivas,  $\alpha_1 \geq 0$  e  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ . A matriz  $A = (a_{ij})$  é simétrica e definida positiva e  $B = (b_{ij})$  é simétrica e definida não negativa. As condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad \text{em } (0, L), \\ w_t(x, 0) = w_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \text{em } (0, L), \end{aligned}$$

e as condições de fronteira por

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad \text{em } (0, \infty), \\ \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \quad \text{em } (0, \infty). \end{aligned}$$

Os autores provaram que o semigrupo associado é exponencialmente estável se, e somente se,

$$b_{11} \neq -b_{12} \quad \text{ou} \quad b_{22} \neq -b_{12} \quad \text{ou} \quad \beta_1 \neq \beta_2, \quad \text{ou} \quad \rho_2(a_{11} + a_{12}) \neq \rho_1(a_{22} + a_{12}),$$

ou (5) e (4) são satisfeitas. Além disso, eles provaram que para  $\beta_1 = 0$ , o semigrupo associado é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\{(b_{11}, b_{12}), (\beta_1, \beta_2)\} \quad \text{ou} \quad \{(b_{12}, b_{22}), (\beta_1, \beta_2)\}$$

é linearmente independente. Eles também provaram a falta de estabilidade exponencial do semigrupo associado quando  $\alpha_1 = 0$  e os vetores  $(b_{11}, b_{12}), (b_{12}, b_{22})$  e  $(\beta_1, \beta_2)$  são colineares e

$$\beta_2(\beta_1 \rho_2 a_{11} + \beta_2 \rho_1 a_{12}) = \beta_1(\beta_2 \rho_1 a_{22} + \beta_1 \rho_2 a_{12}). \quad (5)$$

Eles finalizaram o estudo mostrando numericamente os resultados obtidos no contínuo.

Mais recentemente, Rivera, Naso e Quintanilla [72] investigaram o comportamento assintótico da solução para misturas dadas por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} w_{xx} + \alpha(u - w) + \beta_1 \theta_{1,x} + \beta_2 \theta_{1,x} = 0, \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} w_{xx} - \alpha(u - w) + \gamma_1 \theta_{1,x} + \gamma_2 \theta_{1,x} = 0, \\ b_1 \theta_{1,t} + b_2 \theta_{2,t} - K_{11} \theta_{1,xx} - K_{12} \theta_{2,xx} + \beta_1 u_{xt} + \beta_2 w_{xt} + a(\theta_1 - \theta_2) = 0, \\ b_2 \theta_{1,t} + b_3 \theta_{2,t} - K_{21} \theta_{1,xx} - K_{22} \theta_{2,xx} + \gamma_1 u_{xt} + \gamma_2 w_{xt} - a(\theta_1 - \theta_2) = 0, \end{cases}$$

onde  $(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$  e os componentes são formados por duas temperaturas diferentes. O decaimento exponencial da solução foi provado para uma classe genérica de materiais. No entanto, para condições restritas e considerando uma condição de fronteira de Neumann, os autores concluíram que o sistema não é exponencialmente estável e, em geral, eles provaram que a solução decai polinomialmente com taxa ótima  $t^{-1/2}$ . Usando condição de fronteira de Dirichlet, eles provaram o decaimento polinomial com taxa  $t^{-1/6}$ .

É importante observar que todos os trabalhos citados acima são lineares e discutem apenas a estabilidade exponencial e polinomial. Em relação à estabilidade do sistema não linear, Santos et al. [75] consideraram pela primeira vez um problema de mistura binária de sólidos com damping não linear e termos de fonte. Mas precisamente, eles consideraram o seguinte problema

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} w_{xx} + g_1(u_t) = f_1(u, w), & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} w_{xx} + g_2(w_t) = f_2(u, w), & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (6)$$

com condição de fronteira de Dirichlet sobre  $u$  e  $w$ . Primeiramente, os autores provaram existência e unicidade de soluções fracas locais e globais usando a teoria de operadores monótonos e maximais. A dependência contínua dos dados iniciais foi provada usando uma técnica padrão que envolve a diferença de duas soluções. Supondo que os parâmetros de crescimento das fontes são maiores que os dos dampings, os autores provaram que toda solução fraca com energia total inicial negativa ( $\mathcal{E}(0) < 0$ ) possui blow-up em tempo. Eles obtiveram resultados adicionais via método do poço potencial. Mais precisamente, eles provaram que toda solução saindo da parte “boa” do poço potencial existe globalmente. Para uma tal solução global, eles provaram que a energia total do sistema decays exponencialmente ou algebricamente, dependendo do crescimento da dissipação perto da origem. Finalmente, eles provaram um resultado de blow-up em tempo finito para soluções saindo da parte “ruim” do poço potencial com energia total inicial não negativa ( $\mathcal{E}(0) \geq 0$ ).

Também mencionamos os trabalhos recentes de Ramos et al. [70, 71] que investigaram um problema de solos elásticos porosos com saturação de fluido dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \xi_1 z_t + \xi_2 z_t(x, t - \tau) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + \gamma(t)g(u_t) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (7)$$

e apresentam vários resultados relacionados à estabilidade do sistema. Por exemplo, em [70], foi provado que o sistema (7) com  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  decai exponencialmente, usando métodos multiplicativos e algumas propriedades de funções convexas. Em [71], os autores provaram que o sistema (7) com  $\gamma(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , é exponencialmente estável sempre que  $|\xi_2| < \xi_1$ . Outros trabalhos sobre estabilização de sistemas de misturas de sólidos podem ser encontrados em [80, 6, 7, 25] e suas referências.

## 0.2 Resultados conhecidos sobre atratores para sistemas de misturas de sólidos

O estudo sobre atratores globais para mistura binária de sólidos começa, segundo nossos conhecimentos, no recente trabalho de Santos e Freitas [74], que consideraram um sistema de mistura binária de sólidos com damping não linear e termos de fonte dado por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} w_{xx} + g_1(u_t) = f_1(u, w), & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} w_{xx} + g_2(w_t) = f_2(u, w), & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (8)$$

com as condições de fronteira e iniciais

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{em } (0, L), \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x), & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (9)$$

Usando o recente método de quase-estabilidade proposto por Chueshov e Lasiecka [27], os autores provaram a existência de um atrator global suave com dimensão fractal finita e a existência de atrator exponencial generalizado.

Inspirado por [74], Freitas et al. [36] consideraram o seguinte problema de mistura binária com damping fracionário e termos de fonte

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} w_{xx} + A^\alpha u_t + f_1(u, w) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} w_{xx} + A^\alpha w_t + f_2(u, w) = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (10)$$

onde o operador  $A : D(A) \subset L^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$  é dado por  $Au = -u_{xx}$  com domínio  $D(A) = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  e  $A^\alpha : D(A^\alpha) \subset L^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$  é a potência fracionária associada ao operador  $A$  de ordem  $\alpha \in (0, 1)$ . As duas equações em (10) são complementadas pelas condições de fronteira e iniciais

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, L), \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (11)$$

Os autores provaram a existência de atratores globais suaves com dimensão fractal finita e a existência de atratores exponenciais. Eles também provaram a semicontinuidade superior dos atratores quando a potência fracionária  $\alpha \rightarrow 0^+$ . Em [32], Freitas et al. estudaram a dinâmica pullback de um problema de mistura binária de sólidos não autônomo com damping não linear.

Os autores provaram a existência de atratores pullback com universo de atração constituído de conjuntos temperados definidos pela condição de crescimento dos termos de fonte. Eles também provam a semicontinuidade superior dos atratores quando a força externa tende a zero.

No trabalho de Alves, Cardozo e Monteiro [3], foi abordado um estudo sobre a dinâmica de longo prazo de misturas binárias de corpos viscoelásticos. Mais precisamente, os autores primeiro provaram a existência de um atrator global de dimensão finita que exhibe regularidade adicional em topologia mais elevada. Eles finalizaram o estudo mostrando que o sistema dinâmico possui um atrator exponencial fractal generalizado.

No trabalho recente de Freitas et al. [33], foi considerado o seguinte problema de mistura de sólidos com damping não linear e lei de Fourier

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + \delta \theta_x + f_1(z, u) = h_1, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + g(u_t) + f_2(z, u) = h_2, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ c\theta_t - \kappa \theta_{xx} + \delta z_{xt} = 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (12)$$

com as seguintes condições de fronteira e iniciais

$$\begin{cases} z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ z(x, 0) = z_0(x), \quad z_t(x, 0) = z_1(x), \quad x \in (0, L) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in (0, L). \end{cases} \quad (13)$$

Aqui  $z$ ,  $u$  e  $\theta$  denotam o deslocamento de cada constituinte e a temperatura, respectivamente. As constantes  $\rho_z > 0$ ,  $\rho_u > 0$  representam as densidades de massa e as constantes positivas  $c$ ,  $\kappa$  e  $\delta$  estão relacionadas com as hipóteses da termoelasticidade. Para  $i = 1, 2, 3$  as constantes  $a_i$  satisfazem a relação

$$a_2^2 < a_1 a_3.$$

As funções  $f_1(z, u)$  e  $f_2(z, u)$  são termos de fonte não lineares,  $h_1 = h_1(x)$  e  $h_2 = h_2(x)$  são forças externas. Os principais resultados obtidos pelos autores foram a existência de atratores globais e exponenciais, a finitude e suavidade de atratores globais e suas propriedades geométricas.

Mais recentemente, Freitas et al. [34] estudaram um problema de misturas binária com termo de atraso dado por

$$\begin{cases} \rho_z z_{tt} - a_1 z_{xx} - a_2 u_{xx} + z_t + f_1(z, u) = h_1, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_u u_{tt} - a_3 u_{xx} - a_2 z_{xx} + u_t + \epsilon u_t(x, t - \tau) + f_2(z, u) = h_2, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (14)$$



com as condições de fronteira e iniciais

$$\begin{cases} z(0, t) = z_x(L, t) = u(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t > 0, \\ z(x, 0) = z_0(x), & z_t(x, 0) = z_1(x), & x \in (0, L), \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (15)$$

Os autores provaram um importante resultado de semicontinuidade superior do atrator global para o sistema dinâmico associado. Mais precisamente, eles provaram que a família de atratores globais para o problema (14)-(15) converge semicontinuaemente superiormente para o atrator associado ao problema (14)-(15) com  $\epsilon = 0$  quando o parâmetro  $\epsilon \rightarrow 0$ . Esse resultado deu uma nova contribuição para a teoria associada à dinâmica não linear de sistemas de misturas binárias de sólidos.

### 0.3 Problema em estudo e objetivos

O primeiro trabalho a investigar a estabilização para um sistema de mistura ternária de sólidos foi proposto por F. Dell’Oro e Rivera [31]. Com a finalidade de deduzir o modelo estudado, os autores consideraram a seguinte configuração:

Dado  $L > 0$ , consideramos uma haste composta por três misturas contínuas interagindo com referência à configuração  $[0, L]$ . Denotado por

$$u(x, t), v(y, t), w(z, t) : [0, L] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

o deslocamento de cada constituinte, as partículas consideradas devem ocupar a mesma posição no instante  $t = 0$ , de modo que  $x = y = z$ . Para  $i = 1, 2, 3$ , também introduziu-se as densidades de massa  $\rho_i > 0$ , as tensões parciais  $T_i$  e as forças externas  $F_i$  associadas a  $u, v$  e  $w$  respectivamente. Indicado por  $P_i$  as forças internas do corpo, as equações do movimento são dadas pelo sistema diferencial

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} = T_{1x} - P_1 + F_1, \\ \rho_2 v_{tt} = T_{2x} + P_2 + F_2, \\ \rho_3 z_{tt} = T_{3x} - P_3 + F_3. \end{cases} \quad (16)$$

Assumindo que as equações constitutivas das tensões parciais sejam

$$\begin{cases} T_1 = a_{11}u_x + a_{12}v_x + a_{13}w_x, \\ T_2 = a_{12}u_x + a_{22}v_x + a_{23}w_x, \\ T_3 = a_{13}u_x + a_{23}v_x + a_{33}w_x, \end{cases} \quad (17)$$

com

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

uma matriz definida positiva (real) e simétrica, enquanto as forças internas do corpo devem ter a forma

$$P_i = \alpha(u - v - w), \quad i = 1, 2, 3, \quad (18)$$

com  $\alpha > 0$  fixo. Finalmente, tomando-se

$$F_1 = -d_1 u_t, \quad F_2 = -d_2 v_t \quad \text{e} \quad F_3 = -d_3 w_t, \quad (19)$$

com  $d_i \geq 0$  e substituindo as equações (17)-(19) no sistema (16), obtemos

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} v_{xx} - a_{13} w_{xx} + \alpha(u - v - w) + d_1 u_t = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} v_{xx} - a_{23} w_{xx} - \alpha(u - v - w) + d_2 v_t = 0, \\ \rho_3 w_{tt} - a_{13} u_{xx} - a_{23} v_{xx} - a_{33} w_{xx} + \alpha(u - v - w) + d_3 w_t = 0. \end{cases} \quad (20)$$

As três equações acima são complementadas com as condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{em } (0, L), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), & \text{em } (0, L), \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), & \text{em } (0, L), \end{cases} \quad (21)$$

e condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, & \text{em } (0, T). \end{cases} \quad (22)$$

A principal contribuição apresentada em [31], com relação ao sistema (20)-(22), foi encontrar as condições necessárias e suficientes para a estabilidade forte e exponencial do semigrupo associado, quando a dissipação é considerada em alguma equação do sistema. Além disso, eles estudaram situações onde o semigrupo decai polinomialmente ou admite trajetórias com energia conservativa, e obtiveram a taxa de decaimento polinomial. No caso em que a mistura viscoelástica é composta por  $n > 1$  contínuos interagentes, Puma e Rivera [61] provaram que o semigrupo associado é exponencialmente estável se, e somente se, o eixo imaginário for um subconjunto do conjunto resolvente do gerador infinitesimal.

Nesta presente tese, estudamos um sistema de mistura ternária de sólidos com damping não linear e termos de fonte nos quais as forças internas do corpo devem ter a forma

$$P_1 = -f_1(u, v, w), \quad P_2 = f_2(u, v, w) \quad \text{e} \quad P_3 = -f_3(u, v, w), \quad (23)$$

e as dissipações por atrito são tomados da forma

$$F_1 = -g_1(u_t), \quad F_2 = -g_2(v_t) \quad \text{e} \quad F_3 = -g_3(w_t). \quad (24)$$

Substituindo (17), (23) e (24) no sistema (16), obtemos

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} v_{xx} - a_{13} w_{xx} + g_1(u_t) = f_1(u, v, w), & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 v_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} v_{xx} - a_{23} w_{xx} + g_2(v_t) = f_2(u, v, w), & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_3 w_{tt} - a_{13} u_{xx} - a_{23} v_{xx} - a_{33} w_{xx} + g_3(w_t) = f_3(u, v, w), & \text{em } (0, L) \times (0, T). \end{cases} \quad (25)$$

As três equações são complementadas com as condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{em } (0, L), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), & \text{em } (0, L), \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), & \text{em } (0, L), \end{cases} \quad (26)$$

e condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, & \text{em } (0, T). \end{cases} \quad (27)$$

Neste trabalho, num primeiro momento, estamos interessados no estudo do comportamento assintótico das soluções fracas do problema (25)-(27) focando na iteração entre os termos de fonte e damping. Para equações de ondas, existe uma vasta literatura que aborda a interação entre termos de fonte e damping, por exemplo, as referências [1, 2, 51, 39, 60, 66–68] consideram problemas com fontes subcríticas ou críticas e [17, 18, 20, 19, 28, 43, 45, 69, 44] problemas com fontes supercríticas. O principal interesse desses trabalhos foi investigar questões relacionadas à boa colocação local e global, blow-up de soluções e o decaimento uniforme da energia. No entanto, até o presente momento, tais resultados para sistemas de misturas ternárias não foram abordados. O único trabalho que encontramos na literatura é devido a F. Dell’Oro e Rivera [31], mas esse trata do caso linear.

O principal objetivo da primeira parte desta tese é o estudar a boa colocação local e global, o decaimento uniforme e blow-up das soluções fracas do sistema do sistema (25) com foco

na competição fonte-damping. Usando semigrupos não lineares e a teoria dos operadores monótonos provamos a existência de soluções fracas locais e globais, e a unicidade das soluções fracas. Além disso, provamos que tais soluções únicas dependem continuamente dos dados iniciais. Supondo que os parâmetro de crescimento das fontes são maiores do que o parâmetro de crescimento dos dampings e a energia total inicial é negativa ( $\mathcal{E}(0) < 0$ ), também provamos que cada solução fraca do nosso sistema possui blow-up em tempo finito. Usando o método do poço potencial, obtemos vários resultados adicionais. Especificamente, provamos a existência de uma única solução fraca global com dados iniciais provenientes da parte “boa” do poço potencial. Para tal solução global, provamos que a energia total do sistema decai exponencialmente ou algébricamente, dependendo do comportamento da dissipação próximo a origem. Em seguida, obtemos resultados de blow-up com a energia inicial total positiva ( $\mathcal{E}(0) > 0$ ).

Num segundo momento, estudamos o problema (25)-(27) do ponto de vista da dinâmica assintótica caracterizada por atratores globais. Consideramos forças externas  $\epsilon h_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , agindo nas três equações, onde  $\epsilon$  é uma constante positiva. Usando a abordagem de quase-estabilidade proposta por Chueshov e Lasiecka [27], provamos que o sistema dinâmico associado possui atrator global suave com dimensão fractal finita o qual é caracterizado pela variedade instável do conjunto dos pontos estacionários. Além disso, provamos a existência de atratores exponenciais generalizados. Também estudamos a continuidade do atrator em relação ao parâmetro  $\epsilon$  sobre um subconjunto denso e residual de  $[0, 1]$ . Finalmente, investigamos a semicontinuidade superior do atrator com relação ao parâmetro  $\epsilon$  sobre todo o conjunto  $[0, 1]$ .

## 0.4 Organização da tese

- No Capítulo 1, introduzimos definições, notações e alguns resultados abstratos sobre sistemas dinâmicos não lineares que são necessários para melhor compreensão do trabalho.
- No Capítulo 2, estudamos a existência e unicidade de solução. Na Seção 2.1, provamos a existência local de soluções fracas (veja Teorema 2.1). Inicialmente, estabelecemos a existência de soluções fortes que são obtidas pela reformulação do sistema em um problema de Cauchy equivalente, no qual aplicamos a teoria de operadores monótonos e semigrupos não lineares. A Seção 2.1.2 é dedicada à prova da identidade de energia (2.119) para soluções fracas através do quociente de diferença. Essa abordagem torna o cálculo que exigiria forte regularidade das soluções. Na Seção 2.2, provamos a dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais, o que também implica a unicidade de tais soluções (veja Teorema 2.2). A Seção 2.3 contém a prova da existência global para o caso em que os expoentes dos termos de damping dominam os

das fontes (veja Teorema 2.3). Notemos que, como os termos de fonte estão acoplados (no sentido de que cada uma depende do vetor solução), nenhum termo de damping isoladamente pode “estabilizar” qualquer um dos termos de fonte, independentemente da relação entre os seus expoentes. Na Seção 2.4, obtemos o resultado de blow-up em tempo finito sempre que a energia total inicial for negativa ( $\mathcal{E}(0) < 0$ ) e os expoentes das fontes dominam os dos dampings (veja Teorema 2.4). A Seção 2.5 contém a prova de existência global para soluções com dados iniciais “dentro” da parte “boa” do poço potencial (veja Teorema 2.5). Finalmente, a Seção 2.6 fornece a prova do resultado de blow-up da energia inicial total positiva (veja Teorema 2.6).

- No Capítulo 3, obtemos as taxas de decaimento uniforme da energia. Na seção 3.1, provamos uma desigualdade de estabilidade perturbada (veja Proposição 3.1). A Seção 3.2 é desenvolvida para mostrar termos de ordem inferior da desigualdade de estabilidade perturbada são absorvidos (veja Proposição 3.2). Para este fim, usamos um argumento de unicidade-compacidade e a estratégia de Lasiecka e Tataru [54]. Finalizamos este capítulo provando o decaimento uniforme das soluções fracas para o nosso problema (veja Teorema 3.1), donde concluímos o decaimento exponencial e polinomial de soluções (veja Corolários 3.1 e 3.2).
- Por fim, o Capítulo 4 é dedicado ao estudo de atratores globais e a continuidade desses atratores sob perturbação. Consideramos uma perturbação autônoma do nosso problema original. Mais precisamente, acrescentamos nas três equações os termos  $\epsilon h_1(x)$ ,  $\epsilon h_2(x)$  e  $\epsilon h_3(x)$  com  $\epsilon > 0$  sendo uma constante suficientemente, a qual fazemos tender a zero. Na Seção 4.1, introduzimos as hipóteses necessárias para o estudo de atratores globais e estabelecemos a boa colocação global do problema (veja Teorema 4.1). Na Seção 4.3, provamos que o sistema dinâmico associado ao problema é um sistema gradiente e o conjunto de seus pontos estacionários é limitado. Na Seção 4.4, obtemos uma estimativa de quase-estabilidade (usualmente chamada de *estimativa de estabilizabilidade*), que tem papel central na prova quase-estabilidade do sistema no sentido proposto por Chueshov e Lasiecka [27] (veja Teorema 4.5). Na Seção 4.5, provamos que o sistema dinâmico correspondente possui um atrator global suave  $\mathfrak{A}_\epsilon$  com dimensão fractal finita. Além disso, provamos a existência de atrator exponencial generalizado com dimensão fractal finita apenas em um espaço menos regular que o espaço de fase (veja Teorema 4.2). Finalmente, na Seção 4.6, provamos a continuidade da família de atratores globais  $\mathfrak{A}_\epsilon$  com relação ao parâmetro  $\epsilon$  em um subconjunto  $I_*$  denso e residual de  $[0, 1]$  (veja Teorema 4.3). Finalmente, provamos a semicontinuidade superior do atrator para todo  $\epsilon \in [0, 1]$  (veja Teorema 4.4).

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, encontram-se as definições, resultados e exemplos necessários para o melhor entendimento dos resultados que serão obtidos nos capítulos subsequentes.

### 1.1 Notações e definições

Ao longo deste trabalho, usamos as seguintes notações padrões para os espaços de Lebesgue e Sobolev de funções reais  $H^m(0, L)$  e  $L^p(0, L)$ , respectivamente. A norma em  $L^p(0, L)$ ,  $p \geq 1$ , é denotada por

$$\|u\|_p = \left( \int_0^L |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, quando  $p = 2$ , sabemos que  $L^2(0, L)$  é um espaço de Hilbert e seu produto interno é denotado por

$$(u, v)_2 = \int_0^L u(x)v(x)dx.$$

De modo análogo, para funções vetoriais  $y, \tilde{y} : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , escrevemos  $y = (u, v, w)$  e  $\tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  e usamos a mesma notação

$$\|y\|_p = (\|u\|_p^p + \|v\|_p^p + \|w\|_p^p)^{1/p}, \quad (y, \tilde{y})_2 = (u, \tilde{u})_2 + (v, \tilde{v})_2 + (w, \tilde{w})_2.$$

Dado um espaço de Banach  $X$ , denotamos por  $\|\cdot\|_X$  sua norma e por  $X^*$  o seu dual. Dado um  $x^* \in X^*$ , o valor do funcional linear  $x^*$  aplicado em qualquer  $x \in X$  é denotado por  $\langle x^*, x \rangle$ . Em particular, quando  $X$  for um espaço de Hilbert, assumiremos que ele é identificado com o seu próprio dual. Para mais detalhes recomendamos a referência [13].

**Definição 1.1.** *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo. Dizemos que um operador  $A : X \rightarrow X^*$  é monótono se*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A). \quad (1.1)$$

Além disso, dizemos que o operador  $A : X \rightarrow X^*$  é **monótono maximal** se, para qualquer  $x^*$ , existe um  $x \in X$  tal que  $Ax + x = x^*$ .

**Definição 1.2.** Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo com a norma  $\|\cdot\|_X$  e  $A : X \rightarrow X^*$  um operador. Dizemos que o operador  $A$  é **hemicontínuo** se

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle A(x + \lambda y), z \rangle = \langle A(x), z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X. \quad (1.2)$$

Dizemos que  $A : X \rightarrow X^*$  é **coersivo** se

$$\lim_{\|x\|_X \rightarrow \infty} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|_X} = \infty. \quad (1.3)$$

**Definição 1.3.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert com produto interno  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ . Dizemos que um operador  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é **acretivo** se

$$(Az_1 - Az_2, z_1 - z_2)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall z_1, z_2 \in D(A). \quad (1.4)$$

Além disso, é chamado de **m-acretivo** se  $R(A + I) = \mathcal{H}$ , com  $R(A + I)$  denotando a imagem de  $D(A)$  pelo operador  $A + I$  e  $I$  sendo o operador identidade sobre  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 1.1.** Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo. Se  $A : X \rightarrow X^*$  é um operador monótono e hemicontínuo, então  $A$  é monótono maximal.

**Prova:** Veja [13, Teorema 1.3].

**Corolário 1.1.** Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo. Se  $A : X \rightarrow X^*$  é um operador coercivo e monótono maximal, então  $A : X \rightarrow X^*$  é sobrejetivo, ou seja,  $Im(A) = X^*$ .

**Prova:** Veja [13, Corolário 1.2].

**Teorema 1.2.** Seja  $X$  um espaço de Banach e sejam  $A : X \rightarrow X^*$  e  $B : X \rightarrow X^*$  operadores monótonos maximais tais que

$$(int(D(A)) \cap D(B)) \neq \emptyset. \quad (1.5)$$

Então  $A + B$  é monótono maximal.

**Prova:** Veja [13, Teorema 1.5].

### 1.1.1 Equações de evolução abstrata

Nossos resultados de existência e unicidade de soluções para os problemas que serão estudados neste trabalho, são obtidos reescrevendo tais problemas na forma de um problema de Cauchy em um espaço de Hilbert escolhido de modo adequado. Essa subseção tem como objetivo introduzir alguns resultados abstratos úteis para o estudo de equações de evolução abstratas em espaços de Hilbert.

Seja  $\mathcal{A}$  um operador  $m$ -acretivo sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  com domínio  $D(\mathcal{A})$ . Considere a seguinte equação diferencial abstrata:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \mathcal{A}u(t) = f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (1.6)$$

com  $0 < T < \infty$  e  $f \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ .

**Definição 1.4.** *Uma solução forte de (1.6) é uma função  $u \in W^{1,1}(0, T; \mathcal{H})$  tal que (1.6) é satisfeito quase sempre em  $(0, T)$ .*

O próximo resultado nos dá a existência de soluções fortes para operadores  $m$ -acretivos devido a Kato (ver [76], p. 180).

**Teorema 1.3.** *Seja  $\mathcal{A}$   $m$ -acretivo sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Suponhamos que  $u_0 \in D(\mathcal{A})$  e  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  seja absolutamente contínua. Então existe uma única solução forte  $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  para (1.6). Além disto,  $u$  é Lipschitz contínua e fortemente diferenciável à direita com  $u(t) \in D(\mathcal{A})$  para todo  $t \geq 0$ .*

Um conceito mais fraco de solução, que é também bastante frequente na teoria de equações diferenciais, é considerar limites (uniforme) de soluções fortes.

**Definição 1.5.** *Uma solução generalizada de (1.6) em um intervalo (fechado)  $[0, T]$  é uma função contínua  $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$  tal que  $u(0) = u_0$  e existe uma sequência de soluções fortes  $u_n$  definidas em  $[0, T]$  para o problema*

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt}(t) + \mathcal{A}u_n(t) = f_n, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.7)$$

com  $f_n \rightarrow f$  em  $L^1(0, T; \mathcal{H})$  e  $u_n \rightarrow u$  em  $C([0, T]; \mathcal{H})$ . Uma função  $u(t)$  de classe  $C([0, T]; \mathcal{H})$  será uma solução generalizada do problema (1.6) em um semi-intervalo  $[0, T)$ , se  $u$  for uma solução generalizada de (1.6) em todo intervalo fechado  $[0, T']$  com  $T' < T$ .

Temos também um resultado sobre existência e unicidade para soluções generalizadas devido a [76].



**Teorema 1.4.** *Seja  $\mathcal{A}$   $m$ -acretivo sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $f \in L^1(0, T; \mathcal{H})$  e  $u_0 \in \overline{D(\mathcal{A})}$ , em que  $\overline{D(\mathcal{A})}$  é o fecho de  $D(\mathcal{A})$  em  $\mathcal{H}$ . Então existe uma única solução generalizada para (1.6). Além disso, quaisquer duas soluções generalizadas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  com dados  $u_{10}, f_1$  e  $u_{20}, f_2$  satisfazem as seguintes estimativas de estabilidade com  $0 \leq s < t \leq T$*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|u_1(s) - u_2(s)\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \int_s^t (f_1(\sigma) - f_2(\sigma), u_1(\sigma) - u_2(\sigma))_{\mathcal{H}} d\sigma \quad (1.8)$$

e

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|u_1(s) - u_2(s)\|_{\mathcal{H}} + \int_s^t \|f_1(\sigma) - f_2(\sigma)\|_{\mathcal{H}} d\sigma. \quad (1.9)$$

**Observação 1.1.** *É conveniente observar que as soluções generalizadas não satisfazem a equação diferencial de fato, mesmo que em um sentido fraco. Mas sobre certas hipóteses adicionais de regularidade, é possível mostrar que uma solução generalizada satisfaz uma forma variacional da equação. Tais soluções são chamadas soluções fracas.*

Consideremos, agora, a equação perturbada

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + (\mathcal{A} + \mathcal{B})u(t) = f(t), & 0 < t < T; \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Também supomos que o operador  $\mathcal{B} : \overline{D(\mathcal{A})} \rightarrow \mathcal{H}$  seja Lipschitz contínuo com constante  $L$ , tal que

$$\|\mathcal{B}(u) - \mathcal{B}(v)\|_{\mathcal{H}} \leq L\|u - v\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall u, v \in \overline{D(\mathcal{A})}. \quad (1.11)$$

**Teorema 1.5.** *Se  $\mathcal{A}$  for  $m$ -acretivo e  $\mathcal{B}$  satisfazendo (1.11), então*

- **Solução Forte:** *Para cada  $u_0 \in D(\mathcal{A})$  e  $f$  absolutamente contínua de  $[0, T]$  em  $\mathcal{H}$ , existe uma única solução forte  $u(t)$  para o problema (1.10). Além disso, a função  $t \mapsto u(t)$  é Lipschitz contínua de  $[0, T]$  em  $\mathcal{H}$  e fortemente diferenciável à direita em  $\mathcal{H}$  com  $u(t) \in D(\mathcal{A})$  para qualquer  $t \geq 0$ . Mais ainda,*

$$u_t = \frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}), \quad \mathcal{A}(u) \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \quad (1.12)$$

*e as funções  $t \mapsto u_t(t)$  e  $t \mapsto \mathcal{A}(u(t))$  são fracamente contínuas e fortemente contínuas à direita de  $[0, T]$  em  $\mathcal{H}$ .*

- **Solução generalizada:** *Para cada  $u_0 \in \overline{D(\mathcal{A})}$  e  $f \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ , existe uma única solução generalizada para o problema (1.10) em  $[0, T]$ .*

**Prova:** A prova deste teorema pode ser encontrada em [76]. A principal estratégia da demonstração é notar que o operador  $\mathcal{A} + \mathcal{B} + LI$  é um operador  $m$ -acretivo.

O teorema acima ainda pode ser generalizado no caso em que  $\mathcal{B}$  é um operador localmente Lipschitz contínuo (veja o resultado a seguir). Tal ferramenta é extremamente útil quando se quer provar a existência global de solução para EDP's semilineares, na posse de estimativas obtidas a partir de algum método de energia. Entendemos por localmente Lipschitz contínuo, um operador que satisfaz a condição de Lipschitz em cada bola fechada do espaço  $\mathcal{H}$ . Neste caso, a constante de Lipschitz depende do raio da bola.

**Teorema 1.6.** *Seja  $\mathcal{A} + \lambda I$  um operador  $m$ -acretivo para algum  $\lambda \geq 0$  e assumamos que  $\mathcal{B} : \overline{D(\mathcal{A})} \rightarrow \mathcal{H}$  é um operador localmente Lipschitz. Então*

- **Solução forte local:** para cada  $u_0 \in D(\mathcal{A})$  e  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{H}$  absolutamente contínua em cada intervalo finito  $[0, T]$ , existe um  $t_{\max} \leq \infty$  tal que existe uma única solução forte  $u(t)$  para o problema (1.10) definida em  $[0, t_{\max})$ ;
- **Solução generalizada local:** para cada  $u_0 \in \overline{D(\mathcal{A})}$  e  $f \in L^1_{loc}(0, \infty; \mathcal{H})$ , existe uma única solução generalizada para o problema (1.10) definida em  $[0, t_{\max})$ .

Em ambos os casos, se  $t_{\max} < \infty$ , então  $\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty$ .

**Prova:** Veja [27], p. 64.

## 1.1.2 O Teorema do Passo da Montanha

A fim de enunciar o Teorema do Passo da Montanha, precisamos estabelecer a noção de derivada de funções  $f : U \subseteq E \rightarrow F$  com  $U$  sendo um conjunto aberto e  $E$  e  $F$  dois espaços de Banach. No cálculo infinitesimal em dimensão finita, buscávamos aproximar localmente funções não lineares por funções afins

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

com  $f'(x_0)$  sendo uma transformação linear contínua de  $E$  em  $F$ . Essa ideia nos leva à definição a seguir.

**Definição 1.6.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $U$  um aberto em  $E$ . Dizemos que a função  $f : U \subseteq E \rightarrow F$  é **Frechét-diferenciável** num ponto  $x_0 \in U$  se existe um operador linear contínuo  $A : E \rightarrow F$  tal que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + R(x_0, h),$$

para todo  $h$  tal que  $h + x_0$  pertence a uma bola aberta centrada em  $x_0$  e contida em  $U$  com  $R(x_0, h)$  satisfazendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|R(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso,  $A$  é chamada de **derivada de Frechét** de  $f$  em  $x_0$  e é denotada por  $A = D_f(x_0)$ . Dizemos que  $f$  é **Frechét-diferenciável** em  $U$  se  $f$  é Frechét-diferenciável em todos os pontos de  $U$ .

**Definição 1.7.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert e considere  $C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$  como sendo o espaço vetorial dos funcionais  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  que são diferenciáveis no sentido de Frechét com derivadas de Frechét contínuas em  $\mathcal{H}$ . Diz-se que um funcional  $f \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Palais-Smale (**PS**) se qualquer sequência  $(u_n) \subset \mathcal{H}$  tal que  $(f(u_n))$  é limitada e  $D_f(u_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  possui subsequência convergente.

**Teorema 1.7** (Teorema do Passo da Montanha). Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Se  $f \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$  satisfaz a condição (**PS**), tem derivada Frechét  $D_f$  localmente Lipschitziana e, além disso,  $f$  é tal que:

1.  $f(0) = 0$ ;
2. existem constantes positivas  $m$  e  $r$  tais que  $f(u) \geq m$  quando  $\|u\| = r$ ;
3. existe  $v \in \mathcal{H}$  tal que  $f(v) \leq 0$  e  $\|v\| > r$

então  $f$  possui um valor crítico

$$d = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \max_{t \in [0,1]} f(\alpha(t)) \right\}$$

com

$$A = \{\alpha \in C([0, 1], \mathcal{H}); \alpha(0) = 0 \text{ e } \alpha(1) = v\}.$$

A ideia geométrica do Teorema do Passo da Montanha pode ser resumida da seguinte forma: suponha que se deseja transpor uma cadeia de montanhas sem contorna-las e com o mínimo esforço possível. Qualquer caminho saindo do sopé de um lado da cadeia e indo até o sopé do outro lado passará por um ponto cuja altitude seja máxima para o caminho escolhido. A ideia é procurar, dentre todos os caminhos demissíveis, aquele cuja altitude máxima seja a menor possível.

### 1.1.3 Outras definições e resultados auxiliares

As definições e resultados desta seção desempenham um papel auxiliar na demonstração de alguns teoremas estabelecidos ao longo deste trabalho.

**Definição 1.8.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Para qualquer função  $u \in C([0, T]; X)$  e  $h > 0$ , definimos o quociente da diferença simétrica por*

$$D_h u(t) = \frac{u_e(t+h) - u_e(t-h)}{2h} \quad (1.13)$$

com  $u_e(t)$  denotando a extensão de  $u(t)$  para  $\mathbb{R}$  dada por

$$u_e(t) = \begin{cases} u(0), & \text{para } t \leq 0, \\ u(t), & \text{para } t \in (0, T), \\ u(T), & \text{para } t \geq T. \end{cases} \quad (1.14)$$

**Proposição 1.1.** *Seja  $u \in C([0, T]; X)$ , sendo  $X$  um espaço de Hilbert com produto interno  $(\cdot, \cdot)_X$  e a norma  $\|\cdot\|_X$ . Então*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T (u(t), D_h u(t))_X dt = \frac{1}{2} (\|u(T)\|_X^2 - \|u(0)\|_X^2). \quad (1.15)$$

Se, além disso,  $u_t \in C([0, T], X)$ , então

$$\int_0^T (u_t(t), (D_h u(t))_t)_X dt = 0, \text{ para cada } h > 0, \quad (1.16)$$

e,

$$D_h u(t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} u_t(t) \text{ fracamente em } X \text{ para todo } t \in (0, T) \quad (1.17)$$

$$D_h u(0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} u_t(0) \quad e \quad D_h u(T) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} u_t(T) \quad \text{fracamente em } X. \quad (1.18)$$

**Prova:** Veja [51, Proposição 4.3].

A seguinte proposição é essencial para a prova da identidade de energia (2.119).

**Proposição 1.2.** [45] *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Assuma que  $u \in C([0, T], Y)$  e  $u_t \in L^1(0, L; Y) \cap L^p(0, L; X)$ , com  $1 \leq p < \infty$ . Então*

$$D_h u \in L^p(0, L; X) \text{ e } \|D_h u\|_{L^p(0, L; X)} \leq \|u_t\|_{L^p(0, L; X)}.$$

Além disso,  $D_h u \rightarrow u_t$  em  $L^p(0, L; X)$ , quando  $h \rightarrow 0$ .

A seguinte definição será usada posteriormente quando trabalharmos com damping não linear.

**Definição 1.9.** Uma função  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *linearmente limitada perto da origem* se existirem constantes  $c_1, c_2 > 0$  tais que

$$c_1|s| \leq |\gamma(s)| \leq c_2|s|, \quad \forall |s| < 1.$$

**Teorema 1.8** (Aubin-Lions). *Sejam  $X_0, X$  e  $X_1$  espaços de Banach com  $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$ . Suponha que a imersão  $X_0 \hookrightarrow X$  seja compacta e  $X \hookrightarrow X_1$  seja contínua. Para  $1 \leq p, q \leq \infty$ , seja*

$$W = \{u \in L^p([0, T]; X_0); u' \in L^q([0, T]; X_1)\} \quad (1.19)$$

com a norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p([0, T]; X_0)} + \|u'\|_{L^q([0, T]; X_1)}. \quad (1.20)$$

Então,

- (i) Se  $p < \infty$ , a imersão  $W \hookrightarrow L^p([0, T]; X)$  é compacta;
- (ii)  $p = \infty$  e  $q > 1$ , a imersão  $W \hookrightarrow C([0, T]; X)$  é compacta.

**Prova:** Veja [57].

## 1.2 Sistemas dinâmicos e atratores globais

Os atratores são os principais objetos investigados na análise do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos dissipativos em espaços de dimensão infinita.

Nesta seção, iremos introduzir alguns conceitos e resultados relacionados a atratores globais que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Para mais detalhes, consulte as referências [16, 46, 52, 12, 78, 73, 27].

### 1.2.1 Definições básicas

**Definição 1.10.** *Seja  $X$  um espaço métrico. Um semigrupo é uma família  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de funções de  $X$  em si mesmo satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $S(0) = I$ , onde  $I$  é a identidade em  $X$ ;
- $S(t + s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall t, s \geq 0$ ;
- $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S(t)x \in X$  é contínua.

Por simplicidade, um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  sobre um espaço métrico  $X$  será denotado por  $S(t)$ .

**Definição 1.11.** Um *sistema dinâmico* é um par  $(X, S(t))$  consistindo de um espaço métrico  $X$  e um semigrupo  $S(t)$  sobre  $X$ . O espaço métrico  $X$  é chamado *espaço de fase*.

**Definição 1.12.** Dados dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de um espaço métrico  $X$ , a *semi-distância de Hausdorff* entre os conjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$  é definida por

$$\text{dist}_X(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y),$$

onde  $d$  é a métrica de  $X$ . A *distância de Hausdorff* entre os conjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$  é definida como

$$d_X(A, B) = \max \{ \text{dist}_X(A, B), \text{dist}_X(B, A) \}.$$

**Definição 1.13.** Um subconjunto  $\mathfrak{A} \subset X$  é um *atrator global* para o sistema dinâmico  $(X, S(t))$  se satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $\mathfrak{A}$  é compacto;
- (2)  $\mathfrak{A}$  é invariante, isto é,  $S(t)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$  para todo  $t \geq 0$ ;
- (3)  $\mathfrak{A}$  atrai subconjuntos limitados pela ação do semigrupo  $S(t)$ , isto é, para todo subconjunto limitado  $B \subset X$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_X(S(t)B, \mathfrak{A}) = 0. \quad (1.21)$$

Notemos que o atrator global para um sistema dinâmico quando existe, ele é único, e é o maior conjunto invariante compacto e o menor conjunto fechado que atrai limitados de  $X$  pela ação do semigrupo  $S(t)$ .

