UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Estabilização de Sistemas Dissipativos de Timoshenko-Ehrenfest sob a Influência do Segundo Espectro de Frequência

Marcos Lima Cardoso

Belém

2019

Marcos Lima Cardoso

Estabilização de Sistemas Dissipativos de Timoshenko-Ehrenfest sob a Influência do Segundo Espectro de Frequência

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior**

Belém

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C268e Cardoso, Marcos Lima
Estabilização de Sistemas Dissipativos de Timoshenko-Ehrenfest sob a Influência do Segundo Espectro de Frequência / Marcos Lima Cardoso. — 2019.
145 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Coorientador(a): Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Sistemas de Timoshenko-Ehrenfest. 2. Dispersão de ondas. 3. Espectro de frequência. 4. Decaimento Exponencial. 5. Sistemas de Bresse. I. Título.

CDD 510

Estabilização de Sistemas Dissipativos de Timoshenko-Ehrenfest sob a Influência do Segundo Espectro de Frequência

por Marcos Lima Cardoso

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 18 de outubro de 2019.

Resultado: APROVADO.

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior (PDM/UFPA) - Orientador

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (PDM/UFPA)

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (PPGME/PDM/UFPA)

Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas (Campus Salinópolis/UFPA)

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (Campus Abaetetuba/UFPA)

À Deus

Agradecimentos

• À Deus pai, fonte de vida e sabedoria, que sempre ouviu minhas orações e esteve ao meu lado abençoando minha caminhada.

• Ao meu orientador, Prof. Dr. Dilberto Almeida da Silva Junior, por ter aceitado esta difícil tarefa e por compartilhar seus conhecimentos e seu tempo, dando-me atenção nos momentos de dificuldades.

• Ao Prof. Mauro Santos pelo direcionamento e condução do grupo de pesquisa GPAMN.

• Aos meus pais e familiares, pela compreensão e incentivo e por acreditarem em mim.

• Ao amigo Anderson Campelo pelos ensinamentos de MathLab e e por sempre estar a disposição para ajudar e sanar dúvidas.

• Ao amigo Anderson Ramos pelas dicas e ajudas sempre que solicitado.

• Aos amigos Renato Fabrício e Sebastião Cordeiro cujo incentivo e inspiração, fortaleceram-me na luta em busca dos meus objetivos.

• Ao amigo Manoel Jeremias, pelas conversar e diálogos em momentos oportunos, colega e parceiro nessa caminhada, excelente companhia.

• Aos colegas João Fortes, Marly Anjos, Elany Maciel, Manoel Lucival, Leonardo e Sancho Chairuca companheiros de batalha.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Resumo

Estabilização de Sistemas Dissipativos de Timoshenko-Ehrenfest sob a Influência do Segundo Espectro de Frequência

por Marcos Lima Cardoso

Neste trabalho estudamos algumas propriedades da viga de Timoshenko-Ehrenfest sobre uma base de Winkler. Analisamos a dispersão do sistema e constatamos que o modelo possui dois espectros de frequência. Para o sistema de Timoshenko-Ehrenfest com equilíbrio dinâmico proposto por Elishakoff, verificamos que o segundo espectro é eliminado. A energia Ostrogradski relacionada aos modelos apresenta sinais diferentes para cada espectro. Questões relacionadas à estabilidade exponencial dos dois sistemas foram consideradas e analisadas através do Método da Energia e do Critério de Routh-Hurwitz onde mostramos haver uma relação entre as velocidades de fase que determina se há decaimento exponencial ou não.

Palavras-chave: Sistemas de Timoshenko-Ehrenfest; Dispersão de ondas; Espectro de frequência; Decaimento Exponencial, Sistemas de Bresse.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Abstract

Stabilization of Timoshenko-Ehrenfest dissipative systems under the influence of the second frequency spectrum

for Marcos Lima Cardoso

In this work, we present some properties of the Timoshenko-Ehrenfest beam under a Winkler base. We analyze the system dispersion and find that the model has two frequency spectra. For the Timoshenko-Ehrenfest system in the dynamical equilibrium proposed by Elishakoff, we verify that the second spectrum vanishes. The Ostrogradski energy related to the models presents different signals for each spectrum. Related questions to the exponential stability of the two systems were considered and analyzed through the energy method and the Routh-Hurwitz criterium where we show to exist a relation between the phase velocities that determine whether there are exponential decaying or not.

Key words: Timoshenko-Ehrenfest systems; wave scattering; frequency spectrum; exponencial decay; Bresse systems.

Sumário

Lista de Figuras

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais e Motivação

Vigas são estruturas metálicas elásticas, que podem ser planas ou curvas, criadas pelo homem e são amplamente utilizadas como elemento de sustentação, submetidas à posições cujas direções podem ser horizontal ou inclinada e sua função é suportar pressões normais a essas direções estando elas assentadas em um ou mais apoios.

Estruturas do tipo vigas ocupam um lugar de destaque no estudo de vibrações transversais e vem sendo objeto de pesquisa de matemáticos, físicos e engenheiros, ao longo dos anos, devido a suas aplicações em áreas como aeronáutica, robótica, mecatrônica, estruturas, automobilística, entre outras e possui uma vasta literatura acerca de modelagens provenientes de testes e observações de propriedades, originando equações e sistemas com resultados bem estabelecidos.

Historicamente, ressalta-se que os primeiros estudos concernentes à estruturas metálicas são atribuídos a Galileo Galilei (1564 - 1642), cujo estudo sobre a resistência dos sólidos teceram as bases do que ficou conhecida como Mecânica dos Materiais. Mais à frente, Robert Hooke (1635

- 1703), como fruto de seus estudos sobre elasticidade de materiais, publicou em 1676, o que ficou conhecida na história como a ”Lei de Hooke”e em 1680, Edme Mariotte (1654 - 1684), aplicou esta lei à fibras de uma viga desenvolvendo assim o conceito de ”linha neutra”(ou em alguns casos, eixo neutral). Desde então, estudiosos têm desenvolvido teorias sobre o assunto, sendo consideradas clássicas as teorias de Euler-Bernoulli (EBT), Rayleigh, Vlasov (teoria do corte) e de Timoshenko (TBT).

Essas teorias, descritas e comparadas em (HAN S. M.; BENAROYA, 1999), modelam as vibrações transversais que ocorrem em uma viga mas apresentam aspectos diferentes no que se refere a velocidade de propagação de ondas.

O modelo apresentado por Euler-Bernoulli assume que as seções transversais de uma viga continuam planas e perpendiculares ao eixo neutral após a deformação da viga, isto é, não há tensão de cisalhamento e nem inércia de rotação. Isto quer dizer que a teoria considera apenas a energia potencial em função da flexão da viga e a energia cinética em função do deslocamento lateral. Do ponto de vista físico, este modelo possui restrições quanto à sua eficiência pois prevê velocidades irreais de propagação de ondas para altas frequências.

Rayleigh refina o modelo de Euler-Bernoulli por incorporar movimentos de rotação dos elementos da viga, afirmando que as seções transversais sofrem rotação em torno do seu eixo e que o ângulo de rotação é igual a inclinação da curva de deflexão da viga, enquanto que Vlasov adiciona às hipóteses de Euler-Bernoulli o efeito de distorção cisalhante (mas não a inércia rotativa), conhecido como ***tensão de corte***, nas seções transversais.

O modelo proposto por Timoshenko, inclui deformação por cisalhamento e inercia de rotação no modelo de Euler-Bernoulli, ou seja, efeito potencial por conta do esforço do corte e o efeito das rotações nas seções transversais em que as seções planas permanecem planas mas não mais perpendiculares ao eixo neutral. Em (ELISHAKOFF, 2010), o autor mostra em poucos passos a obtenção das equações que modelam o sistemas de Timoshenko, dadas por

$$\rho A y_{tt} - \kappa AG(y_x + \psi)_x = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho I \psi_{tt} - EI\psi_{xx} + \kappa AG(y_x + \psi) = 0, \tag{1.2}$$

que também são conhecidas na literatura como equações de Bresse-Timoshenko. Este modelo em particular, apresenta uma anomalia física relacionada à propagação de ondas, a qual foi comprovada inicialmente por Traill-Nash e Collar (TRAILL-NASH R. W.; COLLAR, 1953).

Os autores identificam, para altas frequências acima de uma frequência crítica, um segundo espectro o qual não foi considerado originalmente por Timoshenko, pois seu interesse era melhorar o modelo de Euler-Bernoulli. Desde então, esta teoria vem sendo amplamente investigada ao longo dos anos. Vale ressaltar, que entre os pesquisadores, há divergências a respeito de considerar ou não o segundo espectro, por este apresentar inconsistência com a lei da relatividade de Einstein para frequências próximas de zero, motivo pelo qual é considerado ”não-físico”(ver (STEPHEN, 2006; BASHYAM G. R.; PRATHAP, 1981; BHASKAR, 2009; LEVINSON M.; COOKE, 1982)). Em (STEPHEN, 2006), o autor obtém a chamada Energia Ostrogradski a partir do princípio de Hamilton baseado no Lagrangeano extraído do sistema (1.1)-(1.2) e mostra que essa energia é positiva para o primeiro espectro e negativa para o segundo, ratificando assim a natureza ”não-física”deste último. A mesma técnica o autor utiliza no sistema massa-mola e prova que a energia Ostrogradski associada apresenta sinais diferentes para cada modo de vibração (STEPHEN, 2008).

Um grande número de trabalhos foi desenvolvido com o tema do segundo espectro. Em 2016, Cazzani, Stochino e Turco (CAZZANI A.; STOCHINO, 2016a; CAZZANI A.; STOCHINO, 2016b), os autores apresentaram um estudo dividido em dois artigos onde fazem uma revisão teórica mais completa sobre a dinâmica do feixe de Timoshenko e algumas aplicações, onde afirmam que:

> [...] ainda existem algumas questões que merecem atenção, em particular uma resposta completa e precisa. Definição do espectro de vibração. Há de fato muita confusão sobre isso, e várias contribuições, em vez de ajudar a esclarecer o tópico, adicionaram mais informações incompletas e mal-entendidos [...] existe um espectro de vibração único, mas com uma transição entre dois diferentes tipos de modos de vibração. Desconsiderando uma parte do espectro, como alguns autores afirmaram fazer, com a motivação de que é fisicamente inviável, leva a conclusões contraditórias. Na verdade, apenas experimentos mecânicos podem ser usados para validar uma teoria, e no caso de resultados experimentais não coincidir com o modelo teórico, este último deve ser alterado. (CAZZANI A.; STOCHINO, 2016a; CAZZANI A.; STOCHINO, 2016b)

Alguns trabalhos estudam a possibilidade de controlá-lo (efeitos friccionais são bastante utilizados para esse fim (ver (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017; MANEVICH A.; KOLAKOWSKI, 2011)) ou eliminá-lo. Para este último, citamos o trabalho de (ELISHAKOFF, 2010), que retomando as condições de equilíbrio dinâmico e associando ao princípio de D'Alembert, obteve o sistema

$$\rho A y_{tt} - \kappa AG(y_x + \psi)_x = 0, \tag{1.3}$$

$$-\rho I y_{ttx} - EI\psi_{xx} + \kappa AG(y_x + \psi)_x = 0, \tag{1.4}$$

cuja diferença para o sistema (1.1)-(1.2) é a substituição do termo ψ_{tt} na equação de movimento rotatório (1.2) e essa mudança faz com que o sistema apresente apenas o espectro físico, suprimindo o espectro não-físico conhecido como segundo espectro.

Em (ELISHAKOFF I.; TONZANI, 2017), os autores apresentam uma versão do sistema (1.1)-(1.2) onde acrescenta o efeito de uma base elástica de Winkler. O estudo tem como proposta complementar o trabalho de (CAZZANI A.; STOCHINO, 2016a; CAZZANI A.; STOCHINO, 2016b) para uma viga simples, em que são analisadas cinco condições de contorno elementares diferentes e realiza comparações com os resultados disponíveis na literatura. Esse novo sistema (1.5)-(1.6) é nomeado pelo autor como ”Modelo de Vigas de Timoshenko-Ehrenfest”, justificando que a teoria que ficou conhecida como sendo de Timoshenko, foi na verdade originalmente desenvolvida em parceria com Paul Ehrenfest.

Outro fenômeno muito explorado na literatura quando se trata de vigas de Timoshenko é a estabilidade exponencial da energia de soluções (ver por exemplo (ALMEIDA, 2009; ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017; ALMEIDA D. S.; SANTOS, 2013; CAMPELO, 2014; MESSAOUDI S. A.; MUSTAFA, 2009; MESSAOUDI S. A.; SAID-HOUARI, 2008)). Entre as principais técnicas estão o método da energia e o método de semigrupo de operadores lineares. Porém, recentemente (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017) aplicaram uma técnica conhecida como Critério de Routh-Hurwitz ao sistema (1.1)-(1.2) com mecanismo de amortecimento viscoso na equação de rotação e mostraram que o sistema é exponencialmente estável desde que sd tenha $\kappa\rho_2 = b\rho_1$.

Essa dependência para se obter a estabilidade exponencial foi comprovada originalmente por Soufyane (SOUFYANE, 1999) e desde então variadas técnicas têm sido utilizadas de modo a validar essa dependência.

Então, uma questão tende a ser levantada: Existe algum sistema do tipo Timoshenko cuja estabilidade exponencial independa da igualdade entre as velocidades de fase? A resposta é afirmativa, porém, são poucos trabalhos que verificam essa possibilidade, como por exemplo o trabalho de (RAPOSO C. A.; FERREIRA, 2005), em que os autores usam mecanismos de amortecimentos nas duas equações e aplicam um método desenvolvido por Zeng e Liu. Outro resultado nesse sentido se deve a (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017). Os autores aplicaram novamente o Critério de Routh-Hurwitz, desta vez no sistema (1.3)-(1.4) com o mesmo amortecimento viscoso na equação de rotação e provaram que este decai exponencialmente, independentemente da igualdade entre as velocidades.

Com base nesses argumentos, apresentamos um estudo referente à dispersão de ondas e estabilidade exponencial usando o Método da Energia e o critério de Routh-Hurwitz para os sistemas de Timoshenko-Ehrenfest com fundação de Winkler, proposto por Elishakoff, com e sem o segundo espectro e o de vigas curvas conhecido como Sistema de Bresse.

Os sistemas a serem estudados apresentam as seguintes estruturas:

Timoshenko-Ehrenfest

$$
\begin{aligned}
\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x + \alpha y &= 0, \qquad (1.5)\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) &= 0, \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

onde ρ_1 e ρ_2 são inércia transversal e de rotação e κ e b são rigidez de cisalhamento e de flexão, respectivamente, e α é o coeficiente de rigidez linear da fundação (constante de reação vertical), ou constante de Winkler.

Sistema de Bresse

As hipóteses para o modelo dinâmico de vigas curvas, consideram uma curvatura no plano de um arco circular de comprimento L e raio R. Os demais elementos são os mesmos presentes nos sistemas de vigas planas.

$$
\begin{aligned}
\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) &= 0, \qquad (1.7)\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) &= 0, \qquad (1.8)\\
\rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - ly)_x - l\kappa(y_x + \psi + lw) &= 0. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Os coeficientes dos dois sistemas são obtidos a partir da relação entre os elementos da viga, expressos pela tabela:

TABELA 1.1: Constantes Físicas

$\rho_1 = \rho A$	$\kappa = \kappa' AG$	$\kappa_0 = EA$
$\rho_2 = \rho I$	$b = EI$	$l = R^{-1}$

onde A é a área da seção transversal, I é o momento de inércia do elemento da viga, ρ é a densidade do material que compõe a viga, E é o módulo de elasticidade de Young, G é o módulo de cisalhamento (do cortante) e κ' é o fator de correção de cisalhamento da estrutura. Nos sistemas, y denota o deslocamento transversal/normal, ψ denota a rotação das seções transversais e w denota o deslocamento tangencial/longitudinal no sistema (1.7) - (1.9), componentes do deslocamento total das linhas das vigas.

1.2 Fundação e Constante de Winkler

O estudo que apresentamos neste trabalho versa sobre uma viga de Timoshenko apoiada sobre uma base de Winkler, proposta originalmente por (ELISHAKOFF I.; TONZANI, 2017). Mas, o que é uma base de Winkler?

Emil Ernst Oskar Winkler (1835-1888) foi um engenheiro civil alemão, insigne por desenvolver um método para calcular as deflexões e tensões em trilhos rodoviários, conhecido como ”Método de Linhas de Influência”ou ”Cama de Winkler”. Especialista em análise estrutural, análise experimental de tensões e teoria da elasticidade, em 1867 propôs um modelo matemático para a determinação de tensão em fundações estruturais, inspirado no modelo de fundações desenvolvido originalmente para estradas de ferro. Esse modelo ficou conhecido na literatura como ”Fundação de Winkler”.

Para Winkler, o solo é um composto elástico, isotrópico e homogêneo, portanto, sujeito às leis de Hooke. O modelo considera o solo como uma fundação estrutural composta por um sistema de molas lineares e independentes entre si, de constante k, cuja deformação ocorre apenas na região da fundação onde o carregamento existe e o deslocamento, $y(x,t)$, é diretamente proporcional à pressão de contato $p(x,t)$, aplicada no ponto, e independente de outros carregamentos externos,

$$p = ky. \tag{1.10}$$

O coeficiente de apoio elástico (ou constante da mola) k é diretamente proporcional ao coeficiente de reação (ou módulo de reação) da fundação k_v e inversamente proporcional à área carregada A_c,

$$k = \frac{k_v}{A_c}, \tag{1.11}$$

pois a deflexão causará uma reação kA_c na fundação. A pressão p decorre da aplicação de uma carga q, na viga, distribuída sobre a área A_c ($p = q/A_c$). Assim, podemos dizer que a relação entre a pressão e a força de reação $Rf(x,t)$ da viga nessa mesma área é dada por,

$$p = \frac{Rf}{A_c}. \tag{1.12}$$

Logo, combinando as equações (1.10), (1.11) e (1.12) obtemos:

$$Rf(x,t) = k_v y(x,t), \tag{1.13}$$

onde:

- p é a pressão aplicada (carregamento) (kN),
- k é o coeficiente de apoio elástico (kN/m),
- k_v é o coeficiente de reação (rigidez linear) da fundação (kN/m^3),
- y é o deslocamento (m),
- A_c é a área (m^2).

Para o caso geral, considera-se três tipos de vigas assentadas sobre a fundação de Winkler, sujeitas à pressão vertical: viga flexível, viga semi-flexível (flexibilidade intermediária) e viga totalmente rígida. Os deslocamentos da região carregada serão constantes se a viga estiver submetida a um carregamento em superfície infinitamente rígida ou a um carregamento uniformemente distribuído em superfície flexível, como mostrado na figura a seguir:

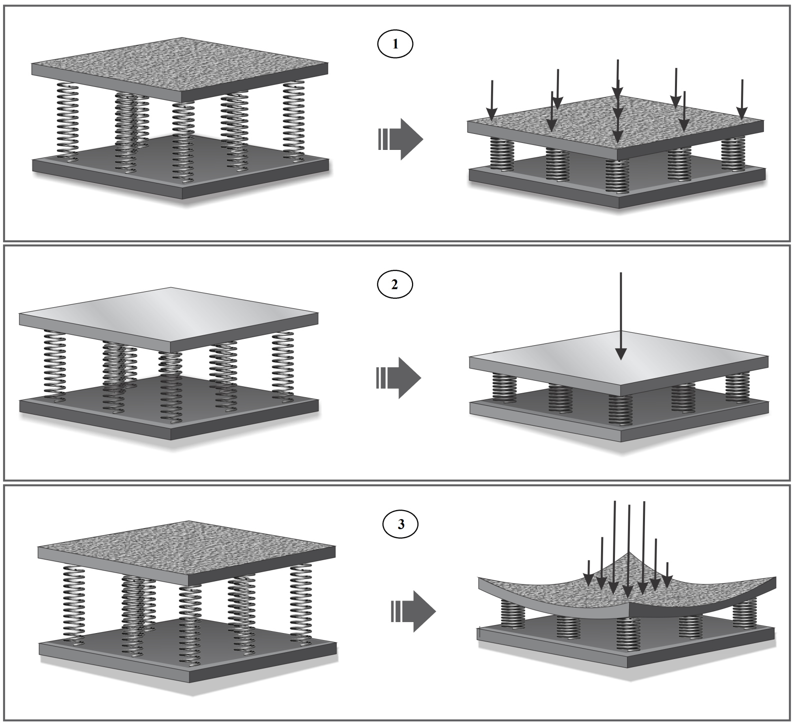

FIGURA 1.1: (1) Viga totalmente flexível sob carregamento uniforme; (2) Viga totalmente rígida sob força concentrada; (3) Viga semi-flexível sob carregamento arbitrário. A figura foi elaborada pelo autor deste trabalho.

Observação 1.1. A fundação pode ser utilizada tanto em carregamentos verticais (radier's, sapatas, etc ...) quanto horizontais (estacas horizontais, estruturas de escoramento de escavações).

1.3 O Segundo Espectro da Teoria Clássica de Timoshenko

Atualmente, há uma vasta produção científica alusiva à modelagem matemática de vigas planas sujeitas a flexão e suas propriedades, fruto da ampla investigação de engenheiros, matemáticos, físicos, entre outros, cujos primórdios se deve a modelos clássicos oriundos de teorias embasadas nos estudos sobre resistência dos materiais e teoria da elasticidade, principalmente. Os modelos considerados clássicos são: o modelo de viga de Euler-Bernouli, o modelo de viga de Rayleigh, o modelo de Vlasov e o modelo de Timoshenko. Para uma elucidação mais profunda e efetiva sobre cada modelo, temos o trabalho de (HAN S. M.; BENAROYA, 1999).

Essas teorias são amplamente utilizadas em áreas da tecnologia onde são aplicadas estruturas flexíveis. Porém, sabe-se que há muitas diferenças entre elas, nas quais estão as frequências naturais que daremos ênfase nestes comentários.

Como afirmam (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017), historicamente o modelo de Rayleigh é uma melhoria ao modelo de Euler-Bernoulli e o modelo de Timoshenko é uma melhoria ao modelo de Rayleigh (e consequentemente à teoria clássica de Euler-Bernoulli). O modelo de viga de Euler-Bernoulli (1.14) para vibrações livres de vigas uniformes, leva em consideração apenas elementos de deslocamento vertical e de flexão. Como consequência, o modelo prevê velocidades de fase irreais para pequenos comprimento de ondas. O modelo de Rayleigh, melhora consideravelmente esse problema de propagação de ondas ao introduzir movimentos de rotação.

Em 1921, o engenheiro mecânico ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko propôs um novo sistema de equações com o intuito de melhorar os modelos pré-existentes, em particular a teoria de Euler-Bernoulli. O ”novo”sistema leva em consideração, além dos deslocamentos vertical e de flexão, efeitos da inércia de rotação e acrescenta os efeitos de distorção por cisalhamento não levados em consideração no modelo de Euler-Bernoulli. Por esse motivo o modelo proposto por Timoshenko é considerado mais completo, pois, proporciona significativa melhoria na aproximação de respostas para altas frequências e para feixes não-delgados. A seguir, faremos uma descrição dos modelos, como tratado em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017) e (ELISHAKOFF, 2010).

O modelo de Euler-Bernoulli é descrito pela equação parabólica

$$\rho A y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \tag{1.14}$$

onde ρ designa a densidade de massa do material, A é a área da seção transversal, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção transversal, y denota a deflexão da viga, x é a distância ao longo da linha axial da viga e t é o tempo. Ao ser incluído movimentos de rotação ao modelo de Euler-Bernoulli, de acordo com a modelagem de vigas flexíveis, o ângulo de rotação, dado por y_x, é igual a inclinação da curva de deflexão; y_{ttx} é a aceleração angular e o momento de inércia do elemento da viga passa a ser dado por $\rho I y_{ttx}$. Incorporando esse momento e usando o Princípio de D'Alembert, resulta na equação

$$\rho I y_{ttx} - M_x + S = 0 \tag{1.15}$$

onde S é a força de cisalhamento transversal (força do corte) e M é o momento de flexão. Substituindo S na condição de equilíbrio dinâmico (1.15) para força na direção vertical das vibrações transversais, obtemos

$$S_x = -\rho A y_{tt}. \tag{1.16}$$

Da teoria de viga elementar temos a relação $M = EIy_{xx}$. Consequentemente,

$$\rho_1 y_{tt} + b y_{xxxx} - \rho_2 y_{ttxx} = 0, \tag{1.17}$$

conhecida como equação de Rayleigh para vibrações de vigas uniformes. Aqui, tomamos as constantes de acordo com a Tabela 1.1.

O modelo de Vlasov adiciona o efeito da distorção cisalhante (mas não a inércia rotativa) ao modelo de Euler-Bernoulli. De acordo com essa teoria, diferentemente dos modelos anteriores, existem duas variáveis dependentes para o efeito de cisalhamento (que serão descritas no modelo de Timoshenko) com as equações de movimento, usando o princípio de Hamilton, dadas por

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x = 0, \tag{1.18}$$

$$-b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) = 0, \tag{1.19}$$

e desacoplando o sistema, obtemos

$$\rho_1 y_{tt} + b y_{xxxx} - \frac{b\rho_1}{\kappa} y_{xxtt} = 0. \tag{1.20}$$

Timoshenko refina o modelo de Rayleigh ao incorporar deformação por cisalhamento e inércia de rotação ao modelo de E-B. Segundo ele, a inclinação da curva de flexão é composta por dois termos: ψ e β. O primeiro decorre da rotação da seção transversal em torno do seu eixo, cuja deformação de cisalhamento foi negligenciada pela teoria de E-B e o segundo denota o ângulo associado ao cisalhamento na mesma seção transversal. Segundo Timoshenko, a relação entre eles é dada por

$$y_x = \beta + \psi. \tag{1.21}$$

Então, apoiado nessa idéia e na tentativa de melhorar, ou mesmo de corrigir, o termo de inercia rotacional original, Timoshenko sugere um outro equilíbrio dinâmico dado por

$$\rho_2\psi_{tt} - M_x + S = 0. \tag{1.22}$$

Da mecânica dos sólidos

$$M = b\psi_x \tag{1.23}$$
$$S = -\kappa\beta, \tag{1.24}$$

com $\kappa = k'AG$. Substituindo (1.23) e (1.24) em (1.22) e (1.16), obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x - \psi)_x &= 0 \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} - \kappa(y_x - \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{1.25}$$

conhecido na literatura como Sistema de Equações de Bresse-Timoshenko ou simplesmente Equações de Timoshenko. Na sua forma desacoplada o sistema é substituído pela equação,

$$\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}y_{tttt} - \left(\rho_2 + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\right)y_{xxtt} + by_{xxxx} + \rho_1 y_{tt} = 0. \tag{1.26}$$

Em (ELISHAKOFF, 2010), o autor afirma ter obtido uma equação mais simples e consistente que a equação (1.26) por meio da retirada do termo $(\rho_1\rho_2/\kappa)y_{tttt}$. Essa ação foi motivada pelo próprio Timoshenko ao afirmar que esse termo fornece uma "contribuição insignificante" à análise de frequência e conclui que: " o termo é uma quantidade pequena de segunda ordem em comparação a quantidade $\pi^2 r^2/\lambda_i^2$", onde $\lambda_i = l/i$, r é o raio de giro da seção transversal, l é o comprimento do feixe e i é o número de frequência, ao avaliar frequências de vibração em vigas bi-apoiadas nas extremidades. A equação resultante desse processo é dada por

$$-\left(\rho_2 + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\right)y_{xxtt} + by_{xxxx} + \rho_1 y_{tt} = 0. \tag{1.27}$$

Elishakoff afirma que esta equação é tanto mais consistente e simples que a equação (1.26), por não conter o termo de correção de inércia de rotação de ordem superior no tempo representado por $(\rho_1\rho_2/\kappa)y_{tttt}$. Vários autores, por exemplo (ABRAMOVICH H.; ELISHAKOFF,

1987; ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017; ELISHAKOFF, 2010), referem-se à equação (1.27) como a equação de Bresse-Timoshenko Simplificada.

Elishakoff, retoma à condição de equilíbrio dinâmico original e combina (1.23) e (1.24) com (1.15) e (1.16), e obtém o sistema de equações acopladas

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x - \psi)_x &= 0, \\ \rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} - \kappa(y_x - \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{1.28}$$

cujo desacoplamento resulta na equação (1.27).

Em linhas gerais, ao mudar o equilíbrio dinâmico (1.15) por (1.22), Timoshenko substitui o termo $\rho_2 y_{ttx}$ pelo termo $\rho_2 \psi_{tt}$. Seu propósito era corrigir o termo de inércia de rotação original. Porém, este fato trouxe consigo um efeito secundário não previsto por Timoshenko, que ficou conhecido na literatura como **o segundo espectro de frequência**. Mas qual o significado do segundo espectro de frequência da teoria de viga de Timoshenko?

A resposta a essa pergunta tem sido motivo de investigação de vários pesquisadores nas últimas décadas e muito se tem discutido sobre a natureza e a validade desse fenômeno. Trabalhos como (ABRAMOVICH H.; ELISHAKOFF, 1987; ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017; BASHYAM G. R.; PRATHAP, 1981; BHASKAR, 2009; ELISHAKOFF, 2010; HAN S. M.; BENAROYA, 1999; LEVINSON M.; COOKE, 1982; SMITH, 2008; STEPHEN, 2006; STEPHEN N. G.; PUCHEGGER, 2006; STEPHEN, 2008) deixam evidente essa discussão.

Segundo Almeida Jr. e A. Ramos em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017): *"existem razões para o modelo de viga de Euler Bernoulli quebrar em alta frequência e um deles é que os elementos da viga permanecem retangulares durante o movimento"*, ou seja, as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo após a flexão da viga, além de prever velocidades infinitas de propagação de ondas. O modelo de Rayleigh ameniza esse efeito por conduzir à uma visão mais realista por proporcionar velocidades finitas de propagação em altas frequências, ao adicionar efeitos da inércia de rotação. Timoshenko, inclui, além da inércia rotatória, os efeitos de deformação por cisalhamento que introduz dois novos termos à equação de Rayleigh que geram uma equação que produz um novo espectro que resulta em velocidade infinita de propagação para ondas com menor frequência e isso é paradoxal às leis de Newton, portanto, contrárias à realidade.

O problema do segundo espectro foi identificado inicialmente por Trail-nash e Collar em (TRAILL-NASH R. W.; COLLAR, 1953), onde identificam que para altas frequências, acima de uma frequência crítica, existe a possibilidade de um segundo espectro frequências naturais para vigas bi-apoiadas nas extremidades, portanto, um novo espectro de frequência. Consequentemente, muitos questionamentos surgiram em relação a validade desse novo espectro; se ele existiria também para diferentes condições nas extremidades de vigas.

Em (LEVINSON M.; COOKE, 1982), os autores afirmam que é apropriado falar de um único espectro de frequências para vigas bi-apoiadas, uma vez que as frequências geram um conjunto completo de auto-funções para expansão modal de um movimento arbitrário e que a previsão de segundo espectro não concorda com qualquer um modo único de vibrações. Em (STEPHEN, 2006), o autor diz que o segundo espectro deve ser desconsiderado, pois a relação entre a chamada energia Ostrogradski e os espectros são bem diferentes. Ele afirma que: *“ a energia é positiva para o primeiro espectro e negativa para o segundo; dentro de alguns ramos da física, isso seria suficiente para concluir que o segundo espectro é não-físico”* (ver também (STEPHEN N. G.; PUCHEGGER, 2006; STEPHEN, 2008)). Por outro lado, (BHASKAR, 2009) afirma que o segundo espectro não deve ser desconsiderado, por que é resultado de uma perturbação singular associada a relação de dispersão da equação de Timoshenko. Em (HAN S. M.; BENAROYA, 1999), os autores levam em consideração o espectro não-físico e alegam que o momento de flexão e a força de cisalhamento estão em fase para o primeiro espectro e fora de fase para o segundo.

Diante desse panorama surge algumas questões que parecem obvias: Existe alguma maneira de eliminar o espectro não-físico? Se não pode ser eliminado, tem com ser controlado? ou transformá-lo em espectro físico?

A primeira foi respondida por Elishakoff, através do sistema (1.28), cuja propagação de ondas é livre do segundo espectro e associa o espectro ao termo de correção da inércia de rotação. O interessante é que o referido sistema preserva todas as propriedades físicas do modelo de Timoshenko original. Para responder as outras questões, A. Junior e Ramos em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017), introduzirem um mecanismo dissipativo na equação de rotação ($\mu\psi_t$) e verificaram que esse fator produz uma espécie de “controle”no espectro não-físico, para propagação de ondas com frequências muito pequenas, transformando-o em espectro físico, mas isso só é possível quando as velocidades de fase são iguais, isto é, quando $\kappa/\rho_1 = b/\rho_2$.

O interessante sobre os dois casos comentados acima, é que os mesmos abrem novas possibilidades de investigações com técnicas já utilizadas para os casos tradicionais, como por exemplo a estabilidade exponencial e a análise de dispersão (ver (ALMEIDA, 2009; ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017)), além de proporcionarem o uso dessas técnicas em outros sistemas, como o sistema de Bresse, em que a análise de dispersão a ser feita leva en consideração a condição de equilíbrio dinâmico proposta por Elishakoff, em outras palavras, o termo ψ_{tt} será substituído pelo termo $-y_{ttx}$ na equação de rotação. Essa substituição tem como efeito a eliminação de um dos espectros do sistema, que será vista no Capítulo 5.

1.4 Sistemas Dissipativos de Timoshenko

As opiniões e pontos de vistas sobre o segundo espectro são controversas, porém tem fomentado a literatura e enriquecido a produção científica sobre o assunto. Entre os trabalhos que levam em consideração a questão do segundo espectro, faremos um breve relato sobre alguns resultados acerca dos sistemas de Timoshenko com dissipação.

Sabemos que Elishakoff conseguiu a total ausência do segundo espectro através de uma mudança (substituição) no sistema tradicional de Timoshenko. Outros autores introduziram mecanismos friccionais, com o objetivo de eliminar o espectro não-físico. Neste sentido, destacamos os trabalhos de (MANEVICH A.; KOLAKOWSKI, 2011) e (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017). O primeiro, analisa o modelo de Timoshenko com um mecanismo de amortecimento viscoelástico e a equação resultante possui coeficientes complexos e, ainda assim, produz dois ramos que des-crevem dois tipos de oscilações: um para o primeiro e outro para o segundo espectro e afirma que *"a fricção interna elimina o segundo ramo para comprimentos de onda suficientemente curtos permanecendo apenas o primeiro ramo"*.

Em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017), os autores concluem sobre o trabalho de (MANEVICH A.; KOLAKOWSKI, 2011):

> [...] somos conduzidos a concluir que os efeitos de amortecimento no modelo clássico de Timoshenko são capazes de eliminar o segundo espectro [...] isso é notável pois, podemos investigar, usando análise de dispersão, se outros mecanismos de amortecimento têm a mesma propriedade. (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017)

Os autores introduzem então um mecanismo de amortecimento viscoso e o sistema de Timoshenko dissipativo é dado por

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x &= 0 \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) + \mu\psi_t &= 0, \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde $\mu > 0$. Após o desacoplamento, é obtida a equação

$$\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa} y_{tttt} + \frac{\mu\rho_1}{\kappa} y_{ttt} - \left(\rho_2 + \frac{\rho_1 b}{\kappa}\right) y_{xxtt} + b y_{xxxx} + \rho_1 y_{tt} - \mu y_{xxt} = 0. \tag{1.30}$$

Substituindo a função harmônica $y(x,t) = A_1 e^{i(x\gamma + \omega t)}$ na equação (1.30) e após algumas manipulações os autores obtém

$$\omega^2 - \left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^2 - \frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\frac{\gamma^4}{\omega^2} + i\frac{\mu}{\rho_2} z = 0, \tag{1.31}$$

com $z := \dfrac{\kappa}{\rho_1}\dfrac{\gamma^2}{\omega} - \omega$ e tomando a relação $\kappa/\rho_2 = b/\rho_1$, resulta na equação

$$z^2 + i\frac{\mu}{\rho_2} z - \frac{\kappa}{\rho_2} = 0, \tag{1.32}$$

cuja solução é dada por $z_{1,2} = -\dfrac{\mu}{2\rho_2} i \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{4\dfrac{\kappa}{\rho_2} - \dfrac{\mu^2}{\rho_2^2}}$.

Da definição de z, tem-se a equação de frequência

$$\omega^2 + z\omega - \frac{\kappa}{\rho_1}\gamma^2 = 0 \tag{1.33}$$

de onde se obtém os dois modos de frequência, ω_1 e ω_2. Da relação de frequência $\omega_i = C_i\gamma$ tem-se as velocidades de propagação de ondas dadas por

$$C_{1,2}(\gamma) = -\frac{z}{2\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2\gamma}\right)^2 + \frac{\kappa}{\rho_1}}, \tag{1.34}$$

Note que, para obter ao resultado esperado os autores tiveram que considerar as velocidades de fase iguais (Teorema 2.2). A análise de dispersão é baseada em alguns critérios, como: Tomaram a parte real dos valores de (1.34) e para o parâmetro de amortecimento, tomaram

$j\sqrt{\kappa\rho_2}$, com $j = 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 3,\ 4$. Para $\mu \geq \sqrt{\kappa\rho_2}$ observa-se (nos gráficos a baixo) que o segundo espectro vai sendo truncado para comprimentos de ondas suficientemente curtos de tal forma que permanece apenas o espectro físico (ver em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017)). Portanto, os autores provam que um mecanismo dissipativo viscoso atuando na equação de rotação do sistema clássico de Timoshenko elimina o segundo espectro de frequência, o espectro não-físico. Os gráficos a baixo mostram a evolução no resultado.

