



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Controlabilidade e estabilização  
para uma versão truncada do sistema de Timoshenko**

Belém-PA

2019

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues

**Controlabilidade e estabilização  
para uma versão truncada do sistema de Timoshenko**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática da Universidade Federal do Pará (PDM-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

*Orientador:* **Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

Belém-PA

2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

R696c Rodrigues, Leonardo Rogério da Silva  
Controlabilidade e estabilização para uma versão truncada do  
sistema de Timoshenko / Leonardo Rogério da Silva Rodrigues. —  
2019.  
128 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior  
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática  
e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade  
Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Versão truncada de Timoshenko. 2. Espectro não-físico.  
3. Existência. 4. Controlabilidade. 5. Estabilização. I. Título.

CDD 515.353

---


# Controlabilidade e estabilização para uma versão truncada do sistema de Timoshenko

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues

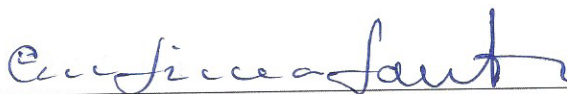
Tese apresentada ao Programa de Doutorado em  
Matemática da Universidade Federal do Pará (PDM-  
UFPA) como parte dos requisitos necessários para  
obtenção do título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 18 de outubro de 2019

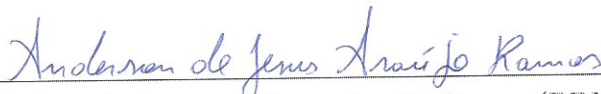
Resultado: APROVADO.



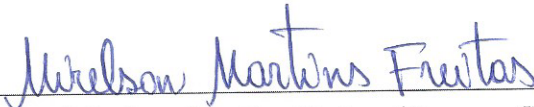
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (PDM/UFPA) - Orientador



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (PDM/UFPA)



Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos (PDM/UFPA)



Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas (Campus Salinópolis/UFPA)



Prof. Dr. Manoel Jeremias dos Santos (Campus Abaetetuba/UFPA)

Belém-PA

2019

## Resumo

### Controlabilidade e estabilização para uma versão truncada do sistema de Timoshenko

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues

*Orientador:* Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática da Universidade Federal do Pará (PDM-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

No presente trabalho, iremos estudar questões acerca dos aspectos quantitativos, existência, unicidade e dependência contínua das soluções e qualitativos, tais como, controlabilidade nula, controlabilidade nula tipo-memória e estabilização assintótica para o sistema de Timoshenko sob a influência do segundo espectro de frequência. Serão abordados problemas lineares e não lineares.

**Palavras-chave:** Versão truncada de Timoshenko, espectro não-físico, existência, unicidade, controlabilidade, memória, damping localmente distribuído, estimativas uniformes.

Belém-Pará

2019

*Abstract***Controlabilidade e estabilização para  
uma versão truncada do sistema de Timoshenko**

Leonardo Rogério da Silva Rodrigues

*Advisor:* Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

*Abstract* of Doctoral Thesis submitted to the Postgraduate Program in Mathematics, Federal University of Pará (UFPA-PDM) as part of the requirements for obtaining a Doctoral Degree in Mathematics.

In the present thesis, we will study questions about the quantitative aspects, existence, uniqueness and continuous dependence of solutions and qualitative, zero controllability, null controllability of the memory type and asymptotic stabilization for the solutions of the Timoshenko system under the influence of the second frequency spectrum. Linear and nonlinear problems will be addressed.

**Keywords:** Timoshenko truncated version, non-physical spectrum, existence, uniqueness, controllability, memory, locally distributed damping, uniform estimates.

Belém-Pará

2019

*“Dedico este trabalho a minha família. Em especial a minha mãe, Djacir R. da Slva. A minha esposa Josicleide Silva e ao meu filho Luís Otávio.”*

*“Most of the fundamental ideas of Science are essentially simple and can, as a rule, be expressed in a language understandable to all”.*  
*(Albert Einstein)*



## Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Dilberto Almeida, pela paciência, pelas conversas, por ajudar-me no conhecimento obtido sempre me indicando o caminho a ser seguido e por depositar sua confiança em mim diante desse trabalho. Aos meus amigos do GPAM, ao Colegiado do Curso de Licenciatura em Ciências Naturais do Campus VII de Codó-MA por ter me concedido afastamento integral para realização desse Doutorado.

À minha família.

À banca examinadora.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
0.1 Segundo espectro e consequência para estabilização . . . . .	10
0.2 O Cenário de controlabilidade . . . . .	16
0.3 Contexto do trabalho e declaração dos principais resultados . . . . .	18
<b>1 Controlabilidade nula para versão truncada do sistema de Timosheko</b>	<b>20</b>
1.1 Introdução . . . . .	20
1.2 Hipóteses e notações iniciais . . . . .	21
1.3 Existência e unicidade . . . . .	22
1.4 Desigualdade de Energia . . . . .	34
1.5 Resultados de Observabilidade e controlabilidade . . . . .	38
1.5.1 Desigualdade Inversa e Controle Nulo . . . . .	38
<b>2 Controlabilidade nula para versão truncada do sistema de Timoshenko com memória</b>	<b>49</b>
2.1 Introdução . . . . .	49
2.2 Hipóteses e notações iniciais . . . . .	50
2.3 Existência e unicidade do sistema com memória . . . . .	51
2.4 Desigualdades de Energia . . . . .	59
2.5 Resultados de Observabilidade e controlabilidade com termo de memória . . . . .	65
2.5.1 Resultados de observabilidade e controlabilidade nula tipo-memória . . . . .	65
<b>3 Estabilização uniforme para versão truncada do sistema de Timoshenko com damping não linear</b>	<b>77</b>
3.1 Introdução . . . . .	77

---

3.2	Hipóteses e notações iniciais . . . . .	78
3.3	Existência global . . . . .	79
3.4	Comportamento assintótico . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Estabilização uniforme para versão truncada do sistema de Timoshenko semi-linear e memória com história</b>	<b>93</b>
4.1	Introdução . . . . .	93
4.2	Hipóteses e notações iniciais . . . . .	94
4.3	Existência e Unicidade . . . . .	98
4.4	Comportamento assintótico . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>118</b>
5.1	Controlabilidade . . . . .	118
5.2	Estabilização . . . . .	120

# Introdução

Os fenômenos de natureza elástica foram objeto de intenso estudo nas últimas décadas. Especialmente aqueles que modelam as vibrações de barras ou vigas. A análise de vigas é bastante comum em problemas de engenharia e ciências aplicadas, tornando seu estudo e formulação fundamentais. Para este propósito, os modelos de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko são geralmente considerados. O movimento de uma viga pode ser descrito pela equação de Euler-Bernoulli, quando as dimensões da seção transversal são pequenas em comparação com o comprimento da viga. Se as dimensões da seção transversal não forem desprezíveis, o efeito da inércia rotacional deve ser considerado, neste caso, o movimento é melhor descrito pela equação da viga de Rayleigh. Se o desvio devido ao cisalhamento é levado em conta, além da inércia rotacional, chegamos a um modelo ainda mais preciso que é chamado de vigas de Timoshenko [57]. O modelo clássico de vigas de Timoshenko, construído em 1921 por Timoshenko, é um sistema hiperbólico de duas equações de onda acopladas que é decomposto em um cenário unidimensional em termos de equilíbrio dinâmico como

$$\rho A \varphi_{tt} = \mathbf{S}_x, \quad (1)$$

$$\rho I \psi_{tt} = \mathbf{M}_x - \mathbf{S}, \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa do material,  $A$  é a área transversal,  $I$  é o momento de inércia da área transversal,  $\varphi$  é a deflexão da viga a partir da sua posição de equilíbrio,  $\psi$  é a rotação angular,  $t$  é o tempo,  $x$  é a distância ao longo da linha central da viga e  $(\cdot)_x$  e  $(\cdot)_t$  são usados para denota a derivada parcial com respeito ao espaço e tempo, respectivamente. Além do mais,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{M}$  são a força de cisalhamento e o momento fletor (ambos são deformações de tensão), respectivamente, que são dados por

$$\mathbf{S} = k' AG(\varphi_x + \psi), \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = EI\psi_x, \quad (4)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $E$  é o módulo de Young e  $k'$  é o fator de cisalhamento transversal. A partir do acoplamento entre as equações (1)–(2) e as equações (3)–(4) obtemos o modelo clássico de vigas de Timoshenko

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (5)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0. \quad (6)$$

onde definimos  $\rho_1 := \rho A$ ,  $\rho_2 := \rho I$ ,  $b := EI$  e  $k := k'GA$ .

