UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

**Bráulio Brendo Vasconcelos Maia**

# Um estudo sobre existência e concentração de soluções para classes de problemas elípticos não locais

**BELÉM-PA**

**2020**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

**Bráulio Brendo Vasconcelos Maia**

# Um estudo sobre existência e concentração de soluções para classes de problemas elípticos não locais

Tese apresentada ao colegiado do Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutor em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa**

**Coorientador: Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki**

**BELÉM-PA**
**2020**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

M217e Maia, Braulio Brendo Vasconcelos
Um estudo sobre existência e concentração de soluções para classes de problemas elípticos não locais. / Braulio Brendo Vasconcelos Maia. — 2020.
viii, 83 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa
Coorientador(a): Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. problemas não locais. 2. laplaciano fracionário. 3. equações de Choquard. 4. crescimento exponencial. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

**Bráulio Brendo Vasconcelos Maia**

Um estudo sobre existência e concentração de soluções para classes de problemas elípticos não locais.

Tese apresentada ao colegiado do Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 02 de Março de 2020.
Conceito: Aprovado

Banca Examinadora

Augusto César dos R. Costa

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa (Orientador)
PDM - UFPA

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (Coorientador)
DM - UFScar

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
PDM - UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos
PDM - UFPA

Jeziel do Nascimento Correia

Prof. Dr. Jeziel do Nascimento Correia
Membro externo

When you walk through a storm
Hold your head up high
And don't be afraid of the dark
At the end of a storm
There's a golden sky
And the sweet silver song of a lark
Walk on, through the wind
Walk on, through the rain
Though your dreams be tossed and blown
Walk on, walk on
With hope in your heart
And you'll never walk alone
You'll never walk alone
Walk on, walk on
With hope in your heart
And you'll never walk alone
You'll never walk alone

*Dedico este trabalho aos meus amados pais, José Maia e Maria da Paz, e ao meu irmão Italo. Com eles por perto, eu sei que nunca caminharei sozinho.*

# Agradecimentos


Quando escrevemos páginas de agradecimentos, sempre corremos o risco de parecermos piegas; além disso, nunca conseguimos mensurar o quão gratos somos a alguém, e infelizmente não conseguimos citar todas as pessoas que tiveram importância durante toda essa jornada acadêmica. Mesmo assim, na esperança de que as pessoas citadas abaixo, e todas as outras que me apoiaram, um dia leiam essa página, corro os riscos mencionados acima e faço os devidos agradecimentos.

Primeiramente agradeço a Deus, pelo livre arbítrio.

Agradeço meus pais, José Maia e Maria da Paz, por sempre acreditarem em mim e pelo incessante trabalho que sempre tiveram para tentar me propiciar boas condições de estudo. A meu irmão, Italo Maia, que apesar de ser um homem de poucas palavras, nunca escondeu seu carinho por mim e sempre foi uma companhia muito agradável.

A Edla Vidal (minha namorada, professora de Filosofia e uma das mulheres mais incríveis que já conheci), que me ajudou a ser uma pessoa menos ruim, que sempre me apoiou e me deu um enorme suporte nos momentos mais complicados do Doutorado.

A meu amigo Júnior Cardoso, pela amizade e por ter me companhia nas madrugadas de estudo sempre regadas a café e conversas ocasionais.

Aos amigos do PDM, Claudionei Pereira, Júlio Silva, Jeziel Correia, João Felipe da Silva, José Luiz Solón, Harlem Garcia, Leandro Costa, Luiz Gutemberg, Laila Fontinele, Marcos Cardoso, Maurício Vinhote, Sancho Noé, Suellem Arruda e em especial Leonardo Rogério, pelas discussões matemáticas e por grandes momentos de descontração. Espero que nossa amizade e as discussões matemáticas possam continuar.

Aos amigos Claudiney Barros, Dieremi Luiz, Enivaldo Santos, Isaac Torres, Márcio Nascimento e Ronis da Silva, apesar da distância, sempre me apoiaram e me mostraram extrema consideração e respeito.

A todos os professores PPGME/UFPA, pelas boas aulas e pelo tratamento amigável para comigo desde meu primeiro dia na UFPA, isso sempre foi muito significativo e motivador para mim. Aos demais funcionários do programa, em especial as secretárias Carmem e Carol, pelo bom trabalho feito.

A meu orientador, Augusto César, pela paciência e calma, ensinamentos, oportunidades e toda a liberdade que me deu durante processo de orientação. Além de bom professor, também tem uma personalidade muito agradável e fácil de lidar.

A meu coorientador, Olimpio Miyagaki, pela excelente hospitalidade que me proporcionou quando visitei a UFJF, por todas as conversas e atenção. Foi uma honra imensa trabalhar com o professor Olimpio, um matemático com uma carreira invejável, humilde e cheio de boas histórias.

A banca avaliadora, por aceitar participar deste processo, validando este trabalho perante a comunidade científica e também por todas as considerações feitas.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estudaremos existência e concentração de soluções para diferentes classes de problemas elípticos com caráter não local. Consideraremos três problemas distintos: no primeiro, via argumentos de truncamento, exibiremos existência e concentração de soluções para uma equação elíptica fracionária de Kirchhoff-Schrödinger com crescimento crítico e subcrítico; no segundo estudaremos uma classe de sistemas hamiltonianos envolvendo o laplaciano fracionário e com não linearidade tendo um crescimento exponencial; já no terceiro problema usaremos um método de aproximação de Galerkin para mostrar a existência de solução para um sistema hamiltoniano com o operador laplaciano e não linearidades do tipo Choquard.

**Palavras-chave:** Laplaciano fracionário, problemas não locais, sistemas hamiltonianos, crescimento exponencial, argumentos de truncamento, equações de Choquard, método de Galerkin.

# Abstract

In this work we are concerned with the existence of solutions to different classes of nonlocal elliptic problems. We will consider three distinct problems: in the first one, using truncation arguments, we show the existence and concentration of solutions for a fractional elliptic Kirchhoff-Schrödinger equation with critical and subcritical growth; in the second one we study a class of hamiltonian systems involving the fractional laplacian and with nonlinearities having exponential growth; finally in the third problem, we will use a Galerkin approximation method to show the existence of a solution for a hamiltonian system with the laplacian operator and Choquard nonlinearities.

**Key-words:** Fractional Laplacian, nonlocal problems, hamiltonian systems, exponential growth, truncation arguments, Choquard equation, Galerkin's method.

# Sumário

# Notações

### Notações gerais

- $B_r(x)$ : bola aberta de centro $x$ e raio $r$;
- $\rightarrow$ : convergência forte;
- $\rightharpoonup$: convergência fraca;
- $\langle .,. \rangle_X$: produto interno em $X$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano da função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\square$ : fim de uma demonstração;

### Espaço de Funções

- $C_0(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas com suporte compacto em $\Omega$;
- $C^k(\Omega)$ denota o espaço das funções $k$ vezes continuamente diferenciáveis sobre $\Omega$, $k \in \mathbb{N}$;
- $C^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $\Omega$;
- Para $1 \leq p < \infty$ denotemos

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_\Omega |u|^p < \infty\};$$

- $L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega')$ para todo compacto $\Omega' \subset \Omega\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; |u(x)| \leq C$ q.t.p sobre $\Omega$, para algum $C > 0\}$;

### Normas

- $||u||_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C$ q.t.p em $\Omega\}$ denota a norma do espaço $L^\infty(\Omega)$;
- $|u|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, denota a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- quando estiver claro o conjunto $\Omega$ que estamos trabalhando, denotaremos $|u|_{L^p(\Omega)}$ simplesmente por $|u|_p$.

# Introdução

Neste trabalho, mostraremos existência e concentração de soluções para algumas classes de equações diferenciais elípticas não locais, isto é de equações que não tem dependência pontual de $x \in \mathbb{R}^N$. Trabalharemos nos Capítulos 1 e 2 com um operador não local, o laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$; no Capítulo 3 o termo não local está na não linearidade. Para deixar a leitura mais confortável, exporemos alguns conceitos básicos sobre os espaços de Sobolev fracionário em uma breve seção antes do nosso primeiro capítulo.

Nos últimos anos o estudo de operadores fracionários integro-diferenciais, como o laplaciano fracionário, aplicados a física e em outras áreas do conhecimento humano, têm crescido bastante. Como exemplo, destacamos a equação não linear fracionária de Schrödinger $(FSE)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = D_\alpha (\hbar \Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \psi(x,t) + V(x)\psi(x,t), \tag{1}$$

onde uma solução *standing wave* $\psi$ de (1), é da forma

$$\psi(x,t) = e^{i(E/\hbar)t} u(x), \tag{2}$$

tal que $u$ é uma solução de uma equação semilinear como as estudadas no Capítulo 1, quando o termo não local de Kirchhoff é indenticamente igual a 1..

A equação fracionária de Schrödinger desempenha um papel importante em mecânica quântica no estudo de partículas em campos estocásticos modelados por processos de Levy; para o leitor interessado em uma aborgem mais física, indicamos os primeiros artigos, até onde se sabe, que desenvolveram a equação fracionária de Schrödinger, veja [58] e [59]. Para mais aplicações envolvendo o laplaciano fracionário, citamos [12], [19] e [29].

No Capítulo 1, estudaremos os problemas

$$(P_\lambda) \begin{cases} M\left([u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = \bar{c}u + f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e

$$(P_*) \begin{cases} M\left([u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = h(x)u + u^{2_s^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$

é a seminorma de Gagliardo, $V(x) = \lambda a(x) + 1$, com $\lambda$ um parâmetro positivo e $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função contínua que se anula em um domínio limitado $\Omega_\Upsilon$.

O caráter não local dos problemas acima vem do operador laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ e pelo termo de Kirchhoff $M$. O operador $(-\Delta)^s : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ é o operador laplaciano fracionário definido por

$$(-\Delta)^s u(x) := \lim_{\epsilon \to 0^+} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0;\epsilon)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

onde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é o conjunto de todas as distribuições temperadas e $C(N,s)$ é a seguinte constante positiva de normalização:

$$C(N,s) := \left( \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - \cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}} d\zeta \right)^{-1},$$

com $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$, $\zeta' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Gostaríamos de enfatizar que equações do tipo

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x,u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

e suas variantes vem sendo atualmente intensivamente estudadas. Por exemplo, em [42], Felmer *et. al* mostraram para o caso $V \equiv 1$ a existência de uma solução positiva, regular e simétrica. No artigo [84], Secchi mostra a solução ground state quando $V(x)$ limitado por baixo por uma constante positiva e $V(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$. Para mais referências sobre a equação semilinear fracionária de Schrödinger indicamos [5, 9, 10, 11, 13, 21, 47].

Quando $M \neq 1$ a equação $(P_\lambda)$ está relacionada com a famosa equação de Kirchhoff

$$\rho u_{tt} - \left( \frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L |u_x|^2 dx \right) u_{xx} = 0 \tag{4}$$

introduzida por Kirchhoff [54] em 1883, como uma extensão não linear da equação da onda de D'Alembert para vibrações livres de cordas elásticas. Aqui $u = u(x,t)$ é o deslocamento transversal da corda na coordenada espacial $x$ no tempo $t$, $L$ é o comprimento da corda, $h$ é a área da seção transversal, $E$ é o módulo de Young do material, $\rho$ é a densidade de massa e $P_0$ é a tensão inicial. Até onde sabemos, o artigo [87] foi primeiro trabalho a estudar um problema elíptico com um termo não local do tipo Kirchhoff; citamos também [3, 67] pela importância que tiveram na teoria. Para uma introdução à esta classe de problemas, sugerimos o artigo [66].

Mais recentemente, em [46], Fiscella e Valdinocci introduziram um modelo estacionário de Kirchhoff na perspectiva fracionária, que leva em consideração o aspecto não local da tensão que surge de medições não locais do comprimento fracionário da corda; veja o apêndice em [46] para uma descrição física mais detalhada do modelo fracionário de Kirchhoff.

Existem também trabalhos tratando sobre equações elípticas fracionárias do tipo Schrödinger-Kirchhoff, em [7], Ambrosio estudou o seguinte sistema de Kirchhoff–Schrödinger–Poisson

$$\begin{cases} (p + q[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)})(-\Delta)^s u + \mu\phi u = g(u) \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ (-\Delta)^t \phi = \mu u^2 \text{ em } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

onde $g$ é uma não linearidade do tipo Berestycki–Lions.

Outro exemplo encontra-se em [69], onde Mingqi *et al.* estudaram a seguinte classe de equações do tipo Schrödinger–Kirchhoff envolvendo o operador magnético fracionário.

$$M([u]_{s,A}^2)(-\Delta)_A^s u + V(x)u = f(x,|u|)u \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Também citamos o trabalho [53], onde Jia e Li estabeleceram a existência de uma solução ground state para o problema

$$M\left(\frac{1}{\epsilon^{3-2s}}[u]_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{\epsilon^3}\int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2dx\right)[\epsilon^{2s}(-\Delta)^s u + V(x)u] = K(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

onde $f$ tem crescimento subcrítico.

Ressaltamos que no Capítulo 2, mostraremos existência e concentração de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u + (\lambda a(x)+1)u = H_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}, \\ (-\Delta)^{1/2}v + (\lambda a(x)+1)v = H_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}, \\ u, v \in H^{1/2}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

onde $H$ tem um crescimento exponencial crítico.

Sistemas desta classe já foram amplamente estudados para o operador laplaciano $(-\Delta)$, tanto em domínios limitados, quanto em domínios ilimitados, veja por exemplo [18, 28, 34, 35, 51, 56] para o caso onde o domínio é limitado, e [33, 37, 36, 60, 85] para o caso em domínios ilimitados. Uma das complicações em se estudar sistemas Hamiltonianos do tipo elíptico via métodos variacionais, é que o funcional energia associado ao problema é fortemente indefinido, isto é, sua parte quadrática é, respectivamente, coerciva e anti-coerciva em subespaços de dimensão infinita do espaço onde o funcional está definido. Para contornar tal dificuldade, iremos aplicar técnicas de truncamento como no clássico trabalho de del Pino e Felmer [31] e técnicas de minimização sobre a variedade de Nehari-Pankov (ou Nehari generalizada), introduzida originalmente por Pankov no artigo [81]. O leitor pode consultar [86] para uma abordagem mais detalhada sobre como a Nehari generalizada pode ser utilizada na resolução de alguns problemas elípticos.

No capítulo 2, trabalharemos com não linearidades que tem crescimento exponencial, ou seja, $f(t) \sim e^{\alpha t^2}$ . Não linearidades com esse tipo de crescimento tem sido cada vez mais pesquisadas desde a publicação do artigo [76], no qual prova-se uma imersão do tipo exponencial no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Esta imersão ficou popularizada na literatura como desigualdade de Trudinger-Moser. Um dos primeiros trabalhos onde se estudou problemas elípticos com este tipo de não linearidade via métodos variacionais foi em de Figueiredo, Miyagaki e Ruf [32]. Naturalmente, os matemáticos têm generalizado a desigualdade de Trudinger-Moser de diferentes formas; uma versão para $H^1(\mathbb{R})$ foi mostrada por Cao em [27], e em [2] o autor provou a desigualdade para espaços de Sobolev de ordem mais alta. E para espaços de Sobolev fracionários temos os trabalhos de T. Ozawa [79] e H. Kozono, T. Sato e H. Wadade [55]. A desigualdade de Trudinger-Moser para espaços fracionários será mostrada precisamente nas Proposições 2.1.1 e 2.1.2.

Por fim, no capítulo 3, estudaremos um problema com o laplaciano $(-\Delta)$ onde a não linearidade é não local, mais precisamente estudaremos o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(v)\right) g(v) \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + V(x)v = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

onde $f$ e $g$ tem crescimento exponencial e $*$ é o operador convolução.

Problemas com não linearidade não local, tal como o problema acima, são conhecidos na literatura como equações do tipo Choquard, e este tipo de equação tem forte motivação física. No entanto, apesar de levar o nome de "equação de Choquard", elas foram estudadas primeiramente por H. Fröhlich e S. Pekar na teoria quântica de um polaron em repouso, veja [48, 49, 82]. De acordo com [61], a equação

$$-\Delta u + u = \left(\frac{A}{|x|^\mu} * |u|^2\right) u, \text{ em } \mathbb{R}^3, \tag{5}$$

($A$ é uma constante) foi introduzida por Ph. Choquard em 1976 para modelar plasma monocomponente, que representa o mais simples modelo de mecânica estatística de um sistema de Coulomb.

Desde então, variações da equação de Choquard tem sido usada para descrever uma série de fenômenos. Por exemplo, quando a interação atrativa de partículas é fraca e tem um efeito contínuo que dura mais do que o da equação não linear de Schrödinger, a equação de evolução $i\partial t\phi = \Delta\phi + (V * |\phi|^2)\phi$ modela a interação de um grande sistema de átomos e moléculas bosônicos não-relativísticos.

A equação (5) tem sido amplamente estudada por diversos autores. Usando teoria dos pontos críticos, Lions mostrou existência de soluções fracas não triviais; veja [64, 65]. Moroz e Van Schaftingen [73, 74] provaram a existência de uma solução groud state e estudaram sua simetria e regularidade para o problema mais geral

$$-\Delta u + u = (I_\alpha * F(u))\, F'(u), \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde $I_\alpha$ denota o potencial de Riesz, definido por

$$I_\alpha(u) = \frac{1}{c_\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} dy,$$

onde $c_\alpha$ é uma constante positiva que depende de $\alpha$. Em [15], Battaglia e van Schaftingen, obtiveram resultados similares quando $F$ tem um crescimento exponencial, i.é., $F(t) \sim e^{\alpha t^2}$. Para mais resultados clássicos envolvendo a equação de Choquard, indicamos [72].

Ressaltamos que até onde sabemos todos os problemas tratados, aqui na tese, ainda não foram estudados. Além disso, o caráter não local do laplaciano fracionário dificulta muito os argumentos de truncamento que serão utilizados no capítulo 1 e 2, e no capítulo 3 a não linearidade de Choquard dificulta todas as estimativas necessárias para usar o método de aproximação de Galerkin. Nesse sentido, acreditamos que nossos resultados complementam os trabalhos citados acima, portanto os capítulos 1, 2 e 3 desta tese foram transformados em artigos científicos; o artigos relacionado ao capítulo 2 está submetido e o artigo feito a partir do capítulo 3 já foi publicado (ver [68]).

## Uma breve introdução aos espaços de Sobolev fracionários

Faremos nesta seção uma pequena introdução ao operador laplaciano fracionário, bem como aos espaços de Sobolev fracionário. Uma abordagem mais completa, bem como a demonstração de todas as observações feitas aqui, podem ser encontradas em [20] ou [78].

O operador laplaciano fracionário pode ser visto "naturalmente" como a inversa de uma transformada de Fourier. Para justificar essa afirmação, considere $u$ uma função em $C^\infty$ e seja a transformada de Fourier de $u$ dada por

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}dx,$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $\langle .,. \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$. Tomando a inversa de Fourier da expressão acima, temos

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi.$$

Derivando $u$ com relação a variável na $k$-ésima posição, notamos que

$$\partial_k u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} 2\pi i\xi_k\hat{u}(x)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \mathcal{F}(2\pi i\xi_k\hat{u}).$$

Desde que $(-\Delta) = \sum_{k=1}^n \partial_k^2$, percebemos que $(-\Delta)u(x)$ consiste em multiplicar as variáveis da frequência por $2\pi|\xi|^2$, isto é,

$$(-\Delta)u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (2\pi|\xi|)^2\hat{u}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \mathcal{F}^{-1}\left((2\pi|\xi|)^2\hat{u}\right).$$

Deste modo, não é tão surpreendente definir a potência $s$ do operador $(-\Delta)$ como a multiplicação por $(2\pi|\xi|)^{2s}$ na variável das frequências, ou seja,

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}\left((2\pi|\xi|)^{2s}\hat{u}\right). \tag{6}$$

Dessas observações, segue por um cálculo direto que

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(x)(-\Delta)^s u dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}v(-\Delta)^{s/2}u dx. \tag{7}$$

Outra definição utilizada para $(-\Delta)^s$ que é menos pedagógica, entretanto mais flexível em certos aspectos, é a seguinte

$$(-\Delta)^s u(x) := \lim_{\epsilon\to 0^+} C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0;\epsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{8}$$

onde $C(N,s)$ é a seguinte constante:

$$C(N,s) := \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}}d\zeta\right)^{-1}, \tag{9}$$

com $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$, $\zeta' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

O leitor pode verificar em ([78], Proposição 3.3) uma demonstração da equivalência entre as definições (6) e (8).

De forma mais geral, para $s \in (0,1)$ temos o operador fracionário não local $\mathcal{L}_K$

$$\mathcal{L}_K(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(u(x+y) + u(x-y) - 2u(x))K(y)dy,$$

onde o kernel $K : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é tal que

$$m(x)K \in L^1(\mathbb{R}^N), \text{ onde } m(x) = \min\{|x|^2, 1\}$$

e existe $\theta > 0$ tal que

$$K(x) \geq \theta|x|^{-(N+2s)}, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

É possível mostrar que quando $K(x) = |x|^{-(N+2s)}$ o operador $\mathcal{L}_K$ é equivalente a $(-\Delta)^s$.

Recentemente Abatangelo, Jarohs e Saldaña [1] definiram o laplaciano fracionário para ordens maiores, isto é, para $s \in (n, n+1)$ com $n \in \mathbb{N}$, exibiram uma formulação variacional e demonstraram que há perca da validade do princípio do máximo para algum $s \in (n, n+1)$.

Definiremos adiante os espaços adequados para se trabalhar com problemas envolvendo operadores fracionários. Esses espaços são conhecidos na literatura como espaços de Sobolev fracionário. Então para $s \in (0,1)$, $p \in [1, +\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, defini-se

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

O espaço $W^{s,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u|^p dx + \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde o termo

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} := \left( \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}},$$

é conhecido como seminorma de Gagliardo de $u$.

Quando $s > 1$ e $s \notin \mathbb{N}$, podemos escrever $s = m + \sigma$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in (0,1)$. Definimos $W^{s,p}(\Omega)$ da seguinte forma:

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega), \text{ para qualquer } \alpha \text{ com } |\alpha| = m\}.$$

Nesse caso, $W^{s,p}(\Omega)$ tem norma

$$||u||_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( ||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||^p_{W^{s,\sigma}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Um dos resultados mais interessantes envolvendo o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ (com $0 < s < 1$) é o seguinte resultado de imersão.

**Proposição 0.0.1.** *Seja $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp < N$. Então existe uma constante positiva $C = C(N,p,s)$ tal que, para qualquer $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, temos*

$$|u|_{L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy,$$

*onde $p_s^* = p_s^*(N,s)$ é conhecido como expoente crítico fracionário é igual a $p_s^* = \frac{Np}{(N-sp)}$.*

*Consequentemente, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente para todo $q \in [p, p_s^*]$. Além disso, a imersão $W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é compacta para todo $q \in [p, p_s^*)$.*

Se $\Omega$ é um domínio limitado de classe $C^{0,1}$ também temos o seguinte resultado.

**Proposição 0.0.2.** *Seja $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tal que $sp < N$ e $\Omega$ um domínio limitado de classe $C^{0,1}$. Então existe uma constante positiva $C = C(N,p,s)$ tal que para qualquer $u \in W^{s,p}(\Omega)$, temos*

$$|u|_{L^q(\Omega)} \leq C||u||_{W^{s,p}(\Omega)},$$

*para todo $q \in [p, p_s^*]$. Além disso, a imersão $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [p, p_s^*)$.*

Quando $p = 2$ denotamos $W^{s,2}(\mathbb{R}^N) = H^s(\mathbb{R}^N)$. Destacamos que $H^s(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} uvdx.$$

Um importante resultado envolvendo o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ é o seguinte:

**Proposição 0.0.3.** *Para qualquer $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ vale*

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1} \left|(-\Delta)^{s/2}u\right|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

*onde $C(N,s)$ é a constante definida em (9).*

A última proposição juntamente com (7), implica que multiplicando por $v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e integrando sobre $\mathbb{R}^N$ a equação

$$(-\Delta)^s u + u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

tem-se que

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx.$$

Mostrando assim que problemas semilineares que envolvem o operador laplaciano fracionário podem ser estudados via métodos variacionais.

Em problemas elípticos que envolvem o laplaciano fracionário em um domínio $\Omega$, a condição de Dirichlet pede que a solução seja nula em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. É conveniente então definir o espaço

$$X(\Omega) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^N); u = 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

Veja que $X(\Omega)$ também é um espaço de Hilbert, com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{X(\Omega)} := \int_{\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+2s}} dxdy. \tag{10}$$

Nos Capítulos 1 e 2 desta tese, sempre assumiremos que $N > 2s$ e que $s \in (0, 1)$.

# Capítulo 1

# Existência e concentração de soluções para uma equação de Kirchhoff-Schrödinger fracionária

Neste capítulo, estudaremos a existência e concentração de soluções para o seguinte problema não local

$$(P_\lambda)\quad \begin{cases} M\left([u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = \bar{c}u + f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $s$ é o expoente fracionário e é tal que $N > 2s$, $s \in (0,1)$, $M$ é uma função contínua com propriedades a serem especificadas posteriormente, o potencial $V$ tem forma $V(x) = \lambda a(x) + 1$, com $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sendo uma função não negativa que se anula em um domínio limitado $\Omega_\Upsilon$, $\lambda$ é um parâmetro positivo e $\bar{c} > 0$ uma constante a ser determinada. A não linearidade $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pode ter crescimento subcrítico e crítico.

Tanto no caso subcrítico quanto no crítico, trabalharemos com o potencial $V(x) = \lambda a(x) + 1$, de modo que $a$ tenha as seguintes propriedades

$(a_0)$ $a(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(a_1)$ O conjunto $int(a^{-1}\{0\})$ é não vazio e $a^{-1}(0) = \Omega_\Upsilon$ é um aberto e limitado de classe $C^{0,1}$.

Tais hipóteses sobre a função $a$ foram inspiradas pelo famoso arigo de Ding e Tanaka [39] e são essenciais para ajudar a contornar a falta de compacidade causada pelo $\mathbb{R}^N$ e também para mostrar a concentração de soluções (Teorema 1.0.1 e Teorema 1.0.2).

Para estudar o caso subcrítico, vamos supor que a função $M \in C([0, +\infty], \mathbb{R})$ verifica

$(M_1)$ Para $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$, vale a seguinte condição de crescimento

$$m_0 + b_0 t^{\alpha_1} \leq M(t) \leq m_1 + b_1 t^{\alpha_2},$$

para constantes positivas $m_0, m_1, b_0$ e $b_1$, de modo que $m_1 < \frac{\bar{c}}{2\rho(\Omega)}$, aqui $\rho(\Omega)$ denota o número

$$\rho(\Omega) = \min\left(\iint_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\Omega}|u|^2dx\right), \text{ tal que } \int_{\Omega}|u|^2dx = 1, \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \Omega_{\Upsilon}$. No Lema A.1.2 mostramos que $\rho(\Omega)$ é atingido.

Enquanto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínnua e satisfaz as seguintes condições

$(f_1)$ A aplicação $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ é crescente;

$(f_2)$ Existem constantes positivas $a_i$ $(i = 1, 2)$ e a potência $\gamma \geq 2$ tais que

$$a_1 t^{\gamma-1} \leq f(t) \leq a_2 t^{\gamma-1}$$

para todo $t \in [0, +\infty)$.

Vamos supor que $\gamma$ verifica,

$$\gamma < \min\{2_s^*, 2\alpha_i + 2\} \text{ para } i = 1, 2. \tag{1.2}$$

Como estamos buscando por soluções positivas, ao longo do texto vamos supor também que $f(t) = 0$ se $t \leq 0$.

Dadas essas condições, podemos enunciar nosso primeiro resultado de existência e concentração.