**Definição 1.14.** Sejam  $(X, S(t))$  um sistema dinâmico e  $B$  um subconjunto de  $X$ . Dizemos que  $B$  é um *conjunto absorvente* se, para todo subconjunto limitado  $D \subset X$ , existe  $\tau = \tau(D) > 0$  tal que

$$S(t)D \subset B, \quad \forall t \geq \tau.$$

**Definição 1.15.** Um sistema dinâmico  $(X, S(t))$  é dito *dissipativo* se existe um subconjunto absorvente e limitado  $D$  de  $X$ .

**Definição 1.16.** Diz-se que uma função contínua  $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$  é uma *trajetória completa* para o sistema dinâmico  $(X, S(t))$ , se  $S(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$  para todo  $t \geq 0$  e todo  $\tau \in \mathbb{R}$ .

É bem conhecido (veja, por exemplo [73]) que o atrator global para um sistema dinâmico  $(X, S(t))$  quando existe, é caracterizado por trajetórias completas e limitadas de  $X$ .

**Definição 1.17.** Dizemos que um sistema dinâmico  $(X, S(t))$  é **assintoticamente compacto** se para toda sequência limitada  $\{x_n\} \subset X$  e toda sequência  $\{t_n\} \subset [0, \infty)$  com  $t_n \rightarrow \infty$ , a sequência  $\{S(t_n)x_n\}$  possui subsequência convergente.

O resultado a seguir fornece um critério que nos permite verificar se um sistema dinâmico é assintoticamente compacto.

**Teorema 1.9.** Seja  $(X, S(t))$  um sistema dinâmico sobre um espaço métrico completo  $X$  com métrica  $d$ . Suponha que para todo conjunto positivamente invariante limitado  $B \subset X$  e para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $\tau = \tau(\epsilon, B) > 0$  de modo que

$$d(S(\tau)z_1, S(\tau)z_2) \leq \epsilon + \Psi(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in B,$$

onde  $\Psi : B \times B \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função contrativa**, ou seja,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \Psi(x_n, x_m) = 0, \quad \text{para toda sequência } (x_n) \subset B.$$

Então  $S(t)$  é assintoticamente compacto.

**Definição 1.18.** Dizemos que um sistema dinâmico  $(X, S(t))$  é **assintoticamente suave** se para todo conjunto positivamente invariante limitado  $B \subset X$ , existe um conjunto compacto  $K \subset X$  tal que  $K \subset \overline{B}$  e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)B, K) = 0.$$

O próximo teorema estabelece a equivalência entre compacidade assintótica e suavidade assintótica de um sistema dinâmico.

**Teorema 1.10.** Seja  $(X, S(t))$  um sistema dinâmico dissipativo sobre um espaço de Banach  $X$ . Então  $(X, S(t))$  é assintoticamente compacto se, e somente se, é assintoticamente suave.

## 1.2.2 Sistema gradiente

Usamos alguns teoremas fundamentais para provar a existência dos atratores e provar a finitude de sua dimensão fractal. Primeiro, abordamos atratores para sistemas gradientes.

**Definição 1.19.** Seja  $\mathcal{N}$  o conjunto dos pontos estacionários do sistema dinâmico  $(X, S(t))$ , isto é,

$$\mathcal{N} = \{x \in X : S(t)x = x, \forall t \geq 0\}.$$

A **variedade instável** de  $\mathcal{N}$  é o conjunto

$$W^u(\mathcal{N}) = \{x \in X : \text{existe } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ solução global com } \xi(0) = x \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\xi(t), \mathcal{N}) = 0\}.$$

**Definição 1.20.** Um sistema dinâmico  $(X, S(t))$  é dito **gradiente** se ele possui uma função de Lyapunov estrita, ou seja, se existe uma função contínua  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  com as seguintes propriedades:

- (i)  $[0, \infty) \ni t \mapsto \Phi(S(t)x)$  é não crescente para cada  $x \in X$ ,
- (ii) se  $x \in X$  é tal que  $\Phi(S(t)x) = \Phi(x)$  para todo  $t \geq 0$ , então  $x \in \mathcal{N}$ .

O seguinte resultado é provado em [27] (veja Corolário 7.5.7).

**Teorema 1.11.** Seja  $(X, S(t))$  um sistema dinâmico gradiente e assintoticamente compacto com a correspondente função de Lyapunov denotada por  $\Phi$ . Suponha que

$$\Phi(y) \rightarrow \infty \iff \|y\|_X \rightarrow \infty, \quad (1.22)$$

e que o conjunto  $\mathcal{N}$  do pontos estacionários é limitado. Então o sistema dinâmico  $(X, S(t))$  possui atrator global caracterizado por  $\mathfrak{A} = W^u(\mathcal{N})$ .

**Definição 1.21.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $S(t)$  um semigrupo sobre  $X$ . Dizemos que um conjunto fechado e limitado  $\mathfrak{A}^{\min} \subset X$  é um **atrator global minimal** para o semigrupo  $S(t)$  se são válidas as seguintes propriedades:

- (1)  $\mathfrak{A}^{\min}$  é positivamente invariante, isto é,  $S(t)\mathfrak{A}^{\min} \subset \mathfrak{A}^{\min}$  para todo  $t \geq 0$ ;
- (2)  $\mathfrak{A}^{\min}$  atrai todo ponto  $x \in X$ , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_X(S(t)x, \mathfrak{A}^{\min}) = 0 \text{ para todo } x \in X;$$

- (3)  $\mathfrak{A}^{\min}$  é minimal, ou seja, não existe subconjunto próprio de  $\mathfrak{A}^{\min}$  possuindo as propriedades (1) e (2) acima.

**Teorema 1.12.** [27, Teorema 7.5.10] Suponha que um sistema dinâmico gradiente  $(X, S(t))$  possui atrator global  $\mathfrak{A}$ . Então para todo  $x \in X$  temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_X(S(t)x, \mathcal{N}) = 0,$$

ou seja, qualquer trajetória se estabiliza no conjunto  $\mathcal{N}$  dos pontos estacionários. Em particular, isso significa que o atrator global minimal  $\mathfrak{A}^{\min}$  coincide com o conjunto dos pontos estacionários,  $\mathfrak{A}^{\min} = \mathcal{N}$ .



### 1.2.3 Quase-estabilidade e suas consequências

Para provar a finitude e regularidade do atrator global, usaremos o método recente de quase-estabilidade proposto por Chueshov e Lasiecka [27].

**Definição 1.22.** Uma semi-norma  $n_X(\cdot)$  definida sobre um espaço de Banach  $X$  é dita **compacta** se  $n_X(x_n) \rightarrow 0$  para toda sequência  $x_n \rightarrow 0$  em  $X$ .

**Definição 1.23.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach reflexivos com  $X \hookrightarrow \hookrightarrow Y$  e seja

$$H = X \times Y. \quad (1.23)$$

Considere o sistema dinâmico  $(H, S(t))$  dado por

$$S(t)z = (u(t), u_t(t)), \quad z = (u_0, u_1) \in H, \quad (1.24)$$

onde a função  $u$  possui a regularidade

$$u \in C(\mathbb{R}^+; X) \cap C^1(\mathbb{R}^+; Y). \quad (1.25)$$

Dizemos que o sistema dinâmico  $(H, S(t))$  é **quase-estável** sobre um conjunto  $B \subset H$ , se existe uma seminorma compacta  $n_X(\cdot)$  sobre  $X$  e funções não negativas  $a(t), b(t)$  e  $c(t)$  em  $\mathbb{R}^+$ , sendo  $a(t)$  e  $c(t)$  localmente limitadas em  $[0, \infty)$  e  $b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+)$  com  $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$  tais que

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \leq a(t)\|z^1 - z^2\|_H^2, \quad (1.26)$$

e

$$\|S(t)z^1 - S(t)z^2\|_H^2 \leq b(t)\|z^1 - z^2\|_H^2 + c(t) \sup_{0 \leq s \leq t} [n_X(u^1(s) - u^2(s))]^2 \quad (1.27)$$

para  $t > 0$  e  $z^i \in B$ , onde  $S(t)z^i = (u^i(t), u_t^i(t)), i = 1, 2$ .

A desigualdade (1.27) é conhecida como *desigualdade de esbilizabilidade* (veja [27]).

A quase-estabilidade permite provar “quase de uma só vez” a existência de atrator global, a dimensão fractal finita e regularidade de atratores, existência de atratores exponenciais, etc. A seguir vejamos algumas dessas propriedades.

**Teorema 1.13.** [27, Proposição 7.9.4] Seja  $(H, S(t))$  um sistema dinâmico definido por (1.24) e satisfazendo a regularidade (1.25). Se  $(H, S(t))$  é quase-estável sobre todo conjunto positivamente invariante limitado  $B \subset H$ , então  $(H, S(t))$  é assintoticamente compacto.

**Definição 1.24.** Seja  $\mathfrak{A}$  o atrator global para um sistema dinâmico  $(X, S(t))$ . A **dimensão fractal**  $\dim_f^X \mathfrak{A}$  de  $\mathfrak{A}$  é definida por

$$\dim_f^X \mathfrak{A} := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln n(\mathfrak{A}, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

onde  $n(\mathfrak{A}, \epsilon)$  é o menor número de bolas fechadas de raio  $\epsilon$  que são necessárias para cobrir o atrator  $\mathfrak{A}$ .

A quase-estabilidade também garante a dimensão fractal finita e a regularidade do atrator.

**Teorema 1.14** ([27], Teorema 7.9.6). *Seja  $(H, S(t))$  um sistema dinâmico definido por (1.24). Se  $(H, S(t))$  possui atrator global  $\mathfrak{A}$  e é quase-estável em  $\mathfrak{A}$ , então  $\mathfrak{A}$  possui dimensão fractal finita  $\dim_f^X \mathfrak{A}$ .*

**Teorema 1.15** ([27], Teorema 7.9.8). *Seja  $(H, S(t))$  sistema dinâmico definido por (1.24). Suponhamos que  $(H, S(t))$  possua atrator global  $\mathfrak{A}$  e seja quase-estável em  $\mathfrak{A}$ . Suponhamos ainda que  $c_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} c(t) < \infty$ . Então toda trajetória completa  $\{(u(t), u_t(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  sobre o atrator possui a seguinte regularidade*

$$u_t \in L^\infty(\mathbb{R}; X) \cap C(\mathbb{R}; Y), \quad u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}; Y). \quad (1.28)$$

Além disso,

$$\|u_t(t)\|_X^2 + \|u_{tt}(t)\|_Y^2 \leq R^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.29)$$

onde  $R > 0$  é uma constante dependente de  $c_\infty$ ,  $n_X$  e da imersão compacta  $X \hookrightarrow Y$ .

**Definição 1.25.** *Dizemos que um conjunto compacto  $\mathfrak{A}_{exp} \subset \mathcal{H}$  é um **atrator exponencial** para o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S(t))$  se*

- (a)  $\mathfrak{A}_{exp}$  é positivamente invariante, isto é,  $S(t)\mathfrak{A}_{exp} \subset \mathfrak{A}_{exp}$  para todo  $t \geq 0$ ;
- (b)  $\mathfrak{A}_{exp}$  tem dimensão fractal finita em  $\mathcal{H}$ ;
- (c)  $\mathfrak{A}_{exp}$  atrai conjuntos limitados de  $H$  a uma taxa exponencial, isto é, para todo conjunto limitado  $D \subset H$ , existem  $t_D, C_D, \gamma_D > 0$  tais que

$$\text{dist}_H(S(t)D, \mathfrak{A}_{exp}) \leq C_D e^{-\gamma_D(t-t_D)}, \quad \forall t \geq t_D.$$

Se existir um atrator exponencial possuindo dimensão fractal finita somente em algum espaço estendido  $\tilde{H} \supseteq H$ , então esse conjunto que atrai exponencialmente é chamado **atrator exponencial generalizado**.

**Teorema 1.16** ([27], Teorema 7.9.9). *Seja  $(S(t), H)$  um sistema dinâmico dissipativo definido em (1.24) e satisfazendo a regularidade (1.25). Suponhamos que  $(S(t), H)$  é quase-estável sobre algum conjunto absorvente limitado  $B$  e que existe um espaço estendido  $\tilde{H} \supseteq H$  tal que para todo  $T > 0$ ,*

$$\|S(t_2)z - S(t_1)z\|_{\tilde{H}} \leq C_{B,T}|t_2 - t_1|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in [0, T], \quad z \in B, \quad (1.30)$$

onde  $C_{B,T} > 0$  e  $\alpha \in (0, 1]$  são constantes. Então o sistema dinâmico  $(S(t), H)$  possui um atrator exponencial generalizado com dimensão fractal finita em  $\tilde{H}$ .

## 1.2.4 Semicontinuidade de atratores globais

Aqui, relembremos alguns resultados abstratos recentes propostos por Hoang et al. [47]. Esses resultados foram obtidos como uma generalização dos resultados prévios em [10].

**Definição 1.26.** *Sejam  $X$  um espaço métrico completo e  $\mathfrak{A}_\lambda$  uma família de atratores globais para um semigrupo  $S_\lambda(\cdot)$  sobre  $X$ , onde  $\lambda$  pertence a um espaço métrico completo  $\Lambda$ . Dizemos que o atrator global  $\mathfrak{A}_\lambda$  é*

(a) **Semicontínuo superiormente** em  $\lambda_0 \in \Lambda$  se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \text{dist}_X(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_{\lambda_0}) = 0; \quad (1.31)$$

(b) **Semicontínuo inferiormente** em  $\lambda_0 \in \Lambda$  se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \text{dist}_X(\mathfrak{A}_{\lambda_0}, \mathfrak{A}_\lambda) = 0; \quad (1.32)$$

(c) **Contínuo** em  $\lambda_0 \in \Lambda$  se

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_X(\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{A}_{\lambda_0}) = 0, \quad (1.33)$$

com  $d_X(A, B) = \max\{\text{dist}_X(A, B), \text{dist}_X(B, A)\}$  denotando a Métrica de Hausdorff em  $X$ .

**Definição 1.27.** *Seja  $X$  um espaço métrico e  $A \in X$ . Dizemos que  $A$  é **denso em nenhum lugar** se  $\text{int } \bar{A} = \emptyset$ . Um conjunto é **residual** se seu complemento for a união enumerável de conjuntos densos em nenhum lugar.*

O resultado em [47, Teorema 5.2], fornece condições suficientes para a continuidade de atratores globais em um subconjunto residual e denso.

**Teorema 1.17.** *Seja  $\Lambda$  um espaço métrico completo e  $S_\lambda(t)$  uma família parametrizada de semigrupos em um espaço métrico  $X$ . Suponhamos que*

(L1)  $S_\lambda(\cdot)$  possui atrator global  $\mathfrak{A}_\lambda$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ ;

(L2) Existe um subconjunto limitado  $D \in X$  tal que  $\mathfrak{A}_\lambda \subset D$  para todo  $\lambda \in \Lambda$ ;

(L3) Para  $t > 0$ ,  $S_\lambda(t)x$  é contínua em  $\lambda$ , uniformemente para  $x$  em subconjuntos limitados de  $X$ .

Então  $\mathfrak{A}_\lambda$  é contínuo sobre todo  $\lambda \in \Lambda_*$ , com  $\Lambda_*$  é um conjunto “residual” e denso em  $\Lambda$ .

# Capítulo 2

## Existência e unicidade de solução

Neste capítulo, investigamos a boa colocação local e global, a estabilização uniforme e o blow-up em tempo finito para as soluções do problema (25)-(27). Nossos resultados são obtidos via teoria de semigrupos não lineares e operadores monótonos maximais.

### 2.1 Formulação via semigrupos e solução local fraca

Nossa análise é dada no espaço de fase

$$\mathcal{H} = V \times H \text{ com } V = (H_0^1(0, L))^3 \text{ e } H = (L^2(0, L))^3. \quad (2.1)$$

Este é um espaço de Hilbert munido do produto interno: Dados  $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{H}$  podemos escrever

$$Y = (y, y_1), \tilde{Y} = (\tilde{y}, \tilde{y}_1) \in \mathcal{H} \quad (2.2)$$

com

$$y = (u, v, w), \tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in V, y_1 = (u_1, v_1, w_1), \tilde{y}_1 = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1) \in H, \quad (2.3)$$

então definimos

$$(Y, \tilde{Y})_{\mathcal{H}} = (y, \tilde{y})_V + (y_1, \tilde{y}_1)_H, \quad (2.4)$$

com

$$(y, \tilde{y})_V = \int_0^L \mathbf{Q}[(u_x, v_x, w_x), (\tilde{u}_x, \tilde{v}_x, \tilde{w}_x)] dx, \quad (2.5)$$

e

$$(y_1, \tilde{y}_1)_H = \int_0^L (\rho_1 u_1 \tilde{u}_1 + \rho_2 v_1 \tilde{v}_1 + \rho_3 w_1 \tilde{w}_1) dx. \quad (2.6)$$

As normas induzidas por estes produtos internos são dadas por

$$\|Y\|_{\mathcal{H}}^2 = \|y\|_V^2 + \|y_1\|_H^2, \quad (2.7)$$

$$\|y\|_V^2 = \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] dx, \quad (2.8)$$

e

$$\|y_1\|_H^2 = \int_0^L (\rho_1 u_1^2 + \rho_2 v_1^2 + \rho_3 w_1^2) dx, \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{q}$  denotam as formas Hermitiana e quadrática associadas a matriz  $A$ , respectivamente, isto é,

$$\mathbf{Q}[a, b] = a^T A \bar{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}[c] = \mathbf{Q}[c, c], \quad \forall a, b, c \in \mathbb{C}^3. \quad (2.10)$$

**Observação 2.1.** Como  $A$  é uma matriz definida positiva e simétrica, temos que  $\|Y\|_{\mathcal{H}}$  é equivalente a norma produto usual do espaço  $\mathcal{H}$ . Em particular, existem constantes  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$  tais que

$$\kappa_1 \|y\|_V^2 \leq \|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq \kappa_2 \|y\|_V^2. \quad (2.11)$$

O operador não linear  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é dado por

$$\mathcal{A}Y = \begin{pmatrix} -y_1 \\ \frac{1}{\rho_1} \{-(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)_{xx} + g_1(u_1) - f_1(y)\} \\ \frac{1}{\rho_2} \{-(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w)_{xx} + g_2(v_1) - f_2(y)\} \\ \frac{1}{\rho_3} \{-(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)_{xx} + g_3(w_1) - f_3(y)\} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

com  $\mathcal{H}$  definido em (2.1) e

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{Y = (u, v, w, u_1, v_1, w_1) \in (H_0^1(0, L))^6 : AY \in (L^2(0, L))^6\}.$$

Reescrevemos o problema (25)-(27) na forma de um problema de Cauchy abstrato como segue

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} + \mathcal{A}Y = 0, & t > 0, \\ Y(0) = Y_0 = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (2.13)$$

A noção de solução fraca para o problema (25)-(27) é introduzida na seguinte definição.

**Definição 2.1.** Uma função vetorial  $y = (u, v, w)$  é chamada de solução fraca para o problema (25)-(27) se:

- (i)  $y \in C(0, T; V)$ ,  $(y(0), y_t(0)) = (y_0, y_1) = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}$ ;
- (ii)  $y_t \in C(0, T; H) \cap L^{m+1}((0, L) \times (0, T)) \times L^{r+1}((0, L) \times (0, T)) \times L^{l+1}((0, L) \times (0, T))$ ;

(iii)  $y = (u, v, w)$  satisfaz a seguinte identidade

$$\begin{aligned} (y_t(t), \psi(t))_H - (y_t(0), \psi(0))_H + \int_0^t [-(y_t(\tau), \psi_t(\tau))_H + (y(\tau), \psi(\tau))_V] d\tau \\ + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.14)$$

para toda função teste  $\psi \in \mathfrak{T}$  com

$$\mathfrak{T} = \{\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \psi \in C(0, T; V), \psi_t \in L^1(0, T; (L^2(0, L))^3)\}, \quad (2.15)$$

sendo

$$\mathbb{G}(y_t) = (g_1(u_t), g_2(v_t), g_3(w_t)) \quad (2.16)$$

e

$$\mathbb{F}(y) = (f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w)). \quad (2.17)$$

**Hipótese 2.1.** *Suponhamos que*

(i)  $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções monótonas crescentes e contínuas com  $g_1(0) = g_2(0) = g_3(0) = 0$ . Além disso, existem constantes  $\alpha, \beta > 0$  tais que para todo  $|s| \geq 1$

$$\begin{aligned} \alpha|s|^{m+1} \leq g_1(s)s \leq \beta|s|^{m+1}, \quad \text{com } m \geq 1, \\ \alpha|s|^{r+1} \leq g_2(s)s \leq \beta|s|^{r+1}, \quad \text{com } r \geq 1, \\ \alpha|s|^{l+1} \leq g_3(s)s \leq \beta|s|^{l+1}, \quad \text{com } l \geq 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

(ii)  $f_j \in C^1(\mathbb{R}^3)$  com  $j = 1, 2, 3$  e existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|\nabla f_j(u, v, w)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + |w|^{p-1} + 1), \quad p \geq 1. \quad (2.19)$$

O lema seguinte nos garante a existência global do problema de Cauchy (2.13) quando os termos de fontes  $f_1, f_2, f_3 : V \rightarrow L^2(0, L)$  são globalmente Lipschitz.

**Lema 2.1.** *Suponha que  $f_1, f_2, f_3 : V \rightarrow L^2(0, L)$  são funções globalmente Lipschitz. Então, para qualquer dado inicial  $Y_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , o problema (2.13) possui uma única solução forte global  $Y \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H})$  para todo  $T > 0$ .*

**Prova:** A demonstração do presente lema é dividida em alguns passos. Para começar, lembremos que  $\mathcal{H} = V \times H$ , com  $V = (H_0^1(0, L))^3$  e  $H = (L^2(0, L))^3$ . Para simplificar a notação, seja  $y = (u, v, w)$ ,  $\tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in V$ ,  $y_1 = (u_1, v_1, w_1)$ ,  $\tilde{y}_1 = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1) \in H$ . Portanto,  $Y = (y, y_1)$ ,  $\tilde{Y} = (\tilde{y}, \tilde{y}_1) \in \mathcal{H}$ . Reescrevemos o operador  $\mathcal{A}$  como

$$\mathcal{A}Y = \begin{pmatrix} -y_1 \\ \mathcal{B}(y) + \mathcal{G}(y_1) - \mathcal{F}(y) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

sendo  $\mathcal{B} : V \rightarrow V'$ ,  $\mathcal{G} : V \rightarrow V'$  e  $\mathcal{F} : V \rightarrow H$  operadores definidos por

$$\mathcal{B}(y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)_{xx} \\ -\frac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w)_{xx} \\ -\frac{1}{\rho_3}(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)_{xx} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}(y_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1}g_1(u_1) \\ \frac{1}{\rho_2}g_2(v_1) \\ \frac{1}{\rho_3}g_3(w_1) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{F}(y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1}f_1(y) \\ \frac{1}{\rho_2}f_2(y) \\ \frac{1}{\rho_3}f_3(y) \end{pmatrix}.$$

Observe que por definição do produto interno (2.5), e o fato que  $V \subset H \cong H' \subset V'$ , temos

$$\langle \mathcal{B}(y), z \rangle = (y, z)_V, \quad \forall y, z \in V \quad \text{e} \quad \langle y, z \rangle = (y, z)_H, \quad \forall y \in H, z \in V. \quad (2.21)$$

**Passo 1:**  $\mathcal{A} + \omega I$  é acretivo para algum  $\omega > 0$ . Por (2.20), (2.21) e definição do produto interno (2.4), para todo  $Y = (y, y_1)$ ,  $\tilde{Y} = (\tilde{y}, \tilde{y}_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , obtemos

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} + \omega I)Y - (\mathcal{A} + \omega I)\tilde{Y}, Y - \tilde{Y})_{\mathcal{H}} &= (\mathcal{A}Y - \mathcal{A}\tilde{Y}, Y - \tilde{Y})_{\mathcal{H}} + \omega \|Y - \tilde{Y}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= -(y_1 - \tilde{y}_1, y - \tilde{y})_V + (y - \tilde{y}, y_1 - \tilde{y}_1)_V \\ &\quad + (\mathcal{G}(y_1) - \mathcal{G}(\tilde{y}_1), y_1 - \tilde{y}_1)_H - (\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(\tilde{y}), y_1 - \tilde{y}_1)_H \\ &\quad + \omega \|Y - \tilde{Y}\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como  $g_1, g_2$  e  $g_3$  são monótonas, temos

$$(\mathcal{G}(y_1) - \mathcal{G}(\tilde{y}_1), y_1 - \tilde{y}_1)_H \geq 0. \quad (2.23)$$

Pela definição da norma de  $H$ , obtemos

$$\|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(\tilde{y})\|_H^2 \leq C \sum_{j=1}^3 \|f_j(y) - f_j(\tilde{y})\|_2^2. \quad (2.24)$$

Usando o fato que  $f_1, f_2, f_3 : V \rightarrow L^2(0, L)$  são funções globalmente Lipschitz contínuas, é fácil verificar que existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\|f_j(y) - f_j(\tilde{y})\|_2^2 \leq C_1 \|y - \tilde{y}\|_V^2, \quad \forall j = 1, 2, 3. \quad (2.25)$$

Portanto, de (2.24) e (2.25) existe uma constante  $C_{\mathcal{F}} > 0$  tal que

$$\|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(\tilde{y})\|_H \leq C_{\mathcal{F}} \|y - \tilde{y}\|_V. \quad (2.26)$$

Por (2.26) e pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(\tilde{y}), y_1 - \tilde{y}_1)_H &\leq \|\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(\tilde{y})\|_H \|y_1 - \tilde{y}_1\|_H \\
&\leq C_{\mathcal{F}} \|y - \tilde{y}\|_V \|y_1 - \tilde{y}_1\|_H \\
&\leq \frac{C_{\mathcal{F}}}{2} \|y - \tilde{y}\|_V^2 + \frac{L}{2} \|y_1 - \tilde{y}_1\|_H^2 \\
&= \frac{C_{\mathcal{F}}}{2} \|Y - \tilde{Y}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Agora, combinando (2.22), (2.23) e (2.27), deduzimos

$$((\mathcal{A} + \omega I)Y - (\mathcal{A} + \omega I)\tilde{Y}, Y - \tilde{Y})_{\mathcal{H}} \geq \left(\omega - \frac{C_{\mathcal{F}}}{2}\right) \|Y - \tilde{Y}\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.28}$$

Portanto  $\mathcal{A} + \omega I$  é acretivo quando  $\omega > \frac{C_{\mathcal{F}}}{2}$ .

**Passo 2:**  $\mathcal{A} + \nu I$  é  $m$ -acretivo, para algum  $\nu > 0$ . Precisamos provar que o operador  $\mathcal{A} + \nu I : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é sobrejetivo para algum  $\nu > 0$ . Seja  $\eta = (\phi, \phi_1) \in \mathcal{H}$ . Provaremos que existe  $Y = (y, y_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  tal que  $(\mathcal{A} + \nu I)Y = \eta$ , isto é,

$$\begin{cases} -y_1 + \nu y = \phi, \\ \mathcal{B}(y) + \mathcal{G}(y_1) - \mathcal{F}(y) + \nu y_1 = \phi_1. \end{cases} \tag{2.29}$$

Note que (2.29) é equivalente a

$$\frac{1}{\nu} \mathcal{B}(y_1) + \mathcal{G}(y_1) - \mathcal{F}\left(\frac{\phi + y_1}{\nu}\right) + \nu y_1 = \phi_1 - \frac{1}{\nu} \mathcal{B}(\phi). \tag{2.30}$$

Como  $\phi \in V$ , então o lado direito de (2.30) pertence a  $V' = (H^{-1}(0, L))^3$ . Assim, definimos o operador  $\mathcal{S} : \mathcal{D}(\mathcal{S}) \subset V \rightarrow V'$  por

$$\mathcal{S}(y_1) = \frac{1}{\nu} \mathcal{B}(y_1) + \mathcal{G}(y_1) - \mathcal{F}\left(\frac{\phi + y_1}{\nu}\right) + \nu y_1. \tag{2.31}$$

Claramente  $\mathcal{D}(\mathcal{S}) = V$ . Portanto, devemos provar que  $\mathcal{S} : V \rightarrow V'$  é sobrejetivo. Pelo Corolário 1.1, é suficiente provar que  $\mathcal{S}$  é maximal monótono e coercivo.

Decompomos  $\mathcal{S}$  usando os operadores  $\mathcal{G}, \mathcal{J} : V \rightarrow V'$  como segue

$$\mathcal{S}(y_1) = \mathcal{G}(y_1) + \mathcal{J}(y_1), \tag{2.32}$$

com

$$\mathcal{J}(y_1) = \frac{1}{\nu} \mathcal{B}(y_1) - \mathcal{F}\left(\frac{\phi + y_1}{\nu}\right) + \nu y_1. \tag{2.33}$$



**Passo 3:  $\mathcal{J}$  é maximal monótono e coercivo.** Para ver que  $\mathcal{J} : V \rightarrow V'$  é monótono, tomemos  $y = (u, v, w), \tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in V$ . Por cálculos simples, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(\tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle &= \frac{1}{\nu} \langle \mathcal{B}(y - \tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle - \left\langle \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y_1}{\nu} \right) - \mathcal{F} \left( \frac{\phi + \tilde{y}_1}{\nu} \right), y - \tilde{y} \right\rangle \\ &\quad + \nu \langle y - \tilde{y}, y - \tilde{y} \rangle \\ &= \frac{1}{\nu} \|y - \tilde{y}\|_V^2 - \left( \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y_1}{\nu} \right) - \mathcal{F} \left( \frac{\phi + \tilde{y}_1}{\nu} \right), y - \tilde{y} \right)_H \\ &\quad + \nu \|y - \tilde{y}\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Como as funções  $f_1, f_2, f_3 : V \rightarrow (0, L)$  são globalmente Lipschitz, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(\tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle &\geq \frac{1}{\nu} \|y - \tilde{y}\|_V^2 - C_{\mathcal{F}} \left\| \frac{y - \tilde{y}}{\nu} \right\|_V \|y - \tilde{y}\|_2 + \nu \|y - \tilde{y}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\nu} \|y - \tilde{y}\|_V^2 - C_{\mathcal{F}} \left\| \frac{y - \tilde{y}}{\nu} \right\|_V^2 - \frac{C_{\mathcal{F}}}{2} \|y - \tilde{y}\|_2^2 + \nu \|y - \tilde{y}\|_2^2 \\ &= \left( \frac{1}{\nu} - \frac{C_{\mathcal{F}}}{\nu^2} \right) \|y - \tilde{y}\|_V^2 + \left( \nu - \frac{C_{\mathcal{F}}}{2} \right) \|y - \tilde{y}\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Escolhendo  $\nu > 2C_{\mathcal{F}}$ , encontramos que

$$\langle \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(\tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle \geq \frac{C_{\mathcal{F}}}{\nu^2} \|y - \tilde{y}\|_V^2. \tag{2.36}$$

Portanto  $\mathcal{J}$  é monótono.

Em seguida, mostramos que  $\mathcal{J}$  é hemicontínuo. Seja  $\tilde{y} \in V$ , então

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}(y + \lambda y_1), \tilde{y} \rangle - \langle \mathcal{J}(y), \tilde{y} \rangle &= \frac{1}{\nu} \langle \mathcal{B}(y + \lambda y_1), \tilde{y} \rangle - \frac{1}{\nu} \langle \mathcal{B}(y), \tilde{y} \rangle \\ &\quad - \left( \left\langle \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y + \lambda y_1}{\nu} \right), \tilde{y} \right\rangle - \left\langle \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y}{\nu} \right), \tilde{y} \right\rangle \right) \\ &\quad + \nu \langle y + \lambda y_1, \tilde{y} \rangle - \nu \langle y, \tilde{y} \rangle. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Estimamos o lado direito de (2.37) da seguinte forma:

$$\left| \frac{1}{\nu} \langle \mathcal{B}(y + \lambda y_1), \tilde{y} \rangle - \frac{1}{\nu} \langle \mathcal{B}(y), \tilde{y} \rangle \right| = \left| \frac{\lambda}{\nu} \right| |(y, \tilde{y})_V| \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0. \tag{2.38}$$

Como  $f_1, f_2, f_3 : V \rightarrow L^2(0, L)$  são globalmente Lipschitz, obtemos

$$\begin{aligned} &\left| \left\langle \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y + \lambda y_1}{\nu} \right), \tilde{y} \right\rangle - \left\langle \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y}{\nu} \right), \tilde{y} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left( \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y + \lambda y_1}{\nu} \right) - \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y}{\nu} \right), \tilde{y} \right)_H \right| \\ &\leq \left\| \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y + \lambda y_1}{\nu} \right) - \mathcal{F} \left( \frac{\phi + y}{\nu} \right) \right\|_H \|\tilde{y}\|_H \\ &\leq \frac{C_{\mathcal{F}} |\lambda|}{|\nu|} \|y_1\|_V \|\tilde{y}\|_H \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Finalmente, tem-se

$$\begin{aligned} |\nu \langle y + \lambda y_1, \tilde{y} \rangle - \nu \langle y, \tilde{y} \rangle| &= |\nu \lambda| |\langle y_1, \tilde{y} \rangle_V| \\ &\leq |\nu \lambda| \|y_1\|_V \|\tilde{y}\|_V \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Portanto, de (2.37)-(2.40) segue que

$$\langle \mathcal{J}(y + \lambda y_1), \tilde{y} \rangle - \langle \mathcal{J}(y), \tilde{y} \rangle \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0, \quad (2.41)$$

provando que  $\mathcal{J} : V \rightarrow V'$  é hemicontínuo. Como  $\mathcal{J}$  é monótono e hemicontínuo, concluímos pelo Teorema 1.1 que  $\mathcal{J}$  é maximal monótono. A coercividade de  $\mathcal{J}$  segue diretamente de (2.36).

**Passo 4:  $\mathcal{G}$  é maximal monótono.** Sejam  $y, \tilde{y} \in V$ . Como  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$  para  $q \geq 1$ , temos  $\mathcal{G}(y), \mathcal{G}(\tilde{y}) \in H$ . Então, pela monotonicidade de  $\mathcal{G}$ , vemos que

$$\langle \mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(\tilde{y}_1), y - \tilde{y} \rangle = (\mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(\tilde{y}_1), y - \tilde{y})_H \geq 0, \quad (2.42)$$

e, portanto,  $\mathcal{G}$  é monótono. Agora, provaremos que  $\mathcal{G}$  é hemicontínuo. Sejam  $y = (u, v, w), y_1 = (u_1, v_1, w_1) \in V$  e  $\tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in V$ . Observe que

$$\langle \mathcal{G}(y + \lambda y_1), \tilde{y} \rangle = \int_0^L g_1(u + \lambda u_1) \tilde{u} \, dx + \int_0^L g_2(v + \lambda v_1) \tilde{v} \, dx + \int_0^L g_3(w + \lambda w_1) \tilde{w} \, dx. \quad (2.43)$$

Pela continuidade de  $g_1$  temos

$$g_1(u + \lambda u_1) \tilde{u} \rightarrow g_1(u) \tilde{u} \quad \text{quando } \lambda \rightarrow 0 \text{ q.s. em } (0, L). \quad (2.44)$$

Além disso, pela hipótese sobre o damping e pela imersão contínua  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$ , para  $|\lambda| \leq 1$  obtemos

$$|g_1(u + \lambda u_1) \tilde{u}| \leq C(\|u\|_\infty^m + \|u_1\|_\infty^m + 1) \|\tilde{u}\|_\infty. \quad (2.45)$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^L g_1(u + \lambda u_1) \tilde{u} \, dx = \int_0^L g_1(u) \tilde{u} \, dx. \quad (2.46)$$

De maneira similar, obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^L g_2(v + \lambda v_1) \tilde{v} \, dx = \int_0^L g_2(v) \tilde{v} \, dx \quad (2.47)$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^L g_3(w + \lambda w_1) \tilde{w} \, dx = \int_0^L g_3(w) \tilde{w} \, dx. \quad (2.48)$$

De (2.43)-(2.48) segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \langle \mathcal{G}(y + \lambda y_1), \tilde{y} \rangle = \langle \mathcal{G}(y), \tilde{y} \rangle. \quad (2.49)$$

Isto prova que  $\mathcal{G}$  é hemicontínuo.

Agora, como  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{G}$  são ambos maximais monótonos e  $\text{int}(\mathcal{D}(\mathcal{J})) \cap \mathcal{D}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ , do Teorema 1.2 concluímos que  $\mathcal{S} = \mathcal{J} + \mathcal{G}$  é maximal monótono. A coercividade de  $\mathcal{S}$  segue diretamente de (2.36). Portanto,  $\mathcal{S}$  é maximal monótono e coercivo, o que mostra a sobrejetividade de  $\mathcal{S}$ , i.e., existe  $y_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{S}) = V$  solução de (2.30). Consequentemente,

$$y = \frac{y_1 + \phi}{\nu} \in V.$$

Por outro lado, pela segunda equação em (2.29) teremos

$$\mathcal{B}(y) + \mathcal{G}(y_1) - \mathcal{F}(y) = \phi_1 - \nu y_1 \in H. \quad (2.50)$$

Portanto  $Y = (y, y_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Isso mostra que  $\mathcal{A} + \nu I$  é  $m$ -acretivo.

**Passo 5: Solução local (conclusão).** Como  $\mathcal{A}$  é  $m$ -acretivo. Então, podemos aplicar o Teorema 1.3 para concluir que para cada  $Y_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , existe uma única solução forte  $Y$  para (2.13), isto é,  $Y \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H})$  tal que  $Y(0) = Y_0$ ,  $Y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  para todo  $t \in [0, T]$  e a equação (2.13) é satisfeita q.s. em  $[0, T]$  para todo  $T > 0$ . A prova está completa. ■

**Lema 2.2.** *Suponha que  $p, m, r, l \geq 1$ , e  $p \cdot \max\{\frac{m+1}{m}, \frac{r+1}{r}, \frac{l+1}{l}\} \leq \frac{2}{2\epsilon-1}$  para algum  $\epsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Além disso, assuma que  $f_1, f_2, f_3 \in C(\mathbb{R}^3)$  tais que*

$$|\nabla f_j(y)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + |w|^{p-1} + 1), \quad (2.51)$$

para todo  $j = 1, 2, 3$  e todo  $u, v, w \in \mathbb{R}$ . Então

- $f_j : (H^{1-\epsilon}(0, L))^3 \rightarrow L^{\sigma_j}(0, L)$  são localmente Lipschitz contínuas para

$$\sigma_1 = \frac{m+1}{m}, \quad \sigma_2 = \frac{r+1}{r} \quad e \quad \sigma_3 = \frac{l+1}{l}. \quad (2.52)$$

- $f_j : V \rightarrow L^2(0, L)$  são localmente Lipschitz contínuas.