## 0.1 Segundo espectro e consequência para estabilização

As equações (5)–(6) são bem conhecidas como as mais importantes equações para estudo de vibrações de vigas porque a deformação de cisalhamento e a inércia rotativa foram consideradas por Timoshenko [1, 9, 22, 23, 24, 57]. Essas hipóteses melhoraram a dinâmica das vigas representadas pelo modelo de vigas de Euler-Bernoulli (EB) bem como o modelo da viga de Rayleigh (TR). É claro que existem críticas a esses modelos e, basicamente, a principal crítica ao modelo de vigas de Euler-Bernoulli é a velocidade infinita da propagação para um número de ondas grandes e a principal crítica do modelo de vigas de Rayleigh é a menor precisão em relação à frequência natural para número de ondas pequeno (Ver figura [1]). No entanto, o modelo de vigas Timoshenko (VT) apresenta duas frequências naturais, sendo uma não-física, porque em baixa frequência as propagações de onda viajam com velocidade infinita (Ver figura [2]), para mais detalhes, veja os recentes trabalhos [3, 5].

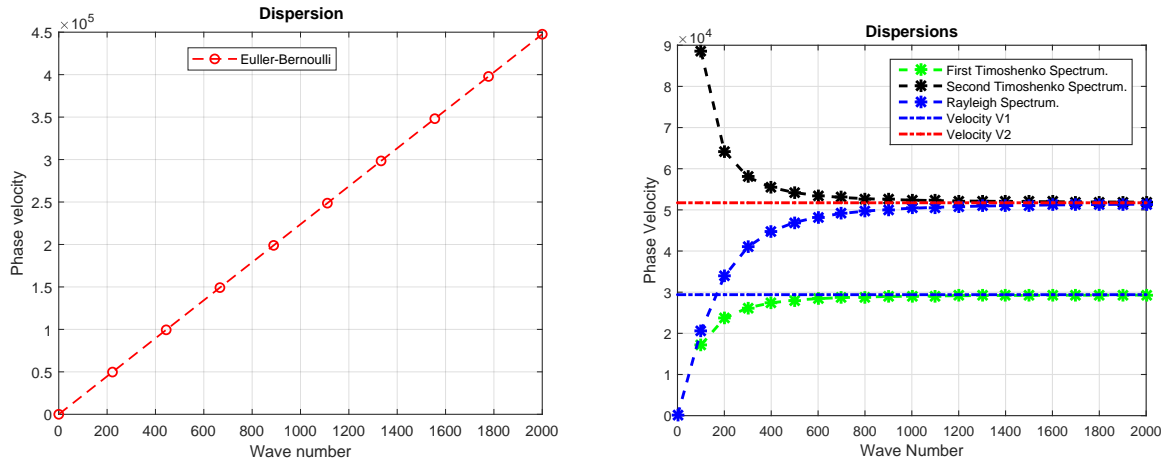


Figura 1: Número de onda vs. velocidade de fase, para modelo (EB) a velocidade tende ao infinita quando o número de onda vai para infinito. É claro, isso não é físico. O modelo (TR) têm comportamento estável para altas frequências (cor azul) convergindo para o segundo espectro de (VT) ( cor preto). Porém, é impreciso para baixa frequência.

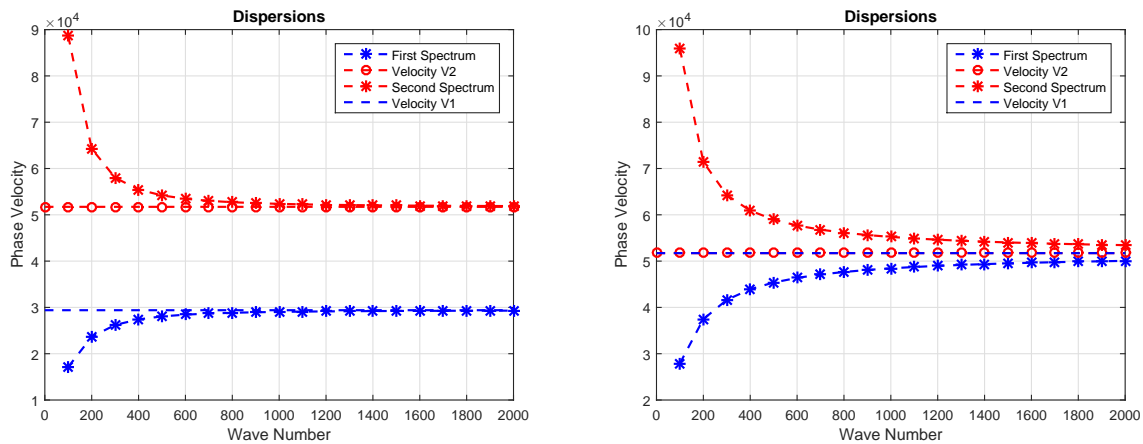


Figura 2: Número de onda vs. velocidade de fase, para (VT) sem amortecimento. Os dois ramos (primeiro e segundo espectro) da (VT) são as dispersões e mostram um comportamento estável para altas frequências (cor azul). Porém, o segundo ramo (cor vermelha) explode (blow-up) para baixas frequências. Esta anomalia física é conhecida como segundo espectro.

Esta condição não física tem sido amplamente explorada ao longo dos anos [6, 59] e recentemente Elishakoff et al [22, 23, 24](bem como referências nele) estudou um modelo mais simples

de vigas vibratórias ou seja versão truncada do modelo de vigas de Timoshenko. Este modelo leva em conta a deformação de cisalhamento e a inércia rotativa de acordo com a hipótese de Timoshenko [57] e está livre da condição não-física conhecida como “segundo espectro de frequência” ou “segundo espectro”, veja por exemplo [1, 6, 10, 9, 22, 33, 42, 54, 55]. Por outro lado, a versão truncada proposta por Elishakoff [22] em 2010, foi alcançada com a substituição do termo  $\rho I \psi_{tt}$  na Eq.(2) com a sua contrapartida de inércia rotativa  $\rho I \varphi_{ttx}$  de onde obtemos

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (7)$$

onde, juntamente com (5) nos dê

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (8)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (9)$$

de onde temos a chamada versão truncada das equações de Timoshenko(VTVT). Uma observação interessante devido a Elishakoff [22] é que: As equações do sistema acima preservam todas as propriedades físicas conjecturadas e resolvidas por Timoshenko [57], e livre do *segundo espectro* (Ver figura [3]). Além disso, é muito interessante ver a forma desacoplada dessas