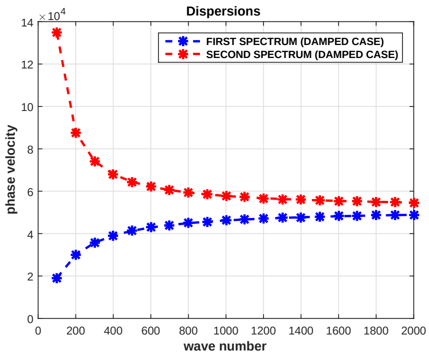

FIGURA 1.2: Para $j = 1/2$

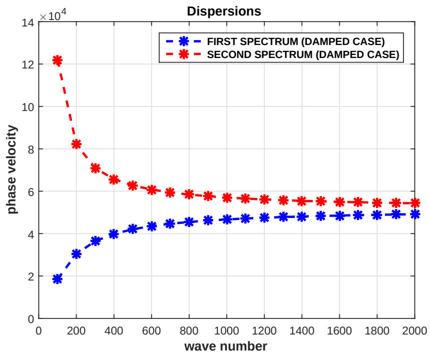

FIGURA 1.3: Para $j = 1$

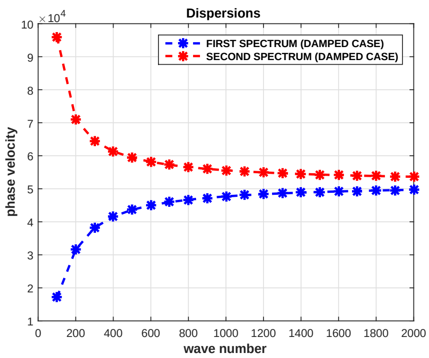

FIGURA 1.4: Para $j = 3/2$

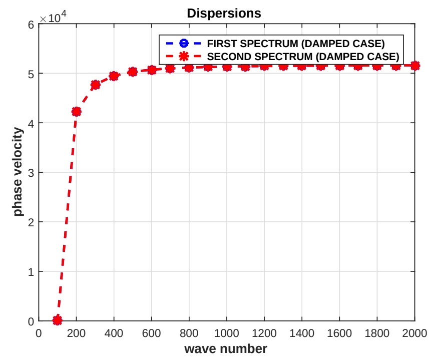

FIGURA 1.5: Para $j = 2$

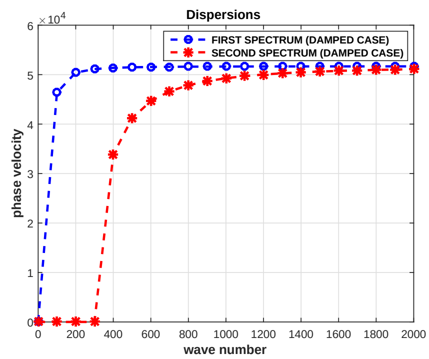

FIGURA 1.6: Para $j = 3$

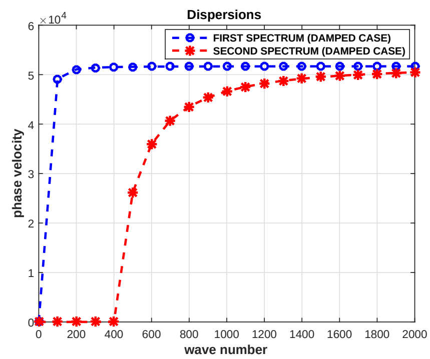

FIGURA 1.7: Para $j = 4$

Nos gráficos a cima, observamos a mudança de comportamento na velocidade de fase relacionada ao segundo espectro (cor vermelha). Para o parâmetro j assumindo os valores $1/2, 1, 3/2$ (Figuras 1.3, 1.2, 1.4), observamos pequenas diferenças na sequência das figuras. No entanto, quando o parâmetro j assume o valor 2, nota-se que o gráfico que representa o segundo espectro (linha vermelha) está sobreposto ao gráfico que representa o primeiro espectro (Figura 1.5), iniciando o processo de truncamento do segundo espectro. Para $j > 2$, o espectro é efetivamente truncado, restando apenas o espectro físico.

1.5 Estabilidade Exponencial do Sistema de Timoshenko sem o Segundo Espectro

Para estabelecer o resultado apresentado por (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017), comentado na seção anterior, os autores criterizaram que $\kappa/\rho_1 = b/\rho_2$. Existe na literatura o caso frequente desse recurso para se obter a estabilidade exponencial do sistema de Timoshenko com termos dissipativos elásticos, viscoelásticos, termoelásticos, com memória e outros (ver (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017; ALMEIDA D. S.; SANTOS, 2013; MANEVICH A.; KOLAKOWSKI, 2011; RAPOSO C. A.; FERREIRA, 2005; RIVERA J. E.; RACKE, 2008; ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2018; RIVERA J. M.; RACKE, 2003)).

No entanto, o pioneirismo neste argumento se deve a (SOUFYANE, 1999), quando inseriu um termo de amortecimento elástico na equação de rotação e provou que a estabilidade exponencial do sistema só ocorre se, e somente se, as velocidades forem iguais. Desde então, inúmeros trabalhos tem sido produzidos considerando a igualdade entre as velocidades. Porém, esses resultados são válidos apenas do ponto de vista matemático, visto que as velocidades de fase são sempre diferentes (no sentido físico). De fato, tomando as relações na Tabela 1.1, temos

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \Rightarrow \frac{\kappa' G}{\rho} = \frac{E}{\rho} \Rightarrow \kappa' = \frac{E}{G} \Rightarrow \frac{\kappa'}{2(1+\nu)} = 1.$$

Mas esse resultado não é real, pois o fator de cisalhamento κ' é sempre menor que 1 e

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.35}$$

onde $\nu \in (0, 1/2)$.

Então, podemos afirmar que todo sistema do tipo Timoshenko é exponencialmente estável se as velocidades forem iguais? A resposta até pouco tempo parecia ser que "sim". No entanto, no trabalho intitulado *"On the nature of dissipative Timoshenko systems at light of the second spectrum"* (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017), os autores mostraram que o sistema simplificado do tipo Timoshenko (1.28), que é livre do segundo espectro, é exponencialmente estável independentemente da igualdade entre as velocidades. Para estabelecer esse resultado, empegaram a técnica utilizada por (QUINTANILLA, 2003), conhecida como Critério de Routh-Hurwitz e o método da energia.

Com base nesses resultados, os autores afirmam que o segundo espectro desempenha um papel central para explicar as propriedades de estabilização quando a igualdade entre velocidades é levada em consideração para obter o decaimento exponencial.

1.6 Organização da Tese

No Capítulo 2 estabelecemos resultados de dispersão do sistema de Timoshenko-Ehrenfest conservativo (1.5)-(1.6), onde mostramos que o modelo possui dois espectros de frequência. Determinamos o Lagrangeano do modelo e a partir dele obtivemos a Energia Ostrogradski relacionada ao sistema e mostramos que esta apresenta sinais diferentes para cada modo de frequência. Estendemos essa análise para o modelo truncado, isto é, sem o segundo espectro e verificamos que o sistema possui um único espectro de frequência e sua Energia Ostrogradski apresenta sinal positivo.

No Capítulo 3 estudamos o sistema de Timoshenko-Ehrenfest com um mecanismo amortecimento viscoso atuando na equação de deslocamento rotacional. Analisamos a existência e unicidade de soluções através da técnica de semigrupo de operadores lineares e questões de decaimento exponencial e polinomial usando o Método da Energia. Mostramos que o sistema é exponencialmente estável desde que as $\kappa\rho_2 = b\rho_1$ e $\alpha < \kappa^2/b$. Também através da técnicas de semigrupo de operadores lineares, verificamos que a falta de estabilidade exponencial do sistema está vinculada à condição $\alpha(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \kappa^2\rho_1 \neq 0$ além da condição $\kappa\rho_2 \neq b\rho_1$. Para o sistema sem o segundo espectro, estudamos apenas a estabilidade exponencial usando o Método da energia e verificamos que o modelo é exponencialmente estável desde que $\alpha < \rho_2\kappa^2/2b\rho_1 c_p$, onde c_p é a constante de Poincaré, independentemente da igualdade entre as velocidades de fase.

No Capítulo 4 aplicamos o Critério de Routh-Hurwitz para os sistemas de Timoshenko-Ehrenfest e provamos que os modelos são exponencialmente estáveis levando em conta as mesmas condições entre as velocidades de fase que aparecem quando aplicamos o método da energia.

No Capítulo 5 estudamos a dispersão do sistema dinâmico de vigas curvas governado pelas hipóteses de Bresse (1.7)-(1.9) e mostramos que o modelo possui três modos de frequência e os comparamos com o modos de frequência da teoria clássica de Timoshenko. Considerando no sistema (1.7)-(1.9) o equilíbrio dinâmico proposto por Elishakoff inicialmente para o modelo de Timoshenko, mostramos que o novo sistema apresenta apenas dois espectros, isto é, a condição elimina um dos modos de frequência tal qual ocorre para o modelo de vigas planas, em particular o segundo espectro, restando o primeiro eo terceiro. Além disso, verificamos que se essa condição for atribuída à equação de movimento tangencial o efeito é o mesmo, porém o espectro eliminado é o terceiro.

No Capítulo 6 estudamos a estabilidade exponencial do sistema de Bresse com dissipação na equação de rotação e posteriormente o mesmo sistema com mecanismo de dissipação nas equações de rotação e de deslocamento tangencial pelo Critério de Routh-Hurwitz e verificamos que estes sistemas são exponencialmente estáveis desde que $\kappa\rho_2 = b\rho_1$. Para o modelo com dois mecanismos dissipativos, acrescentamos o equilíbrio dinâmico sugerido por Elishakoff na equação de rotação e verificamos que o sistema é exponencialmente estável independentemente da igualdade entre as velocidades.

Parte I

Resultados sobre a Viga de Timoshenko-Ehrenfest

CAPÍTULO 2

Dispersão dos Sistemas de Timoshenko-Ehrenfest

Neste capítulo, apresentamos os sistemas conservativos de Timoshenko-Ehrenfest e estudaremos as propriedades dispersivas de cada modelo que estejam diretamente relacionadas aos espectros de frequência e suas conjecturas, como por exemplo a energia Ostrogradski associada.

2.1 Sistema de Timoshenko-Ehrenfest com o Segundo Espectro

O objetivo desta seção é analisar a dispersão de ondas do sistema de Timoshenko-Ehrenfest conservativo sobre uma base de Winkler e estudar questões relacionadas aos espectros de frequência do modelo.

Consideramos então o sistema conservativo de vigas de Timoshenko-Ehrenfest dado por

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x + \alpha y = 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) = 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+ \tag{2.2}$$

com condições iniciais

$$y(x,0) = y_0(x),\ y_t(x,0) = y_1(x),\ \psi(x,0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \tag{2.3}$$

e condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann

$$y(0,t) = y(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.4}$$

A energia total associada ao sistema (2.1)–(2.4) é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \Big[\rho_1|y_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + b|\psi_x|^2 + \kappa|y_x + \psi|^2 + \alpha|y|^2\Big]dx, \tag{2.5}$$

e satisfaz a lei de conservação

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0, \ \ \forall t \geq 0. \tag{2.6}$$

2.1.1 Análise de Dispersão e Conjecturas

Nesta seção, estudaremos questões relacionadas aos modos de frequência e as velocidades de propagação de ondas relacionadas ao sistema (2.1)-(2.1), baseado no trabalho de (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017). Nossa análise resume-se no seguinte resultado:

Proposição 2.1.1. Sejam as soluções de ondas harmônicas dos sistema (2.1)-(2.2) dadas por

$$y(x,t) = A_1 e^{i(\gamma x + \omega t)} \quad \text{e} \quad \psi(x,t) = A_2 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \tag{2.7}$$

onde $A_j,\ j = 1, 2$, são as amplitudes, i é a unidade imaginária, $\omega = C_j\gamma$ é a frequência associadas às funções y e ψ, e γ é o número de ondas. Então as velocidades de dispersão do sistema são:

$$C_1(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{-\frac{B}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4C}}, \tag{2.8}$$

$$C_2(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{-\frac{B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4C}}, \tag{2.9}$$

onde $B = \left(\dfrac{\kappa}{\rho_1} + \dfrac{b}{\rho_2}\right)\gamma^2 + \dfrac{\kappa}{\rho_2} + \dfrac{\alpha}{\rho_1}$ e $C = \dfrac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\gamma^4 + \dfrac{\alpha b}{\rho_1\rho_2}\gamma^2 + \dfrac{\alpha\kappa}{\rho_1\rho_2}$.

Prova. Isolando a função ψ na equação (2.1) e substituindo na equação (2.2), obtemos uma equação diferencial de quarta ordem tanto no espaço quanto no tempo na variável y, dada por

$$\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa} y_{tttt} - b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{xxtt} + b y_{xxxx} + \left(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\right) y_{tt} - \frac{\alpha b}{\kappa} y_{xx} + \alpha y = 0. \tag{2.10}$$

Analogamente, a eliminação de y produz uma equação análoga na variável ψ.

Substituindo a função y, dada em (2.7), e suas derivadas na equação diferencial (2.10) obtemos uma equação polinomial de quarta ordem em ω, dada por

$$\omega^4 - \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{\alpha}{\rho_1}\right]\omega^2 + \left[\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\gamma^4 + \frac{\alpha b}{\rho_1\rho_2}\gamma^2 + \frac{\alpha\kappa}{\rho_1\rho_2}\right] = 0. \tag{2.11}$$

Note que a equação acima pode ser reescrita da forma

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = 0, \tag{2.12}$$

onde $\{\pm\omega_1,\, \pm\omega_2\}$ são soluções da equação (2.11), dadas por

$$\begin{aligned} \omega_i \;=\; & \pm\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{\alpha}{\rho_1}\right)\right. \\ & \left.\pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}\right)^2\frac{\gamma^4}{4} + \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\left(\frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{\alpha}{\rho_1}\right) - \frac{2\alpha b}{\rho_1\rho_2}\right]\frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa}{\rho_2} - \frac{\alpha}{\rho_1}\right)^2}\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$i = 1, 2, 3, 4$. Tomaremos apenas os resultados positivos, isto é

$$\omega_1 = \sqrt{\Upsilon - \sqrt{\Delta}}, \tag{2.14}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\Upsilon + \sqrt{\Delta}}, \tag{2.15}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\Upsilon &:= \left(\frac{\kappa}{\rho_1}+\frac{b}{\rho_2}\right)\frac{\gamma^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\rho_2}+\frac{\alpha}{\rho_1}\right) \\
\Delta &:= \left(\frac{\kappa}{\rho_1}-\frac{b}{\rho_2}\right)^2\frac{\gamma^4}{4}+\left[\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)\left(\frac{\kappa}{\rho_2}+\frac{\alpha}{\rho_1}\right)-\frac{2\alpha b}{\rho_1\rho_2}\right]\frac{\gamma^2}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{\kappa}{\rho_2}-\frac{\alpha}{\rho_1}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Usando a relação $\omega_i = C_i\gamma$ obtemos as velocidades de dispersão associada a cada modo de frequência, dadas por

$$C_1 = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\Upsilon-\sqrt{\Delta}}, \tag{2.17}$$

$$C_2 = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\Upsilon+\sqrt{\Delta}}, \tag{2.18}$$

que são as velocidades de fase associadas a cada espectro de frequência (ou funções espectrais). Vamos agora verificar como a dispersão se comporta com $\gamma \to 0$ e $\gamma \to \infty$.

Primeiramente, usando aproximação assintótica por série de Taylor em (2.17) e tomando $\gamma \to 0$, obtemos

$$C_1 \simeq \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{\kappa b\gamma^4+\alpha b\gamma^2+\alpha\kappa}{(\kappa\rho_2+b\rho_1)\gamma^2+(\alpha\rho_2+\kappa\rho_1)}} \quad \to +\infty. \tag{2.19}$$

Agora, tomando (2.18), fazendo $\gamma \to 0$ e sabendo que $\alpha/\rho_1 < \kappa/\rho_2$, teremos

$$\sqrt{\Upsilon+\sqrt{\Delta}} \to \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{\rho_2}+\frac{\alpha}{\rho_1}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\kappa}{\rho_2}-\frac{\alpha}{\rho_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_2}}. \tag{2.20}$$

Com isso, obtemos $C_2 \to +\infty$.
Agora, tomando (2.17) e (2.18) e fazendo $\gamma \to \infty$, teremos

$$C_1 \to \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}} \quad \text{e} \quad C_2 \to \sqrt{\frac{b}{\rho_2}}. \tag{2.21}$$

Tomemos $V_1 = \sqrt{\kappa/\rho_1}$ e $V_2 = \sqrt{b/\rho_2}$. Graficamente temos:

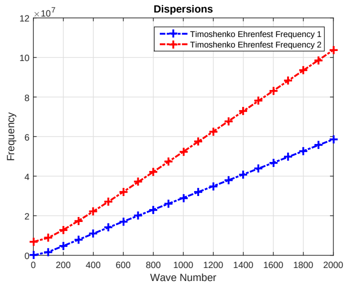

FIGURA 2.1: ω_1 e ω_2.

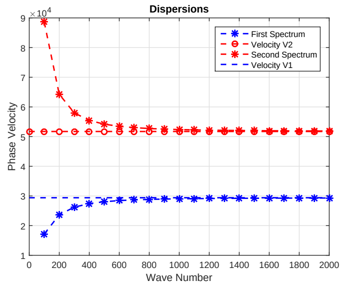

FIGURA 2.2: $\kappa\rho_2 \neq b\rho_1$.

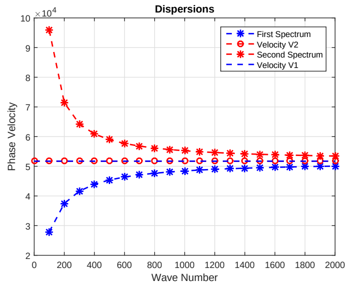

FIGURA 2.3: $\kappa\rho_2 = b\rho_1$.

As Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 representam os modos de frequências (2.14) e (2.15) e a dispersão quando $\kappa/\rho_1 \neq b/\rho_2$ e $\kappa/\rho_1 = b/\rho_2$, respectivamente. $\square$

2.1.2 Lagrangeano do Modelo

Nesta seção iremos construir o Lagrangeano de densidade associado à equação (2.10). Para isso, vamos considerar as seguintes condições de contorno:

$$y(x,t) \;=\; y_{xx}(x,t) \;=\; 0, \quad x \in (0,L) \tag{2.22}$$

e condições de compatibilidade

$$\delta y(x,t_i) \;=\; \delta y_t(x,t_i) \;=\; 0, \quad t_i \in (0,T), \quad i=1,2, \quad t_1 < t_2. \tag{2.23}$$

Tomemos $a_1 = \dfrac{\rho_2\alpha}{\kappa} + \rho_1$, $a_2 = \dfrac{\rho_1\rho_2}{\kappa}$, $a_3 = b\left(\dfrac{\rho_1}{\kappa} + \dfrac{\rho_2}{b}\right)$ e $a_4 = \dfrac{b\alpha}{\kappa}$. Multiplicando a equação (2.10) por $-\delta y$ e integrando em $(0,T)\times(0,L)$, segue

$$\int_0^T\!\!\int_0^L \Big[-b y_{xxxx}\delta y + a_3 y_{xxtt}\delta y - a_1 y_{tt}\delta y + a_4 y_{xx}\delta y - \alpha y\delta y - a_2 y_{tttt}\delta y \Big]\, dxdt = 0. \tag{2.24}$$

Usando a integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_0^T\int_0^L y_{tt}\delta y dtdx &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \delta\left(y_t^2\right) dtd,\\
-\int_0^T\int_0^L y_{xxxx}\delta y dtdx &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \delta\left(y_{xx}^2\right) dtdx,\\
-\int_0^T\int_0^L y_{tttt}\delta y dtdx &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \delta\left(y_{tt}^2\right) dtdx,\\
\int_0^T\int_0^L y_{xxtt}\delta y dtdx &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L y_{xxtt}\delta y dtdx + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L y_{xxtt}\delta y dtdx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L y_{xx}\delta y_{tt} dtdx + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L y_{tt}\delta y_{xx} dtdx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \delta\left(y_{tt}y_{xx}\right) dtdx,\\
\int_0^T\int_0^L y_{xx}\delta y dtdx &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \delta\left(y_x^2\right) dtdx,\\
-\int_0^T\int_0^L y\delta y dtdx &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \delta\left(y^2\right) dtdx.
\end{aligned}$$

Substituindo estes resultados em (2.24) obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L \delta\Big[a_1|y_t|^2 - b|y_{xx}|^2 - a_2|y_{tt}|^2 + a_3 y_{xx}y_{tt} - a_4|y_x|^2 - \alpha|y|^2\Big] dxdt = 0. \tag{2.25}$$

Logo, podemos definir o Lagrangeano da seguinte forma:

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2}\left[\left(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\right)|y_t|^2 - b|y_{xx}|^2 - \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}|y_{tt}|^2 + b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)y_{tt}y_{xx} - \frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2 - \alpha|y|^2\right], \tag{2.26}$$

lembramos que as condições (2.22) e (2.23) devem satisfazer

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \mathcal{L}\, dxdt = 0.$$

2.1.3 Energia Ostrogradski Associada ao Modelo

Segundo Nesterenko (NESTERENKO, 1993), o Hamiltoniano deve ser construído pelo método Ostrogradski, que generaliza o formalismo canônico para sistemas dinâmicos com funções de Lagrange. Em outras palavras, para calcular a energia Ostrogradski associada ao sistema (2.1)-(2.4), precisamos construir o Hamiltoniano H da equação desacoplada (2.10), baseado no Lagrangeano (2.26). Logo, o Hamiltoniano apresenta a seguinte configuração:

$$H = \int_0^L \Big(p_1 y_t + p_2 y_{tt} - \mathcal{L} \Big) dx, \tag{2.27}$$

onde $p_1 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{tt}}\right)$ e $p_2 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{tt}}$. Daí, segue então que,

$$\begin{aligned}
H \;=\; & \int_0^L \left\{ \left[\left(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\right) y_t + \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa} y_{ttt} - \frac{b}{2}\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{xxt} \right] y_t \right\} dx \\
& - \int_0^L \left[\left(\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa} y_{tt} - \frac{b}{2}\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{xx} \right) y_{tt} \right] dx \\
& - \frac{1}{2}\int_0^L \left[\left(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\right) |y_t|^2 - b|y_{xx}|^2 - \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}|y_{tt}|^2 + b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{tt} y_{xx} \right. \\
& \left. - \frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2 - \alpha|y|^2 \right] dx \\
= \; & \int_0^L \left[\left(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\right) |y_t|^2 + \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa} y_{ttt} y_t - \frac{b}{2}\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{xxt} y_t - \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}|y_{tt}|^2 \right. \\
& \left. + \frac{b}{2}\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{xx} y_{tt} \right] dx - \frac{1}{2}\int_0^L \left[\left(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\right) |y_t|^2 - b|y_{xx}|^2 - \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}|y_{tt}|^2 \right. \\
& \left. + b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{tt} y_{xx} - \frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2 - \alpha|y|^2 \right] dx.
\end{aligned}$$

Portanto, tendo como resultado,

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\int_0^L \Bigg[\Big(\rho_1+\frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\Big)|y_t|^2+b|y_{xx}|^2+\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\Big(2y_{ttt}y_t-|y_{tt}|^2\Big)-b\Big(\frac{\rho_1}{\kappa}+\frac{\rho_2}{b}\Big)y_{xxt}y_t \\
&\quad +\frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2+\alpha|y|^2\Bigg]\,dx.
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Em (NESTERENKO, 1993), o autor determina a energia Ostrogradski E_O como sendo definida pelo valor do Hamiltoniano calculado para uma determinada solução particular (ver também (STEPHEN, 2006)). Sendo assim, para a solução

$$
y(x,t)=D\sin\big(n\pi x/L\big)\sin\big(\omega t\big), \tag{2.29}
$$

$n\in\mathbb{N}$, $D>0$, para a viga articulada, compatível com as condições de contorno aqui tratadas. Então, tomemos a expressão (2.28) e definimos

$$
\begin{aligned}
E_O(\omega) &:= \frac{1}{2}\int_0^L \Bigg[\Big(\rho_1+\frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\Big)|y_t|^2+b|y_{xx}|^2+\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\Big(2y_{ttt}y_t-|y_{tt}|^2\Big)-b\Big(\frac{\rho_1}{\kappa}+\frac{\rho_2}{b}\Big)y_{xxt}y_t \\
&\quad +\frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2+\alpha|y|^2\Bigg]\,dx.
\end{aligned}
$$

A partir da solução particular (2.29), não há dificuldades em verificar as identidades a baixo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^L |y_t|^2dx &= \frac{LD^2}{2}\omega^2\cos^2\big(\omega t\big), & \int_0^L |y_{xx}|^2dx &= \frac{LD^2}{2}\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^4\sin^2\big(\omega t\big),\\
\int_0^L y_{ttt}y_tdx &= -\frac{LD^2}{2}\omega^4\cos^2\big(\omega t\big), & \int_0^L |y_{tt}|^2dx &= \frac{LD^2}{2}\omega^4\sin^2\big(\omega t\big),\\
\int_0^L y_{xxt}y_tdx &= -\frac{LD^2}{2}\omega^2\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2\cos^2\big(\omega t\big), & \int_0^L |y_x|^2dx &= \frac{LD^2}{2}\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2\sin^2\big(\omega t\big),
\end{aligned}
$$

desde que $\int_0^L \sin^2\big(n\pi/L\big)dx = L/2$. Logo, podemos escrever $E_O(\omega)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_O(\omega) &= \frac{LD^2}{4}\cos^2\big(\omega t\big)\left[\left(\rho_1+\frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\right)\omega^2+b\left(\frac{\rho_1}{\kappa}+\frac{\rho_2}{b}\right)\omega^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-\frac{2\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega^4\right]\\ &+ \frac{LD^2}{4}\sin^2\big(\omega t\big)\left[b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\frac{\alpha b}{\kappa}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\alpha-\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega^4\right], \end{aligned} \tag{2.30}$$

e considerando a equação (2.11), obtemos a energia Ostrogradski com a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} E_O(\omega) = \frac{LD^2}{4}\cos^2\big(\omega t\big)\left\{\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\left[\left(\left(\frac{\kappa}{\rho_1}+\frac{b}{\rho_2}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\frac{\kappa}{\rho_2}+\frac{\alpha}{\rho_1}\right)\omega^2-\omega^4\right]-\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega^4\right\}\\ + \frac{LD^2}{4}\sin^2\big(\omega t\big)\left[b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\frac{\alpha b}{\kappa}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\alpha-\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega^4\right] \end{aligned} \tag{2.31}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} E_O(\omega) &= \frac{LD^2}{4}\cos^2\big(\omega t\big)\left[b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\frac{\alpha b}{\kappa}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\alpha-\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega^4\right]\\ &+ \frac{LD^2}{4}\sin^2\big(\omega t\big)\left[b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\frac{\alpha b}{\kappa}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\alpha-\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega^4\right]\\ &= \frac{LD^2}{4}\Big(\cos^2\big(\omega t\big)+\sin^2\big(\omega t\big)\Big)\left[b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\frac{\alpha b}{\kappa}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\alpha-\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega^4\right]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Portanto,

$$E_O(\omega) = \frac{LD^2}{4}\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\left[\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\frac{\alpha b}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\frac{\alpha\kappa}{\rho_1\rho_2}-\omega^4\right]. \tag{2.33}$$

Observando as equações (2.11) e (2.12), percebemos que

$$\frac{\kappa b}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4+\frac{\alpha b}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2+\frac{\alpha\kappa}{\rho_1\rho_2} = \omega_1^2\omega_2^2 \tag{2.34}$$

(se tomarmos $\gamma = n\pi/L$) e assim, a energia Ostrogradski relativa ao sistema (2.1)-(2.2) será dada por

$$E_O(\omega) = \frac{LD^2}{4}\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\left(\omega_1^2\omega_2^2 - \omega^4\right). \tag{2.35}$$

Para um dado $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\omega_1^2 < \omega_2^2$. Portanto, a energia Ostrogradski relacionada a cada espectro ade frequência apresenta o seguintes sinais:

$$E_O(\omega_1) = \frac{LD^2}{4}\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega_1^2\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right) > 0 \quad \text{e} \quad E_O(\omega_2) = \frac{LD^2}{4}\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\omega_2^2\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) < 0, \tag{2.36}$$

ou seja, anergia Ostrogradski associada ao primeiro espectro, $E_O(\omega_1)$, é positiva e a energia Ostrogradski relacionada ao segundo espectro, $E_O(\omega_2)$, é negativa e apresenta o seguinte comportamento gráfico:

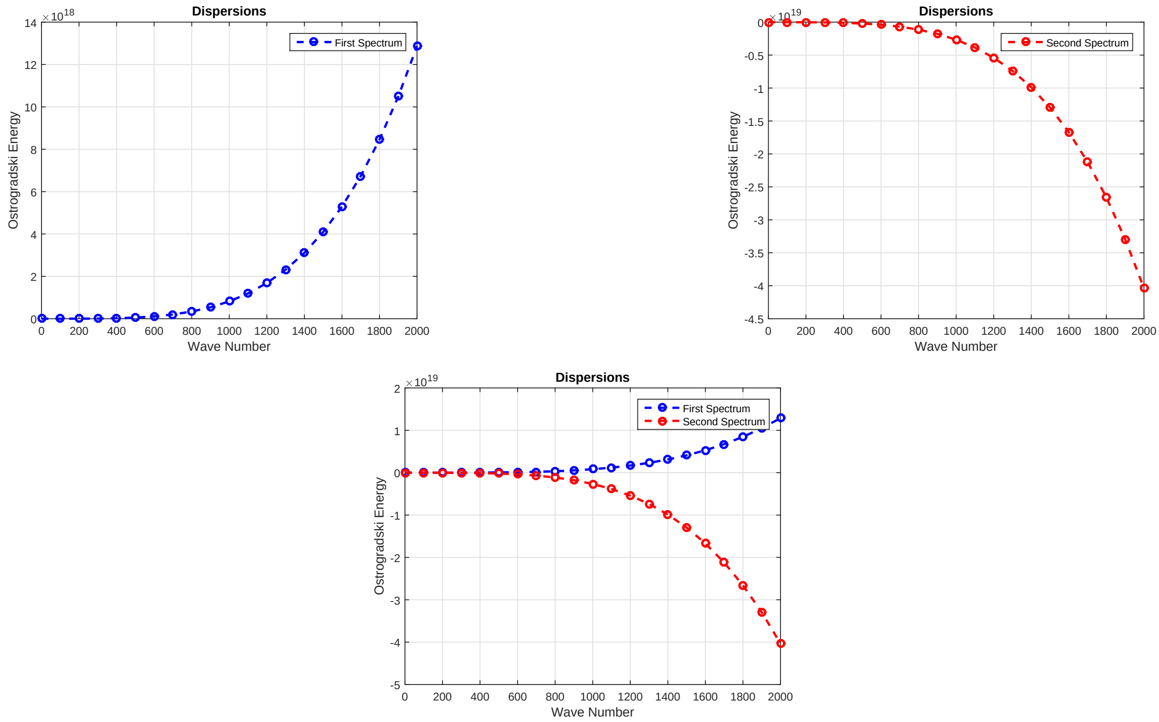

FIGURA 2.4: Energias Ostrogradski relacionadas aos Espectros

2.2 Sistema de Timoshenko-Ehrenfest sem o Segundo Espectro

Nesta seção estudaremos o sistema de Timoshenko-Ehrenfest sobre uma base de Winkler à luz da condição de equilíbrio dinâmico proposta por Elishakoff, que inicialmente foi aplicada ao sistema clássico de Timoshenko cujo efeito principal foi a eliminação do segundo espectro de frequência (ver (ELISHAKOFF, 2010; ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017)). Em outras palavras, essa condição faz com que o termo $\rho_2\psi_{tt}$ seja substituído pelo termo $-\rho_2 y_{ttx}$ criando um sistema que apresenta um único modo de vibração. Nosso objetivo é analisar os efeitos dessa condição no sistema conservativo (2.1)-(2.2) relacionados à frequência. Além disso, assim como na seção anterior, vamos verificar como se comporta a Energia Ostrogradski associada ao modelo.

Considerando a condição de equilíbrio dinâmico sugerida por Elishakoff, teremos então o sistema conservativo de Timoshenko-Ehrenfest dado por

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x + \alpha y = 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+ \tag{2.37}$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) = 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+ \tag{2.38}$$

com condições iniciais

$$y(x, 0) = y_0(x), \ y_t(x, 0) = y_1(x), \ \psi(x, 0) = \psi_0(x), \tag{2.39}$$

e condições de contorno de Dirichlet-Neumann

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.40}$$

A energia total associada ao sistema (2.37)-(2.40) é dada por

$$\begin{aligned} E(t) \ := \ & \frac{1}{2}\Big(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\Big) \int_0^L |y_t|^2 dx + \frac{\rho_1\rho_2}{2\kappa} \int_0^L |y_{tt}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |y_{xt}|^2 dx \\ + \ & \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L |y|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.41}$$

e satisfaz a lei de conservação

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0, \ \ \forall t \geq 0. \tag{2.42}$$

2.2.1 Análise de Dispersão e Conjecturas

Mostraremos como se comporta o espectro de frequência presente no sistema conservativo (2.37)-(2.38), através da análise de dispersão de ondas, tal qual desenvolvido na seção 2.1.1.

Proposição 2.2.1. Sejam (2.7) as soluções de ondas harmônicas dos sistema (2.37) - (2.38). Então a velocidade de propagação de ondas relacionada ao sistema é dada por,

$$C(\gamma) \ = \ \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{b\kappa\gamma^4 + \alpha b\gamma^2 + \alpha\kappa}{(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\gamma^2 + \kappa\rho_1}}. \tag{2.43}$$

Prova. Da substituição da função ψ (da rotação da seção transversal), obtemos a equação diferencial de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo, dada por

$$by_{xxxx} - b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)y_{xxtt} + \rho_1 y_{tt} - \frac{\alpha b}{\kappa}y_{xx} + \alpha y = 0. \tag{2.44}$$

Assim, substituindo y na equação diferencial (2.44) obtemos a equação polinomial de segunda ordem em ω,

$$\left[b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)\gamma^2 + \rho_1\right]\omega^2 - \left[b\gamma^4 + \frac{\alpha b}{\kappa}\gamma^2 + \alpha\right] = 0, \tag{2.45}$$

cuja solução nos fornece o modo de frequência (tomando apenas a parte positiva da solução) dado por

$$\omega \ = \ \sqrt{\frac{b\kappa\gamma^4 + \alpha b\gamma^2 + \alpha\kappa}{(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\gamma^2 + \kappa\rho_1}}. \tag{2.46}$$

Sabendo que $\omega = c\gamma$ (relação de frequência), teremos a velocidade de dispersão associada ao único modo de frequência relacionado ao sistema (2.37) - (2.38) representada por

$$C(\gamma) \ = \ \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{b\kappa\gamma^4 + \alpha b\gamma^2 + \alpha\kappa}{(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\gamma^2 + \kappa\rho_1}}. \tag{2.47}$$

Então, fazendo $\gamma \;\to\; 0$ e $\gamma \;\to\; \infty$, teremos

$$C(\gamma) \;\to\; +\infty \quad \text{e} \quad C(\gamma) \;\to\; \sqrt{\frac{b\kappa}{b\rho_1 + \kappa\rho_2}}, \tag{2.48}$$

respectivamente, cujo comportamento gráfico é representado pelas figuras a baixo:

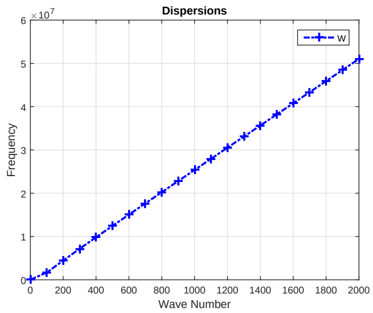

FIGURA 2.5

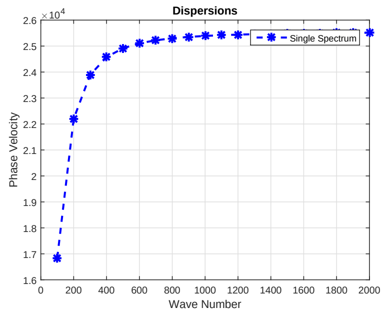

FIGURA 2.6

As Figuras 2.5 e 2.6 representam o modo de frequência (2.46) e a velocidade de dispersão relacionada ao único espectro, respectivamente. □

2.2.2 Lagrangeano do Modelo

Agora, seguindo os mesmos passos da seção 2.1.2, o Lagrangeano de densidade associado à equação desacoplada (2.44) é dado por

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2}\left[\rho_1|y_t|^2 - b|y_{xx}|^2 + b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)y_{tt}y_{xx} - \frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2 - \alpha|y|^2\right]. \tag{2.49}$$

Lembramos que as condições de contorno $y(x,t) = y_{xx}(x,t) = 0$ para $x \in \{0, L\}$ e de compatibilidade $\delta y(x,t_i) = \delta y_t(x,t_i) = 0$ para $i = 1, 2$, devem ser satisfeitas em

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{L} \mathcal{L}\, dxdt = 0,$$

para obtermos a equação diferencial (2.44).

2.2.3 Energia Ostrogradski Associada ao Modelo

Novamente, seguindo o método Ostrogradski segundo (NESTERENKO, 1993) e (STEPHEN, 2006), como na seção 2.1.3, para obtermos a energia Ostrogradski precisamos construir o Hamiltoniano H da equação desacoplada (2.44). Temos então

$$H := \int_0^L \Big(p_1 y_t + p_2 y_{tt} - \mathcal{L} \Big) dx, \tag{2.50}$$

onde $p_1 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{tt}}\right)$ e $p_2 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{tt}}$. Desenvolvendo a identidade (2.50), resulta

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1 |y_t|^2 + b|y_{xx}|^2 - b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{xxt} y_t + \frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2 + \alpha |y|^2 \right] dx.$$

Como sabemos, a energia Ostrogradski E_O é definida pelo valor do Hamiltoniano calculado para uma determinada solução particular, que neste caso tomaremos a mesma solução dada na seção 2.1.3, a saber

$$y(x,t) = D \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\omega t\right).$$

Após os cálculos, definimos a energia Ostrogradski por

$$E_O = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1 |y_t|^2 + b|y_{xx}|^2 - b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right) y_{xxt} y_t + \frac{\alpha b}{\kappa}|y_x|^2 + \alpha |y|^2 \right] dx.$$

Sem dificuldades, pode-se verificar as identidades a baixo:

$$\int_0^L |y_t|^2 dx = \frac{LD^2}{2}\omega^2 \cos^2\left(\omega t\right), \quad \int_0^L |y_{xx}|^2 dx = \frac{LD^2}{2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin^2\left(\omega t\right),$$

$$\int_0^L y_{xxt} y_t dx = -\frac{LD^2}{2}\omega^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos^2\left(\omega t\right), \quad \int_0^L |y_x|^2 dx = \frac{LD^2}{2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin^2\left(\omega t\right),$$

$$\int_0^L |y|^2 dx = \frac{LD^2}{2} \sin^2\left(\omega t\right),$$

sendo $\int_0^L \sin^2\left(n\pi/L\right)dx = L/2$. Assim, substituindo os resultados e organizando a expressão, teremos

$$\begin{aligned} E_O(\omega) &= \frac{LD^2}{4}\cos^2\left(\omega t\right)\left[\rho_1\omega^2 + b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)\omega^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] \\ &+ \frac{LD^2}{4}\sin^2\left(\omega t\right)\left[b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \frac{\alpha b}{\kappa}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \alpha\right]. \end{aligned}$$

Considerando a equação (2.45), podemos reescrever a energia Ostrogradski na forma

$$E_O(\omega) = \frac{LD^2}{4}\left(\cos^2\left(\omega t\right) + \sin^2\left(\omega t\right)\right)\left[\rho_1\omega^2 + b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)\omega^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] \quad (2.51)$$

da qual obtemos

$$E_O(\omega) = \frac{LD^2}{4}\left[\rho_1 + b\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]\omega^2 > 0,$$

de onde podemos concluir que a energia Ostrogradski associada ao único espectro de frequência é sempre positiva.