**Teorema 1.0.1.** *Assuma que as hipóteses $(f_1)$ e $(f_2)$ valem para $f$, o termo não local $M$ satisfaz a condição de crescimento $(M_1)$, $a(x)$ verifica $(a_0)$ e $(a_1)$. Então, para qualquer subconjunto não vazio $\Omega_{\Upsilon}$, existe um $\lambda^* > 0$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda^*$, o problema $(P_\lambda)$ tem uma solução ground state $u_\lambda$. Adicionalmente, para qualquer sequência $(\lambda_n)$ com $\lambda_n \to \infty$, podemos extrair uma subsequência $(\lambda_{n_i})$ tal que $u_{\lambda_{n_i}}$ converge fortemente em $H^s(\mathbb{R}^N)$ para $u$, que satisfaz $u = 0$ fora de $\Omega_{\Upsilon}$ e $u$ restrito a $\Omega_{\Upsilon}$ é solução do problema*

$$(P)_{\Upsilon,\infty} \begin{cases} M\left([u]_{\Omega_{\Upsilon}} + |u|^2_{L^2(\Omega_{\Upsilon})}\right)((-\Delta)^s u + u) = \bar{c}u + f(u) \text{ em } \Omega_{\Upsilon}, \\ u(x) > 0 \text{ para } x \in \Omega_{\Upsilon} \\ u \in X(\Omega_{\Upsilon}). \end{cases}$$

Para provar o Teorema 1.0.1, nos inspiramos na metodologia usada por Alves e Figueiredo em [4], onde eles trabalham com um problema subcrítico no $\mathbb{R}^N$ envolvendo o operador laplaciano tradicional, para contornar a falta de compacidade causada por $\mathbb{R}^N$, eles truncam o problema original e depois recuperam a solução, entretanto, como estamos trabalhando com um operador fracionário os argumentos de truncamento se tornam mais complicados, dessa forma se faz necessário refazer cuidadosamente os argumentos.

Também estaremos interessados em estabelecer existência de solução para uma versão do caso crítico de $(P_\lambda)$, para isso consideraremos o seguinte problema modelo

$$(P_*) \begin{cases} M\left([u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2dx\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = h(x)u + u^{2_s^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

É importante ressaltar que no famoso trabalho de Brézis e Nirenberg em 1983 (ver [22]), os autores mostraram que para um parâmetro $\lambda$ suficientemente grande, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) + u^{2^*-1}, \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem solução não trivial. Desde então muitos pesquisadores têm se interessado por problemas com crescimento crítico, buscando, entre outras coisas, estender e melhorar os resultados obtidos por Brézis e Nirenberg para diferentes tipos de domínios e operadores. Em 1997, por exemplo, Miyagaki [70] estudou o problema

$$-\Delta u + a(x)u = \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

e mostrou que para $N = 3$ e $1 < q \leq 3$ e $\lambda$ grande, tem-se existência de solução. Para o problema com o termo não local de Kirchhoff em domínio limitado, destacamos o trabalho de Figueiredo em [43], onde, para $M(t) \geq m_0$, mostra existência de solução para o problema

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = \lambda f(u) + u^{2^*-1}, \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

desde que $f$ tenha crescimento subcrítico e $\lambda$ seja grande o suficiente.

Para o caso Kirchhoff com domínio ilimitado, citamos He e Zou [50], onde os autores mostram que para $\varepsilon$ pequeno e $\lambda$ grande, o problema

$$\begin{cases} -\left(\varepsilon^2 a + \varepsilon b \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + V(x)u = \lambda f(u) + u^{2^*-1}, \text{ em } \mathbb{R}^3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^3), u(x) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

possui pelo menos uma categoria de soluções positivas.

Para o laplaciano fracionário, destacamos o trabalho recente de Correia e Figueiredo em [30], onde estabelecem existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + a(x)u = |u|^{2^*-2}, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $a$, entre outras hipóteses, satisfaz $|a|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)} < S(2^{2s/N} - 1)$, sendo $S$ a melhor constante de Sobolev da imersão $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N)$.

Comparando os trabalhos citados acima com oproblema $(P_*)$, lembrando que em nosso caso $V(x) = \lambda a(x) + 1$, surgem perguntas naturais como: podemos garantir a existência de solução para $(P_*)$ uma vez escolhido $\lambda > 0$ suficientemente grande? A garantia de existência de solução depende de alguma forma da melhor constante de Sobolev $S$?

A resposta é sim para ambas, vamos mostrar que $(P_*)$ possui solução quando $\lambda$ é grande, mas o preço a pagar é que devemos impor algumas condições sobre $h$ e condições adicionais para função $M$.

Suporemos que a função $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tem as seguinte condições

$(h_1)$ Existe um aberto limitado $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $h(x) \geq \bar{c}$ para todo $x \in \mathcal{O}$.

$(h_2)$ $h \in L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}(\mathbb{R}^N)$.

Para estudar o problema $(P_*)$ exigiremos que $M$ tenha a seguinte forma

$$M(t) = m_0 + b_0 t^{\alpha_1}, \text{ com } m_0 > \rho(\mathcal{O}), b_0 > 0, \alpha_1 \geq 1 \text{ e } 2\alpha_1 + 2 > 2_s^* \tag{1.3}$$

e satisfaz

$(M_2)$ Existe um $\theta \in (2, 2_s^*)$ tal que

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{\theta}M(t)t \geq -kb_0 t^{2\alpha_1},$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(\tau)d\tau$ e $k > 0$.

Veja, por exemplo, que para $N = 3$ e $s < 3/4$, temos $2_s^* < 4$, então a função modelo de Kirchhoff $M(t) = m_0 + b_0 t$ satisfaz a condição $(M_2)$ para qualquer $\theta \in (2, 2_s^*)$, de fato

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t) - \frac{1}{\theta}M(t)t = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) m_0 t + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}\right) b_0 t^2 \geq -\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right) b_0 t^2.$$

Para o caso crítico, iremos provar o seguinte resultado

**Teorema 1.0.2.** *Suponha que $(f_1)$ e $(f_2)$ valem para $f$, o termo não local $M$ tem forma (1.3) e satisfaz $(M_2)$, $a(x)$ verifica $(a_0)$ e $(a_1)$; e $h$ tem as propriedades $(h_1)$ e $(h_2)$. Se $|h|_{2_s^*/(2_s^*-2)} < c^* m_0^{N/2s}$, tal que*

$$c^* = (C(N,s)S)\left(\frac{2_s^*-2}{2}\right)\left[\frac{2}{2_s^*(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*})}\right]^{-\frac{2_s^*}{2_s^*-2}},$$

*onde $S$ denota é a melhor constante de Sobolev; então existe $\lambda^* > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$, de modo que $(P_*)$ tem uma solução de energia mínima, para todo $\lambda > \lambda^*$ e $b_0 \in (0, \varepsilon_0)$. Mais ainda, mantida essas condições, se $\mathcal{O} \subset \Omega_\Upsilon$ e $\lambda \to \infty$, vale um resultado de concentração, análogo ao do Teorema 1.0.1.*

## 1.1 Um funcional auxiliar para o problema $(P_\lambda)$

Vamos dedicar esta seção ao estudo do problema $(P_\lambda)$. Primeiramente precisamos definir o seguinte espaço, no qual iremos trabalhar,

$$E_\lambda = \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx < \infty\right\},$$

munido, com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)uvdx.$$

A norma induzida por este produto interno será denotada por $||.||_\lambda$.

Nossa primeira observação é que $E_\lambda$ munido do produto interno acima é um espaço de Hilbert. Adicionalmente, é fácil verificar que $||.||_\lambda$ e $||.||_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ são normas equivalentes, logo podemos usar os resultados de imersão para o espaço $E_\lambda$, os detalhes dessas afirmações estão no apêndice, Proposição A.1.1.

Definimos então o funcional $J_\lambda : E_\lambda \to \mathbb{R}$ associado ao problema $(P_\lambda)$ dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx,$$

onde $F(u(x)) = \int_0^{u(x)} f(\tau)d\tau$ e $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ .

Usando argumentos padrões de métodos variacionais é possível mostrar que $J_\lambda$ está bem definido e é de classe $C^1$.

Lembramos que $u$ é solução fraca de $(P_\lambda)$ se,

$$M(||u||^2)\langle u, v\rangle_\lambda = \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} uvdx + \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx, \forall v \in E_\lambda.$$

Portanto, os pontos críticos de $J_\lambda$ são soluções de $(P_\lambda)$.

Nossa meta é mostar que o problema $(P_\lambda)$, possui uma solução ground state, mas a falta de compacidade, pelo fato de estarmos trabalhando em domínio ilimitado, cria uma série de dificuldades. Para contornar isso, adaptaremos argumentos de truncamento utilizados por Del Pino e Felmer em [31].

Veja que da condição $(f_1)$, temos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 0 \text{ e } \lim_{t\to +\infty}\frac{f(t)}{t} = +\infty.$$

Deste fato e da condição de monotonicidade imposta em $(f_2)$, para cada $\nu > 0$ fixado, existe um $\xi$ de modo que

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = \nu.$$

Definimos então a função truncada,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), \text{ se } t \leq \xi, \\ \nu t, \text{ se } t \geq \xi. \end{cases}$$

Ainda da condição $(f_2)$, temos que para todo $t > 0$ vale

$$|\tilde{f}(t)| \leq \nu t. \tag{1.4}$$

Definimos assim a função

$$\tilde{H}(x,t) = \chi_\Upsilon(x)F(t) + (1-\chi_\Upsilon(x))\tilde{F}(t), \text{ para } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

onde $\tilde{F}(t) = \int_0^t \tilde{f}(\tau)d\tau$ e $\chi_\Upsilon$ é a função característica em $\Omega_\Upsilon$.

Dado o funcional $\tilde{J}_\lambda : E_\lambda \to \mathbb{R}$, tal que

$$\tilde{J}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{H}(x,u)dx,$$

notamos que se $u_0$ é ponto crítico de $\tilde{J}_\lambda$ com $||u_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon)} \leq \xi$, então $u_0$ é ponto crítico de $J_\lambda$ e consequentemente solução fraca de $(P_\lambda)$. Veja também que das condições (1.4) e $(f_2)$, o funcional está de fato bem definido.

Mostraremos que $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a condição $(PS)$, para então concluir que $\tilde{J}_\lambda$ tem um ponto crítico com energia mínima. Mas primeiro, vejamos que $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo, isso irá garantir a limitação das sequências $(PS)$.

**Lema 1.1.1.** *Nas mesmas condições do Teorema 1.0.1, o funcional $\tilde{J}_\lambda$ é coercivo.*

**Demonstração:** Seja $u \in E_\lambda$, das condições $(M_1)$ e (1.4), e da imersão contínua $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [2, 2_s^*]$, é imediato que para $u$ restrito à $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, existe uma constante positiva $C$ tal que

$$\tilde{J}_\lambda(u) \geq m_0||u||_\lambda^2 + b_0||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)} - C\nu||u||_\lambda^2.$$

Descartando uma parcela positiva e novamente usando $(M_1)$, podemos escrever

$$\tilde{J}_\lambda(u) \geq ||u||_\lambda^2 \left(b_0||u||_\lambda^{2\alpha_1} - C\right).$$

Analogamente, restringindo $u$ à $\Omega_\Upsilon$, usando as condições $(M_1)$ e $(f_2)$ juntamente com a imersão contínua, estimamos

$$\tilde{J}_\lambda(u) \geq ||u||_\lambda^2 \left(\frac{b_0}{2}||u||_\lambda^{2\alpha_1} - C\right) + ||u||_\lambda^\gamma \left(\frac{b_0}{2}||u||_\lambda^{2(\alpha_1+1)-\gamma} - C\right).$$

Percebemos então que $\tilde{J}_\lambda(u) \to \infty$, quando $||u||_\lambda \to \infty$.

□

**Lema 1.1.2.** *Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ limitada em $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $0 \leq \phi \leq 1$ tal que $\phi = 0$ em $B_{R/2}(0)$, $\phi = 1$ fora de $B_R(0)$ e $|\nabla\phi| \leq C/R$, onde $|\ .\ |$ é a norma no espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$, então*

$$\limsup_{R\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x)|^2 \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 0.$$

**Demonstração:** Da desigualdade do valor médio (Proposição A.1.3) e do Teorema de Tonelli-Fubini, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy &\leq \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x-y|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy \\ &= \frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N+2(s-1)}} dy.\end{aligned}$$

Desde que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{|x-y|^{N+2(s-1)}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (ver Proposição A.1.4). Obtemos

$$\limsup_{R\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x)|^2 \frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \leq \limsup_{R\to\infty} \frac{C'}{R} = 0.$$

□

**Proposição 1.1.3.** *Seja $u_n$ uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}_\lambda$, então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $R > 0$ de maneira que*

$$\lim_{n\to\infty} M(||u_n||^2)\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus(B_R(0)))^2}\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}(\lambda a(x)+1)u_n^2dx\right)<\epsilon. \tag{1.5}$$

**Demonstração:** Tomando $u_n$ como sendo uma sequência Palais-Smale, sabemos que $(u_n)$ é limitada, logo existe uma subsequência de $u_n$ que converge fracamente para $u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Definimos uma função *cut-off* $\eta_R : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $0 \le \eta_R \le 1$, $|\nabla \eta_R| \le C/R$ por

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in B_{\frac{R}{2}}(0) \\ 1, \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus B_R(0), \end{cases}$$

de modo que $\Omega_\Upsilon \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$.

Por hipótese, $\tilde{J}'_\lambda(u_n)(\eta_R u_n) \to 0$ para $n \to \infty$, então

$$\begin{aligned} &M(||\eta_R u_n||^2)\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)u_n(x)-u_n(y)\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+ \\ &M(||\eta_R u_n||^2)\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n dx=\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{H}(u_n)\eta_R u_n dx+\int_{\mathbb{R}^N}\bar{c}u_n^2\eta_R dx+o_n(1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)u_n(x)+\eta_R(x)u_n(y)-\eta_R(x)u_n(y)-u_n(y)\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy= \\ &\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+ \\ &\iint_{\mathbb{R}^{2N}}u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy. \end{aligned}$$

Assim, por (1.6) vemos que

$$\begin{aligned} &M(||\eta_R u_n||^2)\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n dx\right)=\tilde{J}_\lambda(w_n)(\eta_R w_n)- \\ &M(||\eta_R u_n||^2)\iint_{\mathbb{R}^{2N}}u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &+\int_{\mathbb{R}^N}\tilde{H}(u_n)u_n\eta_R dx+\int_{\mathbb{R}^N}\bar{c}u_n^2\eta_R dx+o_n(1). \end{aligned}$$

Afirmamos que,

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^{2N}}u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy=0.$$

De fato, a desigualdade de Hölder, a limitação de $(u_n)$ e o Lema 1.1.2 garantem que

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \leq$$
$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}}[u_n(y)]^2\frac{(\eta_R(x)-\eta_R(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{1/2} \leq$$
$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}||u_n||\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}}[u_n(y)]^2\frac{(\eta_R(x)-\eta_R(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{1/2} = 0.$$

Então podemos considerar sem perda de generalidade que

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \leq \frac{C}{R}. \tag{1.7}$$

Além disso, podemos definir

$$L = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n dx$$

Da última igualdade, da estimativa (1.7), do fato de que $\tilde{J}_\lambda(u_n)(\eta_R u_n)\to 0$, da condição de crescimento sobre $M$ e $\tilde{f}$ e da imersão contínua, temos que para todo $x\in\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)$

$$m_0 L \leq o_n(1) + \frac{C}{R} + (\nu+\bar{c})L \Longrightarrow L \leq o_n(1) + \frac{C}{(m_0-\bar{c}\nu)R}. \tag{1.8}$$

Fazendo $R\to\infty$ em (1.8), mostramos a validade da estimativa em (1.5).

□

**Proposição 1.1.4.** *Nas mesmas condições do Teorema 1.0.1, o funcional $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a condição $(PS)$.*

**Demonstração:** Desde que $(u_n)$ é uma sequência $(PS)$, da coercividade do funcional temos que $(u_n)$ é limitada e consequentemente $u_n \rightharpoonup u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Veja que

$$\begin{aligned}\tilde{J}'_\lambda(u_n)(u_n-u) &= M(||u_n||_\lambda)\langle u_n, u_n-u\rangle_\lambda - \bar{c}\int_{\mathbb{R}^N} u_n(u_n-u)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon}\tilde{f}(u_n)(u_n-u)dx - \int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)(u_n-u).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Da limitação de $(u_n)$ e da Proposição 1.1.3, temos

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty} M(||u_n||_\lambda)\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus(B_R(0)))^2}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(x)|u_n|dx\right) = 0. \tag{1.10}$$

E também, da condição (1.4), da imersão contínua e Proposição 1.1.3, também observamos que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} u_n^2dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} f(u_n)u_ndx \leq \\
&\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\nu\left(\iint_{(\mathbb{R}^N\setminus(B_R(0)))^2}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} V(x)|u_n|dx\right)=0.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Além disso, do fato que $u$ é limite fraco de $(u_n)$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$, podemos inferir que

$$
M(||u_n||_\lambda^2)\langle u_n,u\rangle_\lambda \to 0 \text{ quando } n\to\infty. \tag{1.12}
$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$, tem-se que $u_n \to$ em $L^p(B_R(0))$ para $p\in[1,2_s^*)$. Mais ainda, existe $g\in L^1(B_R(0))$, tal que $|u_n(x)|\leq g(x)$ q.t.p em $B_R(0)$. Da condição de crescimento $(f_2)$,

$$
\left|\int_{B_R(0)} f(u_n)(u_n-u)dx\right| \leq a_2\int_{B_R(0)}|u_n^{\gamma-1}(u_n-u)|dx = a_2\int_{B_R(0)}|u_n^\gamma - u_n^{\gamma-1}u|dx.
$$

a imersão compacta e do limite fraco, temos

$$
\int_{B_R(0)}[u_n^\gamma-u_n^{\gamma-1}u]dx \to \int_{B_R(0)}[u^\gamma-u^\gamma]dx=0 \text{ quando } n\to\infty.
$$

Donde segue que

$$
\int_{B_R(0)} f(u_n)(u_n-u)dx\to 0. \tag{1.13}
$$

Similarmente, usando a condição (1.4),

$$
\int_{B_R(0)} \tilde{f}(u_n)(u_n-u)dx\to 0. \tag{1.14}
$$

De (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) e (1.14) observamos que

$$
M(||u_n||_\lambda^2)\langle u_n,u_n-u\rangle_\lambda\to 0.
$$

Concluímos então que $||u_n||_\lambda\to||u||_\lambda$.

□

**Proposição 1.1.5.** *Nas mesmas condições do Teorema 1.0.1, para todo $\lambda>0$, existe um ponto crítico $u_0$ de $\tilde{J}_\lambda$, tal que*

$$
\tilde{J}_\lambda(u_0)=\inf_{u\in E_\lambda}\tilde{J}_\lambda(u). \tag{1.15}
$$

*Além disso $u_0$ é não trivial e $u_0\geq 0$ em $\mathbb{R}^N$*

**Demonstração:** No Lema 1.1.1 vimos que é $\tilde{J}_\lambda$ coercivo, ou seja, $\tilde{J}_\lambda(u)\to+\infty$ quando $||u||_\lambda\to\infty$. Portanto $\tilde{J}_\lambda$ é limitado inferiormente, assim existe $c_\lambda$ tal que

$$
c_\lambda=\inf_{u\in E_\lambda}\tilde{J}_\lambda(u).
$$

Logo, existe uma sequência minimizante $(u_n)$ tal que $\tilde{J}_\lambda(u_n)\to c_\lambda$. Desde que o funcional é coercivo, $(u_n)$ é uma sequência limitada e como $\tilde{J}_\lambda$ satisfaz a condição Palais-Smale, então a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $H^s(\Omega)$ e consequentemente, por imersão contínua, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [2, 2_s^*]$. Assim, da condição $(f_2)$, fazendo $n \to \infty$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \leq \frac{a_2}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^\gamma dx \to \frac{a_2}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\gamma dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \leq \frac{a_2}{\gamma} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\gamma dx + o_n(1).$$

Desde que $u^\gamma \in L^1(\mathbb{R}^N)$, podemos usar o Teorema da convergência dominada de Lebesgue para obter

$$\frac{\bar{c}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \to \frac{\bar{c}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

De modo análogo, por (1.16)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{F}(u)dx.$$

Dessa última convergência, da continuidade de $\widehat{M}$ e do fato de que a norma é fracamente semicontínua inferiormente, estimamos

$$\tilde{J}_\lambda(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \left( \widehat{M}(||u_n||_\lambda^2) - \frac{\bar{c}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{H}(u_n)dx \right).$$

Daí segue que $\tilde{J}_\lambda$ é semicontínuo inferiormente e pelo Teorema de minimização global (Teorema A.1.5), existe $u_\lambda$ tal que $\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda$, desde que $\tilde{J}_\lambda$ é de classe $C^1$, $u_\lambda$ é ponto crítico. Para terminar a demonstração, precisamos garantir que $u_\lambda \geq 0$ e $u_0$ é não trivial. Vamos mostrar inicialmente que $u_\lambda \neq 0$. Para isso, tomamos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte em $\Omega_\Upsilon$ (para que não se tenha dependência do parâmetro $\lambda$) tal que $|\varphi|_{L^2(\Omega_\Upsilon)} = 1$ e $||\varphi||_\lambda = \rho(\Omega)$. Das condições $(M_1)$ e $(f_2)$ segue que

$$\tilde{J}_\lambda(t\varphi) \leq (m_1 t^2 ||\varphi||^2 + \frac{b_1}{2} t^{2(\alpha_2+1)} ||\varphi||^{2(\alpha_2+1)}) - \frac{\bar{c}}{2} t^2 |\varphi|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \frac{t^\gamma}{\gamma} |\varphi|^\gamma_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)}.$$

Da hipótese imposta sobre $m_1$, de (1.2) e da escolha de $\varphi$, é imediato que para $t$ suficientemente pequeno, temos que $\tilde{J}_\lambda(t\varphi) < 0$, logo

$$\tilde{J}_\lambda(u_\lambda) = \inf_{u \in E_\lambda} \tilde{J}_\lambda(u) < 0.$$

Assim, $u_\lambda \neq 0$. Para ver que $u_\lambda > 0$ definimos $u_\lambda^+ = \max\{u_\lambda, 0\}$ e $u_\lambda^- = \max\{-u_\lambda, 0\}$. Usando $u_\lambda^- = u_\lambda^+ - u_\lambda$ como funções teste,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta^s)u_\lambda]\, u_\lambda^- dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)(u_\lambda^-)^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(u_\lambda)u_\lambda^-}{M_1(||u_\lambda||_\lambda^2)} dx,$$

onde $g(u) = \frac{\bar{c}u^2}{2} + \tilde{h}(u)$, onde $\tilde{h}$ é a derivada de $\tilde{H}$.

Veja que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta^s)u_\lambda]\, u_\lambda^- dx = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u_\lambda(x) - u_\lambda(y))(u_\lambda^-(x) - u_\lambda^-(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.$$

Além disso, $(u_\lambda(x) - u_\lambda(y))(u_\lambda^-(x) - u_\lambda^-(y)) \leq 0$. Donde segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta^s)u_\lambda]\, u_\lambda^- dx \leq 0.$$

Portanto, pela não-negatividade de $g(u_\lambda)/M_1(||u_\lambda||_\lambda^2)$ segue que $u^- = 0$. Concluímos assim a demonstração da proposição.

□

## 1.2 Existência de solução para $(P_\lambda)$

Para provar a existência de solução para $(P_\lambda)$, precisamos garantir que existe $\lambda^* > 0$ tal que os pontos críticos $u_\lambda$ de $\tilde{J}'_\lambda$ obtidos na seção anterior são tais que se $\lambda > \lambda^*$ então

$$u_\lambda(x) \leq \xi, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

A seguinte proposição nos dá informações de como a família de pontos críticos $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ de $\tilde{J}_\lambda$ se comporta fora de $\Omega_\Upsilon$ quando $\lambda \to +\infty$.

**Proposição 1.2.1.** *Nas mesmas hipóteses do Teorema 1.0.1, considere $\{u_n = u_{\lambda_n}\} \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ uma sequência satisfazendo*

$$\tilde{J}_{\lambda_n}(u_n) \to c \text{ e } ||\tilde{J}_{\lambda_n}(u_n)|| \to 0,$$

*para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ e tal que $\lambda_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$.*

*Então, a menos de subsequência, existe $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$. E também:*

*(i)* $u_n \to u$ *em* $H^s(\mathbb{R}^N)$;

*(ii)* $u = 0$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$ *e* $u$ *é solução para o problema*

$$(P)_{\Upsilon,\infty} \quad \begin{cases} M\left([u]_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right)((-\Delta)^s u + u) = \bar{c}u^2 + f(u) \text{ em } \Omega_\Upsilon, \\ u \in X(\Omega_\Upsilon); \end{cases}$$

*(iii)* $\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx \to 0$;

*(iv)* $[u_n]_{H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \to 0$.

**Demonstração:** Usando o fato de que $J_\lambda$ é coercivo, sabemos que $(||u_n||_\lambda)$ é limitada em $E_\lambda$. Então, a menos de subsequência, existe $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^s(\mathbb{R}^N) \text{ e } u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$C_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N; a(x) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lambda_n < 2(\lambda_n + 1)$para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \frac{2m}{\lambda_n} \int_{C_m} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 dx \leq \frac{C}{\lambda_n}.$$

Como $\lambda_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 dx = 0.$$

Da convergência anterior e do Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{C_m} |u|^2 dx = 0.$$

Implicando que $u = v = 0$ em $C_m$, e então, $u = v = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$.

Usando argumentos análogos aos da Proposição 1.1.3, mostramos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} M(||u_n||^2) \iint_{(\mathbb{R}^N \setminus (B_R(0)))^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} (\lambda a(x) + 1) u_n^2 dx < \epsilon.$$

Repetindo então os passos da Proposição 1.1.4, mostramos que

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} M(||u_n||^2) \iint_{((B_R(0)))^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{B_R(0)} (\lambda a(x) + 1) u_n^2 dx \to \\ &\lim_{n \to \infty} M(||u||^2) \iint_{((B_R(0))^2} \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{B_R(0)} (\lambda a(x) + 1) u^2 dx. \end{aligned}$$

Desde que $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, vemos que $u_n \to u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Para provar $(ii)$, veja que $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ and $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, temos então que $u \in X(\Omega_\Upsilon)$. Além disso, o limite $u_n \to u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$ juntamente com o limite $J'_{\lambda_n}(u_n)\varphi \to 0$ para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\Upsilon)$ implicam que

$$M(||u||^2) \langle u, \varphi \rangle_{X(\Omega_\Upsilon)} = \bar{c} \int_{\Omega_\Upsilon} u\varphi dx + \int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n) dx + o_n(1),$$

mostrando que $u_{|\Omega_\Upsilon}$ é solução do problema não local

$$(P)_{\Upsilon,\infty} \begin{cases} M\left([u]_{\Omega_\Upsilon} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}\right)((-\Delta)^s u + u) = \bar{c}u + f(u) \text{ em } \Omega_\Upsilon, \\ u \in X(\Omega_\Upsilon). \end{cases}$$

Com relação ao item $(iii)$, basta obsevarmos que

$$
\begin{aligned}
\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx &\leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^2 dx - \left(\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon} a(x)|u|^2 dx + \lambda_n \int_{\Omega_\Upsilon} a(x)|u|^2 dx\right) \\
&\leq \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^2 dx \leq ||u_n - u||^2_{\lambda_n}.
\end{aligned}
$$

a afirmação segue então por $(i)$.

Desde que $u = 0$ fora de $\Omega_\Upsilon$, o item $(iv)$ segue diretamente de $(i)$ e $(iii)$.