**Prova:** Basta provar as afirmações para  $f_1$ . Em particular, para a primeira afirmação, mostraremos que  $f_1 : (H^{1-\epsilon}(0, L))^3 \rightarrow L^{\tilde{m}}(0, L)$  é localmente Lipschitz contínua, com  $\tilde{m} = \frac{m+1}{m}$ . Seja  $y = (u, v, w)$ ,  $\tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \tilde{V} = (H^{1-\epsilon}(0, L))^3$  tal que  $\|y\|_{\tilde{V}}, \|\tilde{y}\|_{\tilde{V}} \leq R$ , sendo  $R > 0$ . Por (2.51) e pelo Teorema do Valor Médio, obtemos

$$|f_1(y) - f_1(\tilde{y})| \leq C|y - \tilde{y}|(|u|^{p-1} + |\tilde{u}|^{p-1} + |v|^{p-1} + |\tilde{v}|^{p-1} + |w|^{p-1} + |\tilde{w}|^{p-1} + 1). \quad (2.53)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|f_1(y) - f_1(\tilde{y})\|_{\tilde{m}}^{\tilde{m}} &= \int_0^L |f_1(y) - f_1(\tilde{y})|^{\tilde{m}} dx \\
&\leq C \int_0^L (|u - \tilde{u}|^{\tilde{m}} + |v - \tilde{v}|^{\tilde{m}} + |w - \tilde{w}|^{\tilde{m}}) \\
&\quad \times (|u|^{(p-1)\tilde{m}} + |\tilde{u}|^{(p-1)\tilde{m}} + |v|^{(p-1)\tilde{m}} + |\tilde{v}|^{(p-1)\tilde{m}} + |w|^{(p-1)\tilde{m}} + |\tilde{w}|^{(p-1)\tilde{m}} + 1) dx.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Todos os termos em (2.54) são estimados da mesma maneira: usando a Desigualdade de Hölder, a Imersão de Sobolev  $H^{1-\epsilon}(0, L) \hookrightarrow L^{\frac{2}{2\epsilon-1}}(0, L)$  e as hipóteses  $p\tilde{m} \leq \frac{2}{2\epsilon-1}$  e  $\|u\|_{H^{1-\epsilon}(0, L)} \leq R$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\int_0^L |u - \tilde{u}|^{\tilde{m}} |u|^{(p-1)\tilde{m}} dx &\leq \left( \int_0^L |u - \tilde{u}|^{p\tilde{m}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^L |u|^{p\tilde{m}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \|u - \tilde{u}\|_{H^{1-\epsilon}(0, L)}^{\tilde{m}} \|u\|_{H^{1-\epsilon}(0, L)}^{(p-1)\tilde{m}} \\
&\leq CR^{(p-1)\tilde{m}} \|u - \tilde{u}\|_{H^{1-\epsilon}(0, L)}^{\tilde{m}}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Assim, obtemos

$$\|f_1(y) - f_1(\tilde{y})\|_{\tilde{m}} \leq C(R, p, m) \|y - \tilde{y}\|_{(H^{1-\epsilon}(0, L))^3}. \tag{2.56}$$

Agora, seja  $y = (u, v, w), \tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in V = (H_0^1(0, L))^3$  tais que  $\|y\|_V, \|\tilde{y}\|_V \leq R$ , com  $R > 0$ . Por (2.53) segue que

$$\begin{aligned}
\|f_1(y) - f_1(\tilde{y})\|_2^2 &= \int_0^L |f_1(y) - f_1(\tilde{y})|^2 dx \\
&\leq C \int_0^L (|u - \tilde{u}|^2 + |v - \tilde{v}|^2 + |w - \tilde{w}|^2) \\
&\quad \times (|u|^{2(p-1)} + |\tilde{u}|^{2(p-1)} + |v|^{2(p-1)} + |\tilde{v}|^{2(p-1)} + |w|^{2(p-1)} + |\tilde{w}|^{2(p-1)} + 1) dx.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Usando a desigualdade de Hölder, a imersão de Sobolev  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$  para todo  $1 \leq q < \infty$  e as hipóteses  $p \geq 1$  e  $\|u\|_{H_0^1(0, L)} \leq R$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L |u - \tilde{u}|^2 |u|^{2(p-1)} dx &\leq \left( \int_0^L |u - \tilde{u}|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^L |u|^{2p} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(0, L)}^2 \|u\|_{H_0^1(0, L)}^{2(p-1)} \\
&\leq CR^{2(p-1)} \|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(0, L)}^2.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Assim,

$$\|f_1(y) - f_1(\tilde{y})\|_2 \leq C(R, p) \|y - \tilde{y}\|_{(H_0^1(0, L))^3}. \tag{2.59}$$

Portanto, pela equivalência de normas (2.11), concluímos que

$$\|f_1(y) - f_1(\tilde{y})\|_2 \leq C(R, p) \|y - \tilde{y}\|_V. \tag{2.60}$$

A prova está completa. ■

**Lema 2.3.** *Sob a hipótese 2.1, o sistema (2.13) tem uma única solução forte local  $Y \in W^{1,\infty}(0, T_0; \mathcal{H})$  para algum  $T_0 > 0$ ; desde que o dado inicial  $Y_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .*

**Prova:** Seguindo as idéias de [20, 26, 45, 59] usamos um truncamento padrão nos termos de fonte. Lembrando que  $V = (H_0^1(0, L))^3$ . Seja  $y = (u, v, w) \in V$  e defina

$$f_j^K = \begin{cases} f_j(y), & \|y\|_V \leq K, \\ f_j\left(\frac{Ky}{\|y\|_V}\right), & \|y\|_V > K, \end{cases} \quad (2.61)$$

para todo  $j = 1, 2, 3$ , e  $K$  sendo uma constante positiva tal que

$$K^2 \geq 4E(0) + 1, \quad (2.62)$$

sendo a energia  $E(t)$  dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|y(t)\|_V^2 + \|y_t(t)\|_H^2).$$

Consideramos o seguinte problema truncado

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} v_{xx} - a_{13} w_{xx} + g_1(u_t) = f_1^K(y), & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 v_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} v_{xx} - a_{23} w_{xx} + g_2(v_t) = f_2^K(y), & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 w_{tt} - a_{13} u_{xx} - a_{23} v_{xx} - a_{33} w_{xx} + g_3(w_t) = f_3^K(y), & \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ Y(0) = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Note que para cada  $K$ , o operador  $f_j^K : V \rightarrow L^2(0, L)$  é globalmente Lipschitz contínuo para todo  $j = 1, 2, 3$  (veja [26]). Portanto, pelo Lema 2.1 o problema (2.63) possui uma única solução forte global  $Y_K = (y_K, y'_K) \in W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{H})$  para todo  $T > 0$  e todo  $Y_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

Em seguida, denotaremos  $y_K(t)$  simplesmente por  $y(t)$ . Como  $g_1, g_2$  e  $g_3$  são limitadas polinomialmente, então pela imersão de Sobolev  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$  para todo  $q \geq 1$ , segue da definição de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  que  $y_t \in V$  e assim  $g_1(u_t), g_2(v_t), g_3(w_t) \in L^2(0, L)$ , então multiplicando (2.63) por  $(u_t, v_t, w_t)$ , obtemos a seguinte identidade energia,

$$\begin{aligned} E(t) + \int_0^t \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) \, dx d\tau \\ = E(0) + \int_0^t \int_0^L (f_1^K(y)u_t + f_2^K(y)v_t + f_3^K(y)w_t) \, dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Além disso, como  $m, r, l \geq 1$ , sabemos que  $\tilde{m} = \frac{m+1}{m}, \tilde{r} = \frac{r+1}{r}, \tilde{l} = \frac{l+1}{l} \leq 2$ . Assim, pelas nossas hipóteses sobre os termos de fontes, segue-se que  $f_1 : V \rightarrow L^{\tilde{m}}(0, L), f_2 : V \rightarrow$

$L^{\tilde{r}}(0, L)$  e  $f_3 : V \rightarrow L^{\tilde{l}}(0, L)$  são Lipschitz na bola  $\{y \in V : \|y\|_V \leq K\}$  com constantes de Lipschitz  $L_{f_1}(K)$ ,  $L_{f_2}(K)$  e  $L_{f_3}(K)$ . Fazendo  $L_K = \max\{L_{f_1}(K), L_{f_2}(K), L_{f_3}(K)\}$  e usando cálculos similares como em [26], deduzimos que  $f_1^K : V \rightarrow L^{\tilde{m}}(0, L)$ ,  $f_2^K : V \rightarrow L^{\tilde{r}}(0, L)$  e  $f_3^K : V \rightarrow L^{\tilde{l}}(0, L)$  são globalmente Lipschitz contínuas com  $L_K$  sendo a constante de Lipschitz.

Agora, vamos estimar os termos de fontes da identidade de energia (2.64). Usando as Desigualdades de Hölder e Young, para qualquer  $\epsilon > 0$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L f_1^k(y) u_t \, dx d\tau &\leq \int_0^t \left[ \left( \int_0^L |f_1^K(y)|^{\tilde{m}} \, dx \right)^{\frac{1}{\tilde{m}}} \left( \int_0^L |u_t|^{m+1} \, dx \right)^{\frac{1}{m+1}} \right] d\tau \\
&\leq \int_0^t \|f_1^K(y)\|_{\tilde{m}} \|u_t\|_{m+1} \, d\tau \\
&\leq C_\epsilon \int_0^t \|f_1^K(y)\|_{\tilde{m}}^{\tilde{m}} \, d\tau + \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau \\
&\leq C_\epsilon \int_0^t (\|f_1^K(y) - f_1^K(0)\|_{\tilde{m}}^{\tilde{m}} + \|f_1^K(0)\|_{\tilde{m}}^{\tilde{m}}) \, d\tau + \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau \\
&\leq C_\epsilon L_K^{\tilde{m}} \int_0^t \|y\|_V^{\tilde{m}} \, d\tau + C_\epsilon t L |f_1^K(0)|^{\tilde{m}} + \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Da mesma forma, deduzimos que

$$\int_0^t \int_0^L f_2^k(y) v_t \, dx d\tau \leq C_\epsilon L_K^{\tilde{r}} \int_0^t \|y\|_V^{\tilde{r}} \, d\tau + C_\epsilon t L |f_2^K(0)|^{\tilde{r}} + \epsilon \int_0^t \|v_t\|_{r+1}^{r+1} \, d\tau \tag{2.66}$$

e

$$\int_0^t \int_0^L f_3^k(y) w_t \, dx d\tau \leq C_\epsilon L_K^{\tilde{l}} \int_0^t \|y\|_V^{\tilde{l}} \, d\tau + C_\epsilon t L |f_3^K(0)|^{\tilde{l}} + \epsilon \int_0^t \|w_t\|_{l+1}^{l+1} \, d\tau. \tag{2.67}$$

Pela hipótese dos dampings, segue que para todo  $s \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$g_1(s)s \geq \alpha(|s|^{m+1} - 1), \quad g_2(s)s \geq \alpha(|s|^{r+1} - 1), \quad g_3(s)s \geq \alpha(|s|^{l+1} - 1). \tag{2.68}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L g_1(u_t) u_t \, d\tau &\geq \alpha \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau - \alpha t L, \\
\int_0^t \int_0^L g_2(v_t) v_t \, d\tau &\geq \alpha \int_0^t \|v_t\|_{r+1}^{r+1} \, d\tau - \alpha t L, \\
\int_0^t \int_0^L g_3(w_t) w_t \, d\tau &\geq \alpha \int_0^t \|w_t\|_{l+1}^{l+1} \, d\tau - \alpha t L.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Combinando (2.65)-(2.69) na identidade de energia (2.64), tem-se

$$\begin{aligned}
& E(t) + \alpha \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) d\tau - 3\alpha tL \\
& \leq E(0) + \epsilon \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) d\tau + C_\epsilon L_K^{\tilde{m}} \int_0^t \|y\|_{\tilde{V}}^{\tilde{m}} d\tau \\
& \quad + C_\epsilon L_K^{\tilde{r}} \int_0^t \|y\|_{\tilde{V}}^{\tilde{r}} d\tau + C_\epsilon L_K^{\tilde{l}} \int_0^t \|y\|_{\tilde{V}}^{\tilde{l}} d\tau \\
& \quad + C_\epsilon tL(|f_1^K(0)|^{\tilde{m}} + |f_2^K(0)|^{\tilde{r}} + |f_3^K(0)|^{\tilde{l}}).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Se  $\epsilon \leq \alpha$ , então (2.70) implica em

$$\begin{aligned}
E(t) & \leq E(0) + C_\epsilon L_K^{\tilde{m}} \int_0^t \|y\|_{\tilde{V}}^{\tilde{m}} d\tau + C_\epsilon L_K^{\tilde{r}} \int_0^t \|y\|_{\tilde{V}}^{\tilde{r}} d\tau + C_\epsilon L_K^{\tilde{l}} \int_0^t \|y\|_{\tilde{V}}^{\tilde{l}} d\tau \\
& \quad + C_\epsilon tL(|f_1^K(0)|^{\tilde{m}} + |f_2^K(0)|^{\tilde{r}} + |f_3^K(0)|^{\tilde{l}}) + 3\alpha tL.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Como  $1 \leq \tilde{m}, \tilde{r}, \tilde{l} \leq 2$ , então pela Desigualdade de Young,

$$\int_0^t \|y(\tau)\|_{\tilde{V}}^{\tilde{m}} d\tau \leq \int_0^t (\|y(\tau)\|_{\tilde{V}}^2 + \tilde{C}) d\tau \leq 2 \int_0^t E(\tau) d\tau + \tilde{C}t. \tag{2.72}$$

Analogamente, obtemos

$$\int_0^t \|y(\tau)\|_{\tilde{V}}^{\tilde{r}} d\tau \leq 2 \int_0^t E(\tau) d\tau + \tilde{C}t \quad \text{e} \quad \int_0^t \|y(\tau)\|_{\tilde{V}}^{\tilde{l}} d\tau \leq 2 \int_0^t E(\tau) d\tau + \tilde{C}t, \tag{2.73}$$

sendo  $\tilde{C}$  uma constante positiva que depende de  $m, r$  e  $l$ . Portanto, se  $t \leq T_0$  e tomando  $C_1 = 2C_\epsilon(L_K^{\tilde{m}} + L_K^{\tilde{r}} + L_K^{\tilde{l}})$ ,  $C_2 = E(0) + C_0T_0$  com  $C_0 = C_\epsilon L(|f_1^K(0)|^{\tilde{m}} + |f_2^K(0)|^{\tilde{r}} + |f_3^K(0)|^{\tilde{l}}) + 3\alpha L + \tilde{C}C_\epsilon(L_K^{\tilde{m}} + L_K^{\tilde{r}} + L_K^{\tilde{l}})$ , então segue de (2.71) que

$$E(t) \leq C_2 + C_1 \int_0^t E(\tau) d\tau, \tag{2.74}$$

para todo  $t \in [0, T_0]$ , sendo  $T_0$  escolhido adiante. Aplicando a desigualdade de Gronwal, segue que

$$E(t) \leq C_2 (1 + C_1 t e^{C_1 t}), \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{2.75}$$

Escolhendo

$$T_0 = \min \left\{ \frac{1}{4C_0}, \frac{\alpha_1}{C_1} \right\} \text{ com } \alpha_1 > 0 \text{ tal que } \alpha_1 e^{\alpha_1} = 1. \tag{2.76}$$

Então, segue de (2.75) que

$$E(t) \leq 2C_2 = 2(E(0) + C_0T_0) \leq 2E(0) + \frac{1}{2}, \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{2.77}$$

Usando a hipótese (2.62), obtemos

$$E(t) \leq \frac{1}{2}(4E(0) + 1) \leq \frac{1}{2}K^2, \quad \forall t \in [0, T_0]. \tag{2.78}$$

Isto implica que  $\|y\|_V \leq K$ , para todo  $t \in [0, T_0]$ , e portanto,  $f_1^K(y) = f_1(y)$ ,  $f_2^K(y) = f_2(y)$  e  $f_3^K(y) = f_3(y)$  no intervalo  $[0, T_0]$ . Pela unicidade de soluções para o problema (2.63), temos que a solução para o problema truncado (2.63) coincide com a solução do sistema (2.13) para  $t \in [0, T_0]$ . Assim, a prova está completa. ■

### 2.1.1 Solução local fraca

**Teorema 2.1** (Solução local fraca). *Suponha que a Hipótese 2.1 seja satisfeita. Então para qualquer dado inicial  $Y_0 \in \mathcal{H}$ , existe um tempo  $T_0 = T_0(E(0)) > 0$  tal que o problema (25)-(27) possui uma solução fraca local  $y = (u, v, w)$  definida em  $[0, T_0]$ , com*

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|y(t)\|_V^2 + \|y_t(t)\|_H^2). \quad (2.79)$$

**Prova: Passo 1: Sistema aproximado.** Lembrando que  $\mathcal{H} = V \times H$  com  $V = (H_0^1(0, L))^3$  e  $H = (L^2(0, L))^3$ , então o espaço de funções teste  $\mathcal{D}(0, L)^6 \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$  e, portanto,  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ . Então, para cada  $Y_0 = (y_0, y_1) \in \mathcal{H}$ , existe uma sequência de funções  $Y_0^n \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  tal que  $Y_0^n \rightarrow Y_0$  fortemente em  $\mathcal{H}$ . Seja  $Y = (y, y_t) = (u, v, w, u_t, v_t, w_t)$  e considere o sistema aproximado

$$Y_t^n + \mathcal{A}Y^n = 0, \quad \text{com } Y^n(0) = Y_0^n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (2.80)$$

**Passo 2: Soluções aproximadas.** Como  $f_1, f_2$  e  $f_3$  satisfazem as hipóteses do Lema 2.3 então para cada  $n$ , o problema aproximado (2.80) possui uma solução forte local  $Y^n = (y^n, y_t^n) = (u^n, v^n, w^n, u_t^n, v_t^n, w_t^n) \in W^{1,\infty}(0, T_0; \mathcal{H})$  tal que  $Y^n(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  para todo  $t \in [0, T_0]$ . Denotamos por  $E^n(t)$  a energia da solução  $Y^n$ .

Afirmamos que o parâmetro  $T_0$  de (2.76) pode ser tomado independentemente de  $n$ . Mais precisamente,  $T_0$  depende da escolha da constante  $K$ , que precisa ser suficientemente grande para dominar  $\sqrt{4E(0) + 1}$ . Como  $Y_0^n \rightarrow Y_0$  fortemente em  $\mathcal{H}$ , podemos escolher  $K$  suficientemente grande dependendo de  $E(0)$  tal que  $K \geq \sqrt{4E^n(0) + 1}$  para todo  $n$ .

Agora, por (2.78),  $E^n(t) \leq \frac{K^2}{2}$  para todo  $t \in [0, T_0]$ . Logo,

$$\|Y^n(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|y^n(t)\|_V^2 + \|y_t^n(t)\|_H^2 = 2E^n(t) \leq K^2, \quad \forall t \in [0, T_0]. \quad (2.81)$$

Além disso, tomando  $0 < \epsilon < \frac{\alpha}{2}$  em (2.70) e em seguida, usando o fato que  $\tilde{m}, \tilde{r}, \tilde{l} \leq 2$  e (2.81), deduzimos que

$$\int_0^{T_0} (\|u_t^n\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t^n\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t^n\|_{l+1}^{l+1}) d\tau \leq C(K), \quad (2.82)$$



para alguma constante  $C(K) > 0$ . Portanto,

$$y_t^n \in L^{m+1}((0, L) \times (0, T_0)) \times L^{r+1}((0, L) \times (0, T_0)) \times L^{l+1}((0, L) \times (0, T_0)). \quad (2.83)$$

Lembrando que  $Y^n = (y^n, y_t^n) = (u^n, v^n, w^n, u_t^n, v_t^n, w_t^n)$  é uma solução forte de (2.80). Se  $\psi$  é uma função teste segundo a Definição 2.1, podemos testar o sistema aproximado (2.80) em relação a  $\psi$  para obter

$$\begin{aligned} (y_t^n(t), \psi(t))_H - (y_t^n(0), \psi(0))_H + \int_0^t [-(y_t^n(\tau), \psi_t(\tau))_H + (y^n(\tau), \psi(\tau))_V] d\tau \\ + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t^n(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y^n(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.84)$$

para todo  $t \in [0, T_0]$ .

**Passo 3: Passagem ao limite.** Nosso objetivo é provar que existe uma subsequência de  $\{Y^n\}$ , denotada novamente por  $\{Y^n\}$ , que converge para a solução do problema original (25).

Primeiro, note que (2.81) implica que  $\{Y^n\}$  é limitada em  $L^\infty(0, T_0; \mathcal{H})$ . Então, pelo Teorema de Alaoglu, existe uma subsequência, denotada novamente por  $\{Y^n\}$  tal que

$$Y^n \rightharpoonup Y \quad \text{fraco}^* \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}), \quad (2.85)$$

com  $Y^n = (y^n, y_t^n) = (u^n, v^n, w^n, u_t^n, v_t^n, w_t^n)$  e  $Y = (y, y_t) = (u, v, w, u_t, v_t, w_t)$ . Também, por (2.81), sabemos que  $\{y^n\}$  é limitada em  $L^\infty(0, T_0; V)$ , com  $V = (H_0^1(0, L))^3$ . Assim,  $\{y^n\}$  é limitada em  $L^q(0, T_0; V)$  para todo  $q > 1$ . Além disso, por (2.82), tem-se

$\{y_t^n\}$  é limitada em  $L^{m+1}(0, T_0; L^{m+1}(0, L)) \times L^{r+1}(0, T_0; L^{r+1}(0, L)) \times L^{l+1}(0, T_0; L^{l+1}(0, L))$ ,

e como  $m, r, l \geq 1$ , concluímos que

$$\{y_t^n\} \text{ é limitado em } L^{\tilde{m}}(0, T_0; L^{\tilde{m}}(0, L)) \times L^{\tilde{r}}(0, T_0; L^{\tilde{r}}(0, L)) \times L^{\tilde{l}}(0, T_0; L^{\tilde{l}}(0, L)). \quad (2.86)$$

Note que para qualquer  $0 < \epsilon < 1$ , a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow H^{1-\epsilon}(0, L)$  é compacta, e

$$(H^{1-\epsilon}(0, L))^3 \hookrightarrow L^{\tilde{m}}(0, L) \times L^{\tilde{r}}(0, L) \times L^{\tilde{l}}(0, L), \quad (2.87)$$

(desde que  $\tilde{m}, \tilde{r}, \tilde{l} \leq 2$ ). Fixado  $q > 1$ , pelo Teorema de Compacidade de Aubin-Lion 1.8, existe uma subsequencia tal que

$$y^n \rightarrow y \quad \text{fortemente} \quad \text{em} \quad L^q(0, T_0; (H^{1-\epsilon}(0, L))^3). \quad (2.88)$$

Agora, provaremos que  $\{Y^n\}$  é uma sequencia de Cauchy em  $C([0, T_0]; \mathcal{H})$ . Considere as soluções para dois problemas aproximados  $\{Y^n\}$  e  $\{Y^j\}$  de (2.80). Para simplificar a notação,

façamos  $\tilde{y} = y^n - y^j$ . Como  $Y^n, Y^j \in W^{1,\infty}(0, T_0; \mathcal{H})$  e  $Y^n(t), Y^j(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , então  $\tilde{y}_t \in W^{1,\infty}(0, T_0; H)$  e  $\tilde{y}_t \in V$ . Além disso, por (2.83) temos

$$\tilde{y}_t \in L^{m+1}((0, L) \times (0, T_0)) \times L^{r+1}((0, L) \times (0, T_0)) \times L^{l+1}((0, L) \times (0, T_0)). \quad (2.89)$$

Com isso, podemos considerar a diferença dos problemas aproximados correspondentes aos parâmetros  $n$  e  $j$  para então, multiplicar a equação (2.80) por  $\tilde{y}_t$ . Usando integração por partes nesta equação, obtemos a seguinte identidade de energia

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\|\tilde{y}(t)\|_V^2 + \|\tilde{y}_t(t)\|_H^2) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t^n) - \mathbb{G}(y_t^j), \tilde{y}_t)_2 d\tau \\ &= \frac{1}{2}(\|\tilde{y}(0)\|_V^2 + \|\tilde{y}_t(0)\|_H^2) + \int_0^t (\mathbb{F}(y^n) - \mathbb{F}(y^j), \tilde{y}_t)_2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Mostraremos que cada termo do lado direito de (2.90) converge para 0 quando  $n, j \rightarrow \infty$ . Inicialmente, com base nas hipóteses sobre as condições iniciais  $\{y_0^n\}$  e  $\{y_1^n\}$ , obtemos

$$\lim_{n,j \rightarrow \infty} \|\tilde{y}(0)\|_V = \lim_{n,j \rightarrow \infty} \|y_0^n - y_0^j\|_V = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n,j \rightarrow \infty} \|\tilde{y}_t(0)\|_H = \lim_{n,j \rightarrow \infty} \|y_1^n - y_1^j\|_H = 0. \quad (2.91)$$

Em seguida, considere o último termo do lado direito de (2.90). Temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (\mathbb{F}(y^n) - \mathbb{F}(y^j), \tilde{y}_t)_2 d\tau \right| &\leq \int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y^j)| |\tilde{u}_t| dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L |f_2(y^n) - f_2(y^j)| |\tilde{v}_t| dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L |f_3(y^n) - f_3(y^j)| |\tilde{w}_t| dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Agora, vamos estimar cada termo do lado direito de (2.92) como segue:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y^j)| |\tilde{u}_t| dx d\tau &\leq \int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y)| |\tilde{u}_t| dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L |f_1(y) - f_1(y^j)| |\tilde{u}_t| dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Cada termo do lado direito de (2.93) pode ser estimado da seguinte forma: usando a Desigualdade de Hölder, a convergência de (2.88), a limitação uniforme em (2.82) e o fato de que  $f_1 : (H^{1-\epsilon}(0, L))^3 \rightarrow L^{\tilde{m}}(0, L)$  é localmente lipschitz, garantida pelo Lema 2.2, obtemos que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y)| |\tilde{u}_t| dx d\tau \\ & \leq \left( \int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y)|^{\tilde{m}} dx d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{m}}} \left( \int_0^t \int_0^L |\tilde{u}_t|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}} \\ & \leq \left( \int_0^{T_0} \|f_1(y^n) - f_1(y)\|_{\tilde{m}}^{\tilde{m}} d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{m}}} \left( \int_0^{T_0} \|\tilde{u}_t\|_{m+1}^{m+1} d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}} \\ & \leq C(K) \left( \int_0^{T_0} \|y^n - y\|_{(H^{1-\epsilon}(0, L))^3}^{\tilde{m}} d\tau \right)^{\frac{1}{\tilde{m}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0], \end{aligned} \quad (2.94)$$

Similarmente, temos

$$\int_0^t \int_0^L |f_1(y) - f_1(y^j)| |\tilde{u}_t| dx d\tau \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \quad (2.95)$$

Combinando (2.94) e (2.95) em (2.93)

$$\int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y^j)| |\tilde{u}_t| dx d\tau \xrightarrow{n, j \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \quad (2.96)$$

Analogamente, os últimos termos do lado direito de (2.92) também convergem para zero quando  $n, j \rightarrow \infty$ . Portanto, obtemos

$$\left| \int_0^t (\mathbb{F}(y^n) - \mathbb{F}(y^j), \tilde{y}_t)_2 d\tau \right| \xrightarrow{n, j \rightarrow \infty} 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \quad (2.97)$$

Agora, usando o fato que  $g_1, g_2$  e  $g_3$  são monótonas crescentes, (2.91) e (2.97), podemos tomar o limite em (2.90) quando  $n, j \rightarrow \infty$  para deduzir que

$$\begin{aligned} \lim_{n, j \rightarrow \infty} \|\tilde{y}(t)\|_V &= \lim_{n, j \rightarrow \infty} \|y^n(t) - y^j(t)\|_V = 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0], \\ \lim_{n, j \rightarrow \infty} \|\tilde{y}_t(t)\|_H &= \lim_{n, j \rightarrow \infty} \|y_t^n(t) - y_t^j(t)\|_H = 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0], \end{aligned} \quad (2.98)$$

e

$$\lim_{n, j \rightarrow \infty} \int_0^t (\mathbb{G}(y_t^n) - \mathbb{G}(y_t^j), y_t^n - y_t^j)_2 d\tau = 0 \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \quad (2.99)$$

Portanto,

$$Y^n \rightarrow Y \text{ em } \mathcal{H} \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \quad (2.100)$$

Como  $Y^n \in W^{1, \infty}(0, T_0; \mathcal{H})$ , por (2.100) concluímos que

$$Y = (y, y_t) \in C([0, T_0]; \mathcal{H}). \quad (2.101)$$

Além disso, por (2.100) temos que  $y^n(0) = y_0^n \rightarrow y_0$  em  $V$  e  $y_t^n(0) = y_1^n \rightarrow y_t(0)$  em  $H$ . Então as condições iniciais  $y(0) = y_0$  e  $y_t(0) = y_1$ , isto é,

$$(y(0), y_t(0)) = (y_0, y_1) \in \mathcal{H}. \quad (2.102)$$

Resta provar que  $y$  e  $y_t$  satisfazem (2.14) na Definição 2.1, isto é, passaremos o limite em (2.84). Como  $\psi \in C([0, t]; V)$  e  $\psi_t \in L^1(0, t; H)$ , então por (2.85) e (2.100), obtemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (y_t^n(t), \psi(t))_H &= (y_t(t), \psi(t))_H, & \lim_{n \rightarrow \infty} (y_t^n(0), \psi(0))_H &= (y_t(0), \psi(0))_H, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (y^n(\tau), \psi(\tau))_V d\tau &= \int_0^t (y(\tau), \psi(\tau))_V d\tau, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (y_t^n(\tau), \psi_t(\tau))_H d\tau &= \int_0^t (y_t(\tau), \psi_t(\tau))_H d\tau. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Como  $|g_1(s)| \leq \beta|s|^m$  para  $|s| \geq 1$  e  $g_1$  é crescente com  $g_1(0) = 0$ , então  $|g_1(s)| \leq \beta(|s|^m + 1)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Assim, segue de (2.82) que

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_0^L |g_1(u_t^n)|^{\tilde{m}} dx d\tau &\leq C\beta^{\tilde{m}} \int_0^{T_0} \int_0^L (|u_t^n|^{m+1} + 1) dx d\tau \\ &\leq C\beta^{\tilde{m}} \int_0^{T_0} (\|u_t^n\|_{m+1}^{m+1} + L) d\tau \\ &\leq C(K). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Portanto, existe uma subsequência tal que

$$g_1(u_t^n) \rightarrow g_1^* \quad \text{fracamente em } L^{\tilde{m}}((0, L) \times (0, t)), \quad (2.105)$$

para algum  $g_1^* \in L^{\tilde{m}}((0, L) \times (0, t))$ . Além disso, resulta de (2.82) que a subsequência  $u_t^n \rightarrow u_t$  fracamente em  $L^{m+1}((0, L) \times (0, T_0))$ . Portanto, por [14, Lemma 2.3], (2.99) e (2.105), obtemos que  $g_1(u_t) = g_1^*$ , desde que

$$g_1 : L^{m+1}((0, L) \times (0, T_0)) \rightarrow L^{\tilde{m}}((0, L) \times (0, t)) \quad (2.106)$$

é monótono maximal. Com efeito, como  $g_1$  é monótona crescente, é fácil ver que  $g_1$  é um operador monótono. Assim, precisamos verificar que  $g_1$  é hemicontínuo, ou seja, temos que mostrar

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^t \int_0^L g_1(u + \lambda\mu)\omega dx d\tau = \int_0^t \int_0^L g_1(u)\omega dx d\tau, \quad (2.107)$$

para todo  $u, \mu, \omega \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t))$ . Seja  $g_1$  contínua, então  $g_1(u + \lambda\mu)\omega \rightarrow g_1(u)\omega$  pontualmente quando  $\lambda \rightarrow 0$ . Além disso, para todo  $s \in \mathbb{R}$  temos que  $|g_1(s)| \leq \beta(|s|^m + 1)$ . Se  $|\lambda| \leq 1$ , implica da desigualdade de Hölder que

$$|g_1(u + \lambda\mu)\omega| \leq \beta(|u + \lambda\mu|^m + 1)|\omega| \leq C(|u|^m|\omega| + |\mu|^m|\omega| + |\omega|) \in L^1((0, L) \times (0, t)). \quad (2.108)$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que (2.107) é satisfeita. Portanto,  $g_1 : L^{m+1}((0, L) \times (0, T_0)) \rightarrow L^{\tilde{m}}((0, L) \times (0, t))$  é um operador monótono maximal e concluímos que  $g_1^* = g_1(u_t)$ , ou seja,

$$u_t \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t)) \text{ e } g_1(u_t^n) \rightarrow g_1(u_t) \text{ fracamente em } L^{\tilde{m}}((0, L) \times (0, t)). \quad (2.109)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} v_t \in L^{r+1}((0, L) \times (0, t)) \text{ e } g_2(v_t^n) &\rightarrow g_2(v_t) \text{ fracamente em } L^{\tilde{r}}((0, L) \times (0, t)), \\ w_t \in L^{l+1}((0, L) \times (0, t)) \text{ e } g_3(w_t^n) &\rightarrow g_3(w_t) \text{ fracamente em } L^{\tilde{l}}((0, L) \times (0, t)). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Portanto,

$$y_t \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t)) \times L^{r+1}((0, L) \times (0, t)) \times L^{l+1}((0, L) \times (0, t)) \quad (2.111)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (\mathbb{G}(y_t^n(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau. \quad (2.112)$$

Resta mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^L f_1(y^n) \psi_1 dx d\tau = \int_0^t \int_0^L f_1(y) \psi_1 dx d\tau. \quad (2.113)$$

Para provar (2.113), escrevemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_0^L (f_1(y^n) - f_1(y)) \psi_1 dx d\tau \right| &\leq \int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y^j)| |\psi_1| dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_0^L |f_1(y^j) - f_1(y)| |\psi_1| dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Como  $\psi_1 \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t))$ , ao substituir  $\tilde{u}_t$  por  $\psi_1$  em (2.95), deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^L |f_1(y^j) - f_1(y)| |\psi_1| dx d\tau = 0. \quad (2.115)$$

Além disso, resulta de (2.96) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^L |f_1(y^n) - f_1(y^j)| |\psi_1| dx d\tau = 0. \quad (2.116)$$

Portanto, (2.113) é verificado. Da mesma forma, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^L f_2(y^n) \psi_2 dx d\tau = \int_0^t \int_0^L f_2(y) \psi_2 dx d\tau,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^L f_3(y^n) \psi_3 dx d\tau = \int_0^t \int_0^L f_3(y) \psi_3 dx d\tau. \quad (2.117)$$

Assim, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (\mathbb{F}(y^n(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau. \quad (2.118)$$

Finalmente, usando (2.103), (2.112) e (2.118) podemos passar o limite em (2.84) para obter (2.14). Além disso, por (2.101), (2.102) e (2.111),  $Y$  satisfaz a regularidade como indicado na Definição 2.1. Portanto,  $(u, v, w)$  é solução fraca do problema (25)-(27). ■

## 2.1.2 Identidade de energia

Nesta seção verificamos a identidade de energia para soluções fracas. Formalmente, o argumento segue se testarmos (25) com  $(u_t, v_t, w_t)$ . No entanto, este procedimento não é adequado uma vez que  $(u_t, v_t, w_t)$  não possui regularidade suficiente para ser usado como função teste em (2.14). Para contornar essa dificuldade, utilizamos o quociente da diferença de solução.

**Proposição 2.1** (Identidade de energia). *Seja  $Y = (u, v, w)$  uma solução local fraca para o problema (25)-(27) dada pelo Teorema 2.1, então temos que a seguinte identidade de energia é satisfeita*

$$E(t) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau = E(0) + \int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 d\tau, \quad \forall t \in [0, T_0]. \quad (2.119)$$

**Prova:** Ao longo da prova, fixamos  $t \in [0, T_0]$  e consideramos  $y = (u, v, w)$  uma solução fraca para o sistema (25) no sentido da Definição 2.1. Lembrando da regularidade de  $u, v$  e  $w$ , em particular,  $u \in C([0, t]; H_0^1(0, L))$ ,  $u_t \in C([0, t]; L^2(0, L))$  e  $u_t \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t)) = L^{m+1}(0, t; L^{m+1}(0, L))$ . Podemos definir o quociente de diferença  $D_h u(\tau)$  em  $[0, t]$  como em (1.13), isto é,

$$D_h u(\tau) = \frac{u_e(\tau + h) - u_e(\tau - h)}{2h} \quad (2.120)$$

com  $u_e(\tau)$  sendo a extensão de  $u(\tau)$  de  $[0, t]$  para  $\mathbb{R}$  como em (1.14). Pela Proposição 1.2, com  $X = L^{m+1}(0, L)$ ,  $Y = L^2(0, L)$  e  $p = m + 1$ , temos

$$D_h u \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t)) \quad \text{e} \quad D_h u \xrightarrow{h \rightarrow 0} u_t \quad \text{em} \quad L^{m+1}((0, L) \times (0, t)). \quad (2.121)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} D_h v &\in L^{r+1}(0, L; X) \quad \text{e} \quad D_h v \xrightarrow{h \rightarrow 0} v_t \quad \text{em} \quad L^{r+1}((0, L) \times (0, t)), \\ D_h w &\in L^{l+1}(0, L; X) \quad \text{e} \quad D_h w \xrightarrow{h \rightarrow 0} w_t \quad \text{em} \quad L^{l+1}((0, L) \times (0, t)). \end{aligned} \quad (2.122)$$

Lembre-se que  $V = (H_0^1(0, L))^3$  e  $H = (L^2(0, L))^3$ . Como  $y \in C([0, t], V)$ , então  $D_h y \in C([0, t], V)$ . Note que  $(D_h y)_t \in L^1(0, t; H)$ . De fato, para  $0 < h < \frac{t}{2}$ , observamos que

$$(D_h y)_t(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2h} y_t(\tau + h), & \text{se } 0 < \tau < h, \\ \frac{1}{2h} [y_t(\tau + h) - y_t(\tau - h)], & \text{se } h < \tau < t - h, \\ -\frac{1}{2h} y_t(\tau - h), & \text{se } t - h < \tau < t. \end{cases} \quad (2.123)$$

e como  $y_t \in C([0, t]; H)$ , concluímos que

$$(D_h y)_t \in L^1(0, t; H). \quad (2.124)$$

Assim, por (2.121)-(2.124) mostramos que  $D_h y$  é uma função teste conforme a Definição 2.1. Portanto, ao tomar  $\psi = D_h y$  em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} & (y_t(t), D_h y(t))_H - (y_t(0), D_h y(0))_H \\ & + \int_0^t [-(y_t(\tau), (D_h y)_t(\tau))_H + (y(\tau), D_h y(\tau))_V] d\tau \\ & + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), D_h y(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), D_h y(\tau))_2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Passaremos o limite em (2.125) quando  $h \rightarrow 0$ . Como  $y, y_t \in C([0, t]; H)$  então por (1.18), segue que

$$D_h y(0) \rightarrow \frac{1}{2} y_t(0) \quad \text{e} \quad D_h y(t) \rightarrow \frac{1}{2} y_t(t) \quad \text{fracamente em } H. \quad (2.126)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [(y_t(t), D_h y(t))_H - (y_t(0), D_h y(0))_H] &= (y_t(t), \frac{1}{2} y_t(t))_H - (y_t(0), \frac{1}{2} y_t(0))_H \\ &= \frac{1}{2} (\|y_t(t)\|_H^2 - \|y_t(0)\|_H^2). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Também, por (1.16), obtemos que

$$\int_0^t (y_t(\tau), (D_h y)_t(\tau))_H d\tau = 0 \quad \text{para cada } h > 0. \quad (2.128)$$

Além disso, como  $y \in C([0, t]; V)$ , resulta de (1.15) que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t (y(\tau), D_h y(\tau))_V d\tau = \frac{1}{2} (\|y(t)\|_V^2 - \|y(0)\|_V^2). \quad (2.129)$$

Por (2.109) e (2.110), vemos que

$$\mathbb{G}(y_t) \in L^{\tilde{m}}((0, L) \times (0, t)) \times L^{\tilde{r}}((0, L) \times (0, t)) \times L^{\tilde{l}}((0, L) \times (0, t)),$$

com  $\tilde{m} = \frac{m+1}{m}$ ,  $\tilde{r} = \frac{r+1}{r}$  e  $\tilde{l} = \frac{l+1}{l}$ . Daí, segue de (2.121) e (2.122) que

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), D_h y(\tau))_2 d\tau \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \int_0^L (g_1(u_t(\tau)) D_h u(\tau) + g_2(v_t(\tau)) D_h v(\tau) + g_3(w_t(\tau)) D_h w(\tau)) dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^L (g_1(u_t(\tau)) u_t(\tau) + g_2(v_t(\tau)) v_t(\tau) + g_3(w_t(\tau)) w_t(\tau)) dx d\tau \\ &= \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), y_t(\tau))_2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), D_h y(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), y_t(\tau))_2 d\tau. \quad (2.131)$$

Em relação aos termos de fonte, como  $y \in C([0, t]; V)$ , pela imersão de Sobolev  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$  para todo  $q \geq 1$ , deduzimos que  $\mathbb{F}(y) \in H = (L^2(0, L))^3$  e pela Proposição 1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), D_h y(\tau))_2 d\tau \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \int_0^L (f_1(u_t(\tau))D_h u(\tau) + f_2(v_t(\tau))D_h v(\tau) + f_3(w_t(\tau))D_h w(\tau)) dx d\tau \\
&= \int_0^t \int_0^L (f_1(u_t(\tau))u_t(\tau) + f_2(v_t(\tau))v_t(\tau) + f_3(w_t(\tau))w_t(\tau)) dx d\tau \\
&= \int_0^t (\mathbb{F}(y_t(\tau)), y_t(\tau))_2 d\tau.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Então,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), D_h y(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), y_t(\tau))_2 d\tau. \tag{2.133}$$

Finalmente, combinado (2.127)-(2.133), podemos passar o limite em (2.125) quando  $h \rightarrow 0$  para obtermos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\|y(t)\|_V^2 + \|y_t(t)\|_H^2) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau &= \frac{1}{2}(\|y(0)\|_V^2 + \|y_t(0)\|_H^2) \\
&+ \int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 d\tau.
\end{aligned} \tag{2.134}$$

A prova está completa. ■

## 2.2 Unicidade e dependência contínua dos dados iniciais

Nesta seção, provamos a dependência contínua de soluções fracas com relação aos dados iniciais. Es particular, obtemos a unicidade de soluções.

**Teorema 2.2** (Dependência contínua e unicidade). *Sob a Hipótese 2.1, temos que a solução fraca dada pelo Teorema 2.1 depende continuamente de seus dados iniciais no espaço de fase  $\mathcal{H}$ . Em particular, tais soluções são únicas.*

**Prova. Passo 1: Identidade de energia correspondente a  $\omega$ .** Seja  $y = (u, v, w)$  e  $\tilde{y} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  duas soluções fracas em  $[0, T]$  no sentido da Definição 2.1. Fazamos

$$\omega = y - \tilde{y}. \tag{2.135}$$

A energia correspondente a  $\omega$  é definida por

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}(\|\omega(t)\|_V^2 + \|\omega_t(t)\|_H^2), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.136}$$



Pela regularidade imposta às soluções fracas na Definição 2.1, existe uma constante  $R > 0$  tal que

$$\begin{cases} \|y(t)\|_V, \|\tilde{y}(t)\|_V, \|y_t(t)\|_H, \|\tilde{y}_t(t)\|_H \leq R, \\ \int_0^T \|u_t\|_{m+1}^{m+1} ds, \int_0^T \|v_t\|_{r+1}^{r+1} ds, \int_0^T \|w_t\|_{l+1}^{l+1} ds \leq R, \\ \int_0^T \|\tilde{u}_t\|_{m+1}^{m+1} ds, \int_0^T \|\tilde{v}_t\|_{r+1}^{r+1} ds, \int_0^T \|\tilde{w}_t\|_{l+1}^{l+1} ds \leq R. \end{cases} \quad (2.137)$$

para todo  $t \in [0, T]$ . Novamente pela Definição 2.1,  $\omega$  satisfaz

$$\begin{aligned} & (\omega_t(t), \psi(t))_H + (\omega_t(0), \psi(0))_H + \int_0^t [-(\omega_t(\tau), \psi_t(\tau))_H + (\omega(\tau), \psi(\tau))_V] d\tau \\ & + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)) - \mathbb{G}(\tilde{y}_t(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)) - \mathbb{F}(\tilde{y}(\tau)), \psi(\tau))_2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.138)$$

para todo  $t \in [0, T]$  e para toda função teste  $\psi$  descrita na Definição 2.1.