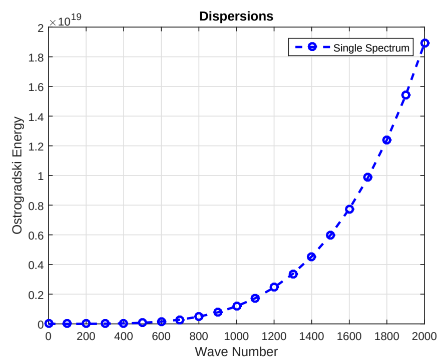

FIGURA 2.7: Energia Ostrogradski associada ao único espectro

CAPÍTULO 3

Estabilidade Exponencial dos Sistemas de Timoshenko-Ehrenfest

Neste capítulo abordaremos um tema importante no o estudo de vibrações em estruturas metálicas sujeitas à atuação de mecanismos de dissipação: a estabilidade exponencial de soluções.

Estudaremos os sistemas de Timoshenko-Ehrenfest com e sem o segundo espectro, ambos com dissipação na equação de rotação. Para o modelo com o segundo espectro, provamos a existência e unicidade de soluções pelo método de semigrupo de operadores lineares e a estabilidade exponencial pelo método da energia, a qual se verifica estar condicionada à igualdade entre as velocidades de propagação de ondas. Quando fatores como a relação entre as velocidades não permite obter o decaimento exponencial, resta analisar o decaimento polinomial de soluções, que neste caso foi obtido também pelo método da energia. Para o modelo sem o segundo espectro provamos a estabilidade exponencial usando o método da energia e verificamos que esta ocorre independentemente da igualdade entre as velocidades de propagação de ondas.

3.1 A Falta de Estabilidade Exponencial

Considere o sistema dissipativo de Timoshenko-Ehrenfest com o segundo espectro:

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x + \alpha y = 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+, \tag{3.1}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) + \mu\psi_t = 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+. \tag{3.2}$$

com condições iniciais

$$y(x, 0) = y_0(x),\ y_t(x, 0) = y_1(x),\ \psi(x, 0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \tag{3.3}$$

com condições de contorno,

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \ \ \forall t \geq 0 \tag{3.4}$$

Das condições de contorno acima, podemos definir a energia do sistema (3.1)-(3.2) por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 y_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b\psi_x^2 + \kappa(y_x + \psi)^2 + \alpha y^2\right] dx. \tag{3.5}$$

Sistemas de equações diferenciais parciais como o representado pelas equações (3.1) e (3.2), descrevem fenômenos físicos sujeitos à dissipação de energia, que é provocada pela ação de diversos mecanismos de dissipação.

Para o nosso propósito, consideraremos o problema (3.1)-(3.4) que satisfaz a lei

$$\frac{d}{dt}E(t) \ = \ -\mu \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx, \tag{3.6}$$

a qual estabelece a dissipatividade do sistema. Em particular

$$E(t) \leq E(0), \ \ \forall t \geq 0.$$

Em razão das condições de contorno tipo Neumann (3.4), sabe-se que as condições iniciais

$$\psi_0, \psi_1 : [0, L] \to \mathbb{R}$$

não decaem exponencialmente. Para contornar esse problema devemos ter

$$\int_0^L \psi_0(x)\, dx \;=\; \int_0^L \psi_1(x)\, dx \;=\; 0$$

e, por conta disso, consideraremos os espaços

$$H^1_*(0, L) = H^1(0, L) \cap L^2_*(0, L), \tag{3.7}$$

e

$$L^2_*(0, L) = \left\{ u \in L^2(0, L);\; \int_0^L u dx = 0 \right\}. \tag{3.8}$$

Esses espaços são completos, pois são núcleos de funcionais lineares contínuos (ver (LIU Z.; ZHENG, 2000)). Portanto, seguindo essas premissas, podemos então definir o espaço-energia associado ao problema (3.1) -(3.4) como sendo

$$H = H^1_0(0, L) \times L^2(0, L) \times H^1_*(0, L) \times L^2_*(0, L) \tag{3.9}$$

Tomemos $U = (y_1, v_1, \psi_1, z_1)'$ e $V = (y_2, v_2, \psi_2, z_2)'$ em H, com " $'$ " indicando transposição. Então H é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle U, V \rangle_H = \int_0^L \left[\rho_1 v_1 \overline{v_2} + \rho_2 z_1 \overline{z_2} + b\psi_{1x}\overline{\psi_{2x}} + \kappa(y_{1x} + \psi_1)\overline{(y_{2x} + \psi_2)} + \alpha y_1 \overline{y_2} \right] dx, \tag{3.10}$$

com a barra denotando o complexo conjugado.

Para $U = (y, v, \psi, z)'$, a norma definida em H é dada por:

$$\|U\|^2_H = \int_0^L \left[\rho_1 |v|^2 + \rho_2 |z|^2 + b|\psi_x|^2 + \kappa |y_x + \psi|^2 + \alpha y^2 \right] dx. \tag{3.11}$$

3.1.1 Formulação de Semigrupo

Seja $U = [y, y_t, \psi, \psi_t]' \in H$. O sistema (3.1)-(3.2) pode ser reescrito como um sistema de evolução de primeira ordem na variável U, conhecido como problema de Cauchy, da seguinte forma:

$$\begin{cases} U_t &= AU, \\ U(0) &= U_0, \end{cases}$$

onde $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq H \to H$ é o operador dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \dfrac{\kappa}{\rho_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}I & 0 & \dfrac{\kappa}{\rho_1}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\dfrac{\kappa}{\rho_2}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{b}{\rho_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\kappa}{\rho_2}I & -\dfrac{\mu}{\rho_2}I. \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Definimos o domínio de $\mathcal{A}$ por

$$D(\mathcal{A}) = (H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \times H_0^1(0,L) \times (H^2(0,L) \cap H_*^1(0,L)) \times H_*^1(0,L).$$

Definimos o conjunto **Resolvente** do operador $\mathcal{A}$, denotado por $\rho(\mathcal{A})$, como sendo o conjunto

$$\rho(\mathcal{A}) := \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \exists(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(H)\right\}.$$

O conjunto

$$\sigma(\mathcal{A}) := \mathbb{C} \backslash \rho(\mathcal{A}),$$

é definido como o **Espectro** de $\mathcal{A}$.

A seção a seguir, é dedicada a provar a existência e unicidade de solução para o problema (3.1)-(3.4), utilizando uma consequência do teorema de Lummer Phillips (ver (PAZY, 1983; RIVERA, 2007)), que apresenta o seguinte enunciado:

Teorema 3.1. Seja $\mathcal{A}$ um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.

Prova. Ver (LIU Z.; ZHENG, 2000). □

3.1.2 Existência e Unicidade de Solução

Teorema 3.2. Existe uma única solução para o problema dado em (3.1)-(3.4), tal que

$$U \in C^0\Big([0,\infty), D(\mathcal{A})\Big) \cap C^1\Big([0,\infty), H\Big)$$

para $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)' \in D(\mathcal{A})$ e também

$$U \in C^0\Big([0,\infty), H\Big)$$

para $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)' \in H$.

Prova. Seguiremos as etapas do Teorema 3.1.

1. O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato, seja $U = (y, y_t, \psi, \psi_t) \in H$. Considerando o produto interno (3.10), temos:

$$Re\langle AU, U\rangle_H \;=\; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|_H^2 \;=\; \frac{d}{dt}E(t) \;=\; -\mu\int_0^L \psi_t^2 dx \;\leq\; 0, \tag{3.13}$$

com $\mu > 0$, logo, A é dissipativo.

2. O domínio de $\mathcal{A}$ é denso em H.

Note que $\mathcal{D}(0,L) \subset H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e $\overline{\mathcal{D}(0,L)}^{H^1(0,L)} = H_0^1(0,L)$, assim teremos

$$\overline{H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)} = H_0^1(0,L),$$

lembrando que o espaço $H_0^1(0,L)$ é equipado com a norma de $H^1(0,L)$.

É imediato que $\overline{H_0^1(0,L)} = L^2(0,L)$ (ver (MEDEIROS L. A.; MIRANDA, 2000; BREZIS, 2010)). As densidades $\overline{H^2(0,L) \cap H_*^1(0,L)} = H_*^1(0,L)$, e $\overline{H_*^1(0,L)} = L_*^2(0,L)$, podem ser consultadas em (SANTOS, 2018) p. 14-15. Podemos concluir então que

$$\overline{D(\mathcal{A})} = H.$$

3. Agora, mostraremos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Devemos garantir que $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado em H. Inicialmente, mostraremos que $Im(\mathcal{A}) = H$. Então, considere a equação resolvente

$$-\mathcal{A}U = F. \tag{3.14}$$

Em outras palavras, devemos obter para cada $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)' \in H$ um único $U = (y, v, \psi, z)' \in D(\mathcal{A})$ que satisfaça (3.14) tal que,

$$\|U\|_H \leq C\|F\|_H, \tag{3.15}$$

para alguma constante $C > 0$.

Reescrevendo a equação (3.14) em teremos de suas componentes, resulta no seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
-v &= f_1 \in H_0^1(0,L), && (3.16)\\
-\frac{\kappa}{\rho_1}(y_x+\psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1}y &= f_2 \in L^2(0,L), && (3.17)\\
-z &= f_3 \in H_*^1(0,L), && (3.18)\\
-\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}(y_x+\psi) + \frac{\mu}{\rho_2}z &= f_4 \in L_*^2(0,L). && (3.19)
\end{aligned}$$

É imediato de (3.16) e (3.18) que $v \in H_0^1(0,L)$ e $z \in H_*^1(0,L)$. Note que $z \in L_*^2(0,L)$. Então, temos à mão o seguinte problema elíptico:

$$\begin{aligned}
-\kappa(y_x+\psi)_x + \alpha y &= \rho_1 f_2 \in L^2(0,L), && (3.20)\\
-b\psi_{xx} + \kappa(y_x+\psi) &= \rho_2 f_4 - \mu z \in L_*^2(0,L). && (3.21)
\end{aligned}$$

ao qual devemos impor as condições de fronteiras dadas por (3.4), para que a solução pertença a $D(\mathcal{A})$. Assim, tomemos $(\overline{\Phi}, \overline{\Psi}) \in H_0^1(0,L) \times H_*^1(0,L)$ e multiplicando as equações (3.20) e (3.21) por $\overline{\Phi}$ e $\overline{\Psi}$, respectivamente, integrando por partes sobre $(0,L)$ considerando as condições (3.4) e somando os resultados, chega-se a equação

$$\int_0^L \left[\kappa(y_x+\psi)(\overline{\Phi}_x+\overline{\Psi}) + b\psi_x\overline{\Psi}_x + \alpha y\overline{\Phi}\right] dx = \rho_1\int_0^L f_2\overline{\Phi}dx + \rho_2\int_0^L f_4\overline{\Psi}dx - \mu\int_0^L z\overline{\Psi}dx. \tag{3.22}$$

Portanto, a solução fraca do problema (3.20)-(3.21), levando em conta as condições (3.4), é um par $(y, \psi) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$, que verifica (3.22) para quaisquer $(\overline{\Phi}, \overline{\Psi}) \in H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$. Nessas condições, vamos definir o espaço $\mathcal{F} = H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ e a função $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(V, \overline{\mathcal{V}}) = \int_0^L \left[\kappa(y_x + \psi)(\overline{\Phi}_x + \overline{\Psi}) + b\psi_x\overline{\Psi}_x + \alpha y\overline{\Phi}\right] dx, \tag{3.23}$$

com $V = (y, \psi)$ e $\overline{\mathcal{V}} = (\overline{\Phi}, \overline{\Psi})$. Não há dificuldades em verificar que função $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{F}$. Do teorema de Lax-Milgran (BREZIS, 2010), existe uma única solução $V = (y, \psi) \in \mathcal{F}$ que satisfaz o problema variacional (3.22), reescrito como

$$a(V, \overline{\mathcal{V}}) = \langle f, \overline{\mathcal{V}} \rangle, \quad \forall \overline{\mathcal{V}} \in \mathcal{F}$$

com $f = (f_2, f_4) \in \mathcal{F}$. Portanto, existe uma única solução $V \in \mathcal{F}$ satisfazendo o sistema (3.20) - (3.21) sob as condições de fronteira (3.4). Assim, dado $(f_2, f_4) \in L^2(0, L) \times L_*^2(0, L)$, segue dos resultados clássicos sobre regularidade para problemas elípticos que

$$V \in \mathcal{F} \cap \left[H^2(0, L) \times H^2(0, L)\right].$$

Concluímos, portanto, que $U \in D(\mathcal{A})$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ que verifica (3.15), de onde teremos $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq C$, permitindo-nos afirmar portanto que $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador limitado, do teorema de Lummer-Phillips (PAZY, 1983) $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre o espaço H, cuja solução possui a seguinte regularidade:

$$U \in C^0\Big([0, \infty), D(\mathcal{A})\Big) \cap C^1\Big([0, \infty), H\Big)$$

para $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)' \in D(\mathcal{A})$ e também

$$U \in C^0\Big([0, \infty), H\Big)$$

para $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)' \in H$. $\square$

3.1.3 A Falta de Estabilidade Exponencial

Na literatura nas últimas décadas, pesquisas sobre vigas metálicas flexíveis sujeitas a dissipação têm se intensificado. Trabalhos que investigam questões relacionadas a estabilidade exponencial de soluções ratificam, com propriedade, relações entre os coeficientes dos sistemas, em particular aqueles que designam as velocidades de propagação de ondas. Dependendo do(s) mecanismo(s) de amortecimento, pode-se ter estabilidade havendo ou não relação direta entre essas velocidades, isto é, se $b\rho_1 = \kappa\rho_2$ ou $b\rho_1 \neq \kappa\rho_2$. Para o sistema (3.1)-(3.2), mostraremos que a condição $b\rho_1 - \kappa\rho_2 = 0$ é necessária para obtermos estabilidade exponencial. Nossa abordagem basei-se em garantir que o semigrupo associado ao sistema não é exponencialmente estável. Para esse fim, tomaremos como base uma variante do teorema de **Gearhart -Herbst -Huang -Prüss** (RIVERA, 2007), enunciado a seguir.

Teorema 3.3. Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert H gerado pelo operador A. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{3.24}$$

e

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty. \tag{3.25}$$

Teorema 3.4. Suponha que

$$b\rho_1 - \kappa\rho_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \alpha \neq \frac{\kappa^2\rho_1}{b\rho_1 - \kappa\rho_2}. \tag{3.26}$$

Então o semigrupo $(e^{\mathcal{A}t})_{t>0}$ gerado por A, associado ao sistema (3.1)-(3.2), não é exponencialmente estável.

Prova. Em geral, para provar a estabilidade exponencial de um semigrupo qualquer $e^{\mathcal{A}t}$, basta verificar as condições (3.24) e (3.25) do Teorema 3.3. Para este caso, em particular, vamos mostrar que a condição (3.25) não é satisfeita, ou seja, mostraremos que existem uma sequência de valores complexos λ_n tal que

$$\|(\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \to \infty.$$

Seja $U = (y, v, \psi, z)' \in H$, considere a equação resolvente

$$\lambda U - \mathcal{A}U = F,$$

com $F \in H$. Reescrevendo a equação acima em termos de suas componentes, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\lambda y - v &= f_1 \in H_0^1(0, L), &(3.27)\\
\lambda v - \frac{\kappa}{\rho_1}(y_x + \psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1} y &= f_2 \in L^2(0, L), &(3.28)\\
\lambda \psi - z &= f_3 \in H_*^1(0, L), &(3.29)\\
\lambda z - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}(y_x + \psi) + \frac{\mu}{\rho_2} z &= f_4 \in L_*^2(0, L). &(3.30)
\end{aligned}$$

Fazendo $f_1 = f_3 = 0$, obtemos $\lambda y = v$ e $\lambda \psi = z$, que substituindo nas equações (3.28) e (3.30), teremos:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 y - \frac{\kappa}{\rho_1}(y_x + \psi)_x + \frac{\alpha}{\rho_1} y &= f_2 \in L^2(0, L), &(3.31)\\
\lambda^2 \psi - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}(y_x + \psi) + \frac{\lambda\mu}{\rho_2}\psi &= f_4 \in L_*^2(0, L). &(3.32)
\end{aligned}$$

Devemos resolver o sistema (3.31)-(3.32) para escolhas particulares das funções y, ψ, f_2 e f_4. Levando em consideração as condições de contorno (3.4) homogêneas, tomaremos as soluções particulares dadas por:

$$y_n = A_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ \text{ e } \ \psi_n = A_2 \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.33}$$

e para f_2 e f_4, escolhemos

$$f_{2,n} = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \ \text{ e } \ f_{4,n} = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.34}$$

Fazendo as substituições adequadamente nas equações (3.31) e (3.32), obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
\left(\lambda^2 + \frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\alpha}{\rho_1}\right) A_1 + \frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{L}\right) A_2 &= 1, &(3.35)\\
\frac{\kappa}{\rho_2}\left(\frac{n\pi}{L}\right) A_1 + \left(\lambda^2 + \frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_2}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\lambda\mu}{\rho_2}\right) A_2 &= 1. &(3.36)
\end{aligned}$$

Tomaremos uma indexação para a variável λ conforme a seguinte sequência de números complexos:

$$\lambda = \lambda_n := i\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}}\eta, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $\eta = (n\pi)/L$ e i indica a parte imaginária do um número complexo.

Obter a solução do sistema (3.31)-(3.32), é equivalente a obter a solução do sistema algébrico (3.35)-(3.36). Resolvendo o problema encontramos:

$$A_{1n} = \rho_1 \frac{\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) + \eta(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1} - \kappa\rho_2) + \kappa\rho_1}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)} \tag{3.37}$$

$$A_{2n} = \rho_1 \frac{-\eta\kappa\rho_1 + \alpha\rho_2}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)}. \tag{3.38}$$

Assim, passando ao limite quando $n \to \infty$, teremos $\eta \to \infty$ e, portanto,

$$A_{1n} \to \rho_1 \frac{b\rho_1 - \kappa\rho_2}{\alpha(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \kappa^2\rho_1} \neq 0 \quad \text{e} \quad A_{2n} \to 0.$$

Construímos então as seguintes soluções do sistema (3.27)-(3.30):

$$y_n(x) = \rho_1 \frac{\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) + \eta(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1} - \kappa\rho_2) + \kappa\rho_1}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)} \sin(\eta x), \tag{3.39}$$

$$v_n(x) = \rho_1 \frac{\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) + \eta(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1} - \kappa\rho_2) + \kappa\rho_1}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)} \lambda_n \sin(\eta x), \tag{3.40}$$

$$\psi_n(x) = \rho_1 \frac{-\eta\kappa\rho_1 + \alpha\rho_2}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)} \cos(\eta x), \tag{3.41}$$

$$z_n(x) = \rho_1 \frac{-\eta\kappa\rho_1 + \alpha\rho_2}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)} \lambda_n \cos(\eta x). \tag{3.42}$$

Posto isso, tomemos a sequencia (3.40) para estimarmos a integral a seguir:

$$\begin{aligned}
\int_0^L |v_n(x)|^2 dx &= \left| \rho_1 \frac{\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) + \eta(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1} - \kappa\rho_2) + \kappa\rho_1}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)} \lambda_n \right|^2 \frac{L}{2} \\
&= \frac{L}{2} \left| \rho_1 \frac{\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) + \eta(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1} - \kappa\rho_2) + \kappa\rho_1}{\alpha\eta^2(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \eta^2\kappa^2\rho_1 + \alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta + \kappa\rho_1)} i\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}}\eta \right|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\rho_1 L}{2}\kappa\eta^2\left|\frac{\eta^2(b\rho_1-\kappa\rho_2)+\eta(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}-\kappa\rho_2)+\kappa\rho_1}{\alpha\eta^2(b\rho_1-\kappa\rho_2)-\eta^2\kappa^2\rho_1+\alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta+\kappa\rho_1)}\right|^2\\
&= \frac{\rho_1 L}{2}\kappa\eta^2\left|\frac{b\rho_1-\kappa\rho_2+\frac{1}{\eta}(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}-\kappa\rho_2)+\frac{1}{\eta^2}\kappa\rho_1}{\alpha(b\rho_1-\kappa\rho_2)-\kappa^2\rho_1+\frac{1}{\eta^2}\alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta+\kappa\rho_1)}\right|^2.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\left|\frac{b\rho_1-\kappa\rho_2+\frac{1}{\eta}(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}-\kappa\rho_2)+\frac{1}{\eta^2}\kappa\rho_1}{\alpha(b\rho_1-\kappa\rho_2)-\kappa^2\rho_1+\frac{1}{\eta^2}\alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta+\kappa\rho_1)}\right|^2 \to \left|\frac{b\rho_1-\kappa\rho_2}{\alpha(b\rho_1-\kappa\rho_2)-\kappa^2\rho_1}\right|^2
$$

quando $n\to\infty$, considerando as hipóteses (3.26). Verificamos então que

$$
\int_0^L |v_n(x)|^2 dx \;\to\; \infty
$$

e, portanto, podemos concluir

$$
\lim_{n\to\infty}\|U_n\|_H^2 \;\geq\; \lim_{n\to\infty}\|v_n\|_{L^2(0,L)}^2 \to \infty,
$$

obtendo o não decaimento exponencial das soluções para este caso. □

Observação 3.1. O mesmo resultado é válido para a escolha

$$
y_n = A_1\cos(\eta x) \;\text{ e }\; \psi_n = A_2\sin(\eta x)\,, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{3.43}
$$

com $\eta := n\pi/L$, para a mesma sequência de números complexos do caso anterior. Obtemos então o sistema

$$
\begin{aligned}
\left(\lambda^2+\frac{\kappa}{\rho_1}\eta^2+\frac{\alpha}{\rho_1}\right)A_1-\frac{\kappa}{\rho_1}\eta A_2 &= 1, &(3.44)\\
-\frac{\kappa}{\rho_2}\eta A_1+\left(\lambda^2+\frac{\kappa}{\rho_2}+\frac{b}{\rho_2}\eta^2+\frac{\lambda\mu}{\rho_2}\right)A_2 &= 1. &(3.45)
\end{aligned}
$$

cuja solução é

$$
\begin{aligned}
A_{1n} &= \rho_1\frac{\eta^2(b\rho_1-\kappa\rho_2)+\eta(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}+\kappa\rho_2)+\kappa\rho_1}{\alpha\eta^2(b\rho_1-\kappa\rho_2)-\eta^2\kappa^2\rho_1+\alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta+\kappa\rho_1)} &(3.46)\\
A_{2n} &= \rho_1\frac{\eta\kappa\rho_1+\alpha\rho_2}{\alpha\eta^2(b\rho_1-\kappa\rho_2)-\eta^2\kappa^2\rho_1+\alpha(i\mu\sqrt{\kappa\rho_1}\eta+\kappa\rho_1)}. &(3.47)
\end{aligned}
$$

Logo, passando ao limite quando $n \to \infty$, portanto,

$$A_{1n} \quad \to \quad \rho_1 \frac{b\rho_1 - \kappa\rho_2}{\alpha(b\rho_1 - \kappa\rho_2) - \kappa^2\rho_1} \neq 0 \quad \text{e} \quad A_{2n} \quad \to \quad 0.$$

Seguindo os mesmos passos do caso anterior, as conclusões são as mesmas.

3.2 Estabilidade do Sistema com o Segundo Espectro: Método da Energia

Na literatura existe uma vasta coleção de trabalhos que utilizam o Método da Energia para provar o decaimento exponencial de soluções para diversos sistemas em equações diferenciais parciais. Nesta seção, utilizaremos esse método para provar o decaimento exponencial de soluções do sistema (3.1)-(3.2).

Para analisarmos a estabilidade exponencial desse sistema, lançamos mão de alguns resultados preliminares (lemas técnicos), subsidiários ao resultado principal. Segue então o primeiro lema relacionado à natureza dissipativa da energia do sistema.

Lema 3.2.1. A energia $E(t)$ associada ao problema (3.1)-(3.4), satisfaz a seguinte lei de dissipação:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\mu \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Prova. Multiplicando as equações (3.1) e (3.2) por y_t e ψ_t, respectivamente, integrando em $(0, L)$ e usando as condições de contorno, teremos

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |y_t|^2 \, dx + \kappa \int_0^L (y_x + \psi) y_{xt} \, dx + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |y|^2 \, dx = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + \kappa \int_0^L (y_x + \psi)\psi_t \, dx + \mu \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx = 0. \quad (3.49)$$

somando as equações (3.48) e (3.49) obtemos o resultado. □

Definimos o seguinte funcional:

$$F_1(t) = -\rho_1 \int_0^L y_t y \, dx. \tag{3.50}$$

Lema 3.2.2. Suponha (y, ψ) solução do problema (3.1)-(3.4). Então existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \le -\rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + C_1 \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx + \alpha \int_0^L |y|^2 \, dx,$$

com

Prova. Multiplicando a equação (3.1) por y, integrando em $(0, L)$ e usando as condições de contorno, teremos

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y \, dx + \kappa \int_0^L (y_x + \psi) y_x \, dx + \alpha \int_0^L |y|^2 \, dx = 0.$$

Com a identidade

$$y_{tt} y = \frac{d}{dt}(y_t y) - |y_t|^2$$

e usando as desigualdades de Young para $\varepsilon > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left(\rho_1 \int_0^L y_t y dx\right) &\le -\rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx + \frac{\kappa}{4\varepsilon}\int_0^L |y_x + \psi|^2 dx \\ &+ \kappa\varepsilon \int_0^L |y_x|^2 dx + \alpha \int_0^L |y|^2 dx \end{aligned} \tag{3.51}$$

Consideremos a desigualdade

$$\int_0^L |y_x|^2 \, dx \le 2\int_0^L |y_x + \psi|^2 + 2C_p \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx, \tag{3.52}$$

obtida após usarmos a desigualdade de Poincaré com $C_p > 0$. Com isso podemos reescrever a desigualdade (3.51), considerando $\varepsilon = b/4\kappa C_p$, da seguinte forma

$$-\frac{d}{dt}\left(\rho_1 \int_0^L y_t y dx\right) \leq -\rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx + C_1 \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx + \alpha \int_0^L |y|^2 dx$$

sendo $C_1 = \kappa^2 C_p/b + \ b/2C_p$. $\square$

A seguir, definimos o seguinte funcional:

$$F_2(t) = \rho_2 \int_0^L \psi_t(y_x + \psi)dx \ + \ \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_x y_t \ dx. \tag{3.53}$$

Lema 3.2.3. Seja (y, ψ) solução do problema (3.1)-(3.4). Então, Considerando $\alpha < \kappa^2/b$ e

$$\kappa\rho_2 - b\rho_1 = 0, \tag{3.54}$$

existe uma constante positiva C_2

$$\frac{d}{dt}F_2(t) \leq C_2 \int_0^L |\psi_t|^2 dx \ - \frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x + \psi|^2 \ dx \ - \ C_\alpha \int_0^L |y|^2 \ dx.$$

Prova. Multiplicando a equação (3.2) por $y_x + \psi$, integrando por partes em $(0, L)$ e usando as condições de contorno, teremos:

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt}(y_x + \psi) \ dx + b\int_0^L \psi_x(y_x + \psi)_x \ dx + \kappa \int_0^L |y_x + \psi|^2 \ dx + \mu \int_0^L \psi_t(y_x + \psi) \ dx = 0.$$

Tomando a identidade $\psi_{tt}(y_x + \psi) = \frac{d}{dt}(\psi_t(y_x + \psi)) - \psi_t(y_x + \psi)_t$, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t(y_x + \psi) \ dx - \rho_2 \int_0^L \psi_t(y_x + \psi)_t \ dx + b\int_0^L \psi_x(y_x + \psi)_x dx \\ + \kappa \int_0^L |y_x + \psi|^2 \ dx + \mu \int_0^L \psi_t(y_x + \psi) \ dx \quad = \quad 0.\end{aligned}$$

Na sequência, usamos as identidades $(y_x+\psi)_x = \dfrac{\rho_1}{\kappa} y_{tt} + \dfrac{\alpha}{\kappa} y$ e $\psi_x y_{tt} = \dfrac{d}{dt}(\psi_x y_t) - \psi_{xt} y_t$, respectivamente, juntamente com as condições de contorno para obter

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)\,dx - \rho_2\int_0^L \psi_t y_{xt}dx - \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_x y_t dx \\
&\quad + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_t y_{xt}dx + \frac{b\alpha}{\kappa}\int_0^L \psi_x y dx + \kappa\int_0^L |y_x+\psi|^2\,dx + \mu\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)\,dx \\
= {} & \frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_x y_t dx\right] - \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\int_0^L \psi_t y_{xt}dx \\
&\quad - \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2\,dx + \frac{b\alpha}{\kappa}\int_0^L \psi_x y dx + \kappa\int_0^L |y_x+\psi|^2\,dx + \mu\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)\,dx = 0
\end{aligned}$$

e levando em conta a condição (3.54) resulta em

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_x y_t dx\right] &= \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx - \frac{b\alpha}{\kappa}\int_0^L y\psi_x dx \\
&\quad -\kappa\int_0^L |y_x+\psi|^2 dx - \mu\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)dx. \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

Agora, usando integração por partes e aplicando a desigualdade de Young, para $\varepsilon = \kappa/2$, a equação (3.55) torna-se a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^L \rho_2\psi_t(y_x+\psi)dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_x y_t dx\right] \le C_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx - \frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2 dx + \frac{b\alpha}{\kappa}\int_0^L y_x\psi dx$$

com $C_2 = \rho_2 + \mu^2/2\kappa$. Levando em conta que $y_x\psi = (y_x+\psi)y_x^2 - y_x^2$, resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_x y_t dx\right] \\
&\le C_2\int_0^L |\psi_t|^2 dx - \frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2 dx + \frac{b\alpha}{\kappa}\int_0^L (y_x+\psi)y_x dx - \frac{b\alpha}{\kappa}\int_0^L |y_x|^2 dx.
\end{aligned} \qquad (3.56)$$

Da desigualdade de Young para $\varepsilon = \alpha b/\kappa^2$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_x y_t dx\right]\\ &\leq\ C_2\int_0^L |\psi_t|^2dx - \frac{\kappa}{4}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx - \frac{b\alpha}{\kappa}\left(1-\frac{b\alpha}{\kappa^2}\right)\int_0^L |y_x|^2dx.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Por fim, lançando mão da hipótese $\alpha < \kappa^2/b$ e aplicando a desigualdade de Poincaré, segue

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^L \psi_t(y_x+\psi)dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L \psi_x y_t dx\right]\\ &\leq\ C_2\int_0^L |\psi_t|^2dx - \frac{\kappa}{4}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx - C_\alpha\int_0^L |y|^2dx,\end{aligned} \tag{3.58}$$

com $C_\alpha = b\alpha C_p/\left(1-b\alpha/\kappa^2\right)\kappa$, encerrando a prova do lema. $\square$

Definimos então o próximo funcional:

$$F_3(t) = \rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx + \frac{\mu}{2}\int_0^L |\psi|^2dx. \tag{3.59}$$

Lema 3.2.4. Seja (y,ψ) solução do problema (3.1)-(3.4). Então,

$$\frac{d}{dt}F_3(t) \leq \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2dx - \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2dx + \frac{\kappa^2C_p}{2b}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx,$$

onde C_p é a constante de Poincaré.

Prova. Multiplicando a equação (3.2) por ψ e fazendo integração por partes, obtemos:

$$\rho_2\int_0^L \psi_{tt}\psi\ dx + b\int_0^L |\psi_x|^2\ dx + \kappa\int_0^L (y_x+\psi)\psi\ dx + \mu\int_0^L \psi_t\psi\ dx = 0$$

e usando a identidade

$$\psi_{tt}\psi = \frac{d}{dt}(\psi_t\psi) - |\psi_t|^2,$$

segue

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx + \frac{\mu}{2}\int_0^L |\psi|^2dx\right] = -b\int_0^L |\psi_x|^2dx \underbrace{-\kappa\int_0^L (y_x+\psi)\psi dx}_{I} + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2dx. \quad (3.60)$$

A seguir, vamos estimar a majoração do termo I usando as desigualdades de Young, para $\varepsilon = b/2C_p$, e de Poincaré, respectivamente:

$$-\kappa\int_0^L (y_x+\psi)\psi dx \leq \frac{\kappa^2 C_p}{2b}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2dx. \quad (3.61)$$

Substituindo (3.61) em (3.60) obtemos a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\left[\rho_2\int_0^L \psi_t\psi dx + \frac{\mu}{2}\int_0^L |\psi|^2dx\right] \leq -\frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2dx + \frac{\kappa^2 C_p}{2b}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx + \rho_2\int_0^L |\psi_t|^2dx,$$

fechando a demonstração. □

Para o resultado principal a seguir, consideraremos as constantes N_0, N_2 e N_3 inteiros positivos a serem estimados convenientemente. Definamos então o funcional de Liapunov da seguinte forma:

$$\mathcal{L}(t) := N_0E(t) + F_1(t) + N_2F_2(t) + N_3F_3(t), \quad (3.62)$$

com $F_1(t)$, $F_2(t)$ e $F_3(t)$ dados em (3.50), (3.53) e (3.59). Nessas condições, enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 3.5. Suponha que $\alpha < \kappa^2/b$ e $\kappa\rho_2 - b\rho_1 = 0$. Então a energia $E(t)$ do problema (3.1)-(3.4), decai exponencialmente para zero quando $t \to \infty$, isto é, existem constantes positivas M e η independentes de t e dos dados iniciais, tais que

$$E(t) \leq Me^{-\eta t}, \ \ \forall t \geq 0. \quad (3.63)$$

Prova. Considere o funcional de Liapunov (3.62). Levando em conta os resultados dos Lemas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 e 3.2.4, derivando o funcional, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \quad \leq \quad & -\rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx \\
& -2\left[N_0\frac{\mu}{\rho_2} - N_2\frac{C_2}{\rho_2} - N_3\right]\frac{\rho_2}{2}\int_0^L |\psi_t|^2 dx \\
& -\left(N_3 - 1\right)\frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
& -\left(\frac{N_2}{2} - \frac{2C_1}{\kappa} - N_3\frac{\kappa C_p}{b}\right)\frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x + \psi|^2 dx \\
& -2\left(N_2\frac{C_\alpha}{\alpha} - 1\right)\frac{\alpha}{2}\int_0^L |y|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Primeiramente escolhemos $N_3 > 1$. Prosseguindo, escolhemos N_2 suficientemente grande tal que

$$N_2 > \max\left\{4\frac{C_1}{\kappa} + 2N_3\frac{\kappa C_p}{b}, \frac{\alpha}{C_\alpha}\right\}.$$

Finalmente, tomando

$$N_0 > \frac{C_2N_2 + \rho_2 N_3}{\mu},$$

podemos concluir que existe uma constante positiva $\beta_0 > 0$, tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \ \leq -\beta_0 E(t) \quad \forall t \geq 0, \tag{3.64}$$

onde $E(t)$ é a energia do sistema da em (3.5). Além disso, não há dificuldade em verificar que $\mathcal{L}(t)$ é equivalente à energia $E(t)$. De fato, resulta da definição de $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ que existe uma constante positiva C_0 tal que

$$|\mathcal{L}(t) - N_0 E(t)| \leq C_0 E(t), \ \ \forall t \geq 0,$$

consequentemente,

$$k_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2E(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.65}$$

com $k_1 = N_0 - C_0$ e $k_2 = N_0 + C_0$. Escolhendo N_0 grande o suficiente, ou seja, $N_0 > \max\{C_0, (N_2C_2 + N_3\rho_2)/\mu\}$, obtemos a equivalência requerida. Finalmente, para $N_0 > 0$ grande o suficiente, tomando $\eta = \beta_0/k_1$, usando a estimativa (3.64) e a equivalência (3.65) obtemos

$$E(t) \leq Me^{-\eta t}, \quad \forall t \geq 0,$$

concluindo que o sistema decai exponencialmente quando (3.54) acontece. □

3.3 Decaimento Polinomial

Como vimos na seção anterior, o problema dissipativo (3.1)-(3.4) possui seu decaimento exponencial condicionado às relações particulares entre seus coeficientes, em especial as que definem velocidades de fase.

O fato do modelo em questão possuir a propriedade de decaimento exponencial, revela que a energia das soluções pode ser controlada por uma função exponencial negativa. Isso quer dizer que seu decaimento para zero em relação ao tempo t é muito rápido. Quando isso não ocorre, devemos analisar outra forma de estabilidade: o Decaimento Polinomial. Neste caso, a energia das soluções é controlada por uma função polinomial, isto é,

$$\|S(t)U_0\|_H \quad \leq \quad f(t)\|U_0\|_{D(\mathcal{A})} \tag{3.66}$$

em que $S(t) := e^{\mathcal{A}t}$ é o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ e $f(t)$ é uma função polinomial positiva tal que $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Porém, sabe-se que o decaimento polinomial da energia é um processo lento de estabilização, pois a energia das soluções agora é controlada por um polinômio.