□

**Proposição 1.2.2.** *Existe $\lambda^* > 0$, tal que para todo $\lambda \geq \lambda^*$ o problema $(P_\lambda)$ possui solução de energia mínima*

**Demonstração:** Seja $u_\lambda$ ponto crítico do funcional $\tilde{J}_\lambda$ e consequentemente solução fraca do problema

$$
\begin{cases}
M\left(||u||^2_\lambda\right)((-\Delta)^s u + V(x)u) = \bar{c}u^2 + \tilde{h}(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\
u \in H^s(\mathbb{R}^N),
\end{cases}
$$

onde $\tilde{H}(x,t) = \int_0^t \tilde{h}(x,s)ds$

Uma vez que $M$ é estritamente positiva, podemos reescrever o problema acima como

$$
\begin{cases}
(-\Delta)^s u + V(x)u = \dfrac{\bar{c}u + \tilde{h}(u)}{M(||u||^2_\lambda)} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\
u \in H^s(\mathbb{R}^N).
\end{cases}
$$

Fazendo óbvias modificações na (Proposição 5.1.1., [40]) e (Proposição 2.2,[14]), mostramos no *Apêndice A.2* que

$$||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 A_1,$$

tal que

$$A_1 \leq C|u_\lambda|_{L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N)}.$$

O resultado desejado segue então da imersão $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*_s}(\mathbb{R}^N)$ e do item $(iv)$ da Proposição 1.2.1.

□

Para finalizar o Teorema 1.0.1 falta mostrar que quando $\lambda \to +\infty$ a soluções $u_\lambda$ de $(P_\lambda)$ convergem para uma solução de $(P)_{\infty,\Upsilon}$. Primeiro, vamos relembrar o seguinte resultado (Lema 5.1, [78]).

**Lema 1.2.3.** *Dado $\Omega$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, seja $u \in H^s(\Omega)$ com $s \in (0,1)$. Se existe um conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \Omega$ tal que $u \equiv 0 \in \Omega \setminus \mathcal{K}$ , então a função de extensão $\mathcal{E}u$, definida como*

$$
\mathcal{E}u(x) = \begin{cases}
u(x), \ \text{se } x \in \Omega, \\
0, \ \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega.
\end{cases}
$$

*pertence $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

Considere $J_\Upsilon : X(\Omega_\Upsilon) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema $(P)_{\infty,\Upsilon}$, usando os mesmos argumentos da seção anterior, podemos mostrar existe $u_0$ tal que

$$J_\Upsilon(u_0) = \inf_{u \in X(\Omega_\Upsilon)} J_\Upsilon(u) = c_\Upsilon.$$

A proposição a seguir nos mostra uma relação entre os níveis críticos $c_\lambda$ de $J_\lambda$ e $c_\Upsilon$ de $J_\Upsilon$.

**Proposição 1.2.4.** *Os seguintes itens são verdadeiros*

*(i)* $c_\lambda \leq c_\Upsilon$, *para todo* $\lambda \geq 0$;

*(ii)* $c_\lambda \to c_\Upsilon$ *quando* $\lambda \to \infty$.

**Demonstração:** Devido a condição de Dirichlet em $(P)_{\infty,\Upsilon}$, temos que $u_0 \equiv 0$ fora de $\overline{\Omega}_\Upsilon$, então usando o Lema 2.4.1 temos uma extensão $\mathcal{E}u_0$, logo $u_0 \in \mathbb{R}^N$ e $c_\Upsilon \geq c_\lambda$, para todo $\lambda > 0$. Assim $(i)$ está provado.

Do item $(i)$, $(c_{\lambda_n})$ é uma sequência limitada, implicando que existe uma subsequência, que contiuaremos a denotar por $(c_{\lambda_n})$ tal que $c_{\lambda_n} \to c \leq c_\Upsilon$. Então, o que temos é

$$c_{\lambda_n} = J_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \to c \text{ e } ||J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})||_{E^*_\lambda} \to 0.$$

Tendo em mãos a Proposição 1.2.1, notamos que $u_{\lambda_n}$ converge para $\tilde{u}$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $\tilde{u} = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon$, consequentemente $\tilde{u} \in X(\Omega_\Upsilon)$, essas informações nos levam a concluir que

$$J_{\lambda_n}(u_n) = c_{\lambda_n} \to c = J_\Upsilon(\tilde{u}) \geq \inf_{u \in X(\Omega_\Upsilon)} J_\Upsilon(u) = c_\Upsilon.$$

Segue então que $c_{\lambda_n} \to c_\Upsilon$.

**Prova do Teorema 1.0.1:** A Proposição1.2.2 nos mostra que para todo $\lambda_n > \lambda^*$ temos uma solução $u_n$ para $(P_{\lambda_n})$, então

$$||J'_{\lambda_n}(u_n)|| \to 0 \text{ para cada } \lambda_n > \lambda^*.$$

Disso e do item $(i)$ do Lema 1.2.4, a menos de subsequência, $J_{\lambda_n}(u_n) \to c$ e $||J'_{\lambda_n}(u_n)|| \to 0$, então pela Proposição 1.2.1 a sequência $(u_n)$ converge para $u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$, onde $u$ é uma solução para $(P)_{\infty,\Upsilon}$, usando os itens $(iii)$ e $(iv)$ da Proposição 1.2.1 e a continuidade do funcional $J_{\lambda_n}$, inferimos que

$$\lim_{n \to +\infty} J_{\lambda_n}(u_n) \to J_\Upsilon(u).$$

Por fim, aplicando a parte $(ii)$ do Lema 1.2.4, concluímos que $J_\Upsilon(u) = c_\Upsilon$.

□

## 1.3 Problema com crescimento crítico

Assim como no caso subcrítico, para estudar $(P_*)$ utilizaremos um trucamento para contornar a falta de compacidade no $\mathbb{R}^N$, desde que $t \mapsto t^{2^*_s - 2}$ é crescente podemos fazer um truncamento semelhante ao que foi feito na Seção 2. Sendo assim, considere a seguinte função truncada

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} t^{2_s^*-1}, \text{ se } t \leq \xi, \\ \nu t, \text{ se } t \geq \xi, \end{cases}$$

onde $\xi^{2^*-1} = \nu\xi$, para algum $\nu > 0$ fixado.

Temos então a seguinte condição de crescimento para $\tilde{g}$.

$$\tilde{g}(t) \leq \nu t. \tag{1.16}$$

Então definimos a função

$$\bar{h}(x,t) = \chi_{\Upsilon}(x)t^{2^*-1} + (1 - \chi_{\Upsilon}(x))\tilde{g}(t) \text{ para } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Consideramos o funcional auxiliar $\tilde{I}_\lambda : E_\lambda \to \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||_\lambda^2) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{H}(x,u)dx,$$

onde $\bar{H}(x,t) = \int_0^t \bar{h}(x,s)ds$.

Destacamos aqui, que a situação agora é diferente do caso subcrítico, pois a função $\bar{H}(x,u)$ em $\Omega$ pode ter crescimento crítico, logo se faz necessário analisar o comportamento de sequências $(PS)$ para o funcional restrito a $H^s(\Omega)$. A estratégia para mostrar que $\tilde{I}_\lambda$ satisfaz a condição $(PS)$, é analisar o comportamento do funcional em $\Omega$ e fora de $\Omega$, faremos isso nas duas próximas subseções.

### 1.3.1 Sequências Palais-Smale em $H^s(\Omega)$

Consideraremos então, o funcional $I : H^s(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(||u||^2) - \frac{1}{2}\int_\Omega h(x)u^2 dx - \int_\Omega \bar{H}(u)dx,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado que contém $\Omega_\Upsilon$.

Para mostrar que o funcional $I$ satisfaz a condição $(PS)$, vamos exibir a seguinte versão do Lema de Concentração e compacidade de Lions para o operador Laplaciano fracionário.

**Lema 1.3.1.** *Se $(u_n)$ é um sequência limitada em $H^s(\Omega)$, então existem medidas positivas $\mu$ e $\nu'$ tais que*

$$|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)|^2 dx \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ e } |u_n(x)|^{2_s^*} dx \overset{*}{\rightharpoonup} \nu'. \tag{1.17}$$

*Além disso, se $u$ é limite fraco de $u_n$ em $H^s(\Omega)$, podemos obter um conjunto enumerável de pontos distintos $\{x_i\}_{i\in J}$, números não negativos $\{\mu_i\}_{i\in J}$, $\{\nu_i\}_{i\in J}$ e uma medida positiva $\tilde{\mu}$ com suporte contido em $\overline{\Omega}$ tais que*

$$\nu' = |u(x)|^{2_s^*} dx + \sum_{i\in J} \nu_i \delta_{x_i}, \qquad \mu = |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u(x)|^2 dx + \tilde{\mu} + \sum_{i\in J} \mu_i \delta_{x_i}, \tag{1.18}$$

*e*

$$\nu_i \leq S^{\frac{-2_s^*}{2}} \mu_i^{\frac{-2_s^*}{2}} \tag{1.19}$$

*onde $S$ é a melhor contsante de imersão de Sobolev, definida como*

$$S = \inf_{v \in H^s(\mathbb{R}^N), v \neq 0} \frac{||v||_X^2}{|v|_{2_s^*}^{2_s^*}}. \tag{1.20}$$

*Aqui, $||.||_X$ é a norma induzida pelo produto interno em (10).*

**Demonsração:** Veja (Teorema 5, [80]) e (Teorema 8.6.2, [23]).

□

A demonstração da próxima Proposição segue passos bem conhecidos, mas para que o leitor compreenda a importância das contantes $m_0$, $b_0$ e $S$, faremos a prova completa. A abordagem aqui utilizada é inspirada em [45].

**Proposição 1.3.2.** *Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^s(\Omega)$ uma sequência tal que $||u_n|| < C$ e*

$$I(u_n) \to c \text{ e } ||I'(u_n)||_{(H^s(\Omega))^*} \to 0, \tag{1.21}$$

*com*

$$c < k_3 - k_4, \tag{1.22}$$

*de modo que*

$$\begin{aligned}
k_1 &= \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{2_s^*}\right), \qquad k_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)|h|_{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}, \\
k_3 &= k_1\left((m_0 C(N,s) S)^{\frac{N}{2s}} - b_0 C - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\nu C\right) \text{ e} \\
k_4 &= k_1\left(\frac{2k_2}{2_s^* k_1}\right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}\left(\frac{2_s^*-2}{2}\right).
\end{aligned}$$

*Então existe uma subsequência de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge forte em $H^s(\Omega)$.*

**Demonstração:** Primeiramente veja que desde que $(u_n)$ é limitada, existe $u \in H^s(\Omega)$, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^s(\Omega),$$

então pelo Lema 1.3.1, existem medidas positivas $\mu$ e $\nu'$ que verificam (1.18) e (1.19). Definindo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N; [0,1])$ tal que $\psi(x) = 1$ para $x \in B_R(0)$ e 0 para $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)$, para $B_{2R}(0) \subset \Omega$ e para qualquer $\delta > 0$ pondo $\psi_{\delta,i_0}(x) = \psi((x - x_{i_0})\delta^{-1})$, é imediato que $\{\psi_{\delta,i_0} u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^s(\Omega)$, e então por (1.21) segue que $\left\langle \tilde{I}'(u_n), (\psi_{\delta,i_0} u_n)\right\rangle \to 0$ quando $n \to \infty$. Donde segue que,

$$o_n(1) + \int_\Omega u^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0} + \int_\Omega h(x)u^2\psi_{\delta,i_0} \geq M(||u_n||)^2\langle u_n, \psi_{\delta,i_0} u_n\rangle. \tag{1.23}$$

Por ([78], Proposição 3.6) sabemos que para qualquer $w \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|w(x) - w(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy = C(N,s)\int_{\mathbb{R}^N} \left|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w(x)\right|^2 dx, \tag{1.24}$$

onde $C(N,s) > 0$ é a constante de normalização definida em (9). E tomando a derivada da igualdade acima, para qualquer $v, w \in C_0^\infty(\Omega)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v(x)-v(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v(x) (-\Delta)^{\frac{s}{2}} w(x) dx. \tag{1.25}$$

Mais ainda, qualquer que seja $v, w \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(vw) = v(-\Delta)^{\frac{s}{2}} w + w(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v - 2\mathcal{I}_{\frac{s}{2}}(v,w), \tag{1.26}$$

onde $\mathcal{I}$ é definido no sentido do valor principal, da seguinte forma

$$\mathcal{I}_{\frac{s}{2}}(v,w)(x) = P.V \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(v(x)-v(y))(w(x)-w(y))}{|x-y|^{N+s}} dy.$$

Então, por (1.25) e (1.26), podemos ecrever

$$\begin{aligned} \langle u_n, \psi_{\delta,i_0} u_n \rangle = & \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_{\delta,i_0}(x)u(x) - \psi_{\delta,i_0}(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = \\ C(N,s) & \int_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x) (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \psi_{\delta,i_0}(x) dx + C(N,s) \int_{\mathbb{R}^{2N}} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)|^2 \psi_{\delta,i_0}(x) dx \\ - 2C(N,s) & \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{w}} u_n(x) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_{\delta,i_0}(x)u(x) - \psi_{\delta,i_0}(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+s}} dxdy. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Utilizando os Lemas A.1.6 e A.1.7, temos

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_n(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n(x)(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \psi_{\delta,i_0}(x) dx \right| = 0 \tag{1.28}$$

e

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{s}{w}} u_n(x) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_{\delta,i_0}(x)u(x) - \psi_{\delta,i_0}(y)u_n(y))}{|x-y|^{N+s}} dxdy \right| = 0. \tag{1.29}$$

Combinando (1.17), (1.27), (1.28) e (1.29) concluímos que

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \psi_{\delta,i_0} u_n \rangle = C(N,s)\mu_{i_0} dx. \tag{1.30}$$

Da limitação de $(u_n)$ e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, podemos observar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h(x) u_n^2 \psi_{\delta,i_0}(x) dx = 0$$

e então fazendo $\delta \to 0$, vemos que

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega h(x) u_n^2 \psi_{\delta,i_0}(x) dx = \lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to+\infty} \int_{B\left(x_{i_0};2\delta\right)} h(x) u_n^2 \psi_{\delta,i_0}(x) dx = 0.$$

Percebemos também que pela convergência em (1.17) que

$$\int_\Omega |u_n|^{2_s^*} \psi_{\delta,i_0}(x) dx \to \int_\Omega \psi_{\delta,i_0}(x) d\nu', \text{ quando } n \to +\infty.$$

Desse modo, por (1.30), concluímos que

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}dx = \int_\Omega \nu'.$$

Portanto,

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \tilde{g}(u_n)\psi_{\delta,i_0}dx = \int_\Omega \nu'.$$

Daí, usando (1.27), (1.28), (1.29) e as duas convergências anteriores, tem-se que

$$\nu_{i_0} \geq M(\alpha)C(N,s)\mu_{i_0}. \tag{1.31}$$

Provamos agora que (1.31) não pode acontecer, daí inferir que $J=\emptyset$ em (1.18) e portanto $\nu_{i_0}=0$. De fato, caso (1.31) aconteça, temos que

$$\nu_{i_0} \geq (m_0 C(N,s)S)^{\frac{N}{2s}}. \tag{1.32}$$

Note que foi usado acima o fato de que $M(\alpha)\geq m_0$ para todo $\alpha \geq 0$.

Desde que $u_n$ é uma sequência $(PS)_c$, vale

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(I(u_n) - \frac{1}{\theta}I'(u_n)(u_n)\right).$$

onde $\theta\in(2,2_s^*)$ é a constante que aparece em $(M_2)$, logo, desta condição, estimamos

$$c \geq -b_0||u_n||^{2\alpha_1+2} + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_{\Omega_\Upsilon} h(x)u_n^2dx + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega u_n^{2_s^*}dx + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_\Omega \nu u_n^2 dx.$$

Uma vez que $||u_n||\leq C$, para todo $n\in\mathbb{N}$, e do fato de que $0\leq\psi_{\delta,i_0}\leq 1$, conseguimos

$$c \geq -b_0C + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega u_n^{2_s^*}\psi_{\delta,i_0}dx - \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_\Omega h(x)u_n^2dx - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\nu C.$$

Fazendo $n\to\infty$ e usando (1.17),

$$c \geq -b_0C + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)\int_\Omega h(x)u^2dx + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)\int_\Omega d\nu'\psi_{\delta,i_0}.$$

Tomando $\delta\to 0$, fazendo uso da desigualdade de Hölder, e usando também (1.32),

$$c \geq -b_0C + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}\right)|h(x)|_{L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-1}}(\Omega)}|u|^2_{L^{2_s^*}(\Omega)} + \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2_s^*}\right)(|u|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega)} + (m_0C(N,s)S)^{\frac{N}{2s}}).$$

Assim,

$$c \geq -k_2|u|^2_{L^{2_s^*}(\Omega_\Upsilon)} + k_1|u|^{2_s^*}_{L^{2_s^*}(\Omega_\Upsilon)} + k_3. \tag{1.33}$$

Agora, é fácil ver que a aplicação $l(t)=k_1t^{2_s^*}-k_2t^2$ atinge o mínimo no ponto

$$t_0 = \left(\frac{2k_2}{2_s^*k_1}\right)^{\frac{1}{2_s^*-2}} > 0.$$

Por um cálculo direto, vemos que

$$l(t_0) = k_1 \left( \frac{2k_2}{2_s^* k_1} \right)^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}} - k_2 \left( \frac{2}{2_s^* k_1} \right)^{\frac{2}{2_s^*-2}} = -k_4.$$

Portanto,

$$c \geq k_3 - k_4,$$

o que contradiz (1.22). Então $\nu_{i_0} = 0$.

Desde que $i_0$ é arbitrário, deduzimos que $\nu_i = 0$, $\forall i \in J$. Como consequência disso, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \text{ em } L^{2_s^*}(\Omega).$$

Quando $H$ é igual a $\tilde{g}$, do crescimento subcrítico de $\tilde{g}$ teremos

$$\int_\Omega \tilde{g}(u_n) dx \to \int_\Omega \tilde{g}(u) dx.$$

Dessas convergências e do fato de que $I(u_n)(u_n - u) \to 0$, podemos inferir que

$$M(\alpha^2)(||u_n||^2)\langle\langle u_n, u - u\rangle \to 0.$$

Como $M(\alpha^2) > 0$ e $\liminf ||u_n|| \geq ||u||$, obtemos que

$$||u_n|| \to ||u||.$$

Desta forma, a demonstração está concluída.

□

*Observação* 1.3.3. Veja que a constante $k_3$ na Proposição anterior depende de $m_0$, $b_0$ e $\nu$ (lembre que $\nu$ é arbitrária), enquanto a constante $k_4$ depende da norma de $h$ em $L^{\frac{2_s^*}{2_s^*-2}}$. Como o funcional $\tilde{I}_\lambda$ atinge seu mínimo em um nível negativo, para os nossos propósitos é interessante escolher as constantes anteriormente citadas de modo que $k_3 - k_4 > 0$.

### 1.3.2 A condição $(PS)$ para o problema crítico

O próximo lema nos ajudará a entender o comportamento das sequências $(PS)_c$ fora de uma bola.

**Proposição 1.3.4.** *Seja $u_n$ uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}_\lambda$, então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $R > 0$ de maneira que*

$$\lim_{n\to\infty} M(||u_n||_\lambda^2) \iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(B_R(0))^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} (\lambda a(x) + 1) u_n^2 dx < \epsilon. \quad (1.34)$$

**Demonstração:** Segue os mesmos passos da demonstração da Proposição 1.1.3.

□

Na próxima Proposição, finalmente mostraremos que sob certas condições o funcional auxiliar satisfaz a condição $(PS)$ no nível de energia mínima.

**Proposição 1.3.5.** *Nas mesma condições do Teorema 1.0.2, seja $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)_c$ para $\tilde{I}_\lambda$, onde $c < 0$, então $\{u_n\}$ possui uma subsequência convergente em $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

**Demonstração:** A Proposição 1.3.4 nos garante que

$$M(||u_n||_\lambda^2)||u_n||^2_{E_\lambda(\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \to 0,$$

sempre que $R \to \infty$.

Observe que da imersão contínua $E_\lambda \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ juntamente com a Proposição 1.3.4, para $R$ grande, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \left[\nu u_n^2 + h(x) u_n^2\right] dx < \epsilon.$$

Desta forma, então temos

$$\tilde{I}'_\lambda(u_n)u_n = M\left(||u_n||^2_{E_\lambda(B_R(0))}\right)||u_n||^2_{E_\lambda(B_R(0))} - \int_{B_R(0)} [h(x)u_n^2 + \bar{h}(u_n)u_n]dx + o_n(1) \to 0, \quad (1.35)$$

onde $\bar{H}(x,u) = \int_0^u \bar{h}(x,\tau)d\tau$. Similarmente, podemos mostrar que para $R$ grande

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \bar{H}(u_n)dx < \epsilon$$

e assim concluir que

$$\tilde{I}_\lambda(u_n) = \frac{1}{2}\widehat{M}\left(||u_n||^2_{E^\lambda(B_{R_n}(0))}\right) - \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} h(x)u_n^2 - \frac{1}{2_s^*}\int_{B_R(0)} \bar{H}(u_n) + o_n(1) \to c. \quad (1.36)$$

Note que foi usado tacitamente que $||u_n||_\lambda^2 = ||u_n||^2_{E^\lambda(B_{R_n}(0))} + ||u_n||^2_{E^\lambda \setminus B_{R_n}(0)}$.

Desde que $\nu$ é arbitrária, podemos escolher $\nu$ pequena para que juntamente com as hipóteses do Teorema 1.0.2, termos $m_0$, $b_0$ e $|h|_{2^*/(2^*-2)}$ de tal maneira que $k_3 - k_4 > 0$ em (1.22) e desde que $c < 0$, podemos usar a Proposição 1.3.2 para concluir que

$$||u_n||_\lambda \to ||u||_\lambda.$$

□

## 1.4 Prova do Teorema 1.0.2

De modo análogo ao Lema 1.1.1, mostramos que $\tilde{I}_\lambda$ é coercivo, logo existe uma sequência minimizante $(u_n)$ tal que

$$\tilde{I}_\lambda(u_n) \to c = \inf_{u \in H^s(\mathbb{R}^N)} \tilde{I}_\lambda(u).$$

Escolhendo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte em $\mathcal{O}$, podemos repetir os argumentos da Proposição 1.1.5 e garantir que o nível de energia mínima $c$ de $\tilde{I}_\lambda$ é negativo, então pelas Proposições 1.3.2 e 1.3.5, o nível $c$ é atingido, finalmente pelo Apêncice A.2, garantimos a existência de solução para $(P_*)$ sempre que $\lambda > \lambda^*$, para algum $\lambda^* > 0$. Argumentando como no caso subcrítico, também mostramos o resultado de concentração.

□

**Observações finais**

- Perceba que os argumentos aqui não podem ser utlizados no caso $s = 1$, isto é, para o operador laplaciano tradicional, uma vez que, se $\alpha_1 = 1$ na condição $(M_1)$ (o menor $\alpha_1$ possível), teríamos que ter $2^* < 4$, mas isso não acontece para $N \geq 3$. O laplaciano fracionário por sua vez nos dá mais maleabilidade para o expoente crítico, por exemplo, para $N = 3$ e $s = 1/2$ temos $2^*_s = 3$.

- Os mesmos resultados do Teorema 1.0.1 valem no caso $M \equiv 1$, a diferença básica é que usaríamos o Teorema do passo da montanha, no entanto, não poderíamos usar a mesma argumentação para o caso crítico, pois o nível minimax seria positivo.

- A menos de mudanças técnicas, os resultados continuam válidos para sistemas gradientes do tipo

$$\begin{cases} M_1\left(||u_n||^2_\lambda\right)((-\Delta)^s u + (\lambda a(x) + 1)u) = F_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ M_2\left(||v_n||^2_\lambda\right)((-\Delta)^s v + (\lambda a(x) + 1)v) = F_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u, v \in H^s(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

# Capítulo 2

# Existência e concentração de soluções para sistemas Hamiltonianos com crescimento exponencial crítico e envolvendo o operador laplaciano fracionário

Neste capítulo, iremos estudar um sistema Hamiltoniano elíptico em $\mathbb{R}$.

Motivados pela versão fracionária da desigualdade de Trudinger-Moser, nossa meta neste capítulo é provar a existência e a concentração de soluções positivas e de energia mínima (ground state) para a seguinte classe de sistema Hamiltoniano elíptico e fracionário

$$(\tilde{P}_\lambda) \quad \begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u + (\lambda a(x) + 1)u = H_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}, \\ (-\Delta)^{1/2}v + (\lambda a(x) + 1)v = H_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}, \\ u, v \in H^{1/2}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

onde $(-\Delta)^{1/2}$ é o laplaciano fracionário como definido em (8) (para $s = 1/2$).

O potencial $(\lambda a(x) + 1)$ é o mesmo utilizado no capítulo anterior e verifica

$(a_0)$ $a(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$(a_1)$ O conjunto $int(a^{-1}\{0\}) = \Omega_\Upsilon$ não-vazio e existem componentes abertas, disjuntas e limitadas $\Omega_1, \Omega_2, ...\Omega_k$ tal que

$$int(a^{-1}\{0\}) = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$$

e

$$dist(\Omega_i, \Omega_j) > 0,$$

para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., k$.

Neste capítulo, a função $H \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tem forma

$$H(s,t) = F(s) + G(t). \tag{2.1}$$

Diz-se que uma função $h$ tem crescimento exponencial crítico se

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{h(s)}{e^{\alpha s^2}}=\begin{cases}0, \forall\alpha>\alpha_0\\ +\infty, \forall\alpha<\alpha_0.\end{cases}$$

Definimos $F(s)=\int_0^s f(\tau)d\tau$, $G(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau$ e consideramos as seguintes hipóteses

$(H_0)$ $f$ e $g$ têm crescimento exponencial;

$(H_1)$ $\lim\limits_{s\to0^+} f(s)=\lim\limits_{s\to0^+} g(s)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$;

$(H_2)$ existe $\theta>2$ de modo que para todo $s>0$ vale

$$0<\theta F(s)\le sf(s) \text{ e } 0<\theta G(s)\le sg(s);$$

$(H_3)$ Existem constantes $s_0, M_0>0$ tal que para todo $s\ge s_0$

$$0<F(s)\le M_0 f(s) \text{ e } 0<G(s)\le M_0 g(s);$$

$(H_4)$ para cada conjunto aberto $\Omega\subseteq\mathbb{R}$, há constantes $p>2$ e $C_p$ tal que, $\forall s\ge0$,

$$f(s), g(s)\ge C_p s^{p-1},$$

com $C_p>\left[\frac{(\alpha_0)(p-2)}{2\pi p\omega}\right]S_p^p$, onde $S_p=S(p,\lambda,\Omega)$ é definida por

$$S_p=\inf_{\substack{u,v\in X(\Omega)\\ |u|_p,|v|_p=1}}\left(\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^2}dxdy+\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{(v(x)-v(y))^2}{|x-y|^2}dxdy+\int_\Omega(\lambda a(x)+1)(u^2+v^2)dx\right); \tag{2.2}$$

$(H_5)$ As aplicações $s\mapsto\dfrac{f(s)}{s}$ e $s\mapsto\dfrac{g(s)}{s}$ são estritamente crescentes $\forall s>0$.

Destas condições, observamos que para $\alpha>\alpha_0$ e $q\ge1$, para qualquer $\varepsilon>0$, existem constantes $b_1, b_2>0$ tais que

$$f(s), g(s)\le\varepsilon|s|+b_1|s|^{q-1}(e^{\alpha s^2}-1), \text{ para todo } s\in\mathbb{R} \tag{2.3}$$

e

$$F(s), G(s)\le\frac{\varepsilon}{2}|s|^2+b_2|s|^q(e^{\alpha s^2}-1), \text{ para todo } s\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte Teorema.