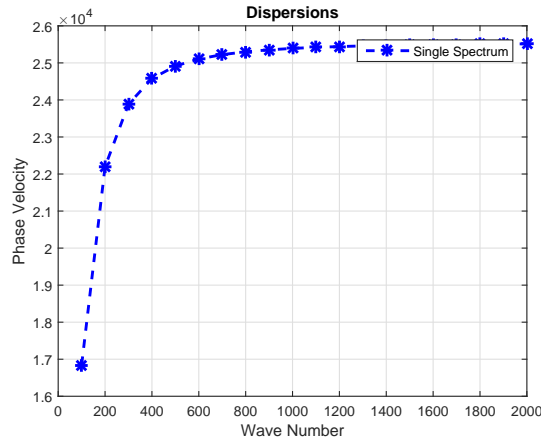


Figura 3: Número de onda vs. velocidade de fase. O ramo, primeiro espectro (cor azul) da (VTVT) sem amortecimento é a dispersão, mostra um comportamento estável para altas frequências. Esta propriedade física é a grande vantagem da (VTVT) porque é livre do blow-up da velocidade em baixa frequência.

equações para tirar algumas conclusões. Então, depois de algumas derivações em Eqs.(5) – (6)

leva a

$$\underbrace{\underbrace{b\varphi_{xxxx} + \rho_1\varphi_{tt}}_{\text{Euler-Bernoulli (I)}} - \rho_2\varphi_{ttxx} - \rho_1/k\varphi_{ttxx}}_{\text{Bresse-Rayleigh (II)}} + \rho_1\rho_2\varphi_{tttt} = 0. \quad (10)$$

$$\underbrace{\text{Simplificada(ou truncada de Timoshenko (III))}}_{\text{Clássica viga de Timoshenko (IV)}}$$

Vale a pena notar que o modelo (II) inclui a inércia rotativa, o modelo (III) inclui a deformação devido ao cisalhamento e o modelo (IV) combina o inercial rotativo e a força de cisalhamento. Do ponto de vista algébrico, essa combinação de quarta ordem gera o “segundo espectro” [22, 23, 24, 25]. Por outro lado, o modelo (III) não contém o termo  $\rho_1\rho_2/k\varphi_{tttt}$ , o próprio Timoshenko [57] já havia sugerido sua omissão, ele observou a partir da análise de frequências que esse termo ‘... é uma pequena quantidade de segunda ordem comparada com a quantidade  $\pi^2 r_g^2 / \lambda_i^2$ ’, onde  $\lambda_i = l/i$ ,  $r_g$  é o raio de giro da seção transversal,  $l$  é a extensão da viga e  $i$  é o número de frequência. Segundo Timoshenko, no estudo da equação de frequência a contribuição desse termo é insignificante. Além disso, esse modelo é obtido a partir de Eqs.(8) – (9) e também é notável que o modelo truncado não acomoda o “segundo espectro”. Recomendamos ao leitor o trabalho recente devido a Almeida Júnior e Ramos [3, 5] e referências para mais detalhes sobre “segundo espectro” e uma discussão mais detalhada das consequências desses espectros.

Considerando o importante papel desempenhado pelas vigas em várias áreas da ciência e engenharia, não é de surpreender que o controle de suas vibrações tenha motivado o trabalho de muitos pesquisadores, começando com os trabalhos pioneiro de Lagnese e Lions [35] e Lions [39, 37]. Relembrando alguns resultados da literatura, podemos citar Soufyane [52] que estudou a estabilização uniforme e o controle exato de uma viga, através da ação de um controle interno. Um resultado importante devido a Youssef [60], do qual obteve resultados de controlabilidade exata interna para sistema de Timoshenko usando a hipótese de que as velocidades de propagação de onda dos movimentos de rotação e translação são as mesmas. Outras referências que merecem destaque (entre muitas outras) no controle de ondas e vigas e estruturas relacionadas são ([7, 31, 34, 46, 43, 53, 56, 62, 63, 64] e as referências neles contida). Vale ressaltar que os resultados alcançados no contexto da estabilização uniforme ou exponencial das vigas de Timoshenko [57] com o amortecimento colocado em apenas uma das equações de deslocamento do sistema, a estabilidade só é alcançada sob a hipótese de velocidades de propagação iguais para as ondas. De



fato, foi mostrado que as taxas de decaimento exponencial são válidas somente se as velocidades de propagação forem iguais. Isso implica que,

$$\frac{v_2}{v_1} = 1 \iff \frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}, \quad (11)$$

mas a hipótese de velocidades iguais de propagação é muitas vezes irrealista do ponto de vista físico, é claro, isso não é verdade porque o fator de cisalhamento é sempre um pequeno número menor que um, ou seja,

$$\frac{v_2}{v_1} > 1,$$

veja por exemplo [3, 13]. Entre muitos trabalhos publicados, vamos destacar os seguintes resultados devidos a semelhança com o nosso:

Messaoudi e Mustafa [48] consideraram o seguinte sistema do tipo Timoshenko:

$$\varphi_{tt} - (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (12)$$

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + (\varphi_x + \psi) + \alpha(t)g(\psi_t) = 0 \quad (13)$$

sem impor qualquer hipótese de crescimento restritivo em  $g$  na origem. Além disso, considerado sem perda de generalidade  $\rho_1 = \rho_2 = \kappa = b = 1$  e  $v_2/v_1 = 1$ , onde  $v_1 = \sqrt{\kappa/\rho_1}$  e  $v_2 = \sqrt{b/\rho_2}$  para as velocidades das ondas, eles estabeleceram um resultado geral de decaimento dependendo de  $g$  e  $\alpha$ .

Guesmia e Messaoudi [29] consideraram que o sistema seguinte

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa_1 (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (14)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - \kappa_2 \psi_{xx} + \int_0^t g(t-\tau)(a(x)\psi_x(\tau))_x d\tau + \kappa_1 (\varphi_x + \psi) + b(x)h(\psi_t) = 0, \quad (15)$$

com condições de contorno tipo Dirichlet e dados iniciais em que  $a$ ,  $b$ ,  $g$  e  $h$  são funções específicas. Usando a condição de que as velocidades de propagação das ondas são iguais, ou seja,  $(\kappa/\rho_1 = b/\rho_2)$ , eles estabeleceram uma estimativa geral de estabilidade usando o método multiplicador e algumas propriedades de funções convexas. Sem impor qualquer condição de crescimento em  $h$  na origem, eles mostraram que a energia do sistema é limitada superiormente por uma quantidade, dependendo de  $g$  e  $h$ , que tende a zero à medida que o tempo tende para o infinito.

Outro trabalho importante é devido a Djilali [21], os autores consideraram o sistema de vigas de Timoshenko do tipo viscoelástico com um feedback do tipo delay interno e fracamente não-linear em um domínio limitado

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (16)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \int_0^t h(t-s) \psi_{xx} ds + \mu_1 g_1(\psi_t) + \mu_2 g_2(\psi_t(x, t-s)) = 0, \quad (17)$$

eles provaram um resultado de existência global usando o método de energia combinado com o procedimento de Faedo-Galerkin sob uma condição entre o peso do delay no feedback e o peso do termo sem o delay. Considerando  $(\kappa/\rho_1 = b/\rho_2)$  eles estudaram o comportamento assintótico de soluções usando um método de energia perturbada.