Nesta seção, estabelecemos o decaimento polinomial da energia $E(t)$ para o modelo dissipativo de Timoshenko-Ehrenfest, analisado anteriormente, e mostramos que isso ocorre desde que $\kappa/\rho_1 \neq b/\rho_2$. Nossa análise está resumida no seguinte teorema:

Teorema 3.6. (Decaimento Polinomial) Suponha que

$$\kappa\rho_2 - b\rho_1 \quad \neq \quad 0. \tag{3.67}$$

Então a energia $E(t)$ dada em (3.5) associada ao problema (3.1)-(3.4) decai polinomialmente, isto é, existe uma constante positiva C tal que:

$$E(t) \quad \leq \quad \frac{C}{t}E_2(0), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.68}$$

Prova. Considerando a hipótese (3.67) e tomando a desigualdade (3.56), teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) \quad &\leq \quad \left(\rho_2 + \frac{\mu^2}{2\kappa}\right)\int_0^L |\psi_t|^2dx + \frac{b\alpha\rho_1}{\kappa^2}\int_0^L |y_t|^2dx - \frac{b\alpha^2}{\kappa^2}\int_0^L y^2dx - \frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx \\ &+ \quad \left(\rho_2 - \frac{b\rho_1}{\kappa}\right)\int_0^L \psi_t y_{xt}dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\chi = b\rho_1/\kappa - \rho_2$, usando integração por partes, do funcional de Liapunov obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta_0 E(t) - \chi N_2 \int_0^L \psi_t y_{tx}dx. \tag{3.69}$$

Usando as condições de contorno, surge a identidade:

$$\int_0^L \psi_t y_{xt}\, dx \quad = \quad \frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t y_x\, dx - \int_0^L \psi_{tt} y_x\, dx$$

logo, a desigualdade (3.69) torna-se,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \quad &\leq \quad -\beta_0 E(t) - \chi N_2 \left[\frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t y_x\, dx - \int_0^L \psi_{tt} y_x\, dx\right] \\ &= \quad -\beta_0 E(t) - \chi N_2 \frac{d}{dt}\int_0^L \psi_t y_x\, dx \; + \; \chi N_2 \int_0^L \psi_{tt} y_x\, dx \end{aligned} \tag{3.70}$$

Definido

$$\mathcal{L}_1(t) \;=\; \mathcal{L}(t) + \chi N_2 \int_0^L \psi_t y_x \, dx \;+\; N E_2(t), \tag{3.71}$$

com

$$E_2(t) \;:=\; E(t, y_t, \psi_t)$$

a energia de segunda ordem que satisfaz

$$\frac{d}{dt} E_2(t, y_t, \psi_t) \;=\; -\,\mu \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \, dx, \;\; \forall t \geq 0. \tag{3.72}$$

Para obter (3.72), derivamos o sistema (3.1)-(3.2) em t e multiplicamos as equações por y_{tt} e ψ_{tt}, respectivamente, e em seguida integramos em $(0, L)$, assim podemos definir

$$E_2(t, y_t, \psi_t) := \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 |y_{tt}|^2 dx + \rho_2 |\psi_{tt}|^2 + b|\psi_{tx}|^2 + \kappa |\left(y_x + \psi\right)_t|^2 + \alpha |y_t|^2 \right] dx. \tag{3.73}$$

Derivando o funcional (3.71), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(t) \;&=\; \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \chi N_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t y_x \, dx \;+\; N \frac{d}{dt} E_2(t) \\
&\leq\; -\,\beta_0 E(t) - \chi N_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t y_x \, dx + \chi N_2 \int_0^L \psi_{tt} y_x \, dx \\
&\quad\; + \chi N_2 \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t y_x \, dx \;+\; N \frac{d}{dt} E_2(t) \\
&\leq\; -\,\beta_0 E(t) + \chi N_2 \int_0^L \psi_{tt} y_x \, dx \;-\; N\mu \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young para $\varepsilon = 1/4$,obtemos

$$\chi N_2 \int_0^L \psi_{tt} y_x \, dx \;\;\leq\;\; \chi N_2 \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \, dx \;+\; \frac{\chi N_2}{4} \int_0^L |y_x|^2 \, dx \tag{3.74}$$

e da desigualdade (3.52), teremos

$$\begin{aligned}
\chi N_2 \int_0^L \psi_{tt} y_x \, dx &\leq \chi N_2 \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \, dx + \frac{\chi N_2}{2} \int_0^L |y_x + \psi|^2 \, dx + \frac{\chi N_2 C_{p_2}}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \\
&\leq \chi N_2 \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \, dx + \frac{\beta_0}{2} E(t)
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_1(t) \leq -\frac{\beta_0}{2} E(t) - (N\mu - \chi N_2) \int_0^L |\psi_{tt}|^2 \, dx.$$

Escolhendo $N > \chi N_2/\mu$, segue

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_1(t) + \frac{\beta_0}{2} E(t) \leq 0.$$

Integrando o resultado acima em $(0, t)$, teremos

$$\mathcal{L}_1(t) - \mathcal{L}_1(0) + \frac{\beta_0}{2} \int_0^t E(s) \, ds \leq 0,$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_0}{2} \int_0^t E(s) \, ds \leq \mathcal{L}_1(0) - \mathcal{L}_1(t).$$

Por outro lado, é simples verificar que existe uma constante η_1 tal que

$$\mathcal{L}_1(0) - \mathcal{L}_1(t) \leq \eta_1 E_2(0), \ \forall t \geq 0$$

e assim

$$\int_0^t E(s) \, ds \leq 2 \frac{\eta_1}{\beta_0} E_2(0), \ \forall t \geq 0.$$

Note que

$$\frac{d}{dt}\big[tE(t)\big] \;=\; E(t) + t\frac{d}{dt}E(t) \;\leq\; E(t), \;\; \forall t \geq 0.$$

Integrando em $(0,t)$, teremos

$$tE(t) \;\leq\; \int_0^t E(s)\,ds \;\leq\; 2\frac{\eta_1}{\beta_0}E_2(0), \;\; \forall t \geq 0.$$

Tomando $C := 2\eta_1/\beta_0$, concluímos que

$$E(t) \;\leq\; \frac{C}{t}E_2(0), \;\; \forall t \geq 0.$$

$\square$

3.4 Estabilidade do Sistema sem o Segundo Espectro: Método da Energia

Nesta seção utilizaremos novamente o Método da Energia para analisar questões relacionadas à estabilidade exponencial da energia do sistema de Timoshenko-Ehrenfest com a condição de equilíbrio dinâmico proposta por Elishakoff (ELISHAKOFF, 2010), com a presença de mecanismo dissipativo na equação de rotação. O sistema a ser estudado é dado por:

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x + \alpha y \;=\; 0, \quad \text{in} \quad (0,L)\times\mathbb{R}_+ \tag{3.75}$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) + \mu\psi_t \;=\; 0, \quad \text{in} \quad (0,L)\times\mathbb{R}_+ \tag{3.76}$$

com as condições iniciais

$$y(x,0) = y_0(x),\;\; y_t(x,0) = y_1(x),\;\; \psi(x,0) = \psi_0(x), \tag{3.77}$$

e condições de contorno Dirichlet-Neumann

$$y(0,t) = y(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.78}$$

Sob essas condições, podemos definir o funcional energia associado por:

$$\begin{aligned}E(t) \quad &:= \quad \frac{1}{2}\Big(\rho_1 + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\Big)\int_0^L |y_t|^2 dx + \frac{\rho_1\rho_2}{2\kappa}\int_0^L |y_{tt}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^L |y_{xt}|^2 dx \\ &+ \quad \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x + \psi|^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |y|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.79}$$

A seguir apresentaremos os lemas técnicos que ajudarão estabelecer o principal resultado desta seção.

Lema 3.4.1. A energia $E(t)$ do problema (3.75)-(3.78) satisfaz a seguinte lei de dissipação:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\mu\int_0^L |\psi_t|^2 dx, t \geq 0. \tag{3.80}$$

Prova. Multiplicando as equações (3.75) e (3.76) por y_t e ψ_t, respectivamente, integrando o sobre $(0, L)$ e usando as condições de contorno (3.78), obtemos

$$\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |y_t|^2 dx + \kappa\int_0^L (y_x + \psi)y_{tx} dx + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |y|^2 \quad = \quad 0, \tag{3.81}$$

$$\rho_2\int_0^L y_{tt}\psi_{tx} dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa\int_0^L (y_x + \psi)\psi_t dx \quad = \quad -\mu\int_0^L |\psi_t|^2 dx. \tag{3.82}$$

Da equação (3.75) surge a identidade $\psi_{xt} = \dfrac{\rho_1}{\kappa}y_{ttt} - y_{xxt} + \dfrac{\alpha}{\kappa}y_t$ de onde obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\rho_1\rho_2}{2\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L |y_{tt}|^2 dx + \frac{\alpha\rho_2}{2\kappa}\frac{d}{dt}\int_0^L |y_t|^2 + \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |y_{xt}|^2 dx \\ &\qquad + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa\int_0^L (y_x + \psi)\psi_t dx \quad = \quad -\,\mu\int_0^L |\psi_t|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.83}$$

Somando (3.81) e (3.83) obtemos o resultado desejado. □

A seguir, definimos o funcional

$$G_1(t) := -\rho_1 \int_0^L y_t y dx. \tag{3.84}$$

Lema 3.4.2. Seja (y, ψ) a solução do problema (3.75)-(3.78). Então, para todo $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{d}{dt}G_1(t) \leq -\rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx + 2\varepsilon c_p \kappa \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + C(\varepsilon) \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx + \alpha \int_0^L |y|^2 dx,$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Prova. Multiplicando a equação (3.75) por y, integrando sobre $(0, L)$, usando integração por partes e levando em conta as condições de fronteira (3.78), teremos

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y \, dx + \kappa \int_0^L (y_x + \psi) y_x \, dx + \alpha \int_0^L |y|^2 dx = 0. \tag{3.85}$$

Tomando a identidade $y_{tt} y = \dfrac{d}{dt}(y_t y) - |y_t|^2$ e a desigualdade de Young chegamos a

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left(\rho_1 \int_0^L y_t y \, dx\right) \quad \leq \quad & - \rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx + \frac{\kappa}{4\varepsilon} \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx \\ & + \varepsilon\kappa \int_0^L |y_x|^2 \, dx + \alpha \int_0^L |y|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Além disso, consideremos a desigualdade dada por

$$\int_0^L |y_x|^2 dx \leq 2 \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx + 2c_p \int_0^L |\psi_x|^2 dx, \tag{3.87}$$

a fim de reescrever a desigualdade (3.86) como

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\left(\rho_1\int_0^L y_t y\,dx\right) \;&\leq\; -\rho_1\int_0^L |y_t|^2dx + 2\varepsilon c_p\kappa\int_0^L |\psi_x|^2\,dx\\ &\quad + C(\varepsilon)\int_0^L |y_x+\psi|^2dx + \alpha\int_0^L |y|^2dx,\end{aligned}$$

com $C(\varepsilon)=\kappa/4\varepsilon+2\kappa\varepsilon$. □

Para o próximo lema, introduzimos o funcional

$$G_2(t) := \rho_2\int_0^L y_{xt}y_x\,dx + \frac{\mu}{2}\int_0^L |\psi|^2dx + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\int_0^L y_t y\,dx. \tag{3.88}$$

Lema 3.4.3. Seja (y,ψ) solução do problema (3.75)-(3.78). Então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G_2(t) \leq -\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\int_0^L |y_{tt}|^2dx - \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2dx + \left(1+\frac{\alpha c_p}{\kappa}\right)\rho_2\int_0^L |y_{tx}|^2dx\\ + \frac{\kappa^2 c_p}{2b}\int_0^L |y_x+\psi|^2\,dx,\end{aligned}$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Prova. Multiplicando a equação (3.76) por ψ e integrando por partes, teremos

$$\rho_2\int_0^L y_{tt}\psi_x dx + b\int_0^L |\psi_x|^2dx + \kappa\int_0^L (y_x+\psi)\psi\,dx + \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\int_0^L |\psi|^2dx\right) = 0. \tag{3.89}$$

Segue-se da equação (3.75) que $\psi_x = \dfrac{\rho_1}{\kappa}y_{tt} - y_{xx} + \dfrac{\alpha}{\kappa}y$. Então, substituindo ψ_x no primeiro termo de (3.89) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\rho_2\int_0^L y_{xt}y_x\,dx+\frac{\mu}{2}\int_0^L|\psi|^2dx+\frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\int_0^L y_ty\,dx\right)-\rho_2\int_0^L|y_{tx}|^2\,dx\\ &+\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\int_0^L|y_{tt}|^2dx+b\int_0^L|\psi_x|^2\,dx+\kappa\int_0^L(y_x+\psi)\psi\,dx-\frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\int_0^L|y_t|^2\,dx \;=\; 0, \end{aligned}$$

e usando as desigualdades de Young, para $\varepsilon=b/2c_{p_2}$, e de Poincaré chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\rho_2\int_0^L y_{xt}y_x\,dx+\frac{\mu}{2}\int_0^L|\psi|^2dx+\frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\int_0^L y_ty\,dx\right) \;\le\; &-\frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\int_0^L|y_{tt}|^2dx-\frac{b}{2}\int_0^L|\psi_x|^2dx\\ &+\left(1+\frac{\alpha c_{p_1}}{\kappa}\right)\rho_2\int_0^L|y_{tx}|^2\,dx+\frac{\kappa^2c_{p_2}}{2b}\int_0^L|y_x+\psi|^2\,dx. \end{aligned}$$

concluindo a prova. $\square$

Introduzimos mais um funcional dado por

$$G_3(t):=-\rho_2\int_0^L y_{tx}(y_x+\psi)\,dx-\frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L y_{xt}\psi\,dx+\frac{\alpha b\rho_1}{\kappa^2}\int_0^L y_tydx. \tag{3.90}$$

Lema 3.4.4. Seja (y,ψ) solução do sistema (3.75)-(3.78). Então, existe uma constante positiva C_1 tal que

$$\frac{d}{dt}G_3(t)\;\le\;-C_\alpha\frac{\rho_2}{2}\int_0^L|y_{tx}|^2dx-\frac{\kappa}{2}\int_0^L|y_x+\psi|^2dx-\frac{\alpha^2b}{\kappa^2}\int_0^L|y|^2dx+C_1\int_0^L|\psi_t|^2dx,$$

com $\alpha<\rho_2\kappa^2/2b\rho_1c_p$ e $C_\alpha=1-2\alpha b\rho_1c_p/\kappa^2\rho_2>0$.

Prova. Multiplicando a equação (3.76) by $(y_x+\psi)$, integrando sobre $(0,L)$ e usando integrando por partes, temos

$$-\rho_2\int_0^L y_{ttx}(y_x+\psi)\,dx+b\int_0^L\psi_x(y_x+\psi)_x\,dx+\kappa\int_0^L|y_x+\psi|^2dx+\mu\int_0^L\psi_t(y_x+\psi)\,dx=0.$$

Agora, usando a desigualdade de Young, segue-se que

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx}(y_x+\psi)\,dx + b\int_0^L \psi_x(y_x+\psi)_x\,dx \leq -\frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx + \frac{\mu^2}{2\kappa}\int_0^L |\psi_t|^2dx.$$

Por outro lado, segue da equação (3.75) que $(y_x+\psi)_x = \frac{\rho_1}{\kappa}y_{tt} + \frac{\alpha}{\kappa}y$ e então podemos reescrever a desigualdade a cima como

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx}(y_x+\psi)\,dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L y_{tt}\psi_x\,dx + \frac{\alpha b}{\kappa}\int_0^L y\psi_x dx \leq -\frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx + \frac{\mu^2}{2\kappa}\int_0^L |\psi_t|^2dx.$$

Além disso, considere a identidade dada por $y_{ttx}(y_x+\psi) = \frac{d}{dt}[y_{tx}(y_x+\psi)] - y_{tx}(y_x+\psi)_t$ de onde obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\left(\rho_2\int_0^L y_{tx}(y_x+\psi)\,dx\right) \leq& -\rho_2\int_0^L |y_{tx}|^2dx - \rho_2\int_0^L y_{tx}\psi_t\,dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L y_{ttx}\psi\,dx\\ &-\frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx - \frac{\alpha b}{\kappa}\int_0^L y\psi_x dx + \frac{\mu^2}{2\kappa}\int_0^L |\psi_t|^2dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a identidade $y_{ttx}\psi = \frac{d}{dt}(y_{tx}\psi) - y_{tx}\psi_t$ temos

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}\left(\rho_2\int_0^L y_{tx}(y_x+\psi)\,dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L y_{xt}\psi\,dx\right) \leq& -\rho_2\int_0^L |y_{tx}|^2dx - b\left(\frac{\rho_1}{\kappa}+\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^L y_{tx}\psi_t\,dx\\ &-\frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2dx - \frac{\alpha b}{\kappa}\int_0^L y\psi_x\,dx + \frac{\mu^2}{2\kappa}\int_0^L |\psi_t|^2dx\end{aligned}$$

e usando novamente a desigualdade de Young e a identidade $\psi_x = \frac{\rho_1}{\kappa}y_{tt} - y_{xx} + \frac{\alpha}{\kappa}y$ chegamos a

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(\rho_2\int_0^L y_{tx}(y_x+\psi)\,dx + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L y_{xt}\psi\,dx - \frac{\alpha b\rho_1}{\kappa^2}\int_0^L y_t y\right) \;\le\; & -\frac{\rho_2}{2}\int_0^L |y_{tx}|^2 dx \\
& -\frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2 dx + \frac{\alpha b\rho_1}{\kappa^2}\int_0^L |y_t|^2 dx - \frac{\alpha^2 b}{\kappa^2}\int_0^L |y|^2 dx + C_1\int_0^L |\psi_t|^2 dx,
\end{aligned}
$$

onde $C_1 = b^2\Big(\frac{\rho_1}{\kappa}+\frac{\rho_2}{b}\Big)^2\Big/2\rho_2 + \mu^2/2\kappa$. Usando a desigualdade de Poincaré obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_3(t) \;\le\; & -\left(1-\frac{2\alpha b\rho_1}{\kappa^2\rho_2}c_p\right)\frac{\rho_2}{2}\int_0^L |y_{tx}|^2 dx \;-\; \frac{\kappa}{2}\int_0^L |y_x+\psi|^2 dx \\
& -\frac{\alpha^2 b}{\kappa^2}\int_0^L |y|^2 dx + C_1\int_0^L |\psi_t|^2 dx,
\end{aligned}
$$

com $\alpha < \rho_2\kappa^2/2b\rho_1 c_p$. Portanto, finalizamos a prova do lema. □

Agora estamos em posição de provar o Teorema principal deste capítulo. Para esse fim, definimos o funcional de Lyapunov $\mathcal{L}$ como segue:

$$\mathcal{L}(t) := N_0E(t) + G_1(t) + N_2G_3(t) + N_3G_3(t), \tag{3.91}$$

onde $N_0,\ N_2$ e N_3 são constantes positivas a serem estimadas posteriormente e os funcionais G_1, G_2, e G_3 foram dados nos lemas 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4, respectivamente. Nessa condições, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 3.7. A energia $E(t)$ do problema (3.75)-(3.78) com $\alpha < \rho_2\kappa^2/2b\rho_1 c_p$ onde c_p é a constante de Poincaré, decai exponencialmente com o tempo t tendendo para o infinito. Ou seja, existem constantes positivas M e η independentes dos dados iniciais e de t tal que

$$E(t) \le Me^{-\eta t},\ \forall t \ge 0. \tag{3.92}$$

Prova. Derivando o funcional (3.91) e considerando os resultados dos lemas (3.4.2)-(3.4.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \quad \leq & \quad -\rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx - N_2 \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa} \int_0^L |y_{tt}|^2 dx \\
- & \quad \Big[C_\alpha N_3 - 2\Big(1 + \frac{\alpha c_p}{\kappa}\Big) N_2\Big] \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |y_{xt}|^2 dx - \left(N_2 - \frac{4\varepsilon c_p \kappa}{b}\right) \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
- & \quad \left(\frac{N_3}{2} - \frac{2C(\varepsilon)}{\kappa} - \frac{\kappa c_p}{b} N_2\right) \frac{\kappa}{2} \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx \\
- & \quad \left(\frac{2\alpha b}{\kappa^2} N_3 - 2\right) \frac{\alpha}{2} \int_0^L |y|^2 dx \\
- & \quad \Big(\mu N_0 - C_1 N_3\Big) \int_0^L |\psi_t|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Agora, cuidadosamente iremos selecionar as constantes. Primeiramente, escolhemos apropriadamente

$$
\varepsilon = \frac{b}{4\kappa c_p}
$$

para obter

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \quad \leq & \quad -\rho_1 \int_0^L |y_t|^2 dx - N_2 \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa} \int_0^L |y_{tt}|^2 dx \\
- & \quad \Big[C_\alpha N_3 - 2\Big(1 + \frac{\alpha c_p}{\kappa}\Big) N_2\Big] \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |y_{xt}|^2 dx - (N_2 - 1) \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
- & \quad \left(\frac{N_3}{2} - \frac{2C(\varepsilon)}{\kappa} - \frac{\kappa c_p}{b} N_2\right) \frac{\kappa}{2} \int_0^L |y_x + \psi|^2 dx \\
- & \quad \left(\frac{2\alpha b}{\kappa^2} N_3 - 2\right) \frac{\alpha}{2} \int_0^L |y|^2 dx - \Big(\mu N_0 - C_1 N_3\Big) \int_0^L |\psi_t|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Agora, escolhemos $N_2 > 1$ e N_3 grande o suficiente tal que

$$N_3 > \max\left\{2\Big(1+\frac{\alpha c_p}{\kappa}\Big)C_\alpha^{-1}N_2,\ \ 4\frac{C(\varepsilon)}{\kappa}+2\frac{\kappa c_p}{b}N_2,\ \frac{\kappa^2}{\alpha b}\right\},$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} C_\alpha N_3 - 2\Big(1+\frac{\alpha c_p}{\kappa}\Big)N_2 > 0,\\ \frac{N_3}{2}-\frac{2C_\varepsilon}{\kappa}-\frac{\kappa c_p}{b}N_2 > 0,\\ \frac{2\alpha b}{\kappa^2}N_3 - 2 > 0. \end{aligned}$$

Finalmente, escolhendo N_0 suficientemente grande tal que $N_0 > \dfrac{C_1}{\mu}N_3$, podemos concluir que existe uma constante positiva $C_0 > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_0E(t), \forall t \geq 0, \tag{3.94}$$

onde $E(t)$ é dado em (3.79). Além disso, não há dificuldade me ver que $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ são equivalentes. De fato, segue da definição de $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ que

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{L}(t)-N_0E(t)|}{\max\limits_{i=2,3}\{1,N_i\}} \leq\ & \rho_1\int_0^L |y_ty|dx + \rho_1\int_0^L |y_ty|\,dx + \frac{\mu}{2}\int_0^L |\psi|^2dx + \rho_2\int_0^L |y_{xt}y_x|\,dx \\ & + \frac{\mu}{2}\int_0^L |\psi|^2dx + \frac{\alpha\rho_2}{\kappa}\int_0^L |y_ty|dx + \rho_2\int_0^L |y_{tx}(y_x+\psi)|\,dx \\ & + \frac{b\rho_1}{\kappa}\int_0^L |y_{xt}\psi|\,dx + \frac{\alpha b\rho_1}{\kappa^2}\int_0^L |y_ty|dx, \end{aligned}$$

e da das desigualdade de Young e Poincaré que existe uma constante positiva c tal que

$$|\mathcal{L}(t)-N_0E(t)| \leq cE(t), \forall t \geq 0. \tag{3.95}$$

Consequentemente,

$$(N_0-c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N_0+c)E(t), \forall t \geq 0, \tag{3.96}$$

e escolhendo N_0 suficientemente grande, isto é, $N_0 > \max\left\{c, \dfrac{C_1}{\mu}N_3\right\}$, temos a equivalência. Finalmente, usando o fato de que $\mathcal{L}(t)$ é equivalente a $E(t)$ para $N_0 > 0$ grande o suficiente, teremos

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\eta E(t), \quad \forall t \geq 0,$$

para a constante positiva $\eta = C_0/K_1$, onde $K_1 = N_0 - c$. Assim, integrando a desigualdade acima sobre $(0, t)$, chegamos a

$$E(t) \leq Me^{-\eta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, obtemos o resultado desejado como consequência da equivalência entre $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$.

$\square$

CAPÍTULO 4

Estabilidade Exponencial para o Sistema de Timoshenko-Ehrenfest: Critério de Routh-Hurwitz

Neste capítulo, a fim de estabelecer os resultados de estabilidade exponencial dos sistemas do de Timoshenko-Ehrenfest estudados nas seções 3.2 e 3.4, aplicaremos a técnica conhecida como Critério de Routh-Hurwitz, utilizada por Quintanilla em (QUINTANILLA, 2003) para mostrar o decaimento lento das soluções de um sistema elástico poroso e mais recentemente utilizada por Almeida e Ramos em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017) para o sistema de Timoshenko, onde os autores mostram a existência de uma relação particular entre os coeficientes do sistema. Esse critério baseia-se no seguinte teorema:

Teorema 4.1. (Teorema de Hurwitz) A condição necessária e suficiente para os zeros do polinômio com coeficientes reais

$$f(x) \quad = \quad a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0 > 0$, ter toda a sua parte real negativa, é que os determinantes

$$\Lambda_1 = a_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3, \cdots, \Lambda_n$$

sejam todos positivos. Para $\lambda > 1$

$$\Lambda_\lambda \;=\; \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2\lambda-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2\lambda-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & a_{2\lambda-1} \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdots & a_\lambda \end{vmatrix}, \quad a_k = 0, \quad \text{se} \quad k > n.$$

O teorema a cima pode ser consultado em (DIEUDONNÉ, 1938).

4.1 Sistema de Timoshenko-Ehrenfest com o Segundo Espectro

Nesta seção, vamos considerar o sistema (3.1)-(3.4). Para ϵ suficientemente pequeno, existe uma solução do sistema (3.1)-(3.2), na forma harmônica, dada pelas funções

$$y(x,t) = A_1 e^{\omega t}\sin(nx) \quad \text{e} \quad \psi(x,t) = A_2 e^{\omega t}\cos(nx), \tag{4.1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Mostraremos o decaimento exponencial do sistema acima utilizando o critério de Routh-Hurwitz, segundo o teorema abaixo.

Teorema 4.2. Suponha que ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno e $b/\rho_1 = \kappa/\rho_1$. Então, as soluções do sistema (3.1) - (3.2) da forma (4.1) ficam à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso implica na estabilidade exponencial das soluções. Caso contrário, se $b/\rho_2 \neq \kappa/\rho_1$, existe uma solução do sistema (3.1) - (3.2) que fica à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso não implica a estabilidade exponencial das soluções.

Prova. Desacoplando o sistema através da eliminação da rotação ψ da seção transversal, nos fornece uma equação diferencial de quarta ordem tanto no espaço quanto no tempo, dada por

$$\begin{aligned} \rho_2\rho_1 y_{tttt} + \rho_1\mu y_{ttt} - (b\rho_1 + \kappa\rho_2)\, y_{xxtt} + (\kappa\rho_1 + \alpha\rho_2)\, y_{tt} - \kappa\mu y_{txx} & \\ + \alpha\mu y_t + \kappa b y_{xxxx} - \alpha b y_{xx} + \kappa\alpha y \;&=\; 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Substituindo y na equação acima, obtemos a seguinte equação de frequência

$$\rho_2\rho_1\omega^4+\rho_1\mu\omega^3+[(b\rho_1+\kappa\rho_2)\,n^2+\kappa\rho_1+\alpha\rho_2]\omega^2+(\kappa\mu n^2+\alpha\mu)\omega+\kappa bn^4+\alpha bn^2+\kappa\alpha \;=\; 0.$$

Seguindo os mesmos argumentos usados por (QUINTANILLA, 2003) podemos reescrever a equação anterior como uma equação algébrica, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\rho_2\rho_1x^4+\rho_1\mu x^3+[(b\rho_1+\kappa\rho_2)\,n^2+\kappa\rho_1+\alpha\rho_2]x^2+(\kappa\mu n^2+\alpha\mu)x&\\ +\,\kappa bn^4+\alpha bn^2+\kappa\alpha \;&=\; 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Podemos encontrar soluções de (4.3) que estão à esquerda da linha $Re(z)=-\epsilon$, bem como à direita da linha $Re(z)=-\epsilon$ desde que $b\rho_1-\kappa\rho_2$ tenda para zero ou não, respectivamente. Portanto, verificaremos o sinal das soluções da equação algébrica

$$\begin{aligned}\rho_2\rho_1(x-\epsilon)^4+\rho_1\mu(x-\epsilon)^3+[(b\rho_1+\kappa\rho_2)\,n^2+\kappa\rho_1+\alpha\rho_2](x-\epsilon)^2&\\ +(\kappa\mu n^2+\alpha\mu)(x-\epsilon)+\kappa bn^4+\alpha bn^2+\kappa\alpha \;&=\; 0.\end{aligned}$$

Expandindo os termos $(x-\epsilon)^i,\ i=1,2,3,4$, obtemos a equação

$$l_4x^4+l_3x^3+l_2x^2+l_1x+l_0 \;=\; 0, \tag{4.4}$$

sendo cada $l_i,\ i=0,1,2,3,4$, dado como segue

$$\begin{aligned}l_4 &= \rho_1\rho_2,\\ l_3 &= \mu\rho_1-4\epsilon\rho_1\rho_2,\\ l_2 &= [(b\rho_1+k\rho_2)n^2+\alpha\rho_2+\kappa\rho_1]+6\rho_1\rho_2\epsilon^2-3\rho_1\mu\epsilon,\\ l_1 &= \kappa\mu n^2+\alpha\mu-4\rho_1\rho_2\epsilon^3+3\rho_1\mu\epsilon^2-2[(b\rho_1+\kappa\rho_2)n^2+\alpha\rho 2+\kappa\rho_1]\epsilon,\\ l_0 &= \kappa bn^4+\alpha bn^2+\kappa\alpha+\rho_1\rho_2\epsilon^4-\mu\rho_1\epsilon^3+[(b\rho_1+\kappa\rho_2)n^2+\alpha\rho_2+\kappa\rho_1]\epsilon^2\\ &\quad-(\kappa\mu n^2+\alpha\mu)\epsilon.\end{aligned}$$

Mostraremos o decaimento exponencial do sistema (3.1)-(3.2) usando o critério de Routh-Hurwitz (QUINTANILLA, 2003).

O critério utiliza o Teorema 4.1 para estabelecer que a condição necessária e suficiente para as soluções de uma equação do tipo (4.4) terem a parte real negativa é que os determinantes

$$\Lambda_0 = l_0, \quad \Lambda_1 = l_1, \quad \Lambda_2 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_0 & l_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_1 & l_3 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

e

$$\Lambda_4 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & 0 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 & 0 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

sejam todos positivos. Em suma, o Teorema 4.1 garante que as soluções estejam à esquerda do eixo $i\mathbb{R}$. Temos então:

$$\Lambda_2 \;=\; d_4 n^4 + d_2 n^2 + d_0,$$

onde

$$\begin{aligned}
d_4 &= -2(b^2\rho_1^2 + \kappa^2\rho_2^2)\epsilon + \kappa^2\mu\rho_2, \\
d_2 &= -12(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\rho_1\rho_2\epsilon^3 + 2(4b\rho_1 + 5\kappa\rho_2)\mu\rho_1\epsilon^2 - 2(2\alpha\rho_2^2 + 2b\rho_1^2 + 2\kappa\rho_1\rho_2 + \mu^2\rho_1)\kappa\epsilon \\
&\quad + 2\alpha\kappa\mu\rho_2 + \kappa^2\mu\rho_1, \\
d_0 &= -20\rho_1^2\rho_2^2\epsilon^5 + 25\mu\rho_1^2\rho_2\epsilon^4 - 4(3\alpha\rho_1\rho_2^2 + 3\kappa\rho_1^2\rho_2 + 2\mu^2\rho_1^2)\epsilon^3 + 2(5\alpha\rho_2 + 4\kappa\rho_1)\mu\rho_1\epsilon^2 \\
&\quad -2(\alpha^2\rho_2^2 + \alpha\mu^2\rho_1 + \kappa^2\rho_1^2)\epsilon + \alpha^2\mu\rho_2.
\end{aligned}$$

Note que o termo dominante de Λ_2 é dado por $d_4 n^4$ e pode ser reescrito na forma

$$d_4 n^4 = \left(\kappa^2\mu\rho_2\right) n^4 - d_4'(\epsilon, n^4).$$

Então, para n suficientemente grande, podemos achar um ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $\Lambda_2 > 0$. O mesmo argumento se aplica para mostrar que $\Lambda_0 > 0$ e $\Lambda_1 > 0$.

É fácil ver que $\Lambda_4 = l_4\Lambda_3$. Logo, basta que analisemos o sinal apenas de Λ_3. Assim,

$$\Lambda_3 \;=\; r_4 n^4 + r_2 n^2 + r_0 \tag{4.7}$$

onde,

$$
\begin{aligned}
r_4 &= 4\rho_1\rho_2(b\rho_1-\kappa\rho_2)^2\epsilon^2 - 2\rho_1\mu(b\rho_1-\kappa\rho_2)^2\epsilon,\\
r_2 &= 32\rho_1^2\rho_2^2(b\rho_1+\kappa\rho_2)\epsilon^4 - 32\rho_1^2\rho_2\mu(b\rho_1+\kappa\rho_2)\epsilon^3\\
&\quad + 4\rho_1[-2\alpha\rho_2^2(b\rho_1-\kappa\rho_2) + 2\kappa\rho_1\rho_2(b\rho_1+\kappa\rho_2) + \rho_1\mu^2(2b\rho_1+3\kappa\rho_2)]\epsilon^2\\
&\quad + \rho_1[4\alpha\mu\rho_2(b\rho_1-\kappa\rho_2) - 2\kappa\mu\rho_1(2b\rho_1+2\kappa\rho_2+\mu^2)]\epsilon + \kappa^2\mu^2\rho_1^2,\\
r_0 &= 64\rho_1^3\rho_2^3\epsilon^6 - 96\mu\rho_1^3\rho_2^2\epsilon^5 + 16\rho_1^2\rho_2(2\alpha\rho_2^2 + 2\kappa\rho_1\rho_2 + 3\mu^2\rho_1)\epsilon^4\\
&\quad - 8\rho_1\mu(4\alpha\rho_2^2 + 4\kappa\rho_1\rho_2 + \mu^2\rho_1)\epsilon^3 + 4\rho_1[\rho_2(\alpha\rho_2-\kappa\rho_1)^2 + \rho_1\mu^2(3\alpha\rho_2+2\kappa\rho_1)]\epsilon^2\\
&\quad - 2\rho_1\mu[\alpha\rho_2(\alpha\rho_2-2\kappa\rho_1) + \rho_1(\alpha\mu^2+\kappa^2\rho_1)]\epsilon.
\end{aligned}
$$

Note que o termo r_4 é o único que depende inteiramente da diferença $b\rho_1-\kappa\rho_2$. Se $b/\rho_2 - \kappa/\rho_1 \neq 0$, r_4 será o termo dominante de Λ_3 e, nesse contexto, podemos achar um ϵ suficientemente pequeno tal que $2\rho_2\epsilon < \mu$ (com μ suficientemente grande) e assim teremos $r_4 n^4 < 0$. Por conseguinte, podemos dizer que existe uma solução do problema que está à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e como consequência, não podemos obter o decaimento exponencial uniforme de soluções.

No entanto, se $b/\rho_2 - \kappa/\rho_1 = 0$ teremos $r_4 = 0$. Isto implica que Λ_3 será de grau 2 em n e o termo dominante passa ser $r_2 n^2$ onde

$$r_2 n^2 = \kappa^2\mu^2\rho_1 n^2 + r_2'(\epsilon^4, \epsilon^3, \epsilon^2, \epsilon, n^2).$$

Assim podemos achar um ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $r_2 n^2 > 0$ e, como consequência, $\Lambda_3 > 0$. Portanto, para um ϵ suficientemente pequeno, um n suficientemente grande e considerando $b/\rho_2 = \kappa/\rho_1$ obtemos $\Lambda_i > 0, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, de onde podemos concluir o decaimento exponencial de soluções. $\square$

Na seção a seguir, analisaremos o decaimento exponencial de soluções utilizando o mesmo método empregado acima seguindo os mesmos passos.

4.2 Sistema de Timoshenko-Ehrenfest sem o Segundo Espectro

Considere o sistema de Timoshenko-Ehrenfest com o equilíbrio dinâmico proposto por Elishakoff (ELISHAKOFF, 2010),

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi)_x + \alpha y &= 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+ &(4.8)\\ -\rho_2 y_{xtt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi) + \mu\psi_t &= 0, \quad \text{em} \quad (0, L) \times \mathbb{R}_+. &(4.9)\end{aligned}$$

com as condições iniciais

$$y(x, 0) = y_0(x),\ y_t(x, 0) = y_1(x),\ \psi(x, 0) = \psi_0(x),\ \psi_t(x, 0) = \psi_1(x), \tag{4.10}$$

e as condições de contorno de Dirichlet-Neumann

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{4.11}$$

Para mostrarmos o decaimento exponencial do sistema acima, repetiremos os argumentos utilizados na seção anterior.

Teorema 4.3. Suponha que ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno e que exista

$$\mu_0 = 2\epsilon \frac{(b\rho_1 + \kappa\rho_2)^2}{\kappa^2 \rho_2}.$$

Então: $i)$ Se $\mu_0 < \mu$ as soluções do sistema (4.8) - (4.9) na forma (4.1) ficam à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso implica na estabilidade exponencial das soluções. $ii)$ Se $\mu < \mu_0$ as soluções do sistema (4.8) - (4.9) na forma (4.1) ficam à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso não implica em estabilidade exponencial das soluções. além disso, ambos os casos são independentes da igualdade entre as velocidades de propagação de ondas $V_1^2 = \kappa/\rho_1$ e $V_2^2 = b/\rho_2$.