**Teorema 2.0.1.** *Assuma que $H$ tem foma (2.1), $(a_0)-(a_1)$ e $(H_0)-(H_5)$ valem. Então, existe $\lambda_0$ com a propriedade de que para qualquer subconjunto não vazio $\Upsilon$ of $\{1,2,...,k\}$ e $\lambda\ge\lambda_0$, o problema $(\tilde{P}_\lambda)$ tem uma solução ground state $(u_\lambda, v_\lambda)$ onde $u_\lambda>0$ e $v_\gamma>0$. Mais ainda, se fixarmos o conjunto $\Upsilon$, então, para qualquer sequência $(\lambda_n)$ com $\lambda_n\to\infty$, podemos extrair uma subsquência $(\lambda_{n_i})$ de modo que $(u_{\lambda_{n_i}}, v_{\lambda_{n_i}})$ converge fortemente para $(u,v)$ em $(H^{1/2}(\mathbb{R}))^2$, donde $u=v=0$ fora de $\Omega_\Upsilon=\bigcup_{j\in\Upsilon}\Omega_j$ e $(u,v)$ restrito à $\Omega_\Upsilon$ é uma solução ground state para o problema*

$$(P)_\Upsilon \begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u + u = H_v(x,u,v) \ \ em \ \Omega_\Upsilon, \\ (-\Delta)^{1/2}v + v = H_u(x,u,v) \ \ em \ \Omega_\Upsilon, \\ u, v = 0 \ \ em \ \mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon. \end{cases}$$

Até onde sabemos, existem poucos resultados envolvendo sistemas hamiltonianos com não linearidades do tipo exponencial no cenário fracionário. Recentemente, do Ó, Giacomoni e Mishra [41] mostraram existência de soluções positivas para o sistema

$$\begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u + u = Q(x)g(v) \text{ em } \mathbb{R}, \\ (-\Delta)^{1/2}v + v = P(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}, \end{cases}$$

Nesse caso eles fizeram uso de funções peso nas não linearidades para superar a falta de compacidade. No nosso caso, "controlamos" a compacidade utilizando o *steep potential* e fazendo uso de argumentos de truncamento. Note que o caráter não local deste operador cria diversas dificuldades para se trabalhar esse tipo de técnica. Mesmo que garantindo a existência de solução somente quando $\lambda$ é suficientemente grande, também mostramos que as soluções se concentram em uma solução ground state de um problema com domínio limitado, onde esse domínio é uma união de abertos disjuntos.

## 2.1 Desigualdade de Trudinger-Moser

Esta pequena seção é dedicada a exibir a desigualdade de Trundiger-Moser em espaços fracionários, começaremos mostrando para o espaço $H^{1/2}(\mathbb{R})$, a demonstração pode ser encontrada em (Teorema 1, [79]) e (Teorema 1.1, [55]).

**Proposição 2.1.1.** *Existem constantes $0 < \omega \leq \pi$ com a seguinte a propriedade: para todo $0 < \alpha < \omega$ existe $K_\alpha > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\alpha u^2} - 1)dx \leq K_\alpha |u|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

*para $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ com $|(-\Delta)^{1/4}u|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$.*

Observamos também que pela condição $(a_0)$ a imersão $H^{1/2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ é compacta para qualquer $p \in [2, +\infty)$. Assim, pode-se mostrar que para $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ e $\alpha > 0$ vale

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{\alpha u^2} - 1)dx < \infty. \tag{2.5}$$

Consulte (Lema 2.3, [38]) para mais detalhes.

No próximo lema exibimos um resultado similar para o espaço $X(\Omega)$, onde o leitor pode consultar a demonstração em (Corolário 2.4 e Proposição 2.5, [52])).

**Proposição 2.1.2.** *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}$ um domínio limitado. para todo $0 < \alpha \leq 2\pi\omega$ se tem $K_\alpha > 0$ onde*

$$\int_{\Omega} e^{\alpha u^2} dx \leq K_\alpha$$

*para todo $u \in X(\Omega)$ com $||u||_{X(\Omega)} \leq 1$. Além disso, para $u \in X(\Omega)$, temos $e^{u^2} \in L^2(\Omega)$.*

## 2.2 O problema $(P)_\Upsilon$

Para provar o Teorema 2.0.1 precisamos garantir a existência de solução para o problema $(P)_\Upsilon$, deste modo, esta seção será dedicada a estudar tal problema. Os argumentos utilizados aqui são adaptados de [6].

Uma solução fraca para $(P)_\Upsilon$ é um para $(u,v) \in X(\Omega_\Upsilon) \times X(\Omega_\Upsilon)$, que verifica

$$\langle u, \psi \rangle_{X(\Omega_\Upsilon)} + \langle v, \varphi \rangle_{X(\Omega_\Upsilon)} + \int_{\Omega_\Upsilon} u\psi dx + \int_{\Omega_\Upsilon} v\varphi dx = \int_{\Omega_\Upsilon} f(u)\varphi dx + \int_{\Omega_\Upsilon} g(v)\psi dx$$

para todo $(\varphi, \psi) \in X(\Omega_\Upsilon) \times X(\Omega_\Upsilon)$.

Sem perda de generalidade consideramos $\Upsilon = \{1,2\}$ e denotaremos por $||.||$, $||.||_1$ e $||.||_2$ as normas em $X(\Omega_\Upsilon)$, $X(\Omega_1)$ e $X(\Omega_2)$ dadas por

$$||u||^2 = ||u||^2_{X(\Omega_\Upsilon)} + |u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}, \quad ||u||_1^2 = ||u||^2_{X(\Omega_1)} + |u|^2_{L^2(\Omega_1)}, \quad ||u||_2^2 = ||u||^2_{X(\Omega_2)} + |u|^2_{L^2(\Omega_2)},$$

respectivamente.

No que segue, considere os espaços

- $Y(\Omega_\Upsilon) = X(\Omega_\Upsilon) \times X(\Omega_\Upsilon)$ com norma
$$||w||_\Upsilon = ||(u,v)||_\Upsilon = \sqrt{||u||^2 + ||v||^2};$$
- $L^2(\Omega_\Upsilon) \times L^2(\Omega_\Upsilon)$ com norma
$$|w|_2 = |(u,v)|_{L^2(\Omega_\Upsilon)\times L^2(\Omega_\Upsilon)} = \sqrt{|u|^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)} + ||v||^2_{L^2(\Omega_\Upsilon)}};$$
- $Y(\Omega_1) = X(\Omega_1) \times X(\Omega_1)$ com norma
$$||w||_1 = ||(u,v)||_1 = \sqrt{||u||_1^2 + ||v||^2};$$
- $Y(\Omega_2) = X(\Omega_2) \times X(\Omega_2)$ com norma
$$||w||_2 = ||(u,v)||_2 = \sqrt{||u||^2 + ||v||^2}.$$

Logo, associamos o funcional $J_\Upsilon : Y(\Omega_\Upsilon) \to \mathbb{R}$ ao problema $(P)_\Upsilon$, dado por

$$J_\Upsilon(w) = J_\Upsilon(u,v) = \langle u, v \rangle - \int_{\Omega_\Upsilon} [F(u) + G(v)]dx,$$

aqui, $\langle .,. \rangle$ é o produto interno que induz $||.||$.

Inspirados por Szulkin e Welth em [86], definimos

$$Y^\pm = \{w = (u,v) \in Y(\Omega_\Upsilon) : v = \pm u\}.$$

Desde que,

$$w = w^+ + w^- = \frac{1}{2}(u+v, u+v) + \frac{1}{2}(u-v, v-u), \text{ onde } w^\pm \in Y^\pm.$$

notamos que

$$Y(\Omega_\Upsilon) = Y^+ \oplus Y^-. \tag{2.6}$$

Nossa intenção neste capítulo é mostrar que o problema $(P)_\Upsilon$ tem uma solução com energia mínima, todavia, a natureza de $\Omega_\Upsilon$ não nos permite usar os métodos tradicionais aqui, uma vez que, é mais interessante buscar soluções que não se anulam em cada componente $\Omega_j$ of $\Omega_\Upsilon$. Baseado nisto, definimos o conjunto

$$\mathcal{M}_\Upsilon = \{w \in \mathcal{M} : J'_\Upsilon(w)w_j = 0 \text{ e } w_j \neq 0 \text{ para todo } j \in \Upsilon\},$$

onde $w_j = (u_{|\Omega_j}, v_{|\Omega_j})$ e $\mathcal{M}$ é a variedade generalizada de Nehari correspondente, determinada por

$$\mathcal{M} = \{w \in Y(\Omega_\Upsilon) \setminus Y^- : J'_\Upsilon(w)w = 0 \text{ e } J'_\Upsilon(w)z = 0 \text{ para todo } z \in Y^-\}.$$

com $w = (u, v)$.

Pela decomposição em (2.6), vemos que se $w = (u, v) \in Y(\Omega_\Upsilon) \setminus \{0\}$ e $J'_\Upsilon(w)w = 0$, assim por $(H_2)$

$$J_\Upsilon(w) = J_\Upsilon(w) - \frac{1}{2}J'_\Upsilon(w)w > 0.$$

Por outro lado, se $w = (u, -u) \in Y^-$, usando novamente $(H_2)$ temos

$$J_\Upsilon(w) = -||u||^2 - \int_{\Omega_\Upsilon} [F(u) + G(-u)]dx \leq 0.$$

Portanto, todo ponto crítico não trivial de $J_\Upsilon$ pertence a $\mathcal{M}$.

O próximo lema nos mostra que $\mathcal{M}$ é não vazio.

**Lema 2.2.1.** *Seja $w = (u, v) \in Y(\Omega)$ com $w_j = (u_j, v_j) \neq 0$ para $j = 1, 2$. Então, existem $t, s > 0$. De forma que $J'(tw_1 + lw_2)w_1 = 0$ e $J'(tw_1 + lw_2)w_2 = 0$. Como consequência, o conjunto $\mathcal{M}$ é não vazio.*

**Demonstração:** Considere $V : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua dada por

$$V(t, s) = \left(J'_\Upsilon(tw_1 + lw_2)(tw_1), J'_\Upsilon(tw_1 + lw_2)(lw_2)\right)$$

Note que

$$J'_\Upsilon(tw_1 + lw_2)(tw_1) = \langle tu_1 + lu_2, tv_1\rangle + \langle tv_1 + lv_2, tu_1\rangle - \int_{\Omega_1} f(tu_1)tu_1 dx - \int_{\Omega_1} g(tv_1)tv_1 dx.$$

De (3.1) obtemos

$$J'_{\Upsilon}(tw_1 + lw_2)(tw_1) \geq$$
$$2t^2\langle u_1, v_1\rangle - \varepsilon t^2 \left(\int_{\Omega_1} u_1^2 dx + \int_{\Omega_1} v_1^2 dx\right) - b_1 t^q \left(\int_{\Omega_1} u^q e^{\alpha t u^2} dx + \int_{\Omega_1} v^q e^{\alpha t v^2} dx\right).$$

Para $p, p' > 0$ e $1/p + 1/p'$ observe que

$$\left(\int_{\Omega_1} u^q e^{\alpha t u^2} dx + \int_{\Omega_1} v^q e^{\alpha t v^2} dx\right) \leq$$
$$\left[\left(\int_{\Omega_1} e^{p\alpha t u^2} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} |u|^{p'q} dx\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{\Omega_1} e^{p\alpha t v^2} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} |v|^{p'q} dx\right)^{\frac{1}{p'}}\right].$$

Escolhendo $t$ suficientemente pequeno tal que $pt\alpha < 2\pi\omega$, a Proposição 2.1.2 nos dá

$$\left(\int_{\Omega_1} e^{p\alpha t u^2} dx\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int_{\Omega_1} e^{p\alpha t v^2} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_\alpha, \text{ para todo } u, v \in X(\Omega_\Upsilon).$$

Deste modo, podemos concluir que para todo $l > 0$ tem-se $J'(tw_1 + lw_2)(tw_1) > 0$, escolhido $q > 2$, $\varepsilon$ pequeno e $t$ suficientemente próximo à 0.

De outra forma, um cálculo típico em $(H_2)$ junto com $(H_3)$ nos permite inferir que

$$M_0 f(s) \geq F(s) \geq k_1 s^\theta - k_2 \text{ e } M_0 g(s) \geq G(s) \geq k_1 s^\theta - k_2,$$

para algumas constantes positivas $k_1, k_2$, $\theta > 2$ e $s \geq s_0$.

Pela observação anterior, concluímos que para $t$ grande e qualquer $l > 0$

$$J'_{\Upsilon}(tw_1 + lw_2)(tw_1) \leq 2t^2\langle u_1, v_1\rangle - \frac{k_1}{M_0} t^{\theta+1} \left(\int_{\Omega_1} u_1^{\theta_1} dx + \int_{\Omega_1} v_1^2 dx\right) < 0.$$

Usando cálculos similares,

$$J'_{\Upsilon}(tw_1 + lw_2)(lw_1) > 0, \text{ para } l \text{ suficientemente pequeno e qualquer } t > 0.$$

E

$$J'_{\Upsilon}(tw_1 + lw_2)(lw_1) < 0, \text{ para } l \text{ suficientemente grande e qualquer } t > 0.$$

Resumindo, temos

$$J'_{\Upsilon}(Rw_1 + lw_2)(Rw_1) < 0 \text{ e } J'_{\Upsilon}(tw_1 + Rw_2)(Rw_2) < 0 \text{ para todo } t, l \in [r, R]$$

e

$$J'_{\Upsilon}(rw_1 + lw_2)(rw_1) > 0 \text{ e } J'_{\Upsilon}(tw_1 + rw_2)(rw_2) > 0 \text{ para todo } t, l \in [r, R].$$

O lema segue então aplicando o Teorema de Miranda [71], que está enunciado no Apêndice, Teorema A.1.8.

□

Para cada $w_n \in \mathcal{M}$, perceba que

$$J'_\Upsilon(w_n)w_n = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\langle u_n, v_n\rangle = \int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)u_n dx + \int_{\Omega_\Upsilon} g(v_n)v_n dx.$$

Então, para $w_n \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} J_\Upsilon(w_n) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)u_n dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\Upsilon} g(v_n)v_n dx - \int_{\Omega_\Upsilon} [F(u_n) + G(v_n)]dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\Omega_\Upsilon} [f(u_n)u_n + g(v_n)v_n]dx. \end{aligned}$$

A condição $(H_2)$ foi assumida tacitamente na última desigualdade. Veja ainda que se assumirmos $(H_3)$, teremos que $J_\Upsilon$ é coercivo em $\mathcal{M}$.

*Observação* 2.2.2. A discussão acima nos leva a concluir que existe $c_0 \in \mathbb{R}$, onde

$$c_0 = \inf_{w \in \mathcal{M}_\Upsilon} J_\Upsilon(w). \tag{2.7}$$

Utilizando os mesmos argumentos de de Figueiredo, do Ó e Zhang em [37], Corolário 2.4, é possível mostrar que

$$\inf_{w \in \mathcal{M}} J_\Upsilon(w) \geq \inf_{z \in Y^+} \max_{\theta \geq 0} J_\Upsilon(\theta z + \zeta),$$

para todo $\zeta \in Y^-$. Disto, concluímos que para qualquer $a > 0$

$$\inf_{w \in \mathcal{M}} J_\Upsilon(w) \geq \inf_{z \in S_a^+} \max_{\theta \geq 0} J_\Upsilon(\theta z),$$

onde $S_a^+ = \{w \in Y^+ : ||w|| = a\}$.

Assim, usando as condições de crescimento somos capazes de mostrar que $\max_{\theta \geq 0} J_\Upsilon(\theta z) > 0$ para todo $z \in S_a^+$ com $a$ suficientemente pequeno. Então,

$$c_0 = \inf_{w \in \mathcal{M}_\Upsilon} J_\Upsilon(w) \geq \inf_{w \in \mathcal{M}} J_\Upsilon(w) \geq \inf_{z \in Y^+} \max_{\theta \geq 0} J_\Upsilon(\theta z + \zeta) > 0.$$

Os pormenores deste argumento podem ser encontrados em [37] na Proposição 2.5.

**Lema 2.2.3.** *Existe uma função $w_p = (u_p, v_p) \in \mathcal{M}_\Upsilon$, com $u_p, v_p \geq 0$, tal que $S_p$ definida na condição $(H_4)$, é atingida por $w_p$.*

**Demonstração:** Pelo Lema 2.2.1 obtemos uma sequência $w_n = (u_n, v_n)$, onde $u_n$ e $v_n$ são funções não negativas (se necessário, troque $u_n$ e $v_n$, por $|u_n|$ e $|v_n|$, isto é possível devido a desigualdade triangular reversa) e tal que

$$\begin{aligned} &\left(\iint_{\Omega_\Upsilon \times \Omega_\Upsilon} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x-y|^2} dxdy + \int_{\Omega_\Upsilon} u_n^2 dx\right)^2 + \\ &\left(\iint_{\Omega_\Upsilon \times \Omega_\Upsilon} \frac{(v_n(x) - v_n(y))^2}{|x-y|^2} dxdy + \int_{\Omega_\Upsilon} v_n^2 dx\right)^2 \to S_p^2 \end{aligned}$$

e $|u_n|_p = |v_n|_p = 1$.

Então, $(w_n) = (u_n, v_n)$ é limitado em $X(\Omega_\Upsilon) \times X(\Omega_\Upsilon)$. Desde que $X(\Omega_\Upsilon)$ é um espaço de Hilbert e $X(\Omega_\Upsilon) \hookrightarrow L^p(\Omega_\Upsilon)$ $(p \geq 1)$ compactamente, tomando uma subsequência, temos as seguintes convergências

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_p, v_n \rightharpoonup v_p, \text{ em } X(\Omega_\Upsilon), \\ u_n \to u_p, v_n \to v_p \text{ em } L^p(\Omega_\Upsilon) \\ u_n(x) \to u_p(x), v_n \to v_p(x), \text{ q.t,p em } \Omega_\Upsilon. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} |u|_p = |v|_p = 1 \\ ||w||_\Upsilon \leq \liminf_{n\to\infty} ||w_n||_\Upsilon = S_p \\ u_p(x), v_p(x) \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega_\Upsilon. \end{cases}$$

Donde segue que $||w_p||_\Upsilon = S_p$

□

**Lema 2.2.4.** *Seja $w_p = (u_p, v_p)$ definido como acima e suponha que vale $(H_4)$, então*

$$\max_{t\geq 0} J_\Upsilon(tw_p) < \frac{\pi\omega}{\alpha_0}.$$

*Em particular,*

$$c_0 = \inf_{w\in\mathcal{M}_\Upsilon} J_\Upsilon(w) < \frac{\pi\omega}{\alpha_0}.$$

**Demonstração:** Defina $\Psi(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dado por

$$\Psi(t) = t^2\langle u_p, v_p\rangle - \int_{\Omega_\Upsilon} [F(tu_p) + G(tv_p)]dx.$$

Observe que,

$$\Psi(t) \leq \frac{t^2}{2}(||u_p||^2 + ||v_p||^2) - \int_{\Omega_\Upsilon} [F(tu_p) + G(tv_p)]dx.$$

Como $||u_p||^2 + ||v_p||^2 = ||w_p||^2_\Upsilon = S_p^2$, por $(H_4)$,

$$\Psi(t) \leq \max_{t\geq 0}\left[\frac{t^2}{2}S_p^2 - t^p\frac{C_p}{p}\right] = \frac{(p-2)}{2p}\frac{S_p^{2p/(p-2)}}{C_p^{2/p-2}} < \frac{\pi\omega}{\alpha_0}.$$

□

Agora, estamos em condições para provar o principal resultado desta seção.

**Proposição 2.2.5.** *Sendo $\Upsilon$ um subconjunto fixado de $\{1, 2, 3, ..., k\}$ e $\Omega_\Upsilon = \bigcup_{j\in\Upsilon}\Omega_j$, onde cada $\Omega_j$ é conexo e a família $\{\Omega_j\}_{j\in\Upsilon}$ é um a um disjunto. Se valem $(H_1) - (H_4)$ e $f, g$ têm crescimento exponencial crítico, então o problema*

$$(P)_\Upsilon \begin{cases} (-\Delta)^{1/2}u + u = H_v(x, u, v) \text{ em } \Omega_\Upsilon, \\ (-\Delta)^{1/2}v + v = H_u(x, u, v) \text{ em } \Omega_\Upsilon, \\ u, v = 0 \text{ em } \mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon. \end{cases}$$

*tem uma solução com energia mínima que não se anula em qualquer $\Omega_j$, para $j \in \Upsilon$.*

**Demonstração:** Pelo lema 2.2.1, garantimos a existência de uma sequência minimizante $(w_n)$ em $\mathcal{M}_\Upsilon$, na qual

$$J_\Upsilon(w_n) \to c_0 = \inf_{w \in \mathcal{M}_\Upsilon} J_\Upsilon(w) \quad \text{e} \quad J_\Upsilon(w_n)w_n = 0. \tag{2.8}$$

A Observação 2.2.2 nos assegura que $(||w_n||)$ é limitada em $\mathcal{M}_\Upsilon$, portanto usando as imersões de Sobolev, existe um $w_0$ tal que

$$w_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup w = (u, v) \text{ em } Y(\Omega_\Upsilon)$$

$$u_n \to u,\ v_n \to v \text{ em } L^p(\Omega_\Upsilon)$$

$$u_n(x) \to u(x),\ v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p em } \Omega_\Upsilon.$$

Do Lema 2.2.1, existem $t, l > 0$ satisfazendo

$$J'_\Upsilon(tw_{|\Omega_1} + lw_{|\Omega_2})tw_{|\Omega_1} = 0 \text{ e } J'_\Upsilon(tw_{|\Omega_1} + lw_{|\Omega_2})lw_{|\Omega_2} = 0.$$

Consequentemente,

$$2t^2\langle u_{|\Omega_1}, v_{|\Omega_1}\rangle = \int_{\Omega_\Upsilon} \frac{f(tu_{|\Omega_1})}{u_{|\Omega_1}} tu^2_{|\Omega_1} dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \frac{g(tv_{|\Omega_1})}{v_{|\Omega_1}} tv^2_{|\Omega_1} dx. \tag{2.9}$$

Além disso, desde $(w_n) \in \mathcal{M}_\Upsilon$, vemos que $J_\Upsilon(w_{n|\Omega_1})w_{n|\Omega_1} = 0$ e então pelo Lema de Fatou

$$\liminf_{n\to\infty} \left(2\langle u_{n|\Omega_1}, v_{n|\Omega_1}\rangle\right) \geq \int_{\Omega_\Upsilon} \frac{f(u_{|\Omega_1})}{u_{|\Omega_1}} u^2_{|\Omega_1} dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \frac{g(v_{|\Omega_1})}{v_{|\Omega_1}} v^2_{|\Omega_1} dx. \tag{2.10}$$

Usando novamente o Lema de Fatou, observamos que

$$\liminf_{n\to\infty}\langle u_n, v_n\rangle = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{(u_n(x) - u_n(y))(v_n(x) - v_n(y))}{|x-y|^2} dxdy \geq$$
$$\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x-y|^2} dxdy = \langle u, v\rangle.$$

Logo, subtraindo (2.9) de (2.10) teremos

$$\left(\int_{\Omega_\Upsilon} \frac{f(u_{|\Omega_1})}{u_{|\Omega_1}} u^2_{|\Omega_1} - \int_{\Omega_\Upsilon} \frac{f(tu_{|\Omega_1})}{tu_{|\Omega_1}} u^2_{|\Omega_1}\right) dx + \left(\int_{\Omega_\Upsilon} \frac{g(v_{|\Omega_1})}{v_{|\Omega_1}} v^2_{|\Omega_1} dx - \int_{\Omega_\Upsilon} \frac{g(tv_{|\Omega_1})}{tv_{|\Omega_1}} v^2_{|\Omega_1} dx\right) \geq 0.$$

Da condição $(H_5)$, necessariamente temos que ter $t \leq 1$ e por um argumento similar também concluímos que $l \leq 1$.

Afirmamos $J_\Upsilon(tw_{|\Omega_1} + lw_{|\Omega_2}) = c_0$. De fato, pela condição $(H_5)$,

$$f'(t)t \geq f(t) \text{ e } g'(t)t \geq g(t), \text{ for all } t \geq 0.$$

Disto, de $(H_2)$ e pelo Lema de Fatou

$$\begin{aligned}
c_0 + o_n(1) &= J_\Upsilon(w_n) - \frac{1}{2}J'_\Upsilon(w_n)w_n \\
&= \int_{\Omega_\Upsilon} \left[\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right] dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \left[\frac{1}{2}g(v_n)v_n - G(v_n)\right] dx \\
&\geq \int_{\Omega_\Upsilon} \left[\frac{1}{2}f(u)u - F(u)\right] dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \left[\frac{1}{2}g(v)v - G(v)\right] dx \\
&= J_\Upsilon(w_n) - \frac{1}{2}J'_\Upsilon(w)w = J_\Upsilon(w).
\end{aligned}$$

Finalmente, para concluir a demonstração, falta mostrar que $u, v \neq 0$ e que $(u, v)$ é um ponto crítico para $J_\Upsilon$ em todo o espaço. Primeiramente, perceba que se $u = 0$ então $v = 0$, e assim $c_0 = 0$, todavia, esta situação não pode ocorrer. Logo, temos que considerar necessariamente dois casos.

<u>*Caso 1:*</u> $w_n \to 0$ fortemente em $Y(\Omega_\Upsilon)$.

Neste caso, segue diretamente que $J_\Upsilon(w_n) \to c_0 = 0$, o que novamente contradiz o fato estabelido na Observação 2.2.2. Então, $w_n$ não converge fortemente para 0 em $Y(\Omega_\Upsilon)$.

<u>*Caso 2:*</u> $w_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $Y(\Omega_\Upsilon)$, mas não fortemente, i.é, $\inf ||u_n|| \geq b > 0$.

Como resultado, temos

$$\langle u_n, v_n\rangle = c_0 + \int_{\Omega_\Upsilon} F(u_n)dx + \int_{\Omega_\Upsilon} G(v_n)dx + o_n(1) \tag{2.11}$$

e

$$\langle u_n, v_n\rangle = \int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)u_n dx + \int_{\Omega_\Upsilon} g(v_n)v_n dx = 2\left(c + \int_{\Omega_\Upsilon} F(u_n)dx + \int_{\Omega_\Upsilon} G(v_n)dx + o_n(1)\right). \tag{2.12}$$

Usando (Lema 3.1, [32]), obtemos

$$f(u_n) \to f(u) \text{ e } g(u_n) \to g(u) \text{ em } L^1(\Omega_\Upsilon).$$

Da hipótese $(H_3)$ e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, mostra-se

$$\int_{\Omega_\Upsilon} [F(u_n) + G(v_n)]dx \to \int_{\Omega_\Upsilon} [F(u) + G(v)]dx \tag{2.13}$$

Pela convergência $(u_n, v_n) \rightharpoonup 0$ e (2.13), juntamente com a estimativa (2.11) podemos concluir

$$\langle u_n, v_n\rangle = c_0 + o_n(1). \tag{2.14}$$

Note também que usando $(H_4)$, podemos obter

$$\begin{aligned}
0 < c_0 \leq J_\Upsilon(u_n, v_n) &\leq \langle u_n, v_n\rangle - \frac{C_p}{p}(|u_n|_p^p + |v_n|_p^p) \\
&\leq \langle u_n, v_n\rangle - (||u_n||^p + ||v_n||^p).
\end{aligned}$$

Da estimativa anterior e (2.14), só podemos ter $||u_n||^p + ||v_n||^p < c_0$. Além disso, usando as condições de crescimento, a Proposição 2.1.2 e o Lema 2.2.4,

$$\int_{\Omega_\Upsilon} f(u_n)u_n dx \leq \left(\int_{\Omega_\Upsilon} e^{2\alpha||u_n||^2\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_\Upsilon} |u_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq K|u_n|_2^2.$$

Repetindo o argumento,

$$\int_{\Omega_\Upsilon} g(v_n)v_n dx \leq \left(\int_{\Omega_\Upsilon} e^{2\alpha||v_n||^2\left(\frac{v_n}{||v_n||}\right)^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_\Upsilon} |v_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq K|v_n|_2^2.$$

As estimativas anteriores juntamente com (2.12) implicam que $\langle u_n, v_n\rangle \to c_0 = 0$, um absurdo. Isto mostra que o caso 2 também não ocorre.