Cavalcante *et al.* [13] consideraram o sistema de Timoshenko

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x + \alpha_1(x) g_1(\varphi_t) = 0, \quad (18)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \alpha_2(x) g_2(\psi_t) = 0., \quad (19)$$

eles mostraram que o sistema (18) – (19) sob o efeito de duas ações de amortecimento por atrito não-lineares e localizadas e atuando em ambas as equações do sistema leva a taxas de decaimento uniformes para a função de energia, sem assumir a igualdade entre as velocidades  $(\kappa/\rho_1 = b/\rho_2)$  de propagação de ondas.

No contexto da versão truncada de Bresse-Timoshenko (8) – (9), quanto à relação entre as consequências do *segundo espectro* e a estabilização, temos o último artigo em questão, devido a Almeida e Ramos [3] fizeram uma contribuição importante baseada na observação devido a Elishakoff [22], que mostrou o decaimento exponencial da energia das soluções onde o mecanismo de amortecimento atua somente sobre a equação do movimento de rotação angular, sem necessidade da relação de igualdade entre velocidades de propagação, este trabalho tem uma influência importante em nossas incursões no presente trabalho, por isso é didático reproduzir citações parciais de texto original para melhor contextualizar nossas ideias, como segue:

- Equações de Bresse-Timoshenko (5) – (6) tem duas frequências naturais conhecidas como primeiro e segundo espectro de frequência. Estes dois modos de vibração têm um comportamento distinto em baixa frequência. Mais precisamente, uma dessas frequências

naturais explode quando o número da onda vai para zero. Este comportamento não-físico é conhecido como segundo espectro, veja [3, 5].

- Mecanismos de amortecimento truncam as consequências do segundo espectro. Isto foi notado por Nesterenko [49] onde ele sugeriu que os processos dissipativos são capazes de eliminar o efeito prejudicial dado pelo segundo espectro. Com base nessa observação, Almeida Júnior e Ramos [3] mostrou que o efeito de amortecimento dado por  $\mu\psi_t$  no sistema (5) – (6) trunca o efeito prejudicial do segundo espectro. Isto foi feito usando análise de dispersão e supondo que as velocidades de propagação de onda são iguais (veja o Teorema 2.2 em [3]).
- Existe um sistema do tipo Bresse-Timoshenko que é livre de segundo espectro de acordo com o trabalho de Elishakoff [22]. Nessa direção, Almeida Júnior e Ramos [3] mostrou que as equações não amortecidas (8) – (9) ( $\mu = 0$ ) está, de fato, livre de segundo espectro e

$$v := \sqrt{\frac{b}{\rho_2(1 + \rho_1/k\rho_2)}} \quad (20)$$

é a única velocidade de propagação de onda deste modelo. Além disso, foi demonstrado que para o caso de amortecimento ( $\mu > 0$ ), as equações (8) – (9) são exponencialmente estáveis independentemente de qualquer relação entre coeficientes.

Em outro artigo devido [5] eles provam que o sistema (8) – (9) é exponencialmente estável independentemente da igualdade entre velocidades de propagação de ondas com amortecimento por atrito atuando no deslocamento vertical. É bem conhecido que existe uma equivalência entre as propriedades de controle, estabilização e observabilidade de sistemas matemáticos de propagação de ondas traduzidos em termos de diferenciais hiperbólicos e / ou parabólicos, ver por exemplo [19]. Portanto, se procurarmos sobre questões de estabilização de equações do tipo (8) – (9), é natural esperar que a controlabilidade ocorra para quaisquer valores dos coeficientes. Nessa direção, parece que as consequências do segundo espectro para controlabilidade dos sistemas do tipo Timoshenko não foram estudadas antes.

## 0.2 O Cenário de controlabilidade

A teoria de controle estuda o uso de funções tipo feedback para modificar o comportamento dinâmico do sistema de alguma maneira favorável. Estudos sobre a teoria de controle não são

recentes e podem ser aplicados em diversas áreas. No que diz respeito ao estudo de Equações Diferenciais Parciais EDP's temos uma vasta literatura, dentre estas, podemos destacar os trabalhos de Lions [37, 38, 39], Kormonik [44], Medeiros [46] e Zuazua [43, 15, 63, 64]. Quanto à análise das propriedades de controlabilidade do seguinte modelo:

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa (y_x + z)_x = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (21)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa (y_x + z) = h\chi_\varpi, \text{ em } (0, L) \times (0, T). \quad (22)$$

aqui,  $(0, L) \subset \mathbf{R}$  é domínio e  $T > 0$  é dado tempo de controle. O sistema é uma equação da viga controlada e o controle sendo aplicado em um subconjunto aberto  $\varpi = (l_1, l_2)$  do domínio  $(0, L)$  onde o feixe de ondas se propaga. Isso é refletido na estrutura do controle no lado direito da equação, onde  $\chi_\varpi = \chi_\varpi(x)$  representa a função característica do conjunto  $\varpi$ . O estado do sistema é dado por  $(y, z, y_t)$  e o estado inicial por  $(y^0, z^0, y^1)$ . O controle  $h \in L^2(O)$  é uma força aplicada localizada em  $\varpi = (l_1, l_2)$ , onde  $O \equiv \{(x, t); x \in \varpi, t \in (0, T)\}$ .

Grosso modo, se considerarmos o problema homogêneo (21) – (22), a partir dele obtemos que a energia associada ao sistema é  $E(t) = E(0)$ , isto é, a energia total do sistema mecânico é constante ao longo da trajetória do sistema. Assim, nem uma solução diferente de zero da equação homogênea alcançará o estado de repouso para qualquer intervalo de tempo. Portanto, o problema da controlabilidade nula (ou exata, neste caso, pois o sistema é reversível no tempo) consiste em conduzir todas as trajetórias ao equilíbrio em um tempo uniforme, através da ação de uma força externa, *o controle*. Mais precisamente, o problema da controlabilidade nula para o sistema simplificado de Timoshenko pode ser formulado da seguinte maneira: Estuda a existência de um tempo  $T > 0$  tal que para cada dado inicial  $(y^0, z^0, y^1)$  existe um controle  $h(t)$ , neste caso, agindo sobre a equação de rotação, de modo que a solução de (21) – (22) satisfaz

$$y(T) = y'(T) = y'_x(T) = z(T) = 0. \quad (23)$$

Um resultado importante no sentido de controlabilidade de sistema do tipo Timoshenko é devido a Youssef [60], neste trabalho ele alcançou resultados precisos de controlabilidade interna exata no caso em que as velocidades de propagação de onda dos movimentos de rotação e translação são as mesmas. Outras referências que merecem destaque (entre muitas outras) no controle de ondas e vigas e estruturas relacionadas são ([7, 31, 34, 46, 43, 53, 56, 62, 63, 64] e as referências neles contida). Até onde sabemos não existe contribuições no sentido de controlabilidade para sistemas de Timoshenko na versão truncada.

### 0.3 Contexto do trabalho e declaração dos principais resultados

Agora vamos descrever as principais contribuições deste trabalho, que podem ser descritas da seguinte forma:

No capítulo 1, vamos investigar algumas propriedades das equações que modelam a movimento da versão truncada da viga de Timoshenko, a saber:

- Mostramos que esse tipo de sistema (21) – (22) tem existência e unicidade de soluções;
- Provamos que o sistema (21) – (22) pode ser controlado, sem a necessidade de igualdade entre as relações das velocidades de propagação.

De modo geral o capítulo está organizado da seguinte maneira: a seção 2 apresentamos as hipóteses e notações do problema. Na seção 3 destina-se a uma configuração analítica da existência e unicidade de soluções com condições de contorno de Dirichlet-Neumann. Na seção 4 mostramos desigualdades da energia associada ao sistema de tipos (21) – (22). Na seção 5, mostramos resultados de observabilidade e controlabilidade nula para o (21) – (22). Tanto quanto os autores sabem, não há contribuições feitas nesse sentido.