Prova. Desacoplando o sistema (4.8)-(4.9) e procedendo como anteriormente, obtemos a seguinte equação de frequência

$$\rho_1 \mu \omega^3 + [(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\, n^2 + \kappa\rho_1]\omega^2 + (\kappa\mu n^2 + \alpha\mu)\omega + \kappa b n^4 + \alpha b n^2 + \kappa\alpha = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\rho_1\mu x^3 + [(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\, n^2 + \kappa\rho_1]x^2 + (\kappa\mu n^2 + \alpha\mu)x + \kappa b n^4 + \alpha b n^2 + \kappa\alpha = 0. \qquad (4.12)$$

Podemos encontrar soluções de (4.12) que estão à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$, bem como à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$. Portanto, verificaremos o sinal das soluções da equação algébrica

$$\rho_1\mu(x-\epsilon)^3 + [(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\, n^2 + \kappa\rho_1](x-\epsilon)^2 + (\kappa\mu n^2 + \alpha\mu)(x-\epsilon) + \kappa b n^2 + \alpha b n^2 + \kappa\alpha = 0,$$

donde obtemos a equação

$$l_3x^3 + l_2x^2 + l_1x + l_0 \;=\; 0, \qquad (4.13)$$

sendo cada l_i, $i = 0, 1, 2, 3$, dado a seguir:

$$\begin{aligned}
l_3 &= \mu\rho_1,\\
l_2 &= [(b\rho_1 + k\rho_2)n^2 + \kappa\rho_1] - 3\rho_1\mu\epsilon,\\
l_1 &= \kappa\mu n^2 + \alpha\mu + 3\rho_1\mu\epsilon^2 - 2[(b\rho_1 + \kappa\rho_2)n^2 + \kappa\rho_1]\epsilon,\\
l_0 &= \kappa b n^4 + \alpha b n^2 + \kappa\alpha - \mu\rho_1\epsilon^3 + [(b\rho_1 + \kappa\rho_2)n^2 + \kappa\rho_1]\epsilon^2 - (\kappa\mu n^2 + \alpha\mu)\epsilon.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o critério de Routh-Hurwitz, temos que mostrar que a condição (4.5) (com $l_4 = 0$) é satisfeita, considerando os coeficientes acima. Observe que, para $l_4 = 0$ temos $\Lambda_3 = \Lambda_2 l_3$, logo basta analisar o sinal de Λ_2. Portanto, para ϵ suficientemente pequeno e n suficientemente grande, é fácil ver que $\Lambda_0 = l_0 > 0$ e $\Lambda_1 = l_1 > 0$. Nas mesmas condições, teremos

$$\Lambda_2 \;=\; l_1l_2 - l_0l_3 \;=\; a_4n^4 + a_2n^2 + a_0 \;>\; 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\,2(b\rho_1 + \kappa\rho_2)^2\epsilon + \kappa^2\mu\rho_2, && (4.14)\\
a_2 &= 8(b\rho_1 + \kappa\rho_2)\mu\rho_1\epsilon^2 - 2(2b\rho_1 + 2\kappa\rho_2 + \mu^2)\rho_1\kappa\epsilon + (\alpha\rho_2 + \kappa\rho_1)\kappa\mu, && (4.15)\\
a_0 &= -8\mu^2\rho_1^2\epsilon^3 + 8\kappa\mu\rho_1^2\epsilon^2 - 2\alpha\mu^2\rho_1\epsilon - 2\kappa^2\rho_1^2. && (4.16)
\end{aligned}$$

Note que os coeficientes acima são independentes da diferença "$b/\rho_1 - \kappa/\rho_2$" e o termo dominante de Λ_2 pode ser reescrito na forma

$$a_4 n^4 = \left(\kappa^2 \mu \rho_2\right) n^4 - a_4'(\epsilon, n^4).$$

Então, podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $a_4 n^4 > 0$ e o polinômio Λ_2 seja positivo. Portanto, teremos $\Lambda_i > 0, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, e isso mostra que o sistema (4.8)-(4.9) possui soluções que estão à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$, de onde podemos concluir a estabilidade exponencial do sistema.

No entanto, há uma constatação na análise acima: a independência da igualdade entre as velocidades b/ρ_1 e κ/ρ_2. Esse fato foi observado por Almeida e Ramos em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017) e vemos que o mesmo ocorre para o sistema (4.8)-(4.9). Porém, surge um parâmetro que é determinante para que a estabilidade exponencial ocorra, a saber

$$\mu_0 = 2\epsilon \frac{(b\rho_1 + \kappa\rho_2)^2}{\kappa^2 \rho_2}.$$

Observe que se considerarmos $\mu < \mu_0$, ainda que ϵ seja suficientemente pequeno, teremos $a_4 n^4 < 0$ (para n suficientemente grande) e nessas condições $\Lambda_2 < 0$, o que implica a perda da estabilidade exponencial. Agora, considerando $\mu_0 < \mu$ (para ϵ suficientemente pequeno e n suficientemente grande) obtemos $a_4 n^4 > 0$ e $\Lambda_2 > 0$ e, consequentemente, a estabilidade. Portanto, a existência de estabilidade exponencial para o sistema (4.8)-(4.9) está associada ao parâmetro μ_0 e isso ocorre independentemente da igualdade ente V_1^2 e V_2^2. $\square$

Parte II

Resultados sobre a Viga de Bresse

CAPÍTULO 5

Dispersão para o Sistema de Vigas Curvas

Neste capítulo, investigaremos questões acerca da propagação de ondas de frequências no sistema de equações diferenciais parciais de evolução que modelam vibrações em vigas metálicas curvas, conhecido como Sistema de Bresse e faremos uma análise gráfica comparativa com os resultados de propagação de ondas do sistema clássico de Timoshenko, uma vez que o sistema de Bresse representa uma generalização para o sistema de Timoshenko. Para estabelecer nossos resultados, utilizaremos como solução do sistema as funções harmônicas (5.19). (ALMEIDA D. S.; RIVERA, 2014)

5.1 Análise de Dispersão para o Sistema de Bresse

O modelo dinâmico de vigas curvas regido pelas hipóteses de Bresse, é composto por equações diferenciais sujeitas às seguintes leis:

Equações de Movimento:

$$\begin{aligned}
\rho A y_{tt} &= Q_x + R^{-1}N, &(5.1)\\
\rho I \psi_{tt} &= M_x - Q, &(5.2)\\
\rho A w_{tt} &= N_x - R^{-1}Q. &(5.3)
\end{aligned}$$

Aqui, N denota a força axial, Q é a força cortante e M é o momento da curvatura.
Equações de Tensão-Estiramento $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{k}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon} &= w_x - R^{-1}y, &(5.4)\\
\hat{\gamma} &= y_x + \psi + R^{-1}w, &(5.5)\\
\hat{k} &= \psi_x. &(5.6)
\end{aligned}$$

Equações Elásticas Constitutivas N, Q e M:

$$\begin{aligned}
N &= EA\varepsilon, &(5.7)\\
Q &= \kappa' GA\hat{\gamma}, &(5.8)\\
M &= EI\hat{k}. &(5.9)
\end{aligned}$$

Estes três conjuntos de equações, dão origem ao sistema de equações diferenciais parciais hiperbólicas acopladas dado por

$$\begin{aligned}
\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) &= 0, &(5.10)\\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) &= 0, &(5.11)\\
\rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - ly)_x + \kappa l(y_x + \psi + lw) &= 0, &(5.12)
\end{aligned}$$

onde y é o deslocamento transversal, ψ designa a rotação das seções transversais e w é o deslocamento tangencial, que compõem o deslocamento total da viga curva, sendo $\kappa_0 = EA$. As outras constantes são as mesmas listadas na Tabela 1.1.

A figura a seguir retrata a dinâmica do movimento da seção transversal em uma viga metálica curva.

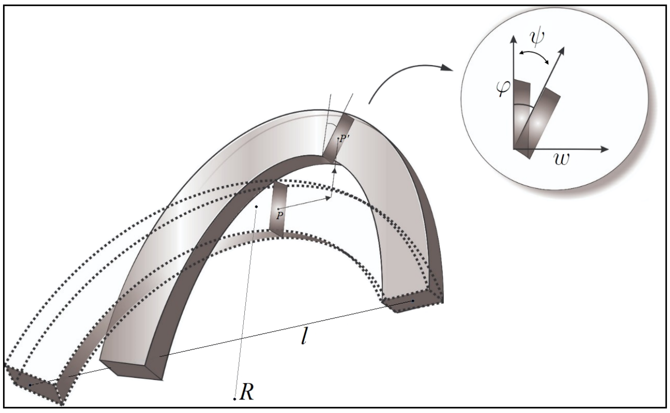

FIGURA 5.1: Arco Circular

Lema 5.1.1. (Equação do 3º grau) Para quaisquer valores de α_2, α_1 e α_0, a equação

$$X^3 + \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 = 0, \tag{5.13}$$

possui soluções dadas por,

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{i}{2}\sqrt{3}(u-v) - \frac{\alpha_2}{3} && (5.14)\\ X_2 &= u + v - \frac{\alpha_2}{3} && (5.15)\\ X_3 &= -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{i}{2}\sqrt{3}(u-v) - \frac{\alpha_2}{3}, && (5.16) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} u &= \left(-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}\right)^{1/3}, && (5.17)\\ v &= \left(-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}\right)^{1/3}, && (5.18) \end{aligned}$$

$p = (3\alpha_1 - \alpha_2^2)/3$ e $q = (2\alpha_2^3 - 9\alpha_2\alpha_1 + 27\alpha_0)/27$. Se $q^2/4 + p^3/27 > 0$, as soluções (5.14)-(5.16) são duas complexas conjugadas e uma real. Se $q^2/4 + p^3/27 = 0$, as soluções (5.14)-(5.16) são todas reais sendo duas iguais. Se $q^2/4 + p^3/27 < 0$, as soluções (5.14)-(5.16) todas reais e distintas.

Prova. Ver (LIMA, 1994). □

O principal resultado deste capítulo esta resumido na seguinte proposição:

Proposição 5.1.1. Tomemos as soluções de ondas harmônicas dos sistema (5.10) - (5.12) dadas por

$$y(\gamma) = A_1 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad \psi(\gamma) = A_2 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad \text{e} \quad w(\gamma) = A_3 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \tag{5.19}$$

onde A_j, $j = 1,\ 2,\ 3$, são as amplitudes, γ é o número de ondas e $\omega = C_j\gamma$ é a frequência. Então as velocidades de dispersão do sistema são

$$\begin{aligned}
C_1(\gamma) &= \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{A^2-3B}\cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right)-\frac{A}{3}}, &(5.20)\\
C_2(\gamma) &= \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{A^2-3B}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)-\frac{A}{3}}, &(5.21)\\
C_3(\gamma) &= \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{A^2-3B}\cos\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right)-\frac{A}{3}}. &(5.22)
\end{aligned}$$

Prova. Tomemos o sistema (5.10) - (5.12) e dividimos as equações por ρ_1, ρ_2 e ρ_1, respectivamente, para obtermos

$$\begin{aligned}
y_{tt} - \frac{\kappa}{\rho_1}y_{xx} - \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x - \frac{\kappa l}{\rho_1}w_x - \frac{\kappa_0 l}{\rho_1}w_x + \frac{\kappa_0 l^2}{\rho_1}y &= 0, &(5.23)\\
\psi_{tt} - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}y_x + \frac{\kappa}{\rho_2}\psi + \frac{\kappa l}{\rho_2}w &= 0, &(5.24)\\
w_{tt} - \frac{\kappa_0}{\rho_1}w_{xx} + \frac{\kappa_0 l}{\rho_1}y_x + \frac{\kappa l}{\rho_1}y_x + \frac{\kappa l}{\rho_1}\psi + \frac{\kappa l^2}{\rho_1}w &= 0. &(5.25)
\end{aligned}$$

Primeiramente, das relações na Tabela 1.1, sendo $\kappa' = 5/6$ e sabendo que $G = E/(2+2\nu) < E$, observamos que

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{\kappa' GA}{\rho A} = \frac{\kappa' E}{\rho\, 2(1+\nu)} < \frac{\kappa' E}{\rho} < \frac{E}{\rho} = \frac{EI}{\rho I} = \frac{b}{\rho_2}, \tag{5.26}$$

lembrando que $\nu \in (0, 1/2)$ é a razão de Poisson, e

$$\frac{\kappa_0}{\rho_1} = \frac{EA}{\rho A} = \frac{E}{\rho} = \frac{EI}{\rho I} = \frac{b}{\rho_2}. \tag{5.27}$$

Note que $b < \kappa$, logo

$$\frac{b}{\rho_2} < \frac{\kappa}{\rho_2}. \tag{5.28}$$

Para simplificar a notação, denominaremos os coeficientes do sistema (5.23) - (5.25) da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} v_1 = \dfrac{\kappa}{\rho_1} & m_1 = \dfrac{\kappa l}{\rho_1} = v_1 l = n_3 & n_1 = \dfrac{\kappa_0 l}{\rho_1} = v_2 l = m_3 \\ s_1 = \dfrac{\kappa_0 l^2}{\rho_1} = v_2 l^2 & v_2 = \dfrac{b}{\rho_2} & m_2 = \dfrac{\kappa}{\rho_2} \\ n_2 = \dfrac{\kappa l}{\rho_2} = m_2 l & v_3 = \dfrac{\kappa_0}{\rho_1} = v_2 & s_3 = \dfrac{\kappa l^2}{\rho_1} = v_1 l^2 \end{array} \tag{5.29}$$

Substituindo as soluções harmônicas (5.19) e suas respectivas derivadas nas equações (5.23), (5.24) e (5.25), teremos

$$(-\omega^2 + v_1\gamma^2 + v_2 l^2)A_1 - iv_1\gamma A_2 - i(v_1+v_2)l\gamma A_3 = 0, \tag{5.30}$$

$$im_2\gamma A_1 + (-\omega^2 + v_2\gamma^2 + m_2)A_2 + m_2 l A_3 = 0, \tag{5.31}$$

$$i(v_1+v_2)l\gamma A_1 + v_1 l A_2 + (-\omega^2 + v_2\gamma^2 + v_1 l^2)A_3 = 0 \tag{5.32}$$

de onde obtemos o seguinte sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + v_1\gamma^2 + v_2 l^2 & -iv_1\gamma & -i(v_1+v_2)l\gamma \\ im_2\gamma & -\omega^2 + v_2\gamma^2 + m_2 & m_2 l \\ i(v_1+v_2)l\gamma & v_1 l & -\omega^2 + v_2\gamma^2 + v_1 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

que possui soluções não-triviais dadas pela equação

$$\begin{aligned} &\omega^6 - \left[(v_1+2v_2)\gamma^2 + m_2 + (v_1+v_2)l^2\right]\omega^4 \\ &+ \left[(2v_1v_2 + v_2^2)\gamma^4 + (v_2m_2 + v_2^2 l^2 - v_1v_2 l^2)\gamma^2 + m_2v_2l^2 + v_1v_2l^4\right]\omega^2 \\ &- v_1v_2^2\gamma^6 + 2v_1v_2^2l^2\gamma^4 - v_1v_2^2l^4\gamma^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Podemos escrever a equação (5.34) na forma

$$\omega^6 + A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0, \tag{5.35}$$

onde

$$
\begin{aligned}
A &= -\left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1}+2\frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^2+\frac{\kappa}{\rho_2}+\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)l^2\right], && (5.36)\\
B &= \frac{b}{\rho_2}\left(2\frac{\kappa}{\rho_1}+\frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^4+\frac{b}{\rho_2}\left[\frac{\kappa}{\rho_2}+\left(\frac{b}{\rho_2}-\frac{\kappa}{\rho_1}\right)l^2\right]\gamma^2+\frac{b}{\rho_2}\left(\frac{\kappa}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}l^2\right)l^2, && (5.37)\\
C &= -\frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^2\left(\gamma^2-l^2\right)^2\gamma^2, && (5.38)
\end{aligned}
$$

por (5.29). Tomando $X=\omega^2$, resulta na equação de terceiro grau

$$X^3+AX^2+BX+C=0, \qquad (5.39)$$

cujas soluções, pelo Lema 5.1.1, são dadas por

$$
\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{1}{2}(u+v)+\frac{i}{2}\sqrt{3}(u-v)-\frac{A}{3}, && (5.40)\\
X_2 &= u+v-\frac{A}{3}, && (5.41)\\
X_3 &= -\frac{1}{2}(u+v)-\frac{i}{2}\sqrt{3}(u-v)-\frac{A}{3}, && (5.42)
\end{aligned}
$$

onde $u=\left(-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}\right)^{1/3}$ e $v=\left(-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}\right)^{1/3}$ com $p=\dfrac{3B-A^2}{3}$ e $q=\dfrac{2A^3-9AB+27C}{27}$.

Agora vamos verificar o sinal do discriminante

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}. \qquad (5.43)$$

Expandindo o segundo membro da equação (5.43) e usando as notações (5.29), obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{A^3C}{27}-\frac{A^2B^2}{108}-\frac{ABC}{6}+\frac{C^2}{4}+\frac{B^3}{27}\\
&= -\frac{v_2^2}{108}\left(f_1\gamma^8+f_2\gamma^6+f_3\gamma^4+f_4\gamma^2+f_5\right),
\end{aligned}
$$

com

$$\begin{aligned}
f_1 &= (v_1-v_2)^2\left[9l^4v_1^2+6l^4v_1v_2+l^4v_2^2+10l^2m_2v_1+m_2\left(-2l^2v_2+m_2\right)\right]\\
f_2 &= 12l^6v_1^4+130l^6v_1^3v_2+90l^6v_1^2v_2^2+22l^6v_1v_2^3+2l^6v_2^4+34l^4m_2v_1^3+162l^4m_2v_1^2v_2\\
&\quad +2l^2m_2v_1v_2(-l^2v_2+m_2)+2l^2m_2v_2(-l^2v_2^2+m_2v_1)+24l^2m_2^2v_1^2+22l^2m_2^2v_1v_2\\
&\quad +2m_2^2v_2(-l^2v_2+m_2)+2m_2^3v_1\\
f_3 &= 2l^6v_1^3(-l^2v_1+m_2)+8l^6v_1^3(-4l^2v_2+m_2)+28l^6v_1v_2(-2l^2v_1^2+m_2v_2)\\
&\quad +2l^6v_2(-l^2v_1^3+m_2v_2^2)+4l^4v_1v_2(-9l^4v_1v_2+m_2^2)+l^8v_2^2(-v_1^2+v_2^2)\\
&\quad +22l^4m_2v_1^2(-4l^2v_2+m_2)+5l^4m_2^2v_1^2+2l^2m_2^2v_2(-3l^2v_2+m_2)+16l^2m_2^3v_1+m_2^4\\
f_4 &= 4l^{10}v_1^3(-v_1+v_2)+18l^{10}v_1^3v_2+2l^8v_1v_2(-l^2v_2^2+m_2v_1)+10l^8m_2v_1^2(-v_1+v_2)\\
&\quad +30l^8m_2v_1^2v_2+2l^8m_2v_2^2(-v_1+v_2)+6l^6m_2^2v_1(-v_1+v_2)+12l^6m_2^2v_1v_2\\
&\quad +2l^4m_2^2(-l^2v_2^2+m_2v_1)+2l^2m_2^3(-l^2v_2+m_2)\\
f_5 &= l^4(l^2v_1+m_2)^2(l^2v_1-l^2v_2+m_2)^2.
\end{aligned}$$

Lembremos que $l=1/R\leq 1/2$ e levando em consideração as estimativas (5.26)-(5.28) e o fato de $v_2^2<m_2v_1$, não há dificuldades em verificar que os coeficientes f_1, f_2, f_3, f_4 e f_5 são todos positivos, de onde podemos concluir que $\Delta<0$. Temos então três raízes reais e distintas para a equação (5.39). Vamos agora caracterizar essas raízes.

Primeiramente, note que $\sqrt{\Delta}=i\sqrt{-\Delta}$ e assim

$$\left\{\begin{array}{lcl} u^3 &=& -\dfrac{q}{2}+i\sqrt{-\Delta}\\ v^3 &=& -\dfrac{q}{2}-i\sqrt{-\Delta}\end{array}\right. \implies |u^3|=\sqrt{\frac{q^2}{4}-\Delta}=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=|v^3|. \tag{5.44}$$

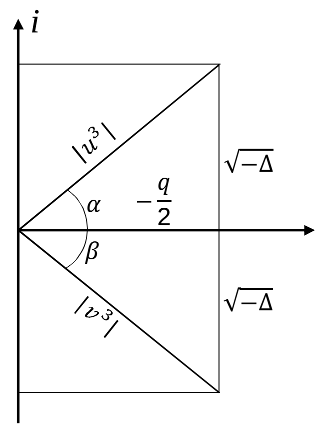

FIGURA 5.2: Relações

Agora precisamos estimar o sinal de p. Para isso temos que verificar o sinal de $A^2 - 3B$. Escrevamos os coeficientes (5.36)-(5.38) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= a_1\gamma^2 + a_2, && (5.45)\\ B &= b_1\gamma^4 + b_2\gamma^2 + b_3, && (5.46)\\ C &= c_1\left(\gamma^2 - l^2\right)^2\gamma^2. && (5.47)\end{aligned}$$

Temos então, $A^2 - 3B = (a_1^2 - 3b_1)\gamma^4 + (2a_1a_2 - 3b_2)\gamma^2 + (a_2^2 - 3b_3)$ e observe que

$$\begin{aligned} a_1^2 - 3b_1 &= \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2 > 0, && (5.48)\\ 2a_1a_2 - 3b_2 &= \left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2 l^2 + \left(7\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\frac{\kappa}{\rho_1}l^2 + \left(\frac{b}{\rho_2} + 2\frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2\frac{\kappa}{\rho_2} > 0, && (5.49)\\ a_2^2 - 3b_3 &= \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_2} - \frac{b}{\rho_2}l^2\right) + \frac{\kappa}{\rho_1}l^2\right]^2 + \left(\frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}l^2\right)\frac{b}{\rho_2}l^2 > 0, && (5.50)\end{aligned}$$

logo, $A^2 - 3B > 0$, consequentemente, $p < 0$. Observando a Figura 5.2 podemos dizer que

$$\cos(\alpha) = \frac{-\frac{q}{2}}{|u^3|} = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}} = \frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}},$$

o que nos dá,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right). \tag{5.51}$$

Os números complexos em (5.44) podem ser escritos na forma:

$$\left\{\begin{aligned} u^3 &= |u^3|[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)] = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)],\\ v^3 &= |v^3|[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)] = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)],\end{aligned}\right. \tag{5.52}$$

e usando a fórmula de De Moivre, obtemos

$$\left\{\begin{aligned} u &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right],\\ v &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right],\end{aligned}\right. \tag{5.53}$$

que ao substituirmos nas expressões (5.40)-(5.42), teremos as três raízes reais dadas respectivamente por

$$X_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right) - \frac{A}{3}, \tag{5.54}$$

$$X_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{A}{3}, \tag{5.55}$$

$$X_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right) - \frac{A}{3}, \tag{5.56}$$

sendo A é o coeficiente dado em (5.36).

Fazendo $\cos(\alpha) = Z$, tomando a identidade (5.51) e levando em consideração $A^2 - 3B > 0$, vem que

$$Z(\gamma) = \frac{1}{2}\frac{2A^3 - 9AB + 27C}{3B - A^2}\sqrt{\frac{1}{A^2 - 3B}} = -\frac{2A^3 - 9AB + 27C}{2(A^2 - 3B)^{3/2}}. \tag{5.57}$$

Temos então:

$$1) \text{ se } \gamma \to 0 \Rightarrow Z(\gamma) \to 1 \Rightarrow \alpha = \arccos(Z(\gamma)) \to 0, \tag{5.58}$$

$$2) \text{ se } \gamma \to \infty \Rightarrow Z(\gamma) \to -1 \Rightarrow \alpha = \arccos(Z(\gamma)) \to \pi. \tag{5.59}$$

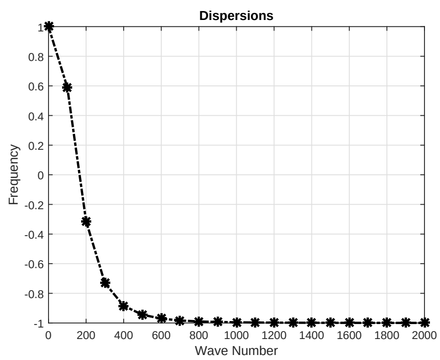

FIGURA 5.3: $Z(\gamma)$

1. Primeiro Espectro:

Para todos os casos, $\omega_i(\gamma) = C_i\gamma$ é a relação de frequência. Assim, tomando a raiz (5.54), teremos:

$$X_1(\gamma) = \frac{2}{3}\sqrt{A^2 - 3B}\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \tag{5.60}$$

que nos dá o primeiro modo de frequência

$$\omega_1(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{A^2 - 3B}\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right) - \frac{A}{3}}. \tag{5.61}$$

Desta identidade obtemos a velocidade de propagação de ondas relacionada ao primeiro espectro, dada por

$$C_1(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\omega_1(\gamma). \tag{5.62}$$

Agora vamos verificar sua convergência. Usando a aproximação através do polinômio de Taylor de ordem 1 em $\sqrt{A^2 - 3B}$, podemos escrever

$$\frac{2}{3}\sqrt{A^2 - 3B}\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \simeq \left(-\frac{2A}{3} + \frac{B}{A}\right)\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \tag{5.63}$$

pelo fato de $A < 0$ e $B > 0$. Sabendo que $l^2 < 1$ e $b/\rho_2 < \kappa/\rho_2$, fazendo $\gamma \to 0$, teremos

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{2A}{3} + \frac{B}{A}\right)\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \;&\to\; \left(-\frac{2a_2}{3} + \frac{b_3}{a_2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{a_2}{3} \;=\; -\frac{b_3}{2a_2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\dfrac{b}{\rho_2}\left(\dfrac{\kappa}{\rho_2} + \dfrac{\kappa}{\rho_1}l^2\right)l^2}{\left(\dfrac{b}{\rho_2} + \dfrac{\kappa}{\rho_1}\right)l^2 + \dfrac{\kappa}{\rho_2}} \;>\; \frac{1}{2}\frac{\dfrac{b}{\rho_2}\left(\dfrac{\kappa}{\rho_2} + \dfrac{\kappa}{\rho_1}\right)l^4}{\left(\dfrac{\kappa}{\rho_2} + \dfrac{\kappa}{\rho_1}\right)l^2 + \dfrac{\kappa}{\rho_2}} \\
&> \frac{1}{2}\frac{\dfrac{b}{\rho_2}\left(\dfrac{\kappa}{\rho_2} + \dfrac{\kappa}{\rho_1}\right)l^4}{\left(\dfrac{\kappa}{\rho_2} + \dfrac{\kappa}{\rho_1}\right)l^2 + \dfrac{\kappa}{\rho_2} + \dfrac{\kappa}{\rho_1}} \;>\; \frac{1}{4}\frac{b}{\rho_2}l^4,
\end{aligned}$$

assim podemos ver que

$$C_1 \to \infty.$$

Fazendo $\gamma \to \infty$, teremos (5.59), $\cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right) \to -1$ e a identidade (5.48). Portanto,

$$C_1(\gamma) \;\to\; \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{a_1^2 - 3b_1}\,(-1) - \frac{a_1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)(-1) \;+\; \frac{1}{3}\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + 2\frac{b}{\rho_2}\right)} = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1}}.$$

A velocidade $C_1(\gamma)$ associada ao primeiro modo de frequência possui então o seguinte comportamento:

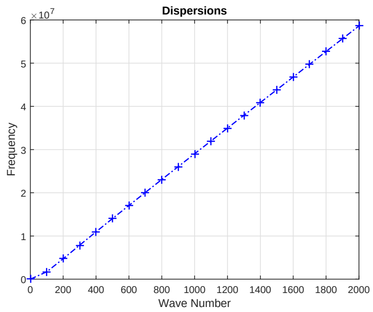

FIGURA 5.4: Frequência ω_1.

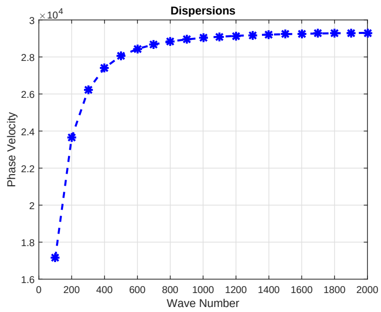

FIGURA 5.5: Velocidade de fase C_1

2. Segundo Espectro:

Tomando a segunda raiz (5.55), temos

$$X_2 = \frac{2}{3}\sqrt{A^2 - 3B}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{A}{3} \tag{5.64}$$

que nos dá o segundo modo de frequência

$$\omega_2(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{A^2 - 3B}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{A}{3}}, \tag{5.65}$$

de onde obtemos a seguinte velocidade de propagação de ondas relacionada ao segundo espectro:

$$C_2(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\omega_2(\gamma). \tag{5.66}$$

Note que se $\gamma \to 0$, teremos (5.58) e $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \to 1$, assim

$$\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{A^2-3B}\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)-\frac{A}{3}} \to \left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left[\left(\frac{\kappa}{\rho_2}-\frac{b}{\rho_2}l^2\right)+\frac{\kappa}{\rho_1}l^2\right]^2+\left(\frac{\kappa}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}l^2\right)\frac{b}{\rho_2}l^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{b}{\rho_2}+\frac{\kappa}{\rho_1}\right)l^2+\frac{\kappa}{\rho_2}\right]\right\}^{1/2} = \text{cte} > 0,$$

portanto,

$$C_2 \longrightarrow \infty.$$

Fazendo $\gamma \to \infty$, teremos (5.59) e $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \to 1/2$, assim

$$C_2 \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{b}{\rho_2}-\frac{\kappa}{\rho_1}\right)\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\kappa}{\rho_1}+2\frac{b}{\rho_2}\right)} = \sqrt{\frac{b}{\rho_2}}.$$

Portanto, A velocidade $C_2(\gamma)$ associada ao segundo modo de frequência possui então o seguinte comportamento:

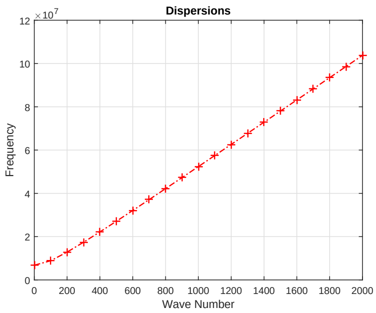

FIGURA 5.6: Frequência ω_2.

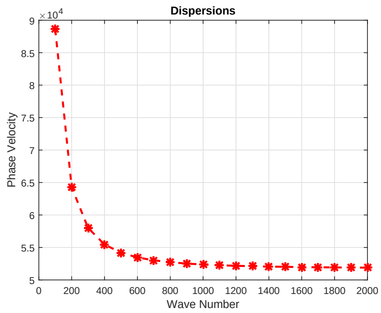

FIGURA 5.7: Velocidade de fase C_2.

3. Terceiro Espectro:

Tomando a terceira raiz (5.56), temos

$$X_3 = \frac{2}{3}\sqrt{A^2-3B}\cos\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right)-\frac{A}{3} \tag{5.67}$$

obtemos o terceiro modo de frequência

$$\omega_3(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{A^2 - 3B}\cos\left(\frac{\alpha + 4\pi}{3}\right) - \frac{A}{3}}, \tag{5.68}$$

de onde obtemos a velocidade de propagação de ondas relacionada ao terceiro espectro, dada por

$$C_3(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\omega_3(\gamma). \tag{5.69}$$

Novamente usando a aproximação pelo polinômio de Taylor de ordem 1 em $\sqrt{A^2 - 3B}$ e seguindo os mesmos passos feitos para o primeiro espectro, fazendo $\gamma \to 0$, teremos

$$\left(-\frac{2A}{3} + \frac{B}{A}\right)\cos\left(\frac{\alpha + 4\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \quad \to \quad \left(-\frac{2a_2}{3} + \frac{b_3}{a_2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{a_2}{3} \quad > \quad \frac{1}{4}\frac{b}{\rho_2}l^4$$

e com isso podemos ver que $C_3 \to \infty$. Agora, passando ao limite quando $\gamma \to \infty$, teremos (5.59) e $\cos\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right) \to 1/2$. Portanto:

$$C_3(\gamma) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + 2\frac{b}{\rho_2}\right)} = \sqrt{\frac{b}{\rho_2}}.$$

Logo, a velocidade $C_3(\gamma)$ associada ao terceiro espectro de frequência possui então o seguinte comportamento:

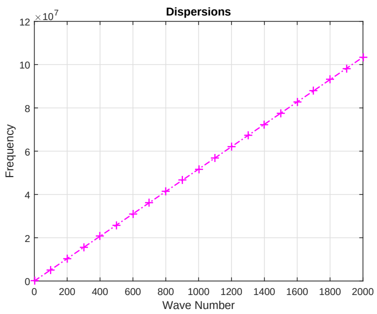

FIGURA 5.8: Frequência ω_3.

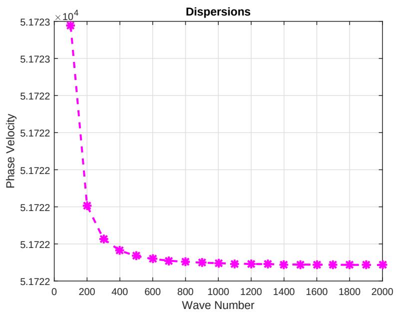

FIGURA 5.9: Velocidade de fase C_3.

A seguir, estão reunidos todos os modos de de Frequências, Figura (5.10), e as velocidades de propagação de ondas, Figura (5.11), obtidos a partir do sistema (5.10)-(5.12): □

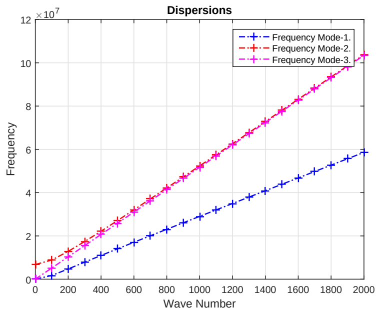

FIGURA 5.10: Frequências.

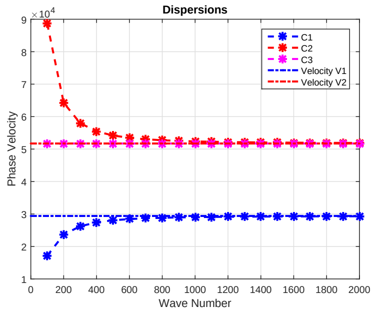

FIGURA 5.11: Velocidades de fase.

5.1.1 Comparação entre os Espectros de Bresse e Timoshenko.

O objetivo aqui é observar o quão próximo (ou não) estão os espectros de Bresse e Timoshenko (TBT), uma vez que o sistemas de Bresse representa uma generalização para o sistema de Timoshenko, isto é, o sistema de Timoshenko é obtido a partir do sistema (5.10) - (5.12) quando consideramos $l = 0$. Para isso, tomemos primeiramente os modos de frequências do modelo de Timoshenko dados por

$$\omega_1 = \sqrt{\Gamma - \sqrt{\Delta}}, \tag{5.70}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\Gamma + \sqrt{\Delta}}, \tag{5.71}$$

com

$$\Gamma = \left[\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa}{2\rho_2}\right],$$
$$\Delta = \left(\frac{b}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}\right)^2\frac{\gamma^4}{4} + \frac{\kappa}{\rho_2}\left(\frac{b}{\rho_2} + \frac{\kappa}{\rho_1}\right)\frac{\gamma^2}{2} + \frac{\kappa^2}{4\rho_2^2},$$

e as velocidades de propagação relacionadas a cada modo de frequência são:

$$C_{1TBT}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\omega_1 \quad \text{e} \quad C_{2TBT}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\omega_2.$$

Note que,

- $C_{1TBT} \to 0$ e $C_{2TBT} \to \infty$, quando $\gamma \to 0$ e
- $C_{1TBT} \to \sqrt{\dfrac{\kappa}{\rho_1}}$ e $C_{2TBT} \to \sqrt{\dfrac{b}{\rho_2}}$, quando $\gamma \to \infty$.

Tomemos $V_1 = \sqrt{\kappa/\rho_1}$ e $V_2 = \sqrt{b/\rho_2}$.

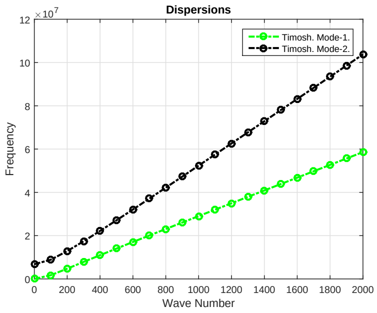

FIGURA 5.12

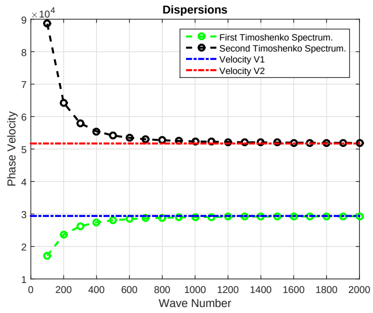

FIGURA 5.13

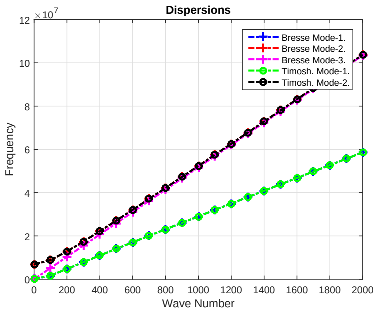

FIGURA 5.14

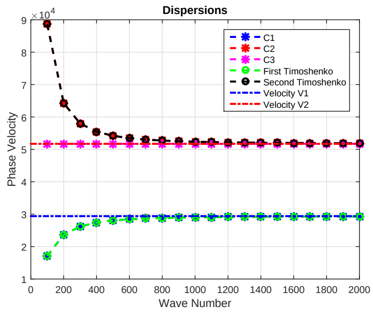

FIGURA 5.15

Na Figura 5.12, temos os modos de frequência da teoria de viga de Timoshenko, na Figura 5.13, as velocidades de propagação de ondas relativas a cada modo, na Figura 5.14, os modos de frequência da viga de Bresse junto com as de Timoshenko e na Figura 5.15, as velocidade de propagação de ondas da teoria de Bresse junto com as de Timoshenko, respectivamente. Observemos o quão próximos estão os espectros de Bresse e Timoshenko, exceto pelo terceiro espectro da teoria de Bresse. Em ambos os casos, observamos a incrível proximidade dos resultados chegando até a parecerem sobrepostos. O terceiro espectro (ou terceiro modo de frequência) da viga de Bresse destaca-se dos outros e tem sua origem associada a equação (5.12), como veremos no capítulo a seguir.

Não sabíamos quantos espectros a teoria de Bresse poderia apresentar. Porém, suspeitávamos que as velocidades de propagação associadas a cada espectros da teoria convergiam para as velocidades de fase quando o comprimento de ondas é muito grande, assim como na teoria de Timoshenko. Pelo estudo apresentado, essas suspeitas se confirmaram.