Fazendo  $\psi(\tau) = D_h \omega(\tau)$  em (2.138) com  $\tau \in [0, t]$  e  $D_h \omega$  sendo o quociente diferença simétrica definido em (1.13). Utilizando um argumento similar ao que foi usado na obtenção da identidade de energia (2.119), podemos passar o limite em (2.138) quando  $h \rightarrow 0$  para obtermos

$$\begin{aligned} & \tilde{E}(t) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)) - \mathbb{G}(\tilde{y}_t(\tau)), \omega_t(\tau))_2 d\tau \\ & = \tilde{E}(0) + \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)) - \mathbb{F}(\tilde{y}(\tau)), \omega_t(\tau))_2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Conforme as definições e os resultados obtidos no **Passo 1**, o nosso objetivo no **Passo 2** é mostrar que  $\tilde{E}(t) = 0$  e assim, obter que  $w(t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .

**Passo 2: Estimativas.** Pelas propriedades de monotonicidade de  $g_1, g_2$  e  $g_3$ , obtemos

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) + \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)) - \mathbb{F}(\tilde{y}(\tau)), \omega_t(\tau))_2 d\tau. \quad (2.140)$$

Observe que

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)) - \mathbb{F}(\tilde{y}(\tau)), \omega_t(\tau))_2 d\tau = \int_0^t \int_0^L [(f_1(y(\tau)) - f_1(\tilde{y}(\tau)))(u_t - \tilde{u}_t)(\tau) \\ & + (f_2(y(\tau)) - f_2(\tilde{y}(\tau)))(v_t - \tilde{v}_t)(\tau) + (f_3(y(\tau)) - f_3(\tilde{y}(\tau)))(w_t - \tilde{w}_t)(\tau)] dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Pelo Lema 2.2, sabemos que  $f_1 : V \rightarrow L^2(0, L)$  é localmente Lipschitz. Usando as Desigual-

dades de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L (f_1(y(\tau)) - f_1(\tilde{y}(\tau)))(u_t - \tilde{u}_t)(\tau) dx d\tau \\
& \leq \left( \int_0^t \int_0^L |f_1(y(\tau)) - f_1(\tilde{y}(\tau))|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \int_0^L |(u_t - \tilde{u}_t)(\tau)|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left( \int_0^t \|f_1(y(\tau)) - f_1(\tilde{y}(\tau))\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \|(u_t - \tilde{u}_t)(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq C(R, \rho_1) \left( \int_0^t \|\omega(\tau)\|_V^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \rho_1 \|(u_t - \tilde{u}_t)(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.142}$$

Analogamente, conseguimos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L (f_2(y(\tau)) - f_2(\tilde{y}(\tau)))(v_t - \tilde{v}_t)(\tau) dx d\tau \\
& \leq C(R, \rho_2) \left( \int_0^t \|\omega(\tau)\|_V^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \rho_2 \|(v_t - \tilde{v}_t)(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2.143}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L (f_3(y(\tau)) - f_3(\tilde{y}(\tau)))(w_t - \tilde{w}_t)(\tau) dx d\tau \\
& \leq C(R, \rho_3) \left( \int_0^t \|\omega(\tau)\|_V^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t \rho_3 \|(w_t - \tilde{w}_t)(\tau)\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.144}$$

Assim segue de (2.141)-(2.144) e usando a desigualdade de Young, que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)) - \mathbb{F}(\tilde{y}(\tau)), \omega_t(\tau))_2 d\tau \\
& \leq C(R, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \left( \int_0^t \|\omega(\tau)\|_V^2 d\tau + \int_0^t \|\omega_t(\tau)\|_H^2 d\tau \right) \\
& \leq C(R, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \int_0^t \tilde{E}(t) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.145}$$

Portanto, de (2.140) e (2.145), obtemos que

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) + C(R, \rho_1, \rho_2, \rho_3) \int_0^t \tilde{E}(\tau) d\tau. \tag{2.146}$$

Pela desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(0) e^{C(R, \rho_1, \rho_2, \rho_3)t}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.147}$$

Portanto pela definição de  $\tilde{E}$  segue-se que

$$\|(\omega(t), \omega_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|(\omega(0), \omega_t(0))\|_{\mathcal{H}}^2 e^{C(R, \rho_1, \rho_2, \rho_3)T}, \quad \forall t \in [0, T], \tag{2.148}$$

o que implica a dependência contínua. Além disso, (2.147) implica na unicidade de solução, ou seja, se  $(y(0), y_t(0)) = (\tilde{y}(0), \tilde{y}_t(0))$  em  $\mathcal{H}$ , então  $\tilde{E}(t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$  e assim,  $(y, y_t) = (\tilde{y}, \tilde{y}_t)$  em  $C([0, T]; \mathcal{H})$ . ■

## 2.3 Existência global

O principal resultado dessa seção é o seguinte teorema.

**Teorema 2.3** (Solução fraca global). *Sob a Hipótese 2.1. Suponha  $p \leq \min\{m, r, l\}$ , então a solução fraca obtida no Teorema 2.1 é uma solução global e  $T_0$  pode ser tomado arbitrariamente grande.*

Agora, provaremos o Teorema 2.3. Seja  $E_1(t)$  a energia modificada definida por

$$E_1(t) := E(t) + \frac{1}{p+1} \|y\|_{p+1}^{p+1} \quad \text{com} \quad E(t) = \frac{1}{2} (\|y(t)\|_V^2 + \|y_t(t)\|_H^2). \quad (2.149)$$

Usando um argumento padrão de continuação para EDO's, pode-se mostrar que ou a solução fraca  $y = (u, v, w)$  é global ou existe  $0 < T < \infty$  tal que  $\limsup_{t \rightarrow T^-} E_1(t) = +\infty$ . Pretendemos mostrar que este último resultado não pode acontecer sob as hipóteses do Teorema 2.3. De fato, esta afirmação é justificada pela seguinte proposição.

**Proposição 2.2.** *Suponha que  $y = (u, v, w)$  é uma solução fraca para (25)-(27) em  $[0, T_0]$  dada no Teorema 2.1. Então*

- Se  $p \leq \min\{m, r, l\}$ , então para todo  $t \in [0, T_0]$ ,  $y$  satisfaz

$$E_1(t) + \int_0^t (\|u_\tau\|_{m+1}^{m+1} + \|v_\tau\|_{r+1}^{r+1} + \|w_\tau\|_{l+1}^{l+1}) d\tau \leq C(T_0, E_1(0)), \quad (2.150)$$

com  $C(T_0, E_1(0))$  contínuo em  $T_0$  e definido para  $T_0 > 0$  arbitrário.

- Se  $p > \max\{m, r, l\}$ , então a limitação em (2.150) é válida para  $0 < t < T'$ , para algum  $T' \leq T_0$ , com  $T'$  sendo uma função decrescente contínua com relação a  $E_1(0)$ .

**Prova:** Combinando a energia modificada (2.149) com a identidade de energia (2.119), obtemos

$$E_1(t) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau = E_1(0) + \int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 d\tau + \frac{\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|y(0)\|_{p+1}^{p+1}}{p+1}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & \|y(t)\|_{p+1}^{p+1} - \|y(0)\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \int_0^L (|u(t)|^{p+1} - |u(0)|^{p+1} + |v(t)|^{p+1} - |v(0)|^{p+1} + |w(t)|^{p+1} - |w(0)|^{p+1}) dx \\ &= \int_0^L \int_0^t \left( \frac{d}{dt} |u|^{p+1} + \frac{d}{dt} |v|^{p+1} + \frac{d}{dt} |w|^{p+1} \right) dx d\tau \\ &= (p+1) \int_0^t \int_0^L (|u|^{p-1} u u_t + |v|^{p-1} v v_t + |w|^{p-1} w w_t) dx d\tau. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
E_1(t) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau &= E_1(0) + \int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^L (|u|^{p-1}uu_t + |v|^{p-1}vv_t + |w|^{p-1}ww_t) dx d\tau.
\end{aligned} \tag{2.151}$$

Para estimar os termos de fontes da equação (2.151), lembramos a seguinte hipótese

$$|f_j(y)| \leq C(|u|^p + |v|^p + |w|^p + 1), \quad j = 1, 2, 3.$$

Pelas Desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \int_0^L f_1(y)u_t dx d\tau \right| &\leq \int_0^t \int_0^L C(|u|^p + |v|^p + |w|^p + 1)|u_t| dx d\tau \\
&\leq C \int_0^t (\|u\|_{p+1}^p + \|v\|_{p+1}^p + \|w\|_{p+1}^p + L^{\frac{p}{p+1}}) \|u_t\|_{p+1} d\tau \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{p+1}^{p+1} d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} + \|w\|_{p+1}^{p+1} + L) d\tau \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{p+1}^{p+1} d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|y\|_{p+1}^{p+1} + L) d\tau \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{p+1}^{p+1} d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) d\tau + C_\epsilon T_0 L.
\end{aligned} \tag{2.152}$$

Similarmente, deduzimos que

$$\left| \int_0^t \int_0^L f_2(y)v_t dx d\tau \right| \leq \epsilon \int_0^t \|v_t\|_{p+1}^{p+1} d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) d\tau + C_\epsilon T_0 L \tag{2.153}$$

e

$$\left| \int_0^t \int_0^L f_3(y)w_t dx d\tau \right| \leq \epsilon \int_0^t \|w_t\|_{p+1}^{p+1} d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) d\tau + C_\epsilon T_0 L. \tag{2.154}$$

Por (2.152)-(2.154), conseguimos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 d\tau \right| &\leq \left| \int_0^t \int_0^L f_1(y)u_t dx d\tau \right| + \left| \int_0^t \int_0^L f_2(y)v_t dx d\tau \right| \\
&+ \left| \int_0^t \int_0^L f_3(y)w_t dx d\tau \right| \\
&\leq \epsilon \int_0^t \|y_t\|_{p+1}^{p+1} d\tau + 3C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) d\tau + 3C_\epsilon T_0 L.
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Além disso, usando novamente a Desigualdade de Young e a definição (2.149), obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t \int_0^L (|u|^{p-1}uu_t + |v|^{p-1}vv_t + |w|^{p-1}ww_t) \, dx d\tau \right| \\
& \leq \int_0^t \int_0^L (|u|^p|u_t| + |v|^p|v_t| + |w|^p|w_t|) \, dx d\tau \\
& \leq \epsilon \int_0^t \|y_t\|_{p+1}^{p+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t \|y\|_{p+1}^{p+1} \, d\tau \\
& \leq \epsilon \int_0^t \|y_t\|_{p+1}^{p+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) \, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.156}$$

Por (2.68)-(2.69), tem-se

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) \, dx d\tau \\
& \geq \alpha \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \, d\tau - 3\alpha T_0 L.
\end{aligned} \tag{2.157}$$

Agora, se  $p \leq \min\{m, r, l\}$ , segue de (2.155)-(2.157) e da identidade de energia (2.151) que, para  $t \in [0, T_0]$ ,

$$\begin{aligned}
& E_1(t) + \alpha \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \, d\tau \\
& \leq E_1(0) + 2\epsilon \int_0^t \|y_t\|_{p+1}^{p+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) \, d\tau + C_{T_0, \epsilon} \\
& \leq E_1(0) + 2\epsilon C \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) \, d\tau + C_{T_0, \epsilon}.
\end{aligned} \tag{2.158}$$

Escolhendo  $0 < 2\epsilon C \leq \alpha/2$ , então (2.158) implica que

$$\begin{aligned}
& E_1(t) + \frac{\alpha}{2} \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \, d\tau \\
& \leq E_1(0) + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) \, d\tau + C_{T_0, \epsilon}.
\end{aligned} \tag{2.159}$$

Em particular,

$$E_1(t) \leq E_1(0) + C_\epsilon \int_0^t E_1(\tau) \, d\tau + C_{T_0, \epsilon}. \tag{2.160}$$

Aplicando a identidade de Gronwall em (2.160), temos

$$E_1(t) \leq (E_1(0) + C_{T_0, \epsilon})e^{C_\epsilon T_0}, \quad \forall t \in [0, T_0], \tag{2.161}$$

com  $T_0 > 0$  arbitrário. Combinando (2.159) e (2.161), obtemos o resultado desejado em (2.150).

Agora, suponha que  $p > \max\{m, r, l\}$ . Usando a Desigualdade de Hölder com os conjugados  $m + 1$  e  $\tilde{m} = \frac{m+1}{m}$  e, em seguida, a Desigualdade de Young, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_0^L f_1(y) u_t \, dx d\tau \right| &\leq C \int_0^t \int_0^L (|u|^p + |v|^p + |w|^p + 1) |u_t| \, dx d\tau \\ &\leq C \int_0^t \|u_t\|_{m+1} (\|u\|_{p\tilde{m}}^p + \|v\|_{p\tilde{m}}^p + \|w\|_{p\tilde{m}}^p + L^{\frac{1}{\tilde{m}}}) \, d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|y\|_{p\tilde{m}}^{p\tilde{m}} + L) \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Como  $1 \leq m < p$ , temos que  $p\tilde{m} > 2$ . Pela imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$ ,  $q \geq 1$ , segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_0^L f_1(y) u_t \, dx d\tau \right| &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t L \, d\tau \\ &\quad + C_\epsilon \int_0^t \left( \|u\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|v\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|w\|_{H_0^1(0,L)}^2 \right)^{\frac{p\tilde{m}}{2}} \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Lembrando que a norma  $\|\cdot\|_V$  é equivalente a norma usual  $\|\cdot\|_{(H_0^1(0,L))^3}$ , temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_0^L f_1(y) u_t \, dx d\tau \right| &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t \|y\|_V^{p\tilde{m}} \, d\tau + C_\epsilon T_0 L \\ &\leq \epsilon \int_0^t \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t (E_1(t))^{\frac{p\tilde{m}}{2}} \, d\tau + C_\epsilon T_0 L. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_0^L f_2(y) v_t \, dx d\tau \right| &\leq \epsilon \int_0^t \|v_t\|_{r+1}^{r+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t (E_1(t))^{\frac{p\tilde{r}}{2}} \, d\tau + C_\epsilon T_0 L, \\ \left| \int_0^t \int_0^L f_3(y) w_t \, dx d\tau \right| &\leq \epsilon \int_0^t \|w_t\|_{l+1}^{l+1} \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t (E_1(t))^{\frac{p\tilde{l}}{2}} \, d\tau + C_\epsilon T_0 L. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Em seguida, usando as mesmas estimativas como em (2.162)-(2.165), obtemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_0^L (|u|^{p-1} u u_t + |v|^{p-1} v v_t + |w|^{p-1} w w_t) \, dx \, d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t \int_0^L (|u|^p |u_t| + |v|^p |v_t| + |w|^p |w_t|) \, dx d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|u\|_{p\tilde{m}}^{p\tilde{m}} + \|v\|_{p\tilde{r}}^{p\tilde{r}} + \|w\|_{p\tilde{l}}^{p\tilde{l}}) \, d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \, d\tau + C_\epsilon \int_0^t (\|y\|_{p\tilde{m}}^{p\tilde{m}} + \|y\|_{p\tilde{r}}^{p\tilde{r}} + \|y\|_{p\tilde{l}}^{p\tilde{l}}) \, d\tau \\ &\leq \epsilon \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \, d\tau \\ &\quad + C_\epsilon \int_0^t \left( (E_1(t))^{\frac{p\tilde{m}}{2}} + (E_1(t))^{\frac{p\tilde{r}}{2}} + (E_1(t))^{\frac{p\tilde{l}}{2}} \right) \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Assim, substituindo as estimativas (2.162)-(2.166) e (2.157) em (2.151), obtemos

$$\begin{aligned} E_1(t) + \alpha \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) d\tau \\ \leq E_1(0) + 2\epsilon \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) d\tau + C_\epsilon \int_0^t (E_1(t))^\sigma d\tau + C_{T_0, \epsilon}. \end{aligned} \quad (2.167)$$

com  $\sigma = \max\{\frac{p\tilde{m}}{2}, \frac{p\tilde{r}}{2}, \frac{p\tilde{l}}{2}\} > 1$ . Escolhendo  $0 < 2\epsilon < \alpha/2$ , obtemos

$$E_1(t) + \frac{\alpha}{2} \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) d\tau \leq E_1(0) + C_\epsilon \int_0^t (E_1(t))^\sigma d\tau + C_{T_0, \epsilon}. \quad (2.168)$$

Em particular,

$$E_1(t) \leq E_1(0) + C_\epsilon \int_0^t (E_1(t))^\sigma d\tau + C_{T_0, \epsilon}. \quad (2.169)$$

Usando um teorema padrão de comparação (veja [53] por exemplo) para (2.169), vemos que  $E_1(t) \leq \theta(t)$ , com  $\theta(t) = [(E_1(0) + C_{T_0, \epsilon})^{1-\sigma} - C_\epsilon(1-\sigma)t]^{-\frac{1}{\sigma-1}}$ , sendo a solução da equação integral de Volterra

$$\theta(t) = C_\epsilon \int_0^t (\theta(s))^\sigma ds + E_1(0) + C_{T_0, \epsilon}. \quad (2.170)$$

Como  $\sigma > 1$ , então  $\theta(t)$  explode em  $T_1 = \frac{1}{C_\epsilon(\sigma-1)}(E_1(0) + C_{T_0, \epsilon})^{1-\sigma}$ , isto é,  $\theta(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow T_1^-$ . Observe que  $T_1$  depende da energia inicial  $E_1(0)$  e do tempo de existência original  $T_0$ . No entanto, se escolhermos  $T' = \min\{T_0, \frac{T_1}{2}\}$ , obtemos

$$E_1(t) \leq \theta(t) \leq C_0 := [(E_1(0) + C_{T_0, \epsilon})^{1-\sigma} - C_\epsilon(1-\sigma)T']^{-\frac{1}{\sigma-1}}, \quad \forall t \in [0, T']. \quad (2.171)$$

Combinando (2.168) e (2.171), obtemos

$$E_1(t) + \frac{\alpha}{2} \int_0^t (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) d\tau \leq E_1(0) + C_\epsilon T' C_0^\sigma + C_{T_0, \epsilon}, \quad (2.172)$$

para todo  $t \in [0, T_0]$ , completando a prova da proposição. ■

## 2.4 Blow-up de soluções com energia inicial negativa

Para obter o resultado de blow-up, adicionamos as seguintes hipóteses sobre os termos de fonte:

**Hipótese 2.2** (Para blow-up).

(i) Existe uma função positiva  $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$  tal que

$$\nabla F = \mathbb{F}. \quad (2.173)$$

(ii) Existem  $c_0 > 0$  e  $c_1 > 2$  tais que

$$\begin{aligned} F(y) &\geq c_0(|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}), \\ uf_1(u, v, w) + vf_2(u, v, w) + wf_3(u, v, w) &\geq c_1 F(y). \end{aligned} \quad (2.174)$$

**Teorema 2.4** (Blow-up em tempo finito). *Suponha que as Hipóteses 2.1 e 2.2 sejam satisfeitas. Se  $p > \max\{m, r, l\}$  e  $\mathcal{E}(0) < 0$ , temos que qualquer solução fraca  $y$  para (25)-(27) possui blow-up em tempo finito. Mais precisamente,  $\lim_{t \rightarrow T^-} E(t) = \infty$ , para algum  $0 < T < \infty$ , com*

$$\mathcal{E}(t) = E(t) - \int_0^L F(y(t)) dx. \quad (2.175)$$

**Prova:** Seja  $y = (u, v, w)$  uma solução fraca para o problema (25)-(27) conforme a Definição 2.1. Ao longo da prova, assumiremos as Hipóteses 2.1 e 2.2 com  $p > \max\{m, r, l\}$ . Definimos a vida útil (do inglês “life span”)  $T$  de tal solução  $y = (u, v, w)$  como sendo o supremo de todo  $T^* > 0$  tal que  $y$  é uma solução para (25)-(27) conforme a Definição 2.1 em  $[0, T^*]$ . Nosso objetivo é mostrar que  $T$  é necessariamente finito e obter uma limitação superior para  $T$ .

Como em [1, 18], para  $t \in [0, T]$ , definimos

$$G(t) = -\mathcal{E}(t), \quad N(t) = \|y(t)\|_H^2, \quad S(t) = \int_0^L F(y(t)) dx, \quad (2.176)$$

com  $\mathcal{E}(t)$  sendo a energia total definida em (2.175). Segue que

$$G(t) = \int_0^L F(y(t)) dx - E(t) = -\frac{1}{2}(\|y\|_V^2 + \|y_t\|_H^2) + S(t).$$

Observe também que

$$N(t) = \|y(t)\|_H^2 = \int_0^L (\rho_1 u^2(t) + \rho_2 v^2(t) + \rho_3 w^2(t)) dx,$$

isto implica que

$$N'(t) = 2 \int_0^L (\rho_1 u(t)u_t(t) + \rho_2 v(t)v_t(t) + \rho_3 w(t)w_t(t)) dx = 2(y(t), y_t(t))_H. \quad (2.177)$$

Portanto,

$$G(t) = -\frac{1}{2}(\|y\|_V^2 + \|y_t\|_H^2) + S(t) \quad \text{e} \quad N'(t) = 2(y(t), y_t(t))_H. \quad (2.178)$$

Além disso, pela hipótese (2.174), temos que

$$S(t) = \int_0^L F(y(t)) dx \geq c_0 \int_0^L (|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}) dx = c_0 \|y\|_{p+1}^{p+1}. \quad (2.179)$$



Seja

$$0 < \xi < \min \left\{ \frac{1}{m+1} - \frac{1}{p+1}, \frac{1}{r+1} - \frac{1}{p+1}, \frac{1}{l+1} - \frac{1}{p+1}, \frac{p-1}{2(p+1)} \right\}. \quad (2.180)$$

Em particular,  $\xi < \frac{1}{2}$ . Para simplificar a notação, introduzimos as seguintes constantes

$$\begin{aligned} K_1 &= \beta L \frac{p-m}{(p+1)(m+1)} c_0^{-\frac{1}{p+1}}, & K_2 &= \beta L \frac{p-r}{(p+1)(r+1)} c_0^{-\frac{1}{p+1}}, & K_3 &= \beta L \frac{p-l}{(p+1)(l+1)} c_0^{-\frac{1}{p+1}}, \\ \delta_1 &= \frac{\lambda}{6} G(0)^{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{p+1}}, & \delta_2 &= \frac{\lambda}{6} G(0)^{\frac{1}{r+1} - \frac{1}{p+1}}, & \delta_3 &= \frac{\lambda}{6} G(0)^{\frac{1}{l+1} - \frac{1}{p+1}}, \end{aligned} \quad (2.181)$$

com  $\lambda = c_1 - 2 > 0$ .

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 d\tau &= \int_0^t \int_0^L (f_1(y)u_t + f_2(y)v_t + f_3(y)w_t) dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^L \left( \frac{\partial F}{\partial u}(y) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}(y) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w}(y) \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^L \frac{\partial F}{\partial t}(y) dx d\tau = \int_0^L (F(y(t)) - F(y(0))) dx. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Segue da identidade de energia (2.119) que

$$\begin{aligned} -E(0) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau &= -E(t) + \int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 d\tau \\ &= -E(t) + \int_0^L (F(y(t)) - F(y(0))) dx, \end{aligned} \quad (2.183)$$

ou seja,

$$-E(t) + \int_0^L F(y(t)) dx = -E(0) + \int_0^L F(y(0)) dx + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau.$$

Isso equivale a

$$G(t) = G(0) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau. \quad (2.184)$$

Pela hipótese 2.1 e da regularidade da solução  $y$ , concluímos que  $G(t)$  é absolutamente contínuo e que

$$\begin{aligned} G'(t) &= (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 = \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx \\ &\geq \alpha \int_0^L (|u_t|^{m+1} + |v_t|^{r+1} + |w_t|^{l+1}) dx \\ &\geq \alpha (\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t\|_{l+1}^{l+1}) \geq 0, \quad \text{q.s. em } [0, T]. \end{aligned} \quad (2.185)$$

Portanto,  $G(t)$  é não-decrescente. Por (2.175) e pela hipótese do Teorema 2.4, obtemos que

$$G(0) = -\mathcal{E}(0) > 0.$$

Assim

$$0 < G(0) \leq G(t) \leq S(t) \quad \text{para } 0 \leq t < T. \quad (2.186)$$

Definimos

$$U(t) = G(t)^{1-\xi} + \epsilon N'(t), \quad (2.187)$$

com  $0 < \epsilon \leq G(0)$ . No decorrer da prova, ajustaremos as condições sobre  $\epsilon$ . Agora, o nosso objetivo é mostrar

$$U'(t) = (1 - \xi)G(t)^{-\xi}G'(t) + \epsilon N''(t), \quad (2.188)$$

com

$$N''(t) = 2\|y_t\|_H^2 - 2\|y\|_V^2 - 2(\mathbb{G}(y_t), y)_2 + 2(\mathbb{F}(y), y)_2 \quad \text{q.s. em } [0, T]. \quad (2.189)$$

Para obter (2.189), inicialmente devemos provar que  $u \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t))$  para todo  $t \in [0, T)$ . De fato, como  $u, u_t \in C([0, t]; L^2(0, L))$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L |u|^{m+1} dx d\tau &= \int_0^t \int_0^L \left| \int_0^\tau u_t(s) ds + u_0 \right|^{m+1} dx d\tau \\ &\leq 2^m \left[ \int_0^t \int_0^L \left| \int_0^\tau u_t(s) ds \right|^{m+1} dx d\tau + \int_0^t \int_0^L |u_0|^{m+1} dx d\tau \right] \\ &\leq 2^m \left[ t^m \int_0^t \int_0^L \int_0^t |u_t(s)|^{m+1} ds dx d\tau + t \|u_0\|_{m+1}^{m+1} \right] \\ &\leq 2^m \left( t^{m+1} \|u_t\|_{L^{m+1}((0, L) \times (0, t))}^{m+1} + t \|u_0\|_{m+1}^{m+1} \right), \quad t \in [0, T). \end{aligned}$$

Observe que a desigualdade acima é finita, pois pela regularidade de  $y$ , temos que  $u_t \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t))$ . Além disso,  $u_0 \in H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^{m+1}(0, L)$  desde que  $m < p$ . Assim,  $u \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t))$  para todo  $t \in [0, T)$ . Da mesma forma, pode-se mostrar que  $v \in L^{r+1}((0, L) \times (0, t))$  e  $w \in L^{l+1}((0, L) \times (0, t))$ , para todo  $t \in [0, T)$ .

Então, para todo  $t \in [0, T)$ ,

$$y = (u, v, w) \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t)) \times L^{r+1}((0, L) \times (0, t)) \times L^{l+1}((0, L) \times (0, t)). \quad (2.190)$$

Isso mostra que  $y$  satisfaz as restrições de regularidade da função teste  $\psi$ , como indicado na Definição 2.1. Portanto, substituindo  $\psi$  por  $y$  em (2.14), temos que

$$\begin{aligned} (y_t(t), y(t))_H - (y_t(0), y(0))_H + \int_0^t (\|y\|_V - \|y_t\|_H) d\tau \\ + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), y(\tau))_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), y(\tau))_2 d\tau, \quad \text{q.s. em } [0, T). \end{aligned}$$

e usando (2.178), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N'(t) &= (y_t(0), y(0))_H + \int_0^t (\|y_t\|_H^2 - \|y\|_V^2) d\tau \\ &\quad - \int_0^t (\mathbb{G}(y_t(\tau)), y(\tau))_2 d\tau + \int_0^t (\mathbb{F}(y(\tau)), y(\tau))_2 d\tau, \quad \text{q.s. em } [0, T). \end{aligned} \quad (2.191)$$

Usando a Hipótese 2.1 e o Teorema do Valor Médio, obtemos que

$$|f_j(u, v, w)| \leq C(|u|^p + |v|^p + |w|^p + 1), \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^t |(\mathbb{F}(y), y)_2| d\tau &\leq \int_0^t \int_0^L (|f_1(y)||u| + |f_2(y)||u| + |f_3(y)||u|) dx d\tau \\ &\leq C \int_0^t \int_0^L (|u|^p + |v|^p + |w|^p + 1)(|u| + |v| + |w|) dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.192)$$

Usando a Desigualdade de Hölder e a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$ ,  $1 \leq q < \infty$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L |u|^p |u| dx d\tau &\leq C \left( \int_0^t \int_0^L |u|^{p \frac{m+1}{m}} dx d\tau \right)^{\frac{m}{m+1}} \left( \int_0^t \int_0^L |u|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}}, \\ &\leq C \left( \int_0^t \|u\|_{L^{p \frac{m+1}{m}}(0, L)}^{p \frac{m+1}{m}} d\tau \right)^{\frac{m}{m+1}} \|u\|_{L^{m+1}((0, L) \times (0, t))}, \\ &\leq C \left( \int_0^t \|u\|_{H_0^1(0, L)}^{p \frac{m+1}{m}} d\tau \right)^{\frac{m}{m+1}} \|u\|_{L^{m+1}((0, L) \times (0, t))} < \infty \end{aligned} \quad (2.193)$$

para todo  $t \in [0, T)$ , pois  $u \in C([0, t]; H_0^1(0, L))$  e  $u \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t))$ . Os outros termos de (2.192) são estimados da mesma forma. Portanto,

$$\int_0^t |(\mathbb{F}(y), y)_2| d\tau < \infty, \quad \forall t \in [0, T). \quad (2.194)$$

Afirmamos que

$$\int_0^t |(\mathbb{G}(y_t), y)_H| d\tau < \infty, \quad \forall t \in [0, T). \quad (2.195)$$

De fato, como  $|g_1(s)| \leq \beta(|s|^m + 1)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L |g_1(u_t)||u| dx d\tau &\leq \int_0^t \int_0^L \beta(|u_t|^m + 1)|u| dx d\tau \\ &\leq \beta \left( \int_0^t \int_0^L |u_t|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{m}{m+1}} \left( \int_0^t \int_0^L |u|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}} \\ &\quad + \beta C_{t, L} \left( \int_0^t \int_0^L |u|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \beta \|u_t\|_{L^{m+1}((0, L) \times (0, t))}^m \|u\|_{L^{m+1}((0, L) \times (0, t))} + \beta C_{t, L} \|u\|_{L^2((0, L) \times (0, t))} \\ &< \infty, \quad \forall t \in [0, T), \end{aligned} \quad (2.196)$$

pois  $u \in C([0, t]; L^2(0, L))$ , (2.190) é válida e  $u, u_t \in L^{m+1}((0, L) \times (0, t))$ . Analogamente,

$$\int_0^t \int_0^L |g_2(v_t)| |v| \, dx d\tau < \infty, \quad \int_0^t \int_0^L |g_3(w_t)| |w| \, dx d\tau < \infty. \quad (2.197)$$

Combinando (2.196) e (2.197) obtemos (2.195).

De (2.191), (2.194)-(2.195) e pela regularidade de  $y$ , segue que  $N'(t)$  é absolutamente contínua. Portanto, (2.189) é verdadeira.

Observe que (2.178) implica em

$$\|y(t)\|_V^2 = 2S(t) - 2G(t) - \|y_t(t)\|_H^2. \quad (2.198)$$

Por (2.188), (2.189) e (2.198), tem-se

$$\begin{aligned} U'(t) &= (1 - \xi)G(t)^{-\xi}G'(t) + \epsilon N''(t) \\ &= (1 - \xi)G(t)^{-\xi}G'(t) + 2\epsilon(\|y_t\|_H^2 - \|y\|_V^2) \\ &\quad - 2\epsilon(\mathbb{G}(y_t), y)_2 + 2\epsilon(\mathbb{F}(y), y)_2 \\ &= (1 - \xi)G(t)^{-\xi}G'(t) + 4\epsilon(\|y_t\|_H^2 + G(t)) \\ &\quad - 2\epsilon(\mathbb{G}(y_t), y)_2 - 4\epsilon S(t) + 2\epsilon(\mathbb{F}(y), y)_2. \end{aligned}$$

Pela hipótese (2.174), segue que

$$\begin{aligned} -4\epsilon S(t) + 2\epsilon(\mathbb{F}(y), y)_2 &= -4\epsilon S(t) + 2\epsilon \int_0^L (f_1(y)u + f_2(y)v + f_3(y)w) dx \\ &\geq -4\epsilon S(t) + 2\epsilon c_1 S(t) \geq 2\epsilon(c_1 - 2)S(t). \end{aligned}$$

Assim,

$$U'(t) \geq (1 - \xi)G(t)^{-\xi}G'(t) + 4\epsilon\|y_t\|_H^2 + 4\epsilon G(t) - 2\epsilon(\mathbb{G}(y_t), y)_2 + 2\epsilon\lambda S(t), \quad (2.199)$$

com  $\lambda = c_1 - 2 > 0$ . Agora, vamos estimar os termos do lado direito de (2.199). Usando a hipótese que  $g_1(s)s \leq \beta|s|^{m+1}$ , a desigualdade de Hölder, o fato que  $p > m$  e (2.179), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L g_1(u_t(t))u(t) \, dx \right| &\leq \beta \int_0^L |u_t(t)|^m |u(t)| \, dx \\ &\leq \beta \|u(t)\|_{m+1} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq \beta L^{\frac{p-m}{(p+1)(m+1)}} \|u(t)\|_{p+1} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq K_1 S(t)^{\frac{1}{p+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m, \end{aligned} \quad (2.200)$$

com  $K_1$  dado em (2.181). Pela definição de  $\xi$ , temos que  $\frac{1}{p+1} - \frac{1}{m+1} + \xi < 0$ . Portanto, segue de (2.185)-(2.186), da desigualdade de Young e das definições de  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  em (2.181), que

(2.200) resulta em

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^L g_1(u_t(t))u(t) dx \right| &\leq K_1 S(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}} S(t)^{\frac{1}{m+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\
&\leq G(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}} \left( \delta_1 S(t) + C_{\delta_1} K_1^{\frac{m+1}{m}} \|u_t\|_{m+1}^{m+1} \right) \\
&\leq \delta_1 G(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}} S(t) + C_{\delta_1} K_1^{\frac{m+1}{m}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(t)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi} \\
&\leq \delta_1 G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}} S(t) + C_{\delta_1} K_1^{\frac{m+1}{m}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi} \\
&\leq \frac{\lambda}{6} S(t) + C_{\delta_1} K_1^{\frac{m+1}{m}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi}.
\end{aligned} \tag{2.201}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^L g_2(v_t(t))v(t) dx \right| &\leq \frac{\lambda}{6} S(t) + C_{\delta_2} K_2^{\frac{r+1}{r}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{r+1}+\xi}, \\
\left| \int_0^L g_3(w_t(t))w(t) dx \right| &\leq \frac{\lambda}{6} S(t) + C_{\delta_3} K_3^{\frac{l+1}{l}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{l+1}+\xi}.
\end{aligned} \tag{2.202}$$

Portanto, por (2.201) e (2.202), obtemos que

$$\begin{aligned}
|(\mathbb{G}(y_t), y)_2| &\leq \frac{\lambda}{2} S(t) C_{\delta_1} K_1^{\frac{m+1}{m}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi} \\
&\quad + C_{\delta_2} K_2^{\frac{r+1}{r}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{r+1}+\xi} \\
&\quad + C_{\delta_3} K_3^{\frac{l+1}{l}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{l+1}+\xi}.
\end{aligned} \tag{2.203}$$

Como  $0 < \xi < \frac{1}{2}$ , podemos escolher  $0 < \epsilon < 1$  suficientemente pequeno para que

$$\begin{aligned}
L := 1 - \xi - 2\epsilon C_{\delta_1} K_1^{\frac{m+1}{m}} \alpha^{-1} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi} - 2\epsilon C_{\delta_2} K_2^{\frac{r+1}{r}} \alpha^{-1} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{r+1}+\xi} \\
- 2\epsilon C_{\delta_3} K_3^{\frac{l+1}{l}} \alpha^{-1} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{l+1}+\xi}.
\end{aligned} \tag{2.204}$$

Usando as estimativas (2.203) em (2.199), obtemos

$$\begin{aligned}
U'(t) &\geq 4\epsilon(\|y_t\|_H^2 + G(t)) + \lambda\epsilon S(t) + [1 - \xi - 2\epsilon(C_{\delta_1} K_1^{\frac{m+1}{m}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{m+1}+\xi} \\
&\quad + C_{\delta_2} K_2^{\frac{r+1}{r}} \alpha^{-1} G'(t) G(t)^{-\xi} G(0)^{\frac{1}{p+1}-\frac{1}{r+1}+\xi})] G(t)^{-\xi} G'(t).
\end{aligned}$$

Segue de (2.204), (2.185) e (2.186), que

$$\begin{aligned}
U'(t) &\geq 4\epsilon(\|y_t\|_H^2 + G(t)) + \lambda\epsilon S(t) + LG(t)^{-\xi} G'(t) \\
&\geq 4\epsilon(\|y_t\|_H^2 + G(t)) + \lambda\epsilon S(t).
\end{aligned} \tag{2.205}$$

Em particular, a desigualdade (2.205) garante que  $U(t)$  é crescente em  $[0, T)$ , e assim,

$$U(t) = G(t)^{1-\xi} + \epsilon N'(t) \geq G(0)^{1-\xi} + \epsilon N'(0). \tag{2.206}$$

Se  $N'(0) \geq 0$ , então nenhuma outra condição para  $\epsilon$  é necessária. Entretanto, se  $N'(0) < 0$ , devemos ajustar  $\epsilon$  de tal modo que  $0 < \epsilon \leq -\frac{G(0)^{1-\xi}}{2N'(0)}$ . Em qualquer caso, tem-se

$$U(t) \geq \frac{1}{2}G(0)^{1-\xi} > 0 \quad \text{para } t \in [0, T]. \quad (2.207)$$

Finalmente, mostraremos que

$$U'(t) \geq C\epsilon^{1+\sigma}U(t)^\eta \quad \text{para } t \in [0, T], \quad (2.208)$$

com

$$1 < \eta = \frac{1}{1-\xi} < 2, \quad \sigma = 1 - \frac{2}{(1-2\xi)(p+1)} \quad (2.209)$$

e  $C > 0$  sendo uma constante genérica de  $\epsilon$ . Observe que  $\sigma > 0$ , pois  $\xi < \frac{p-1}{2(p+1)}$ .

Agora, se  $N'(t) \leq 0$  para algum  $t \in [0, T]$ , então

$$U(t)^\eta = [G(t)^{1-\xi} + \epsilon N'(t)]^\eta \leq G(t) \quad (2.210)$$

para cada valor de  $t$  e neste caso, (2.205) e (2.210) implicam

$$U'(t) \geq 4\epsilon G(t) \geq 4\epsilon^{1+\sigma}G(t) \geq 4\epsilon^{1+\sigma}U(t)^\eta.$$

Portanto, (2.208) é verdadeira para  $t \in [0, T]$  desde que  $N'(t) \leq 0$ . No entanto, para provar (2.208) conforme as condições:  $t \in [0, T]$  tal que  $N'(t) > 0$ , se requer um pouco mais de esforço. Primeiro, note que

$$U(t) = G(t)^{1-\xi} + \epsilon N'(t) \leq G(t)^{1-\xi} + N'(t). \quad (2.211)$$

Portanto,

$$U(t)^\eta \leq 2^{\eta-1}[G(t) + N'(t)]^\eta. \quad (2.212)$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young juntamente com o fato que  $1 < \eta < 2$  e tomando  $\varrho = \max\{1, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ . Por (2.178), obtemos que

$$\begin{aligned} N'(t)^\eta &\leq 2^\eta (\rho_1 \|u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 + \rho_2 \|v(t)\|_2 \|v_t(t)\|_2 + \rho_3 \|w(t)\|_2 \|w_t(t)\|_2)^\eta \\ &\leq C_{\eta,L} \left( \rho_1^\eta \|u(t)\|_{p+1}^\eta \|u_t(t)\|_2^\eta + \rho_2^\eta \|v(t)\|_{p+1}^\eta \|v_t(t)\|_2^\eta + \rho_3^\eta \|w(t)\|_{p+1}^\eta \|w_t(t)\|_2^\eta \right) \\ &\leq C_{\eta,L} \left( \|u(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \rho_1^2 \|u_t(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \rho_2^2 \|v_t(t)\|_2^2 + \|w(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \rho_3^2 \|w_t(t)\|_2^2 \right) \\ &\leq C_{\eta,L} \left( \|u(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \rho_1 \|u_t(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \rho_2 \|v_t(t)\|_2^2 + \|w(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} + \rho_3 \|w_t(t)\|_2^2 \right). \end{aligned} \quad (2.213)$$

Como  $\eta = \frac{1}{1-\xi}$  e  $\sigma > 0$ , é fácil verificar que

$$\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)} - 1 = - \left[ 1 - \frac{2}{(1-2\eta)(p+1)} \right] = -\sigma < 0. \quad (2.214)$$

Portanto, por  $0 < \epsilon < G(0)$ , (2.179), (2.186), (2.214), tem-se

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} &= \left(\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}\right)^{\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)}} \leq CS(t)^{\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)}} \\ &\leq CS(t)^{\frac{2\eta}{(2-\eta)(p+1)}-1} S(t) = CS(t)^{-\sigma} S(t) \\ &\leq CG(0)^{-\sigma} S(t) \\ &\leq C\epsilon^{-\sigma} S(t). \end{aligned} \quad (2.215)$$

Analogamente,

$$\|v(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} \leq C\epsilon^{-\sigma} S(t) \quad \text{e} \quad \|w(t)\|_{p+1}^{\frac{2\eta}{2-\eta}} \leq C\epsilon^{-\sigma} S(t). \quad (2.216)$$

Por (2.213) e (2.215)-(2.216) e como  $\epsilon^{-\sigma} > 1$ , obtemos que

$$\begin{aligned} N'(t)^\eta &\leq C \left(\rho_1 \|u_t(t)\|_2^2 + \rho_2 \|v_t(t)\|_2^2 + \rho_3 \|w_t(t)\|_2^2 + \epsilon^{-\sigma} S(t)\right) \\ &\leq C\epsilon^{-\sigma} \left(\rho_1 \|u_t(t)\|_2^2 + \rho_2 \|v_t(t)\|_2^2 + \rho_3 \|w_t(t)\|_2^2 + S(t)\right) \\ &= C\epsilon^{-\sigma} \left(\|y_t(t)\|_H^2 + S(t)\right). \end{aligned} \quad (2.217)$$

Agora, usando as estimativas (2.205), (2.212) e (2.217), concluímos que

$$\begin{aligned} U'(t) &\geq C\epsilon[G(t) + \|y_t\|_H^2 + S(t)] \geq C\epsilon[G(t) + \epsilon^\sigma N'(t)^\eta] \\ &\geq C\epsilon^{\sigma+1}[G(t) + N'(t)^\eta] \geq C\epsilon^{\sigma+1}U(t)^\eta, \end{aligned} \quad (2.218)$$

para todos os valores de  $t \in [0, T)$  para os quais  $N'(t) > 0$ . Assim, (2.208) é válida. Por cálculos simples, segue de (2.207) e (2.208) que  $T$  é necessariamente finito e

$$T < C\epsilon^{-(1+\sigma)}U(0)^{-\frac{\xi}{1-\xi}} < C\epsilon^{-(1+\sigma)}G(0)^{-\xi}. \quad (2.219)$$

Assim, o teorema está provado. ■

## 2.5 Solução global

Nesta seção, usamos o método do poço potencial para investigar a existência global de soluções fracas. Começamos introduzindo algumas hipóteses adicionais.