No capítulo 2, vamos investigar propriedades das equações que modelam o movimento da Versão truncada de Timoshenko envolvendo um termo de memória, a saber:

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa (y_x + z)_x = 0, \text{ in } (0, L) \times (0, T) \quad (24)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa (y_x + z) - \alpha \int_0^t M(t, s) \psi_{xx}(s) ds = h\chi_{\varpi}, \text{ in } (0, L) \times (0, T). \quad (25)$$

Para este sistema mostramos existência, unicidade, regularidade de soluções com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann. Observabilidade e Controlabilidade nula do tipo memória. Tanto quanto os autores sabem, não há contribuições feitas no sentido. O capítulo está organizado da seguinte maneira: a seção 2 apresentamos as hipóteses e notações iniciais. A seção 3 destina-se a uma configuração analítica da existência e unicidade de soluções. Na seção 4 mostramos as desigualdades da energia associada ao sistema de tipo (24) – (25) que são de suma importante para estabelecer certas equivalências entre as normas. Na Seção 5, mostramos a

controlabilidade nula do tipo memória de (24) – (25).

O capítulo 3 será dedicado a estudar a existência e propriedades de decaimento das soluções com dados iniciais limitados para uma versão truncada do sistema de Timoshenko não linear dada por:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (26)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \alpha(x)g(\psi_t) = 0, \quad (27)$$

O capítulo está estruturado da seguinte maneira. Na seção 2 é apresentada as hipóteses e notações relacionadas ao problema. Na seção 3 estudamos a existência global das soluções usando condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann. Na seção 3 estudamos decaimento uniforme da energia das soluções para sistema com um amortecimento localizado não linear agindo na equação de deslocamento rotacional, tal resultado é alcançado sem a necessidade de qualquer restrição ou relação sobre os coeficientes. Tanto quanto os autores sabem, não há contribuições feitas nesse sentido para a versão truncada de Timoshenko.

No capítulo 4, mostramos que a versão truncada de vigas de Timoshenko viscoelásticos tem uma estimativa uniforme da energia para qualquer valor de coeficiente do sistema, tal sistema é dado por:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = f(\varphi), \text{ in } Q, \quad (28)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty \beta(s)\psi_{xx}(t-s)ds = g(\psi), \text{ in } Q. \quad (29)$$

O capítulo 4 está organizado assim. Na seção 2 apresentamos as hipóteses do problema e adaptações necessárias para que o problema (28) – (29) se torne um problema autônomo equivalente. Na seção 3 estudamos a existência e unicidades e dependência contínua das soluções. Por fim na seção 4 estudamos o comportamento assintótico das soluções usando o método de energia. A contribuição nesse caso se deve ao fato que consideramos a influência que o segundo espectro tem sobre a estabilização do sistema de Timoshenko amortecido com uma dissipação fraca do tipo memória com história. Até onde os autores sabe, não há contribuições apresentadas como nesta tese.

# Capítulo 1

## Controlabilidade nula para versão truncada do sistema de Timosheko

### 1.1 Introdução

Neste capítulo estudamos existência, unicidade e dependência contínuas das soluções para um versão truncada do sistema de Timoshenko. Também estudamos a controlabilidade nula para versão truncada do sistema de Timoshenko sob o efeito de uma única força de controle agindo sobre a equação de rotação sem considerar qualquer relação entre as velocidades de propagação na equação de deslocamento vertical e a equação do ângulo de rotação do sistema. Este estudo foi motivado pelo resultado de Youssef em [60]. Ele demonstrou a controlabilidade exata do sistema Timoshenko sob o efeito de uma única força de controle agindo sobre a equação de rotação, considerando a igualdade entre as velocidades. Para resolvermos o problema de existência de soluções usamos o método de Faedo-Galerkin, para unicidade usamos o método de energia. Para obtemos a controlabilidade usamos o Método de Unicidade Hilbertiana (H.U.M) ver [37], as técnicas usadas para alcançar o resultado são inspirados pelos trabalhos de Zuazua [15] e Cavalcante *et al* [13]. A seguir fixamos a notação e definições que direcionaram o nosso trabalho nesse capítulo.

## 1.2 Hipóteses e notações iniciais

Com a notação padrão, introduzimos os espaços de Hilbert:

$$H = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times H_*^1(0, L), \quad V = L^2(0, L);$$

$$H_*^1(0, L) := \left\{ v \in H^1(0, L); \int_0^L v dx = 0 \right\};$$

e

$$\mathcal{H} := H \times V;$$

com a norma

$$\|\{u, v, u_t\}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L (|u|^2 + |v|^2 + |u_t|^2 + |u_{tx}|^2) dx \quad (1.1)$$

e produto interno

$$(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}} = \int_0^L (u\bar{u} + v\bar{v} + u_t\bar{u}_t + u_{tx}\bar{u}_{tx}) dx \quad (1.2)$$

Além do mais temos a norma  $|\cdot|$  e produto interno  $(\cdot, \cdot)$  em  $L^2(0, L)$  e o produto interno  $((\cdot, \cdot))$  e norma  $\|\cdot\|$  em  $H_0^1(0, L)$ . Denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o par de dualidades entre  $\mathcal{D}'(0, L)$  e  $\mathcal{D}(0, L)$  ou  $H^{-1}(0, L)$  e  $H_0^1(0, L)$ .

Consideramos a dinâmica unidimensional para o sistema simplificado de vigas de Timoshenko.

Para viga de comprimento  $L$ , este sistema é dado por:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q \quad (1.3)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em } Q. \quad (1.4)$$

em um domínio retangular  $(0, L) \times (0, T) = Q$  e  $\Gamma = \{0; L\}$  representa a fronteira do domínio e  $T > 0$  é dado.

Para facilita o nosso estudo consideramos as seguintes condições iniciais:

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi^0(x) \quad \text{em } (0, L) \quad (1.5)$$

e condições de fronteira:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } (0, T). \quad (1.6)$$

**Definição 1.1** *Seja  $I = [0, T]$  com  $T > 0$ . Dizemos que o conjunto de funções  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\} \in C(I; \mathcal{H})$  é solução do sistema (1.3) – (1.6) no intervalo  $I$ , se  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{H}$  e*

$$\frac{d}{dt} (\varphi_t(t), \rho_1 v + \rho_2 u_x) + b((\psi(t), u)) + \kappa((\varphi_x + \psi), (v_x + u)) = 0. \quad (1.7)$$

Para todo  $(v, u) \in H$  no sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .



Agora, enunciaremos o resultado que garante que o sistema (1.3) – (1.6) é bem posto, de acordo com a definição (1.1).

### 1.3 Existência e unicidade

Nesta seção, estamos preocupados com a existência e unicidade da solução para a versão truncada dos sistemas Bresse-Timoshenko. Desde que não é trivial colocar o sistema acoplado do tipo (1.3) – (1.6) na forma de um problema de Cauchy, e então usar a teoria do semigrupo para resolver. Precisamos adaptar o método Faedo-Galerkin, ou seja, assumiremos duas bases distintas, uma  $w_\nu$  que gera  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  e outra  $\tilde{w}_\nu$  que gera  $H_*^1(0, L)$ , uma vez que nosso problema é com condições de contorno do tipo Dichelet-Neumann. Além do mais, sabe-se que no contexto da mecânica das ondas, uma viga é considerada como um meio que acomoda ondas admissíveis que são descritas por funções que satisfazem o sistema (1.3) – (1.6) desacoplado. Da qual a solução geral dada por Meirovitch [47], ver página 428 eq. (7.242), veja também Huang [33], Chan [14] e Majkut [45] podem ser reescrita como:

$$\varphi(x, t) = p(t)w(x) \text{ e } \psi(x, t) = p(t)\tilde{w}(x),$$

onde  $p(t)$  é uma função que só depende do tempo.