Por fim, usaremos o Teorema da Função Implícita, Teorema A.1.10, para mostrar que $w = (u, v)$ é ponto crítico de $J_\Upsilon$ em todo $Y(\Omega_\Upsilon)$, para fazer isso, definimos

$$\begin{aligned} Q^1(r, z, l) = {} & \langle u + r\varphi + zu_1 + lu_2, v + r\psi + zv_1 + lv_2\rangle - \int_{\Omega_1} f(u_1 + r\varphi_1 + zu_1)(u_1 + r\varphi_1 + zu_1)dx \\ & - \int_{\Omega_1} g(v_1 + r\psi_1 + zv_1)(v_1 + r\psi_1 + zv_1)dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q^2(r, z, l) = {} & \langle u + r\varphi + zu_1 + lu_2, v + r\psi + zv_1 + lv_2\rangle - \int_{\Omega_2} f(u_2 + r\varphi_2 + lu_2)(u_2 + r\varphi_2 + lu_2)dx \\ & - \int_{\Omega_2} g(v_2 + r\psi_2 + lv_2)(v_2 + r\psi_2 + lv_2)dx, \end{aligned}$$

onde $(\varphi, \psi)$ é $C^\infty(\Omega_\Upsilon) \times C^\infty(\Omega_\Upsilon)$.

Por um cálculo direto,

$$\frac{\partial Q^1}{\partial z}(0, 0, 0) = 2\langle u_1, v_1\rangle - \int_{\Omega_\Upsilon} [f'(u_1)u_1^2 + f(u_1)u_1]dx - \int_{\Omega_\Upsilon} [g'(v_1)v_1^2 + g(v_1)v_1]dx.$$

Veja que, pela hipótese $(H_5)$

$$f'(s)s - f(s) > 0 \text{ e } g'(s)s - g(s) > 0, \text{ para todo } s > 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial Q^1}{\partial z}(0, 0, 0) = \int_{\Omega_1} [f(u_1) - f'(u_1)u_1]dx + \int_{\Omega_1} [g(v_1) - g'(v_1)v_1]dx < 0.$$

Usando um argumento parecido, é possível mostrar que

$$\frac{\partial Q^2}{\partial l}(0, 0, 0) < 0$$

Então, aplicando o teorema da função implícita, existem funções $z(r)$, $l(r)$ de classe $C^1$ definidas em algum intervalo $(-\delta, \delta)$ para algum $\delta > 0$ tal que $z(0) = l(0) = 0$ e

$$Q^i(r, z(r), l(r)) = 0 \text{ para } r \in (-\delta, \delta) \text{ e } i = 1, 2.$$

Então, para qualquer $r \in (-\delta, \delta)$, temos

$$(u(r), v(r)) = (u, v) + r(\varphi, \psi) + z(r)(u_1, v_1) + l(r)(u_2, v_2) \in \mathcal{M}_\Upsilon.$$

Além disso, temos

$$J_\Upsilon(u(r), v(r)) \geq J_\Upsilon(w) \text{ para todo } r \in (-\delta, \delta),$$

ou seja,

$$J_\Upsilon(w + r(\varphi, \psi) + z(r)(u_1, v_1) + l(r)(u_2, v_2)) \geq J_\Upsilon(w) \text{ para todo } r \in (-\delta, \delta).$$

Logo,

$$\frac{J_\Upsilon(w + r(\varphi, \psi) + z(r)(u_1, v_1) + l(r)(u_2, v_2)) - J_\Upsilon(w)}{r} \geq 0 \text{ para todo } r \in (-\delta, \delta).$$

Quando $r \to 0$, temos

$$J'_\Upsilon(w).((\varphi, \psi) + z'(0)(u_1, v_1) + l'(0)(u_2, v_2)) \geq 0,$$

pela linearidade de $J'_\Upsilon(w)$,

$$J'_\Upsilon(w)((\varphi, \psi) + z'(0)(u_1, v_1) + l'(0)(u_2, v_2)) = J'_\Upsilon(w)(\varphi, \psi) + z'(0)J'_\Upsilon(w)w_1 + J'_\Upsilon(w)w_2 \geq 0,$$

onde $w_1 = (u_1, v_1)$ e $w_2 = (u_2, v_2)$. Desde que $J'_\Upsilon(w)w_1 = J'_\Upsilon(w)w_2 = 0$, podemos concluir que

$$J'_\Upsilon(w)(\varphi, \psi) \geq 0, \text{ para qualquer } (\varphi, \psi) \in Y(\Omega_\Upsilon).$$

e então

$$J'_\Upsilon(w)(\varphi, \psi) = 0, \text{ para qualquer } (\varphi, \psi) \in Y(\Omega_\Upsilon),$$

mostrando que $w$ é ponto crítico para $J_\Upsilon$.

## 2.3 Um problema auxiliar

Nesta seção, estudaremos um problema auxiliar de maneira que, sob certas condições, as soluções do problema auxiliar serão soluções do problema $(P_\lambda)$.

A priori, precisamos definir o espaço

$$E_\lambda = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}); \int_{\mathbb{R}} a(x)|u|^2 dx < \infty \right\},$$

munido com o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^2} dxdy + \int_{\mathbb{R}} [(\lambda a(x) + 1)uv] dx.$$

Assim como no capítulo anterior, vemos que das hipóteses sobre o potencial $V$ é imediato que $E_\lambda$ é um espaço de Hilbert e $E_\lambda \hookrightarrow H^{1/2}(\mathbb{R})$ continuamente.

Associamos o funcional $L_\lambda : E_\lambda \times E_\lambda \to \mathbb{R}$ ao problema $(P_\lambda)$, onde $L_\lambda$ é definido como

$$L_\lambda(u,v) = \langle u,v\rangle_\lambda - \int_{\mathbb{R}} [F(u) + G(v)].$$

Faremos uma modificação adequada nas não linearidades $f(s)$ e $g(s)$ fora do domínio $\Omega_\Upsilon$ de modo que o funcional energia associado satisfaça a Condição Palais-Smale. Esse tipo de método é inspirado nas ideias exploradas por del Pino e Felmer em [31].

Para isso, introduziremos as seguintes funções truncadas

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s), & \text{se } s \leq a, \\ s/k \text{ se } s > a \end{cases}$$

e

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} g(s), & \text{se } s \leq a, \\ s/k \text{ se } s > a. \end{cases}$$

onde $k > \theta/(\theta - 2) > 1$ e $a, a' > 0$ são tais que $f(a) = a/k$ e $g(a') = a'/k$.

Agora, definimos

$$f_A(x,s) = \chi_{\Omega_\Upsilon}(x) f(s) + \left(1 - \chi_{\Omega_{\Upsilon(x)}}\right)\tilde{f}(s)$$

e

$$g_A(x,s) = \chi_{\Omega_\Upsilon}(x) g(s) + \left(1 - \chi_{\Omega_{\Upsilon(x)}}\right)\tilde{g}(s).$$

Assumindo $(H_1) - (H_5)$ é fácil checar $f_A$ e $g_A$ são $C^1$ por partes em $s$ para qualquer $x$ fixado e satisfaz as seguintes condições de crescimento

$(\tilde{H}_1)$ Para um $x$ fixado e $\alpha > \alpha_0$ e $q \geq 1$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$f_A(s), g_A(s) \leq \varepsilon |s| + b_1 |s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1), \forall s \in \mathbb{R};$$

$(\tilde{H}_2)$ Definindo $F_A(x,s) = \int_0^s f_A(x,\tau)d\tau$ e $G_A(x,s) = \int_0^s g_A(x,\tau)d\tau$. Valem as seguintes desigualdades

$$0 < \theta F_A(x,s) \leq f_A(x,s)s, \quad (x,s) \in [\Omega_\Upsilon \times (0,+\infty)] \cup [(\mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon) \times (0,a]],$$

$$0 < 2F_A(x,s) \leq f_A(x,s)s \leq \frac{s^2}{k}, \quad (x,s) \in (\mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon) \times [0,+\infty),$$

$$0 < \theta G_A(x,s) \leq g_A(x,s)s, \quad (x,s) \in \left[\Omega_\Upsilon \times (0,+\infty)\right] \cup [(\mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon) \times (0,a']];$$

e

$$0 < 2G_A(x,s) \leq g_A(x,s)s \leq \frac{s^2}{k}, \quad (x,s) \in (\mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon) \times [0,+\infty);$$

$(\tilde{H}_3)$ As aplicações $s \mapsto \frac{f_A(x,s)}{s}$ e $s \mapsto \frac{g_A(x,s)}{s}$ são crescentes, fixado $x$ qualquer.

Consideramos agora o seguinte funcional

$$I_\lambda(u,v) = \langle u,v\rangle_\lambda - \int_{\mathbb{R}} [F_A(u) + G_A(v)]dx;\ (u,v) \in E_\lambda \times E_\lambda.$$

O funcional $I_\lambda$ está relacionado com $(\tilde{P}_\lambda)$ no sentido de que se $(u_\lambda, v_\lambda)$ é um ponto crítico de $I_\lambda$ verificando

$$u_\lambda(x), v_\lambda(x) \leq \min\{a, a'\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon$$

então, o par $(u_\lambda, v_\lambda)$ é solução de $(\tilde{P}_\lambda)$.

**Lema 2.3.1.** *Toda sequência $(PS)_c$ para $I_\lambda$ é limitada.*

**Demonstração:** Seja $(u_n, v_n)$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_\lambda$, ou seja,

$$I_\lambda(u_n, v_n) \to c \text{ e } I'_\lambda(u_n, v_n)(\varphi, \psi) \to 0 \text{ para todo } (\varphi, \psi) \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R}), \tag{2.15}$$

sempre que $n \to \infty$.

Por (2.15), escolhendo $(\varphi, \psi) = (u_n, v_n)$, conseguimos

$$\int_{\mathbb{R}} [f(u_n)u_n - 2F(u_n)]dx + \int_{\mathbb{R}} [g(v_n)v_n - 2G(v_n)]dx \leq 2c + \varepsilon_n,$$

onde $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n$.

A condição $(H_2)$ e as estimativas acima nos mostram que

$$\int_{\mathbb{R}} [f(u_n)u_n + g(v_n)v_n]dx \leq \frac{\theta}{\theta - 2}(2c + \varepsilon_n)dx. \tag{2.16}$$

Tomando $(\varphi, \psi) = (v_n, 0)$ e $(\varphi, \psi) = (0, u_n)$ em (2.15), para $n$ grande, temos que

$$||v_n||_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f(u_n)v_n dx + \varepsilon_n,$$
$$||u_n||_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}} g(v_n)u_n + \varepsilon_n,$$

aqui $||.||_\lambda$ denota a norma relacionada à $\langle ., . \rangle_\lambda$.

Pondo $U_n = u_n/||u_n||_\lambda$ e $V_n = v_n/||v_n||_\lambda$, temos

$$||v_n||_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f(u_n)V_n dx + \varepsilon_n \tag{2.17}$$

$$||u_n||_\lambda^2 \leq \int_{\mathbb{R}} g(v_n)U_n dx + \varepsilon_n. \tag{2.18}$$

De $(H_0) - (H_1)$ e para $\alpha > \alpha_0$

$$f(s) \leq C_1 e^{\alpha s^2}, \forall s \geq 0.$$

Usando o Lema A.1.12 com $t = V_n$ e $s = f(u_n)/C_1$, a estimativa (3.1) e a Proposição 2.1.2, obtemos

$$C_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u_n)}{C_1} V_n dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{V_n^2} dx + C_1 \int_{\{f(u_n)/C_1 > e^{1/4}\}} \frac{f(u_n)}{C_1} \left[\log \frac{f(u_n)}{C_1}\right]^{1/2} dx +$$
$$\int_{\{f(u_n)/C_1 \leq e^{1/4}\}} \frac{1}{C_1^2} [f(u_n)]^2 dx \leq C_2 + C_3 \int_{\mathbb{R}} f(u_n)u_n dx.$$

Esta estimativa combinada com (3.17) implicam que

$$||v_n||_\lambda^2 \leq C_2 + C_3 \int_{\mathbb{R}} f(u_n)u_n dx. \tag{2.19}$$

Similarmente deduzimos de (2.18),

$$||u_n||_\lambda^2 \leq C_2 + C_3 \int_{\mathbb{R}} g(v_n)v_n dx. \tag{2.20}$$

Tomando as estimativas (2.19) e (2.20) e usando (2.16) podemos inferir que

$$||u_n||_\lambda^2 + ||v_n||_\lambda^2 \leq \frac{\theta}{\theta - 2}(2c + \varepsilon_n).$$

□

**Lema 2.3.2.** *Considere $u \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ e $0 \leq \phi \leq 1$ tal que $\phi = 0$ em $(-R/2, R/2)$, $\phi = 1$ fora de $(-R, R)$ e $|\phi'| \leq C/R$, então*

$$\limsup_{R\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 \frac{|\phi(x) - \phi(y)|^2}{|x - y|^2} dxdy \to 0.$$

**Demonstração:** A prova segue os mesmos passos do Lema 2.8 em [8], veja também Lema 1.1.2.

□

**Proposição 2.3.3.** *Seja $w_n = (u_n, v_n))$ uma sequência $(PS)_c$, então, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $R > 0$ de maneira que*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2\backslash B_R(0)} \frac{(u_n(x) - u_n(y))^2}{|x - y|^2} dxdy + \int_{\mathbb{R}\backslash[-R,R]} (\lambda a(x) + 1)u_n^2 dx < \epsilon \tag{2.21}$$

*e*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2\backslash B_R(0)} \frac{(v_n(x) - v_n(y))^2}{|x - y|^2} dxdy + \int_{\mathbb{R}\backslash[-R,R]} (\lambda a(x) + 1)v_n^2 dx < \epsilon. \tag{2.22}$$

**Demonstração:** Tomando $w_n = (u_n, v_n)$ como sendo uma sequência Palais-Smale, pelo Lema 2.3.1, $(w_n)$ é limitada, logo existe uma subsequência de $w_n$ que converge fracamente para $w = (u, v)$ em $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Definimos uma função *cut-off* $\eta_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \leq \eta_R \leq 1$, $|\eta_R'| \leq C/R$ por

$$\eta_R(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \left(\frac{-R}{2}, \frac{R}{2}\right) \\ 1, & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus (-R, R). \end{cases}$$

Pela hipótese, $I_\lambda'(w_n)(\eta_R w_n) \to 0$ para $n \to \infty$, então

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))(\eta_R(x)u_n(x) - u_n(y)\eta_R(y))}{|x - y|^2} dxdy + \int_{\mathbb{R}} (\lambda a(x) + 1)\eta_R u_n dx + \\ &\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\tilde{v}_n(x) - v_n(y))(\eta_R(x)v_n(x) - v_n(y)\eta_R(y))}{|x - y|^2} dxdy + \int_{\mathbb{R}} (\lambda a(x) + 1)\eta_R v_n dx = \\ &\int_{\mathbb{R}} f_A(u_n)\eta_R u_n dx + \int_{\mathbb{R}} g_A(v_n)\eta_R v_n dx + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Observe que,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)u_n(x)+\eta_R(x)u_n(y)-\eta_R(x)u_n(y)-u_n(y)\eta_R(y))}{|x-y|^2}dxdy =$$
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^2}dxdy + \iint_{\mathbb{R}^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^2}dxdy.$$

E do mesmo jeito

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(v_n(x)-v_n(y))(\eta_R(x)v_n(x)+\eta_R(x)v_n(y)-\eta_R(x)v_n(y)-v_n(y)\eta_R(y))}{|x-y|^2}dxdy =$$
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \eta_R(x)\frac{(v_n(x)-v_n(y))^2}{|x-y|^2}dxdy + \iint_{\mathbb{R}^2} v_n(y)\frac{(v_n(x)-v_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^2}dxdy.$$

Por (2.23) vemos que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \eta_R(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^2}dxdy + \iint_{\mathbb{R}^2} \eta_R(x)\frac{(v_n(x)-v_n(y))^2}{|x-y|^2}dxdy = I_\lambda(w_n)(\eta_R w_n)- \tag{2.24}$$
$$\iint_{\mathbb{R}^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^2}dxdy - \iint_{\mathbb{R}^2} v_n(y)\frac{(v_n(x)-v_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^2}dxdy$$
$$-\int_{\mathbb{R}}(\lambda a(x)+1)\eta_R u_n dx - \int_{\mathbb{R}}(\lambda a(x)+1)\eta_R v_n dx + \int_{\mathbb{R}} f_A(u_n)\eta_R u_n dx + \int_{\mathbb{R}} g_A(v_n)\eta_R v_n dx.$$

Tomando $R$ grande o suficiente para obter $\Omega_\Upsilon \subset [-R,R]$ e usando a condição $(\tilde{H}_2)$ e a imersão compacta $H^{1/2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ temos

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]}(\lambda a(x)+1)u_n^2dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]}(\lambda a(x)+1)u^2dx = 0 \tag{2.25}$$

e

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]} f_A(u_n)u_n dx \le \frac{1}{k}\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]} u_n^2 dx = \frac{1}{k}\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]} u^2 dx = 0. \tag{2.26}$$

Além disso, a desigualdade de Hölder, a limitação de $u_n$ e o Lema 2.3.2 garante

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\iint_{\mathbb{R}^2} u_n(y)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\eta_R(x)-\eta_R(y))}{|x-y|^2}dxdy \le$$
$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^2}dxdy\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}[u_n(y)]^2\frac{(\eta_R(x)-\eta_R(y))^2}{|x-y|^2}dxdy\right)^{1/2} \le \tag{2.27}$$
$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}||u_n||_{H^{1/2}}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}[u_n(y)]^2\frac{(\eta_R(x)-\eta_R(y))^2}{|x-y|^2}dxdy\right)^{1/2} = 0.$$

Usando (2.25), (2.26) e (2.27) em (2.24), conseguimos a convergência (2.21) e por um argumento análogo a convergência (2.22) também vale. □

**Proposição 2.3.4.** *Se as hipóteses $(H_0)-(H_5)$ são satisfeitas, então para cada $\lambda > 0$, existe* *uma função $w_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda) \in E_\lambda \times E_\lambda$ tal que*

$$c_\lambda = \inf_{w \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(w),$$

*onde $\mathcal{N}_\lambda$ é a variedade generalizada de Nehari associada ao funcional $I_\lambda$. E também, $u_\lambda, v_\lambda \geq 0$.*

**Demonstração:** Desde que $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, pode-se mostrar por argumentos padrões que $I_\lambda$ é $C^2$ e portanto $\mathcal{N}_\lambda$ é uma $C^1$-variedade, veja por exemplo Pankov [81], Lema 6. Deste modo, aplicando o princípio variacional de Ekeland, obtemos uma sequência $(PS)_{c_\lambda}$. Assim sendo, o resultado segue combinando os argumentos explorados na Proposição 2.2.5 e Proposição 2.3.3.

Para mostrar a positividade, considere $(u, v)$ uma solução fraca para $(P_\lambda)$, pondo $u_+ = \max\{u, 0\}$ e $u_- = \max\{-u, 0\}$, e usando $u_- = u_+ - u$ e $v_- = v_+ - v$ como funções teste, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(-\Delta^{1/2})u\right] u_- dx + \int_{\mathbb{R}} (\lambda a(x) + 1) u_-^2 dx = \int_{\mathbb{R}} H_v(u, v) u_- dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(-\Delta^{1/2})v\right] v_- dx + \int_{\mathbb{R}} (\lambda a(x) + 1) v_-^2 dx = \int_{\mathbb{R}} H_u(u, v) v_- dx$$

Percebendo que $(u(x) - u(y))(u_-(x) - u_-(y)) \leq 0$ e $(v(x) - v(y))(v_-(x) - v_-(y)) \leq 0$. Segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \left[(-\Delta^{1/2})u\right] u_- dx \leq 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}} \left[(-\Delta^{1/2})v\right] v_- dx \leq 0.$$

Sendo assim, pela positividade de $H_u(u, v)$ e $H_v(x, u, v)$ temos que $u_- = v_- = 0$.

□

## 2.4 As soluções convergentes

Começaremos recordando um resultado do capítulo anterior, com o objetivo de tornar a leitura mais dinâmica para o leitor.

**Lema 2.4.1.** *Sendo $\Omega$ um aberto em $\mathbb{R}^N$, e seja $u \in H^s(\Omega)$ com $s \in (0, 1)$. Se existir um conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \Omega$ tal que $u \equiv 0 \in \Omega \setminus \mathcal{K}$, então a função de extensão $\mathcal{E}u$, definida como*

$$\mathcal{E}u(x) = \begin{cases} u(x), & se\ x \in \Omega, \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

*pertence a $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

**Demonstração:** A prova pode ser vista em Lema 5.1 em [78].

**Lema 2.4.2.** *Seja $w_0 = (u_0, v_0)$ a solução do problema $(P)_\Upsilon$, tal que*

$$J_\Upsilon(w_0) = c_0 = \inf_{w \in \mathcal{M}_\Upsilon} J_\Upsilon(w).$$

*Considere também,*

$$c_\lambda = \inf_{w \in \mathcal{N}_\lambda} I_\lambda(w).$$

*Então $c_0 \geq c_\lambda$, para $\lambda > 0$.*

**Demonstração:** Seja $\lambda > 0$ arbitrário e $\Omega' \supset \overline{\Omega}_\Upsilon$ um aberto, como $w_0$ é uma solução para $(P)_\Upsilon$, temos que $w_0 \equiv 0$ em $\Omega' \setminus \overline{\Omega}_\Upsilon$. Considere $\mathcal{E}w_0$ ta extensão de $w_0$, garantida pelo lema 2.4.1. Veja que,

$$I'_\lambda(\mathcal{E}w_0) \equiv J'_\Upsilon(w_0) \equiv 0,$$

então $\mathcal{E}w_0 \in \mathcal{N}_\lambda$. Além disso,

$$I_\lambda(\mathcal{E}w_0) = J_\Upsilon(w_0) = c_0,$$

o que implica que $c_0 \geq c_\lambda$.

□

**Proposição 2.4.3.** *Seja $w_n = (u_n, v_n)$ uma família de pontos críticos com energia mínima, digamos $c_{\lambda_n}$, associados a $I_{\lambda_n}$. Se valem $(H_0)-(H_5)$, temos que $w_n \to w_0$ em $H^{1/2}(\mathbb{R})\times H^{1/2}(\mathbb{R})$, quando $\lambda \to +\infty$, onde $w_0$ é solução com energia mínima de $(P)_\Upsilon$.*

**Demonstração:** Observe que como $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k < ...$, pela definição de $I_\lambda$ e pelo lema anterior, é imediato que

$$c_{\lambda_1} < c_{\lambda_2} < ... < c_{\lambda_k} < ... \leq c_0,$$

sendo assim, $\lim\limits_{n\to\infty} c_{\lambda_n} = \overline{c} \leq c_0$.

Argumentando como anteriormente, $w_n$ é limitado em $H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R})$. Portanto, pela reflexividade de $H^{1/2}(\mathbb{R})$,

$$w_n \rightharpoonup w \text{ in } H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R}) \text{ and } w_n(x) \to w(x) \text{ para q.t.p } x \in \mathbb{R}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$C_m = a(x) \geq \frac{1}{m}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lambda_n < 2(\lambda_n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\int_{C_m} |u_n|^2 dx \leq \frac{2m}{\lambda_n} \int_{C_m} (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^2 dx \leq \frac{C}{\lambda_n}.$$

Uma vez que $\lambda_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{C_m} |u_n|^2 dx = 0.$$

Repetindo os mesmo argumentos, também temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{C_m} |v_n|^2 dx = 0.$$

e, pelo lema de Fatou,

$$\int_{C_m} |u|^2 dx = 0 \text{ and } \int_{C_m} |v|^2 dx = 0.$$

Implicando que $u = v = 0$ em $C_m$, e então, $u = v = 0$ em $\mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon$.

Pela Proposição 2.3.3 Se tomarmos $R > 0$ suficientemente grande, $u_n, v_n \to 0$ em $H^{1/2}(\mathbb{R} \setminus$

$B_R(0))$. Além do mais, como foi mostrado na terceira seção deste capítulo,

$$\int_{B_R(0)} [f(u_n) + g(v_n)]dx \to \int_{B_R(0)} [f(u) + g(v)]dx.$$

Escolhendo $(\varphi, \varphi) \in C_0^\infty(B_R(0)) \times C_0^\infty(B_R(0))$, inferimos que

$$\iint_{[B_R(0)]^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))}{|x-y|^2}(\varphi(x) - \varphi(y))dxdy + \iint_{[B_R(0)]^2} \frac{(v_n(x) - v_n(y))}{|x-y|^2}(\varphi(x) - \varphi(y))dxdy =$$
$$\int_{B_R(0)} [f(u_n) + g(v_n)]\varphi dx - \int_{B_R(0)} (\lambda_n(a(x)+1)(u_n + v_n)\varphi dx.$$

Logo, fazendo $n \to \infty$, sabemos que $u = v = 0 \in \mathbb{R} \setminus \Omega_\Upsilon$ e então

$$\iint_{\Omega_\Upsilon \times \Omega_\Upsilon} \frac{(u(x) - u(y))}{|x-y|^2}(\varphi(x) - \varphi(y))dxdy + \iint_{\Omega_\Upsilon \times \Omega_\Upsilon} \frac{(v_n(x) - v_n(y))}{|x-y|^2}(\varphi(x) - \varphi(y))dxdy =$$
$$\int_{\Omega_\Upsilon} [f(u) + g(v)]\varphi dx - \int_{\Omega_\Upsilon} (u+v)\varphi dx.$$

Pela densidade de $C_0^\infty$ em $X(\Omega_\Upsilon)$, deduzimos que $(u, v)$ é uma solução para $(P)_\Upsilon$. Mais ainda, por $(H_2)$ e pelo lema de Fatou

$$\begin{aligned}
\overline{c} + o_n(1) &= I_{\lambda_n}(w_n) - \frac{1}{2}I'_{\lambda_n}(w_n)w_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)\right]dx + \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}g(v_n)v_n - G(v_n)\right]dx \\
&\geq \int_{\Omega_\Upsilon} \left[\frac{1}{2}f(u)u - F(u)\right]dx + \int_{\Omega_\Upsilon} \left[\frac{1}{2}g(v)v - G(v)\right]dx \\
&= J_\Upsilon(w_n) - \frac{1}{2}J'_\Upsilon(w)w = J_\Upsilon(w) = c_0.
\end{aligned}$$

Como consequência disso,

$$\overline{c} = \lim_{n\to\infty} \left(\langle u_n, v_n\rangle_{\lambda_n} - \int_{\mathbb{R}} [F(u_n) + G(v_n)]dx\right) = \langle u, v\rangle - \int_{\Omega_\Upsilon} [F(u) + G(v)]dx. \tag{2.28}$$

A condição $(H_3)$ e o Lema 3.1 de [32] implica que

$$\int_{\mathbb{R}} [F(u_n) + G(v_n)]dx \to \int_{\Omega_\Upsilon} [F(u) + G(v)]dx.$$

Assim, por (2.28),

$$\langle u_n, v_n\rangle_{\lambda_n} \to \langle u, v\rangle.$$

E também

$$I_{\lambda_n}(u_n, v_n) \to c_0 \text{ e } I'_{\lambda_n}(u_n, v_n)(\varphi, \psi) \to 0, \tag{2.29}$$

para todo $(\varphi, \psi) \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{1/2}(\mathbb{R})$.