**Hipótese 2.3.** *Existe uma função não-negativa  $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$  que satisfaz (2.173) e além disso, é homogênea de ordem  $p + 1$ , isto é,*

$$F(\lambda y) = \lambda^{p+1}F(y), \quad \forall \lambda > 0, y \in \mathbb{R}^3. \quad (2.220)$$

Como  $F$  é homogênea, o Teorema de Euler implica a seguinte identidade

$$(p + 1)F(y) = uf_1(y) + vf_2(y) + wf_3(y). \quad (2.221)$$

Observamos que (2.19) implica que existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$F(y) \leq M(|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1} + 1). \quad (2.222)$$

Portanto, a homogeneidade de  $F$  implica que

$$F(y) \leq M(|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}). \quad (2.223)$$

Além disso, é fácil ver que  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  também são funções homogêneas de grau  $p$  e que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$f_j(y) \leq C(|u|^p + |v|^p + |w|^p), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.224)$$

A seguinte notação se fará necessária no decorrer do trabalho. Lembrando que  $V = (H_0^1(0, L))^3$  e, definimos o funcional energia potencial  $I : V \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$I(y) = \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - \int_0^L F(y) dx, \quad (2.225)$$

e, portanto,

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|y_t(t)\|_H^2 + I(y). \quad (2.226)$$

Verifica-se facilmente que  $I$  é diferenciável no sentido de Fréchet e sua derivada  $I'$  é dada por

$$I'(y)\phi = (y, \phi)_V - (\mathbb{F}(y), \phi)_2. \quad (2.227)$$

Desta forma, os pontos críticos do funcional  $I$  são as soluções fracas do problema elíptico

$$\begin{cases} -a_{11}u_{xx} - a_{12}v_{xx} - a_{13}w_{xx} = f_1(u, v, w), & \text{em } (0, L), \\ -a_{12}u_{xx} - a_{22}v_{xx} - a_{23}w_{xx} = f_2(u, v, w), & \text{em } (0, L), \\ -a_{13}u_{xx} - a_{23}v_{xx} - a_{33}w_{xx} = f_3(u, v, w), & \text{em } (0, L). \end{cases} \quad (2.228)$$

Definimos a variedade de Nehari de  $I$  por

$$\mathcal{N} = \left\{ y \in V \setminus \{0\} : I'(y)y = 0 \right\}.$$

Decorre de (2.221) e (2.227) que a variedade Nehari pode ser representada como

$$\mathcal{N} = \left\{ y \in V \setminus \{0\} : \|y\|_V^2 = (p+1) \int_0^L F(y) dx \right\}. \quad (2.229)$$

Seguindo as idéias de [44, Lema 2.7], vemos que  $I$  satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e o nível do passo da montanha  $d$  satisfaz

$$d := \inf_{y \in \mathcal{N}} I(y) = \inf_{y \in V \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \geq 0} I(\lambda y). \quad (2.230)$$

A fim de introduzir o poço potencial, primeiro provamos o seguinte lema.



**Lema 2.4.** *Sob as Hipóteses 2.1 e 2.3. Assuma que  $p > 1$ , então*

$$d := \inf_{y \in \mathcal{N}} I(y) > 0. \quad (2.231)$$

**Prova:** Seja  $y \in \mathcal{N}$ . Então, segue de (2.229) que

$$I(y) = \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - \int_0^L F(y) dx = \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - \frac{1}{p+1} \|y\|_V^2 = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|y\|_V^2 > 0.$$

Como  $p > 1$ , tem-se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} > 0.$$

Como  $y \in \mathcal{N}$ , pela imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$ ,  $1 \leq q < \infty$  e por (2.223), obtemos

$$\|y\|_V^2 = (p+1) \int_0^L F(y) dx \leq (p+1)M \|y\|_{p+1}^{p+1} \leq C \|y\|_{(H_0^1(0,L))^3}^{p+1} \leq C \|y\|_V^{p+1}.$$

Novamente, como  $p > 1$  temos que  $\|y\|_V \geq C^{-\frac{1}{p-1}} > 0$  e portanto

$$d \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) C^{-\frac{2}{p-1}} > 0.$$

Completando a prova. ■

Inspirado por [2], definimos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} W &:= \{y \in V : I(y) < d\}, \\ W_1 &:= \left\{ y \in W : \|y\|_V^2 > (p+1) \int_0^L F(y) dx \right\} \cup \{0\}, \\ W_2 &:= \left\{ y \in W : \|y\|_V^2 < (p+1) \int_0^L F(y) dx \right\}. \end{aligned} \quad (2.232)$$

Notemos que  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$  e  $W_1 \cup W_2 = W$ . O conjunto  $W$  é conhecido como *poço potencial* e  $d$  é a *profundidade* do poço. O conjunto  $W_1$  é considerado a parte “boa” do poço, pois provamos que toda solução fraca que começa nele, existe globalmente sempre que  $\mathcal{E}(0) < d$ . Por outro lado, se os dados iniciais pertencerem a  $W_2$  e os expoentes dos termos de fonte dominarem os dos damping, então as soluções com energia inicial  $0 \leq \mathcal{E}(0) < d$  possuem blow-up em tempo finito.

Agora introduzimos um subconjunto fechado de  $W_1$  que será importante para o estudo do decaimento uniforme de soluções. Defina o funcional

$$J(s) = \frac{1}{2} s^2 - MRs^{p+1}, \quad (2.233)$$

com a constante  $M > 0$  dada em (2.223) e

$$R := \sup_{y \in V \setminus \{0\}} \frac{\|y\|_{p+1}^{p+1}}{\|y\|_V^{p+1}}. \quad (2.234)$$

Como  $p > 1$  e pela imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$ ,  $q \geq 1$ , obtemos que  $0 < R < \infty$ . Por (2.223), segue que

$$\begin{aligned}
I(y) &= \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - \int_0^L F(y) \, dx \\
&\geq \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - M \int_0^L (|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}) \, dx \\
&\geq \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - M(\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} + \|w\|_{p+1}^{p+1}) = \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - M \|y\|_{p+1}^{p+1} \\
&\geq \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - M \|y\|_{(H_0^1(0,L))^3}^{p+1} \\
&\geq \frac{1}{2} \|y\|_V^2 - MR \|y\|_V^{p+1} = J(\|y\|_V).
\end{aligned} \tag{2.235}$$

Note que

$$\begin{aligned}
s_0 - (p+1)MRs_0^p = J'(s_0) = 0 &\Leftrightarrow s_0^{1-p} = MR(p+1) \\
&\Leftrightarrow s_0 = (MR(p+1))^{-\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned} \tag{2.236}$$

Assim,  $J$  atinge o seu máximo absoluto em  $[0, \infty)$  no único ponto crítico

$$s_0 = ((p+1)MR)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{2.237}$$

Agora, tomando  $s_0$  em  $J$  encontramos o valor máximo exato

$$\begin{aligned}
\tilde{d} &:= \sup_{s \in [0, \infty)} J(s) = J(s_0) = \left( \frac{1}{2} - MRs_0^{p-1} \right) s_0^2 \\
&= \left( \frac{1}{2} - MR((p+1)MR)^{-\frac{p-1}{p-1}} \right) ((p+1)MR)^{-\frac{2}{p-1}} \\
&= \frac{p-1}{2(p+1)} ((p+1)MR)^{-\frac{2}{p-1}}.
\end{aligned} \tag{2.238}$$

Agora defina

$$\widetilde{W}_1 := \{y \in V : \|y\|_V < s_0, I(y) < J(s_0)\}. \tag{2.239}$$

Dado  $y \in V$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon y \in \widetilde{W}_1$ . Logo,  $\widetilde{W}_1 \neq \{0\}$ . Além disso, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.3.**  $J(s_0) \leq d$  e  $\widetilde{W}_1$  é um subconjunto de  $W_1$ .

**Prova:** Primeiro, vamos mostrar que  $J(s_0) \leq d$ . Fixado  $y \in V \setminus \{0\}$ , temos de (2.235) que

$$I(\lambda y) \geq J(\|\lambda y\|_V) = J(\lambda \|y\|_V), \quad \forall \lambda \geq 0,$$

implicando em

$$\sup_{\lambda \geq 0} I(\lambda y) \geq J(s_0).$$

Portanto, por (2.230), obtemos

$$d = \inf_{y \in V \setminus \{0\}} \sup_{\lambda \geq 0} I(\lambda y) \geq J(s_0). \quad (2.240)$$

Agora, mostraremos que  $\widetilde{W}_1 \subset W_1$ . Seja  $y \in \widetilde{W}_1$ , então

(i)  $y \in V$  e  $I(y) < J(s_0) \leq d$ . Assim,  $y \in W$ ;

(ii) Para todo  $\|y\|_V < s_0$ , por (2.223) e (2.234), temos

$$\begin{aligned} (p+1) \int_0^L F(y) \, dx &\leq (p+1)M\|y\|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq (p+1)MR\|y\|_V^{p+1} \\ &= \|y\|_V^2 ((p+1)MR\|y\|_V^{p-1}) \\ &< \|y\|_V^2 ((p+1)MRs_0^{p-1}) \\ &= \|y\|_V^2. \end{aligned} \quad (2.241)$$

Portanto, por (i), (ii) e da definição de  $W_1$ , segue que  $\widetilde{W}_1 \subset W_1$ . A prova está completa. ■

Tomando um  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, podemos definir um subconjunto fechado de  $\widetilde{W}_1$ , por

$$\widetilde{W}_1^\delta := \left\{ y \in V : \|y\|_V \leq s_0 - \delta, I(y) \leq J(s_0 - \delta) \right\}. \quad (2.242)$$

Pela Proposição 2.3 tem-se  $\widetilde{W}_1^\delta \subset W_1$ .

**Teorema 2.5** (Solução Global). *Suponhamos que as Hipóteses 2.1 e 2.3 sejam satisfeitas. Suponhamos também que  $y(0) \in W_1$  e  $\mathcal{E}(0) < d$ . Se  $p > 1$ , então a solução fraca  $y$  do problema (25)-(27) é uma solução global, isto é, definida em  $[0, \infty)$ . Além disso, temos*

(i)  $I(y(t)) \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)$ ,

(ii)  $y(t) \in W_1$ ,

(iii)  $E(t) \leq d\rho$ ,

(iv)  $\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq E(t)$ ,

para todo  $t \geq 0$ , com  $\rho = \frac{p+1}{p-1}$ .

**Prova:** A prova segue as idéias em [2]. Dividimos a prova em dois passos:

**Passo 1:** Inicialmente, iremos provar a invariância de  $W_1$  sob a dinâmica, isto é,  $y(t) \in W_1$  para todo  $t \in [0, T)$ , sendo  $[0, T)$  o intervalo máximo de existência.

Lembrando que

$$\int_0^t (\mathbb{F}(y), y_t)_2 \, d\tau = \int_0^L F(y(t)) \, dx - \int_0^L F(y(0)) \, dx. \quad (2.243)$$

Daí, a identidade de energia (2.119) é equivalente a

$$E(t) - \int_0^L F(y(t)) \, dx + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 \, d\tau = E(0) - \int_0^L F(y(0)) \, dx. \quad (2.244)$$

Combinando a igualdade acima com (2.175), obtemos que

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 \, d\tau = \mathcal{E}(0). \quad (2.245)$$

Como  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  são monótonas crescentes, então segue da regularidade de soluções  $y$  que

$$\mathcal{E}'(t) = -(\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 \leq 0. \quad (2.246)$$

Assim,

$$I(y(t)) \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.247)$$

Logo, obtemos o item (i) do Teorema 2.5 e conseqüentemente, provamos que  $y(t) \in W$  para todo  $t \in [0, T)$ .

Por contradição, iremos provar que  $y(t) \in W_1$  em  $[0, T)$ . Assuma que existe  $t_1 \in (0, T)$  tal que  $y(t_1) \notin W_1$ . Como  $W = W_1 \cup W_2$  e  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ , temos que  $y(t_1) \in W_2$ .

Da hipótese que  $|\nabla f_j(u, v, w)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + |w|^{p-1} + 1)$ , juntamente com o fato que  $F$  é homogênea de ordem  $p + 1$ , obtemos que função  $t \mapsto \int_0^L F(y(t)) \, dx$  é contínua em  $[0, T)$ . Portanto, como  $y(0) \in W_1$  e  $y(t_1) \in W_2$ , da definição de  $W_1$  e  $W_2$  concluímos que existe  $s \in (0, t_1)$  tal que

$$\|y(s)\|_V^2 = (p + 1) \int_0^L F(y(s)) \, dx. \quad (2.248)$$

Definimos  $t^*$  o supremo sobre todo  $s \in (0, t_1)$  satisfazendo (2.248). Claramente  $t^* \in (0, t_1)$  satisfaz (2.248) e  $y(t) \in W_2$  para todo  $t \in (t^*, t_1]$ .

Temos dois casos a considerar:

**Caso 1:** Suponha que  $y(t^*) \neq 0$ . Como  $t^*$  satisfaz (2.248), então  $y(t^*) \in \mathcal{N}$ , sendo  $\mathcal{N}$  a variedade de Nehari definida em (2.229). Assim, pelo Lema 2.10, segue que  $I(y(t^*)) \geq d$ . Como  $\mathcal{E}(t) \geq I(y(t))$  para todo  $t \in [0, T)$ , obtemos que  $\mathcal{E}(t^*) \geq d$ , o que contradiz (2.247).

**Caso 2:** Suponha que  $y(t^*) = 0$ . Como  $y(t) \in W_2$  para todo  $(t^*, t_1]$ , então por (2.223) e pela definição de  $W_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_V^2 &< (p + 1) \int_0^L F(y(t)) \, dx \leq (p + 1) \int_0^L M(|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}) \, dx \\ &= (p + 1)M \|y(t)\|_{p+1}^{p+1} \leq C \|y(t)\|_{(H_0^1(0,L))^3}^{p+1} \\ &\leq C \|y(t)\|_V^{p+1}, \quad \forall t \in (t^*, t_1]. \end{aligned} \quad (2.249)$$

Portanto,

$$\|y(t)\|_V > s_1, \quad \forall t \in (t^*, t_1] \text{ com } s_1 = C^{-\frac{1}{p-1}}. \quad (2.250)$$

Usando a continuidade de  $y \in C([0, T]; V)$ , obtemos que  $\|y(t^*)\|_V \geq s_1 > 0$ . No qual contradiz a hipótese que  $y(t^*) = 0$ .

Portanto,  $y(t) \in W_1$  para todo  $t \in [0, T]$ , provando item (ii) do Teorema 2.5.

**Passo 2:** Mostraremos que a solução fraca  $y$  é uma solução global. Por (2.247) e pela Etapa 1, tem-se  $I(y(t)) < d$  e  $y(t) \in W_1$  para todo  $[0, T]$ , e assim

$$\begin{aligned} d > I(y(t)) &= \frac{1}{2} \|y(t)\|_V^2 - \int_0^L F(y(t)) \, dx \\ &> \frac{1}{2} \|y(t)\|_V^2 - \frac{1}{p+1} \|y(t)\|_V^2 \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)} \|y(t)\|_V^2. \end{aligned} \quad (2.251)$$

Portanto,

$$\int_0^L F(y(t)) \, dx < \frac{1}{p+1} \|y(t)\|_V^2 < \frac{2d}{p-1}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.252)$$

Usando as estimativas (2.247) e (2.252) em (2.245), obtemos que

$$E(t) + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 \, d\tau = \mathcal{E}(0) + \int_0^L F(y(t)) \, dx < d + \frac{2d}{p-1} = d\rho. \quad (2.253)$$

Pela monotonicidade da função  $g_j$ , com  $j = 1, 2, 3$  e por (2.253), provamos o item (iii) do Teorema 2.5. Assim, por um argumento de continuação de soluções, concluímos que a solução fraca  $y(t)$  é de fato uma solução global e pode ser estendida para  $[0, \infty)$ .

Resta mostrar o item (iv) do Teorema 2.5. Uma vez que  $F(y)$  é uma função não-negativa, segue que  $\mathcal{E}(t) < E(t)$ , para todo  $t \in [0, \infty)$ . Por outro lado, pelo fato que  $y(t) \in W_1$  para todo  $t \in [0, \infty)$  juntamente com a definição de  $\mathcal{E}(t)$ , obtemos

$$E(t) = \frac{1}{2} \|y_t(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|y(t)\|_V^2 - \int_0^L F(y(t)) \, dx \geq E(t) - \frac{1}{p+1} \|y(t)\|_V^2 \geq \frac{1}{\rho} E(t). \quad (2.254)$$

Assim, a prova do Teorema 2.5 está completa. ■

Agora, provaremos que  $\widetilde{W}_1^\delta$  (definida em (2.242)) é invariante sob a dinâmica. Além disso, tal resultado será bem útil na obtenção do decaimento de energia.

**Proposição 2.4.** *Suponha que  $\delta > 0$  é suficientemente pequeno e  $\mathcal{E}(0) \leq J(s_0 - \delta)$ . Se  $y$  é a solução global de (25) dada pelo Teorema 2.5 e  $y_0 \in \widetilde{W}_1^\delta$ , então  $y(t) \in \widetilde{W}_1^\delta$  para todo  $t > 0$ .*

**Prova:** Como  $I(y(t)) \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)$ , pela hipótese  $\mathcal{E}(0) \leq J(s_0 - \delta)$ , obtemos  $I(y(t)) \leq J(s_0 - \delta)$  para todo  $t \geq 0$ . Iremos provar que  $\|y(t)\|_V \leq (s_0 - \delta)$  para todo  $t \geq 0$  por

contradição. Com efeito. Como  $\|y_0\|_V \leq (s_0 - \delta)$  e  $y \in C(\mathbb{R}^+; V)$ , podemos assumir por contradição que existe  $t_1 > 0$  tal que  $\|y(t_1)\|_V \leq (s_0 - \delta + \epsilon)$  para  $\epsilon \in (0, \delta)$ . Portanto, por (2.235), obtemos que  $I(y(t_1)) > J(s_0 - \delta + \epsilon) > J(s_0 - \delta)$  desde que  $J(t)$  é estritamente crescente em  $(0, s_0)$ . No entanto, isto contradiz o fato de que  $I(y(t)) \leq J(s_0 - \delta)$  para todo  $t \geq 0$ . A prova está completa. ■

## 2.6 Blow-up de soluções do poço potencial

Nesta seção, investigamos o blow-up de soluções fracas provenientes do poço potencial com energia total inicial  $\mathcal{E}(0) \geq 0$ . É importante notar que o resultado do blow-up no Teorema 2.4 trata do caso da energia total inicial  $\mathcal{E}(0) < 0$  para soluções fracas gerais (não necessariamente soluções provindas do poço potencial).

Consideramos as seguintes hipóteses:

**Hipótese 2.4** (Para blow-up).

(i) **Damping:** Suponha que existem  $\alpha, \beta > 0$  tais que para todo  $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha|s|^{m+1} &\leq g_1(s)s \leq \beta|s|^{m+1}, & \text{com } m \geq 1, \\ \alpha|s|^{r+1} &\leq g_2(s)s \leq \beta|s|^{r+1}, & \text{com } r \geq 1, \\ \alpha|s|^{l+1} &\leq g_3(s)s \leq \beta|s|^{l+1}, & \text{com } l \geq 1. \end{aligned}$$

(ii) **Fontes:** Suponha que

$$F(y) \leq \alpha_0(|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}), \quad \text{para algum } \alpha_0 \geq 0.$$

Inicialmente, mostraremos que  $W_2$  é invariante sob a dinâmica de (25). Mais precisamente, temos o seguinte lema.

**Lema 2.5.** Além das Hipóteses 2.1 e 2.3 com  $p > 1$ , suponha que  $y(0) \in W_2$  e  $\mathcal{E}(0) < d$ , então a solução fraca  $y(t) \in W_2$  para todo  $t \in [0, T)$ ,

$$\|y(t)\|_V^2 > 2\rho d, \quad \text{para todo } t \in [0, T) \quad \text{com } \rho := \frac{p+1}{p-1}, \quad (2.255)$$

e  $[0, T)$  é o intervalo maximal de existência.

**Prova: Passo 1.** Seja  $y(0) \in W_2$ . Afirmamos que  $y(t) \in W_2$  para todo  $t \in [0, T)$ . De fato, procedendo por contradição, assuma que existe  $t_0 \in [0, T)$  tal que  $y(t_0) \notin W_2$ , então pela definição de  $W_2$  temos que

$$\|y(t)\|_V^2 \geq (p+1) \int_0^L F(y(t_0)) dx.$$

Como  $y \in C([0, T]; V)$  e, por hipótese,  $y(0) \in W_2$ , existe  $s \in (0, t_0]$  tal que

$$\|y(s)\|_V^2 = (p+1) \int_0^L F(y(s)) dx. \quad (2.256)$$

Defina  $t^*$  como o infimo de todo  $s \in (0, t_0]$  satisfazendo (2.256). Note que  $y \in C([0, T]; V)$  garante a existência de  $t^* \in (0, t_0]$  satisfazendo (2.256) e  $y(t) \in W_2$  para todo  $t \in [0, t^*)$ . Agora, temos dois casos a considerar:

**Caso 1.** Suponha que  $\|y(t^*)\|_V \neq 0$ . Como  $t^*$  satisfaz (2.256), obtemos que  $y(t^*) \in \mathcal{N}$  (pela definição da Variedade de Nehari em (2.229)) e pelo Lema 2.4 sabemos que  $I(y(t^*)) \geq d$ . Daí, por (2.226) temos que  $\mathcal{E}(t^*) \geq d$ , contradizendo o fato que a energia total  $\mathcal{E}$  é decrescente, isto é,  $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d$  para todo  $t \in (0, T]$ .

**Caso 2.** Suponha que  $\|y(t^*)\|_V = 0$ . Como  $y(t) \in W_2$  para todo  $[0, t^*)$ , usando um argumento similar ao que foi feito em (2.249) e (2.250), obtemos  $\|y(t)\|_V > s_1$  para todo  $[0, t^*)$  e algum  $s_1 > 0$ . Pela continuidade da solução fraca  $y(t)$ , obtemos que  $\|y(t^*)\|_V > s_1 > 0$ , contradizendo a hipótese que  $\|y(t^*)\|_V = 0$ .

Logo, pelos casos 1 e 2, concluímos que  $y(t) \in W_2$  para todo  $t \in [0, T]$ .

**Passo 2.** Resta mostrar a desigualdade (2.255). Seja  $y(t) \in W_2$  fixado. Pela Hipótese 2.3, temos que

$$I(\lambda y) = \|\lambda y\|_V^2 - \int_0^L F(\lambda y) dx = \frac{\lambda^2}{2} \|y\|_V^2 - \lambda^{p+1} \int_0^L F(y) dx. \quad (2.257)$$

Dessa forma,

$$\frac{d}{d\lambda} I(\lambda y) = \lambda \|y\|_V^2 - (p+1) \int_0^L \lambda^p F(y) dx. \quad (2.258)$$

Portanto, a aplicação  $\lambda \mapsto I(\lambda y)$  possui um único ponto crítico  $\lambda_0$  que satisfaz

$$\frac{d}{d\lambda_0} I(\lambda_0 y) = 0 \Rightarrow \|y\|_V^2 = (p+1) \lambda_0^{p-1} \int_0^L F(y) dx. \quad (2.259)$$

Como  $y \in W_2$ , então  $\lambda_0 < 1$ . Além disso, como a função  $\lambda \mapsto I(\lambda y)$  atinge o máximo absoluto sobre o eixo positivo em seu ponto crítico  $\lambda = \lambda_0$ . Assim, por (2.230) e (2.259), segue que

$$\begin{aligned} d &\leq \sup_{\lambda \geq 0} I(\lambda y) = I(\lambda_0 y) \\ &= \frac{\lambda_0^2}{2} \|y\|_V^2 - \lambda_0^{p+1} \int_0^L F(y) dx \\ &= \frac{\lambda_0^2}{2} \|y\|_V^2 - \lambda_0^{p+1} \left( \frac{1}{(p+1) \lambda_0^{p-1}} \|y\|_V^2 \right) \\ &= \frac{\lambda_0^2 (p-1)}{2 (p+1)} \|y\|_V^2. \end{aligned} \quad (2.260)$$

Como  $\lambda_0 < 1$  e  $\rho = (p + 1)/(p - 1)$ , segue de (2.260) que  $\|y(t)\|_V^2 > 2\rho d$ . Completando a prova do Lema 2.5. ■

**Teorema 2.6** (Blow-up em tempo finito). *Suponhamos que as hipóteses 2.1, 2.3 e 2.4 sejam satisfeitas. Além disso, suponhamos que  $p > \max\{m, r, l\}$ ,  $0 \leq \mathcal{E}(0) < d$ , e  $y(0) \in W_2$ , então a solução fraca  $y$  dada no Teorema 2.1 possui blow-up em tempo finito, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow T^-} E(t) = \infty$ , para algum  $T < \infty$ .*

**Prova:** Para mostrar que o intervalo maximal de existência  $T$  é necessariamente finito, argumentaremos por contradição. Sendo assim, assumamos que a solução fraca  $y(t)$  pode ser estendida ao intervalo  $[0, \infty)$ , então o Lema 2.5 afirma que  $y(t) \in W_2$  para todo  $t \in [0, \infty)$ , isto é,

$$\|y(t)\|_V^2 < (p + 1) \int_0^L F(y) dx, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.261)$$

Além disso, pela hipótese  $0 \leq \mathcal{E}(0) < d$ , a energia  $\mathcal{E}(t)$  permanece não-negativa e satisfazendo

$$0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.262)$$

De fato. Assumamos por contradição que  $\mathcal{E}(t_0) < 0$  para algum  $t \in (0, \infty)$ . Então, o resultado de blow-up obtido no Teorema 2.4 afirma que  $\|y(t)\|_V \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow T^{-1}$ , para algum  $0 < T < \infty$ , ou seja, a solução fraca  $y(t)$  sofre blow-up em tempo finito, contradizendo as nossas hipóteses. Portanto, concluímos que a energia total  $\mathcal{E}(t)$  permanece não-negativa para todos  $t \geq 0$ .

Agora, defina

$$N(t) = \|y(t)\|_H^2, \quad S(t) = \int_0^L F(y(t)) dx \geq 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (2.263)$$

**Passo 1.** Inicialmente, mostraremos que  $N(t)$  possui um crescimento quadrático quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim, como na prova do Teorema 2.4, temos que

$$N''(t) = 2\|y_t\|_H^2 - 2\|y\|_V^2 - 2(\mathbb{G}(y_t), y)_2 + 2(p + 1) \int_0^L F(y) dx \quad \text{q.s. em } [0, \infty). \quad (2.264)$$

Lembrando que pela Hipótese 2.3

$$(\mathbb{F}(y), y)_2 = \int_0^L (p + 1)F(y) dx.$$

Agora, pela hipótese  $|g_1(s)| \leq \beta|s|^m$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  e pela Desigualdade de Hölder com os conjugados  $m + 1$  e  $(m + 1)/m$ , obtemos

$$\left| \int_0^L g_1(u_t(t))u(t) dx \right| \leq \beta \int_0^L |u(t)||u_t(t)|^m dx \leq \beta \|u(t)\|_{m+1} \|u_t(t)\|_{m+1}^m. \quad (2.265)$$



Como  $1 \leq \max\{m, r, l\} < p$  e usando uma estimativa padrão de interpolação, temos

$$\|u(t)\|_{m+1} \leq \|u(t)\|_2^\theta \|u(t)\|_{p+1}^{1-\theta}, \quad (2.266)$$

com  $\theta$  satisfazendo  $\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{p+1} = \frac{1}{m+1}$ . Pela imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$  para todo  $q \geq 1$ , o fato que a norma  $\|\cdot\|_V$  é equivalente a norma usual do espaço  $V$  e da definição de  $S(t)$  em (2.263), obtemos

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C\|u(t)\|_{H_0^1(0,L)}^2 \leq C\|y(t)\|_V^2 \leq CS(t) \quad (2.267)$$

e, além disso, usando a hipótese:  $F(y) \leq \alpha_0(|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1})$ , obtemos

$$S(t) = \int_0^L F(y(t)) dx \leq \alpha_0 \|y(t)\|_{p+1}^{p+1}.$$

Logo,

$$\|u(t)\|_{p+1}^{p+1} \leq C\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} \leq CS(t). \quad (2.268)$$

Segue de (2.265)-(2.268) que

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_0^L g_1(u_t(t))u(t) dx \right| &\leq C\|u(t)\|_2^\theta \|u(t)\|_{p+1}^{1-\theta} \|u_t(t)\|_{m+1}^m, \\ &\leq CS(t)^{\frac{\theta}{2}} S(t)^{\frac{1-\theta}{p+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \\ &\leq CS(t)^{\frac{1}{m+1}} \|u_t(t)\|_{m+1}^m \end{aligned} \quad (2.269)$$

com  $\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{p+1} = \frac{1}{m+1}$ . Usando a Desigualdade de Young em (2.269), temos

$$\left| 2 \int_0^L g_1(u_t(t))u(t) dx \right| \leq \epsilon S(t) + C_\epsilon \|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1}. \quad (2.270)$$

Similarmente,

$$\left| 2 \int_0^L g_2(v_t(t))v(t) dx \right| \leq \epsilon S(t) + C_\epsilon \|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1} \quad (2.271)$$

e

$$\left| 2 \int_0^L g_3(w_t(t))w(t) dx \right| \leq \epsilon S(t) + C_\epsilon \|w_t(t)\|_{l+1}^{l+1}. \quad (2.272)$$

Agora, definimos

$$K(t) := \|y(t)\|_V^2 - (p+1) \int_0^L F(y) dx. \quad (2.273)$$

Segue de (2.264) e (2.270)-(2.272) que

$$N''(t) \geq 2\|y_t\|_H^2 - 2K(t) - 2\epsilon S(t) - C_\epsilon (\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t(t)\|_{l+1}^{l+1}). \quad (2.274)$$

Seja  $\delta > 0$ , definido abaixo. Como  $0 \leq \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) < d$ , temos  $K(t) \leq K(0) + \delta(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(t))$ . Portanto, por (2.263), obtemos que

$$\begin{aligned} K(t) &\leq \|y(t)\|_V^2 - (p+1) \int_0^L F(y) dx + \delta\mathcal{E}(0) - \delta\mathcal{E}(t) \\ &= \|y(t)\|_V^2 - (p+1)S(t) + \delta\mathcal{E}(0) - \delta \left( \frac{1}{2}\|y(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|y_t(t)\|_H^2 + S(t) \right) \\ &= \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \|y(t)\|_V^2 + (\delta - p - 1)S(t) + \delta\mathcal{E}(0) - \frac{\delta}{2}\|y_t(t)\|_H^2. \end{aligned} \quad (2.275)$$

Aplicando a estimativa (2.275) em (2.274), tem-se

$$\begin{aligned} N''(t) &\geq (\delta + 2)\|y_t\|_H^2 + 2(p+1 - \delta - \epsilon)S(t) - 2\delta\mathcal{E}(0) + \\ &\quad + (\delta - 2)\|y(t)\|_V^2 - C_\epsilon(\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t(t)\|_{l+1}^{l+1}). \end{aligned} \quad (2.276)$$

Escolha  $\delta$  tal que

$$2 < \frac{2d(p+1)}{d(p+1) - (p-1)\mathcal{E}(0)} < \delta < p+1. \quad (2.277)$$

A escolha de  $\delta$  é possível devido à hipótese  $\mathcal{E}(0) < d$ . Por (2.255) e pela escolha de  $\delta$ , temos

$$\begin{aligned} (\delta - 2)\|y(t)\|_V^2 - 2\delta\mathcal{E}(0) &> 2d(\delta - 2)\frac{p+1}{p-1} - 2\delta\mathcal{E}(0) \\ &= \frac{2\delta[d(p+1) - (p-1)\mathcal{E}(0)] - 4d(p+1)}{p-1} > 0. \end{aligned} \quad (2.278)$$

Agora, escolha  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$A := 2(p+1 - \delta - \epsilon) > 0.$$

Segue de (2.276) e (2.278) que

$$N''(t) + C_\epsilon(\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t(t)\|_{l+1}^{l+1}) \geq AS(t). \quad (2.279)$$

Observe que por (2.255), (2.261), temos que

$$AS(t) = A \int_0^L F(y) dx > \frac{A}{p+1} \|y(t)\|_V^2 > \frac{A}{p+1} 2\rho d = 2\frac{dA}{p-1} =: 2B > 0.$$

Logo, segue de (2.279) que

$$N''(t) + C_\epsilon(\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t(t)\|_{l+1}^{l+1}) > 2B > 0. \quad (2.280)$$

Integrando (2.280) de 0 a t, obtemos

$$N'(t) + C_\epsilon \int_0^t (\|u_t(\tau)\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t(\tau)\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t(\tau)\|_{l+1}^{l+1}) d\tau > 2Bt - N'(0). \quad (2.281)$$

Note que, pela Hipótese 2.4, por (2.245) e (2.247), temos

$$\begin{aligned} & C_\epsilon \int_0^t (\|u_t(t)\|_{m+1}^{m+1} + \|v_t(t)\|_{r+1}^{r+1} + \|w_t(t)\|_{l+1}^{l+1}) d\tau \\ & \leq C \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau = C(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(t)) < Cd, \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (2.282)$$

Combinando (2.281) e (2.282), conseguimos

$$N'(t) > 2Bt + N'(0) - Cd, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.283)$$

Integrando (2.283), temos

$$N(t) > Bt^2 + (N'(0) - Cd)t - N(0), \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.284)$$

Portanto,  $N(t)$  possui um crescimento quadrático quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Passo 2.** Agora, vamos estimar  $N(t)$  diretamente. Observe que

$$\|u(t)\|_2^2 = \int_0^L \left| u(0) - \int_0^t u_t(\tau) d\tau \right|^2 dx \leq 2\|u(0)\|_2^2 + 2t \int_0^t \int_0^L |u_t(\tau)|^2 dx d\tau. \quad (2.285)$$

Analogamente,

$$\|v(t)\|_2^2 = \int_0^L \left| v(0) - \int_0^t v_t(\tau) d\tau \right|^2 dx \leq 2\|v(0)\|_2^2 + 2t \int_0^t \int_0^L |v_t(\tau)|^2 dx d\tau. \quad (2.286)$$

e

$$\|w(t)\|_2^2 = \int_0^L \left| w(0) - \int_0^t w_t(\tau) d\tau \right|^2 dx \leq 2\|w(0)\|_2^2 + 2t \int_0^t \int_0^L |w_t(\tau)|^2 dx d\tau. \quad (2.287)$$

Portanto, de (2.285)-(2.287), segue que

$$\begin{aligned} N(t) &= \|y(t)\|_H^2 = \rho_1 \|u(t)\|_2^2 + \rho_2 \|v(t)\|_2^2 + \rho_3 \|w(t)\|_2^2 \\ &\leq 2(\rho_1 \|u(0)\|_2^2 + \rho_2 \|v(0)\|_2^2 + \rho_3 \|w(0)\|_2^2) + \\ &\quad + 2t \int_0^t \int_0^L (\rho_1 |u_t(\tau)|^2 + \rho_2 |v_t(\tau)|^2 + \rho_3 |w_t(\tau)|^2) dx d\tau \\ &= 2\|y(0)\|_H^2 + 2t \int_0^t \int_0^L (\rho_1 |u_t(\tau)|^2 + \rho_2 |v_t(\tau)|^2 + \rho_3 |w_t(\tau)|^2) dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.288)$$

Pela desigualdade de Hölder e por (2.282), temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^L |u_t(\tau)|^2 dx d\tau &\leq \left( \int_0^t \int_0^L dx d\tau \right)^{\frac{m-1}{m+1}} \left( \int_0^t \int_0^L |u_t(\tau)|^{m+1} dx d\tau \right)^{\frac{2}{m+1}} \\ &= (tL)^{\frac{m-1}{m+1}} \left( \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{m+1}^{m+1} d\tau \right)^{\frac{2}{m+1}} \\ &\leq C_\epsilon d^{\frac{2}{m+1}} t^{\frac{m-1}{m+1}}. \end{aligned} \quad (2.289)$$

Similarmente, temos

$$\int_0^t \int_0^L |v_t(\tau)|^2 dx d\tau \leq C_\epsilon d^{\frac{2}{r+1}} t^{\frac{r-1}{r+1}}, \quad (2.290)$$

e

$$\int_0^t \int_0^L |w_t(\tau)|^2 dx d\tau \leq C_\epsilon d^{\frac{2}{l+1}} t^{\frac{l-1}{l+1}}. \quad (2.291)$$

Fazendo  $C_1 = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} > 0$ . Segue de (2.288)-(2.291) que

$$N(t) \leq 2\|y(0)\|_H^2 + 2C_\epsilon C_1 (d^{\frac{2}{m+1}} t^{\frac{2m}{m+1}} + d^{\frac{2}{r+1}} t^{\frac{2r}{r+1}} + d^{\frac{2}{l+1}} t^{\frac{2l}{l+1}}), \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.292)$$

Como  $\frac{2m}{m+1}, \frac{2r}{r+1}, \frac{2l}{l+1} < 2$ , então (2.292) contradiz o crescimento quadrático de  $N(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$  como foi mostrado na **Passo 1**. Portanto, concluímos que a solução fraca  $y(t)$  não pode ser estendida para todo intervalo  $[0, \infty)$ , completando a prova do Teorema 2.6. ■

# Capítulo 3

## Taxas de decaimento da energia

Nesta seção, investigamos as taxas de decaimento da energia para a solução global obtida pelo Teorema 2.5.

Definimos

$$G(t) = \int_0^t (\mathbb{G}(y_t), y_t)_2 d\tau. \quad (3.1)$$

Pela monotonicidade de  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$ , segue que  $G(t) \geq 0$  e a identidade de energia (2.245) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{E}(t) + G(t) = \mathcal{E}(0). \quad (3.2)$$

Provaremos que  $\mathcal{E}(t)$  decai como a solução para uma EDO da forma

$$S'(t) + Q(S(t)) = 0, \quad S(0) = \mathcal{E}(0), \quad (3.3)$$

sendo  $Q$  uma função dada por  $Q = (\mathcal{I} + \tilde{C}_T(1 + C_T)\Phi)^{-1}$  para uma certa função  $\Phi$  côncava, crescente e que se anula na origem.

Procedendo como em [54, 55]. Seja  $\phi_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  uma função contínua, zero na origem, crescente, côncava na origem, tal que

$$\phi_j(g_j(s)s) \geq |g_j(s)|^2 + s^2, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Definimos  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  por

$$\Phi(s) := \phi_1(s) + \phi_2(s) + \phi_3(s) + s, \quad s \geq 0. \quad (3.5)$$

Observe que as funções  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  podem ser sempre construídas se satisfizerem as propriedades (3.4)-(3.5). Para ver isto, lembramos que  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  são funções monótonas crescentes. Suponha que  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$  são limitadas acima e abaixo por funções lineares ou superlineares próximo a origem, isto é, para todo  $|s| < 1$

$$c_1|s|^m \leq |g_1(s)| \leq c_2|s|^m, \quad c_3|s|^r \leq |g_2(s)| \leq c_4|s|^r, \quad c_5|s|^l \leq |g_3(s)| \leq c_6|s|^l, \quad (3.6)$$

com  $m, r, l \geq 1$  e  $c_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Definimos

$$\phi_1(s) = c_1^{-\frac{2}{m+1}}(1 + c_2^2)s^{\frac{2}{m+1}}, \quad \phi_2(s) = c_3^{-\frac{2}{r+1}}(1 + c_4^2)s^{\frac{2}{r+1}}, \quad \phi_3(s) = c_5^{-\frac{2}{l+1}}(1 + c_6^2)s^{\frac{2}{l+1}}. \quad (3.7)$$

Note que as funções em (3.7) satisfazem (3.4). De fato, considere  $\phi_1$ , por exemplo:

$$\begin{aligned} \phi_1(g_1(s)s) &= c_1^{-\frac{2}{m+1}}(1 + c_2^2)(g_1(s)s)^{\frac{2}{m+1}} \geq c_1^{-\frac{2}{m+1}}(1 + c_2^2)(c_1|s|^{m+1})^{\frac{2}{m+1}} \\ &= (1 + c_2^2)|s|^2 \geq s^2 + (c_2|s|^m)^2 \geq s^2 + |g_1(s)|^2, \quad \forall |s| < 1. \end{aligned}$$

Em particular, observamos que, se  $g_1, g_2$  e  $g_3$  são linearmente limitados perto da origem (Veja a Definição 1.9), então por (3.7) as funções  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  são lineares.