**Teorema 1.1** *Para  $\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{H}$ . Existe uma única solução  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\} \in C([0, T]; \mathcal{H})$  de (1.3) – (1.6), satisfazendo as condições*

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)); \quad \psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)), \quad (1.8)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad \varphi_{tt} \in L^\infty(0, T; V), \quad (1.9)$$

**Prova:**

**Problema Aproximado:** A existência de soluções será feita usando o método de Faedo-Galerkin. A prova é inspirada nos argumentos contidos em [12] e [41]. Primeiro devemos construir uma base adequada para soluções aproximadas. Seja  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma base para  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ , tal base existe pelo fato de  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  ser um espaço de Hilbert separável, aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  ortonormal em  $V$ . Para resolvermos o problema, necessitamos de uma outra base para  $H_*^1(0, L)$ , usando os argumentos anteriores encontramos uma base  $\{\tilde{w}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  que é ortonormal em  $H_*^1(0, L)$ . Definimos

$$V_m = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m];$$

e

$$U_m = [\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_3, \dots, \widetilde{w}_m],$$

o subespaço gerado pelos  $m$  primeiros elementos das bases  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{\widetilde{w}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  respectivamente. Iremos então encontrar soluções aproximadas, para um função  $p_{\nu m}(t)$  fixa, o problema aproximado consiste de encontrar soluções

$$\begin{aligned} \varphi_m &: (0, t_m) \longrightarrow V_m \\ t &\longmapsto \varphi_m(t) = \sum_{\nu=1}^m p_{\nu m}(t) w_\nu \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_m &: (0, t_m) \longrightarrow U_m \\ t &\longmapsto \psi_m(t) = \sum_{\nu=1}^m p_{\nu m}(t) \widetilde{w}_\nu \end{aligned}$$

do problema aproximado

$$\rho_1 (\varphi_m''(t), w_\nu) - \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))_x, w_\nu) = 0, \quad (1.10)$$

$$-\rho_2 (\varphi_{mx}''(t), \widetilde{w}_\nu) - b (\psi_{mxx}(t), \widetilde{w}_\nu) + \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)), \widetilde{w}_\nu) = 0 \quad (1.11)$$

onde  $\nu = 1, 2, \dots, m$ , com condições iniciais

$$\varphi_m(0) = \varphi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^0, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \quad (1.12)$$

$$\varphi_m'(0) = \varphi_m^1 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^1, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^1 \in H_0^1(0, L) \quad (1.13)$$

$$\psi_m(0) = \psi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\psi^0, \widetilde{w}_\nu) \widetilde{w}_\nu \longrightarrow \psi^0 \in H_*^1(0, L). \quad (1.14)$$

Além disso, assumiremos a hipótese que

$$\psi_m'(0) \text{ é limitada em } V. \quad (1.15)$$

Note que pela eliminação de  $\psi$  a partir do sistema de equações (1.3) – (1.6) consideramos a equação

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \left( \frac{b}{\kappa} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \varphi_{ttxx} + \frac{b}{\rho_1} \varphi_{xxxx} = 0 & \text{em } Q \\ \varphi(0, t) = \varphi_{xx}(0, t) = \varphi(L, t) = \varphi_{xx}(L, t) = 0 & \text{em } t > 0 \\ \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x) & \text{em } (0, L), \end{cases}$$

que é equivalente a (1.3) – (1.6), de acordo com Lagnese [35], veja também Graff [30], página 185 eq. (3.4.20). Note que a equação em questão é bem definida em relação aos dados iniciais. De fato, dados  $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times V]$ , existem sequências  $\{\varphi_m^0, \varphi_m^1\} \in [H_*^3(0, L) \times (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))]$ , tal que

$$\begin{cases} \varphi_m^0 \rightarrow \varphi^0 & \text{forte em } H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); \\ \varphi_m^1 \rightarrow \varphi^1 & \text{forte em } H_0^1(0, L). \end{cases}$$

Para cada  $m$ , argumentos padrões nos garantem que existe uma única função  $\varphi_m$ , tal que

$$\varphi_m'' - \left(\frac{b}{\kappa} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \varphi_m''_{mxx} + \frac{b}{\rho_1} \varphi_m''_{mxxxx} = 0 \quad q.t.p \quad em \quad Q.$$

A fim de resolver este problema, devemos aplicar as soluções aproximadas, obtemos

$$p''_{\nu m}(t)w_\nu(x) - \left(\frac{b}{\kappa} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) p''_{\nu m}(t)w_{\nu xx}(x) + \frac{b}{\rho_1} p(t)_{\nu m} w_{\nu xxxx}(x) = 0. \quad (1.16)$$

Assim, o problema aproximado (1.10) – (1.11) pode ser reescrito como,

$$\sum_{\nu=1}^m p''_{\nu m}(t) (w_\nu, w_\nu) + \left(\frac{b}{\kappa} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \sum_{\nu=1}^m p''_{\nu m}(t) ((w_\nu, w_\nu)) + \frac{b}{\rho_1} \sum_{\nu=1}^m p_{\nu m}(t) ((w_{x\nu}, w_{x\nu})) = 0,$$

com condições iniciais

$$p_{\nu m}(0) = (\varphi^0, w_\nu), \quad p'_{\nu m}(0) = (\varphi^1, w_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, m. \quad (1.17)$$

Contudo, temos um problema de Cauchy para uma sistema linear de equações diferenciais ordinárias em  $p_{\nu m}(t)$  cuja as soluções locais são  $C^1$  no intervalo  $(0, t_m)$ , usando teoremas clássicos da teoria de equações diferenciais, veja por exemplo [17], é possível comprovar tal afirmação. Agora, multiplicando ambos os lados (1.10) e (1.11) por  $p'_{\nu m}(t)$  e somando em  $\nu$  de 1 a  $m$  e integrando em  $(0, L)$ , obtemos:

$$\rho_1 (\varphi_m'', \varphi_m') - \kappa ((\varphi_{mx} + \psi_m)_x, \varphi_m') = 0, \quad (1.18)$$

$$-\rho_2 (\varphi_m''_{mx}, \psi_m') - b (\psi_{mxx}, \psi_m') + \kappa ((\varphi_{mx} + \psi_m), \psi_m') = 0. \quad (1.19)$$

No que segue, mostraremos estimativas a priori das quais nos permitirá estender as soluções locais para o intervalo  $[0, T]$ , para qualquer  $T > 0$ .