Usando o mesmo procedimento da Proposição 2.2.5 (onde mostramos que o *Caso 2* não ocorre), podemos ver que $||u_n||_{\lambda_n}, ||v_n||_{\lambda_n} < c < \omega\pi/\alpha_0$ para $n$ suficientemente grande. Escolhendo $(\varphi,\psi)=(0,u_n-u)$ em (2.29) temos

$$||u_n||_{\lambda_n}-\langle u_n,u\rangle_{\lambda_n}=\int_{\mathbb{R}}g(v_n)(u_n-u)dx+o_n(1).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e a Proposição 2.1.1

$$\int_{\mathbb{R}}g(v_n)(u_n-u)dx\leq K(\alpha_0)|u_n-u|_{q'}\to 0$$

Também, notamos que

$$\langle u_n,u\rangle_{\lambda_n}=\int_{\mathbb{R}}(\lambda_n a(x)+1)u_nudx=\int_{\Omega_\Upsilon}u_nudx\to\int_{\Omega_\Upsilon}u^2dx.$$

Finalmente, das observações acima, concluímos

$$\lim_{n\to\infty}||u_n||_{\lambda_n}-||u||=0.$$

Logo,

$$u_n\to 0 \text{ em } H^{1/2}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon) \text{ e } u_n\to u \text{ em } H^{1/2}(\Omega_\Upsilon).$$

Um argumento análogo também nos dá

$$v_n\to 0 \text{ em } H^{1/2}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon) \text{ e } v_n\to v \text{ em } H^{1/2}(\Omega_\Upsilon).$$

Isso conclui a prova. □

## 2.5 Recuperando soluções

Nesta seção, nosso principal objetivo é provar que os pontos críticos de $I_\lambda$ são soluções do problema original para valores grandes de $\lambda$. Para mostrar isso, adaptaremos a técnica de iteração de Moser [75], veja também [8].

**Proposição 2.5.1.** *Seja $(u_n,v_n)$ um ponto crítico não trivial para $I_{\lambda_n}$. Então,*

$$||(u_n,v_n)||_{L^\infty(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}\to 0 \textit{ quando } \lambda_n\to+\infty.$$

*Em particular, existe $\mathcal{J}>0$ tal que para todo $n>\mathcal{J}$, $(u_n,v_n)$ é uma solução para $(\tilde{P}_{\lambda_n})$.*

**Demonstração:** Para qualquer $L>0$, definimos

$$u_{L,n}(x)=\begin{cases}\min\{|u_n(x)|,L\}, \text{ se } x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon\\ 0, \text{ se } x\in\Omega_\Upsilon,\end{cases}$$

e $\tilde{u}_{L,n}=u_{L,n}^{2(\beta-1)}u_n$ onde $\beta>1$ será escolhido posteriormente. Do mesmo modo, definimos

$$v_{L,n}(x)=\begin{cases}\min\{|v_n(x)|,L\}, \text{ se } x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\Upsilon\\ 0, \text{ se } x\in\Omega_\Upsilon,\end{cases}$$

e $\tilde{v}_{L,n} = v_{L,n}^{2(\beta-1)} u_n$.

Tomando $(\tilde{v}_{L,n}, \tilde{u}_{L,n})$ como uma função teste, temos

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x) - u_n(y))}{|x-y|^2}[u_n u_{L,n}^{2(\beta-1)}(x) - u_n u_{L,n}^{2(\beta-1)}(y)]dxdy + \int_{\mathbb{R}} (\lambda a(x)+1)|u_n|^2 u_{L,n}^{2(\beta-1)}dx + \\
&\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(v_n(x) - v_n(y))}{|x-y|^2}[v_n v_{L,n}^{2(\beta-1)}(x) - v_n v_{L,n}^{2(\beta-1)}(y)]dxdy + \int_{\mathbb{R}} (\lambda a(x)+1)|v_n|^2 v_{L,n}^{2(\beta-1)}dx = \\
&\int_{\mathbb{R}} f(u_n) v_n v_{L,n}^{2(\beta-1)}dx + \int_{\mathbb{R}} g(v_n) u_n u_{L,n}^{2(\beta-1)}dx.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Agora, para todo $t \geq 0$, definimos

$$\gamma(t) = \gamma_{L,\beta}(t) = t t_L^{2(\beta-1)},$$

onde $t_L = \min\{t, L\}$.

É fácil checar que $\gamma$ é uma função crescente e que $(a-b)(\gamma(a)-\gamma(b)) \geq 0$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Considere

$$\Lambda(t) = \frac{|t|^2}{2} \text{ e } \Gamma(t) = \int_0^t (\gamma(\tau))^{1/2} d\tau$$

e observe que

$$\Lambda'(a-b)(\gamma(a)-\gamma(b)) \geq (\Gamma(a)-\Gamma(b))^2, \text{ para qualquer } a, b \in \mathbb{R}. \tag{2.31}$$

De fato, para qualquer $a < b$, a desigualdade de Jesen (Proposição A.1.11) implica

$$\begin{aligned}
\Lambda'(a-b)(\gamma(a)-\gamma(b)) &= (a-b)\int_a^b \gamma'(t)dt = (a-b)\int_a^b (\Gamma'(t))^2 dt \\
&\geq \left(\int_a^b \Gamma'(t)dt\right)^2 = (\Gamma(a)-\Gamma(b))^2.
\end{aligned}$$

Então, por (2.31),

$$|\Gamma(|u_n(x)|) - \Gamma(|u_n(y)|)|^2 \leq (|u_n(x)| - |u_n(y)|)(|u_n| u_{L,n}^{2(\beta-1)}(x) - |u_n| u_{L,n}^{2(\beta-1)}(y)).$$

Logo,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(u_n(x)-u_n(y))}{|x-y|^2}(|u_n| u_{L,n}^{2(\beta-1)}(x) - |u_n| u_{L,n}^{2(\beta-1)}(y))dxdy \geq [\Gamma(u_n)]_s^2. \tag{2.32}$$

Veja que,

$$\Gamma(|u_n|) \geq \frac{1}{\beta}|u_n| u_{L,n}^{\beta-1}.$$

Relembrando que $H^{1/2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ continuamente para $p \geq 1$, podemos concluir que

$$[\Gamma(u_n)]_s^2 \geq C|\Gamma(|u_n|)|_\sigma^2 \geq \frac{1}{\beta^2} C||u_n| u_{L,n}^{\beta-1}|_\sigma^2, \tag{2.33}$$

onde $\sigma > 2q'$.

Analogamente,

$$[\Gamma(v_n)]_s^2 \geq C|\Gamma(|v_n|)|_\sigma^2 \geq \frac{1}{\beta^2}C||v_n|v_{L,n}^{\beta-1}|_\sigma^2. \tag{2.34}$$

Sob as informações contidas em (2.30), (2.32), (2.33) e (2.34) deduzimos a validade de

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 ||u_n|u_{L,n}^{\beta-1}|_\sigma^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 ||v_n|v_{L,n}^{\beta-1}|_\sigma^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f(u_n)v_{L,n}^{2(\beta-1)}v_n dx + \int_{\mathbb{R}} g(v_n)v_{L,n}^{2(\beta-1)}u_n dx. \tag{2.35}$$

Pelas condições de crescimento (3.1),

$$f(u_n) \leq \varepsilon|u_n| + C_\varepsilon|u_n|\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha||u_n||_{\lambda_n}^2\left(\frac{u_n}{||u_n||_{\lambda_n}}\right)^2}dx - 1\right),$$

$$g(v_n) \leq \varepsilon|v_n| + C_\varepsilon|v_n|\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha||v_n||_{\lambda_n}^2\left(\frac{v_n}{||v_n||_{\lambda_n}}\right)^2}dx - 1\right).$$

Empregando a Proposição 2.4.3, sabemos que $u_n, v_n \to 0$ in $H^{1/2}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)$, fixando $\nu > 0$ tal que $||u_n||_{\lambda_n}, ||v_n||_{\lambda_n} \leq \nu$ e $\alpha_0 < \alpha\nu < \omega\pi/\alpha_0$, portanto pela Proposição 2.1.2

$$\left(\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon} e^{\alpha||u_n||_{\lambda_n}^2\left(\frac{u_n}{||u_n||_{\lambda_n}}\right)^2}dx - 1\right) \leq \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon} e^{\alpha\nu^2\left(\frac{u_n}{||u_n||_{\lambda_n}}\right)^2}dx - 1\right) \leq K_\alpha$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon} e^{\alpha||u_n||_{\lambda_n}^2\left(\frac{u_n}{||u_n||_{\lambda_n}}\right)^2}dx - 1\right) \leq \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon} e^{\alpha\nu^2\left(\frac{u_n}{||u_n||_{\lambda_n}}\right)^2}dx - 1\right) \leq K_\alpha.$$

Dessa observação, da desigualdade de Hölder e (2.35)

$$||u_n|u_{L,n}^{\beta-1}|_{L^\sigma(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}^2 + ||v_n|v_{L,n}^{\beta-1}|_{L^\sigma(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}^2 \leq C\beta^2\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon}[u_n\tilde{v}_{L,n} + v_n\tilde{u}_{L,n}]dx.$$

Fazendo $L \to \infty$ e utilizando novamente a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}&|u_n|_{L^{\sigma\beta}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}^{2\beta} + |v_n|_{L^{\sigma\beta}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}^{2\beta} \leq \\ &C\beta^2(|u_n|_{L^q(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}||u_n|_{L^{2q'\beta-q'}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} + |v_n|_{L^q(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}||v_n|_{L^{2q'\beta-q'}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}).\end{aligned}$$

Desde que $\sigma > 2q'$, por iteração temos

$$\begin{aligned}|u_n|_{L^{\chi^{m+1}\sigma}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} + |v_n|_{L^{\chi^{m+1}\sigma}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} &\leq \overline{C}(|u_n|_{L^{\sigma^{m-1}-q'}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} + |v_n|_{L^{\sigma^{m-1}-q'}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}) \\ &\leq \overline{C}(|u_n|_{L^{\sigma-q'}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} + |v_n|_{L^{\sigma-q'}(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}),\end{aligned}$$

onde $\chi = \frac{\sigma}{2q'}$. Isto implica que

$$|u_n|_{L^\infty(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} + |v_n|_{L^\infty(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} \leq \overline{C}(|u_n|_{L^\sigma(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)} + |v_n|_{L^\sigma(\mathbb{R}\setminus\Omega_\Upsilon)}).$$

Tomando $n \to \infty$ nós conseguimos o resultado desejado. □

# Capítulo 3

# Um sistema Hamiltoniano elíptico do tipo Choquard

Este capítulo é dedicado ao estudo de existência de soluções positivas para a seguinte classe de sistemas Hamiltonianos do tipo Choquard:

$$(P)\quad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * G(v)\right) g(v) \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + V(x)v = \left(\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right) f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

onde $\frac{1}{|x|^\mu}$ com $0 < \mu < 2$ é o potencial de Riesz e $*$ é o operador convolução. O potencial $V$ e as não linearidades $f$ e $g$ satisfazem certas condição que serão especificadas posteriormente.

Suporemos algumas condições adequadas sobre o potencial $V$ para aplicar um estrutura variacional, considerando o subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$H_V^1 = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2); \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 dx < \infty \right\}.$$

Mais precisamente, o potencial $V$ tem as seguintes hipóteses:

$(V_1)$ Existe uma constante positiva $B$ tal que $V(x) \geq -B$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

$(V_2)$ $\lambda_1 = \inf_{\{u \in H_V^1, |u|_2 = 1\}} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx > 0$.

$(V_3)$ $\lim\limits_{R \to \infty} \nu(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}_R) = \infty$, onde

$$\nu(G) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in H_V^1(0)(G) \setminus \{0\}} \dfrac{\displaystyle\int_G (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx}{\displaystyle\int_G |u|^2 dx}, \text{ se } G \neq \emptyset, \\ \infty, \text{ se } G = \emptyset, \end{cases}$$

onde $G \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e $H_V^1(0) = \{u \in H_V^1; u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2 \setminus G\}$.

Um exemplo comum de uma função que satisfaça as premissas $(V_1) - (V_3)$ é a função contínua $V(x) = V^+(x) - V^-(x)$, onde $V^+$ e $V^-$ são as partes positivas e negativas de $V$, com $V^+$ e $V^-$ satisfazendo

a) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V^+(x) = +\infty;$

b) $||V^-||_\infty < \nu_1 := \inf\limits_{u\in H^1(\mathbb{R}^2);|u|_2=1} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V^+ u^2 dx\right).$

Note que o potencial $V$ pode mudar de sinal em uma pequena bola.

Assumiremos que $f$ e $g$ tem as seguintes propriedades:

$(H_0)$ $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ são funções contínuas, e ambas tem crescimento exponencial crítico;

$(H_1)$ $\lim\limits_{s\to 0^+} f(s) = \lim\limits_{s\to 0^+} g(s) = 0;$

$(H_2)$ Existe $\theta > 2$ tal que para $s > 0$,

$$0 < \theta F(s) \leq sf(s) \text{ e } 0 < \theta G(s) \leq sg(s);$$

$(H_3)$ Existem constantes $s_0, M_0 > 0$ tal que para todo $s \geq s_0$,

$$0 < F(s) \leq M_0 f(s) \text{ e } 0 < G(s) \leq M_0 g(s);$$

$(H_4)$ $f$ e $g$ são localmente limitadas;

$(H_5)$ Existem constantes $p > 2$ e $C_p$ tal que para todo $s \geq 0$,

$$F(s), G(s) \geq \frac{C_p}{2p} s^p,$$

com $C_p > \left(\frac{\bar{C}\alpha_0(p-1)}{4\pi p}\right)^{\frac{p-1}{p}} S_p^2$, onde $S_p$ será definido posteriormente, e $\bar{C} > \frac{4}{4-\mu}$, onde $0 < \mu < 2$.

Desde que estamos interessados em encontrar soluções positivas, ao longo deste capítulo, assumiremos que $f(s) = g(s) = 0$ sempre que $s \leq 0$.

Destas condições, observamos que para $\alpha > \alpha_0$ e $q \geq 1$, dado um $\varepsilon > 0$, existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$f(s), g(s) \leq \varepsilon|s| + b_1|s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1), \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

e

$$F(s), G(s) \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + b_2|s|^q(e^{\alpha s^2} - 1), \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Um exemplo simples de uma função que verifica nossa hipóteses é

$$f(s) = C_p|s|^{p-2}s + 2s(e^{s^2} - 1), \text{ para } s \in \mathbb{R}.$$

Neste capítulo, nosso principal resultado é o seguinte

**Teorema 3.0.1.** *Suponha que* $(V_1) - (V_3)$ *e* $(H_0) - (H_5)$ *valem; então, o sistema* $(P)$ *tem uma solução fraca positiva.*

## 3.1 Preliminares

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados que desempenharão um papel crucial na prova do nosso teorema principal. Começamos com a seguinte desigualdade do tipo Trudinger-Moser em $H^1(\mathbb{R}^2)$ definida por Cao [27].

**Proposição 3.1.1.** *Se $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) dx < +\infty.$$

*Além disso, se $|\nabla u|_2^2 \leq 1$, $|u|_2 \leq M < \infty$, e $\alpha < \alpha_0 = 4\pi$, então existes $C$, que depende somente de $M$ e $\alpha$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) dx \leq C(M, \alpha). \tag{3.3}$$

Como vamos estudar os problemas do tipo não local com o potencial de Riesz, gostaríamos de lembrar o famosa desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev (veja [62]).

**Proposição 3.1.2.** *(Desigualdade de Hardy–Littlewood–Sobolev) Sejam $t, r > 1$ e $0 < \mu < N$ satisfazendo*

$$\frac{1}{t} + \frac{\mu}{N} + \frac{1}{r} = 2.$$

*Então, dado $f \in L^t(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^r(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $C = C(t, N, \mu, r)$ tal que*

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{f(x)}{|x-y|^\mu} h(y) dx dy \leq C|f|_t |h|_r.$$

*Observação* 3.1.3. Pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev,

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right] F(u) dx$$

está bem definido se $F(u) \in L^t(\mathbb{R}^2)$ para $t > 1$ definido por

$$\frac{2}{t} + \frac{\mu}{2} = 2.$$

Então, temos que exigir

$$F(u) \in L^{\frac{4}{4-\mu}}(\mathbb{R}^2).$$

Como mencionado na introdução deste capítulo, as condições sobre o potencial $V$ implicam que $H_V^1$ é um espaço adequado para estudarn nosso problema variacionalmente. Precisamente, se $(V_1) - (V_3)$ valem, então $H_V^1$ munido com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x) uv) dx;\ u, v \in H_V^1.$$

é um espaço de Hilbert. Adicionalmente, denotaremos por $||.||$ a norma induzida por este produto interno. Mais ainda, de Sirakov [85], obtemos a seguinte imersão compacta:

$$H_V^1 \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2), \text{ para } p \geq 2.$$

Agora, temos as condições necessárias para estudar o problema $(P)$ de forma variacional. O funcional energia associado a $(P)$ é dado por $\mathcal{I} : E \to \mathbb{R}$, em que

$$\mathcal{I}(u,v) = \langle u,v\rangle - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v)\right]G(v)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right]F(u)dx$$

e

$$E = H_V^1 \times H_V^1.$$

Da observação 3.1.3, para mostrar que $\mathcal{I}$ está bem definido, precisamos garantir que $F(u), G(u) \in L^{\frac{4}{4-\mu}}(\mathbb{R}^2)$. Dado $u \in H_V^1$, podemos usar $q = 2$ em (3.2) para obter

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}|u|^2 + b_2\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2(e^{\alpha u^2} - 1)dx. \tag{3.4}$$

Veja que pela Proposição 3.1.1 e a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{\frac{8}{4-\mu}}\left(e^{\frac{4\alpha}{4-\mu}u^2} - 1\right)dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|^{\frac{8r_1}{4-\mu}}dx\right)^{\frac{1}{r_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^2}e^{\frac{4r_2}{4-\mu}\alpha u^2}dx - 1\right)^{\frac{1}{r_2}} < \infty,$$

no qual juntamente com (3.4) implica que $F(u) \in L^{\frac{4}{4-\mu}}(\mathbb{R}^2)$, e a mesma abordagem se aplica a $G$; então, $\mathcal{I}$ está bem definido.

Aplicando técnicas bem conhecidas, pode-se mostrar que $\mathcal{I} \in C^1$, e sua derivada é

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'(u,v)(\varphi,\psi) = &\int_{\mathbb{R}^2}\left[\nabla u\nabla\psi + \nabla v\nabla\varphi + V(x)(u\psi + v\varphi)\right]dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u)\right]f(u)\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v)\right]g(v)\psi dx, \quad \text{para todo } (\varphi,\psi) \in E.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Logo, um ponto crítico de $\mathcal{I}$ é também uma solução fraca do sistema $(P)$, e vice versa.

## 3.2 Sobre as sequências Palais-Smale

No que segue, mostraremos a limitação das sequências $(PS)$.

**Proposição 3.2.1.** *Assuma que $(H_0) - (H_2)$ valem. Se $(u_n, v_n)$ em $E$ é tal que*

$$\mathcal{I}(u_n,v_n) \to c \text{ e } \mathcal{I}'(u_n,v_n)(\varphi,\psi) \to 0, \text{ para todo } (\varphi,\psi) \in E, \tag{3.6}$$

*então $(u_n, v_n)$ é limitada em $E$. Além disso, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]g(v_n)v_n dx \leq C, \qquad \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]f(u_n)u_n dx \leq C,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]G(v_n)dx \leq C, \qquad \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]F(u_n)dx \leq C.$$

**Demonstração:** Tomando $(\varphi,\psi) = (u_n, v_n)$ como uma função teste em (3.6), obtemos

$$2\langle u_n, v_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)dx\right]f(u_n)u_n dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]g(v_n)v_n dx + \varepsilon_n$$

e

$$2\langle u_n, v_n\rangle = 2c + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]F(u_n)dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]G(v_n)dx + \varepsilon_n,$$

onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Dessas igualdades, é imediato que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)dx\right]f(u_n)u_n dx - \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]F(u_n)dx + \\ &\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]g(v_n)v_n dx - \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]G(v_n)dx = 2c + \varepsilon_n.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Isto junto com a hipótese $(H_2)$ implica que

$$(\theta - 1)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]F(u_n)dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]G(v_n)dx\right) \leq 2c + \varepsilon_n. \tag{3.8}$$

Combinando (3.7) e (3.8), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]f(u_n)u_n dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]g(v_n)v_n dx \leq \frac{\theta}{\theta - 1}(2c + \varepsilon_n). \tag{3.9}$$

Escolhendo $(\varphi, \psi) = (v_n, 0)$ e $(\varphi, \psi) = (0, u_n)$ em (3.6), temos

$$||v_n||^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]f(u_n)v_n dx$$

e

$$||u_n||^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]g(v_n)u_n dx.$$

Definindo $U_n = u_n/\sqrt{\bar{C}}||u_n||$ e $V_n = v_n/\sqrt{\bar{C}}||v_n||$, com $\bar{C} > \frac{4}{4-\mu}$, concluímos que

$$||v_n|| \leq \sqrt{\bar{C}}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right]f(u_n)V_n dx \tag{3.10}$$

e

$$||u_n|| \leq \sqrt{\bar{C}}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right]g(v_n)U_n dx. \tag{3.11}$$

Do crescimento exponencial de $f$ e $(H_1)$, temos

$$f(s) \leq C_1 e^{\alpha s^2}, \text{ para } s \geq 0, \tag{3.12}$$

e

$$[f(s)]^2 \leq f(s)s \tag{3.13}$$

em $\{s \in \mathbb{R}; s \geq 0 \text{ e } f(s)/C_1 \leq e^{1/4}\}$. Assim, escolhendo $t = \sqrt{\alpha}V_n$ e $s = f(u_n)/C_1$ no Lema

A.1.12, pela desigualdade de Trudinger-Moser, inferimos que

$$
\begin{aligned}
C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] \frac{f(u_n)}{C_1} V_n dx &\leq 2C_1 \int_{\Omega_n^1} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] (e^{\alpha V_n^2} - 1) dx \\
&+ C_1 \int_{\Omega_n^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] \frac{f(u_n)}{C_1} \left[\log \frac{f(u_n)}{C_1}\right]^2 dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_n^1} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] \frac{1}{C^2} [f(u_n)]^2 dx,
\end{aligned}
$$

onde $\Omega_n^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; f(u_n)/C_1 \leq e^{1/4}\}$ e $\Omega_n^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; f(u_n)/C_1 \geq e^{1/4}\}$.

Para ser mais claro, vamos estimar cada parte da soma acima separadamente. Primeiro, da observação 3.1.3, temos que $F(u) \in L^{\frac{4}{4-\mu}}$; portanto, pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev,

$$
\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\chi_{\Omega_n^1}\right] (e^{\alpha V_n^2} - 1) dx \leq |F(u_n)\chi_{\Omega_n^1}|_{\frac{4}{4-\mu}} |(e^{\alpha V_n^2} - 1)|_{\frac{4}{4-\mu}} dx. \tag{3.14}
$$

E também, da desigualdade (3.3), para todo $\alpha \leq 4\pi$, vale o seguinte:

$$
\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\frac{4}{4-\mu}\alpha V_n^2} - 1\right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\frac{4}{4-\mu}\frac{1}{C}\alpha\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2} - 1\right) dx \leq C(\alpha).
$$

Pondo a última estimativa em (3.14), vemos que

$$
\int_{\Omega_n^1} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] (e^{\alpha V_n^2} - 1) dx \leq C_2.
$$

Por (3.12), temos

$$
\int_{\Omega_n^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] \frac{f(u_n)}{C_1} \left[\log \frac{f(u_n)}{C_1}\right]^2 dx \leq C_2 + C_3 \int_{\Omega_n^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] \frac{f(u_n)}{u_n} dx.
$$

Por fim, usando (3.13),

$$
\int_{\Omega_n^1} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] (f(u_n))^2 dx \leq C_3 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) u_n dx
$$

e

$$
\int_{\Omega_n^1} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] (f(u_n))^2 dx \leq C_4 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) u_n dx.
$$

Essa estimativa implica que

$$
C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] \frac{f(u_n)}{C_1} V_n dx \leq C_2 + C \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) u_n dx.
$$

A última desigualdade junto com (3.10) nos dá

$$
||v_n|| \leq C_2 + C \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) u_n dx.
$$

Similarmente, de (3.11), temos

$$||u_n|| \leq C_2 + C\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n)v_n dx.$$

As estimativas prévias e (3.9) nos mostram que

$$||u_n|| + ||v_n|| \leq \frac{\theta}{\theta - 1}(2c + \varepsilon_n),$$

que implica a limitação de $(u_n, v_n)$. Disso, da desigualdade (3.9) e hipótese $(H_2)$, obtemos as outras estimativas exibidas na proposição.

$\square$

Para mostrar que o limite fraco de uma sequência Palais–Smale em $E$ é uma solução fraca de $(P)$, usaremos os seguintes resultados de convergência.

**Lema 3.2.2.** *Suponha que $(H_0)-(H_3)$ valem. Se $(u_n, v_n)$ é uma sequência tal que $I(u_n, v_n) \to c$, $I'(u_n, v_n) \to 0$ e $(u_0, v_0)$ é seu limite fraco, então*

$$\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) \to \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] f(u_0) \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2) \tag{3.15}$$

*e*

$$\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n) \to \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_0)\right] g(v_0) \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2). \tag{3.16}$$

**Demonstração:** Basta definir

$$h(u_n) = \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n).$$

Pela Proposição 3.6, $\int_{\mathbb{R}^2} h(u_n)u_n dx \leq C$. Usando o (Lema 2.1, [32]), temos

$$h(u_n) \to h(u_0) \text{ em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Logo, obtemos a convergência (3.15). A convergência em (3.16) pode ser obtida de maneira análoga. $\square$

**Lema 3.2.3.** *Suponha que $(V_1)-(V_3)$ e $(H_0)-(H_4)$ valem. Se $(u_n, v_n)$ é uma sequência tal que $I(u_n, v_n) \to c$, $I'(u_n, v_n) \to 0$ e $(u_0, v_0)$ seu limite fraco em $E$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] F(u_0)dx$$

*e*

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] G(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_0)\right] G(v_0)dx.$$

**Demonstração:** Nesta prova, iremos fazer um argumento similar ao encontrado em N. Lam e G. Lu [57]. Pelo Lema 3.2.2, temos que para todo $R > 0$,

$$\int_{B_R(0)}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n)dx \to \int_{B_R(0)}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] f(u_0)dx.$$

Então, existe $p(x) \in L^1(B_R(0))$ tal que

$$\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n(x))\right] f(u_n(x)) \leq p(x) \text{ q.t.p em } B_R(0). \tag{3.17}$$

Seja $s_0$ a constante que aparece em $(H_3)$ e $A = \{x \in B_R(0); u_n(x) < s_0\}$; se $x \in A$, o Lema 3.2.1 implica que

$$\int_A \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n(x))\right] F(u_n(x))u_n(x)dx \leq s_0 C.$$

Então, usando novamente o (Lema 2.1, [32]), vemos que

$$\int_A \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx \to \int_A \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] F(u_0)dx.$$

Se $x \in B_R(0) \setminus A$, por $(H_3)$ e (3.17),

$$\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n) \leq Mp(x) \text{ q.t.p em } B_R(0) \setminus A.$$

As duas últimas estimativas nos permitem utilizar o Teorema da Convergência dominada de Lebesgue para concluir que

$$\int_{B_R(0)} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx \to \int_{B_R(0)} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] F(u_0)dx.$$

Para provar o presente lema, é suficiente mostrar que dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx < \delta \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] F(u_0)dx < \delta.$$

Para provar isto, iremos escolher $K$ suficientimente grande e usar novamente $(H_3)$ . Segue,

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R, |u_n| > K\}} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx \leq M \int_{\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R, |u_n| > K\}} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n)dx$$
$$\leq \frac{M}{K} \int_{\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R, |u_n| > K\}} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n)u_n dx \leq \frac{MC}{K}.$$

Na última desigualdade, a Proposição 3.6 foi tácitamente assumida. Podemos tomar $K$ grande o suficiente tal que

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R, |u_n| > K\}} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx < \frac{2\delta}{3}.$$

Agora, note que com tal $K$, por $(H_1)$ e $(H_4)$, temos

$$|F(s)| \leq C(\alpha, K)s^2 \text{ para todo } s \in [-K, K].$$

Então, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\{x\in\mathbb{R}^2\setminus B_R, |u_n|\leq K\}} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx \\
&\leq C(\alpha_0, K) \int_{\{x\in\mathbb{R}^2\setminus B_R, |u_n|\leq K\}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_n(x)|^2}{|x-\tau|^\mu} d\tau\right) |u_n(x)|^2 dx \\
&\leq C(\alpha_0, K) \int_{\{x\in\mathbb{R}^2\setminus B_R, |u_n|\leq K\}\times\mathbb{R}^2} \frac{|u_n(x-\tau)|^4}{|x|^\mu} dx d\tau \\
&\leq \frac{2C(\alpha_0, K)}{R^\mu} |u_n - u_0|_2^4 + \frac{2C(\alpha_0, K)}{R^\mu} |u_0|_2^4.
\end{aligned}
$$

Usando a imersão compacta $H_V^1 \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, podemos novamente tomar $R$ suficientemente grande tal que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^2\setminus B_R, |u_n|\leq K\}} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx \leq \frac{\delta}{3}.$$

Combinando todas as estimativas acima, desde que $\delta > 0$ é arbitrário, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] F(u_0)dx \text{ quando } n \to \infty.$$

Repetindo o método, também temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] G(v_n)dx \to \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_0)\right] G(v_0)dx \text{ quando } n \to \infty,$$

o que completa a prova.