Por outro lado, se o damping for limitado por funções sublineares próximas à origem, isto é,

$$c_1|s|^{\theta_1} \leq |g_1(s)| \leq c_2|s|^{\theta_1}, \quad c_3|s|^{\theta_2} \leq |g_2(s)| \leq c_4|s|^{\theta_2}, \quad c_5|s|^{\theta_3} \leq |g_3(s)| \leq c_6|s|^{\theta_3}, \quad (3.8)$$

para todo  $|s| < 1$  com  $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$  e  $c_i > 0, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , então podemos fazer

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= c_1^{-\frac{2\theta_1}{\theta_1+1}}(1 + c_2^2)s^{\frac{2\theta_1}{\theta_1+1}}, \quad \phi_2(s) = c_3^{-\frac{2\theta_2}{\theta_2+1}}(1 + c_4^2)s^{\frac{2\theta_2}{\theta_2+1}}, \\ \phi_3(s) &= c_5^{-\frac{2\theta_3}{\theta_3+1}}(1 + c_6^2)s^{\frac{2\theta_3}{\theta_3+1}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Resumindo, por (3.7) e (3.9), existem constantes  $C_1, C_2, C_3 > 0$  tais que

$$\phi_1(s) = C_1s^{\xi_1}, \quad \phi_2(s) = C_2s^{\xi_2}, \quad \phi_3(s) = C_3s^{\xi_3}, \quad (3.10)$$

com

$$\xi_1 = \frac{2}{m+1} \text{ ou } \frac{2\theta_1}{\theta_1+1}, \quad \xi_2 = \frac{2}{r+1} \text{ ou } \frac{2\theta_2}{\theta_2+1}, \quad \xi_3 = \frac{2}{l+1} \text{ ou } \frac{2\theta_3}{\theta_3+1}, \quad (3.11)$$

dependendo das taxas de crescimento de  $g_1, g_2$  e  $g_3$  perto da origem, que são especificadas em (3.6) e (3.8), respectivamente.

Agora, definimos

$$a = \max \left\{ \frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3} \right\}. \quad (3.12)$$

Observe que se pelo menos uma das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$  não estiverem linearmente limitadas próximo à origem, então  $a > 1$  e neste caso, definiremos

$$b := \frac{1}{a-1} > 0. \quad (3.13)$$

### 3.1 Desigualdade de estabilidade perturbada

**Proposição 3.1.** *Sob as Hipóteses 2.1 e 2.3, assuma que  $p > 1$ ,  $y_0 \in W_1$  e  $\mathcal{E}(0) < d$ . Então a solução global  $y$  de (25)-(27) dada pelo Teorema 2.5 satisfaz*

$$\mathcal{E}(T) \leq \tilde{C}_T \left[ \Phi(G(t)) + \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2 \right], \quad \forall T > 0, \quad (3.14)$$

sendo  $\Phi$  dada em (3.5) e  $\tilde{C}_T = C_{\rho, L, T}(1 + (\mathcal{E}(0))^{p-1})$ .

**Prova:** Seja  $T > 0$  fixado. Usando o fato que  $y \in C([0, T]; V)$  e a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$  para todo  $q \geq 1$ , temos que  $y$  satisfaz as condições de regularidade das funções teste dada pela Definição 2.1. Assim, substituindo  $\psi$  por  $y$  em (2.14), obtemos

$$(y_t(t), y(t))_H|_0^T + \int_0^T (\|y\|_V^2 - \|y_t\|_H^2) dt + \int_0^T (\mathbb{G}(y_t), y)_2 dt = \int_0^T (\mathbb{F}(y), y)_2 dt,$$

isto é,

$$\int_0^T \|y\|_V^2 dt = \int_0^T (\mathbb{F}(y), y)_2 dt + \int_0^T \|y_t\|_H^2 dt - (y_t(t), y(t))_H|_0^T - \int_0^T (\mathbb{G}(y_t), y)_2 dt. \quad (3.15)$$

Segue de (2.79) e (3.15) que

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T |(\mathbb{F}(y), y)_2| dt + \frac{1}{2} \int_0^T |(\mathbb{G}(y_t), y)_2| dt \\ &\quad + \frac{1}{2} |-(y_t(T), y(T))_H + (y_t(0), y(0))_H| + \int_0^T \|y_t\|_H^2 dt. \end{aligned}$$

Usando (2.246) e (2.248), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T |(\mathbb{F}(y), y)_2| dt &= \int_0^T \int_0^L |uf_1(y) + vf_2(y) + wf_3(y)| dx dt \\ &= (p+1) \int_0^T \int_0^L |F(y)| dx dt \\ &\leq M(p+1) \int_0^T \int_0^L (|u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}) dx dt \\ &\leq M(p+1) \int_0^T (\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} + \|w\|_{p+1}^{p+1}) dt \\ &\leq M(p+1) \int_0^T \|y\|_{p+1}^{p+1} dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt &\leq \frac{1}{2} |-(y_t(T), y(T))_H + (y_t(0), y(0))_H| + \int_0^T \|y_t\|_H^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T |(\mathbb{G}(y_t), y)_2| dt + M(p+1) \int_0^T \|y\|_{p+1}^{p+1} dt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Agora, vamos estimar cada termo do lado direito de (3.16).

**Estimativas para o termo:**

$$| - (y_t(T), y(T))_H + (y_t(0), y(0))_H |.$$

Temos que

$$\begin{aligned} & | - (y_t(T), y(T))_H + (y_t(0), y(0))_H | \\ & \leq |(y_t(T), y(T))_H| + |(y_t(0), y(0))_H| \\ & \leq \|y_t(T)\|_H \|y(T)\|_H + \|y_t(0)\|_H \|y(0)\|_H \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} \|y_t(T)\|_H^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|y(T)\|_H^2 + \frac{\epsilon}{2} \|y_t(0)\|_H^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|y(0)\|_H^2 \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} (\|y_t(T)\|_H^2 + \|y_t(0)\|_H^2) + \frac{1}{2\epsilon} (\|y(T)\|_H^2 + \|y(0)\|_H^2) \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} (2E(T) + 2E(0)) + \frac{1}{\epsilon} \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2 \\ & = \epsilon(E(T) + E(0)) + \frac{1}{\epsilon} \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Combinando o item (iv) do Teorema 2.5 e (3.2) em (3.17), obtemos

$$\begin{aligned} | - (y_t(T), y(T))_H + (y_t(0), y(0))_H | & \leq \rho\epsilon(\mathcal{E}(T) + \mathcal{E}(0)) + \frac{1}{\epsilon} \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2 \\ & \leq \rho\epsilon(2\mathcal{E}(T) + G(T)) + \frac{1}{\epsilon} \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

**Estimativas para o termo:**

$$\int_0^T \|y\|_{p+1}^{p+1} dt.$$

Pela imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^q(0, L)$ ,  $q \geq 1$  e pela equivalência de normas (2.11), obtemos

$$\|u\|_{2p}^{2p} \leq C \|u\|_{H_0^1(0, L)}^{2p} \leq C\rho_1 \|y\|_V^{2p}. \tag{3.19}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|u\|_{p+1}^{p+1} & = \int_0^L |u|^p |u| dx \leq \|u\|_{2p}^p \|u\|_2 \leq \epsilon_0 \|u\|_{2p}^{2p} + \frac{1}{6\epsilon_0} \|u\|_2^2 \\ & \leq \epsilon_0 \rho_1 C \|y\|_V^{2p} + \frac{1}{6\epsilon_0} \|u\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pelos itens (i) e (iv) do Teorema 2.5, temos que

$$\|u\|_V^2 \leq 2E(t) \leq 2\rho\mathcal{E}(t) \leq 2\rho\mathcal{E}(0). \tag{3.21}$$



Segue de (3.20) e (3.21) que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{p+1}^{p+1} &\leq \epsilon_0 \rho_1 C (2E(t))^p + \frac{1}{6\epsilon_0} \|u\|_2^2 \\
&\leq \epsilon_0 \rho_1 C (2E(t))^{p-1} E(t) + \frac{1}{6\epsilon_0} \|u\|_2^2 \\
&\leq \epsilon_0 \rho_1 C (2\rho\mathcal{E}(0))^{p-1} E(t) + \frac{1}{6\epsilon_0} \|u\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Para cada  $\epsilon_0 > 0$ , se escolhermos  $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{3\rho_1 C (2\rho\mathcal{E}(0))^{p-1}}$ , segue de (3.22) que

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{\epsilon}{3} E(t) + C_{\epsilon,\rho} (\mathcal{E}(0))^{p-1} \rho_1 \|u\|_2^2. \tag{3.23}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}
\|v\|_{p+1}^{p+1} &\leq \frac{\epsilon}{3} E(t) + C_{\epsilon,\rho} (\mathcal{E}(0))^{p-1} \rho_2 \|v\|_2^2, \text{ e} \\
\|w\|_{p+1}^{p+1} &\leq \frac{\epsilon}{3} E(t) + C_{\epsilon,\rho} (\mathcal{E}(0))^{p-1} \rho_3 \|w\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Portanto, por (3.23) e (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|y\|_{p+1}^{p+1} dt &= \int_0^T (\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} + \|w\|_{p+1}^{p+1}) dt \\
&\leq \epsilon \int_0^T E(t) dt + \int_0^T C_{\epsilon,\rho} (\mathcal{E}(0))^{p-1} \|y\|_H^2 dt \\
&\leq \epsilon \int_0^T E(t) dt + C_{\epsilon,\rho} (\mathcal{E}(0))^{p-1} T \sup_{s \in [0,T]} \|y(s)\|_H^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

**Estimativas para o termo:**

$$\int_0^T \|y_t\|_H^2 dt.$$

Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned}
A &:= \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T) : |y_t(x, t)| < 1\}, \\
B &:= \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T) : |y_t(x, t)| \geq 1\}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Pela Hipótese 2.1, temos que  $g_1(s)s > \alpha|s|^{m+1}$  para  $|s| \geq 1$ . Usando (3.4), as hipóteses sobre  $\phi_1$  e a desigualdade de Jensen, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \rho_1 \|u_t\|_2^2 dt &= \rho_1 \int_A |u_t|^2 dxdt + \rho_1 \int_B |u_t|^2 dxdt \\
&\leq \int_A \rho_1 \phi_1(g_1(u_t)u_t) dxdt + \frac{\rho_1}{\alpha} \int_B g_1(u_t)u_t dxdt \\
&\leq \max\{1, TL\} \rho_1 \phi_1 \left( \int_0^T \int_0^L g_1(u_t)u_t dxdt \right) \\
&\quad + \frac{\rho_1}{\alpha} \int_0^T \int_0^L g_1(u_t)u_t dxdt.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho_2 \|v_t\|_2^2 dt &\leq \max\{1, TL\} \rho_2 \phi_2 \left( \int_0^T \int_0^L g_2(v_t) v_t dx dt \right) \\ &\quad + \frac{\rho_2}{\alpha} \int_0^T \int_0^L g_2(v_t) v_t dx dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho_3 \|w_t\|_2^2 dt &\leq \max\{1, TL\} \rho_3 \phi_3 \left( \int_0^T \int_0^L g_3(w_t) w_t dx dt \right) \\ &\quad + \frac{\rho_3}{\alpha} \int_0^T \int_0^L g_3(w_t) w_t dx dt. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Seja  $C(T, L) = 1 + TL + \frac{1}{\alpha} C_1$  com  $C_1 = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ . Por (3.28)-(3.29) e pela definição de  $\Phi$ , concluímos que

$$\int_0^T \|y_t\|_H^2 dt \leq \max\{1, TL\} \Phi(G(T)) + \frac{1}{\alpha} C_1 G(T) \leq C(T, L) \Phi(G(T)). \quad (3.30)$$

**Estimativas para o termo:**

$$\int_0^T |(\mathbb{G}(y_t), y)_2| dt.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |g_1(u_t) u| dx dt &= \int_A |g_1(u_t) u| dx dt + \int_B |g_1(u_t) u| dx dt \\ &\leq \left( \int_0^T \|u\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_A |g_1(u_t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} + \int_B |g_1(u_t) u| dx dt \\ &\leq \epsilon \int_0^T \|u\|_V^2 dt + C_\epsilon \int_A |g_1(u_t)|^2 dx dt + \int_B |g_1(u_t) u| dx dt \\ &\leq \epsilon \int_0^T E(t) dt + C_\epsilon \int_A |g_1(u_t)|^2 dx dt + \int_B |g_1(u_t) u| dx dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Por (3.4) e pela desigualdade de Jensen, temos que

$$\begin{aligned} \int_A |g_1(u_t)|^2 dx dt &\leq \int_A \phi_1(g_1(u_t) u_t) dx dt \\ &\leq \max\{1, TL\} \phi_1 \left( \int_0^T \int_0^L g_1(u_t) u_t dx dt \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, vamos estimar o termo restante de (3.31). Pela Hipótese 2.1, temos que  $|g_1(s)| \leq \beta |s|^m$  para  $|s| \geq 1$ . Portanto, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_B |g_1(u_t) u| dx dt &\leq \left( \int_B |u|^{m+1} dx dt \right)^{\frac{1}{m+1}} \left( \int_B |g_1(u_t)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt \right)^{\frac{m}{m+1}} \\ &\leq \beta^{\frac{1}{m+1}} \left( \int_0^T \|u\|_{m+1}^{m+1} dt \right)^{\frac{1}{m+1}} \left( \int_B |g_1(u_t)| |u_t| dx dt \right)^{\frac{m}{m+1}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Usando a desigualdade  $E(t) \leq d\rho$  para todo  $t \geq 0$  (item (iii) do Teorema 2.5), segue que

$$\int_0^T \|u\|_{m+1}^{m+1} dt \leq C \int_0^T \|u\|_{(H_0^1(0,L))^3}^{m+1} dt \leq C \int_0^T E(t)^{\frac{m+1}{2}} dt \leq C \int_0^T E(t) dt. \quad (3.34)$$

Combinando (3.33) e (3.34), conseguimos

$$\begin{aligned} \int_B |g_1(u_t)u| dxdt &\leq C \left( \int_0^T E(t) dt \right)^{\frac{1}{m+1}} \left( \int_B g_1(u_t)u_t dxdt \right)^{\frac{m}{m+1}} \\ &\leq \epsilon \int_0^T E(t) dt + C_\epsilon \int_B g_1(u_t)u_t dxdt. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Aplicando as estimativas (3.32) e (3.35) em (3.31), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |g_1(u_t)u| dxdt &\leq 2\epsilon \int_0^T E(t) dt + C_\epsilon \max\{1, TL\} \phi_1 \left( \int_0^T \int_0^L g_1(u_t)u_t dxdt \right) \\ &\quad + C_\epsilon \int_B g_1(u_t)u_t dxdt. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |g_2(v_t)v| dxdt &\leq 2\epsilon \int_0^T E(t) dt + C_\epsilon \max\{1, TL\} \phi_2 \left( \int_0^T \int_0^L g_2(v_t)v_t dxdt \right) \\ &\quad + C_\epsilon \int_B g_2(v_t)v_t dxdt \end{aligned} \quad (3.37)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |g_3(w_t)w| dxdt &\leq 2\epsilon \int_0^T E(t) dt + C_\epsilon \max\{1, TL\} \phi_3 \left( \int_0^T \int_0^L g_3(w_t)w_t dxdt \right) \\ &\quad + C_\epsilon \int_B g_3(w_t)w_t dxdt. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Assim, por (3.36)-(3.38) e como  $s \leq \Phi(s)$  para todo  $s \geq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T |(\mathbb{G}(y_t), y)_2| dt &\leq 6\epsilon \int_0^T E(t) dt + C_\epsilon \max\{1, TL\} \Phi(G(T)) + C_\epsilon G(T) \\ &\leq 6\epsilon \int_0^T E(t) dt + C(\epsilon, L, T) \Phi(G(T)). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pelas estimativas (3.18), (3.25), (3.30) e (3.39) em (3.16), concluimos que

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt &\leq 4\epsilon \int_0^T E(t) dt + \frac{\rho\epsilon}{2} (2\mathcal{E}(T) + G(T)) + C(\epsilon, L, T) \Phi(G(T)) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2\epsilon} + C_{\epsilon, \rho} (\mathcal{E}(0))^{p-1} T \right) \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Portanto, para qualquer  $T$  fixado e escolhendo  $\epsilon = \min \left\{ \frac{1}{8}, \frac{T}{4\rho} \right\}$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T E(t) dt &\leq \frac{T}{8}(2\mathcal{E}(T) + G(T)) + C(\epsilon, L, T)\Phi(G(T)) \\ &\quad + C_{T,\rho} (1 + \mathcal{E}(0))^{p-1} \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Como  $E(t) \geq \mathcal{E}(t)$  para todo  $t > 0$  e  $\mathcal{E}(t)$  é não-crescente, segue que

$$\int_0^T E(t) dt \geq \int_0^T \mathcal{E}(t) dt \geq T\mathcal{E}(T). \quad (3.42)$$

Assim, de (3.41) e (3.42),

$$\begin{aligned} \frac{T}{2}\mathcal{E}(T) &\leq \frac{T}{4}\mathcal{E}(T) + \frac{T}{8}G(T) + C(\epsilon, L, T)\Phi(G(T)) \\ &\quad + C_{T,\rho} (1 + \mathcal{E}(0))^{p-1} \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dividindo a desigualdade (3.43) por  $T > 0$ , obtemos

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}(T) \leq \frac{1}{8}G(T) + C(\epsilon, L, T)\Phi(G(T)) + C_{T,\rho} (1 + \mathcal{E}(0))^{p-1} \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2. \quad (3.44)$$

Finalmente, como  $G(T) \leq \Phi(G(T))$  e se tomarmos

$$\tilde{C}_T = 4 \left( \frac{1}{8} + C(\epsilon, L, T) + C_{T,\rho} (1 + \mathcal{E}(0))^{p-1} \right), \quad (3.45)$$

implica de (3.44) que

$$\mathcal{E}(T) \leq \tilde{C}_T \left( \Phi(G(T)) + \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2 \right), \quad \forall T > 0. \quad (3.46)$$

A prova está completa. ■

## 3.2 Absorção dos termos de ordem inferior

O resultado a seguir mostra que os termos de ordem inferior são absorvidos.

**Proposição 3.2.** *Além das Hipóteses 2.1 e 2.3 com  $p > 1$ , assumamos que  $y_0 \in \widetilde{W}_1^\delta$  e  $\mathcal{E}(0) \leq J(s_0 - \delta)$  para algum  $\delta > 0$ . Então para qualquer  $T > 0$  existe uma constante  $C_T > 0$  tal que a solução  $y$  do sistema (25)-(27) dada pelo Teorema 2.5 satisfaz a desigualdade*

$$\sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2 \leq C_T \Phi(G(T)). \quad (3.47)$$

**Prova:** A prova é feita usando um argumento de contradição veja, por exemplo, [48, 55]. Lembrando novamente que  $\mathcal{H} = V \times H$ , com  $V = (H_0^1(0, L))^3$  e  $H = (L^2(0, L))^3$ .

**Passo 1: Hipótese de contradição.** Fixamos  $T > 0$ . Suponha que existe uma sequência de valor inicial

$$\{(y^n(0), y_t^n(0))\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \widetilde{W}_1^\delta \times H \quad (3.48)$$

tal que

$$\mathcal{E}_n(0) \leq J(s_0 - \delta) < d \quad (3.49)$$

e a solução fraca correspondente  $y^n = (u^n, v^n, w^n)$  satisfaz

$$\sup_{s \in [0, T]} \|y^n(s)\|_H^2 > n\Phi(G_n(T)), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.50)$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(G_n(T))}{\sup_{s \in [0, T]} \|y^n(s)\|_H^2} = 0, \quad (3.51)$$

com

$$G_n(T) = \int_0^T \int_0^L [g_1(u_t^n)u_t^n + g_2(v_t^n)v_t^n + g_3(w_t^n)w_t^n] dx dt. \quad (3.52)$$

Pelo Teorema 2.5 e por (3.49), segue que

$$\sup_{s \in [0, T]} (\|y_t^n(s)\|_V^2 + \|y^n(s)\|_H^2) \leq 2\rho\mathcal{E}_n(0) \leq 2\rho d. \quad (3.53)$$

Logo, a sequência  $(y^n, y_t^n)$  é limitada em  $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ . Portanto, existe uma subsequência, denotada novamente por  $y^n$ , tal que

$$(y^n, y_t^n) \rightarrow (y, y_t) \quad \text{fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.54)$$

Note que para qualquer  $0 < \epsilon < 1$ , a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow H^{1-\epsilon}(0, L)$  é compacta, então pelo teorema de compacidade de Simon [77], existe uma subsequência tal que

$$y^n \rightarrow y \quad \text{fortemente em } L^\infty(0, T; (H^{1-\epsilon}(0, L))^3). \quad (3.55)$$

Além disso, como

$$y^n \in C(0, T; (H^{1-\epsilon}(0, L))^3),$$

a sequência é de Cauchy em  $C(0, T; (H^{1-\epsilon}(0, L))^3)$  e assim

$$y \in C(0, T; (H^{1-\epsilon}(0, L))^3). \quad (3.56)$$

**Afirmção:**  $y(t) = 0$  em  $[0, T]$ . Inicialmente, iremos provar que  $y \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ . Seja  $\psi$  uma função teste em  $(C(0, L) \times (0, t)) \cap C([0, t]; H_1^0(0, L)^3)$  tal que  $\psi(0) = \psi(t) = 0$ , e  $\psi_t \in (L^2((0, L) \times (0, t)))^3$ . Então, por (2.14), tem-se

$$\int_0^t [(y^n, \psi)_V - (y_t^n, \psi_t)_H] d\tau + \int_0^t (\mathbb{G}(y_t^n), \psi)_2 d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y^n), \psi)_2 d\tau. \quad (3.57)$$

Para o próximo passo, devemos passar o limite em (3.57) quando  $n \rightarrow \infty$ , mas para isto, precisamos de alguns resultados. Segue de (3.51) e (3.53) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(G_n(T)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sup_{s \in [0, T]} \|y^n(s)\|_H^2 \left( \frac{\Phi(G_n(T))}{\sup_{s \in [0, T]} \|y^n(s)\|_H^2} \right) \right] = 0. \quad (3.58)$$

Temos de (3.30) e (3.58) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|y_t^n\|_H^2 dt = 0. \quad (3.59)$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t -(y_t^n, \psi_t)_H dt = 0. \quad (3.60)$$

Definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} A_n &:= \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T) : |u_t(x, t)| < 1\}, \\ B_n &:= \{(x, t) \in (0, L) \times (0, T) : |u_t(x, t)| \geq 1\}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

podemos escrever

$$\int_0^T \int_0^L |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt = \int_{A_n} |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt + \int_{B_n} |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt.$$

Para estimar os termos do lado direito da equação acima, usamos (3.6) para obter que

$$\int_{A_n} |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt \leq \int_{A_n} \beta^{\frac{m+1}{m}} |u_t^n|^{m+1} dx dt < \int_0^T \int_0^L \beta^{\frac{m+1}{m}} dx dt = \beta^{\frac{m+1}{m}} TL.$$

Além disso, segue da Hipótese 2.1 que

$$\int_{B_n} |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt \leq \int_{B_n} \beta^{\frac{m+1}{m}} |u_t^n|^{m+1} dx dt \leq \int_0^T \int_0^L \beta^{\frac{m+1}{m}} \frac{1}{\alpha} g_1(u_t^n) u_t^n dx dt. \quad (3.62)$$

Então,

$$\int_0^T \int_0^L |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt < \beta^{\frac{m+1}{m}} TL + \int_0^T \int_0^L \beta^{\frac{m+1}{m}} \frac{1}{\alpha} g_1(u_t^n) u_t^n dx dt. \quad (3.63)$$

Por (3.58), temos que (3.62) converge para 0 quando  $n$  tende ao infinito, então (3.63) implica em

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^T \int_0^L |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx dt < \infty. \quad (3.64)$$

Observe que (3.59) implica, que a subsequência,  $u_t^n \rightarrow 0$  q.s. em  $(0, L) \times (0, T)$ . Assim, da continuidade de  $g_1$ , temos que  $g_1(u_t^n) \rightarrow 0$  q.s. em  $(0, L) \times (0, T)$ . Portanto, por (3.64) juntamente com o fato que  $\frac{m+1}{m} > 1$ , que

$$g_1(u_t^n) \rightarrow 0 \quad \text{fracamente em} \quad L^{\frac{m+1}{m}}((0, L) \times (0, T)). \quad (3.65)$$

Similarmente,

$$g_2(v_t^n) \rightarrow 0 \quad \text{fracamente em } L^{\frac{r+1}{r}}((0, L) \times (0, T)) \quad (3.66)$$

e

$$g_3(w_t^n) \rightarrow 0 \quad \text{fracamente em } L^{\frac{l+1}{l}}((0, L) \times (0, T)). \quad (3.67)$$

Por (3.65)-(3.67), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (\mathbb{G}(y_t^n), \psi)_2 \, d\tau = 0. \quad (3.68)$$

Agora, usando a estimativa

$$|\nabla f_j(y)| \leq C(|u|^{p-1} + |v|^{p-1} + |w|^{p-1} + 1), \quad (3.69)$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t (\mathbb{F}(y^n) - \mathbb{F}(y), \psi)_2 \, d\tau &= \int_0^t \int_0^1 (D\mathbb{F}(sy^n + (1-s)y)(y^n - y), \psi)_2 \, ds \, d\tau \\ &\leq C \left( \|y\|_{(L^p(0,L))^3}^{p-1} + \|y^n\|_{(L^p(0,L))^3}^{p-1} \right) \|y^n - y\|_{L^p((0,L) \times (0,t))}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

com  $D\mathbb{F}$  denotando a matriz Jacobiana de  $\mathbb{F}$ . Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (\mathbb{F}(y^n), \psi)_2 \, d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y), \psi)_2 \, d\tau. \quad (3.71)$$

Agora, por (3.54), (3.60), (3.68) e (3.71), podemos passar o limite em (3.57) quando  $n \rightarrow \infty$  para obter

$$\int_0^t (y, \psi)_V \, d\tau = \int_0^t (\mathbb{F}(y), \psi)_2 \, d\tau. \quad (3.72)$$

Fixando  $\tilde{\psi} \in (H_0^1(0, L) \cap C([0, L]))^3$ , substituindo  $\psi(x, \tau) := \tau(t - \tau)\tilde{\psi}(x)$  em (3.72) e derivando o resultado duas vezes em relação a  $t$ , obtemos

$$(y, \tilde{\psi})_V = (\mathbb{F}(y), \tilde{\psi})_2. \quad (3.73)$$

Seja  $\tilde{\psi}_n \in (H_0^1(0, L) \cap C([0, L]))^3$  tal que  $\tilde{\psi}_n \rightarrow y(t)$  em  $(H_0^1(0, L))^3$  para um  $t$  fixado. Tomando  $n \rightarrow \infty$  em (3.73) e usando a continuidade de  $\mathbb{F}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (y, \tilde{\psi}_n)_V &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{F}(y), \tilde{\psi}_n)_2 \Leftrightarrow (y, y)_V = (\mathbb{F}(y), y)_2 \\ &\Leftrightarrow \|y\|_V^2 = (p+1) \int_0^L F(y) \, dx. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Portanto, ou  $y(t) = 0$  ou  $y(t) \in \mathcal{N}$  para  $t \in [0, T]$ .

Para obter o resultado  $y(t) = 0$  em  $[0, T]$ , é suficiente mostrar que  $y(t) \in \tilde{W}_1^\delta \subset W_1$  em  $[0, T]$ , desde que  $W_1 \cap \mathcal{N} = \emptyset$  (a definição do conjunto  $\tilde{W}_1^\delta$  é dada em (2.242)). Lembrando que

$$\{y_n\} \quad \text{é limitada em } C([0, T]; V)$$

e

$$y_n \rightarrow y \text{ fortemente em } C(0, T; (H^{1-\epsilon}(0, L))^3).$$

Por hipótese, se  $y^n(0) \in \tilde{W}_1^\delta$  e  $\mathcal{E}_n(0) \leq J(s_0 - \delta)$ , pela Proposição 3.1 temos que  $y^n(t) \in \tilde{W}_1^\delta$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto, pela definição de  $\tilde{W}_1^\delta$ , obtemos

$$\|y^n(t)\|_V \leq s_0 - \delta \quad \text{e} \quad I(y^n(t)) \leq J(s_0 - \delta), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.75)$$

Observe que, para cada  $t$  fixado em  $[0, T]$ , tem-se

$$\|y(t)\|_V \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|y^n(t)\|_V \leq s_0 - \delta. \quad (3.76)$$

Além disso, como  $F$  é contínua, então por (2.223) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L F(y^n) dx = \int_0^L F(y) dx. \quad (3.77)$$

Para mostra que  $J(s_0 - \delta) \geq I(y(t))$  em  $[0, T]$ , note que

$$J(s_0 - \delta) \geq I(y^n(t)) = \frac{1}{2} \|y^n(t)\|_V^2 - \int_0^L F(y^n) dx. \quad (3.78)$$

Por (3.76) e (3.77), podemos tomar o limite inferior em (3.78) para obter

$$\begin{aligned} J(s_0 - \delta) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \|y^n(t)\|_V^2 - \int_0^L F(y^n) dx \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \|y(t)\|_V^2 - \int_0^L F(y) dx = I(y(t)), \text{ em } [0, T]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Portanto, por (3.76) e (3.79), temos que  $y(t) \in \tilde{W}_1^\delta \subset W_1$  em  $[0, T]$ . Assim, pela definição de  $W_1$ , necessariamente temos

$$y(t) = 0, \quad \text{em } [0, T]. \quad (3.80)$$

**Passo 2: Normalizando a sequência  $\{y_n\}$ .** Definimos

$$N_n := \sup_{s \in [0, T]} \|y^n(s)\|_H. \quad (3.81)$$

Por (3.56) e (3.80), segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = 0. \quad (3.82)$$

Definimos  $z^n := y^n/N_n$ , então

$$\sup_{s \in [0, T]} \|z^n(s)\|_H^2 = 1. \quad (3.83)$$

Cada  $z^n$  satisfaz a identidade variacional

$$\int_0^t [(z^n, \psi)_V - (z_t^n, \psi_t)_H] d\tau + \int_0^t \left( \frac{\mathbb{G}(y_t^n)}{N_n}, \psi \right)_2 d\tau = \int_0^t \left( \frac{\mathbb{F}(y_t^n)}{N_n}, \psi \right)_2 d\tau, \quad (3.84)$$



com  $\psi \in (C(\overline{(0, L) \times (0, t)}) \cap C([0, t]; H_0^1(0, L)))^3$  tal que  $\psi(0) = \psi(t) = 0$  e  $\psi_t \in (L^2((0, L) \times (0, t)))^3$ . Pela hipótese de contradição (3.51), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(G_n(T))}{N_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(G_n(T))}{\sup_{s \in [0, T]} \|y^n(s)\|_H^2} = 0 \quad (3.85)$$

e por (3.30), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{N_n^2} \|y_t^n\|_H^2 dt = 0,$$

que equivale a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|z_t^n\|_H^2 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{N_n^2} \|y_t^n\|_H^2 dt = 0. \quad (3.86)$$

Seja  $\mathcal{E}_n$  a energia total correspondente a solução  $z^n$ . Os itens (iii) e (iv) do Teorema 2.5 mostram que  $0 \leq \mathcal{E}_n(t) \leq d\rho$  para todo  $t \geq 0$ . Também, por (3.14), (3.83) e (3.85), obtemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_n(T)}{N_n^2} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[ \tilde{C}_T \left( \frac{\Phi(G_n(t))}{N_n^2} + \frac{1}{N_n^2} \sup_{s \in [0, T]} \|y^n(s)\|_H^2 \right) \right] \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[ \tilde{C}_T \left( \frac{\Phi(G_n(t))}{N_n^2} + \sup_{s \in [0, T]} \|z^n(s)\|_H^2 \right) \right] \\ &= \tilde{C}_T. \end{aligned} \quad (3.87)$$

A identidade de energia (3.2) implica que  $\mathcal{E}_n(t) + G_n(t) = \mathcal{E}_n(0)$  e assim,  $\frac{\mathcal{E}_n(t)}{N_n^2} \leq \frac{\mathcal{E}_n(0)}{N_n^2}$ . Pela propriedade (iv) do Teorema 2.5, concluímos que a sequência

$$\left\{ \frac{E_n(t)}{N_n^2} = \frac{1}{2} \|z^n(t)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|z_t^n(t)\|_H^2 \right\} \quad (3.88)$$

é uniformemente limitada em  $[0, T]$ , com  $E_n(t)$  sendo a energia quadrática correspondente a  $y^n$ . Portanto,  $\{(z^n, z_t^n)\}$  é uma sequência limitada em  $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ . Portanto,

$$z^n \rightarrow z \quad \text{fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; V). \quad (3.89)$$

Assim como no caso de  $y^n$ , o resultado de compacidade de Simon, garante que

$$z^n \rightarrow z \quad \text{fortemente em } L^\infty(0, T; (H^{1-\epsilon}(0, L))^3). \quad (3.90)$$

Observe que (3.83) e (3.90) implicam que o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, T]} \|z^n(s)\|_H^2 = \sup_{s \in [0, T]} \|z(s)\|_H^2 = 1. \quad (3.91)$$

Assim, a função  $z$  é não-trivial.

Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \left( \frac{\mathbb{G}(y_t^n)}{N_n}, \psi \right)_2 d\tau = 0. \quad (3.92)$$

De fato, como  $\psi \in (C(\overline{((0, L) \times (0, T))}))^3$  é suficiente provar que  $\frac{g_1(u_t^n)}{N_n} \rightarrow 0$  em  $L^1((0, L) \times (0, T))$ . Inicialmente, iremos provar que

$$\frac{g_1(u_t^n)}{N_n} \rightarrow 0 \text{ forte em } L^{\frac{m+1}{m}}((0, L) \times (0, T)). \quad (3.93)$$

Considere os conjuntos  $A_n$  e  $B_n$  definidos em (3.61). Como  $N_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , podemos tomar  $n$  suficientemente grande tal que  $N_n < 1$ . Pela desigualdade de Hölder e como  $\frac{m+1}{m} \leq 2$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \left| \frac{g_1(u_t^n)}{N_n} \right|^{\frac{m+1}{m}} dx d\tau &\leq C(T, L) \left( \int_{A_n} \left| \frac{g_1(u_t^n)}{N_n} \right|^2 dx d\tau \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &\quad + \frac{1}{N_n^2} \int_{B_n} |g_1(u_t^n)|^{\frac{m+1}{m}} dx d\tau. \end{aligned}$$

Agora, usando (3.32), (3.62) juntamente com a desigualdade de Jensen e o fato que  $s \leq \Phi(s)$  para todo  $s \geq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^L \left| \frac{g_1(u_t^n)}{N_n} \right|^{\frac{m+1}{m}} dx d\tau \\ &\leq C(T, L) \left( \frac{1}{N_n^2} \int_{A_n} \rho_1 \phi_1(g_1(u_t^n) u_t^n) dx d\tau \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{\beta^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha N_n^2} \int_{B_n} g_1(u_t^n) u_t^n dx d\tau \\ &\leq C(T, L) \left( \frac{\Phi(G_n(T))}{N_n^2} \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{\beta^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha} \frac{G_n(T)}{N_n^2} \\ &\leq C(T, L) \left( \frac{\Phi(G_n(T))}{N_n^2} \right)^{\frac{m+1}{2m}} + \frac{\beta^{\frac{m+1}{m}}}{\alpha} \frac{\Phi(G_n(T))}{N_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Isto prova (3.93). Similarmente,

$$\frac{g_2(v_t^n)}{N_n} \rightarrow 0 \text{ fortemente em } L^{\frac{r+1}{r}}((0, L) \times (0, T)) \quad (3.95)$$

e

$$\frac{g_3(w_t^n)}{N_n} \rightarrow 0 \text{ fortemente em } L^{\frac{l+1}{l}}((0, L) \times (0, T)). \quad (3.96)$$

Portanto, obtemos (3.92).

Provaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \left( \frac{\mathbb{F}(y^n)}{N_n}, \psi \right)_2 d\tau = 0. \quad (3.97)$$

De fato, usando (2.224), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L \left| \frac{f_j(y^n)}{N_n} \right| dx d\tau &\leq C \int_0^t \int_0^L \left| \frac{|u^n|^p + |v^n|^p + |w^n|^p}{N_n} \right| dx d\tau \\
&\leq C \int_0^t \int_0^L \left| \frac{|u^n||u^n|^{p-1} + |v^n||v^n|^{p-1} + |w^n||w^n|^{p-1}}{N_n} \right| dx d\tau \quad (3.98) \\
&\leq C \int_0^t \int_0^L (|z_1^n||u^n|^{p-1} + |z_2^n||v^n|^{p-1} + |z_3^n||w^n|^{p-1}) dx d\tau,
\end{aligned}$$

com  $z^n = (z_1^n, z_2^n, z_3^n) = (u^n/N_n, v^n/N_n, w^n/N_n)$ . Pela desigualdade de Hölder e por (3.55), (3.80) e (3.89), segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L |z_1^n||u^n|^{p-1} dx &\leq \left( \int_0^t \int_0^L |z_1^n|^p dx d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^t \int_0^L |u^n|^p dx d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \left( \int_0^t \int_0^L |z_1^n|^p dx d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^t \int_0^L |y^n|^p dx d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.99)
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_0^t \int_0^L |z_2^n||v^n|^{p-1} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.100)$$

e

$$\int_0^t \int_0^L |z_3^n||w^n|^{p-1} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.101)$$

Assim, obtemos (3.97).

Usando (3.86), (3.89), (3.92) e (3.97), podemos passar o limite em (3.84) para obter

$$\int_0^t (y, \psi)_V d\tau = 0, \quad \forall t \in (0, T). \quad (3.102)$$

Agora, fixando  $\tilde{\psi} \in (H_0^1(0, L) \cap C([0, L]))^3$ , substituindo  $\psi(x, \tau) := \tau(t - \tau)\tilde{\psi}(x)$  em (3.102) e derivando o resultado duas vezes, obtemos

$$(y(t), \tilde{\psi})_V = 0, \quad \forall t \in (0, T), \quad (3.103)$$

que por densidade implica em  $y = 0$  em  $V$  para todo  $t \in (0, T)$ . No entanto, isto contradiz (3.91). Portanto, a prova da Proposição 3.2 está completa. ■

### 3.3 Taxas de decaimento da energia

Esta seção é dedicada a provar o decaimento uniforme das soluções fracas do problema (25)-(27).

**Teorema 3.1** (Taxas de decaimento uniforme). *Sob as hipóteses 2.1 e 2.2. Suponha que  $p > 1$ ,  $y_0 \in \tilde{W}_1^\delta$  e  $\mathcal{E}(0) < J(s_0 - \delta)$  para algum  $\delta > 0$ . Seja  $\phi_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  uma função côncava contínua, estritamente crescente, se anulando na origem, de modo que*

$$\phi_j(g_j(s)s) \geq |g_j(s)|^2 + s^2, \quad \forall |s| < 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Defina a função  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$\Phi(s) = \phi_1(s) + \phi_2(s) + \phi_3(s) + s, \quad s \geq 0. \quad (3.104)$$

Então, para qualquer  $T > 0$  existe uma aplicação crescente e côncava  $Q = (I + \tilde{C}\Phi)^{-1}$ , com  $\tilde{C} = \tilde{C}(T, \mathcal{E}(0))$  tal que

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq S \left( \frac{1}{T} - 1 \right), \quad \forall t \geq T,$$

com  $S$  satisfazendo a EDO

$$S'(t) + Q(S(t)) = 0, \quad S(0) = \mathcal{E}(0). \quad (3.105)$$

**Prova:** Combinando as Proposições 3.1 e 3.2, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(T) &\leq \tilde{C}_T \left( \Phi(G(t)) + \sup_{s \in [0, T]} \|y(s)\|_H^2 \right) \\ &\leq \tilde{C}_T (\Phi(G(t)) + C_T \Phi(G(T))) \\ &\leq \tilde{C}_T (1 + C_T) \Phi(G(T)), \quad \forall T > 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Defina  $\Phi_T := \tilde{C}_T (1 + C_T) \Phi$ . Por (3.2), tem-se

$$\mathcal{E}(T) \leq \Phi_T(G(T)) = \Phi_T(\mathcal{E}(0) - \mathcal{E}(T)),$$

o que implica

$$\mathcal{E}(T) + \Phi_T^{-1}(\mathcal{E}(T)) \leq \mathcal{E}(0). \quad (3.107)$$

Aplicando o intervalo  $[mT, (m+1)T]$  com  $m = 0, 1, 2, \dots$  em (3.107), obtemos

$$\mathcal{E}((m+1)T) + \Phi_T^{-1}(\mathcal{E}((m+1)T)) \leq \mathcal{E}(mT), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Portanto, por [54, Lema 3.3], segue que

$$\mathcal{E}(mT) \leq S(m), \quad \text{para todo } m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.108)$$

sendo  $S$  a solução da EDO

$$S' + [I - (I + \Phi_T^{-1})](S) = 0, \quad S(0) = \mathcal{E}(0), \quad (3.109)$$

com  $I$  denotando a função identidade. Note que

$$I - (I + \Phi_T^{-1})^{-1} = (I + \Phi_T)^{-1},$$

assim, a EDO (3.109) pode ser escrita como

$$S' + (I + \Phi_T)^{-1}(S) = 0, \quad S(0) = \mathcal{E}(0), \quad (3.110)$$

onde (3.110) possui uma única solução definida em  $[0, \infty)$ . Como  $\Phi_T$  é crescente e se anula na origem, temos que  $(I + \Phi_T)^{-1}$  é também crescente e se anula na origem. Por isso, se escrevermos (3.110) na forma  $(I + \Phi_T)^{-1}(S)$ , segue que  $S(t)$  é decrescente e  $S(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$ .