5.2 Análise de Dispersão para o Sistema de Bresse com Condição de Equilíbrio Dinâmico Proposta por Elishakoff

Nesta seção, estudaremos os sistemas de Bresse com condição de equilíbrio dinâmico sugerida por Elishakoff em (ELISHAKOFF, 2010). Nesse trabalho, o autor afirma ter obtido uma equação mais simples e consistente do que a equação desacoplada obtida a partir do sistema original de Timoshenko, ao retirar do termo de correção da inércia de rotação $((\rho_1\rho_2/\kappa)y_{tttt})$. A consequência disso, é uma nova equação que ao ser transformada em duas equações acopladas, apresenta uma mudança na equação de rotação em que termo $\rho_2\psi_{tt}$ é substituído pelo termo $-\rho_2 y_{ttx}$, que na essência, representa uma mudança na condição de equilíbrio dinâmico original proposta por Timoshenko. Este fato proporciona a eliminação de um dos modos de frequência que aparece na teoria de vigas de Timoshenko, conhecido como segundo espectro.

Como as equações de movimento que dão origem ao sistema de Bresse são as mesmas que originam o de Timoshenko, quando $l = 0$, faremos a troca dos termos na equação de dinâmica rotacional do sistema de Bresse, afim de verificar se esse procedimento provoca o mesmo efeito já comprovado para o sistema de Timoshenko, isto é, se elimina um dos espectros e qual deles.

5.2.1 Com Equilíbrio Dinâmico na Equação de Rotação

Considere o sistema de equações de vigas curvas regidas pelas hipóteses de Bresse na forma acoplada, já com a substituição dos termos:

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) &= 0, && (5.72)\\ -\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) &= 0, && (5.73)\\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - ly)_x + \kappa l(y_x + \psi + lw) &= 0. && (5.74) \end{aligned}$$

Proposição 5.2.1. Tomemos as soluções de ondas harmônicas dos sistema (5.72) - (5.74) dadas por

$$y(\gamma) = A_1 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad \psi(\gamma) = A_2 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad \text{e} \quad w(\gamma) = A_3 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \tag{5.75}$$

onde A_j, $j = 1,\ 2,\ 3$, são as amplitudes, γ é o número de ondas e $\omega = C_j\gamma$ é a frequência. Então as velocidades de dispersão do sistema são

$$\begin{aligned} C_{1BE}(\gamma) &= \frac{1}{\gamma}\sqrt{-\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}, && (5.76)\\ C_{2BE}(\gamma) &= \frac{1}{\gamma}\sqrt{-\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}. && (5.77)\end{aligned}$$

Prova. De maneira análoga ao capítulo anterior, do sistema (5.72)-(5.74) teremos

$$\begin{aligned} y_{tt} - v_1 y_{xx} - v_1\psi_x - m_1 w_x - n_1 w_x + s_1 y &= 0, && (5.78)\\ -y_{ttx} - v_2\psi_{xx} + m_2 y_x + m_2\psi + n_2 w &= 0, && (5.79)\\ w_{tt} - v_3 w_{xx} + m_3 y_x + n_3 y_x + n_3\psi + s_3 w &= 0. && (5.80)\end{aligned}$$

Aqui, os coeficientes são os mesmos de (5.29) e usando as soluções harmônicas (5.19) obtemos o sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + v_1\gamma^2 + s_1 & -iv_1\gamma & -i(m_1+n_1)\gamma \\ i(\omega^2 + m_2)\gamma & v_2\gamma^2 + m_2 & n_2 \\ i(m_3+n_3)\gamma & n_3 & -\omega^2 + v_3\gamma^2 + s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.81)$$

cujas soluções não-triviais são dadas pela equação

$$\left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}\right]\omega^4 - \left[\frac{b}{\rho_2}\left(2\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^4 + \frac{b}{\rho_2}\left(\frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_2}l^2\right)\gamma^2 + \frac{b}{\rho_2}\frac{\kappa}{\rho_2}l^2\right]\omega^2 + \frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^2\left(\gamma^2 - l^2\right)^2\gamma^2 = 0. \qquad (5.82)$$

Tomando,

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^2 + \frac{\kappa}{\rho_2}\\ B &= -\frac{b}{\rho_2}\left(2\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^4 - \frac{b}{\rho_2}\left(\frac{\kappa}{\rho_2} + \frac{b}{\rho_2}l^2\right)\gamma^2 - \frac{b}{\rho_2}\frac{\kappa}{\rho_2}l^2 \qquad (5.83)\\ C &= \frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^2\left(\gamma^2 - l^2\right)^2\gamma^2.\end{aligned}$$

e fazendo $X = \omega^2$, obtemos a equação

$$AX^2 + BX + C = 0, \tag{5.84}$$

cujas soluções tem a forma

$$X_i = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}, \quad i = 1, 2. \tag{5.85}$$

Analisando o sinal de $B^2 - 4AC$.

Tomemos

$$\begin{cases} A &= a_1\gamma^2 + a_2 \\ B &= b_1\gamma^4 + b_2\gamma^2 + b_3 \\ C &= c_1\left(\gamma^2 - l^2\right)^2\gamma^2. \end{cases} \tag{5.86}$$

onde $a_1 = (\kappa/\rho_1 + b/\rho_2)$, $a_2 = \kappa/\rho_2$, $b_1 = -b/\rho_2\,(2\kappa/\rho_1 + b/\rho_2)$, $b_2 = -b/\rho_2\,(\kappa/\rho_2 + (b/\rho_2)l^2)$, $b_3 = -(b/\rho_2)(\kappa/\rho_2)l^2$ e $c_1 = \kappa/\rho_1\,(b/\rho_2)^2$. Então

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \left(b_1^2 - 4a_1c_1\right)\gamma^8 + \left(2b_1b_2 - 4a_2c_1 + 8a_1c_1l^2\right)\gamma^6 \\ &\quad + \left(b_2^2 + 2b_1b_3 - 4a_1c_1l^4 + 8a_2c_1l^2\right)\gamma^4 + \left(2b_2b_3 - 4a_2c_1l^4\right)\gamma^2 + b_3^2. \end{aligned}$$

A análise a seguir, leva em consideração a estimativa (5.26) e também o fato de $b < \kappa$ e $l < 1$. Observemos então que:

1) $b_1^2 - 4a_1c_1 = \left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^4$,

2) $2b_1b_2 - 4a_2c_1 + 8a_1c_1l^2 = 12\dfrac{\kappa}{\rho_1}\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^3 l^2 + 2\dfrac{\kappa}{\rho_2}\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^3 + 2\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2 l^2 + 8\left(\dfrac{\kappa}{\rho_1}\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2 l^2$,

3) $$\begin{aligned} b_2^2 + 2b_1b_3 - 4a_1c_1l^4 + 8a_2c_1l^2 &= \left(\frac{\kappa}{\rho_2}\frac{b}{\rho_2}\right)^2 + 4\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^3\left(\frac{\kappa}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}l^2\right)l^2 + \left(\frac{b}{\rho_2}\right)^4 l^4 \\ &\quad + 4\frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^2\left(3\frac{\kappa}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1}l^2\right)l^2; \end{aligned}$$

4) $2b_2b_3 - 4a_2c_1l^4 = 2\dfrac{\kappa}{\rho_2}\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2\left(\dfrac{\kappa}{\rho_2} - \dfrac{\kappa}{\rho_1}l^2\right)l^2 + 2\dfrac{\kappa}{\rho_2}\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2\left(\dfrac{\kappa}{\rho_2} - \dfrac{\kappa}{\rho_1}\right)l^4$.

É fácil ver que $3\dfrac{\kappa}{\rho_2} - \dfrac{\kappa}{\rho_1}l^2 > 0$ e $\dfrac{\kappa}{\rho_2} - \dfrac{\kappa}{\rho_1}l^2 > 0$ e sendo $b_3^2 > 0$, constatamos que $B^2 - 4AC > 0$. Portanto, as soluções (5.85) são reais e diferentes dadas por

$$X_{1,2} = -\frac{B}{2A} \mp \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}. \tag{5.87}$$

Como tomamos $X_{1,2} = \omega_{1,2}^2(\gamma)$, obtemos os modos de frequência,

$$\omega_{1BE} = \sqrt{-\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}, \tag{5.88}$$

$$\omega_{2BE} = \sqrt{-\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}. \tag{5.89}$$

Assim temos:

1. Primeiro Espectro:

Da relação de frequência $\omega_{iBE}(\gamma) = C_{iBE}\gamma$ em (5.88), obtemos a velocidade de propagação de ondas relacionada ao primeiro espectro, dada por

$$C_{1BE}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{-\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Note que

$$\sqrt{-\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}} \;\to\; \sqrt{-\frac{b_3}{2a_2} - \frac{1}{2a_2}\sqrt{b_3^2}} \;=\; 0,$$

quando $\gamma \to 0$ por conta de que $b_3 < 0$. Assim, usamos a aproximação por série de Taylor para obter

$$C_{1BE}(\gamma) \simeq \sqrt{-\frac{c_1\left(\gamma^2 - l^2\right)^2}{b_1\gamma^4 + b_2\gamma^2 + b_3}}.$$

A partir de (5.86) e dos coeficientes (5.83), tomando $\gamma \to 0$, segue,

$$C_{1BE}(\gamma) \;\to\; \sqrt{-\frac{c_1 l^4}{b_3}} \;=\; \sqrt{\frac{\dfrac{\kappa}{\rho_1}\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2 l^4}{\dfrac{\kappa}{\rho_2}\dfrac{b}{\rho_2}l^2}} \;=\; l\sqrt{\frac{b}{\rho_1}}.$$

Passando ao limite quando $\gamma \to \infty$, teremos

$$C_{1BE}(\gamma) \to \sqrt{-\frac{b_1}{2a_1} - \frac{1}{2a_1}\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}} = \sqrt{\frac{2\dfrac{\kappa}{\rho_1}\dfrac{b}{\rho_2} + \left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2}{2\left(\dfrac{\kappa}{\rho_1} + \dfrac{b}{\rho_2}\right)} - \frac{\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2}{2\left(\dfrac{\kappa}{\rho_1} + \dfrac{b}{\rho_2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\kappa b}{\kappa\rho_2 + b\rho_1}}.$$

A velocidade $C_{1BE}(\gamma)$ associada ao primeiro modo de frequência possui então o seguinte comportamento:

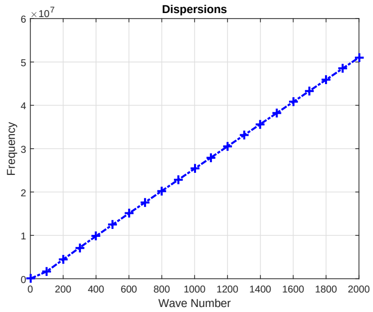

FIGURA 5.16: Frequência ω_{1BE}.

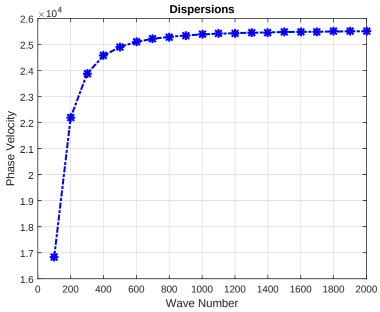

FIGURA 5.17: Velocidade de fase C_{1BE}.

2. Segundo Espectro:

Analogamente ao caso anterior, da frequência (5.89), obtemos a velocidade de propagação de ondas relacionada ao segundo espectro, dada por

$$C_{2BE}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\sqrt{-\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}. \tag{5.90}$$

Para $\gamma \to 0$ teremos

$$\sqrt{-\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}} \to \sqrt{-\frac{b_3}{2a_2} + \frac{1}{2a_2}\sqrt{b_3^2}} = \sqrt{-\frac{b_3}{a_2}} = l\sqrt{\frac{b}{\rho_2}},$$

portanto, passando ao limite quando $\gamma \to 0$, segue que $C_{2BE} \longrightarrow +\infty$.

Para $\gamma \to \infty$, temos

$$C_{2BE} \quad \to \quad \sqrt{-\frac{b_1}{2a_1} + \frac{1}{2a_1}\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}} \; = \; \sqrt{\frac{2\dfrac{\kappa}{\rho_1}\dfrac{b}{\rho_2} + \left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2}{2\left(\dfrac{\kappa}{\rho_1} + \dfrac{b}{\rho_2}\right)} + \frac{\left(\dfrac{b}{\rho_2}\right)^2}{2\left(\dfrac{\kappa}{\rho_1} + \dfrac{b}{\rho_2}\right)}} \; = \; \sqrt{\frac{b}{\rho_2}}$$

A velocidade $C_{2BE}(\gamma)$ associada ao segundo modo de frequência possui o seguinte comportamento:

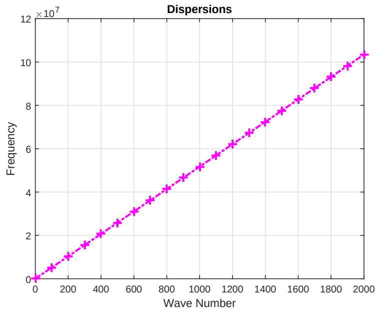

FIGURA 5.18: Frequência ω_{2BE}.

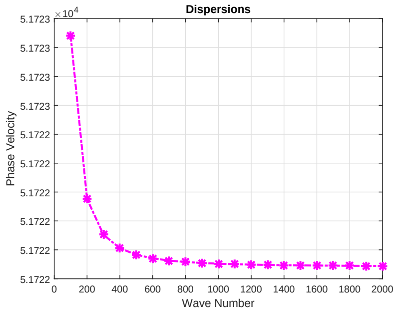

FIGURA 5.19: Velocidade de fase C_{2BE}.

As figuras a seguir, reúnem todos os modos de de Frequências e as velocidades de propagação de ondas obtidos a partir do sistema (5.72)-(5.74):

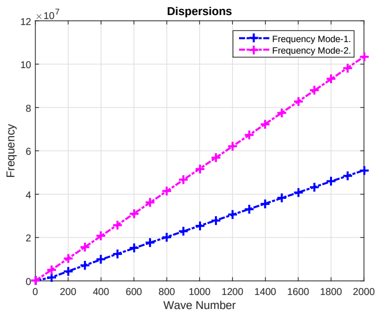

FIGURA 5.20: Frequências.

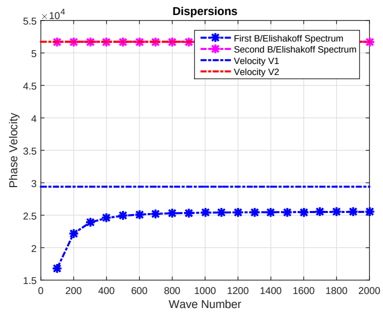

FIGURA 5.21: Velocidades de fase.

A Figura 5.20 mostra os dois modos de frequência resultante do processo de mudança do equilíbrio dinâmico proposto por Elishakoff, inicialmente para o sistema de Timoshenko, e a Figura 5.21 mostras as velocidades de propagação (dispersão) relacionadas a cada um deles.

Observamos que o processo eliminou um dos espectros da teoria, em particular aquele que possui características idênticas às do segundo espectro da teoria de Timoshenko, restando um com característica de primeiro espectro (referência a Timoshenko) e o outro revelado neste trabalho, que o chamamos de terceiro espectro. Isso nos leva a perceber que qualquer modificação na equação de dinâmica rotacional tem efeito sobre o referido espectro. Por exemplo, mecanismos de amortecimento, como provado em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017) para o sistema de Timoshenko clássico. Nesse contexto, surge uma questão: se fizermos a mudança, dessa vez na equação de dinâmica tangencial, eliminamos o terceiro espectro? essa pergunta terá sua resposta mais a frente. □

5.2.1.1 Comparação entre os Resultados Obtidos e os Resultados da Teoria Clássica

Nesta seção, fazemos uma comparação gráfica entre os resultados a fim de visualizar (ou verificar) as principais características que permaneceram ou que sofreram efeitos após a abordagem sugerida por Elishakoff.

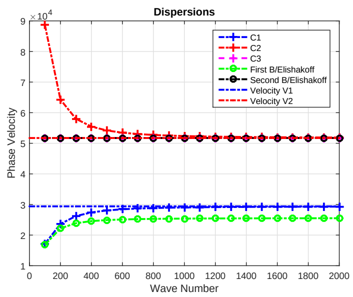

FIGURA 5.22

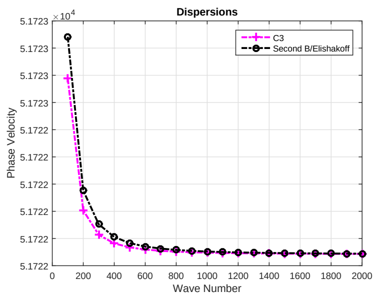

FIGURA 5.23

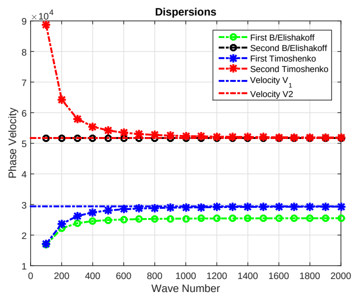

FIGURA 5.24

Na Figura 5.22, estão os resultados da dispersão para o caso clássico e os resultados obtidos após a modificação na equação de rotação. Percebe-se que há apenas uma velocidade de propagação com características relacionadas ao segundo espectro, ou seja, esta foi eliminada após a modificação, permanecendo as relacionadas ao primeiro e ao terceiro, respectivamente. Na Figura 5.23, observamos que a velocidade relacionada ao terceiro espectro da teoria clássica e a resultante após as modificações estão muito próximas, aparentemente sobrepostas (Figura 5.22). A Figura 5.24, é uma comparação entre os resultados obtidos e a teoria clássica de Timoshenko. De qualquer modo, a análise ratifica o fato de que o processo utilizado neste capítulo elimina um dos espectros de frequência da viga de Bresse, em particular, o segundo espectro, como suspeitávamos.

5.2.2 Com Equilíbrio Dinâmico na Equação de Deslocamento Tangencial

O objetivo nesta seção é constatar se um efeito análogo ao comprovado na seção anterior pode ser verificado se for feita a substituição do termo $\rho_1 w_{tt}$ pelo termo $-\rho_1 y_{ttx}$ na equação de deslocamento tangencial, isto é, se essa substituição suprime o espectro relacionado à essa equação - o terceiro espectro.

Sistema com Equilíbrio Dinâmico unicamente na equação de deslocamento tangencial

Considere o sistema:

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) &= 0, & (5.91)\\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) &= 0, & (5.92)\\ -\rho_1 y_{ttx} - \kappa_0(w_x - ly)_x + \kappa l(y_x + \psi + lw) &= 0. & (5.93) \end{aligned}$$

Usando as notações (5.29) e as soluções harmônicas (5.19) obtemos o seguinte sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + v_1\gamma^2 + v_2 l^2 & -iv_1\gamma & -i(v_1+v_2)l\gamma \\ im_2\gamma & -\omega^2 + v_2\gamma^2 + m_2 & m_2 l \\ i[\omega^2 + (v_1+v_2)l]\gamma & v_1 l & v_2\gamma^2 + v_1 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.94)$$

que possui soluções não-triviais dadas pela equação

$$A\omega^4 + B\gamma^2 + C = 0, \qquad (5.95)$$

com coeficientes:

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right) l + \frac{b}{\rho_2}\right]\gamma^2 + \frac{\kappa}{\rho_1} l^2 \\ B &= -(l+1)\frac{b}{\rho_2}\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^4 - \frac{b}{\rho_2}\left[(l+1)\frac{\kappa}{\rho_2} - \frac{\kappa}{\rho_1} l^2\right]\gamma^2 - \frac{\kappa}{\rho_1}\frac{b}{\rho_2} l^2 \\ C &= \frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^2 \left(\gamma^2 - l^2\right)^2 \gamma^2. \end{aligned}$$

As soluções da equação (5.95) podem ser escritas na forma,

$$\omega_{1BE_3} = \sqrt{-\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}, \tag{5.96}$$

$$\omega_{2BE_3} = \sqrt{-\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}}, \tag{5.97}$$

uma vez que tomamos apenas as soluções positivas. Verificando o sinal de $B^2 - 4AC$, temos:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= v_2^2\left[(v_2+v_1)l + v_2 - v_1\right]^2\gamma^8 \\ &+ 2v_2^2\left[(v_1+v_2)(3l^3v_1 + (l+1)^2m_2) + 3l^2v_1(v_2 - v_1)\right]\gamma^6 \\ &+ v_2^2\left[2l^4v_1^2(1-l) + 9l^4v_1^2 + l(m_2^2 - 2l^4v_1v_2) + l^2(m_2^2 - 2l^2v_1v_2)\right. \\ &\left. + lm_2(m_2 - 2lv_1) + m_2(m_2 - 2l^3v_1)\right]\gamma^4 \\ &+ 2l^4v_1v_2^2\left[(m_2 - 3l^2v_1) + lm_2\right]\gamma^2 \\ &+ l^8v_1^2v_2^2 \end{aligned}$$

Das estimativas (5.26), (5.28) e sabendo que $l \leq 1/2$, é fácil verificar que $B^2 - 4AC > 0$. Assim as raízes (5.96) e (5.97) são reais e distintas e usando a relação de frequência $\omega_{iBE_3} = C_{iBE_3}\gamma$, obtemos as dispersões relacionadas a cada espectro dadas por

$$C_{1BE_3}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\omega_{1BE_3}(\gamma) \quad \text{e} \quad C_{2BE_3}(\gamma) = \frac{1}{\gamma}\omega_{1BE_3}(\gamma). \tag{5.98}$$

Analogamente à seção anterior, para $\gamma \to 0$, usando aproximação por série de Taylor em $C_{1BE}(\gamma)$, obtemos

$$C_{1BE_3}(\gamma) \simeq \sqrt{-\frac{c_1\left(\gamma^2 - l^2\right)^2}{b_1\gamma^4 + b_2\gamma^2 + b_3}} \to l\sqrt{\frac{b}{\rho_2}}, \tag{5.99}$$

$$C_{2BE_3}(\gamma) \to \infty, \tag{5.100}$$

pois $\sqrt{\left(-B + \sqrt{B^2 - 4AC}\right)/2A} \to \sqrt{b/\rho_2}$. Agora para $\gamma \to \infty$, teremos

$$\begin{aligned} C_{1BE_3} &\to \sqrt{-\frac{b_1}{2a_1} + \frac{1}{2a_1}\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}} = \sqrt{\frac{\kappa b}{(\kappa\rho_2 + b\rho_1)l + b\rho_1}} \\ C_{2BE_3} &\to \sqrt{-\frac{b_1}{2a_1} + \frac{1}{2a_1}\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}} = \sqrt{\frac{b}{\rho_2}} \end{aligned}$$

A dispersão relacionada a cada espectro obtido apresenta o seguinte comportamento gráfico:

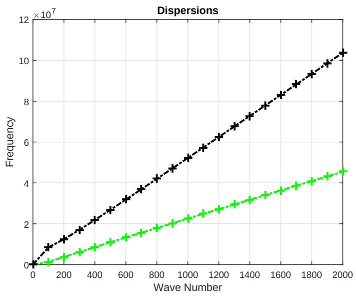

FIGURA 5.25

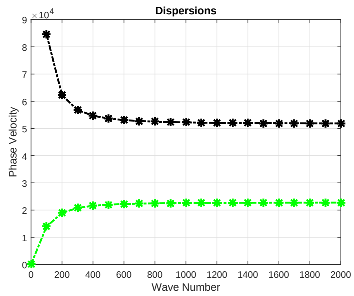

FIGURA 5.26

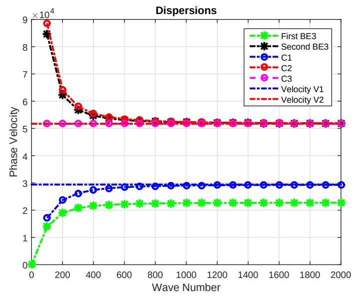

FIGURA 5.27

A Figura (5.25) mostra os modos de frequências (5.96) e (5.97), a Figura (5.26), as velocidades associadas a cada modo de frequência e a Figura (5.27), a comparação com a dispersão do modelo clássico.

Observamos que a substituição feita no elemento da equação de deslocamento tangencial provocou a eliminação do terceiro modo de frequência, restando apenas o primeiro e o segundo modos, como suspeitávamos. Isso é algo interessante, pois,junto com as conclusões da seção anterior, somos levados a perceber uma correspondência entre as equações e os espectros que foram suprimidos. Nesse contexto, pergunta-se: se usarmos o equilíbrio dinâmico nas duas equações no mesmo sistema, teríamos apenas um modo de frequência? isto é, eliminaríamos dois espectros? A resposta será dada a seguir.

Sistema com duplo Equilíbrio Dinâmico: na equação de rotação e na equação de deslocamento tangencial.

Tomemos o sistema de Bresse da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) &= 0, && (5.101)\\ -\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) &= 0, && (5.102)\\ -\rho_1 y_{ttx} - \kappa_0(w_x - ly)_x + \kappa l(y_x + \psi + lw) &= 0. && (5.103) \end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira como anteriormente, usando as funções harmônicas (5.19) obtemos uma equação matricial na forma $WA = 0$ cuja solução não trivial é dada pela equação,

$$\left[\left(\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2}\right)\gamma^4 + \frac{\kappa}{\rho_2}\gamma^2\right](1+l)\frac{b}{\rho_2}\omega^2 - \frac{\kappa}{\rho_1}\left(\frac{b}{\rho_2}\right)^2\left(\gamma^2 - l^2\right)^2\gamma^2 = 0,$$

da qual obtemos o único modo de frequência,

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa b(\gamma^2 - l^2)^2}{[(\kappa\rho_2 + b\rho_1)\gamma^2 + \kappa\rho_1]\,(1+l)}}.$$

Sabendo que $\omega = C\gamma$, obtemos a velocidade de propagação relacionada ao único espectro:

$$C(\gamma) = \frac{|\gamma^2 - l^2|}{\gamma}\sqrt{\frac{\kappa b}{[(\kappa\rho_2 + b\rho_1)\gamma^2 + \kappa\rho_1]\,(1+l)}}.$$

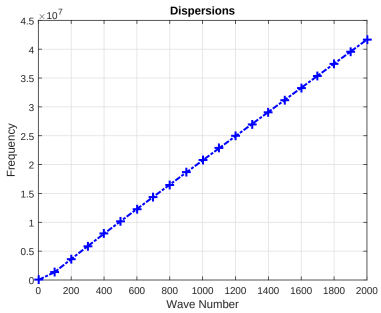

FIGURA 5.28: Frequência.

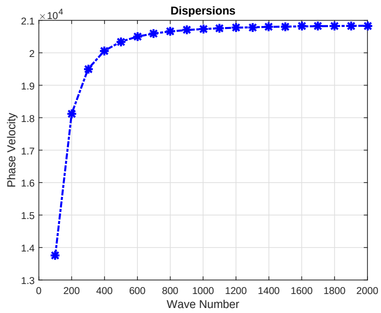

FIGURA 5.29: Velocidade de fase.

CAPÍTULO 6

Estabilidade Exponencial para Sistemas de Bresse: Critério de Routh-Hurwitz

Neste capítulo, pretendemos fornecer uma prova objetiva sobre o decaimento exponencial para os sistemas de Bresse clássico e este equilíbrio dinâmico proposto por Elishakoff utilizando o Critério de Routh-Hurwitz. Almeida e Ramos em (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017) provam o decaimento exponencial lento das soluções para sistemas do tipo Timoshenko através dessa técnica, baseados nos argumentos de Quintanilla em (QUINTANILLA, 2003), levando em consideração relações entre os coeficientes dos sistemas, em particular aquelas que definem velocidades de propagação de ondas.

6.1 Dissipação na Equação de Rotação

Primeiramente estudaremos o sistema de Bresse clássico com apenas um mecanismo de dissipação atuando na equação de rotação, baseando-nos nos argumentos de (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017).

Considere então o sistema de Bresse com dissipação viscosa na equação de dinâmica rotacional, dada pelo termo $\mu\psi_t$, como segue:

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) = 0, \tag{6.1}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) + \mu\psi_t = 0, \tag{6.2}$$

$$\rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - ly)_x + \kappa l(y_x + \psi + lw) = 0, \tag{6.3}$$

com condições iniciais

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x), \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \psi_1(x) \tag{6.4}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x) \tag{6.5}$$

e condições de fronteira

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, \quad w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0. \tag{6.6}$$

O sistema (6.1)-(6.3) possui três velocidades de propagação de ondas: $V_1^2 = \kappa/\rho_1$, $V_2^2 = b/\rho_2$ e $V_3^2 = \kappa_0/\rho_1$. No entanto,

$$\frac{\kappa_0}{\rho_1} = \frac{EA}{\rho A} = \frac{E}{\rho} = \frac{EI}{\rho I} = \frac{b}{\rho_2} \quad \Longrightarrow \quad V_3^2 = V_2^2. \tag{6.7}$$

Para reduzir encargos da notação, tomaremos

$$v_1 = V_1^2 = \frac{\kappa}{\rho_1}, \quad v_2 = V_2^2 = \frac{b}{\rho_2}, \quad m_2 = \frac{\kappa}{\rho_2} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\mu}{\rho_2} \tag{6.8}$$

e assumiremos as soluções do sistema (6.1) - (6.3) como sendo as funções $y(x,t)$, $\psi(x,t)$ e $w(x,t)$ representadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} y = A_1 e^{\omega t}\sin(nx), \\ \psi = A_2 e^{\omega t}\cos(nx), \\ w = A_3 e^{\omega t}\cos(nx). \end{cases} \tag{6.9}$$

Substituindo essas funções nas equações (6.1), (6.2) e (6.3) chegamos ao sistema,

$$
\begin{aligned}
(\omega^2 + v_1 n^2 + v_2 l^2)A_1 + v_1 n A_2 + (v_1 + v_2) l n A_3 &= 0, && (6.10)\\
m_2 n A_1 + (\omega^2 + v_2 n^2 + m_2 + d_2\omega)A_2 + m_2 l A_3 &= 0, && (6.11)\\
(v_1 + v_2) l n A_1 + v_1 l A_2 + (\omega^2 + v_2 n^2 + v_1 l^2)A_3 &= 0, && (6.12)
\end{aligned}
$$

de onde obtemos o sistema matricial

$$
\begin{pmatrix}
\omega^2 + v_1 n^2 + v_2 l^2 & v_1 n & (v_1 + v_2) l n \\
m_2 n & \omega^2 + v_2 n^2 + m_2 + d_2\omega & m_2 l \\
(v_1 + v_2) l n & v_1 l & \omega^2 + v_2 n^2 + v_1 l^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)
$$

cujas soluções não-triviais dadas pela equação

$$\omega^6 + A\omega^5 + B\omega^4 + C\omega^3 + D\omega^2 + E\omega + F = 0, \quad (6.14)$$

com coeficientes

$$
\begin{aligned}
A &= d_2,\\
B &= (v_1 + 2v_2)\, n^2 + (v_1 + v_2)\, l^2 + m_2,\\
C &= \left[(v_1 + v_2)\, n^2 + (v_1 + v_2)\, l^2\right] d_2,\\
D &= v_2(2v_1 + v_2) n^4 + \left[(v_2 - v_1)\, v_2 l^2 + m_2 v_2\right] n^2 + v_2 l^2 \left(v_1 l^2 + m_2\right),\\
E &= v_1 v_2 \left(n^2 - l^2\right)^2 d_2,\\
F &= v_1 v_2^2 \left(n^2 - l^2\right)^2 n^2.
\end{aligned}
$$

Nossa análise se resume no seguinte teorema:

Teorema 6.1. Suponha que ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno e $b/\rho_1 = \kappa/\rho_1$. Então, as soluções do sistema (6.1)-(6.3) da forma (6.9) ficam à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso implica na estabilidade exponencial das soluções. Caso contrário, se $b/\rho_2 \neq \kappa/\rho_1$, existe uma solução do sistema (6.1)-(6.3) que fica à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso não implica a estabilidade exponencial das soluções.

Prova. Reescrevemos a equação (6.14) na forma algébrica, teremos:

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0. \quad (6.15)$$

O objetivo é encontrar soluções da equação (6.15) que estejam à esquerda ou à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$, sendo as velocidades V_1^2 e V_2^2 iguais ou não. Para esse fim, basta substituir x por $x - \epsilon$ na equação (6.15) e investigar o sinal das soluções da equação algébrica

$$(x-\epsilon)^6 + A(x-\epsilon)^5 + B(x-\epsilon)^4 + C(x-\epsilon)^3 + D(x-\epsilon)^2 + E(x-\epsilon) + F = 0. \quad (6.16)$$

Expandindo os termos $(x-\epsilon)^j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, obtemos a equação

$$l_6x^6 + l_5x^5 + l_4x^4 + l_3x^3 + l_2x^2 + l_1x + l_0 = 0, \quad (6.17)$$

cujos coeficiente são dados por:

$$\begin{aligned}
l_6 &= 1,\\
l_5 &= d_2 - 6\epsilon,\\
l_4 &= 15\epsilon^2 - 5d_2\epsilon + (v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + m_2,\\
l_3 &= -20\epsilon^3 + 10d_2\epsilon^2 - 4[(v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + m_2]\epsilon + (v_1+v_2)d_2n^2\\
&+ (v_1+v_2)l^2d_2,\\
l_2 &= 15\epsilon^4 - 10d_2\epsilon^3 + 6[(v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + m_2]\epsilon^2 - 3[(v_1+v_2)d_2n^2\\
&+ (v_1+v_2)l^2d_2]\epsilon + (2v_1+v_2)v_2n^4 + [(v_2-v_1)v_2l^2 + m_2v_2]n^2 + (v_1l^2+m_2)v_2l^2,\\
l_1 &= -6\epsilon^5 + 5d_2\epsilon^4 - 4[(v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + m_2]\epsilon^3 + 3[(v_1+v_2)d_2n^2\\
&+ (v_1+v_2)l^2d_2]\epsilon^2 - 2\{(2v_1+v_2)v_2n^4 + [(v_2-v_1)v_2l^2 + m_2v_2]n^2 + (v_1l^2+m_2)v_2l^2\}\epsilon\\
&+ d_2v_1v_2(n^2-l^2)^2,\\
l_0 &= \epsilon^6 - d_2\epsilon^5 + [(v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + m_2]\epsilon^4 - [(v_1+v_2)d_2n^2 + (v_1+v_2)l^2d_2]\epsilon^3\\
&+ \{(2v_1+v_2)v_2n^4 + [(v_2-v_1)v_2l^2 + m_2v_2]n^2 + (v_1l^2+m_2)v_2l^2\}\epsilon^2 - d_2v_1v_2(n^2-l^2)^2\epsilon\\
&+ v_1v_2^2(n^2-l^2)^2n^2.
\end{aligned}$$

Agora, estamos em condições de aplicar o critério de Routh-Hurwitz. Segundo esse critério, a condição necessária e suficiente para que as soluções de uma equação do tipo (6.17) tenham a parte real negativa é que os determinantes

$$\Lambda_0 = l_0, \quad \Lambda_1 = l_1, \quad \Lambda_2 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3\\ l_0 & l_2\end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_5\\ l_0 & l_2 & l_4\\ 0 & l_1 & l_3\end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

$$\Lambda_4 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_5 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & l_6 \\ 0 & l_1 & l_3 & l_5 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_5 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_5 & 0 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & l_6 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 & l_5 & 0 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 & l_6 \\ 0 & 0 & l_1 & l_3 & l_5 \end{pmatrix} \tag{6.19}$$

e

$$\Lambda_6 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_5 & 0 & 0 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & l_6 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 & l_5 & 0 & 0 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 & l_6 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & l_3 & l_5 & 0 \\ 0 & 0 & l_0 & l_2 & l_4 & l_6 \end{pmatrix} \tag{6.20}$$

sejam todos positivos.

Primeiramente calculemos o determinante Λ_2. Após os cálculos obtemos o seguinte resultado:

$$\Lambda_2 = l_1 l_2 - l_0 l_3 = R_8 n^8 + R_6 n^6 + R_4 n^4 + R_2 n^2 + R_0, \tag{6.21}$$

com

$$\begin{aligned}
R_8 &= -2v_2^2(2v_1^2 - v_2^2)\epsilon + d_2 v_1^2 v_2^2, \\
R_6 &= -8v_2\big[3(v_1^2 + v_2^2) + 5v_1 v_2\big]\epsilon^3 + 2d_2\big[9(v_1 + v_2)v_1 + 4v_2^2\big]\epsilon^2 - \big\{4l^2 v_2^2\big[(v_1 + v_2)^2 \\
&+ 2v_1(v_2 - v_1)\big] + 2d_2^2 v_1 v_2(v_1 + v_2) + 4m_2 v_2^2(v_1 + v_2)\big]\epsilon + d_2 v_1 v_2^2(m_2 - 4l^2 v_1), \\
R_4 &= -R_4'(\epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon) + R_4''(\epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0), \\
R_2 &= -R_2'(\epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon) + R_2''(\epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0), \\
R_0 &= -R_0'(\epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon) + R_0''(\epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0).
\end{aligned}$$

Observação 6.1. Em razão de boa parte dos coeficientes do polinômio serem muito grandes, optamos por representá-los na forma reduzida

$$R_{2i} = -R_{2i}(\epsilon^{2i+1}) + R_{2i}(\epsilon^{2i}),\ i = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

tanto neste quanto nos outros polinômios ao longo do capítulo, conforme necessário.

O termo dominante do polinômio Λ_2 é dado por $R_8 n^8$ e o mesmo pode ser escrito da seguinte forma:

$$R_8 n^8 = -R_8'(\epsilon, n^8) + \left(d_2 v_1^2 v_2^2\right) n^8.$$

Para um n suficientemente grande podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $\Lambda_2 > 0$. Sob as mesmas condições, mostra-se que $\Lambda_0 > 0$ e $\Lambda_1 > 0$.