□

## 3.3 Geometria de Linking

Abaixo, usaremos a seguinte notação:

$$E^+ = \{(u,u) \in E\} \text{ e } E^- = \{(v,-v) \in E\}.$$

Desde que

$$(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u+v) + \frac{1}{2}(u-v, v-u),$$

segue diretamente que $E = E^+ \oplus E^-$.

Os próximos lemas são cruciais para provar que $\mathcal{I}$ satisfaz a geometria de Linking.

**Lema 3.3.1.** *Assuma que $(V_1)-(V_3)$ vale. Se $f$ e $g$ verifcam $(H_0)-(H_1)$, então existem $\rho, \sigma > 0$ tal que*

$$\mathcal{I}(w) \geq \sigma, \text{ para todo } w \in \partial B_\rho(0) \cap E^+.$$

**Demonstração:** Usando a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev e a condição de crescimento (3.2) para $q = 3$ e escolhendo $||u||$ suficientemente pequeno, podemos afirmar que (3.3) e concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right]F(u)dx \le |F(u)|_{\frac{4}{4-\mu}}|F(u)|_{\frac{4}{4-\mu}} \le \left(\frac{\varepsilon}{2}||u||^2+C(\alpha_0)|u|^3\right)^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*G(u)\right]G(u)dx \le |G(u)|_{\frac{4}{4-\mu}}|G(u)|_{\frac{4}{4-\mu}} \le \left(\frac{\varepsilon}{2}||u||^2+C(\alpha_0)|u|^3\right)^2.$$

Disto e da imersão contínua $H_V^1 \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^2)$, tendo em mente que $||u||$ pequeno, temos

$$\mathcal{I}(u,u) \ge \left(\frac{1}{2}-\frac{C\varepsilon}{2}\right)||u||^2 - C||u||^3 > \sigma > 0.$$

Se escolhermos $\rho > 0$ pequeno, a prova do lema está terminada.

$\square$

Seja $y \in H_V^1 \setminus \{0\}$ uma função não negativa fixada tal que $||y|| = 1$ e

$$Q_y = \{r(y,y)+w, w \in E^-, ||w|| \le R_0 \text{ and } 0 \le r \le R_1\},$$

onde $R_0$ e $R_1$ são constantes positivas a serem escolhidas no próxima lema.

**Lema 3.3.2.** *Suponha válido as condições $(V_1)-(V_3)$ e $(H_0)-(H_5)$. Então, existem constantes positivas $R_0$ e $R_1$, que dependem de $y$, tal que $\mathcal{I}(w) \le 0$, para todo $w \in \partial Q_y$.*

**Demonstração:** Como a fronteira $\partial Q_y$ de $Q_y$ está contida no espaço $\mathbb{R}(y,y)\oplus E^-$, ela pode ser decomposta em três partes. Nestas partes, o funcional $\mathcal{I}$ é estimado do seguinte modo:

*i)* Se $w \in \partial Q_y \cap E^-$, temos que $\mathcal{I}(w) \le 0$, para todo $w = (u,-u) \in E^-$,

$$\mathcal{I}(w) = -||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*G(-u)\right]G(-u)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right]F(u)dx \le 0.$$

*ii)* Suponha que $w = R_1(y,y)+(u,-u) \in \partial Q_y$, com $||(u,-u)||_E \le R_0$. Neste caso,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(w) = R_1^2||y||^2 - ||u||^2 &- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*F(R_1y+u)\right]F(R_1y+u)dx\\ &- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*G(R_1y-u)\right]G(R_1y-u)dx.\end{aligned}$$

Defina

$$\mathbf{v}(t) = H\left(t\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}\right),$$

onde

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*F(z)\right]F(z)dx.$$

Um cálculo simples nos dá

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}'(t) &= H'\left(t\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}\right)\cdot\left(\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*F\left(t\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}\right)\right]f\left(t\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}dx\right)\left(\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}\right)\\
&= \frac{\theta}{t}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*F\left(t\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}\right)\right]f\left(t\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}dx\right)\frac{1}{\theta}\left(t\frac{u/R_1+y}{||u||+||y||}\right)\\
&\geq \frac{\theta}{t}\mathbf{v}(t),
\end{aligned}
$$

com a última desigualdade sendo consequência de $(H_2)$.

Logo,

$$\frac{\mathbf{v}'(t)}{\mathbf{v}(t)} \geq \frac{\theta}{t},$$

e integrando a última desigualdade de 1 à $R_1(||u||+||y||)$, vemos que

$$\ln \mathbf{v}(t)\Big|_1^{R_1(||u||+||y||)} \geq 2\theta \ln t\Big|_1^{R_1(||u||+||y||)},$$

o que implica

$$H(u+R_1y) = \mathbf{v}(R_1(||u||+||y||)) \geq C[R_1(||u||+||y||)]^\theta.$$

Observe que para $w = R_1(y,y)+(u,-u)$,

$$\mathcal{I}(w) \leq R_1^2||y||^2 - H(u+R_1y) \leq ||y||^2 - CR_1^\theta||y||^\theta.$$

Por fim, tomando $R_1 = R_1(y)$ sendo grande o suficiente, obtemos $I(w) \leq 0$.

*(iii)* Se $w = r(y,y)+(u,-u) \in \partial Q_y$, com $||(u,-u)||_E = R_0$ e $0 \leq r \leq R_1$, então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(w) &= r^2||y||^2 - ||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*F(ry+u)\right]F(ry+u)dx\\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu}*G(ry-u)\right]G(ry-u)dx\\
&\leq R_1^2||y||^2 - \frac{1}{2}R_0^2\\
&= R_1^2 - \frac{1}{2}R_0^2.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, isto implica que $\mathcal{I}(w) \leq 0$ if $\sqrt{2}R_1 \leq R_0$, completando assim a prova.

$\square$

## 3.4 Estimativa do nível minimax

No que segue, definimos a constante $S_p$ por

$$S_p = \inf_{u \in H_V^1} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * u^p\right] u^p dx = 1. \tag{3.18}$$

**Lema 3.4.1.** *Sob as hipóteses $(V_1)-(V_3)$, a constante $S_p$ definida em (3.18) é atingida por uma função não negativa $u_p \in H_V^1$.*

**Demonstração:** Vamos provar o lema minimizando o funcional $\mathcal{F}(u) = ||u||^2$ restrito ao conjunto

$$M = \left\{u \in H_V^1; \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * u^p\right] u^p dx = 1\right\}.$$

Uma vez que $\mathcal{F}$ restrito à $M$ é coercivo, existe uma sequência $(u_n)$ (se necessário, trocamos $u_n$ por $|u_n|$) podemos assumir $u_n \geq 0$, tal que

$$||u_n||^2 \to \inf_{u \in M} \mathcal{F}(u).$$

Pela limitação de $(u_n)$ e da reflexividade do espaço $H_V^1$, temos que $u_n \rightharpoonup u_p$ em $H_V^1$ para algum $u_p \in H_V^1$. O fato da norma ser fracamente semicontínua inferiormente implica que

$$||u_p||^2 \leq \liminf_{n \to \infty} ||u_n||^2 = \inf_{u \in M} \mathcal{F}(u).$$

Relembrando que $H_V^1 \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ compactamente para $p \geq 2$, temos

$$u_n \to u_p \text{ em } L^p(\mathbb{R}^2). \tag{3.19}$$

Para finalizar nossa prova, é suficiente mostrar que $u_p \in M$. Podemos fazer isso usando o Lema de Brezis-Lieb para potenciais de Riesz ([90], Lema 3.2) para obter

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p\right] |u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * |u|^p\right] |u|^p dx \right) = \\ &\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * |u - u_n|^p\right] |u - u_n|^p dx \end{aligned} \tag{3.20}$$

e então usar a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev e (A.1) para concluir que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * |u - u_n|^p\right] |u - u_n|^p dx = 0.$$

Assim, por (3.20),

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * |u_n|^p\right] |u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * |u|^p\right] |u|^p dx = 1.$$

Então, $u_p \in M$ e $\mathcal{F}(u_p) = ||u_p||^2 \geq \inf_{u \in M} \mathcal{F}(u)$.

□

**Lema 3.4.2.** *Suponha que* $(V_1)-(V_3)$ *sejam verdadeiras. Se* $(H_2)$ *e* $(H_5)$ *são satisfeitas, então*

$$\sup_{\mathbb{R}_+(u_p,u_p)\oplus E^-} \mathcal{I} < \frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0}.$$

**Demonstração:** Tomando $w = t(u_p, u_p) + (-v, v)$, com $t \geq 0$ e $v \in H^1_V$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(w) &\leq t^2||u_p||^2 - ||v||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(tu_p+v)\right]F(tu_p+v)dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(tu_p-v)\right]G(tu_p-v)dx \\
&\leq S_p^2 t^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(tu_p+v)\right]F(tu_p+v)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(tu_p-v)\right]G(tu_p-v)dx.
\end{aligned}$$

Note também que por $(H_5)$ e pelo Teorema de Tonelli-Fubini,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(tu_p+v)\right]F(tu_p+v)dx \geq \frac{C_p}{p}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * (tu_p+v)^p\right](tu_p+v)^p dx = \\
&\frac{C_p}{p}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|x-\tau|^\mu}d\tau\right)(tu_p(x)+v(x))^{2p}dx,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

e pelos mesmos argumentos,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(tu_p-v)\right]G(tu_p-v)dx \geq \frac{C_p}{p}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * (tu_p-v)^p\right](tu_p-v)^p dx = \\
&\frac{C_p}{p}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|x-\tau|^\mu}d\tau\right)(tu_p(x)-v(x))^{2p}dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Empregando a desigualdade elementar

$$|s|^p \leq |s+t|^p + |s-t|^p, \text{ for all } s,t \in \mathbb{R}$$

e combindando (3.21) e (3.22), estimamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(w) &\leq S_p^2 t^2 - t^p\frac{C_p}{p}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{|x-\tau|^\mu}d\tau\right)(u_p(x))^{2p}dx \\
&= S_p^2 t^2 - \frac{C_p}{p}t^{2p}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * u^p\right]u^p \leq \max_{t\geq 0}\left[S_p^2 - \frac{C_p}{p}t^{2p}\right] \\
&= \left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{S^{2p/p-1}}{C_p^{1/p-1}} < \frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0}.
\end{aligned}$$

□

## 3.5 Método da aproximação de Galerkin

Desde que o funcional $\mathcal{I}$ é fortemente indefinido em um subespaço de dimensão infinita, os teoremas de linking tradicionais não se aplicam. Iremos então aproximar o problema $(P)$ por uma sequência de problemas em dimensão finita;este processo é conhecido como aproximação de Galerkin.

Associado aos autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < ... < \lambda_j \to +\infty$ de $(-\Delta + V(x), H^1_V)$, existe uma base ortornormal $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ de autofunções correspondentes em $H^1_V$. A seguir, faremos algumas definições, para poder analisar o problema em dimensão infinita.

$$\begin{aligned} E_n^+ &= \{(\varphi_1, \varphi_1), ..., (\varphi_n, \varphi_n)\}, \\ E_n^- &= \{(\varphi_1, -\varphi_1), ..., (\varphi_n, -\varphi_n)\}, \\ E_n &= E_n^+ \oplus E_n^-. \end{aligned}$$

Seja $y \in H^1_V$ uma função não negativa fixada e

$$Q_{n,y} = \{r(y,y) + w, w \in E_n^-, ||w|| \leq R_0 \text{ e } 0 \leq r \leq R_1\},$$

onde $R_0$ e $R_1$ são dadas no Lema 3.3.2. Relembramos que essas constantes dependem apenas de $y$. Usaremos a seguinte notação:

$$H_{n,y} = \mathbb{R}(y,y) \oplus E_n, \quad H^+_{n,y} = \mathbb{R}(y,y) \oplus E_n^+, \quad H^-_{n,y} = \mathbb{R}(y,y) \oplus E_n^-.$$

Consideramos o nível minimax

$$c_{n,y} = \inf_{\Gamma_{n,y}} \max_{w \in Q_{n,y}} \mathcal{I}(h(w)),$$

onde

$$\Gamma_{n,y} = \{h \in C(Q_{n,y}, H_{n,y}); h(w) = w \text{ sobre } \partial Q_{n,y}\}.$$

Usando um Teorema de intersecção (Proposição 5.9, [83]), temos

$$h(Q_{n,y}) \cap (\partial B_\rho \cap E^+) \neq \emptyset, \forall h \in \Gamma_{n,y}.$$

Isso combinado com o Lema 3.3.1 nos mostra que $c_{n,y} \geq \sigma > 0$. Adicionalmente, obtemos uma limitação superior para o nível minimax $c_{n,y}$ como segue. Desde que a aplicação identidade $Id : Q_{n,y} \to H_{n,y}$ pertence à $\Gamma_{n,y}$, temos para $w = r(y,y) + (u,-u) \in Q_{n,y}$ que

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(w) = \\ &r^2||y||^2 - ||u||^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(ry+u)\right]F(ry+u)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(ry-u)\right]G(ry-u)dx \\ &\leq r^2||y||^2 \leq R_1^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, temos $0 < \sigma \leq c_{n,y} \leq R_1^2$ . Note que a limitação superior não depende de $n$, mas depende de $y$.

Vamos denotar por $\mathcal{I}_{n,y}$ o funcional $\mathcal{I}$ restrito ao subespaço de dimensão finita $H_{n,y}$. Assim, Em vista dos Lemas 3.3.1 e 3.3.2, vemos que a geometria de Linking vale para o funcional $\mathcal{I}_{n,y}$. Logo, aplicando o Teorema de linking para $\mathcal{I}_{n,y}$ (ver Teorema 5.3 em [83]), obtemos uma sequência Palais-Smale, no qual é limitada (por causa da Proposição 3.2.1). Finalmente, usando o fato de que $H_{n,y}$ é um espaço de dimensão finita, obtemos o principal resultado desta seção:

**Proposição 3.5.1.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $y \in H_V^1$, uma função não negativa fixada, o funcional $\mathcal{I}_{n,y}$ tem um ponto crítico no nível $c_{n,y}$. Mais precisamente, existe $w_{n,y} \in H_{n,y}$ tal que*

$$\mathcal{I}_{n,y}(w_{n,y}) = c_{n,y} \in \left[\sigma, R_1^2||y||^2\right] \text{ e } \mathcal{I}'_{n,y}(w_{n,y}) = 0.$$

*Além disso, $||w_{n,y}||_E \leq C$, onde $C$ não depende de $n$.*

## 3.6 Prova do Teorema 3.0.1

Começamos usando o Lema 3.4.2 para inferir que existe um $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$c_n := c_{n,u_p} \leq \frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta, \tag{3.23}$$

onde $c_{n,u_p}$ é o mesmo definido anteriormente.

Em seguida, aplicando a Proposição 3.5.1, obtemos uma sequência $w_n := w_{n,u_p} = (u_n, v_n) \in H_{n,u_p}$ tal que $||(u_n, v_n)||_E \leq C$ e

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{n,u_p}(u_n, v_n) = c_n \in \left[\sigma, \frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta\right), \\
&\mathcal{I}'_{n,u_p}(u_n, v_n) \equiv 0, \\
&(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0) \text{ em } E.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando a proposição 3.2.1, concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n)v_n dx \leq C \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n)u_n dx \leq C.$$

Tomando como funções testes $(0, \psi)$ e $(\varphi, 0)$ em (3.24), onde $\psi$ e $\varphi$ são funções suaves com suporte compacto arbitrárias em $\mathbb{R}^2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \nabla \psi + V(x)u_n\psi)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n)\psi dx \tag{3.25}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_n \nabla \varphi + V(x)v_n\varphi)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n)\varphi dx. \tag{3.26}$$

Mais ainda, por (3.24) e pelo Lema 3.2.2,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n)\psi dx \to \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_0)\right] g(v_0)\psi dx$$

e

$$\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n)\varphi dx \to \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0)\right] f(u_0)\varphi dx.$$

Deste modo, tomando o limite em (3.25) e (3.26) e usando o fato de que $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em

$H^1_V$ , segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0 \nabla \psi + V(x) u_0 \psi) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_0) \right] g(v_0) \psi dx, \text{ para todo } \psi \in H^1_V, \tag{3.27}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_0 \nabla \varphi + V(x) v_0 \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * F(u_0) \right] f(u_0) \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in H^1_V \tag{3.28}$$

Portanto, de (3.27) e (3.28) concluímos que $(u_0, v_0)$ é uma solução fraca do problema $(P)$. Agora, resta provar que $u_0$ e $v_0$ são não triviais. Assumindo por contradição que $u_0 \equiv 0$. Disto e de (3.28) implicam que $v_0 \equiv 0$. Temos dois casos a considerar:

**Caso 1:** $u_n$ converge fortemente para $u_0 \equiv 0$, i.é, $||u_n|| \to 0$. Usando que $(u_n)$ é limitado, pela desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \nabla v_n + V(x) u_n v_n) dx \to 0, \tag{3.29}$$

implicando que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right] f(u_n) u_n dx \to 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n) \right] g(v_n) v_n dx \to 0.$$

Esta convergência junto com a hipótese $(H_3)$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n) \right] F(u_n) dx \to 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n) \right] G(v_n) dx \to 0.$$

Então, a última convergência combinada com (3.29) e (3.24) nos mostra que $c_n = 0$, uma contradição. Sendo assim, esse caso não pode ocorrer.

**Caso 2:** $u_n$ converge fracamente para $u_0$ em $H^1_V$ mas não converge fortemente. Em outras palavras, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1_V$, e existe uma constante $C > 0$ tal que $\liminf\limits_{n\to+\infty} ||u_n|| \geq C$. Escolhendo $(0, u_n)$ como uma função teste em (3.24), podemos considerar

$$||u_n||^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n) \right] g(v_n) u_n dx.$$

Definindo $\overline{u}_n = \left(\frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta\right)^{1/2} \frac{u_n}{||u_n||}$ e usando o Lema A.1.12 com $s = g(v_n)/\sqrt{\alpha_0}$ e $t = \overline{u}_n\sqrt{\alpha_0}$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta\right)^{1/2} ||u_n|| &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n) \right] g(v_n) \overline{u}_n dx \\
&\leq \int_{\{x\in\mathbb{R}^2; \frac{g(v_n(x))}{\sqrt{\alpha_0}} dx \leq e^{1/4}\}} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n) \right] (e^{\alpha_0 \overline{u}_n^2} - 1) dx \\
&+ \int_{\{x\in\mathbb{R}^2; \frac{g(v_n(x))}{\sqrt{\alpha_0}} \geq e^{1/4}\}} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n) \right] \frac{g(v_n)}{\sqrt{\alpha_0}} \left[ \log\left( \frac{g(v_n)}{\sqrt{\alpha_0}} \right) \right]^{1/2} dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\{x\in\mathbb{R}^2; \frac{g(v_n(x))}{\sqrt{\alpha_0}} \leq e^{1/4}\}} \left[ \frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n) \right] \frac{[g(v_n)]^2}{\alpha_0} dx.
\end{aligned}$$

Desde que $||\overline{u}_n||^2 = 4\pi/\bar{C}\alpha_0 - \delta$, argumentando como na Proposição 3.2.1, sabemos que o primeiro termo após a desigualdade tende para zero, e o terceiro termo também tende a zero (pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue). Pelo crescimento exponencial de $f$, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva $C_\varepsilon$ tal que $f(t) \leq C_\varepsilon e^{(\alpha_0+\varepsilon)t^2}$, para todo $t \geq 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] \frac{g(v_n)}{\sqrt{\alpha_0}} \left[\log\left(\frac{g(v_n)}{\sqrt{\alpha_0}}\right)\right]^{1/2} dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n) \left[\log\left(\frac{C_\varepsilon}{\sqrt{\alpha_0}} e^{(\alpha_0+\varepsilon)v_n^2}\right)\right]^{1/2} dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n) \left[\log\left(\frac{C_\varepsilon}{\sqrt{\alpha_0}}\right)^{1/2} + (\alpha_0+\varepsilon)^{1/2} v_n\right] dx \\
&\leq o(1) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n) v_n dx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\left(\frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta\right)^{1/2} ||u_n|| \leq o(1) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n) v_n dx. \tag{3.30}
$$

Repetindo o argumento com

$$
||v_n||^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) v_n dx,
$$

também podemos concluir que

$$
\left(\frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta\right)^{1/2} ||v_n|| \leq o(1) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) u_n dx. \tag{3.31}
$$

O Lema 3.2.3 nos assegura que

$$
\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] F(u_n) dx \to 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] G(v_n) dx \to 0.
$$

Do fato de que $\mathcal{I}_{n,k}(w_n) = c_n$, segue que

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \nabla v_n + V(x) u_n v_n) dx\right| \leq o(1) + \frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta,
$$

que juntamente com (3.24) implica que

$$
\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n) u_n dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v_n)\right] g(v_n) v_n dx \leq o(1) + 2\left(\frac{4\pi}{\alpha_0} - \delta\right).
$$

Portanto, de (3.30) e (3.31), conseguimos

$$
||u_n|| + ||v_n|| \leq o(1) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha_0}\right)^{1/2} \left(\frac{4\pi}{\alpha_0} - \delta\right)^{1/2} \leq 2\left(\frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \frac{\delta}{2}\right)^{1/2},
$$

para $\varepsilon > 0$ suficientimente pequeno e $n$ suficientemente grande. Segue então que existe uma subsequência de $(u_n)$ tal que

$$||u_n|| \leq \left(\frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \frac{\delta}{2}\right)^{1/2}.$$

Desde que $f(t) \leq C_\varepsilon e^{(\alpha_0+\varepsilon)t^2}$, com $\varepsilon > 0$, usando as desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev e Hölder, com $q \geq 1$ tal que $(\alpha_0+\varepsilon)\left(\frac{4\pi}{\bar{C}\alpha_0} - \delta\right)\left(\frac{4}{4-\mu}\right)q \leq 4\pi$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * F(u_n)\right] f(u_n)u_n dx &\leq |F(u_n)|_{\frac{4}{4-\mu}}|f(u_n)u_n|_{\frac{4}{4-\mu}} \leq C|u_n^q(e^{(\alpha_0+\varepsilon)||u_n||^2\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2})|_{\frac{4}{4-\mu}} \\ &\leq C'|u_n|_{\frac{4q'}{4-\mu}},\end{aligned}$$

onde $C$ e $C'$ são constantes positivas.

Uma vez que $|u_n|_{\frac{4q'}{4-\mu}} \to 0$ (pela imersão compacta), concluímos por (3.31) que $||v_n|| \to 0$, e então,

$$\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u_n \nabla v_n + V(x)u_n v_n)dx \to 0.$$

Entretanto, isto junto com o Lema 3.2.3 implica que $c_n \to 0$, uma contradição.

Finalmente, observamos que se $(u, v)$ é um ponto crítico não trivial de $\mathcal{I}$ então $u, v > 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$. De fato, escolhendo $\psi = u^- = \max\{-u, 0\}$ e $\varphi = 0$ em (3.5), temos

$$-||u^-||^2 = \langle u, u^- \rangle = \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{1}{|x|^\mu} * G(v)\right] g(v)u^- dx \geq 0,$$

implicando que $u^- = 0$. Similarmente, escolhendo $\psi = 0$ e $\varphi = v^- = \max\{-v, 0\}$ deduzimos que $v^- = 0$, logo $u, v \geq 0$, como foi discutido anteriormente, se $u = 0$ então $v = 0$, disto concluímos que $u, v > 0$. Concluindo assim nossa prova.

□

# Apêndice A

# Apêndice

## A.1 Resultados usados

**Proposição A.1.1.** *Seja $E_\lambda$ o espaço definido no Capítulo 1, então valem as seguintes afirmações:*

*(i) $E_\lambda$ está imerso continuamente no espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$;*

*(ii) $E_\lambda$ está imerso compactamente em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para $p \in [1, 2^*_s)$;*

*(iii) $E_\lambda$ é um espaço de Hilbert.*

$(i)$ Como $\lambda \geq 0$ segue-se diretamente da definição de $||.||_\lambda$ que $||u||_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq ||u||_\lambda$, então $E_\lambda \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente.

$(ii)$ Para mostrar que o operador $i : (E_\lambda, ||.||_\lambda) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [1, 2^*_s)$ é compacto, é suficiente provar que dado $U \subset E_\lambda$ limitado, o conjunto $i(U)$ é precompacto em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [1, 2^*_s)$. Ora, mas dado $U$ limitado em $(E_\lambda, ||.||_\lambda)$, pelo item anterior, $U$ será limitado em $H^s(\mathbb{R}^N)$, mas $H^s(\mathbb{R}^N)$ está imerso compactamente em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [1, 2^*_s)$ e então $i(U)$ é precompacto em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $p \in [1, 2^*_s)$.

$(iii)$ Seja $\{u_n\} \subset E_\lambda$ uma sequência convergindo para $u$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^2 dx < \infty,$$

donde segue diretamente da desigualdade triangular que que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^2 dx < \infty.$$

Assim, $u \in E_\lambda$, logo $E_\lambda$ é um subespaço fechado de $H^s(\mathbb{R}^N)$ e portanto $E_\lambda$ é um espaço de Hilbert.