**Estimativas:** Primeiramente, vamos estimar  $\varphi_m''(0)$ . Desde que as sequências  $(\varphi_m^0, \varphi_m^1, \psi_m^0)$  convergem, multiplicamos (1.10) por  $p''_{\nu m}(t)$  e escolhendo  $t = 0$ , por cálculos padrões, obtemos

$$\rho_1 |\varphi_m''(0)| \leq \kappa (|\varphi_{mxx}^0| + |\psi_{mx}^0|).$$

de (1.12), (1.13) e (1.14), temos

$$|\varphi_m''(0)| \leq C,$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

Segue que multiplicando ambos os lados de (1.10) e (1.11) por  $p'_{\nu m}(t)$  e somando em  $\nu$  de 1 até  $m$  e integrando por partes sobre  $(0, L)$  e usando as condições de fronteira (1.6), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |\varphi_m'(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m''(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 \right) = 0,$$

de onde definimos a energia associada ao sistema (1.10) – (1.11) por

$$E_m(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \rho_1 |\varphi_m'(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m''(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 \right) dx. \quad (1.20)$$

Integrando sobre  $(0, t)$ , de (1.20) temos que a energia  $E_m(t) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  é uma função não-negativa e não-crescente, logo deduzimos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi_m'(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m''(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi_m'(0)|^2 + b |\psi_{mx}(0)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m''(0)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(0)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(0) + \psi_m(0))|^2 \right) \leq M, \end{aligned}$$

$$E_m(t) = E_m(0) \leq M.$$

para todo  $t \in [0, T]$  e  $M$  uma constante positiva independente de  $m \in \mathbf{N}$ .

Estas estimativas implicam que a solução  $(\varphi_m, \psi_m)$  existe globalmente em  $[0, +\infty)$ . Conseqüentemente, obtemos

$$(\varphi')_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; V); \quad (1.21)$$

$$(\varphi'_x)_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; V); \quad (1.22)$$

$$(\varphi_x)_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; V); \quad (1.23)$$

$$(\varphi'')_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; V); \quad (1.24)$$

$$(\psi_x)_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; V). \quad (1.25)$$

Usando a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow V$ , temos

$$(\varphi')_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (1.26)$$

$$(\varphi)_m \quad \text{é limitada em} \quad V \quad L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (1.27)$$

$$(\psi)_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)). \quad (1.28)$$

Note que

$$L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]';$$

$$L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'$$

e

$$L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'.$$

Como um resultado de (1.26) – (1.28) e Teorema de Banach-Alaoglu-bourbaki e resultados de regularização elípticas, veja por exemplo página 66 em [11], existe um subsequência  $(\varphi_\mu)$  e  $(\psi_\mu)$ , tal que

$$(\varphi')_\mu \xrightarrow{*} \varphi' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'; \quad (1.29)$$

$$(\varphi)_\mu \xrightarrow{*} \varphi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]'; \quad (1.30)$$

$$(\psi)_\mu \xrightarrow{*} \psi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'. \quad (1.31)$$

Portanto, de (1.29) – (1.31), temos

$$\begin{aligned} \varphi \in L^\infty(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)), \quad \varphi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)), \quad \varphi_{tt} \in L^\infty(0, T; V); \\ \psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)). \end{aligned} \quad (1.32)$$

**Passagem ao limite:** Agora, multiplicando (1.10) por  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$  e integrando de 0 a  $T$ , obtemos

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi''_\mu(t), w_\nu) \theta(t) dt + \kappa \int_0^T ((\varphi_\mu(t), w_\nu)) \theta(t) dt - \kappa \int_0^T (\psi_{x\mu}(t), w_\nu) \theta(t) dt = 0. \quad (1.33)$$

Mas,

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi''_\mu(t), w_\nu) \theta(t) dt = \rho_1 \int_0^T \frac{d}{dt} (\varphi'_\mu(t), w_\nu) \theta(t) dt = -\rho_1 \int_0^T (\varphi'_\mu(t), w_\nu) \theta'(t) dt \quad (1.34)$$

Pela combinação de (1.33) e (1.34), resulta em

$$-\rho_1 \int_0^T (\varphi'_\mu(t), w_\nu) \theta'(t) dt + \kappa \int_0^T ((\varphi_\mu(t), w_\nu)) \theta(t) dt - \kappa \int_0^T (\psi_{x\mu}(t), w_\nu) \theta(t) dt = 0. \quad (1.35)$$

Passando o limite em (1.35) quando  $\mu \rightarrow \infty$  levando em conta as convergências (1.29) – (1.31)

$$-\rho_1 \int_0^T (\varphi'(t), w_\nu) \theta'(t) dt + \kappa \int_0^T ((\varphi(t), w_\nu)) \theta(t) dt - \kappa \int_0^T (\psi_x(t), w_\nu) \theta(t) dt = 0 \quad (1.36)$$

para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Agora, vamos considerar  $v \in H_0^1(0, L)$ . Como as combinações lineares finitas dos elementos da base  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  são densas em  $H_0^1(0, L)$ , existe uma sequência  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$z_k = \sum_{i=1}^{\nu(k)} \xi_{ik} w_{ik}$  tal que  $z_k \rightarrow v$  em  $H_0^1(0, L)$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Logo, de (1.36), para todos  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$-\rho_1 \int_0^T (\varphi'(t), z_k) \theta'(t) dt + \kappa \int_0^T ((\varphi(t), z_k)) \theta(t) dt - \kappa \int_0^T (\psi_x(t), z_k) \theta(t) dt = 0. \quad (1.37)$$

Da convergência forte  $z_k \rightarrow v$  em  $H_0^1(0, L)$  e da imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow V$ , resultam as convergências fracas

$$\begin{cases} ((z_k, \xi)) \rightarrow ((v, \xi)), \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ para todo } \xi \in H_0^1(0, L). \\ (z_k, \eta) \rightarrow (v, \eta), \text{ quando } k \rightarrow \infty \text{ para todo } \eta \in V. \end{cases} \quad (1.38)$$

De (1.37) e (1.38), obtemos

$$-\rho_1 \int_0^T (\varphi'(t), v) \theta'(t) dt + \kappa \int_0^T ((\varphi(t), v)) \theta(t) dt - \kappa \int_0^T (\psi_x(t), v) \theta(t) dt = 0. \quad (1.39)$$

para todo  $v \in H_0^1(0, L)$  e para todo  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ , ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \langle \rho_1 (\varphi'(t), v), \theta(t) \rangle + \langle \kappa ((\varphi(t), v)), \theta(t) \rangle - \langle \kappa (\psi_x(t), v), \theta(t) \rangle = 0. \quad (1.40)$$

para todo  $v \in H_0^1(0, L)$  e para todo  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ .

Agora, multiplicando (1.11) por  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$  e integrando de 0 a  $T$ , obtemos

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^T (\varphi''_{\mu x}(t), \tilde{w}_\nu) \theta(t) dt + b \int_0^T ((\psi_\mu(t), \tilde{w}_\nu)) \theta(t) dt + \\ \kappa \int_0^T ((\varphi_{\mu x}(t) + \psi_\mu(t)), \tilde{w}_\nu) \theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Mas,

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^T (\varphi''_\mu(t), \tilde{w}_{x\nu}) \theta(t) dt = \rho_2 \int_0^T (\varphi''_\mu(t), \tilde{w}_{x\nu}) \theta(t) dt = \rho_2 \int_0^T \frac{d}{dt} (\varphi'_\mu(t), \tilde{w}_{x\nu}) \theta(t) dt = \\ -\rho_2 \int_0^T (\varphi'_\mu(t), \tilde{w}_{x\nu}) \theta'(t) dt. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Pela combinação de (1.41) e (1.42), resulta

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^T (\varphi'_\mu(t), \tilde{w}_{x\nu}) \theta'(t) dt + b \int_0^T ((\psi_\mu(t), \tilde{w}_\nu)) \theta(t) dt + \\ \kappa \int_0^T ((\varphi_{\mu x}(t) + \psi_\mu(t)), \tilde{w}_\nu) \theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Passando o limite em (1.43) quando  $\mu \rightarrow \infty$  levando em conta as convergências (1.29) – (1.31)