Para qualquer  $t > T > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $t = mT + \delta$  com  $0 \leq \delta < T$ , portanto  $m = \frac{t}{T} - \frac{\delta}{T} > \frac{t}{T} - 1$ . Por (3.108) e como  $\mathcal{E}(t)$  e  $S(t)$  são monótonas decrescentes, obtemos

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(mT + \delta) \leq \mathcal{E}(mT) \leq S(m) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad \forall t > T.$$

Agora, usando o item (iv) do Teorema 2.5, tem-se

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq S\left(\frac{1}{T} - 1\right), \quad \forall t \geq T. \quad (3.111)$$

A prova está completa. ■

Os próximos dois corolários são exemplos que ilustram o Teorema 3.1 exibindo taxas de decaimento exponencial e algébrico para o funcional de energia.

**Corolário 3.1** (Taxa de decaimento exponencial). *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, se  $g_1, g_2$  e  $g_3$  são linearmente limitadas perto da origem, então  $Q(s) = \mu s$  para algum  $\mu$  dependente de  $\mathcal{E}(0)$  e  $T$ . A energia total  $\mathcal{E}(t)$  e a energia quadrática  $E(t)$  decaem exponencialmente*

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq e^\mu \mathcal{E}(0) e^{-(\mu/T)t}, \quad \forall t \geq T. \quad (3.112)$$

**Prova:** Se  $g_1, g_2$  e  $g_3$  são limitados linearmente perto da origem, então por (3.7), as funções  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  são lineares. Segue que  $\Phi_T$  é linear, o que implica na linearidade de  $(I + \Phi_T)^{-1}$ . Portanto, a EDO (3.110) é da forma  $S' + \mu S = 0$  (para alguma constante  $\mu > 0$ ) com a única solução  $S(t) = \mathcal{E}(0)e^{-\mu t}$ . Assim, a partir de (3.111), segue que

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq S\left(\frac{1}{T} - 1\right) = \mathcal{E}(0)e^{-\mu\left(\frac{1}{T}-1\right)} = (e^\mu \mathcal{E}(0))e^{-(\mu/T)t}. \quad (3.113)$$

Assim, a prova de corolário está completa. ■

**Corolário 3.2** (Taxa de decaimento polinomial). *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, se pelo menos um dos damping  $g_1, g_2$  e  $g_3$  não for linearmente limitado perto da origem e satisfazem*

$$c_1|s|^{\tilde{m}} \leq |g_1(s)| \leq c_2|s|^{\tilde{m}}, \quad c_3|s|^{\tilde{r}} \leq |g_2(s)| \leq c_4|s|^{\tilde{r}}, \quad c_5|s|^{\tilde{l}} \leq |g_3(s)| \leq c_6|s|^{\tilde{l}}, \quad (3.114)$$

para todo  $|s| < 1$  com  $\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{l} > 0$   $c_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , então a EDO dada por (3.105) pode ser aproximada por

$$\tilde{S}'(t) + C_0\tilde{S}^a(t) = 0, \quad \tilde{S}'(t_0) = S(t_0), \quad t \geq t_0 > 0, \quad \text{para algum } t_0 > 0, \quad (3.115)$$

e a energia decai como segue

$$\frac{1}{\rho}E(t) \leq \mathcal{E}(t) < C(1+t)^{-b}, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.116)$$

com  $b = (a-1)^{-1}$  e  $a > 1$  (especificado em (3.12) e (3.13)) dependendo dos expoentes dos dampings  $\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{l}$ . As constantes  $C_0$  e  $C$  dependem de  $T$  e  $\mathcal{E}(0)$ .

**Prova:** Se pelo menos uma das funções  $g_1, g_2$  e  $g_3$  não são linearmente limitadas próximo a origem, então por (3.10) podemos escolher  $\phi_1(s) = C_1s^{\xi_1}$ ,  $\phi_2(s) = C_2s^{\xi_2}$  e  $\phi_3(s) = C_3s^{\xi_3}$ , com  $0 < \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1$  dados em (3.11). Lembramos também que  $a = \max\left\{\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3}\right\} > 1$ , como definimos em (3.12).

Faça  $h = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ . É claro que existe  $h_b = C_0s^{\min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}}$  e  $h_s$  de tal forma que  $h = h_b + h_s$  satisfaz as hipóteses de [55, Corolário 1], com  $C_0$  dependendo das constantes  $C_1, C_2$  e  $C_3$ . Pelo resultado [55, Corolário 1], existe um  $t_0 > 0$  tal que

$$\mathcal{E}(t) \leq \tilde{S}\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.117)$$

com  $\tilde{S}$  sendo a solução da EDO

$$\tilde{S}'(t) + C_0\tilde{S}(t)^a = 0, \quad \tilde{S}(t_0) = S(t_0). \quad (3.118)$$

Uma vez que a solução de (3.118) é

$$\tilde{S}(t) = [C_0(a-1)(t-t_0) + S(t_0)^{1-a}]^{-\frac{1}{a-1}}, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.119)$$

a prova do Corolário 3.2 está completa com  $b = \frac{1}{a-1}$ .

# Capítulo 4

## Atratores globais

Neste capítulo, investigamos a existência de atratores globais para o problema de mistura ternária de sólidos. Provamos também a semicontinuidade superior dos atratores com relação a um parâmetro que multiplica as forças externas. Consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} v_{xx} - a_{13} w_{xx} + f_1(u, v, w) + g_1(u_t) = \epsilon h_1, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_2 v_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} v_{xx} - a_{23} w_{xx} + f_2(u, v, w) + g_2(v_t) = \epsilon h_2, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ \rho_3 w_{tt} - a_{13} u_{xx} - a_{23} v_{xx} - a_{33} w_{xx} + f_3(u, v, w) + g_3(w_t) = \epsilon h_3, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante positiva. Consideramos ainda as condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{em } (0, L), \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), & \text{em } (0, L), \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), & \text{em } (0, L), \end{cases} \quad (4.2)$$

e condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ w(0, t) = w(L, t) = 0, & \text{em } (0, T). \end{cases} \quad (4.3)$$

Iniciamos este capítulo introduzindo alguma notações e hipótese necessárias.

### 4.1 Notações e hipóteses

Inspirados pelos trabalhos prévios [26, 74, 58] usamos a seguinte hipótese.

**Hipótese 4.1** (Para atratores globais). *Suponhamos que*

(i) As forças externas  $h_1, h_2, h_3 \in L^2(0, L)$ .

(ii) Existe uma função  $F \in C^2$ , com  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\nabla F = (f_1, f_2, f_3) \quad (4.4)$$

e existem constantes positivas  $p \geq 1$  e  $C_f$  tais que

$$|\nabla f_j(u, v, w)| \leq C_f(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1} + |w|^{p-1}), \text{ com } j = 1, 2, 3. \quad (4.5)$$

(iii) Existem constantes  $\beta_0$  e  $m_F$  tais que para qualquer  $u, v, w \in \mathbb{R}$ ,

$$F(u, v, w) \geq -\beta_0(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) - m_F, \quad (4.6)$$

com  $0 \leq \beta_0 < \lambda_1/2k_1$  e  $\lambda_1$  denotando a constante de Poincaré e  $k_1$  é dado em (2.11).

Além disso, qualquer  $u, v, w \in \mathbb{R}$ ,

$$\nabla F(u, v, w) \cdot (u, v, w) - F(u, v, w) \geq -\beta_0(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) - m_F. \quad (4.7)$$

(iv) Com relação aos dampings  $g_j, j = 1, 2, 3$ , assumimos que

$$g_j \in C^1(\mathbb{R}), \quad g_j(0) = 0 \text{ e } g_j \text{ é crescente.} \quad (4.8)$$

Existem constantes  $m_j, M_j > 0, j = 1, 2, 3$ , tais que

$$m_j \leq g'_j(s) \leq M_j, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

**Observação 4.1.** Pelo Teorema do Valor Médio existe  $\gamma \in (0, 1)$  tal que

$$g_j(u) - g_j(v) = g'_j(\gamma u + (1 - \gamma)v)(u - v).$$

Multiplicando a desigualdade acima por  $u - v$  e usando (4.9), obtemos que

$$(g_j(u) - g_j(v))(u - v) \geq m_j|u - v|^2, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

**Observação 4.2.** Novamente, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\gamma \in (0, 1)$  tal que

$$|f_j(u, v, w) - f_j(0, 0, 0)| = |\nabla f_j(\gamma u, \gamma v, \gamma w)| |(u, v, w)|. \quad (4.11)$$

Segue de (4.5) que

$$\begin{aligned} |f_j(u, v, w) - f_j(0, 0, 0)| &\leq C_f(1 + |\gamma u|^{p-1} + |\gamma v|^{p-1} + |\gamma w|^{p-1})(|u| + |v| + |w|) \\ &\leq C_f(1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1} + |w|^{p-1})(|u| + |v| + |w|) \\ &\leq C_f(1 + |u|^p + |v|^p + |w|^p), \end{aligned} \quad (4.12)$$



implicando que

$$|f_j(u, v, w)| \leq C_f(1 + |u|^p + |v|^p + |w|^p). \quad (4.13)$$

Analogamente, obtemos que

$$\begin{aligned} |F(u, v, w) - F(0, 0, 0)| &= |\nabla F(\gamma u, \gamma v, \gamma w)| |(u, v, w)| \\ &= |(f_1(\gamma u, \gamma v, \gamma w), f_2(\gamma u, \gamma v, \gamma w), f_3(\gamma u, \gamma v, \gamma w))| |(u, v, w)| \\ &\leq C_f(1 + |u|^p + |v|^p + |w|^p)(|u| + |v| + |w|) \\ &\leq C_f(1 + |u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

o que implica que

$$F(u, v, w) \leq C_f(1 + |u|^{p+1} + |v|^{p+1} + |w|^{p+1}). \quad (4.15)$$

A seguir, introduzimos a definição de solução fraca para o problema (4.1)-(4.3).

**Definição 4.1.** Uma função  $Y = (u, v, w, u_t, v_t, w_t) \in C([0, \infty); \mathcal{H})$  satisfazendo a condição inicial  $Y(0) = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1)$  é chamada **solução fraca** para (4.1)-(4.3) se a seguinte identidade for satisfeita no sentido das distribuições

$$\begin{aligned} &\rho_1 \frac{d}{dt}(u_t, \phi)_2 + \rho_2 \frac{d}{dt}(v_t, \varphi)_2 + \rho_3 \frac{d}{dt}(w_t, \psi)_2 + \int_0^L \mathbf{Q}[(u_x, v_x, w_x), (\phi_x, \varphi_x, \psi_x)] dx \\ &+ (f_1(u, v, w) - \epsilon h_1, \phi)_2 + (f_2(u, v, w) - \epsilon h_2, \phi)_2 + (f_3(u, v, w) - \epsilon h_3, \phi)_2 \\ &+ (g_1(u_t), \phi)_2 + (g_2(v_t), \varphi)_2 + (g_3(w_t), \psi)_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

para todo  $\phi, \varphi, \psi \in H_0^1(0, L)$ . Além disso, se uma solução fraca satisfizer

$$Y \in C([0, \infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{H}), \quad (4.17)$$

então ela chamada **solução forte**.

### 4.1.1 Identidade de Energia

Definimos a energia linear do sistema (4.1)-(4.3) por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} (\|y\|_V^2 + \|y_t\|_H^2) \quad (4.18)$$

e a energia total por

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) = E(t) + \int_0^L F(u, v, w) dx - \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) dx. \quad (4.19)$$

**Lema 4.1.** *A energia total ao longo das soluções fortes satisfaz a lei de dissipação*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\epsilon(t) = - \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx \leq 0, \quad \forall \epsilon \in [0, 1]. \quad (4.20)$$

Além disso, existem constantes positivas  $C_0, C_1$  e  $C_2$  independentes de  $\epsilon \in [0, 1]$ , tais que

$$C_0 \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_1 \leq \mathcal{E}_\epsilon(t) \leq C_2(1 + \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}), \quad (4.21)$$

para todo  $\epsilon \in [0, 1]$ .

**Prova:** Inicialmente, multiplicamos a primeira, a segunda e a terceira equações de (4.1) por  $u_t, v_t$  e  $w_t$ , respectivamente e integramos por partes no intervalo  $[0, L]$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \left( \rho_1 \|u_t\|_2^2 + \rho_2 \|v_t\|_2^2 + \rho_3 \|w_t\|_2^2 + \int_0^L q[u_x, v_x, w_x] dx \right) \right] \\ & + \int_0^L (f_1(u, v, w)u_t + f_2(u, v, w)v_t + f_3(u, v, w)w_t) dx \\ & + \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx \\ & = \epsilon \int_0^L (h_1 u_t + h_2 v_t + h_3 w_t) dx. \end{aligned}$$

Observando que

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 \|u_t\|_2^2 + \rho_2 \|v_t\|_2^2 + \rho_3 \|w_t\|_2^2 + \int_0^L q[u_x, v_x, w_x] dx \right)$$

e que

$$\begin{aligned} & \int_0^L (f_1(u, v, w)u_t + f_2(u, v, w)v_t + f_3(u, v, w)w_t) dx \\ & = \int_0^L \nabla F(u, v, w) \cdot (u_t, v_t, w_t) dx = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^L F(u, v, w) dx \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ E(t) + \int_0^L F(u, v, w) dx - \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) dx \right] \\ & = - \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\epsilon(t) = - \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx. \quad (4.24)$$

Pelas hipóteses (4.8) e (4.10), temos que

$$g_1(u_t) = (g_1(u_t) - g_1(0)) \geq m_1 |u_t|^2 \geq 0. \quad (4.25)$$

Analogamente, temos que

$$g_2(v_t) \geq m_2|v_t|^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad g_3(w_t) \geq m_3|w_t|^2 \geq 0. \quad (4.26)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\epsilon(t) = - \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx \leq 0. \quad (4.27)$$

Agora, vamos provar a desigualdade (4.21). Segue de (4.6), da desigualdade de Poincaré e por (2.11) que

$$\begin{aligned} \int_0^L F(u, v, w) dx &\geq -\beta_0(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2) - m_F L \\ &\geq -\frac{\beta_0}{\lambda_1}(\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) - m_F L \\ &\geq -\frac{\beta_0 \kappa_2}{\lambda_1} \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - m_F L. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Então, por (4.19) e (4.28), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\epsilon(t) &= E(t) + \int_0^L F(u, v, w) dx - \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) dx \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta_0 \kappa_2}{\lambda_1} \right) \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - m_F L - \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Usando (2.11), as desigualdade de Hölder, Young e de Poincaré, temos que para cada  $\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} &\epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) dx \\ &\leq \alpha (\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2) + \frac{1}{4\alpha} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2) \\ &\leq \frac{\alpha}{\lambda_1} (\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) + \frac{1}{4\alpha} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2) \\ &\leq \frac{\alpha \kappa_2}{\lambda_1} \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{4\alpha} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2) \\ &\leq C_0 \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\kappa_2}{4C_0 \lambda_1} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2), \end{aligned} \quad (4.30)$$

com  $\alpha = \frac{C_0 \lambda_1}{\kappa_2}$ . Logo, segue de (4.29) que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\epsilon(t) &\geq \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{\beta_0 \kappa_2}{\lambda_1} \right) - C_0 \right] \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad - \left( m_F L + \frac{\kappa_2}{4C_0 \lambda_1} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2) \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Tomando-se

$$C_0 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2\beta_0 \kappa_1}{\lambda_1} \right) > 0 \quad \text{e} \quad C_1 = m_F L + \frac{\kappa_2}{4C_0 \lambda_1} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2), \quad (4.32)$$

obtemos a primeira desigualdade de (4.21), isto é,

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) \geq C_0 \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_1.$$

Agora, integrando em  $[0, L]$  a desigualdade (4.15) e em seguida, aplicando a imersão de Sobolev (em 1D)  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^{p+1}(0, L)$  e (2.11), temos

$$\begin{aligned} \int_0^L F(y) dx &\leq C_f (\|u\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{p+1}^{p+1} + \|w\|_{p+1}^{p+1} + 1) \\ &\leq C_f (\|u_x\|_2^{p+1} + \|v_x\|_2^{p+1} + \|w_x\|_2^{p+1} + 1) \\ &\leq C_f (1 + \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Logo, por (4.19), (4.30) e (4.33), temos

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) \leq C \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_f (1 + \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1}) + C_h, \quad (4.34)$$

donde concluímos que existe  $C_2 > 0$  satisfazendo a segunda desigualdade em (4.21). A prova está completa.  $\blacksquare$

## 4.2 Boa colocação do problema

Nesta seção, estudamos a boa colocação global do problema (4.1)-(4.2). Inicialmente, reescrevemos o problema (4.1) na forma de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, para obter o seguinte sistema equivalente, que também é conhecido como o problema de Cauchy, como segue

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} + (\mathbb{A} + \mathbb{B})Y = \mathbb{F}(Y), & t > 0, \\ Y(0) = Y_0 = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}, \end{cases} \quad (4.35)$$

com  $\mathcal{H}$  definido em (2.1) e  $Y = (u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \mathcal{H}$ .

O operador não linear  $\mathbb{A} : \mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é dado por

$$\mathbb{A}Y = \begin{pmatrix} -\tilde{u} \\ -\tilde{v} \\ -\tilde{w} \\ -\frac{1}{\rho_1} \{(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)_{xx}\} \\ -\frac{1}{\rho_2} \{(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w)_{xx}\} \\ -\frac{1}{\rho_3} \{(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)_{xx}\} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

com

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \{Y = (u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \mathcal{H} : u, v, w \in H^2(0, L), \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in H_0^1(0, L)\}.$$

O operador não linear  $\mathbb{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  e a força externa  $\mathbb{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  são definidos por

$$\mathbb{B}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho_1}g_1(\tilde{u}) \\ \frac{1}{\rho_2}g_2(\tilde{v}) \\ \frac{1}{\rho_3}g_3(\tilde{w}) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}(Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\rho_1}(f_1(u, v, w) - \epsilon h_1) \\ -\frac{1}{\rho_2}(f_2(u, v, w) - \epsilon h_2) \\ -\frac{1}{\rho_3}(f_3(u, v, w) - \epsilon h_3) \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

**Lema 4.2.** *O operador  $\mathbb{A} + \mathbb{B}$  é um monótono maximal em  $\mathcal{H}$ .*

**Prova:** Levando em conta que  $(\text{int}D(\mathbb{A})) \cap D(\mathbb{B}) \neq \emptyset$ , pelo Teorema 1.2 é suficiente provar que  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  são operadores monótonos maximais. Primeiro provamos que  $\mathbb{A}$  é monótono maximal. Seja  $Y = (u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in D(\mathbb{A})$ . Note que  $\mathbb{A}$  é monótono, pois

$$(\mathbb{A}Y, Y)_{\mathcal{H}} = 0.$$

A seguir, provamos que  $\text{Im}(I + \mathbb{A}) = \mathcal{H}$ . Seja  $\mathfrak{F} = (F^1, F^2, F^3, F^4, F^5, F^6) \in \mathcal{H}$ . Devemos provar que

$$(I + \mathbb{A})Y = \mathfrak{F}$$

possui uma solução  $Y = (u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in D(\mathbb{A})$ , o que implica no seguinte sistema

$$u - \tilde{u} = F^1 \in H_0^1(0, L), \quad (4.38)$$

$$v - \tilde{v} = F^2 \in H_0^1(0, L), \quad (4.39)$$

$$w - \tilde{w} = F^3 \in H_0^1(0, L), \quad (4.40)$$

$$\rho_1 \tilde{u} - (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)_{xx} = \rho_1 F^4 \in L^2(0, L), \quad (4.41)$$

$$\rho_2 \tilde{v} - (a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w)_{xx} = \rho_2 F^5 \in L^2(0, L), \quad (4.42)$$

$$\rho_3 \tilde{w} - (a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)_{xx} = \rho_3 F^6 \in L^2(0, L). \quad (4.43)$$

Observe que as equações (4.38)-(4.43) são equivalentes a

$$\rho_1 u - (a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)_{xx} = \rho_1 (F^1 + F^4) \in L^2(0, L), \quad (4.44)$$

$$\rho_2 v - (a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w)_{xx} = \rho_2 (F^2 + F^5) \in L^2(0, L), \quad (4.45)$$

$$\rho_3 w - (a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)_{xx} = \rho_3 (F^3 + F^6) \in L^2(0, L). \quad (4.46)$$

e o sistema (4.44)-(4.46) é equivalente ao problema variacional

$$\Psi((u, v, w), (\phi, \varphi, \psi)) = \Upsilon(\phi, \varphi, \psi) \quad (4.47)$$

sendo  $\Psi : (H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L))^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear dada por

$$\begin{aligned} \Psi((u, v, w), (\phi, \varphi, \psi)) &= \rho_1(u, \phi)_2 + \rho_2(v, \varphi)_2 + \rho_3(w, \psi)_2 \\ &+ \int_0^L \mathbf{Q}[(u_x, v_x, w_x), (\phi_x, \varphi_x, \psi_x)] dx, \end{aligned} \quad (4.48)$$

e  $\Upsilon : H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação linear definida como

$$\Upsilon(\phi, \varphi, \psi) = \rho_1(F^1 + F^4, \phi) + \rho_2(F^2 + F^5, \varphi) + \rho_3(F^3 + F^6, \psi). \quad (4.49)$$

Temos que  $\Psi, \Upsilon$  são contínuas. Além, disso,  $\Psi$  é também coerciva desde que

$$\Psi((u, v, w), (u, v, w)) = \rho_1\|u\|_2^2 + \rho_2\|v\|_2^2 + \rho_3\|w\|_2^2 + \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] dx. \quad (4.50)$$

Pelo Teorema de Lax-Milgram, o sistema (4.44)-(4.46) possui uma única solução fraca  $(u, v, w) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ . De (4.44)-(4.46) segue-se que

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w)_{xx} = \rho_1u - \rho_1(F^1 + F^4) \in L^2(0, L), \quad (4.51)$$

$$(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w)_{xx} = \rho_2v - \rho_2(F^2 + F^5) \in L^2(0, L), \quad (4.52)$$

$$(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w)_{xx} = \rho_3w - \rho_3(F^3 + F^6) \in L^2(0, L). \quad (4.53)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w &\in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w &\in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w &\in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Observe que a partir das hipóteses referente a matriz  $A$  podemos escrever

$$\begin{aligned} u &= \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{\det(A)}(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w) + \frac{a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}}{\det(A)}(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w) \\ &+ \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{\det(A)}(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w), \\ v &= \frac{a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}}{\det(A)}(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w) + \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{\det(A)}(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w) \\ &+ \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\det(A)}(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w), \end{aligned} \quad (4.55)$$

e

$$\begin{aligned} w &= \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{\det(A)}(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w) + \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{\det(A)}(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w) \\ &+ \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{\det(A)}(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w). \end{aligned}$$

Combinando (4.54) e (4.55) concluímos que  $u, v, w \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ . Das equações (4.38) e (4.39) segue-se que  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in H_0^1(0, L)$ . Portanto, mostramos que existe  $Y = (u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in D(\mathbb{A})$  tal que  $(I + \mathbb{A})Y = \mathfrak{F}$ . Provando que  $\mathbb{A}$  é monótono maximal. A prova da maximalidade monótona do operador  $\mathbb{B}$  segue do Passo 4 do Lema 2.1. A prova está portanto completa. ■

Temos o seguinte resultado de existência global para o problema (4.1)-(4.3).

**Teorema 4.1.** *Suponha que a Hipótese 4.1 seja satisfeita, então para qualquer dado inicial  $Y_0 \in \mathcal{H}$ , o sistema (4.1)-(4.3) possui uma única solução fraca  $Y = (u, v, w, u_t, v_t, w_t)$  satisfazendo*

$$Y \in C([0, \infty); \mathcal{H}), \quad Y(0) = Y_0. \quad (4.56)$$

*Se  $Y_0 \in D(\mathcal{A})$ , então a solução é forte. Além disso, a solução fraca depende continuamente do dado inicial  $Y_0 \in \mathcal{H}$ .*

**Prova:** Como o operador  $\mathbb{A} + \mathbb{B}$  é monótono maximal em  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é localmente Lipschitz em  $\mathcal{H}$  (veja o Lema 2.2). Então, pelo Teorema 7.2 da referência [26], para todo  $Y_0 \in D(\mathbb{A} + \mathbb{B})$  existe  $t_{\max} \leq \infty$  e uma única solução forte  $Y$  para (4.35) definida no intervalo  $[0, t_{\max})$ . Além disso, se  $Y_0 \in \mathcal{H}$ , temos que (4.35) possui uma única solução fraca  $Y \in C([0, t_{\max}); \mathcal{H})$  e tal solução satisfaz  $\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \|Y(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty$  sempre que  $t_{\max} < \infty$ .

No que se segue, provamos que a solução é global, isto é,  $t_{\max} = \infty$ . Primeiro, consideremos  $Y$  uma solução forte definida em  $[0, t_{\max})$ . Integrando a identidade (4.20) sobre  $(0, t)$  obtemos

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) \leq \mathcal{E}_\epsilon(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.57)$$

As estimativas (4.21) e (4.57) implicam em

$$\|Y(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{\beta_0} (\mathcal{E}_\epsilon(0) + C_F), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.58)$$

Um argumento de densidade mostra que (4.58) também é satisfeita para soluções fracas. Portanto concluímos que  $t_{\max} = \infty$ .

A dependência continua da solução  $Y(t)$  em relação aos dados iniciais pode ser obtida usando uma técnica clássica para a diferença de duas soluções (veja o Teorema 2.2). ■

Pelo resultado do Teorema 4.1, o problema (25)-(27) é bem posto, então podemos definir o semigrupo solução  $S_\epsilon(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  por

$$S_\epsilon(t)(u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) = (u(t), v(t), w(t), u_t(t), v_t(t), w_t(t)) \quad (4.59)$$

com  $(u, v, w, u_t, v_t, w_t)$  sendo a única solução fraca do problema (4.1)-(4.3). Desta forma o par  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  define um sistema dinâmico. Para tal sistema, investigamos a existência de atratores globais e suas propriedades.

### 4.3 Sistema gradiente e pontos estacionários

A seguir, provamos que o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é gradiente (veja Definição 1.20) e o conjunto de seus pontos estacionários é limitado em  $\mathcal{H}$  uniformemente com relação ao parâmetro  $\epsilon$ .

**Lema 4.3.** *Suponha que a Hipótese 4.1 seja satisfeita. Então o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é gradiente. Além disso, a função de Lyapunov estrita correspondente  $\Phi_\epsilon$  satisfaz*

$$\Phi_\epsilon(Y) \iff \|Y\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (4.60)$$

**Prova:** Definimos o funcional  $\Phi_\epsilon : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) &= \frac{1}{2} \|(u, v, w, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(u, v, w) dx \\ &\quad - \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) dx. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Inicialmente, notemos que  $\Phi_\epsilon$  é contínua por definição.

Seja  $Y_0 = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}$  uma condição inicial da solução correspondente  $Y_0(t) = S_\epsilon(t)Y_0$ , então por (4.20), temos que

$$\frac{d}{dt} \Phi_\epsilon(S_\epsilon(t)Y_0) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_\epsilon(t) = - \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.62)$$

Portanto,  $t \mapsto \Phi_\epsilon(S_\epsilon(t)Y_0)$  é não-crescente.

Agora, suponha que  $\Phi_\epsilon(S_\epsilon(t)Y_0) = \Phi_\epsilon(Y_0)$  para todo  $t \geq 0$ . Então, (4.62) implica que

$$- \int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(v_t)v_t + g_3(w_t)w_t) dx = \frac{d}{dt} \Phi_\epsilon(Y_0) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.63)$$

Usando (4.9) em (4.63), temos que para  $t \geq 0$ ,

$$\int_0^L (|u_t|^2 + |v_t|^2 + |w_t|^2) dx = 0. \quad (4.64)$$

Logo,

$$u_t = v_t = w_t = 0 \quad \text{q.s. em } (0, L). \quad (4.65)$$



Portanto,  $u(t) = u_0, v(t) = v_0$  e  $w(t) = w_0$ , para todo  $t \geq 0$ . Então, obtemos que  $S_\epsilon(t)Y_0 = Y(t) = (u_0, v_0, w_0, 0, 0, 0)$  é um ponto estacionário. Concluimos que  $\Phi_\epsilon$  é uma função de Lyapunov estrita.

Agora, segue da segunda desigualdade de (4.21) que

$$\Phi_\epsilon(Y) \leq C_2(1 + \|Y\|_{\mathcal{H}}^{p+1}). \quad (4.66)$$

Logo, se  $\Phi_\epsilon(Y) \rightarrow \infty$  temos que  $\|Y\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$ . Por outro lado, pela primeira desigualdade de (4.21), temos que

$$\|Y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{C_0}(\Phi_\epsilon(Y) + C_1), \quad (4.67)$$

Assim,  $\|Y\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty$  implica que  $\Phi_\epsilon(Y) \rightarrow \infty$ . Logo, (4.60) é satisfeito. Isso completa a prova. ■

**Lema 4.4.** *Suponha que a Hipótese 4.1 seja satisfeita. Então o conjunto  $\mathcal{N}_\epsilon$  dos pontos estacionários de  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é limitado em  $\mathcal{H}$  uniformemente com relação ao parâmetro  $\epsilon \in [0, 1]$ .*

**Prova:** Seja  $Y \in \mathcal{N}_\epsilon$  arbitrário. Como  $Y$  é uma solução constante no tempo, temos que as derivadas em  $t$  se anulam e além disso, pela hipótese do damping  $g_j, j = 1, 2, 3$ , tem-se

$$g_1(0) = g_2(0) = g_3(0) = 0.$$

Segue-se que  $Y = (u, v, w, 0, 0, 0)$  é solução do problema

$$\begin{cases} -a_{11}u_{xx} - a_{12}v_{xx} - a_{13}w_{xx} + f_1(u, v, w) = \epsilon h_1, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ -a_{12}u_{xx} - a_{22}v_{xx} - a_{23}w_{xx} + f_2(u, v, w) = \epsilon h_2, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ -a_{13}u_{xx} - a_{23}v_{xx} - a_{33}w_{xx} + f_3(u, v, w) = \epsilon h_3, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \end{cases} \quad (4.68)$$

com condição de fronteira de Dirichlet. Multiplicando cada equação de (4.68) por  $u, v$  e  $w$ , respectivamente e em seguida, integrando em  $(0, L)$ , obtemos

$$\int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] dx = - \int_0^L \nabla F(u, v, w) \cdot (u, v, w) dx + \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) dx. \quad (4.69)$$

Por (4.6) e (4.7), tem-se

$$\begin{aligned} -\nabla F(u, v, w) \cdot (u, v, w) &\leq -F(u, v, w) + \beta_0(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) + m_F, \\ &\leq 2\beta_0(|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) + 2m_F. \end{aligned}$$

Em seguida, integrando em  $[0, L]$  a desigualdade acima e usando a desigualdade de Poincaré e

(2.11), tem-se

$$\begin{aligned}
-\int_0^L \nabla F(u, v, w) \cdot (u, v, w) \, dx &\leq 2\beta_0(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2) + 2Lm_F \\
&\leq \frac{2\beta_0}{\lambda_1}(\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) + 2Lm_F \quad (4.70) \\
&\leq \frac{2\beta_0 k_2}{\lambda_1} \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] \, dx + 2Lm_F.
\end{aligned}$$

Logo, por (4.69) e (4.70), obtemos que

$$\int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] \, dx \leq \frac{2\beta_0 k_2}{\lambda_1} \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] \, dx + 2Lm_F + \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) \, dx,$$

o que implica

$$\left(1 - \frac{2\beta_0 k_2}{\lambda_1}\right) \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] \, dx \leq 2Lm_F + \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) \, dx.$$

Levando em conta (4.32), conclui-se

$$4C_0 \|Y\|_{\mathcal{H}}^2 = 4C_0 \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] \, dx \leq 2Lm_F + \epsilon \int_0^L (h_1 u + h_2 v + h_3 w) \, dx. \quad (4.71)$$

Assim, usando a estimativa (4.30), temos que

$$4C_0 \|Y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2Lm_F + C_0 \|(u, v, w, u_t, v_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{k_2}{4C_0 \lambda_1} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2), \quad (4.72)$$

o que implica

$$3C_0 \|Y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2Lm_F + \frac{k_2}{4C_0 \lambda_1} (\|h_1\|_2^2 + \|h_2\|_2^2 + \|h_3\|_2^2), \quad \forall Y \in \mathcal{N}_\epsilon. \quad (4.73)$$

Assim, a prova está completa. ■

## 4.4 Estimativa de quase-estabilidade

Nesta subseção, provamos uma estimativa de quase-estabilidade que desempenha um papel central na prova de existência de atratores e suas propriedades. Essa estimativa é usualmente chamada de *estimativa de estabilizabilizada*.

**Lema 4.5.** *Suponha que a Hipótese 4.1 seja satisfeita. Seja  $B$  um conjunto limitado invariante de  $\mathcal{H}$  e*

$$S_\epsilon(t)Y^i = (u^i, v^i, w^i, u_t^i, v_t^i, w_t^i), \quad i = 1, 2,$$

são soluções fracas de (25)-(27) com a condições iniciais  $Y^1, Y^2 \in B$ . Então, existem constantes positivas  $\eta, \vartheta$  e  $C_B$ , com  $C_B$  dependendo de  $B$ , mas independente de  $\epsilon \in [0, 1]$ , tais que

$$E(t) \leq \vartheta E(0)e^{-\eta t} + C_B \sup_{s \in [0, t]} (\|u(s)\|_{2p}^2 + \|v(s)\|_{2p}^2 + \|w(s)\|_{2p}^2), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.74)$$

com  $u = u^1 - u^2, v = v^1 - v^2, w = w^1 - w^2$ .

**Prova:** Inicialmente notemos que  $u = u^1 - u^2, v = v^1 - v^2$  e  $w = w^1 - w^2$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} v_{xx} - a_{13} w_{xx} = -F_1(u, v, w) - G_1(u_t) = 0, \\ \rho_2 v_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} v_{xx} - a_{23} w_{xx} = -F_2(u, v, w) - G_2(v_t) = 0, \\ \rho_3 w_{tt} - a_{13} u_{xx} - a_{23} v_{xx} - a_{33} w_{xx} = -F_3(u, v, w) - G_3(w_t) = 0, \end{cases} \quad (4.75)$$

com

$$F_j(u, v, w) = f_j(u^1, v^1, w^1) - f_j(u^2, v^2, w^2), \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.76)$$

e

$$G_1(u_t) = g_1(u_t^1) - g_1(u_t^2), G_2(v_t) = g_2(v_t^1) - g_2(v_t^2), G_3(w_t) = g_3(w_t^1) - g_3(w_t^2). \quad (4.77)$$

Dividimos em passos a prova deste lema, simplesmente para um melhor entendimento.

**Passo 1:** Multiplicando cada equação de (4.75) por  $u_t, v_t$  e  $w_t$ , respectivamente. Em seguida, integrando por partes sobre  $[0, L]$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= - \int_0^L (F_1(u, v, w)u_t + F_2(u, v, w)v_t + F_3(u, v, w)w_t) dx \\ &\quad - \int_0^L (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t + G_3(w_t)w_t) dx. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Segue de (4.9) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &\leq -m_1 \|u_t\|_2^2 - m_2 \|v_t\|_2^2 - m_3 \|w_t\|_2^2 \\ &\quad - \int_0^L (F_1(u, v, w)u_t + F_2(u, v, w)v_t + F_3(u, v, w)w_t) dx. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Usando (4.5), a desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L F_1(u, v, w)u_t dx &\leq C_f \int_0^L C(\nabla f_1)(|u| + |v| + |w|)|u_t| dx \\ &\leq K_B (\|u\|_{2p} + \|v\|_{2p} + \|w\|_{2p}) \|u_t\|_2 \\ &\leq K_B (\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2) + \frac{m_1}{2} \|u_t\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.80)$$

com

$$C(\nabla f_1) = 1 + |u^1|^{p-1} + |u^2|^{p-1} + |v^1|^{p-1} + |v^2|^{p-1} + |w^1|^{p-1} + |w^2|^{p-1}.$$

Analogamente, temos

$$\int_0^L F_2(u, v, w)v_t dx \leq K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2) + \frac{m_2}{2}\|v_t\|_2^2, \quad (4.81)$$

e

$$\int_0^L F_3(u, v, w)w_t dx \leq K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2) + \frac{m_3}{2}\|w_t\|_2^2. \quad (4.82)$$

Substituindo as estimativas (4.80)-(4.82) em (4.79), obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\frac{m_1}{2}\|u_t\|_2^2 - \frac{m_2}{2}\|v_t\|_2^2 - \frac{m_3}{2}\|w_t\|_2^2 + K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2). \quad (4.83)$$

**Passo 2:** Definimos o funcional

$$\mathcal{I}(t) = \rho_1 \int_0^L uu_t dx + \rho_2 \int_0^L vv_t dx + \rho_3 \int_0^L ww_t dx. \quad (4.84)$$

Então

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}(t) = \rho_1\|u_t\|_2^2 + \rho_2\|v_t\|_2^2 + \rho_3\|w_t\|_2^2 + \int_0^L (\rho_1 u_{tt}u + \rho_2 v_{tt}v + \rho_3 w_{tt}w) dx. \quad (4.85)$$

Multiplicando cada equação de (4.75) por  $u, v$  e  $w$ , respectivamente. Em seguida, integrando em  $(0, L)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho_1 u_{tt}u + \rho_2 v_{tt}v + \rho_3 w_{tt}w) dx &= - \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] dx \\ &\quad - \int_0^L (F_1(u, v, w)u + F_2(u, v, w)v + F_3(u, v, w)w) dx \\ &\quad - \int_0^L (G_1(u_t)u + G_2(v_t)v + G_3(w_t)w) dx. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Substituindo (4.86) em (4.85), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{I}(t) &= \rho_1\|u_t\|_2^2 + \rho_2\|v_t\|_2^2 + \rho_3\|w_t\|_2^2 - \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] dx \\ &\quad - \int_0^L (F_1(u, v, w)u + F_2(u, v, w)v + F_3(u, v, w)w) dx \\ &\quad - \int_0^L (G_1(u_t)u + G_2(v_t)v + G_3(w_t)w) dx. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Similarmente a (4.80)-(4.82), obtemos as estimativas seguintes

$$\begin{aligned} \int_0^L F_1(u, v, w)u dx &\leq K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2), \\ \int_0^L F_2(u, v, w)v dx &\leq K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2), \\ \int_0^L F_3(u, v, w)w_t dx &\leq K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Pela hipótese (4.9), desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\int_0^L G_1(u_t)u \, dx \leq C\|u_t\|_2\|u\|_2 \leq C\|u_t\|_{2p}^2 + \rho_1\|u_t\|_2^2. \quad (4.89)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_0^L G_2(v_t)v \, dx &\leq C\|v_t\|_{2p}^2 + \rho_2\|v_t\|_2^2 \\ \int_0^L G_3(w_t)w \, dx &\leq C\|w_t\|_{2p}^2 + \rho_3\|w_t\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Substituindo (4.88)-(4.90) em (4.86), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{I}(t) &\leq 2\rho_1\|u_t\|_2^2 + 2\rho_2\|v_t\|_2^2 + 2\rho_3\|w_t\|_2^2 - \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] \, dx \\ &\quad + K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (4.91)$$

**Passo 3:** Agora, definindo o funcional  $\mathcal{L}$  por

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \mathcal{I}(t), \quad (4.92)$$

com  $N$  sendo uma constante positiva que será definida mais adiante.