□

**Lema A.1.2.** *Existe uma função $w \in H^s(\Omega)$, com $w \geq 0$, tal que $\rho(\Omega)$ definido em (1.1) é atingido por $w$.*

**Demonstração:** Vamos provar o lema minimizando o funcional

$$\mathcal{F}(u) = ||u||^2_{H^s(\Omega)} = \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy + \int_\Omega |u|^2$$

restrito ao conjunto

$$M = \left\{ u \in H^s(\Omega); \int_{\mathbb{R}^N} u^2 = 1 \right\}.$$

Uma vez que $\mathcal{F}$ restrito à $M$ é coercivo, existe uma sequência $(u_n)$, $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (se necessário, trocamos $u_n$ por $|u_n|$) tal que

$$||u_n||^2 \to \inf_{u \in M} \mathcal{F}(u).$$

Pela limitação de $(u_n)$ e da reflexividade do espaço $H^s(\Omega)$, temos que $u_n \rightharpoonup w$ em $H^s(\Omega)$ para algum $w \in H^s(\Omega)$. O fato da norma ser fracamente semicontínua inferiormente implica que

$$||w||^2 \leq \liminf_{n \to \infty} ||u_n||^2 = \inf_{u \in M} \mathcal{F}(u).$$

Relembrando que $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ compactamente, temos

$$u_n \to w \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N). \tag{A.1}$$

Para finalizar nossa prova, é suficiente mostrar que $w \in M$. Mas isso é imediato, uma vez que por (A.1)

$$1 = \int_\Omega |u_n|^2 \to \int_\Omega |w|^2.$$

$\square$

**Proposição A.1.3.** *(Desigualdade do valor médio): Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se o segmento $[a, a+v]$ estiver contido em $\Omega$ e $|\nabla f(a+tv)| \leq M$, $\forall t \in [0,1]$. Então $|f(a) - f(v)| \leq M|a - v|$.*

**Demonstração:** Veja Corolário 4 em [63].

**Proposição A.1.4.** *Se $\alpha < N$ então $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy < \infty$.*

**Demonstração:** Devido a invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|z|^\alpha} dz = \int_{|z|>1} \frac{1}{|z|^\alpha} dz + \int_{|z|\leq 1} \frac{1}{|z|^\alpha} dz.$$

É imediato que

$$\int_{|z|>1} \frac{1}{|z|^\alpha} dz < \infty.$$

Denotando $|\partial B_1(0)|$ como sendo a área da superfície de $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^{N-1}$, vemos que

$$\int_{|z|\leq 1} \frac{1}{|z|^\alpha} dz = |\partial B_1(0)| \int_0^1 z^{N-1-\alpha} < \infty.$$

$\square$

**Teorema A.1.5.** *Seja $E$ um Espaço de Hilbert e $J : E \to \mathbb{R}$, um funcional tal que:*

*i) $J$ é coercivo;*

*ii) $J$ é fracamente semicontínuo inferiormente*

*Então existe $u_0 \in E$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in E} J(u).$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser vista em [89].

$\square$

**Lema A.1.6.** *Seja $z_m$ uma sequência limitada uniformemente em $X_0^s(\Omega)$ e $\phi_\varepsilon$ uma função tal que*

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

*onde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, é não crescente e radial. Então vale*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{m \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} z_m(x)(-\Delta)^{s/2}\varphi_\varepsilon(x)(-\Delta)^{s/2} z_m(x) \right| = 0.$$

**Demonstração:** Ver Lema 2.8 em [14].

$\square$

**Lema A.1.7.** *Com as mesmas hipóteses do Lema A.1.6, tem-se*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{m \to \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} z_m(x) B(z_m, \varphi_\varepsilon)(x) \right| = 0,$$

*onde $B$ é uma forma bilinear definida por*

$$B(f,g)(x) = 2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))}{|x-y|^{N+s}} dy.$$

**Demonstração:** Ver Lema 2.9 em [14].

$\square$

**Teorema A.1.8.** ***(Teorema de Miranda):*** *Dado $G = \{x \in \mathbb{R}^N : r < x_i < R, 1 \leq i \leq N\}$ e suponha que a aplicação $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, ..., f_N) : \overline{G} \to \mathbb{R}^N$ é contínua no fecho $\overline{G}$ de $G$ tal que $\boldsymbol{F}(x) \neq \boldsymbol{0} = (0, ..., 0)$ para todo $x$ na fronteira de $G$, e*

*i) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, r, x_{i+1}, ..., x_N) \geq 0$ para $1 \leq i \leq N$ e*

*ii) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, R, x_{i+1}, ..., x_N) \leq 0$ para $1 \leq i \leq N$*

*Então $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{0}$ tem uma soluão em $G$.*

**Demonstração:** Uma prova curta deste teorema pode ser encontrada em [88].

$\square$

**Lema A.1.9.** *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e limitado, seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua com crescimento exponencial crítico que satisfaz as hipóteses $(H_1) - (H_3)$ especificadas no capítulo 3, se $(u_n)$ é uma sequência tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$ e*

$$\left| \int_\Omega f(u_n) u_n dx \right| \leq C, \forall n \in \mathbb{N},$$

*então*
$$f(u_n) \to f(u) \text{ em } L^1(\Omega).$$

**Demonstração:** Veja Lema 2.1 em [32].

$\square$

**Teorema A.1.10.** ***(Teorema da função implícita:)*** *Dado $A$ um aberto em $\mathbb{R}^{r+N}$, seja $f: A \to \mathbb{R}^N$ de classe $C^k (k \geq 1)$, onde $f = f(x,y)$ com $x \in \mathbb{R}^r$ e $y \in \mathbb{R}^N$. Suponha que **(a,b)** é um ponto de $A$ tal que $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ e*
$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq 0$$
*Então existe uma vizinhança $B$ de $\boldsymbol{a}$ em $\mathbb{R}^r$ e uma única função contínua $g : B \to \mathbb{R}^N$ tal que $g(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ e*
$$f(x, g(x)) = 0$$
*para todo $x \in B$. Além disso, a função $g$ também é de classe $C^k$*

**Demonstração:** Ver [63].

$\square$

**Proposição A.1.11.** *Suponha que $\varphi$ é uma função convexa em $\mathbb{R}$ e $g$ é uma função real integrável, então temos que*
$$\varphi\left(\int_a^b f\right) \leqslant \int_a^b \varphi(f).$$

**Demonstração:** Uma abordagem bem intuitiva desta conhecida desigualdade pose ser encontrada em [77]

**Lema A.1.12.** *Vale a seguinte desigualdade:*
$$st \leq \begin{cases} (e^{t^2} - 1) + s(\log s)^{1/2}, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ and } s \geq e^{1/4}, \\ (e^{t^2} - 1) + \frac{1}{2}s^2, \text{ para todo } t \geq 0 \text{ and } 0 \leq s \leq e^{1/4}. \end{cases}$$

**Demonstração:** Veja Lema 2.4 em [33]. $\square$

## A.2 Limitação em $L^\infty$ e Regularidade das soluções

Mostraremos aqui que as soluções encontradas no capítulo 1 são Hölder contínuas. Além disso faremos aqui os detalhes de que $||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$, onde $u_\lambda$ é ponto crítico do funcional auxiliar $\tilde{I}_\lambda$ que aparece na Seção 1.3. Perceba que todos os argumentos servem também para o caso subcrítico.

Seja $\beta \geq 1$ e $T > 0$, definimos a seguinte função que é Lipschitziana e convexa
$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t \leq 0, \\ t^\beta \text{ se } 0 < t \leq T, \\ \beta T^{\beta-1}(t - T) + T^\beta, \text{ se } t \geq T. \end{cases}$$

Então,
$$\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N). \tag{A.2}$$

Também temos que

$$(-\Delta)^s\varphi(u) \leq \varphi'(u)(-\Delta)^s u \leq \varphi'(u)(M(||u||_\lambda^2)(-\Delta)^s u + V(x)u). \tag{A.3}$$

No Teorema 6.5, [78], temos a garantia de que existe uma constante positiva $S = S(N,p,s)$ tal que para qualquer $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$|u|_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S^{-2}[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Mais ainda, pela Proposição 0.0.3 vemos que

$$[u]_{H^s(\mathbb{R}^N)} = |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Assim, de (A.2), (A.3) e integrando por parte, temos

$$\begin{aligned}
|\varphi(u)|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq & S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi(u)|^2 dx \\
& \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(u)\varphi'(u)(-\Delta)^s u dx \\
& \leq S^{-1}C\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(u)\varphi'(u)(M(||u||_\lambda^2)(-\Delta)^s u + V(x)u)dx,
\end{aligned}$$

onde a constante $C$ é tal que $CM(t) > 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Consequentemente, da nosso premissa de que $u_\lambda$ é solução, temos

$$|\varphi(u_\lambda)|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq S^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(u_\lambda)\varphi'(u_\lambda)(u^{2_s^*-1} + h(x)u)dx.$$

Desde que $\varphi'(u)\varphi(u) \leq \beta u^{2\beta-1}$ e $u\varphi'(u) \leq \beta\varphi(u)$, vemos que

$$|\varphi(u)|^2_{L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C'\beta\left(\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_\lambda^{2\beta} + \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx\right), \tag{A.4}$$

onde $C$ é uma constante positiva que não depende de $\beta$. Note que a última integral está bem definida para todo $T$ na definição de $\varphi$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx &= \int_{\{u_\lambda dx \leq T\}} (\varphi(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2}dx + \int_{\{u_\lambda > T\}} u_\lambda^{2_s^*-2}dx \\
&\leq T^{2\beta-2}\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*}dx + C\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*}dx < +\infty,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\beta > 1$ e que $\varphi(u)$ é linear quando $u \geq T$. Escolhemos agora um $\beta$ específico em (A.4), e o chamaremos de $\beta_1$, tal que

$$\beta_1 = \frac{2_s^*}{2}. \tag{A.5}$$

Seja $R > 0$ fixado e a ser especificado posteriormente, retomamos a última integral em (A.4) para estimar,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2} dx = \int_{u\leq R} (\varphi(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2} dx + \int_{u>R} (\varphi(u_\lambda))^2 u_\lambda^{2_s^*-2} dx$$
$$\leq R^{2_s^*} \int_{u\leq R} (\varphi(u_\lambda))^2 dx +$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u))^{2_s^*} dx\right)^{2/2_s^*} \left(\int_{u>R} u^{2_s^*} dx\right)^{(2_s^*-2)/2} \tag{A.6}$$

onde foi usado na última linha a desigualdade de Hölder para os expoentes $2_s^*/2$ e $2_s^*/(2_s^* - 2)$.

Pelo Teorema da convergência monótona, podemos escolher $R$ grande o suficiente, tal que

$$\left(\int_{u>R} u_\lambda^{2_s^*} dx\right)^{\frac{2_s^*-2}{2_s^*}} \leq \frac{1}{2C'\beta_1},$$

onde $C'$ é a constante que aparece em (A.4). Sendo assim, podemos substituir o último termo em (A.6) pelo lado esquerdo de (A.4) e obter com (A.5),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u))^{2_s^*} dx\right)^{2/2_s^*} \leq 2C\beta_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{2_s^*} dx + R^{2_s^*-1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(\varphi(u))^2}{u} dx\right). \tag{A.7}$$

Usando novamente (A.5) e desde que $\varphi(t) \leq t^{\beta_1}$, tomando $T \to \infty$, deduzimos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*\beta_1 dx}\right)^{\frac{2}{2_s^*}} dx \leq 2C\beta_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx + R^{2_s^*-1} \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx\right) < +\infty. \tag{A.8}$$

Então,

$$u_\lambda \in L^{2_s^*\beta_1}(\mathbb{R}^N).$$

Vamos supor agora que $\beta \geq \beta_1$. Logo, como $\varphi(u) \leq u^\beta$ no lado direito de (A.4) e fazendo $T \to \infty$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*\beta} dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq C\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\beta} dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2} dx\right). \tag{A.9}$$

Além disso, podemos escrever

$$u_\lambda^{2\beta} = u^a u^b,$$

com $a = \frac{2_s^*(2_s^*-1)}{2(\beta-1)}$ a ser escolhido e $b = 2\beta - a$. Assim, aplicando a desigualdade de Young com os expoentes

$$r = \frac{2_s^*}{a} \text{ e } r' = \frac{2_s^*}{2_s^* - a},$$

então, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\beta} dx \leq \frac{a}{2_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx + \frac{2_s^* - a}{2_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{\frac{2_s^* b}{2_s^*-a}} dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2} dx,$$

onde $C > 0$ independe de $\beta$.

Pondo a última estimativa em (A.9), mostramos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*\beta} dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}} \leq C\beta \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2} dx\right).$$

Donde segue que,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*\beta} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta-1)}} \leq (C\beta)^{\frac{1}{2(\beta-1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2\beta+2_s^*-2} dx\right)^{\frac{1}{2(\beta-1)}}. \tag{A.10}$$

O resultado desejado irá seguir com base em um argumento iterativo. Definimos $\beta_{m+1}$, $m \geq 1$, então

$$2\beta_{m+1} + 2_s^* - 2 = 2_s^*\beta_m.$$

Portanto,

$$\beta_{m+1} - 1 = \left(\frac{2_s^*}{2}\right)^m (\beta_1 - 1)$$

e substituindo em (A.10), nos assegura que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*\beta_{m+1}} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_{m+1}-1)}} \leq (C\beta_{m+1})^{\frac{1}{2(\beta_{m+1}-1)}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*\beta_m} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_m-1)}}.$$

Definindo $C_{m+1} = C\beta_{m+1}$ e

$$A_m = \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda^{2_s^*\beta_m} dx\right)^{\frac{1}{2_s^*(\beta_m-1)}},$$

podemos afirmar que existe uma constante $C_0 > 0$ independente de $m$, tal que

$$A_{m+1} \leq \prod_{k=2}^{m+1} C_k^{\frac{1}{2(\beta_k-1)}} A_1 \leq C_0 A_1.$$

Isto é,

$$||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 A_1 < +\infty.$$

Pelo (Corolário 5.1.3, [40]), $u_\lambda \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, para qualquer $\alpha \in \{0, \min\{2s, 1\}\}$.

Para mostrar que $||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$, basta redefinir a função teste $\varphi$ como

$$\varphi_\lambda(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 \leq t \leq T_\lambda, \\ t^\beta \text{ se } T_\lambda < t \leq T, \\ \beta T^{\beta-1}(t-T) + T^\beta, \text{ se } t \geq T, \end{cases}$$

onde $T_\lambda = \max_{x \in \Omega_\Upsilon} u_\lambda$. Portanto, se $x \in \Omega_\Upsilon$ então $\varphi_\lambda \equiv 0$.

Repetindo os todos os cálculos acima para $\varphi_\lambda$ ao invés de $\varphi$, percebemos que por (A.10), $A_1 \leq C||u_\lambda||_{H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)}$ e pelo fato de que $||u_\lambda||_{H^s(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \to 0$ quando $\lambda \to +\infty$ (Lema 1.2.1) , concluímos que $||u_\lambda||_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\Upsilon)} \to 0$ sempre que $\lambda \to +\infty$.

$\square$

# Referências Bibliográficas


[1] ABANTANGELO, N.; JAROSH, S. & SALDAÑA A.: *On the loss of maximum principles for higher-order fractional Laplacians*. Proceedings of the American Mathematical Society, 146(11), (2018), 4823–4835.

[2] ADAMS D.: *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives*, Ann. of Math.128 (1988), 385–398.

[3] ALVES, C. O.; CORRÊA, F. J. S. A. & MA, T. F.: *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49, (2005), 85-93.

[4] ALVES, C.O. & FIGUEIREDO, G.M.: *Multi-bump solutions for a Kirchhoff-type problem*, Adv. Nonlinear Anal. 5 (2016), no. 1, 1-26.

[5] ALVES, C. O. & MIYAGAKI, O. H.: *Existence and concentration of solution for a class of fractional elliptic equation in* $\mathbb{R}^N$ *via penalization method*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 55 (2016), no. 3, 47-19.

[6] ALVES, C.O. & YANG, M.: *Existence of positive multi-bump solutions for a Schrödinger-Poisson system in* $\mathbb{R}^3$, Discrete Contin. Dyn. Syst. 36 (2016), 5881–5910.

[7] AMBROSIO, V.: *An existence result for a fractional Kirchhoff–Schrödinger–Poisson system*, V. Z. Angew. Math. Phys. (2018), 69-30.

[8] AMBROSIO, V.: *On a fractional magnetic Schrdinger equation in R with exponential critical growth*, Nonlinear Analysis 183 (2019), 117-148.

[9] AMBROSIO, V.: *Ground states solutions for a non-linear equation involving a pseudo-relativistic Schrödinger operator*, J. Math. Phys. 57 (2016), no. 5, 051-502.

[10] AMBROSIO, V.: *Multiplicity of positive solutions for a class of fractional Schrödinger equations via penalization method*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 196 (2017), no. 6, 2043–2062.

[11] AMBROSIO, V. & FIGUEIREDO, G. M.: *Ground state solutions for a fractional Schrödinger equation with critical growth, Asymptotic Analysis*, 105 (2017), no. 3-4, 159–191.

[12] APPLEBAUM, D.: *Lévy processes and stochastic calculus*, 2nd edn, Cambridge Studies 5 in Advanced Mathematics, Volume. 116, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[13] AUTUORI, G. & PUCCI, P.: *Elliptic problems involving the fractional Laplacian in* $\mathbb{R}^N$, J. Differential Equations, 255 (8) (2013), 2340-2362.

[14] BARRIOS, B.; COLORADO, E.; SERVADEI, R. & SORIA, F.: *A critical fractional equation with concave-convex nonlinearities*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 32 (2015), 875–900.

[15] BATTAGLIA, L. & VAN SCHAFTINGEN J.: *Existence of groundstates for a class of nonlinear Choquard equations in the plane.* Adv. Nonlinear Stud. 2017; DOI: 10.1515/ans-2016-0038.

[16] BARTSCH, T. & WANG, Z. Q.: *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^N$. Comm. Part. Diff. Equ. 20, (1995), 1725–1741.

[17] BARTSCH, T.; PANKOV, A. & WANG, Z. Q.: *Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well.* Commun. Contemp. Math. 3, (2001), 549–569.

[18] BENCI, V. & RABINOWITZ, P. H.: *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math., 52 (3), (1979), 241–273.

[19] BERTOIN, J.: *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, Volume 121, 11 Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[20] BISCI, G. M.; RADULESCU, V. D. & SERVADEI, R.: *Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press (2016).

[21] BISCI, G. & RADULESCU, V.: *Ground state solutions of scalar field fractional Schrodinger* equations, Calc. Var. Partial Differential Equations, 54, n. 3, (2015), 2985–3008.

[22] BRÉZIS, H. & NIRENBERG, L.: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[23] BOGACHEV, V. I.: *Measure Theory*, vol. II, Springer–Verlag, Berlin (2007).

[24] BUCUR, C. D. & VALDINOCI, E.: *Nonlocal Diffusion and Applications*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Vol. 20, Springer; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016, xii+155.

[25] CABRÉ, X. & SIRE, Y.: *Nonlinear equations for fractional Laplacians I: Regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates* (2010); Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 31, 23-53.

[26] CAFFARELLI, L.: *Non-local diffusions, drifts and games*, in: Nonlinear Partial Differential Equations: The Abel Symposium 2010, Abel Symposia, H. Holden and K.H. Karlsen, eds, Volume 7, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2012), 37-52.

[27] CAO, D. M.: *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations 17, (1992), 407–435.

[28] CLÉMENT, P.; DE FIGUEIREDO, D. G. & MITIDIERI, E.: *Positive solutions of semilinear elliptic systems*, Comm. Partial Differential Equations, 17(5-6) (1992), 923–94.

[29] CONT, R. & TANKOV, P.: *Financial modelling with jump processes*, Chapman and Hall, CRC Financial Mathematics Series, FL, 2004.

[30] CORREIA, J. N. & FIGUEIREDO, G. M.: *Existence of positive solution of the equation* $(-\Delta)^s u + a(x)u = |u|^{2_s^*-2}u$, Calc. Var. (2019), 58-63.

[31] DEL PINO, M. & FELMER, P.L.: *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. PDE, (1996), 121-137.

[32] DE FIGUEIREDO, D. G.; MIYAGAKI, O. H. & RUF, B.: *Elliptic equations in $R^2$ with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations 3 (1995), 139-153.

[33] DE FIGUEIREDO, D. G.; DO Ó, J. M. & RUF, B.: *Critical and subcritical elliptic systems in dimension two.* Indiana Univ. Math. J. 53 (2004), 1037–1054.

[34] DE FIGUEIREDO, D. G.; DO Ó, J. M. & RUF, B.: *An Orlicz-space approach to superlinear elliptic systems*, J. Funct. Anal., 224(2) (2005), 471–496.

[35] DE FIGUEIREDO, D. G. & FELMER, P. L.: *On superquadratic elliptic systems.* Trans. Amer. Math. Soc., 343(1) (1994), 99–116.

[36] DE FIGUEIREDO, D. G. & YANG, J.: *Decay, symmetry and existence of solutions of semilinear elliptic systems.* Nonlinear Anal., 33(3) (1998), 211–234.

[37] DE FIGUEIREDO, D. G; DO Ó, J. M. & ZHANG, J.: *Ground state solutions of Hamiltonian elliptic systems in dimension two*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1-32. doi:10.1017/prm.2018.78.

[38] DE SOUZA, M. & ARAÚJO, Y. L.: *Semilinear elliptic equations for the fractional Laplacian involving critical exponential growth.* Mathematical Methods in the Applied Sciences, 40(5) (2016), 1757–1772.

[39] DING, Y. H. & TANAKA, K.: *Multiplicity of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, Manuscripta Math. 112 (2003), no. 1, 109–135.

[40] DIPIERRO, S.; MEDINA, M. & VALDINOCI, E.: *Fractional elliptic problems with critical growth in the whole of* $\mathbb{R}^N$, Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series). Pisa: Edizioni della Normale, Vol. 15, 2017.

[41] DO Ó, J. M.; GIACOMONI, J. & MISHRA, P. K.: *Nonautonomous fractional Hamiltonian system with critical exponential growth.* Nonlinear Differ. Equ. Appl.. (2019), 26-28.

[42] FELMER P.; QUAAS, A. & TAN J.: *Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian* , Proccedings of the Royal Society of Edinburgh, 142A (2012), 1237-1262.

[43] FIGUEIREDO, G. M.: *Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument*, J. Math. Anal. Appl. 401, (2013), 706–713.

[44] FILHO, D.C. & SOUTO, M.A.S.: *Systems of p-Laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees*, Comm. Partial Diff. Equations 24 (1999), 1537-1553.

[45] FISCELLA, A.: *Infinitely many solutions for a critical Kirchhoff type problem involving a fractional operator*. Differential Integral Equations, 29 (2016), Nº 5/6, 513-530.

[46] FISCELLA, A. & VALDINOCI, E.: *A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator*, Nonlinear Anal. 94 (2014), 156–170.

[47] FRANK, R.; LENZMANN, E. & SILVESTRE, L.: *Uniqueness of radial solutions for the fractional Laplacian*, Comm. Pure Appl. Math. 69 (2016), no. 9, 1671–1726.

[48] FRÖHLICH, H.: *Theory of electrical breakdown in ionic crystal*, Proc. Roy. Soc. Ser. A 160 (1937), no. 901, 230–241.

[49] FRÖHLICH, H.: *Electrons in lattice fields*, Adv. in Phys. 3 (1954), no. 11.

[50] HE, X. & ZOU, W.: *Ground states for nonlinear Kirchhoff equations with critical growth*, Annali di Matematica, 193 (2014), 473–500.

[51] HULSHOF, J. & VAN DER VORST, R.: *Differential systems with strongly indefinite variational structure*. J. Funct. Anal., 114(1) (1993), 32–58.

[52] IANNIZZOTTO, A. & SQUASSINA, M.: *1/2-Laplacian problems with exponential nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. 414 (2014), 372-385.

[53] JIA H. & LI G.: *The existence and concentration behavior of ground state solution for fractional Schrödinger-Kirchhoff type equations*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Volumen 43, (2018), 991–1021.

[54] KIRCHHOFF G.: *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[55] KOZONO H.; SATO, T. & WADADE, H.: *Upper bound of the best constant of a Trudinger–Moser inequality and its applicationtoa Gagliardo–Nirenberg inequality*, Indiana Univ. Math. J. 55(2006) 1951–1974.

[56] KRYSZEWSKI, W. & SZULKIN, A.: *An infinite-dimensional Morse theory with applications*. Trans. Amer. Math. Soc., 349(8) (1997), 3181–3234.

[57] LAM N. & LU G.: *Existence and multiplicity of solution to equations of N-Laplacian type with critical exponential growth in* $\mathbb{R}^N$ , J. Funct. Anal. 262 (2012), 1132-1165.

[58] LASKIN N.: *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*. Phys. Lett. A 268, 298 (2000); Fractional quantum mechanics. Phys. Rev. E 62, 3135 (2000).

[59] LASKIN N.: *Fractional Schrödinger equation*. Phys. Rev. E 66, 056108 (2002).

[60] LI G. & YANG, J.: *Asymptotically linear elliptic systems. Comm. Partial Differential Equations*, 29(5-6) (2004), 925–954.

[61] LIEB, E.: *Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation*, Stud. Appl. Math. 57 (2) (1996/97), 93–105.

[62] LIEB, E. & LOSS, M.: *Analysis*, Gradute Studies in Mathematics. AMS, Providence, Rhode island (2001).

[63] LIMA, E. L.: *Análise Real*, vol 2 , Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[64] LIONS, P.L.: *The Choquard equation and related questions*, Nonlinear Anal. 4 (1980) 1063–1072.

[65] LIONS, P.L.: *Compactness and topological methods for some nonlinear variational problems of mathematical physics*, Nonlinear Probl. Present Future, (1982) 17–34.

[66] MA, T. F.: *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal., 63, 5-7 (2005), 1967–1977.

[67] MA, T. F & RIVERA, J. E. M.: *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Appl. Math. Lett. 16, (2003), 243–248.

[68] MAIA, B. B. V. & MIYAGAKI, O. H.: *On a class of Hamiltonian Choquard-type elliptic systems*, J. Math. Phys. 61, (2020), 011502.

[69] MINGQI, X.; PUCCI, P.; SQUASSINA, M. & ZHANG, B.L.: *Nonlocal Schrödinger–Kirchhoff equations with external magnetic field*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 37 (2017), 503–521.

[70] MIYAGAKI, O.H.: *On a class of semilinear elliptic problem in RN with critical growth*, Nonlinear Anal. 29 (1997), 773-781.

[71] MIRANDA, C.: *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*, Boll. Unione Mat. Ital. (2) 3 (1940), 5–7.

[72] MOROZ, V. & VAN SCHAFTINGEN, J.: *A guide to the Choquard equation*, J. Fixed Point Theory Appl. (2016), http://dx.doi.org/ 10.1007/s11784-016-0373-1.

[73] MOROZ, V. & VAN SCHAFTINGEN, J.: *Ground states of nonlinear Choquard equations: existence, qualitative properties and decay asymptotics*, J. Funct. Anal. 265 (2013), 153–184.

[74] MOROZ V. & VAN SCHAFTINGEN, J.: *Existence of groundstates for a class of nonlinear Choquard equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), 6557 – 6579.

[75] MOSER, J.: *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 457–468.

[76] MOSER, J.: *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20, (1971), 1077–1092.

[77] NEEDHAM, T.: *A Visual Explanation of Jensen's Inequality*, The American Mathematical Monthly Vol. 100, No. 8 (Oct., 1993), pp. 768-771.

[78] DI NEZZA, E.; PALATUCCI, G. & VALDINOCI, E.: *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, B.Sci. Math., 136 (2012), 521-573.

[79] OZAWA, T.: *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal. 127 (1995), 259 – 269.

[80] PALATUCCI, G. & PISANTE, A.: *Improved Sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration – compactness for fractional Sobolev spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 50 (2014), 799-829.

[81] PANKOV, A.: *Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals*, Milan J. Math. 73 (2005), 259-287.

[82] PEKAR, S.: *Untersuchung über die Elektronentheorie der Kristalle*, Akademie Verlag, Berlin, 1954.

[83] RABINOWITZ, P. H.: *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS, Regional Conference Series in mathematics (Amer. Math Soc., Providence, 1986).

[84] SECCHI, S.: *Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Phys. 54, (2013) 031501.

[85] SIRAKOV, B.: *On the existence of solutions of Hamiltonian elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$. Adv. Differential Equations, 5 (10-12) (2000), 1445–1464.

[86] SZULKIN, A. & WETH, T.: *The method of Nehari manifold*, in: D.Y. Gao, D. Motreanu (Eds.), Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, International Press, Boston, 2010, pp. 597–632.

[87] VASCONCELOS, C. F.: *On a nonlinear stationary problem in unbounded domains*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 5 (1992) 309–318

[88] VRAHATIS, M. N.: *A short proof and a generalization of Miranda's existece theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 701-703.

[89] WILLEM, M.: *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.

[90] YANG, M. & WEI, Y.: *Existence and multiplicity of solutions for nonlinear Schrödinger equations with magnetic field and Hartree type nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. 403 (2013), no. 2, 680–694.