Definamos o determinante Λ_2' de ordem 2 dado por:

$$\Lambda_2' = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_5 \\ l_0 & l_4 \end{pmatrix} = l_1 l_4 - l_0 l_5. \tag{6.22}$$

Calculando o determinante Λ_3, obtemos o polinômio:

$$\Lambda_3 = l_3 \Lambda_2 - l_1 \Lambda_2' = Q_{10} n^{10} + Q_8 n^8 + Q_6 n^6 + Q_4 n^4 + Q_2 n^2 + Q_0, \tag{6.23}$$

com

$$\begin{aligned}
Q_{10} &= 8v_2^3(v_2 - v_1)^2\epsilon^2 - 2d_2 v_2^3 (v_2 - v_1)^2 \epsilon, \\
Q_8 &= 8v_2\big[3(v_1 + v_2)^3 + 5v_1^3 + 6v_1^2 v_2 + v_1 v_2^2 + 12v_2^3\big]\epsilon^4 - 2d_2 v_2\big[6(v_1 + v_2)^3 + 26v_1^3 \\
&+ 27v_2(v_1^2 + v_2^2)\big]\epsilon^3 + 4v_2\big\{5l^2 v_1 v_2^2 (v_2 - v_1) + l^2 v_2^3(19v_1 + 52v_2) + d_2^2\big[(v_1 + v_2)^3 \\
&+ 4v_1^3 + v_2(v_1 + v_2)\big] + m_2 v_2^2 (v_1 + 5v_2)\big\}\epsilon^2 - 2d_2 v_2\big\{l^2 v_2\big[7v_1(v_2 - v_1) + v_2(5v_1 + 3v_2)\big] \\
&+ d_2^2 v_1(v_1^2 + v_2^2) + m_2 v_2^2(3v_1 + 2v_2)\big\}\epsilon + d_2^2 m_2 v_1 v_2^3, \\
Q_6 &= Q_6'(\epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - Q_6''(\epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon), \\
Q_4 &= Q_4'(\epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - Q_4''(\epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon), \\
Q_2 &= Q_2'(\epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - Q_2''(\epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon), \\
Q_0 &= Q_0'(\epsilon^{12}, \epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - Q_0''(\epsilon^{11}, \epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon).
\end{aligned}$$

Note que o coeficiente Q_{10} é inteiramente dependente da relação $v_2 - v_1$, ou equivalentemente $b\rho_1 - \kappa\rho_2$. Se $b\rho_1 - \kappa\rho_2 \neq 0$, o termo $Q_{10} n^{10}$ será o fator dominante de Λ_3. Porém, dessa forma poderíamos achar um ϵ suficientemente pequeno tal que $4\rho_2\epsilon < \mu$ para um μ suficientemente grande. Nessas condições, teríamos $\Lambda_3 < 0$ e isso impossibilitaria obtermos o decaimento exponencial de soluções. Se $b\rho_1 - \kappa\rho_2 = 0$, teremos $Q_{10} = 0$ e Λ_3 será então de grau 8 em n e o fator dominante passa a ser o termo Q_8n^8 que pode ser escrito da seguinte forma:

$$Q_8n^8 = Q_8'(\epsilon^4, \epsilon^2, n^8) \; - \; Q_8''(\epsilon^3, \epsilon, n^8) \; + \; \left(d_2^2 m_2 v_2^4\right) n^8. \tag{6.24}$$

Logo, podemos encontrar um ϵ suficientemente pequeno e um n suficientemente grande tal que $Q_8n^8 > 0$ e consequentemente, $\Lambda_3 > 0$.

Considere o determinante,

$$\Lambda_2'' = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_5 \\ l_2 & l_6 \end{pmatrix} = l_1 l_6 - l_2 l_5. \tag{6.25}$$

Assim, calculando o determinante Λ_4, obtemos:

$$\Lambda_4 = l_4\Lambda_3 + \Lambda_2''\Lambda_2 + l_0 l_5 \Lambda_2' = S_{12}n^{12} + S_{10}n^{10} + S_8n^8 + S_6n^6 + S_4n^4 + S_2n^2 + S_0, \tag{6.26}$$

com

$$\begin{aligned}
S_{12} &= 8v_2^4(v_2 - v_1)^2\epsilon^2 - 2d_2v_2^4(v_2 - v_1)^2\epsilon, \\
S_{10} &= 32v_2\big[2v_1^4 + 7v_1^2v_2^2 + 2v_2^3(v_2 - v_1) + 3v_2^4\big]\epsilon^4 - 8d_2v_2\big[8v_1^4 + 21v_1^2v_2^2 + 9v_2^3(v_2 - v_1) \\
&+ 3v_2^4\big]\epsilon^3 + \big\{8l^2v_2^4\big[4v_1(v_2 - v_1) + 9v_1v_2 + 3v_2^2\big] + 4d_2^2v_2(5v_1^4 + 6v_1^2v_2^2 + 3v_2^4) + 24m_2v_2^5\big\}\epsilon^2 \\
&- \big\{4d_2l^2v_2^4\big[5v_1(v_2 - v_1) + 2v_2(v_1 + v_2)\big] + 2d_2^3v_1v_2(v_1^3 + v_2^3) + 2d_2m_2v_2^4(3v_1 + 2v_2)\big\}\epsilon \\
&+ d_2^2m_2v_1v_2^4, \\
S_8 &= S_8'(\epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - S_8''(\epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon), \\
S_6 &= S_6'(\epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - S_6''(\epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon), \\
S_4 &= S_4'(\epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - S_4''(\epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon), \\
S_2 &= S_2'(\epsilon^{12}, \epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - S_2''(\epsilon^{11}, \epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon), \\
S_0 &= S_0'(\epsilon^{14}, \epsilon^{12}, \epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - S_0''(\epsilon^{13}, \epsilon^{11}, \epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon).
\end{aligned}$$

Da mesma forma como no determinante de ordem 3, poderíamos achar um ϵ suficientemente pequeno tal que $4\rho_2\epsilon < \mu$ e assim teríamos $\Lambda_4 < 0$ e consequentemente a não estabilidade exponencial de soluções. Porém, se considerarmos $b\rho_1 - \kappa\rho_2 = 0$, teremos $S_{12} = 0$ e Λ_4 será de grau 10 em n e o fator dominante passa a ser o termo $S_{10}n^{10}$ que pode ser representado na forma:

$$S_{10}n^{10} = S_{10}'(\epsilon^4, \epsilon^2, n^{10}) - S_{10}''(\epsilon^3, \epsilon, n^{10}) + \left(d_2^2 m_2 v_2^5\right) n^{10}.$$

Note que o termo acima não se anula quando as velocidades são iguais. Então, podemos encontrar um ϵ suficientemente pequeno e para algum n suficientemente grande podemos ter $S_{10}n^{10} > 0$ e, consequentemente, $\Lambda_4 > 0$.

Observe que $\Lambda_6 = l_6\Lambda_5$. Então, limitaremo-nos a analisar apenas o sinal de Λ_5. Portanto, após alguns cálculos obtemos o polinômio

$$\Lambda_5 = l_5\Lambda_4 - l_6(l_3\Lambda_3 - l_1 l_5\Lambda_2 + l_1^3 l_6) = K_{10}n^{10} + K_8 n^8 + K_6 n^6 + K_4 n^4 + K_2 n^2 + K_0, \quad (6.27)$$

cujos coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned}
K_{10} &= -128v_2(v_1-v_2)^4\epsilon^5 + 128d_2v_2(v_1-v_2)^4\epsilon^4 - 40d_2^2v_2(v_1-v_2)^4\epsilon^3 + 4d_2^3v_2(v_1-v_2)^4\epsilon^2\\
K_8 &= -128(v_1-v_2)^2\big\{(v_1+v_2)^2 + 4(3v_1+4v_2)v_2\big\}\epsilon^7 + 64(v_1-v_2)^2d_2\big\{3(v_1+v_2)^2 + 4(7v_1\\
&+ 10v_2)v_2\big\}\epsilon^6 - 32\,(v_1-v_2)^2\big\{2l^2v_2\,\big[5(v_1+v_2)^2 + 28v_1v_2\big] + d_2^2\big[3(v_1+v_2)^2 + 4(7v_1\\
&+ 9v_2)v_2\big] + 2m_2v_2(7v_1+5v_2)\big\}\epsilon^5 + 16(v_1-v_2)^2\big\{4d_2l^2v_2\big[5(v_1+v_2)^2 + 28v_1v_2\big]\\
&+ d_2^3\big[(v_1+v_2)^2 + 2(9v_1+7v_2)v_2\big] + 4d_2m_2v_2(6v_1+5v_2)\big\}\epsilon^4 - 8(v_1-v_2)^2\Big\{l^4v_2^2(3v_1+v_2)^2\\
&+ d_2^2l^2v_2\big[11(v_1+v_2)^2 + 2(37v_1+v_2)v_2\big] + d_2^4v_2(7v_1+2v_2) + 2l^2m_2v_2^2(5v_1-v_2)\\
&+ 4d_2^2m_2v_2(4v_1+3v_2) + m_2^2v_2^2\Big\}\epsilon^3 + 4(v_1-v_2)^2\Big\{d_2l^4v_2^2(3v_1+v_2)^2 + d_2^3l^2v_2(v_1^2 + 20v_1v_2\\
&+ 3v_2^2) + d_2^5v_1v_2 + 2d_2l^2m_2v_2^2(5v_1-v_2) + 2d_2^3m_2v_2(3v_1+v_2) + d_2m_2^2v_2^2\Big\}\epsilon^2\\
&- 2d_2^2m_2v_1v_2(v_1-v_2)^2(4l^2v_2 + d_2^2)\epsilon,\\
K_6 &= -2048\big\{(v_1+v_2)^3 + v_2(2v_1^2 + 6v_2^2)\big\}\epsilon^9 + 512\,d_2\big\{5(v_1+v_2)^3 + 2(v_1^3 + 7v_1^2v_2 + v_1v_2^2\\
&+ 19v_2^3)\big\}\epsilon^8 - \big\{256l^2\big[2(v_1+v_2)^4 + (9v_1^3 + 61v_1^2v_2 + 75v_1v_2^2 + 15v_2^3)v_2\big] + 128d_2^2\big[11(v_1+v_2)^3\\
&+ 8v_1^3 + v_2(37v_1^2 + 2v_1v_2 + 89v_2^2)\big] + 256m_2\big[2(v_1+v_2)^3 + v_2(11v_1^2 + 6v_1v_2 + 15v_2^2)\big]\big\}\epsilon^7\\
&+ \big\{128d_2l^2[6(v_1+v_2)^4 + v_2(21v_1^3 + 157v_1^2v_2 + 199v_1v_2^2 + 39v_2^3)] + 64d_2^3[5(v_1+v_2)^3\\
&+ 8v_1^3 + 29v_1^2v_2 + 2v_1v_2^2 + 49v_2^3] + 128d_2m_2[5(v_1+v_2)^3 + 4v_2(6v_1^2 + v_1v_2 + 9v_2^2)]\big\}\epsilon^6\\
&- \big\{128l^4v_2[2(v_1+v_2)^4 + v_2(10v_1^3 + 93v_1^2v_2 + 8v_1v_2^2 + v_2^3)] + 128d_2^2l^2[3(v_1+v_2)^4\\
&+ v_2(9v_1^3 + 91v_1^2v_2 + 97v_1v_2^2 + 19v_2^3)] + 32d_2^4(13v_2 + 5v_1)(v_1^2 + v_2^2) + 64l^2m_2v_2[8(v_1+v_2)^3\\
&+ v_1(5v_1^2 + 42v_1v_2 + 33v_2^2)] + 32d_2^2m_2[6(v_1+v_2)^3 + 3v_1^3 + 54v_1^2v_2 + v_1v_2^2 + 62v_2^3]\\
&+ 192m_2^2v_2[3v_1^2 + v_1v_2^2 + 2v_2^2]\big\}\epsilon^5 + \big\{32d_2l^4v_2[8(v_1+v_2)^4 + v_2(31v_1^3 + 357v_1^2v_2 + 25v_1v_2^2\\
&+ 3v_2^3)] + 32d_2^3l^2[2(v_1+v_2)^4 + v_2(9v_1^3 + 131v_1^2v_2 + 83v_1v_2^2 + 17v_2^3)] + 16d_2^5(v_1+v_2)(v_1^2 + v_2^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \ 32d_2l^2m_2v_2[18(v_1 + v_2)^3 + v_1(5v_1^2 + 46v_1v_2 + 53v_2^2)] + 32d_2^3m_2\big[2(v_1+v_2)^2v_1 \\
&+ \ 11(v_1^2 + v_2^2)v_2\big] + 32d_2m_2^2v_2[2(v_1 + v_2)^2 + 11v_1^2 + 9v_2^2]\big\}\epsilon^4 - \big\{16l^6v_2^2(3v_1+v_2)(2v_1^3 \\
&+ \ 21v_1^2v_2 + 8v_1v_2^2 + v_2^3) + 8d_2^2l^4v_2[6(v_1+v_2)^4 + v_2(27v_1^3 + 465v_1^2v_2 + 45v_1v_2^2 + 7v_2^3)] \\
&+ \ 16d_2^4l^2v_2[3(v_1 + v_2)^3 + 4v_1v_2(11v_1 + v_2)] + 16l^4m_2v_2^2(17v_1^3 + 81v_1^2v_2 + v_1v_2^2 + v_2^3) \\
&+ \ 16d_2^2l^2m_2v_2[13(v_1 + v_2)^3 + v_1v_2(37v_1 + 27v_2)] + 8d_2^4m_2(v_1^3 + 4v_1^2v_2 + v_1v_2^2 + 2v_2^3) \\
&+ \ 16l^2m_2^2v_2^2\big[12(v_1+v_2)v_1 + (v_1 - v_2)v_2\big] + 8d_2^2m_2^2v_2(15v_1^2 + 3v_1v_2 + 11v_2^2) + 16m_2^3v_2^2(v_1 \\
&+ \ v_2)\big\}\epsilon^3 + \big\{8d_2l^6v_2^2(3v_1 + v_2)\big(2v_1^3 + 21v_1^2v_2 + 8v_1v_2^2 + v_2^3\big) + 4d_2^3l^4v_2[2v_1^2(v_2^2 - v_1^2) \\
&+ \ 3v_2(v_2^3 - v_1^3) + 109v_1^2v_2^2 + 19v_1v_2^3] + 8d_2l^4m_2v_2^2[(v_1+v_2)(v_1^2 - v_2^2) + 16v_1^3 + 80v_1^2v_2] \\
&+ \ 8d_2^3l^2m_2v_2[3(v_1+v_2)^3 + v_1v_2(29v_1 + 3v_2)] + 8d_2l^2m_2^2v_2^2[12v_1(v_1+v_2) + v_2(v_1 - v_2)] \\
&+ \ 4d_2^3m_2^2v_2(3v_1^2 + v_1v_2 + v_2^2) + 8d_2m_2^3v_2^2(v_1+v_2) + 64d_2^5l^2v_1^2v_2^2\big\}\epsilon^2 - \big\{4d_2^2l^2m_2v_1^2v_2^2(8d_2^2 \\
&+ \ 7m_2) + 2d_2^2l^4m_2v_1v_2^2[5(v_1+v_2)^2 + 44v_1v_2] + 2d_2^2m_2^2v_1v_2^2(6l^2v_2 + m_2)\big\}\epsilon + 4d_2^3l^2m_2^2v_1^2v_2^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_4 &= - K_4''(\epsilon^{11}, \epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon) + K_4'(\epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2), \\
K_2 &= - K_2''(\epsilon^{13}, \epsilon^{11}, \epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon) + K_2''(\epsilon^{12}, \epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2), \\
K_0 &= - K_0''(\epsilon^{15}, \epsilon^{13}, \epsilon^{11}, \epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon) + K_0''(\epsilon^{14}, \epsilon^{12}, \epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2).
\end{aligned}
$$

Percebemos que tanto o coeficiente K_{10} quanto K_8 dependem inteiramente da diferença $v_1 - v_2$, ou em termos das constantes constitutivas, $b\rho_1 - \kappa\rho_2$. Assim, para o caso em que $b\rho_1 - \kappa\rho_2 \neq 0$, podemos encontrar ϵ e μ suficientemente pequenos tais que $K_{10} < 0$ e dessa forma obter $\Lambda_5 < 0$ e $\Lambda_6 = l_6\Lambda_5 < 0$. Como consequência, podemos dizer que existe uma solução do problema tal que w está à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e, portanto, não podemos obter o decaimento exponencial uniforme de soluções. Para o caso em que $b\rho_1 - \kappa\rho_2 = 0$, teremos $K_{10} = K_8 = 0$ e assim o determinante Λ_5 será de grau 6 com fator dominante dado pelo o termo K_6n^6 que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$K_6n^6 = -R_6'(\epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon, n^6) + R_{10}'(\epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, n^6) \ + \ \left(4d_2^3l^2m_2^2v_2^4\right)n^6.$$

Nesse contexto, podemos encontrar um ϵ suficientemente pequeno para um n suficientemente grande tal que $K_6n^6 > 0$ e, consequentemente, obter $\Lambda_5 > 0$. Portanto, para um ϵ suficientemente pequeno e considerando $b\rho_1 - \kappa\rho_2 = 0$ obtemos $\Lambda_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ donde podemos concluir que existe uma solução do problema tal que w está à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$ e, portanto, obtermos o decaimento exponencial uniforme de soluções para o sistema (6.1)-(6.3). □

Observação 6.2. Um caso bem interessante é considerarmos o sistema (6.1)-(6.3) segundo as modificações feitas por Elishakoff aplicadas ao o sistema de equações de Timoshenko (ELISHAKOFF, 2010), em que o autor altera a condição de equilíbrio dinâmico resultando na substituição do termo $\rho_2\psi_{tt}$ pelo termo $-\rho_2 y_{ttx}$ na equação de dinâmica rotacional. Em outras palavras, tomaremos o sistema (6.1)-(6.3) na forma

$$\begin{aligned} \rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) &= 0, && (6.28)\\ -\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) + \mu\psi_t &= 0, && (6.29)\\ \rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - ly)_x + \kappa l(y_x + \psi + lw) &= 0, && (6.30) \end{aligned}$$

com as mesmas condições inicias e de contorno do sistema original. Assim, tomando as funções harmônicas (6.9) e considerando as identidades (6.7) e (6.8) obtemos o sistema matricial

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + v_1 n^2 + v_2 l^2 & v_1 n & (v_1 + v_2)ln \\ (-w^2 + m_2)n & v_2 n^2 + m_2 + d_2 w & m_2 l \\ (v_1 + v_2)ln & v_1 l & \omega^2 + v_2 n^2 + v_1 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6.31)$$

cujas soluções não-triviais são dadas pela equação

$$A\omega^5 + B\omega^4 + C\omega^3 + D\omega^2 + E\omega + F = 0, \qquad (6.32)$$

com coeficientes

$$\begin{aligned} A &= d_2,\\ B &= (v_1 + v_2)\, n^2 + m_2,\\ C &= (v_1 + v_2)\, d_2 n^2 + (v_1 + v_2)\, d_2 l^2,\\ D &= (2v_1 + v_2)\, v_2 n^4 + \left(v_2 l^2 + m_2\right) v_2 n^2 + v_2 m_2 l^2,\\ E &= v_1 v_2 \left(n^2 - l^2\right)^2 d_2,\\ F &= v_1 v_2^2 \left(n^2 - l^2\right)^2 n^2. \end{aligned}$$

Seguindo os etapas do Teorema 6.1, a partir da equação (6.32) teremos,

$$A(x-\epsilon)^5 + B(x-\epsilon)^4 + C(x-\epsilon)^3 + D(x-\epsilon)^2 + E(x-\epsilon) + F = 0. \qquad (6.33)$$

que resulta na equação

$$l_5x^5 + l_4x^4 + l_3x^3 + l_2x^2 + l_1x + l_0 = 0 \tag{6.34}$$

cujos coeficiente são,

$$\begin{aligned}
l_5 &= d_2,\\
l_4 &= -5d_2\epsilon + (v_1+v_2)n^2 + m_2,\\
l_3 &= 10d_2\epsilon^2 - 4[(v_1+v_2)n^2 + m_2]\epsilon + (v_1+v_2)(n^2+l^2)d_2,\\
l_2 &= -10d_2\epsilon^3 + 6[(v_1+v_2)n^2+m_2]\epsilon^2 - 3(v_1+v_2)(n^2+l^2)d_2\epsilon + (2v_1+v_2)v_2n^4 + (l^2v_2^2\\
&+ m_2v_2)n^2 + l^2m_2v_2,\\
l_1 &= 5d_2\epsilon^4 - 4[(v_1+v_2)n^2+m_2]\epsilon^3 + 3(v_1+v_2)(n^2+l^2)d_2\epsilon^2 - 2[(2v_1+v_2)v_2n^4 + (l^2v_2\\
&+ m_2)v_2n^2 + l^2m_2v_2]\epsilon + (n^2-l^2)^2d_2v_1v_2,\\
l_0 &= -d_2\epsilon^5 + [(v_1+v_2)n^2+m_2]\epsilon^4 - (v_1+v_2)(n^2+l^2)d_2\epsilon^3 + [(2v_1+v_2)v_2n^4 + (l^2v_2\\
&+ m_2)v_2n^2 + l^2m_2v_2]\epsilon^2 - (n^2-l^2)^2d_2v_1v_2\epsilon + (n^2-l^2)^2n^2v_1v_2^2.
\end{aligned}$$

Para cumprir o critério de Routh-Hurwitz, devemos verificar se são positivos os determinantes,

$$\Lambda_0 = l_0, \quad \Lambda_1 = l_1, \quad \Lambda_2 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_0 & l_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_5 \\ l_0 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_1 & l_3 \end{pmatrix}, \tag{6.35}$$

$$\Lambda_4 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_5 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 & l_5 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda_5 = \det\begin{pmatrix} l_1 & l_3 & l_5 & 0 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 & l_5 & 0 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 & 0 \\ 0 & 0 & l_1 & l_3 & l_5 \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Então, para ϵ suficientemente pequeno e n suficientemente grande, não há dificuldades em ver que $\Lambda_0 = l_0 > 0$ e $\Lambda_1 = l_1 > 0$. Calculando o determinante de segunda ordem, obtemos

$$\Lambda_2 = r_8n^8 + r_6n^6 + r_4n^4 + r_2n^2 + r_0, \tag{6.37}$$

onde

$$\begin{aligned}
r_8 &= -2v_2^2[(v_1+v_2)^2+v_1^2]\epsilon + d_2v_1^2v_2^2,\\
r_6 &= -12v_2[\,(v_1+v_2)^2+(v_1+v_2)v_1\,]\epsilon^3 + 2d_2v_2[\,4(v_1+v_2)^2+5v_1^2]\epsilon^2 - 2\big\{[2(v_1+v_2)^2\\
&+\ 2(v_1+2v_2)v_1]l^2v_2^2 + (v_1+v_2)v_1v_2d_2^2 + 2(v_1+v_2)m_2v_2^2\big\}\epsilon + (m_2-3l^2v_1)d_2v_1v_2^2,\\
r_4 &= -r_4''(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + r_4'(\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
r_2 &= r_2'(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - r_2''(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
r_0 &= -r_0''(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + r_0'(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0).
\end{aligned}$$

Podemos perceber que os coeficientes acima não dependem da diferença entre as velocidades V_1^2 e V_2^2 e o fator dominante do polinômio (6.37) é o termo r_8n^8, que pode ser representado na forma

$$r_8n^8 = -r_8'(\epsilon, n^8) + \big(d_2v_1^2v_2^2\big)n^8. \tag{6.38}$$

Assim, podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $r_8n^8 > 0$ e, consequentemente, $\Lambda_2 > 0$.

Analogamente, para o determinante de ordem três, após alguns cálculos, obtemos o polinômio

$$\Lambda_3 = q_{10}n^{10} + q_8n^8 + q_6n^6 + q_4n^4 + q_2n^2 + q_0, \tag{6.39}$$

com

$$\begin{aligned}
q_{10} &= 4(v_1+v_2)v_2^4\epsilon^2 - 2[(v_1+v_2)^2+v_1^2]d_2v_2^3\epsilon + d_2^2v_1^2v_2^3,\\
q_8 &= q_8'(\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - q_8''(\epsilon^3,\epsilon),\\
q_6 &= q_6'(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - q_6''(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
q_4 &= -q_4''(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + q_4'(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
q_2 &= q_2'(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - q_2''(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
q_0 &= -q_0''(\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + q_0'(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0).
\end{aligned}$$

Novamente percebemos que os coeficientes do polinômio (6.39) não dependem da diferença entre as velocidades V_1^2 e V_2^2 . Então, para ϵ_0 suficientemente pequeno e n suficientemente grande, tomando

$$q_{10}n^{10} = q'_{10}(\epsilon^2, n^{10}) - q''_{10}(\epsilon, n^{10}) + \big(d_2^2 v_1^2 v_2^3\big)n^{10}, \tag{6.40}$$

poderemos ter $q_{10}n^{10} > 0$ e obter $\Lambda_3 > 0$.

Observemos que $\Lambda_5 = l_5\Lambda_4$, logo, analisaremos apenas o sinal do determinante Λ_4. Temos então o polinômio

$$\Lambda_4 = s_{12}n^{12} + s_{10}n^{10} + s_8 n^8 4 + s_6 n^6 + s_4 n^4 + s_2 n^2 + s_0, \tag{6.41}$$

onde

$$\begin{aligned}
s_{12} &= 4(v_1+v_2)^2 v_2^4 \epsilon^2 - 2d_2 v_1^2 v_2^4 \epsilon,\\
s_{10} &= 32v_2\big[(v_1+v_2)^4 + (v_1+v_2)^3 v_1\big]\epsilon^4 - 32d_2 v_2\big[(2v_1+3v_2)v_1^3 + (v_1^2+v_1v_2+v_2^2)v_2^2\big]\epsilon^3\\
&+ \big\{8l^2 v_2^2\big(4v_1^2+6v_1v_2+v_2^2\big)(v_1+v_2)^2 + 4\big[(5v_1-2v_2)v_1^3 + (v_1+v_2)v_2^3\big]d_2^2 v_2\\
&+ 8m_2 v_2^3(v_1+2v_2)(v_1+v_2)\big\}\epsilon^2 - \big\{2\big[(v_1+v_2)^3 + (7v_1+9v_2)v_1^2 + v_2^3\big]d_2 l^2 v_1 v_2^2\\
&+ 2(v_1-v_2)^2 d_2^3 v_1^2 v_2 + 2(2v_1+v_2)d_2 m_2 v_1 v_2^3\big\}\epsilon + 2d_2^2 l^2 v_1^3 v_2^2(v_2+v_1),\\
s_8 &= s'_8(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - s''_8(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
s_6 &= -s'_6(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + s''_6(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
s_4 &= s'_4(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - s''_4(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
s_2 &= -s'_2(\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + s''_2(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
s_0 &= s'_0(\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - s''_0(\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),
\end{aligned}$$

Os coeficientes de (6.41) são inteiramente independentes da relação $b\rho_1 - \kappa\rho_2$ (ou $V_1^2 - V_2^2$), isto é, a diferença entre as velocidades não é mais artifício influente na determinação do sinal do polinômio Λ_4. Então poeríamos dizer que diante de um ϵ suficientemente pequeno e um n suficientemente grande teríamos $\Lambda_4 > 0$. Portanto, encontraríamos $\Lambda_0,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3,\ \Lambda_4,\ \Lambda_5 > 0$ e consequentemente a estabilidade exponencial do sistema (6.28)-(6.30) sem depender da igualdade entre as velocidades κ/ρ_1 e b/ρ_2.

Porém, algo surpreendente aparece quando tentamos responder ao seguinte questionamento: Ainda que tenhamos encontrado um ϵ_0 suficientemente pequeno (para um n suficientemente grande), há alguma possibilidade de ocorrer $\Lambda_4 < 0$? A resposta parece ser afirmativa, visto que surge um parâmetro de damping quando consideramos o coeficiente $s_{12} = 0$. O parâmetro é dado por,

$$\mu_0 = 2\epsilon\frac{(\kappa\rho_2 + b\rho_1)^2}{\kappa^2\rho_2}. \tag{6.42}$$

O termo $s_{12}n^{12}$ é o fator dominante de Λ_4. Porém, Observe que para um ϵ suficientemente pequeno, μ_0 também será suficientemente pequeno e impondo $\mu_0 < \mu$ (para um μ suficientemente grande) obtemos $\Lambda_4 < 0$, fazendo com que a solução do problema esteja à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e consequentemente a não estabilidade exponencial do sistema. Por outro lado, se considerarmos $\mu < \mu_0$, teremos $s_{12} > 0$ e consequentemente $\Lambda_4 > 0$. Em resumo

- se $\mu < \mu_0 \Rightarrow$ estabilidade, independente da igualdade entre as velocidades,
- se $\mu_0 < \mu \Rightarrow$ instabilidade.

Outro caso interessante, análogo ao caso anterior, aparece quando fazemos o mesmo questionamento acerca do coeficiente r_8 do polinômio Λ_2. Em resposta (a este caso), surge o parâmetro

$$\mu_1 = 2\epsilon\frac{(\kappa\rho_2 + b\rho_1)^2 + \kappa^2\rho_2^2}{\kappa^2\rho_2}. \tag{6.43}$$

Novamente, podemos observar que para um ϵ suficientemente pequeno, μ_1 também será suficientemente pequeno e considerando $\mu < \mu_1$ teremos $r_8n^8 < 0$ e consequentemente $\Lambda_2 < 0$, portanto as soluções do sistema (6.28)-(6.30), na forma (6.9), estarão à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e assim não se obtém estabilidade exponencial. A condição $\mu_1 < \mu$, ratifica o caso do polinômio (6.37) ser todo positivo. Resumindo,

- se $\mu_1 < \mu \Rightarrow$ estabilidade, independente da igualdade entre as velocidades,
- se $\mu < \mu_1 \Rightarrow$ instabilidade.

Observe que $\mu_1 = \mu_0 + 2\epsilon\rho_2 \Rightarrow \mu_0 < \mu_1$. Chegamos, portanto, às seguintes conclusões:

1. se $\mu \in (0, \mu_0) \cup (\mu_1, \infty)$ estabilidade,
2. se $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$ instabilidade.

Porém, a conclusão 1. não apresenta coerência, visto que ϵ é um valor fixo e pela análise feita percebemos que esse valor configura-se de modo que

$$\frac{\mu\kappa^2\rho_2}{2(\kappa\rho_2+b\rho_1)^2} \;<\; \epsilon \;<\; \frac{\mu\kappa^2\rho_2}{2[(\kappa\rho_2+b\rho_1)^2+\kappa^2\rho_2^2]}, \tag{6.44}$$

de onde se obtém $\kappa^2\rho_2^2 < 0$, o que não é plausível. Portanto, o resultado é inconclusivo para o sistema considerado.

6.2 Dissipações nas Equações de Rotação e de Movimento Tangencial

Nesta seção, aplicaremos a técnica de Routh-Hurwitz ao sistema de Bresse clássico e ao sistema de Bresse com as modificações na condição de equilíbrio dinâmico propostas por Elishakoff, ambos com dois mecanismos de amortecimento: um na equação de rotação e outro na equação de movimento tangencial.

Primeiramente, tomemos o sistema

$$\begin{aligned}
\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x+\psi+lw)_x - \kappa_0 l(w_x-ly) &= 0, &(6.45)\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x+\psi+lw) + \mu\psi_t &= 0, &(6.46)\\
\rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x-ly)_x + \kappa l(y_x+\psi+lw) + \beta w_t &= 0, &(6.47)
\end{aligned}$$

com as mesmas condições iniciais e de contorno do sistema (6.1) - (6.6). Em complemento às notações (6.8), faremos $d_3 = \beta/\rho_1$, e obtemos as equações

$$\begin{aligned}
(\omega^2+v_1n^2+v_2l^2)A_1 + v_1nA_2 + (v_1+v_2)lnA_3 &= 0, &(6.48)\\
m_2nA_1 + (\omega^2+v_2n^2+m_2+d_2\omega)A_2 + m_2lA_3 &= 0, &(6.49)\\
(v_1+v_2)lnA_1 + v_1lA_2 + (\omega^2+v_2n^2+v_1l^2+d_3\omega)A_3 &= 0. &(6.50)
\end{aligned}$$

Destas equações, surge o sistema matricial

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + v_1 n^2 + v_2 l^2 & v_1 n & (v_1+v_2)ln \\ m_2 n & \omega^2 + v_2 n^2 + m_2 + d_2\omega & m_2 l \\ (v_1+v_2)ln & v_1 l & \omega^2 + v_2 n^2 + v_1 l^2 + d_3\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

cujas soluções não-triviais dadas pela equação

$$\omega^6 + A\omega^5 + B\omega^4 + C\omega^3 + D\omega^2 + E\omega + F = 0, \tag{6.52}$$

com coeficientes

$$\begin{aligned} A &= d_2 + d_3, \\ B &= (v_1 + 2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + d_2 d_3 + m_2, \\ C &= (v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2 l^2 + d_3(m_2 + l^2 v_2), \\ D &= (2v_1+v_2)v_2 n^4 + [(v_2 - v_1)l^2 v_2 + d_2 d_3 v_1 + m_2 v_2]n^2 + (m_2 + l^2 v_1)l^2 v_2 + d_2 d_3 l^2 v_2, \\ E &= (d_2+d_3)v_1 v_2 n^4 + (d_3 v_2 - 2d_2 v_1)l^2 v_2 n^2 + (d_3 m_2 + d_2 l^2 v_1)l^2 v_2, \\ F &= v_1 v_2^2 (n^2 - l^2)^2 n^2. \end{aligned}$$

Analogamente, tomando o sistema (6.45)-(6.47) e usando o equilíbrio dinâmico segundo Elishakoff obtemos o sistema

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa(y_x + \psi + lw)_x - \kappa_0 l(w_x - ly) = 0, \tag{6.53}$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(y_x + \psi + lw) + \mu\psi_t = 0, \tag{6.54}$$

$$\rho_1 w_{tt} - \kappa_0(w_x - ly)_x + \kappa l(y_x + \psi + lw) + \beta w_t = 0. \tag{6.55}$$

As condições iniciais e de contorno são as mesma do sistemas original. De forma inteiramente análoga aos casos anteriores, obtemos o sistema matricial

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + v_1 n^2 + v_2 l^2 & v_1 n & (v_1+v_2)ln \\ (-\omega^2 + m_2)n & v_2 n^2 + m_2 + d_2\omega & m_2 l \\ (v_1+v_2)ln & v_1 l & \omega^2 + v_2 n^2 + v_1 l^2 + d_3\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

cujas soluções não-triviais dadas pela equação

$$A\omega^5 + B\omega^4 + C\omega^3 + D\omega^2 + E\omega + F = 0, \tag{6.57}$$

com coeficientes

$$\begin{aligned}
A &= d_2, \\
B &= (v_1 + v_2)n^2 + d_2 d_3 + m_2, \\
C &= (v_1 + v_2)(d_2 + d_3)n^2 + (v_1 + v_2)d_2 l^2 + d_3 m_2, \\
D &= (2v_1 + v_2)v_2 n^4 + [l^2 v_2^2 + d_2 d_3 v_1 + m_2 v_2]n^2 + l^2 m_2 v_2 + d_2 d_3 l^2 v_2, \\
E &= (d_2 + d_3)v_1 v_2 n^4 + (d_3 v_2 - 2d_2 v_1)l^2 v_2 n^2 + (d_3 m_2 + d_2 l^2 v_1)l^2 v_2, \\
F &= v_1 v_2^2 (n^2 - l^2)^2 n^2.
\end{aligned}$$

As análise que faremos a cerca dos sistemas (6.45)-(6.47) e (6.53)-(6.55) estão resumidas no seguinte teorema:

Teorema 6.2. Suponha que ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno. Se $b/\rho_1 = \kappa/\rho_1$, então as soluções do sistema (6.45)-(6.47) da forma (6.9) ficam à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso implica na estabilidade exponencial das soluções. Caso contrário, se $b/\rho_2 \neq \kappa/\rho_1$, existe uma solução do sistema (6.45)-(6.47) que fica à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$ e isso não implica na estabilidade exponencial das soluções. Além disso, existem soluções do sistema (6.53)-(6.55) que estão à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$, implicando na estabilidade exponencial das soluções, que independem da igualdade entre as velocidades b/ρ_2 e κ/ρ_1.

Prova. Aplicaremos o critério de Routh-Hurwitz primeiramente no sistema (6.45)-(6.47) (assim como no Teorema 6.1), para verificar se os determinantes $\Lambda_0,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3,\ \Lambda_4,\ \Lambda_5,$ e Λ_6 são todos positivos. Então, tomando a equação (6.52) e substituindo ω por $x - \epsilon$, teremos a equação

$$(x-\epsilon)^6 + A(x-\epsilon)^5 + B(x-\epsilon)^4 + C(x-\epsilon)^3 + D(x-\epsilon)^2 + E(x-\epsilon) + F = 0, \tag{6.58}$$

de onde obtemos a equação algébrica

$$l_6 x^6 + l_5 x^5 + l_4 x^4 + l_3 x^3 + l_2 x^2 + l_1 x + l_0 = 0, \tag{6.59}$$

com coeficientes:

$$
\begin{aligned}
l_6 &= 1,\\
l_5 &= -6\epsilon + d_2 + d_3,\\
l_4 &= 15\epsilon^2 - 5(d_2+d_3)\epsilon + (v_1+2v_2)n^2 + (v_2+v_1)l^2 + d_2d_3 + m_2,\\
l_3 &= -20\epsilon^3 + 10(d_2+d_3)\epsilon^2 - 4\big[(v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + d_2d_3 + m_2\big]\epsilon\\
&+ (v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2l^2 + (l^2v_2+m_2)d_3,\\
l_2 &= 15\epsilon^4 - 10(d_2+d_3)\epsilon^3 + 6\big[(v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + d_2d_3 + m_2\big]\epsilon^2\\
&- 3\big[(v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_2+v_1)d_2l^2 + (l^2v_2+m_2)d_3\big]\epsilon + (2v_1+v_2)v_2n^4\\
&+ \big[(v_2 - v_1)l^2v_2 + d_2d_3v_1 + m_2v_2\big]n^2 + l^4v_1v_2 + (d_2d_3+m_2)l^2v_2,\\
l_1 &= -6\epsilon^5 + 5(d_2+d_3)\epsilon^4 - 4\big[(v_1+2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + d_2d_3 + m_2\big]\epsilon^3\\
&+ 3\big[(v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2l^2 + (l^2v_2+m_2)d_3\big]\epsilon^2 - 2\big\{(2v_1+v_2)v_2n^4\\
&+ \big[(v_2-v_1)l^2v_2 + d_2d_3v_1 + m_2v_2\big]n^2 + (d_2d_3+m_2)l^2v_2 + l^4v_1v_2\big\}\epsilon + (d_2+d_3)v_1v_2n^4\\
&+ (d_3v_2 - 2d_2v_1)l^2v_2n^2 + (d_2l^2v_1 + d_3m_2)l^2v_2,\\
l_0 &= \epsilon^6 - (d_2 + d_3)\epsilon^5 + \big[(v_1 + 2v_2)n^2 + (v_1+v_2)l^2 + d_2d_3 + m_2\big]\epsilon^4\\
&- \big[(v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2l^2 + (l^2v_2+m_2)d_3\big]\epsilon^3 + \big[(2v_1+v_2)v_2n^4\\
&+ [(v_2-v_1)l^2v_2 + d_2d_3v_1 + m_2v_2]n^2 + (d_2d_3+m_2)l^2v_2 + l^4v_1v_2\big]\epsilon^2 - \big[(d_2+d_3)v_1v_2n^4\\
&+ (d_3v_2 - 2d_2v_1)l^2v_2n^2 + (d_3m_2 + d_2l^2v_1)l^2v_2\big]\epsilon + v_1v_2^2(n^2-l^2)^2n^2.
\end{aligned}
$$

Em face ao tamanho dos coeficientes, procederemos de modo análogo ao **Teorema 6.1**, para minimizar espaços e notações.