Usando a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Poincaré, (2.11) e a desigualdade de Young, verifica-se facilmente, que existe  $C_0 > 0$  independente de  $\epsilon$  tal que

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq C_0E(t), \forall t \geq 0. \quad (4.93)$$

Portanto, para  $N$  suficientemente grande, obtemos constantes positivas  $K_1$  e  $K_2$ , tais que

$$K_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq K_2E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.94)$$

**Passo 4:** Derivando  $\mathcal{L}$  com relação a  $t$ , temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = N\frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}\mathcal{I}(t). \quad (4.95)$$

Em seguida, usando (4.83) e (4.91), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\left(\frac{Nm_1}{2} - 2\rho_1\right)\|u_t\|_2^2 - \left(\frac{Nm_2}{2} - 2\rho_2\right)\|v_t\|_2^2 \\ &\quad - \left(\frac{Nm_3}{2} - 2\rho_3\right)\|w_t\|_2^2 - \int_0^L \mathbf{q}[u_x, v_x, w_x] \, dx \\ &\quad + K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Seja  $N > 0$  suficientemente grande, tal que

$$\xi_1 = \left(\frac{Nm_1}{2} - 2\rho_1\right) > 0, \xi_2 = \left(\frac{Nm_2}{2} - 2\rho_2\right) > 0 \text{ e } \xi_3 = \left(\frac{Nm_3}{2} - 2\rho_3\right) > 0. \quad (4.97)$$

Escolhendo  $N_0 = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} > 0$ , existe  $K_B > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -N_0 E(t) + K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2). \quad (4.98)$$

Por (4.94), temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{N_0}{K_2}\mathcal{L}(t) + K_B(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2). \quad (4.99)$$

Implicando em

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathcal{L}(t)e^{\frac{N_0}{K_2}t}\right\} \leq K_B e^{\frac{N_0}{K_2}t}(\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2). \quad (4.100)$$

Integrando a expressão acima, obtemos que

$$\mathcal{L}(t) \leq e^{-\frac{N_0}{K_2}t}\mathcal{L}(0) + K_B \int_0^t e^{-\frac{N_0}{K_2}(t-s)}(\|u(s)\|_{2p}^2 + \|v(s)\|_{2p}^2 + \|w(s)\|_{2p}^2) ds. \quad (4.101)$$

Usando novamente (4.94), obtemos que

$$E(t) \leq \vartheta e^{-\eta t}E(0) + C_B \int_0^t e^{-\eta(t-s)}(\|u(s)\|_{2p}^2 + \|v(s)\|_{2p}^2 + \|w(s)\|_{2p}^2) ds, \quad (4.102)$$

com

$$\vartheta = \frac{K_2}{K_1}, \eta = \frac{N_0}{K_2}, C_B = \frac{K_B}{K_1}. \quad (4.103)$$

Implicando na estimativa desejada (4.74). A prova está completa. ■

## 4.5 Existência de atratores globais

O principal resultado para a existência de atratores globais é dado pelo seguinte teorema.

**Teorema 4.2.** *Suponha que a Hipótese 4.1 seja satisfeita. Então:*

- (i) *O sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é quase-estável sobre qualquer conjunto positivamente invariante e limitado  $B \subset \mathcal{H}$ ;*
- (ii) *O sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  possui atrator global  $\mathfrak{A}_\epsilon \subset \mathcal{H}$  que se caracteriza pela variedade instável  $\mathfrak{A}_\epsilon = W^u(\mathcal{N}_\epsilon)$  do conjunto de pontos estacionários*

$$\mathcal{N}_\epsilon = \left\{ (u, v, w, 0, 0, 0) \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} -a_{11}u_{xx} - a_{12}v_{xx} - a_{13}w_{xx} + f_1(u, v, w) = \epsilon h_1 \\ -a_{12}u_{xx} - a_{22}v_{xx} - a_{23}w_{xx} + f_2(u, v, w) = \epsilon h_2 \\ -a_{13}u_{xx} - a_{23}v_{xx} - a_{33}w_{xx} + f_3(u, v, w) = \epsilon h_3 \end{array} \right. \right\};$$

(iii) Toda trajetória se estabiliza no conjunto  $\mathcal{N}_\epsilon$  dos pontos estacionários, isto é, para todo  $Y \in \mathcal{H}$  temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_{\mathcal{H}}(S_\epsilon(t)Y, \mathcal{N}_\epsilon) = 0.$$

Em particular, existe um atrator global minimal  $\mathfrak{A}_\epsilon^{\min}$  dado por  $\mathfrak{A}_\epsilon^{\min} = \mathcal{N}_\epsilon$ ;

(iv) O atrator  $\mathfrak{A}_\epsilon$  possui dimensão fractal finita  $\dim_{\mathcal{H}}^f \mathfrak{A}_\epsilon$ ;

(v) O atrator global  $\mathfrak{A}_\epsilon$  é limitado em

$$\mathcal{H}_1 = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))^3 \times (H_0^1(0, L))^3. \quad (4.104)$$

Além disso, qualquer trajetória  $Y = (u, v, w, u_t, v_t, w_t)$  em  $\mathfrak{A}_\epsilon$  satisfaz

$$\|(u, v, w)\|_{(H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L))^3}^2 + \|(u_t, v_t, w_t)\|_{(H_0^1(0,L))^3}^2 + \|(u, v, w)\|_{(L^2(0,L))^3}^2 \leq R_1^2, \quad (4.105)$$

para alguma constante  $R_1 > 0$  independente de  $\epsilon \in [0, 1]$ ;

(vi) O sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  possui um atrator exponencial generalizado. Mais precisamente, para qualquer  $\delta \in (0, 1]$ , existe um atrator exponencial generalizado  $\mathfrak{A}_{\epsilon, \delta}^{\text{exp}} \subset \mathcal{H}$ , com dimensão fractal finita no espaço estendido  $\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}$ , definido como interpolação de

$$\tilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \quad e \quad \tilde{\mathcal{H}}_{-1} := (L^2(0, L))^3 \times (H^{-1}(0, L))^3. \quad (4.106)$$

### Prova:

(i) (a) Como  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é definido como o operador solução do problema (4.1)-(4.2), o Teorema 4.1 implica que (1.24) e (1.25) são satisfeitas com  $X = (H_0^1(0, L))^3$  e  $Y = (H_0^1(0, L))^3$ .

(b) A seguir, verificamos as desigualdades (1.26) e (1.27). Seja  $B \subset \mathcal{H}$  um conjunto positivamente invariante e limitado para o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$ . Denotamos

$$S_\epsilon(t)Y^i = (u^i, v^i, w^i, u_t^i, v_t^i, w_t^i), \quad i = 1, 2, \quad (4.107)$$

com  $Y^i \in B, i = 1, 2$  e sejam  $u = u^1 - u^2, v = v^1 - v^2, w = w^1 - w^2$ . Segue de (2.148) que

$$\|S_\epsilon(t)Y^1 - S_\epsilon(t)Y^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a(t)\|Y^1 - Y^2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.108)$$

com  $a(t) = e^{C(R, \rho_1, \rho_2, \rho_3)T}$ . Consideramos a semi-norma  $n_X$  em  $X$  definida por

$$n_X(u, v, w) = \sqrt{\|u\|_{2p}^2 + \|v\|_{2p}^2 + \|w\|_{2p}^2}. \quad (4.109)$$

Como a imersão (em 1D)  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^{2p}(0, L)$  é compacta, então  $n_X$  é uma seminorma compacta em  $X$ .

(c) Pelo Lema 4.5, podemos escrever

$$\|S_\epsilon(t)Y^1 - S_\epsilon(t)Y^2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b(t)\|Y^1 - Y^2\|_{\mathcal{H}}^2 + c(t) \sup_{s \in [0, t]} [n_X(u(s), v(s), w(s))]^2, \quad (4.110)$$

com

$$b(t) = \vartheta_B e^{-\eta_B t}, \quad c(t) = C_B.$$

Verifica-se facilmente que

$$b(t) \in L^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0. \quad (4.111)$$

Como  $B \in \mathcal{H}$  é limitado, temos que  $c(t)$  é localmente limitada em  $[0, \infty)$ . Portanto, o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é quase-estável sobre qualquer conjunto positivamente e limitado  $B \subset \mathcal{H}$ .

- (ii) Como o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é quase-estável, pela Proposição 1.13, temos que  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é assintoticamente suave. Além disso, pelo Lema 4.3, o sistema dinâmico em questão é gradiente e

$$\Phi_\epsilon(Y) \rightarrow \infty \iff \|Y\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (4.112)$$

Também, pelo Lema 4.4, temos que o conjunto  $\mathcal{N}_\epsilon$  dos pontos estacionários de  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é limitado em  $\mathcal{H}$ . Logo, pelo Teorema 1.11, obtemos que o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  possui atrator global dado por  $\mathfrak{A}_\epsilon = W^u(\mathcal{N}_\epsilon)$ .

- (iii) Pelo item anterior, temos que o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  possui atrator global. Logo, pelo Teorema 1.12, toda trajetória se estabiliza no conjunto  $\mathcal{N}_\epsilon$ , ou seja, para todo  $Y \in \mathcal{H}$ , tem-se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_{\mathcal{H}}(S_\epsilon(t)Y, \mathcal{N}_\epsilon) = 0. \quad (4.113)$$

Em particular, existe um atrator global minimal  $\mathfrak{A}_\epsilon^{\min}$  dado por  $\mathfrak{A}_\epsilon^{\min} = \mathcal{N}_\epsilon$ ;

- (iv) Do exposto acima, o sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  possui atrator global dado por  $\mathfrak{A}_\epsilon = W^u(\mathcal{N}_\epsilon)$  e, em particular, é quase-estável em  $\mathfrak{A}_\epsilon$ . Então, pelo Teorema 1.14, obtemos que o atrator  $\mathfrak{A}_\epsilon$  possui dimensão fractal finita  $\dim_{\mathcal{H}}^f \mathfrak{A}_\epsilon$ .

- (v) Como sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  é quase-estável em  $\mathfrak{A}_\epsilon$  e (4.110) é satisfeito com  $c(t)$  satisfazendo

$$c_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} c(t) = C_B < \infty.$$



Então, pelo Teorema 1.15 qualquer trajetória completa  $Y = (u, v, w, u_t, v_t, w_t) \in \mathfrak{A}_\epsilon$  possui a seguinte regularidade

$$u_t, v_t, w_t \in L^\infty(\mathbb{R}, H_0^1(0, L)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(0, L)), \quad (4.114)$$

e

$$u_{tt}, v_{tt}, w_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2(0, L)). \quad (4.115)$$

Em particular, existe  $R > 0$  tal que

$$\|(u_t, v_t, w_t)\|_{(H_0^1(0, L))^3}^2 + \|(u_t, v_t, w_t)\|_{(L^2(0, L))^3}^2 \leq R^2. \quad (4.116)$$

Portanto, usando (25), o fato de que os termos não lineares são contínuos e usando um argumento análogo à (4.51)-(4.55), concluímos que existe uma constante  $R' > 0$  tal que

$$\|(u, v, w)\|_{(H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))^3}^2 \leq R'. \quad (4.117)$$

Portanto, obtemos (4.105). Como o atrator global  $\mathfrak{A}_\epsilon$  também é caracterizado da seguinte forma

$$\mathfrak{A}_\epsilon = \left\{ Y(0) : Y \text{ é uma trajetória completa limitada de } S_\epsilon(t) \right\}, \quad (4.118)$$

obtemos que  $\mathfrak{A}_\epsilon$  é limitada em  $\mathcal{H}_1$ .

- (vi) (a) Seja  $\Phi_\epsilon$  o funcional de Lyapunov definido no Lema 4.3. Podemos facilmente verificar que o conjunto  $\mathcal{B} = \{U : \Phi_\epsilon(U) \leq R\}$ , é positivamente invariante, limitado e absorvente para algum  $R > 0$  suficientemente grande. Para a solução  $Y(t)$  com dado inicial  $Y_0 = Y(0) \in \mathcal{B}_R$ , existe  $C_B > 0$  tal que para qualquer  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\|Y_t\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}} \leq C_B, \quad (4.119)$$

que garante que para qualquer  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ,

$$\|S_\epsilon(t_1)Y_0 - S_\epsilon(t_2)Y_0\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}} \leq \int_{t_1}^{t_2} \|Y_t(\tau)\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}} d\tau \leq C_B |t_1 - t_2|. \quad (4.120)$$

Por (4.120), concluímos que para qualquer  $Y_0 \in \mathcal{B}$ , a aplicação  $t \rightarrow S_\epsilon(t)Y_0$  é Hölder contínua no espaço estendido  $\tilde{\mathcal{H}}$  com expoente  $\alpha = 1$ . Então, pelo Teorema 1.16, obtemos a existência de um atrator exponencial generalizado cuja a dimensão fractal é finita em  $\tilde{\mathcal{H}}_{-1}$ .

- (b) Agora, provamos a existência de atrator exponencial generalizado em  $\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}$  com  $\delta \in (0, 1)$ . Pelo teorema de interpolação, temos

$$\|Y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}} \leq C \|Y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_0}^{1-\delta} \|Y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}}^\delta \leq C_B^{1-\delta} \|Y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}}^\delta \quad (4.121)$$

Em particular,

$$\|S_\epsilon(t_1)Y - S_\epsilon(t_2)Y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}} \leq C_B^{1-\delta} \|S_\epsilon(t_1)Y - S_\epsilon(t_2)Y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-1}}^\delta. \quad (4.122)$$

Usando a última estimativa em (4.120), obtemos

$$\|S_\epsilon(t_1)Y - S_\epsilon(t_2)Y\|_{\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}} \leq C_B |t_1 - t_2|^\delta, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]. \quad (4.123)$$

Usando novamente o Teorema 1.16 concluímos que existe um atrator exponencial generalizado com dimensão fractal finita em  $\tilde{\mathcal{H}}_{-\delta}$  com  $\delta \in (0, 1)$ . A prova está completa. ■

## 4.6 Semicontinuidade superior de atratores globais

Nesta seção, investigamos a continuidade do atrator  $\mathfrak{A}_\epsilon$  quando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ . Inicialmente, provamos que esta família de atratores é contínua em um subconjunto denso residual de  $[0, 1]$  no sentido do Teorema 1.17. Em seguida, provamos a semicontinuidade superior para todo  $\epsilon \in [0, 1]$ .

Nosso próximo objetivo é fornecer uma limitação uniforme do atrator com relação ao parâmetro  $\epsilon$ . Para este fim, usamos uma relação proveniente da estrutura gradiente do sistema dada no seguinte lema (veja [27, Observação 7.5.8]).

**Lema 4.6.** *Sob as hipóteses do Lema 4.3, a seguinte desigualdade é válida:*

$$\sup \{ \Phi_\epsilon(Y) : Y \in \mathfrak{A}_\epsilon \} \leq \sup \{ \Phi_\epsilon(Y) : Y \in \mathcal{N}_\epsilon \}.$$

**Lema 4.7.** *O sistema dinâmico  $(\mathcal{H}, S_\epsilon(t))$  possui um conjunto absorvente e limitado  $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{H}$  uniformemente com relação ao parâmetro  $\epsilon \in [0, 1]$ .*

**Prova:** Por (4.21) e pelo Lema 4.6, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{Y \in \mathfrak{A}_\epsilon} \|Y\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{\sup_{Y \in \mathfrak{A}_\epsilon} \Phi_\epsilon(Y) + C_1}{C_0} \\ &\leq \frac{\sup_{Y \in \mathcal{N}_\epsilon} \Phi_\epsilon(Y) + C_1}{C_0} \\ &\leq \frac{C_2 \sup_{Y \in \mathcal{N}_\epsilon} \|Y\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + C_1 + C_2}{C_0}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Como pelo Lema 4.4 o conjunto  $\mathcal{N}_\epsilon$  é limitado em  $\mathcal{H}$  uniformemente com relação à  $\epsilon$ , concluímos que existe uma constante  $K_0 > 0$  independente de  $\epsilon$  tal que

$$\sup_{Y \in \mathfrak{A}_\epsilon} \|Y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_0. \quad (4.125)$$

Então, fazendo  $R_0^2 = K_0 + 1$ , a bola fechada  $\mathcal{B}_0 = \{Y \in \mathcal{H} : \|Y\|_{\mathcal{H}} \leq R_0\}$  é um conjunto absorvente limitado de  $\mathcal{H}$  uniformemente em  $\epsilon \in [0, 1]$ . ■

**Teorema 4.3** (Continuidade residual). *Sob as hipóteses do Teorema 4.2, existe um conjunto  $I_*$  residual e denso em  $[0, 1]$  tal que  $\mathfrak{A}_\epsilon$  é contínuo em  $\epsilon_0 \in I_*$ , isto é,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} d_{\mathcal{H}}(\mathfrak{A}_\epsilon, \mathfrak{A}_{\epsilon_0}) = 0, \quad \forall \epsilon_0 \in I_*. \quad (4.126)$$

**Prova:** Nosso objetivo é verificar as propriedades (L1) – (L3) do Teorema 1.17 com  $\Lambda = [0, 1]$  para concluir o resultado.

(a) O Teorema 4.2-(ii) nos garante que  $S_\epsilon(t)$  possui atrator global  $\mathfrak{A}_\epsilon$  para todo  $\epsilon \in [0, 1]$ . Logo, a propriedade (L1) é satisfeita.

(b) Consideramos o conjunto absorvente e limitado  $\mathcal{B}_0$  independente de  $\epsilon$  dado pelo Lema 4.7. Usando o fato que  $\mathcal{B}_0$  é também fechado e atrai limitados, a minimalidade do atrator implica que

$$\mathfrak{A}_\epsilon \subset \mathcal{B}_0, \quad \forall \epsilon \in [0, 1].$$

Assim, a propriedade (L2) é satisfeita.

(c) Para mostrar a propriedade (L3), consideramos  $D \subset \mathcal{H}$  um conjunto limitado. Sejam  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, 1]$ ,  $Y_0 \in D$  e denotamos

$$S_{\epsilon_i}(t)Y_0 = (u^i(t), v^i(t), w^i(t), u_t^i(t), v_t^i(t), w_t^i(t)), i = 1, 2, \quad (4.127)$$

e as diferenças  $u = u^1 - u^2$ ,  $v = v^1 - v^2$  e  $w = w_1 - w_2$ . Então,  $Y = (u, v, w, u_t, v_t, w_t)$  é a solução do sistema

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} v_{xx} - a_{13} w_{xx} = -F_1(u, v, w) - G_1(u_t) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)h_1, \\ \rho_2 v_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} v_{xx} - a_{23} w_{xx} = -F_2(u, v, w) - G_2(v_t) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)h_2, \\ \rho_3 w_{tt} - a_{13} u_{xx} - a_{23} v_{xx} - a_{33} w_{xx} = -F_3(u, v, w) - G_3(w_t) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)h_3, \end{cases} \quad (4.128)$$

com

$$F_j(u, v, w) = f_j(u^1, v^1, w^1) - f_j(u^2, v^2, w^2), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.129)$$

e

$$G_1(u_t) = g_1(u_t^1) - g_1(u_t^2), G_2(v_t) = g_2(v_t^1) - g_2(v_t^2), G_3(w_t) = g_3(w_t^1) - g_3(w_t^2) \quad (4.130)$$

Multiplicando cada equação de (4.128) por  $u_t, v_t$  e  $w_t$ , respectivamente. Em seguida, inte-

grando por partes sobre  $[0, L]$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Y\|_{\mathcal{H}}^2 &= - \int_0^L (F_1(u, v, w)u_t + F_2(u, v, w)v_t + F_3(u, v, w)w_t) dx \\ &\quad - \int_0^L (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t + G_3(w_t)w_t) dx \\ &\quad + (\epsilon_1 - \epsilon_2) \int_0^L (h_1u_t + h_2v_t + h_3w_t) dx. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Usando (4.5), a desigualdade de Hölder e a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L F_1(u, v, w)u_t dx &\leq C(1 + \|S_{\epsilon_1}(t)Y_0\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + \|S_{\epsilon_2}(t)Y_0\|_{\mathcal{H}}^{p-1})(\|u\|_{2p} + \|v\|_{2p} + \|w\|_{2p})\|u_t\|_2 \\ &\leq C(1 + \|S_{\epsilon_1}(t)Y_0\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + \|S_{\epsilon_2}(t)Y_0\|_{\mathcal{H}}^{p-1})(\|u_x\|_2 + \|v_x\|_2 + \|w_x\|_2)\|u_t\|_2. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Usando o fato de que  $\mathcal{E}_\epsilon(t)$  é uma função não crescente e (4.21), temos que para  $i = 1, 2$ ,

$$\|S_{\epsilon_i}(t)Y_0\|_{\mathcal{H}}^{p-1} \leq \frac{\mathcal{E}_{\epsilon_i}(0) + C_1}{C_0} \leq \frac{C_2(1 + \|Y_0\|_{\mathcal{H}}^{p+1})}{C_0} \leq C_D, \quad \forall Y_0 \in D. \quad (4.133)$$

Substituindo a estimativa (4.133) em (4.132), em seguida, usando a desigualdade de Young, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_0^L F_1(u, v, w)u_t dx &\leq C_D(\|u_x\|_2 + \|v_x\|_2 + \|w_x\|_2)\|u_t\|_2 \\ &\leq C_D(\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) + \rho_1\|u_t\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.134)$$

Analogamente, temos

$$\int_0^L F_2(u, v, w)v_t dx \leq C_D(\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) + \rho_2\|v_t\|_2^2, \quad (4.135)$$

e

$$\int_0^L F_3(u, v, w)w_t dx \leq C_D(\|u_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) + \rho_3\|w_t\|_2^2. \quad (4.136)$$

Somando as desigualdades (4.134)-(4.136) e usando (2.11), concluímos que

$$\int_0^L (F_1(u, v, w)u_t + F_2(u, v, w)v_t + F_3(u, v, w)w_t) dx \leq C_D\|Y\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.137)$$

Por (4.10), obtemos

$$- \int_0^L (G_1(u_t)u_t + G_2(v_t)v_t + G_3(w_t)w_t) dx \leq 0. \quad (4.138)$$

Além disso, pelas desigualdades de Hölder e Young, temos que

$$\begin{aligned} &(\epsilon_1 - \epsilon_2) \int_0^L (h_1u_t + h_2v_t + h_3w_t) dx \\ &\leq \frac{1}{4}(\rho_1\|u_t\|_2^2 + \rho_2\|v_t\|_2^2 + \rho_3\|w_t\|_2^2) + |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 \left( \frac{\|h_1\|_2^2}{\rho_1} + \frac{\|h_2\|_2^2}{\rho_2} + \frac{\|h_3\|_2^2}{\rho_3} \right) \\ &\leq \frac{1}{4}\|Y\|_{\mathcal{H}}^2 + |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 \left( \frac{\|h_1\|_2^2}{\rho_1} + \frac{\|h_2\|_2^2}{\rho_2} + \frac{\|h_3\|_2^2}{\rho_3} \right). \end{aligned} \quad (4.139)$$

Substituindo as estimativas (4.137)-(4.139) em (4.131), obtemos

$$\frac{d}{dt}\|Y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_D\|Y\|_{\mathcal{H}}^2 + |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 \left( \frac{\|h_1\|_2^2}{\rho_1} + \frac{\|h_2\|_2^2}{\rho_2} + \frac{\|h_3\|_2^2}{\rho_3} \right). \quad (4.140)$$

Aplicando a desigualdade de Grönwall à estimativa (4.140) e usando o fato de que  $\|Y(0)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ , concluímos que

$$\|Y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{C_D}(e^{C_D t} - 1) \left( \frac{\|h_1\|_2^2}{\rho_1} + \frac{\|h_2\|_2^2}{\rho_2} + \frac{\|h_3\|_2^2}{\rho_3} \right) |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2, \quad t > 0. \quad (4.141)$$

Como  $\|S_{\epsilon_1}(t)Y_0 - S_{\epsilon_2}(t)Y_0\|_{\mathcal{H}} = \|Y\|_{\mathcal{H}}$ , segue que

$$\|S_{\epsilon_1}(t)Y_0 - S_{\epsilon_2}(t)Y_0\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{\frac{1}{C_D}(e^{C_D t} - 1) \left( \frac{\|h_1\|_2^2}{\rho_1} + \frac{\|h_2\|_2^2}{\rho_2} + \frac{\|h_3\|_2^2}{\rho_3} \right) |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2}, \quad (4.142)$$

o que mostra a validade da propriedade (L3). Temos então que todas as hipóteses do Teorema 1.17 são satisfeitas. Logo, existe um conjunto residual e denso  $I_* \subset [0, 1]$  tal que o limite (4.126) é satisfeito, o que completa a prova o teorema. ■

**Teorema 4.4** (Semicontinuidade superior). *Sob as hipóteses do Teorema 4.2, a família de atratores globais  $\mathfrak{A}_\epsilon$  é semicontínua superiormente em  $\epsilon \in [0, 1]$ , ou seja,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{A}_\epsilon, \mathfrak{A}_{\epsilon_0}) = 0, \quad \forall \epsilon \in [0, 1]. \quad (4.143)$$

**Prova:** A provamos por contradição. Suponhamos que o limite (4.143) não seja satisfeito. Então existem  $\delta > 0$  e seqüências  $\epsilon_n \rightarrow \epsilon_0$  e  $Y_0^n \in \mathfrak{A}_{\epsilon_n}$ , tais que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(Y_0^n, \mathfrak{A}_{\epsilon_n}) \geq \delta > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.144)$$

Seja  $Y_n(t) = (u^n(t), v^n(t), w^n(t), u_t^n(t), v_t^n(t))$  uma trajetória completa em  $\mathfrak{A}_{\epsilon_n}$  tal que  $Y^n(0) = Y_0^n$ . De acordo com a estimativa uniforme (4.105), temos que

$$\{Y^n\} \text{ é limitada em } L^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{H}_1). \quad (4.145)$$

Desde que  $\mathcal{H}_1$  é compactamente imerso em  $\mathcal{H}$ , pelo teorema de compacidade de Simon (veja [77]), obtemos uma subsequência  $\{Y^{n_k}\}$  e  $Y \in C([-T, T]; \mathcal{H})$  tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [-T, T]} \|Y^{n_k}(t) - Y(t)\|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (4.146)$$

Por (4.145) e (4.146), concluímos que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|Y(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty. \quad (4.147)$$

Usando um argumento análogo como na prova da propriedade (L3), vemos que

$$Y(t) = (u(t), v(t), w(t), u_t(t), v_t(t), w_t(t)) \quad (4.148)$$

é solução fraca do problema limite ( $\epsilon = \epsilon_0$ )

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11} u_{xx} - a_{12} v_{xx} - a_{13} w_{xx} + f_1(u, v, w) + g_1(u_t) = \epsilon_0 h_1, \\ \rho_2 v_{tt} - a_{12} u_{xx} - a_{22} v_{xx} - a_{23} w_{xx} + f_2(u, v, w) + g_2(v_t) = \epsilon_0 h_2, \\ \rho_3 w_{tt} - a_{13} u_{xx} - a_{23} v_{xx} - a_{33} w_{xx} + f_3(u, v, w) + g_3(w_t) = \epsilon_0 h_3. \end{cases} \quad (4.149)$$

Portanto  $Y(t)$  é uma trajetória completa e limitada para o semigrupo limite  $S_{\epsilon_0}(t)$ . Consequentemente,

$$Y_0^{n_k} \rightarrow Y(0) \in \mathfrak{A}_0, \quad (4.150)$$

o que contradiz (4.144). Isso finaliza a prova. ■

# Capítulo 5

## Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho, discutimos a boa colocação, o decaimento uniforme, blow e a dinâmica a longo prazo das soluções para um sistema de mistura ternária de sólidos. Primeiro, usando a teoria de operadores monótonos e semigrupos não lineares, provamos os resultados sobre a existência de soluções fracas locais e globais, e a unicidade das soluções fracas. Em seguida, provamos que tais soluções únicas dependem continuamente dos dados iniciais. Sob algumas restrições nos expoentes dos dampings e fontes, também provamos que cada solução fraca do sistema possui blow-up em tempo finito, desde que a energia inicial seja negativa e as fontes sejam mais dominantes do que os dampings no sistema. Usando o método do poço potencial, provamos a existência de uma única solução fraca global começando na parte “boa” do poço potencial e mostramos que a energia total do sistema decai exponencialmente ou algébricamente, dependendo do comportamento da dissipação próximo a origem. Esses resultados foram as primeiras contribuições para a estabilização de sistemas não lineares de mistura ternária de sólidos. O único trabalho que encontramos na literatura é devido a F. Dell’Oro e Rivera [31], mas esse trata do caso linear.

Na segunda parte deste trabalho, consideramos o sistema de mistura ternária de com forças externas. Usando a metodologia de quase-estabilidade proposta por Chueshov e Lasiecka [27], provamos a existência de atrator global suave com dimensão fractal finita. Usamos os recentes resultados devida a Hoang et al. [47] para investigar a continuidade dos atratores com relação a um parâmetro de força em um conjunto denso e residual.

Essas conclusões, deram novas contribuições para a teoria relacionada com a dinâmica não linear de sistemas de misturas ternárias de sólidos, e teve como resultado dois artigos publicados [35, 37].

Finalizamos nossos estudos com algumas questões que ainda não obtivemos respostas. No Teorema 2.6, provamos um resultado de blow-up em tempo finito para quando a solução que

começam dentro do poço potencial com energia total inicial  $0 \leq \mathcal{E}(0) < d$ . É uma questão não trivial provar um resultado sobre blow-up de soluções em um nível de energia inicial arbitrariamente alto, ou seja,  $\mathcal{E}(0) > d$ . Essas questões foram tratadas no trabalho Gazzola e Squassina [38] para equações de ondas. Tais questões, certamente, abrem caminho para pesquisas futuras sobre problemas de mistura ternárias, onde também pretendemos abordar a análise do caso não autônomo e estudar questões relacionadas a existência e continuidade de atratores pullback para o processo de evolução associado [24].



# Bibliografia

- [1] K. Agre and M. A. Rammaha. Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms. *Differ. Integral Equ.*, 19:1235–1270, 2006.
- [2] C. O. Alves, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, M. A. Rammaha, and D. Toundykov. On existence, uniform decay rates and blow up for solutions of systems of nonlinear wave equations with damping and source terms. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2:583–608, 2009.
- [3] M. S. Alves, C. L. Cardozo, and R. N. Monteiro. Finite dimensional attractors for binary mixtures of viscoelastic bodies. *Appl. Anal.*, 100:3613–3628, 2021.
- [4] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, and R. Quintanilla. Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. *Int. J. Solids Struct.*, 46:1659–1666, 2009.
- [5] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, and O. V. Villagrán. Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids. *Int. J. Solids Struct.*, 24:4151–4162, 2009.
- [6] T. A. Apalara. General stability result of swelling porous elastic soils with a viscoelastic damping. *Z. Angew. Math. Phys.*, 71:1–10, 2020.
- [7] T. A. Apalara, M. O. Yusuf, and B. A. Salami. On the control of viscoelastic damped swelling porous elastic soils with internal delay feedbacks. *J. Math. Anal. Appl.*, 504:125429, 2021.
- [8] R. Atkin and R. Craine. Continuum theories of mixtures: applications. *IMA J. Appl. Math.*, 17:153–207, 1976.
- [9] R. Atkin and R. Craine. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. *Quat. J. Mech. Appl. Math.*, 29:209–244, 1976.
- [10] A. V. Babin and S. Y. Pilyugin. Continuous dependence of attractors on the shape of domain. *J. Math. Sci.*, 87:3304–3310, 1997.

- [11] M. Baer and J. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials. *Int. J. Multiph. Flow*, 12:861–889, 1986.
- [12] A. V. Banbin and M. I. Vishik. Attractors of evolution equations. *North Holland, Amsterdam*, 1992.
- [13] V. Barbu. *Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems*, volume 190. Mathematics in Science and Engineering, Academic Press Inc, Boston, 1993.
- [14] V. Barbu. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, volume 190 of *Springer Monographs in Mathematics*. Springer, New York, 2010.
- [15] A. Bedford and D. S. Drumheller. Theories of immiscible and structured mixtures. *Int. J. Eng. Sci.*, 21:863–960, 1983.
- [16] J. E. Billotti and J. P. Lasalle. Dissipative periodic processes. *Bull. Am. Math. Soc.*, 77:1082–1088, 1971.
- [17] L. Bociu. Local and global wellposedness of weak solutions for the wave equation with nonlinear boundary and interior sources of supercritical exponents and damping. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 71:560–575, 2009.
- [18] L. Bociu and I. Lasiecka. Blow-up of weak solutions for the semilinear wave equations with nonlinear boundary and interior sources and damping. *Appl. Math.*, 35:281–304, 2008.
- [19] L. Bociu and I. Lasiecka. Uniqueness of weak solutions for the semilinear wave equations with supercritical boundary/interior sources and damping. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 22:835–860, 2008.
- [20] L. Bociu and I. Lasiecka. Local Hadamard well-posedness for nonlinear wave equations with supercritical sources and damping. *J. Differ. Equ.*, 249:654–683, 2010.
- [21] R. d. Boer, P. Lade, and E. U. F. 10-Bauwessen;. Towards a general plasticity theory for empty and saturated porous solids. *Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität Essen*, 1991.
- [22] R. M. Bowen. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Eng. Sci.*, 18:1129–1148, 1980.
- [23] R. M. Bowen and J. Wiese. Diffusion in mixtures of elastic materials. *Int. J. Eng. Sci.*, 7:689–722, 1969.

- [24] A. Carvalho, J. A. Langa, and J. Robinson. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, volume 182. Springer, 2013.
- [25] A. Choucha, S. M. Boulaaras, D. Ouchenane, B. B. Cherif, and M. Abdalla. Exponential stability of swelling porous elastic with a viscoelastic damping and distributed delay term. *J. Funct. Spaces*, 2021:Article ID 5581634, 2021.
- [26] I. Chueshov, M. Eller, and I. Lasiecka. On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 27:1901–1951, 2002.
- [27] I. Chueshov and I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations. Well-posedness and Long Time Dynamics*. Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.
- [28] M. Conti, S. Gatti, and V. Pata. Uniform decay properties of linear volterra integro-differential equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18:21–45, 2008.
- [29] R. De Boer and W. Ehlers. On the problem of fluid-and gas-filled elasto-plastic solids. *Int. J. Solids Struct.*, 22:1231–1242, 1986.
- [30] R. De Boer and S. J. Kowalski. A plasticity theory for fluid-saturated porous solids. *Int. J. Eng. Sci.*, 21:1343–1357, 1983.
- [31] F. Dell Oro and J. E. Muñoz Rivera. Stabilization of ternary mixtures with frictional dissipation. *Asymptot. Anal.*, 89:235–262, 2014.
- [32] M. M. Freitas, A. L. C. Costa, and G. M. Santos, Araújo. Pullback dynamics of a non-autonomous mixture problem in one dimensional solids with nonlinear damping. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 19:785–809, 2020.
- [33] M. M. Freitas, A. J. A. Ramos, D. S. Almeida Júnior, P. T. P. Aum, and J. L. L. Almeida. Global and exponential attractors for mixtures of solids with fourier’s law. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 63:103391, 2022.
- [34] M. M. Freitas, A. J. A. Ramos, M. J. Ds Santos, L. G. R. Miranda, and J. L. L. Almeida. Asymptotic analysis and upper semicontinuity with respect to delay term of attractors to binary mixtures of solids. *Asymptot. Anal*, Pre-press:1–26, 2021.
- [35] M. M. Freitas, A. J. A. Ramos, B. Feng, M. L. Santos, and H. C. M. Rodrigues. Existence and continuity of global attractors for ternary mixtures of solids. *Discrete Contin. Dyn. Syst. - B*, 26:1–21, 2021.

- [36] M. M. Freitas, A. J. A. Ramos, and M. L. Santos. Existence and upper-semicontinuity of global attractors for binary mixtures solids with fractional damping. *Appl. Math. Optim.*, 82:1353–1385, 2021.
- [37] M. M. Freitas, A. J. A. Ramos, M. L. Santos, and H. C. M. Rodrigues. Blow-up and uniform decay rates of solutions for ternary mixtures with interplay between nonlinear damping and source terms. *Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste*, 53:1–70, 2021.
- [38] F. Gazzola and M. Squassina. Global solutions and finite time blow up for damped semilinear wave equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré (C) Anal. Non Linéaire*, 23:185–207, 2006.
- [39] V. Georgiev and G. Todorova. Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *J. Differ. Equ.*, 109:295–308, 1994.
- [40] A. Green and T. Steel. Constitutive equations for interacting continua. *Int. J. Eng. Sci.*, 4:483–500, 1966.
- [41] A. E. Green and P. M. Naghdi. A dynamical theory of interacting continua. *Int. J. Eng. Sci.*, 3:231–241, 1965.
- [42] A. E. Green and P. M. Naghdi. A note on mixtures. *Int. J. Eng. Sci.*, 6:631–635, 1968.
- [43] Y. Guo and M. A. Rammaha. Blow-up of solutions to systems of nonlinear wave equations with supercritical sources. *Appl. Anal.*, 92,:1101–1115, 2013.
- [44] Y. Guo and M. A. Rammaha. Global existence and decay of energy to systems of wave equations with damping and supercritical sources. *Z. Angew. Math. Phys.*, 64:621–658, 2013.
- [45] Y. Guo and M. A. Rammaha. Systems of nonlinear wave equations with damping and supercritical sources. *Trans. Am. Math. Soc.*, 366:2265–2325, 2014.
- [46] J. K. Hale. Asymptotic behavior of dissipative systems. *Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, Providence, RI*, 1988.
- [47] L. Hoang, E. Olson, and J. Robinson. On the continuity of global attractors. *Proc. Am. Math. Soc.*, 143:4389–4395, 2015.
- [48] M. A. Horn and I. Lasiecka. Asymptotic behavior with respect to thickness of boundary stabilizing feedback for the Kirchhoff plate. *J. Differ. Equ.*, 114:396–433, 1994.

- [49] D. Iesan and R. Quintanilla. existence and continuous dependence results in the theory of interacting continua. *J. Elast.*, 36:85–98, 1994.
- [50] S. M. Klisch and J. C. Lotz. A special theory of biphasic mixtures and experimental results for human annulus fibrosus tested in confined compression. *J. Biomech. Eng.*, 122:180–188, 2000.
- [51] H. Koch and I. Lasiecka. *Hadamard well-posedness of weak solutions in nonlinear dynamic elasticity-full von Karman systems*, volume 50. Evolution equations, semigroups and functional analysis (Milano, 2000), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser, Basel, pp. 197–216, 2002.
- [52] O. A. Ladyzhenskaya. Attractors for semigroups and evolution equations. *Cambridge: Cambridge University Press*, 1991.
- [53] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications. Vol. I: Ordinary Differential Equations*, in: *Mathematics in Science and Engineering*, volume 55-I. Academic Press, New York, 1969.
- [54] I. Lasiecka and D. Tataru. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping. *Differ. Integral Equ.*, 6:507–533, 1993.
- [55] I. Lasiecka and D. Toundykov. Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 64:1757–1797, 2006.
- [56] K.-A. Lie and R. Juanes. A front-tracking method for the simulation of three-phase flow in porous media. *Comput. Geosci.*, 9:29–59, 2005.
- [57] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution Des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*. Dunod Paris, 1969.
- [58] T. F. Ma and R. N. Monteiro. Singular limit and long-time dynamics of bresse systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 49:2468–2495, 2017.
- [59] P. Pei, M. A. Rammaha, and D. Toundykov. Local and global well-posedness of semilinear Reissner-Mindlin-Timoshenko plate equations. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 105:62–85, 2014.
- [60] D. R. Pitts and M. A. Rammaha. Global existence and non-existence theorems for nonlinear wave equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 51:1479–1509, 2002.

- [61] F. F. C. Puma and J. E. Muñoz Rivera. The lack of polynomial stability to mixtures with frictional dissipation. *J. Math. Anal. Appl.*, 446:1882–1897, 2017.
- [62] R. Quintanilla. Exponential stability for one-dimensional problem of swelling porous elastic soils with fluid saturation. *J. Comput. Appl. Math.*, 145:525–533, 2002.
- [63] R. Quintanilla. Existence and exponential decay in the linear theory of viscoelastic mixtures. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 24:311–324, 2005.
- [64] R. Quintanilla. Exponential decay in mixtures with localized dissipative term. *Appl. Math. Lett.*, 18:1381–1388, 2005.
- [65] K. Rajagopal and L. Tao. *Mechanics of mixtures*, world scientific, singapore, 1995.
- [66] M. A. Rammaha and S. Sakuntasathien. Critically and degenerately damped systems of nonlinear wave equations with source terms. *Appl. Anal.*, 89:1201–1227, 2010.
- [67] M. A. Rammaha and S. Sakuntasathien. Global existence and blow up of solutions to systems of nonlinear wave equations with degenerate damping and source terms. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 72:2658–2683, 2010.
- [68] M. A. Rammaha and T. A. Strei. Global existence and nonexistence for nonlinear wave equations with damping and source terms. *Trans. Am. Math. Soc.*, 354:3621–3637, 2002.
- [69] M. A. Rammaha and Z. Welstein. Hadamard well-posedness for wave equations with p-laplacian damping and supercritical sources. *Adv. Differ. Equ.*, 17:105–150, 2012.
- [70] A. J. A. Ramos, M. M. Freitas, D. S. Almeida, A. S. Noé, and M. J. D. Santos. Stability results for elastic porous media swelling with nonlinear damping. *J. Math. Phys.*, 61:101505, 2020.
- [71] A. J. A. Ramos, D. S. A. Júnior, M. M. Freitas, A. S. Noé, and M. J. D. Santos. Stabilization of swelling porous elastic soils with fluid saturation and delay time terms. *J. Math. Phys.*, 62:021507, 2021.
- [72] J. E. M. Rivera, M. G. Naso, and R. Quintanilla. Decay of solutions for a mixture of thermoelastic solids with different temperatures. *Comput. Math. with Appl.*, 71:991–1009, 2016.
- [73] J. C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic pdes and the theory of global attractors*. Cambridge University Press, 28, 2001.

- [74] M. L. Santos and M. M. Freitas. Global attractors for a mixture problem in one dimensional solids with nonlinear damping and sources terms. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 18:1869–1890, 2019.
- [75] M. L. Santos, M. M. Freitas, and A. J. A. Ramos. Blow-up result and energy decay rates for binary mixtures of solids with nonlinear damping and source terms. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 52:103026, 2020.
- [76] R. E. Showalter. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, volume 49. Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [77] J. Simon. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Ann. di Mat. Pura ed Appl.*, 146:65–96, 1987.
- [78] R. Temam. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. *Philadelphia, PA: SIAM*, 1995.
- [79] C. Truesdell and R. Toupin. The classical field theories. In *Principles of classical mechanics and field theory/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie*, pages 226–858. Springer, 1960.
- [80] J.-M. Wang and B.-Z. Guo. On the stability of swelling porous elastic soils with fluid saturation by one internal damping. *IMA J. Appl. Math.*, 71:565–582, 2006.