Calculando os determinantes Λ_2, Λ_3 e Λ_4, obtemos respectivamente:

O polinômio,

$$\Lambda_2 = P_8n^8 + P_6n^6 + P_4n^4 + P_2n^2 + P_0 \tag{6.60}$$

com coeficientes

$$
\begin{aligned}
P_8 &= -2(2v_1^2 + v_2^2)v_2^2\epsilon + (d_2+d_3)v_1^2v_2^2,\\
P_6 &= -P_6'(\epsilon^3,\epsilon) + P_6''(\epsilon^2,\epsilon^0),\\
P_4 &= -P_4'(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + P_4''(\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
P_2 &= -P_2'(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + P_2''(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
P_0 &= P_0'(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - P_0''(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),
\end{aligned}
$$

o polinômio

$$\Lambda_3 = T_{10}n^{10} + T_8n^8 + T_6n^6 + T_4n^4 + T_2n^2 + T_0, \tag{6.61}$$

com seus coeficientes dados por

$$\begin{aligned}
T_{10} &= 8(v_1 - v_2)^2v_2^3\epsilon^2 - 2(v_1 - v_2)^2v_2^3(d_2 + d_3)\epsilon,\\
T_8 &= 8v_2\big[8v_1^3 + 5(v_1 + v_2)^2v_2 + 10(v_1^2 + v_2^2)v_2\big]\epsilon^4 - 2\big\{\big[6(v_1 + v_2)^3 + 27(v_1^2 + v_2^2)v_2\\
&+ 26v_1^3\big](d_2 + d_3)v_2\big\}\epsilon^3 + \big\{4\big[5(v_2^2 - v_1^2) + 24v_1v_2\big]l^2v_2^3 + 4\big[4v_1^3 + (v_1 + v_2)^3 + (v_1\\
&+ v_2)v_2^2\big](d_2^2 + d_3^2)v_2 + 4\big[14(v_1 + v_2)v_1^2 + (v_1^2 + 5v_2^2)v_2\big]d_2d_3v_2 + 4(v_1 + 5v_2)m_2v_2^3\big\}\epsilon^2\\
&- \big\{2\big[7(v_2 - v_1)v_1 + (5v_1 + 3v_2)v_2\big]d_2l^2v_2^3 + 2\big[3(v_1 + v_2)^2 + 8v_1v_2\big]d_3l^2v_2^3 + 2(v_1^2\\
&+ v_2^2)d_2^3v_1v_2 + 2\big[(v_1 + v_2)^2 + (6v_1 + v_2)v_1\big](d_2 + d_3)d_2d_3v_1v_2 + 2(v_1^2 + v_2^2)d_3^3v_1v_2\\
&+ 2(3v_1 + 2v_2)d_2m_2v_2^3 + 2(3v_2 - v_1)d_3m_2v_2^3\big\}\epsilon + (v_1 + v_2)^2(d_2 + d_3)d_3l^2v_2^3\\
&+ (d_2 + d_3)^2d_2d_3v_1^3v_2 + (d_2 + d_3)d_2m_2v_1v_2^3,\\
T_6 &= T_6'(\epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - T_6''(\epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon),\\
T_4 &= T_4'(\epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - T_4''(\epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon),\\
T_2 &= T_2'(\epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - T_2''(\epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon),\\
T_0 &= T_0'(\epsilon^{12}, \epsilon^{10}, \epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, \epsilon^0) - T_0''(\epsilon^{11}, \epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon)
\end{aligned}$$

e o polinômio

$$\Lambda_4 = G_{12}n^{12} + G_{10}n^{10} + G_8n^8 + G_6n^6 + G_4n^4 + G_2n^2 + G_0, \tag{6.62}$$

cujos coeficientes são:

$$\begin{aligned}
G_{12} &= 8(v_1 - v_2)^2v_2^4\epsilon^2 - 2(v_1 - v_2)^2v_2^4(d_2 + d_3)\epsilon,\\
G_{10} &= 32v_2\big[2v_1^4 + 2(v_1 - v_2)v_1v_2^2 + 5(v_1^2 + v_2^2)v_2^2\big]\epsilon^4 - 8v_2(d_2 + d_3)\big[8v_1^4 + 9(v_1 - v_2)v_1v_2^2\\
&+ 12(v_1^2 + v_2^2)v_2^2\big]\epsilon^3 + 4\big\{2\big[4(v_2 - v_1)v_1 + 3(3v_1 + v_2)v_2\big]l^2v_2^4 + 2\big[7v_1^4 + 9(v_1 - v_2)v_1v_2^2\\
&+ 5(v_1^2 + v_2^2)v_2^2\big]d_2d_3v_2 + \big[2v_1^4 + 3(v_1^2 + v_2^2)^2\big](d_2^2 + d_3^2)v_2 + 24m_2v_2^5\big\}\epsilon^2 - \big\{4\big[5(v_2 - v_1)v_1\\
&+ 2(v_1 + v_2)v_2)\big]d_2l^2v_2^4 + \big[6(v_1 + v_2)^2 + 16v_1v_2\big]d_3l^2v_2^4 + 2(v_1^3 + v_2^3)(d_2^3 + d_3^3)v_1v_2\\
&+ 2\big[3(v_1^3 - v_2^3) + 4(v_1^2 + v_2^2)v_1^2 + (2v_1^2 + v_2^2)v_2^2\big](d_2 + d_3)d_2d_3v_2 + 2(3v_1 + 2v_2)d_2m_2v_2^4\\
&+ 4(2v_2 - v_1)d_3m_2v_2^4\big\}\epsilon + (d_2 + d_3)\big[(v_1 + v_2)^2d_3l^2v_2^4 + (d_2 + d_3)d_2d_3v_1^4v_2 + d_2m_2v_1v_2^4\big],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G_8 &= G'_8(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - G''_8(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
G_6 &= G'_6(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - G''_6(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
G_4 &= G'_4(\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - G''_4(\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
G_2 &= G'_2(\epsilon^{12},\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - G''_2(\epsilon^{11},\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
G_0 &= G'_0(\epsilon^{14},\epsilon^{12},\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - G''_0(\epsilon^{13},\epsilon^{11},\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon).
\end{aligned}
$$

Pelo fato de $\Lambda_6 = l_6\Lambda_5$, basta calcular o polinômio

$$
\Lambda_5 = Z_{10}n^{10} + Z_8n^8 + Z_6n^6 + Z_4n^4 + Z_2n^2 + Z_0, \tag{6.63}
$$

sendo seus coeficientes dados por:

$$
\begin{aligned}
Z_{10} &= -128(v_1-v_2)^4v_2\epsilon^5 + 128(v_1-v_2)^4v_2(d_2+d_3)\epsilon^4 - 8(v_1-v_2)^4v_2\big[5(d_2+d_3)^2+14d_2d_3\big]\epsilon^3\\
&\quad +4(v_1-v_2)^4v_2\big(d_2+d_3)[(d_2+d_3)^2+4d_2d_3\big]\epsilon^2 - 2(v_1-v_2)^4d_2d_3v_2(d_2+d_3)^2\epsilon,\\
Z_8 &= -128(v_1-v_2)^2\big[(v_1+v_2)^2+(12v_1+16v_2)v_2\big]\epsilon^7 + 64(v_1-v_2)^2(d_2+d_3)\big[3(v_1+v_2)^2\\
&\quad +4(7v_1+10v_2)v_2\big]\epsilon^6 - 32(v_1-v_2)^2\big\{2\big[5(v_1^2+v_2^2)+38v_1v_2\big]l^2+8\big[(v_1+v_2)^2+(7v_1\\
&\quad +11v_2)v_2\big]d_2d_3 + \big[3(v_1+v_2)^2+4(7v_1+9v_2)v_2\big](d_2^2+d_3^2) + 2(7v_1+5v_2)m_2v_2\big\}\epsilon^5\\
&\quad +16(v_1-v_2)^2\big\{4\big[5(v_1+v_2)^2+28v_1v_2\big]d_2l^2v_2 + 16\big[(v_1+v_2)^2+7v_1v_2\big]d_3l^2v_2 + \big[(v_1\\
&\quad +v_2)^2+2(9v_1+7v_2)v_2\big](d_2^3+d_3^3) + \big[(v_1+v_2)(53v_2+7v_1)+20v_2^2\big](d_2+d_3)d_2d_3\\
&\quad +4\big[6v_1+5v_2\big]d_2m_2v_2 + 4\big[7v_1+5v_2\big]d_3m_2v_2\big\}\epsilon^4 - 8(v_1-v_2)^2\big\{(3v_1+v_2)^2l^4v_2^2\\
&\quad +\big[11(v_1+v_2)^2+2(37v_1+v_2)v_2\big]d_2^2l^2v_2 + \big[29(v_1+v_2)^2+196v_1v_2\big]d_2d_3l^2v_2 + 2\big[5(v_1\\
&\quad +v_2)^2+(v_1+35v_2)v_1\big]d_3^2l^2v_2 + 2\big[(v_1+v_2)^2+(13v_1+10v_2)v_2\big](d_2^2+d_3^2)d_2d_3+\big[5(v_1\\
&\quad +v_2)^2+2(13v_1+18v_2)v_2\big]d_2^2d_3^2 + (7v_1+2v_2)(d_2^4+d_3^4)v_2 + 2(5v_1-v_2)l^2m_2v_2^2\\
&\quad +4(4v_1+3v_2)d_2^2m_2v_2 + (43v_1+35v_2)d_2d_3m_2v_2 + (17v_1+13v_2)d_3^2m_2v_2 + m_2^2v_2^2\big\}\epsilon^3\\
&\quad +4(v_1-v_2)^2\big\{(3v_1+v_2)^2(d_2+d_3)l^4v_2^2+\big[(v_1+v_2)^2+2(9v_1+v_2)v_2\big]d_2^3l^2v_2+2\big[7(v_1\\
&\quad +v_2)^2+(51v_1+v_2)v_2\big]d_2^2d_3l^2v_2+\big[17(v_1+v_2)^2+2(49v_2+v_1)v_1\big]d_2d_3^2l^2v_2+2\big[2(v_1\\
&\quad +v_2)^2+(7v_2+v_1)v_1\big]d_3^3l^2v_2 + \big[(v_1+v_2)^2+2(5v_1+3v_2)v_2\big](d_2+d_3)d_2^2d_3^2 + (9v_1\\
&\quad +2v_2)(v_1-v_2)(d_2^3+d_3^3)d_2d_3v_2 + (d_2^5+d_3^5)v_1v_2 + 2(5v_1-v_2)(d_2+d_3)l^2m_2v_2^2+2(3v_1\\
&\quad +v_2)d_2^3m_2v_2+(25v_1+17v_2)d_2^2d_3m_2v_2 + 2(11v_1+9v_2)d_2d_3^2m_2v_2+3(v_1+v_2)d_3^3m_2v_2\\
&\quad +(d_2+d_3)m_2^2v_2^2\big\}\epsilon^2 - 2(v_1-v_2)^2\big\{(3v_1+v_2)^2d_2d_3l^4v_2^2 + \big[(v_1+v_2)^2+2(9v_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +v_2)v_2\big]d_2^3d_3l^2v_2 + 4\big[2(v_1+v_2)^2 + 7v_1v_2)\big]d_2^2d_3^2l^2v_2 + 2(v_1+3v_2)(4v_1+v_2)d_2d_3^3l^2v_2 \\
& +(v_1+v_2)^2d_3^4l^2v_2 + (d_2+d_3)^2d_2d_3v_1v_2 + 2(d_2^2+d_3^2)d_2^2d_3^2v_1v_2 + 4(d_2^2+d_3^2)l^2m_2v_1v_2^2 \\
& +2(v_1-v_2)d_2d_3l^2m_2v_2^2 + d_2^4m_2v_1v_2 + 2d_2^3d_3m_2v_2(4v_1+v_2) + 5d_2^2d_3^2m_2v_2(2v_1+v_2) \\
& +3d_2d_3^3m_2v_2(v_1+v_2)+d_2d_3m_2^2v_2^2\big\}\epsilon+(v_1-v_2)^2(d_2+d_3)^2\big[(v_1+v_2)^2d_3l^2+d_2m_2v_1\big]d_2d_3v_2, \\
Z_6 \;=\; & -Z_6'(\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon)+Z_6''(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2)+(v_1+v_2)^2\big[(v_1+v_2)^2 + 4(2v_1+v_2)v_1\big]d_2d_3^2l^6v_2^2 \\
& +2(v_1^2-v_2^2)(v_1+v_2)d_2d_3^4l^4v_2^2 + \big[(v_2-v_1)(v_1^3-v_2^3) + 7(v_1+v_2)^2v_1v_2 + 4v_1^2v_2^2\big]d_2^2d_3^3l^4v_2 \\
& +\big[(v_2^4-v_1^4) + (v_1+v_2)(6v_1+10v_2)v_1v_2\big]d_2^3d_3^2l^4v_2 + (v_1+v_2)^2(d_2+d_3)^2d_2^3d_3^2l^2v_1v_2 \\
& +2(v_1^2-v_2^2)(v_1+v_2)d_2d_3^2l^4m_2v_2^2 + \big[5(v_1+v_2)^2 + 4(2v_1+v_2)v_2\big]d_2^2d_3l^4m_2v_1v_2^2 +(v_1 \\
& +v_2)(v_1^2+3v_2^2)d_2d_3^4l^2m_2v_2 + \big[(v_1^2-v_2^2)v_1 + 3(v_1^2+v_2^2)v_2 + 2v_2^3\big]d_2^2d_3^3l^2m_2v_2 + \big[(v_2 \\
& -v_1)(v_1-5v_2)v_1 + 2(3v_1^2+v_2^2)v_2\big]d_2^3d_3^2l^2m_2v_2 + \big[8v_1v_2 - (v_1-v_2)^2\big]d_2^4d_3l^2m_2v_1v_2 \\
& +4(v_1+v_2)^2d_3^3l^4m_2v_1v_2^2 + (d_2+d_3)^2\, d_2^2d_3^3m_2v_1^2v_2 + 4(d_2^2+d_3^2)l^2m_2^2v_1^2v_2^2 + 2(v_1 \\
& -v_2)d_2^2d_3l^2m_2^2v_1v_2^2 + (v_1+v_2)^2d_2d_3^2l^2m_2^2v_2^2 + (v_1+v_2)(d_2+d_3)d_2^2d_3^2m_2^2v_1v_2 \\
& +d_2^2d_3m_2^3v_1v_2^2, \\
Z_4 \;=\; & -Z_4''(\epsilon^{11},\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + Z_4''(\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0), \\
Z_2 \;=\; & -Z_2''(\epsilon^{13},\epsilon^{11},\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + Z_2''(\epsilon^{12},\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0), \\
Z_0 \;=\; & -Z_0''(\epsilon^{15},\epsilon^{13},\epsilon^{11},\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + Z_0''(\epsilon^{14},\epsilon^{12},\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0).
\end{aligned}
$$

Note que o único polinômio que não depende da relação $b/\rho_2 - \kappa/\rho_1$ (no caso, $v_1 - v_2$) é o polinômio (6.60) cujo termo dominante pode ser representado por

$$P_8n^8 = -P_8'(\epsilon, n^8) + \big[(d_2+d_3)v_1^2v_2^2\big]n^8, \tag{6.64}$$

sobre o qual as hipóteses de um ϵ suficientemente pequeno (para um n grande) pode acarretar que $P_8n^8 > 0$ e com isso obter $\Lambda_2 > 0$. No entanto, os polinômios Λ_3, Λ_4 e Λ_5 possuem os coeficientes de seu termos dominantes inteiramente dependentes da relação entre as velocidades. Se considerarmos $b/\rho_2 - \kappa/\rho_1 \neq 0$, podemos encontrar um ϵ suficientemente pequeno tal que $4\epsilon\rho_2\rho_1 < \mu\rho_1 + \beta\rho_2$ para μ e β suficientemente grandes e dessa forma obter $\Lambda_3 < 0$ e $\Lambda_4 < 0$, e esse fato impossibilita obter a estabilidade exponencial para o sistema. Porém, se tomarmos $b/\rho_2 - \kappa/\rho_1 = 0$, os coeficientes dos termos dominantes dos polinômios (6.61), (6.62) e (6.63) se anulam, isto é,

$$T_{10} = G_{12} = Z_{10} = Z_8 = 0$$

e os novos termos dominantes de cada polinômio supracitado poderá ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
T_8 n^8 &= T_8'\left(\epsilon^4, \epsilon^2, n^8\right) - T_8''\left(\epsilon^3, \epsilon, n^8\right) + v_2^4(d_2+d_3)\big[4d_3 l^2 v_2 + (d_2+d_3)d_2 d_3 + d_2 m_2\big]n^8,\\
G_{10} n^{10} &= G_{10}'\left(\epsilon^4, \epsilon^2, n^{10}\right) - G_{10}''\left(\epsilon^3, \epsilon, n^{10}\right) + v_2^5(d_2+d_3)\big[4d_3 l^2 v_2 + d_2 d_3(d_2+d_3) + d_2 m_2\big]n^{10},\\
Z_6 &= -Z_6'(\epsilon^9, \epsilon^7, \epsilon^5, \epsilon^3, \epsilon, n^6) + Z_6''(\epsilon^8, \epsilon^6, \epsilon^4, \epsilon^2, n^6) + \big\{64 d_2 d_3^2 l^6 v_2^6 + 32 d_2^2 d_3^2 l^4 v_2^5(d_2+d_3)\\
&\quad + 4(d_2+d_3)^2 d_2^3 d_3^2 l^2 v_2^4 + 8 d_2 d_3 m_2 l^2 v_2^4\left(d_3^3 + d_2 d_3^2 + d_2^2 d_3 + d_2^3\right)\\
&\quad + 16 d_3 m_2 l^4 v_2^5(2d_2^2 + d_3^2) + d_2^2 d_3^3 m_2 v_2^3 (d_2+d_3)^2 + 4 l^2 m_2^2 v_2^4\left(d_2^2 + d_2 d_3 + d_3^2\right)\\
&\quad + d_2^2 d_3 m_2^2 v_2^3[2(d_2+d_3)d_3 + m_2]\big\} n^6.
\end{aligned}$$

Veja agora que os termos acima não se anulam quando impomos a igualdade entre as velocidades e os termos independentes (de ϵ) dos coeficientes são todos positivos. Portanto, é possível determinar um ϵ_0 suficientemente pequeno (e n grande) tal que

$$T_8 n^8,\ G_{10} n^{10},\ Z_6 n^6 > 0$$

e assim obter $\Lambda_3,\ \Lambda_4,\ \Lambda_5 > 0$. Os mesmos argumentos se aplicam a Λ_0 e Λ_1. Nessas condições, podemos concluir que os determinantes $\Lambda_0,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3,\ \Lambda_4,\ \Lambda_5$ e Λ_6 são todos positivos considerando a igualdade $b/\rho_2 = \kappa/\rho_1$, para um ϵ suficientemente pequeno e um n suficientemente grande, o que mostra que as soluções do sistema (6.45)-(6.47) na forma (6.9) estão à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$ e dessa forma obter a estabilidade exponencial do sistema.

Agora considere o sistema (6.53)-(6.55) com dois mecanismos de dam-ping's $\mu\psi_t$ e $\beta\omega_t$. De modo inteiramente análogo ao caso anterior, tomando a equação (6.57) e substituindo ω por $x-\epsilon$ e fazendo a expansão dos termos $(x-\epsilon)^j,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, obtemos a equação

$$l_5 x^5 + l_4 x^4 + l_3 x^3 + l_2 x^2 + l_1 x + l_0 = 0 \tag{6.65}$$

com coeficientes:

$$\begin{aligned}
l_5 &= d_2,\\
l_4 &= -5d_2\epsilon + (v_1+v_2)n^2 + d_2 d_3 + m_2,\\
l_3 &= 10 d_2 \epsilon^2 - 4\big[(v_1+v_2)n^2 + d_2 d_3 + m_2\big]\epsilon + (v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2 l^2 + d_3 m_2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l_2 &= -10d_2\epsilon^3 + 6\big[(v_1 + v_2)n^2 + m_2 + d_2d_3\big]\epsilon^2 - 3\big\{(v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2l^2 \\
&\quad +d_3m_2\big\}\epsilon + (2v_1+v_2)v_2n^4 + (l^2v_2^2 + d_2d_3v_1 + m_2v_2)n^2 + d_2d_3l^2v_2 + l^2m_2v_2, \\
l_1 &= 5d_2\epsilon^4 - 4\big[(v_1+v_2)n^2 + d_2d_3 + m_2\big]\epsilon^3 + 3\big[(v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2l^2 + d_3m_2\big]\epsilon^2 \\
&\quad -2\big[(2v_1+v_2)v_2n^4 + (l^2v_2^2 + d_2d_3v_1 + m_2v_2)n^2 + (d_2d_3+m_2)l^2v_2\big]\epsilon + (d_2+d_3)v_1v_2n^4 \\
&\quad +(d_3v_2 - 2d_2v_1)l^2v_2n^2 + (d_2l^2v_1 + d_3m_2)l^2v_2, \\
l_0 &= -d_2\epsilon^5 + \big[(v_1+v_2)n^2 + d_2d_3 + m_2\big]\epsilon^4 - \big[(v_1+v_2)(d_2+d_3)n^2 + (v_1+v_2)d_2l^2 + d_3m_2\big]\epsilon^3 \\
&\quad +\big[(2v_1+v_2)v_2n^4 + (l^2v_2^2 + d_2d_3v_1 + m_2v_2)n^2 + (d_2d_3+m_2)l^2v_2\big]\epsilon^2 - \big[(d_2+d_3)v_1v_2n^4 \\
&\quad +(d_3v_2 - 2d_2v_1)l^2v_2n^2 + (d_2l^2v_1 + d_3m_2)l^4v_1v_2\big]\epsilon + v_1v_2^2(n^2-l^2)^2n^2.
\end{aligned}
$$

Devemos verificar os sinais dos determinantes $\Lambda_0,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3,\ \Lambda_4$ e Λ_5. Como $\Lambda_0 = l_0$, $\Lambda_1 = l_1$ e $\Lambda_5 = l_5\Lambda_4$, basta analisar os sinais de $\Lambda_2,\ \Lambda_3$ e Λ_4. Assim, após os alguns cálculos, foram obtidos os seguintes polinômios:

$$
\Lambda_2 = p_8n^8 + p_6n^6 + p_4n^4 + p_2n^2 + p_0 \tag{6.66}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
p_8 &= -2v_2^2\big[(v_1+v_2)^2 + v_1^2\big]\epsilon + v_1^2v_2^2(d_2+d_3), \\
p_6 &= -p_6'(\epsilon^3,\epsilon) + p_6''(\epsilon^2,\epsilon^0), \\
p_4 &= -p_4'(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + p_4''(\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0), \\
p_2 &= -p_2'(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + p_2''(\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0), \\
p_0 &= p_0'(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - p_0''(\epsilon^5,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),
\end{aligned}
$$

o polinômio,

$$
\Lambda_3 = t_{10}n^{10} + t_8n^8 + t_6n^6 + t_4n^4 + t_2n^2 + t_0, \tag{6.67}
$$

com coeficientes

$$
\begin{aligned}
t_{10} &= 4v_2^4(v_1+v_2)\epsilon^2 - 2v_2^3\big\{d_2\big[(v_1+v_2)^2 + v_1^2\big] + d_3(v_1+v_2)v_2\big\}\epsilon + d_2v_1^2v_2^3(d_3+d_2), \\
t_8 &= t_8'(\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - t_8''(\epsilon^3,\epsilon), \\
t_6 &= t_6'(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - t_6''(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon), \\
t_4 &= -t_4'(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + t_4''(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0), \\
t_2 &= t_2'(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - t_2''(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon), \\
t_0 &= t_0'(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - t_0''(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon)
\end{aligned}
$$

e o polinômio

$$\Lambda_4 = g_{12}n^{12} + g_{10}n^{10} + g_8n^8 + g_6n^6 + g_4n^4 + g_2n^2 + g_0 \tag{6.68}$$

cujos coeficientes são,

$$\begin{aligned}
g_{12} &= 4v_2^4(v_1+v_2)^2\epsilon^2 - 2v_2^4\big\{d_2v_1^2 + d_3(v_1+v_2)^2\big\}\epsilon + d_2d_3v_1^2v_2^4,\\
g_{10} &= g'_{10}(\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - g''_{10}(\epsilon^3,\epsilon),\\
g_8 &= g'_8(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - g''_8(\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
g_6 &= -g'_6(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + g''_6(\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
g_4 &= g'_4(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - g'_4(\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon),\\
g_2 &= -g'_2(\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon) + g''_2(\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0),\\
g_0 &= g'_0(\epsilon^{10},\epsilon^8,\epsilon^6,\epsilon^4,\epsilon^2,\epsilon^0) - g'_0(\epsilon^9,\epsilon^7,\epsilon^5,\epsilon^3,\epsilon).
\end{aligned}$$

Note que (6.66), (6.67) e (6.68) são polinômios em n e seus coeficiente são polinômios em ϵ. O termo dominante de cada polinômio acima possui coeficiente cujo termo independente (de ϵ) é positivo, ou seja,

$$\begin{aligned}
p_8 &= -2v_2^2\big[(v_1+v_2)^2 + v_1^2\big]\epsilon + (d_2+d_3)v_1^2v_2^2, \qquad (6.69)\\
t_{10} &= 4v_2^4(v_1+v_2)\epsilon^2 - 2v_2^3\big\{d_2\big[(v_1+v_2)^2+v_1^2\big] + d_3(v_1+v_2)v_2\big\}\epsilon\\
&\quad +(d_3+d_2)d_2v_1^2v_2^3, \qquad (6.70)\\
g_{12} &= 4v_2^4(v_1+v_2)^2\epsilon^2 - 2v_2^4\big\{d_2v_1^2 + d_3(v_1+v_2)^2\big\}\epsilon + d_2d_3v_1^2v_2^4, \qquad (6.71)
\end{aligned}$$

com $(d_2+d_3)v_1^2v_2^2 > 0,\ (d_3+d_2)d_2v_1^2v_2^3 > 0$ e $d_2d_3v_1^2v_2^4 > 0$ (o mesmo argumento se aplica a Λ_0 e Λ_1). Além disso, observa-se que os coeficientes (6.69), (6.70) e (6.71) não dependem da relação $b/\rho_2 - \kappa/\rho_1$ (ou $v_1 - v_2$), diferentemente do que ocorre com o caso clássico (sem a proposta de Elishakoff). Outrossim, a condição de sinal do coeficiente (6.69) está subordinada ao parâmetro (6.43), em que

$$\text{se} \quad \mu_1\rho_1 > \mu\rho_1 + \beta\rho_2, \quad \text{então} \quad p_8 < 0, \tag{6.72}$$

$$\text{se} \quad \mu_1\rho_1 < \mu\rho_1 + \beta\rho_2, \quad \text{então} \quad p_8 > 0. \tag{6.73}$$

Sabemos que μ_1 depende diretamente de ϵ. Então se a condição (6.72) ocorrer, não poderemos obter a estabilidade exponencial, pois acarretaria $p_8n^8 < 0$ e consequentemente $\Lambda_2 < 0$. Logo, para um n suficientemente grande podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno de tal modo que a condição (6.73) seja satisfeita, para que tenhamos

$$p_8 n^8 > 0, \;\; t_{10} n^{10} > 0 \;\text{ e }\; g_{12} n^{12} > 0$$

e assim obter $\Lambda_2, \; \Lambda_3, \; \Lambda_4 > 0$. Com isso podemos concluir que os determinantes Λ_0, Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 e Λ_5 são todos positivos e, portanto, as soluções do sistema (6.53)-(6.55) na forma (6.9) estão à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$, garantindo estabilidade exponencial das soluções e isso independentemente da igualdade entre as velocidades b/ρ_2 e κ/ρ_1. $\square$

CAPÍTULO 7

Considrações Finais e Perspectivas futuras

Estudamos o sistema de equações diferenciais parciais que modela uma viga metálica delgada sobre uma base composta por molas independentes conhecido como Sistema de Timoshenko-Ehrenfest sobre uma fundação de Winkler, proposto inicialmente por Elishakoff em (ELISHAKOFF I.; TONZANI, 2017). Este sistema se difere do modelo original de Timoshenko, pela inserção do termo αy na equação de movimento transversal com α representando a reação da fundação, conhecido como coeficiente de rigidez linear da fundação. Constatamos que o modelo apresenta dois modos de frequência, um para o primeiro espectro e outro para o segundo espectro.

Estudamos também a sua versão truncada obtida após a adoção da condição de equilíbrio dinâmico proposta pelo próprio Elishakoff em (ELISHAKOFF, 2010) e verificamos que esse novo sistema possui apenas um modo de frequência, tal qual mostrado no trabalho de Almeida e Ramos (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017).

Baseados nos trabalhos de Nesterenko (NESTERENKO V. V.; CHERVYAKOV, 1993; NESTERENKO, 1993) e de Stephen (STEPHEN, 2006; STEPHEN N. G.; PUCHEGGER, 2006), calculamos os lagrangeanos e obtivemos as Energias Ostrogradski para a cada modelo. Mostramos que a Energia Ostrogradski possui sinais contrários para o modelo com dois modos de frequência e é positiva para o modelo com apenas um modo e que o sinal está fortemente associado a natureza do modo de vibração.

Inspirados no trabalho de Quintanilla (QUINTANILLA, 2003) e Almeida e Ramos (ALMEIDA D. S.; RAMOS, 2017), analisamos questões de estabilidade exponencial para os modelos utilizando a técnica conhecida como Critério de Routh-Hurwitz. Através dessa técnica, verificamos que a estabilidade exponencial do modelo com dois espectros de frequência ocorre somente se as velocidades de fase forem iguais ($\kappa\rho_2 = b\rho_1$). Porém, para o modelo com apenas um espectro a estabilidade ocorre sem que haja essa dependência.

Outras questões concernentes à teoria original de Timoshenko que pretendemos investigar, está relacionada à influência dos mecanismos de amortecimento no controle do espectro que apresenta comportamento não condizente com as leis físicas. A ideia é obter parâmetros que ofereçam recursos que possam tornar o espectro “mau”comportado em um espectro realístico.

Perspectivas no âmbito da análise numérica serão consideradas para os sistemas apresentados neste trabalho.

Neste trabalho, inspirados pelos resultados da primeira parte, consideramos investigar a existência de espectros de frequência para o modelo dinâmico de vigas curvas regidas pelas hipóteses de Bresse. Inspiramo-nos nos resultados alçados e estabelecidos na vasta literatura sobre a teoria de vigas de Timoshenko e valemo-nos da técnica que emprega funções harmônicas como soluções do sistema para comprovar nossas suspeitas. Obtivemos resposta positiva à essas perspectivas. Mostramos a existência de três espectros de frequência para o sistema de Bresse e, além disso, verificamos uma proximidade gráfica com os espectros previstos na teoria de vigas de Timoshenko.

Notoriamente, em face à envergadura alcançada pelos resultados acerca do modelo dinâmico de Timoshenko, deparamo-nos com a proposta apresentada por Elishakoff em (ELISHAKOFF, 2010), onde o autor sugere outro equilíbrio dinâmico para o modelo. Essa mudança, elimina um espectro de frequência conhecido como *segundo espectro* da teoria original de Timoshenko. Como o sistema de Bresse representa uma generalização para o sistema de Timoshenko, pensamos que adotando a condição de equilíbrio dinâmico na equação de rotação proporcionaria efeito análogo nas equações de Bresse. Também obtivemos resposta positiva neste contexto. A técnica eliminou o segundo modo de frequência do sistema de Bresse.

Outras perspectivas oriundas no contexto do trabalho ora exposto, reside em apresentar um estudo sobre a estabilidade no âmbito da Análise Numérica onde pretendemos incluir outros sistemas que não foram previamente apresentados neste trabalho.

Referências Bibliográficas

ABRAMOVICH H.; ELISHAKOFF, I. Application of the krein's method for determination of natural frequencies of periodically supported beam based on simplified brese-timoshenko equations. *Acta Mechanica*, v. 66, n. 1-4, p. 39–59, 1987.

ALMEIDA, D. S. *Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computaçao Científica, Petrópolis, 2009.

ALMEIDA D. S.; RAMOS, A. J. A. On the nature of dissipative timoshenko systems at light of the second spectrum of frequency. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 68, n. 3, p. 145, 2017.

ALMEIDA D. S.; RAMOS, A. J. A. S. M. L. M. L. G. R. Asymptotic behavior of weakly dissipative bresse-timoshenko system on influence of second spectrum of frequency. *Z Angew Math Mech*, p. 1–14, 2018.

ALMEIDA D. S.; RIVERA, J. M. Stability criterium to explicit finite difference applied to the bresse system. *African Mathematical Union*, v. 26, p. 761–778, 2014.

ALMEIDA D. S.; SANTOS, M. L. R. J. M. Stability to weakly dissipative timoshenko systems. *Mathematical Methods in the Applied Science*, v. 34, p. 1965–1976, 2013.

BASHYAM G. R.; PRATHAP, G. The second frequency of timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 73, n. 3, p. 407–420, 1981.

BHASKAR, A. Elastic waves in timoshenko beams: the 'lost' and 'found' of an eigemode. *Proceedings of the Royal Society*, v. 465, p. 239–255, 2009.

BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. [S.l.]: North Holland, 2010.

CAMPELO, A. D. S. *Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Fracamente Dissipativos de Mindlin-Timoshenko*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

CAZZANI A.; STOCHINO, F. T. E. On the whole spectrum of timoshenko beams. part i: a theoretical revisitation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 24, p. 1–30, 2016.

CAZZANI A.; STOCHINO, F. T. E. On the whole spectrum of timoshenko beams. part ii: further applications. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, v. 25, p. 1–21, 2016.

DIEUDONNÉ, M. J. *La théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients qualconques*. Paris: [s.n.], 1938. v. 1.

ELISHAKOFF, I. An equation both more consistent and simpler than the Bresse–Timoshenko equation. In: GILAT, R.; BANKS-SILLS, L. (Ed.). *Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, Solid Mechanics and Its Applications*. Berlim: Springer, 2010. p. 249–254.

ELISHAKOFF I.; TONZANI, G. M. M. A. Effect of boundary conditions in three alternative models of timoshenko-ehrenfest beams on winkler elastic foundation. *Acta Mechanica*, 2017.

HAN S. M.; BENAROYA, H. W. T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999.

LEVINSON M.; COOKE, D. W. On the two frequency spectra of timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, v. 84, n. 3, p. 319–326, 1982.

LIMA, E. L. *Um teorema sobre solubilidade de equações polinomiais por radicais*. [S.l.]: Revista do Professor de Matemática - SBM, 1994.

LIU Z.; ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*. Boca Raton: CHAPMAN & HALL/CRC, 2000. v. 1.

MANEVICH A.; KOLAKOWSKI, J. Free and forced oscillations of timoshenko bean made of viscoelastic material. *Journal of Theorical and Applied Mechanics*, v. 49, n. 1, p. 3–16, 2011.

MEDEIROS L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.

MESSAOUDI S. A.; MUSTAFA, M. I. A stability result in a weakly damped nonlinear timoshenko system. *AIP Conference Proceedings*, v. 123, 2009.

MESSAOUDI S. A.; SAID-HOUARI, B. Energy decay in a timoshenko-type system of thermoelasticity of type iii. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 348, p. 298–307, 2008.

NESTERENKO, V. V. A theory for transverse vibrations of the timoshenko beam. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 57, n. 4, p. 669–677, 1993.

NESTERENKO V. V.; CHERVYAKOV, A. M. Is it possible to assign physical meaning to field theory with higher derivatives? *Laboratory of Computing Techniques & Automation, Joint Institute for Nuclear Research*, p. 93–193, 1993.

PAZY, H. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Springer, 1983.

QUINTANILLA, R. Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity. *Applied Mathematics Letters*, v. 16, p. 487–491, 2003.

RAPOSO C. A.; FERREIRA, J. S. M. L. C. N. N. O. Exponential stability for the timoshenko system with two weak dampings. *Applied Mathematics Letters*, v. 18, p. 535–541, 2005.

RIVERA J. E.; RACKE, R. Timoshenko systems with indefinite damping. *Journal of Mathematical Aanalysis and Applications*, v. 341, p. 1068–1083, 2008.

RIVERA, J. M. *Semigrupos e Equações Diferenciais Parciais*. Petrópolis: LNCC, 2007.

RIVERA J. M.; RACKE, R. Global stability for damped timoshenko systems. *Discrete Continuous and Dynamical Systems*, v. 9, p. 1625–1639, 2003.

SANTOS, M. J. *Controlabilidade Exata Interna, Estabilização e Análise de Dispersão para um Sistema Elástico Poroso*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

SMITH, R. W. M. Graphical representation of timoshenko beam modes for clamped-clamped boundary conditions at high frequency: Beyond transverse deflection. *Wave Motion*, v. 45, p. 785–794, 2008.

SOUFYANE, A. Stabilization de la poutre de timoshenko. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 328, n. 8, p. 731–734, 1999.

STEPHEN, N. G. The second spectrum of timoshenko beam theory - further assessment. *Journal of Sound and Vibration*, v. 292, p. 372–389, 2006.

STEPHEN, N. G. On the ostrogradski instability for higher-order and pseudo-mechanical energy. *Journal of Sound and Vibration*, v. 310, p. 729–739, 2008.

STEPHEN N. G.; PUCHEGGER, S. On the valid frequency range of timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 297, p. 1082–1087, 2006.

TRAILL-NASH R. W.; COLLAR, A. R. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. *The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, v. 6, p. 186–222, 1953.