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^T (\varphi'(t), \tilde{w}_{x\nu}) \theta'(t) dt + b \int_0^T ((\psi(t), \tilde{w}_\nu)) \theta(t) dt \\ + \kappa \int_0^T ((\varphi_x(t) + \psi(t)), \tilde{w}_\nu) \theta(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Similarmente de (1.38), obtemos

$$-\rho_2 \int_0^T (\varphi'(t), u_x) \theta'(t) dt + b \int_0^T ((\psi(t), u)) \theta(t) dt + \kappa \int_0^T ((\varphi_x(t) + \psi(t)), u) \theta(t) dt = 0, \quad (1.45)$$

para toda  $u \in H_*^1(0, L)$  e para todo  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ , ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \langle \rho_2 (\varphi'(t), u_x), \theta(t) \rangle + \langle b ((\psi(t), u)), \theta(t) \rangle + \langle \kappa (\varphi_x(t), u), \theta(t) \rangle + \langle \kappa (\psi(t), u), \theta(t) \rangle = 0. \quad (1.46)$$

Portanto, adicionando as equações (1.40) e (1.46) obtemos a formulação variacional (1.7).

**Condições Iniciais:** Vamos provar que

$$i) \quad \psi(0) = \psi^0.$$

Temos

$$\psi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)).$$

Então, desde que  $H_*^1(0, L) \hookrightarrow V$  é contínua, implica que:

$$\psi_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; V).$$

Portanto, existe uma subsequência  $\psi_n$ , tal que,

$$\int_0^T (\psi_n(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow \int_0^T (\psi(t), v) \theta'(t) dt. \quad (1.47)$$

Uma vez que  $\psi_m \in L^\infty(0, T; V)$  é limitada e pela hipótese (1.15), temos

$$\psi'_m \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; V).$$

Portanto, existe uma subsequência  $\psi'_n$  tal que,

$$\int_0^T (\psi'_n(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (\psi'(t), v) \theta(t) dt,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (\psi_n(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (\psi(t), v) \theta(t) dt,$$

ou ainda,

$$(\psi_n(t), v) \theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T (\psi_n(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow (\psi(t), v) \theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T (\psi(t), v) \theta'(t) dt,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , escolhendo  $\theta$  de modo que  $\theta \in C^1(0, T)$ ,  $\theta(0) = 1$ ,  $\theta(T) = 0$ , e observando que (1.47) obtemos

$$(\psi_n(0), v) \rightarrow (\psi(0), v), \text{ quando } n \rightarrow \infty \forall v \in V.$$

Logo,

$$\psi_n(0) = \psi_n^0 \rightharpoonup \psi(0) \text{ fracamente em } V.$$

Por outro lado,  $\psi_n^0 \rightarrow \psi^0$  forte em  $H_*^1(0, L) \hookrightarrow V$ . Pela unicidade do limite fraco em  $V$ , obtemos  $\psi(0) = \psi^0$ .

Provaremos a seguir que

$$ii) \varphi(0) = \varphi^0.$$

De fato, como já foi estabelecido anteriormente

$$\varphi'_\mu \xrightarrow{*} \varphi' \text{ in } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)), \quad (1.48)$$

quando  $\mu \rightarrow \infty$ . Seja  $\theta \in C^1([0, T])$  e  $v \in H_0^1(0, L)$ . Então, identificando o  $H_0^1(0, L)$  com seu dual, da convergência (1.48), resulta que

$$\int_0^T (\varphi'_\mu(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (\varphi'(t), v) \theta(t) dt,$$

quando  $\mu \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (\varphi_\mu(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (\varphi(t), v) \theta(t) dt,$$

ou ainda,

$$(\varphi_\mu(t), v) \theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T (\varphi_\mu(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow (\varphi(t), v) \theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T (\varphi(t), v) \theta'(t) dt,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , escolhendo  $\theta$  de modo que  $\theta \in C^1(0, T)$ ,  $\theta(0) = 1$ ,  $\theta(T) = 0$ , e observando que

$$\int_0^T (\varphi_\mu(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow \int_0^T (\varphi(t), v) \theta'(t) dt,$$

quando  $\mu \rightarrow \infty$ , obtemos

$$(\varphi_\mu(0), v) \rightarrow (\varphi(0), v)$$

quando  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\forall v \in H_0^1(0, L)$ .

Portanto,

$$\varphi_\mu(0) = \varphi_\mu^0 \rightharpoonup \varphi(0), \text{ forte em } H_0^1(0, L).$$

Por outro lado,  $\varphi_\mu^0 \rightarrow \varphi^0$  forte em  $H_0^1(0, L)$ . Logo  $\varphi(0) = \varphi^0$ .



iii)  $\varphi'(0) = \varphi^1$ .

Seja  $\delta > 0$  e

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\delta} + 1, & \text{if } 0 \leq t \leq \delta, \\ 0, & \text{if } \delta \leq t \leq T. \end{cases}$$

Multiplicando a equação aproximada (1.10) com  $m = \mu$ , por  $\theta_\delta(t)$  e integrando de 0 a  $T$ .

$$\rho_1 \int_0^T (\varphi_\mu''(t), v) \theta_\delta dt + \kappa \int_0^T ((\varphi_\mu(t), v)) \theta_\delta(t) dt - \kappa \int_0^T (\varphi_{x\mu}(t), v) \theta_\delta(t) dt = 0.$$

Observe, que

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^T (\varphi_\mu''(t), v) \theta_\delta dt &= \rho_1 \int_0^T \frac{d}{dt} (\varphi_\mu'(t), v) \theta_\delta dt \\ &= \rho_1 (\varphi_\mu'(t), v) \theta_\delta(t) \Big|_0^T - \rho_1 \int_0^T (\varphi_\mu'(t), v) \theta_\delta' dt \\ &= -\rho_1 (\varphi_\mu'(0), v) + \frac{1}{\delta} \int_0^T \rho_1 (\varphi_\mu'(t), v) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\rho_1 (\varphi_\mu'(0), v) + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \rho_1 (\varphi_\mu'(t), v) dt + \kappa \int_0^\delta ((\varphi_\mu(t), v)) \theta_\delta(t) dt - \\ + \kappa \int_0^\delta (\varphi_{x\mu}(t), v) \theta_\delta(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Quando  $\mu \rightarrow \infty$ , para  $v \in H_0^1(0, L)$  e usando as convergências (1.29) obtemos,

$$\begin{aligned} -\rho_1 (\varphi^1, v) + \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \rho_1 (\varphi'(t), v) dt + \kappa \int_0^\delta ((\varphi(t), v)) \theta_\delta(t) dt - \\ + \kappa \int_0^\delta (\varphi_x(t), v) \theta_\delta(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , obtemos

$$-(\varphi^1, v) + (\varphi'(0), v) = 0$$

Consequentemente,

$$(\varphi^1, v) = (\varphi'(0), v), \quad \forall v \in H_0^1(0, L),$$

portanto  $\varphi'(0) = \varphi^1$ .

**Unicidade:** Sejam  $(\varphi, \psi)$  e  $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$  soluções do problema (1.3)–(1.4). Então o par  $(z^1, z^2)$ , onde  $z^1 = \varphi - \bar{\varphi}$  e  $z^2 = \psi - \bar{\psi}$ , satisfaz

$$\begin{aligned} (z^1, z^2) \in [L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \times L^\infty(0, T; H_*^1(0, L))], \\ z_t^1 \in L^\infty(0, T; V). \end{aligned}$$

$$\rho_1 z_{tt}^1 - \kappa (z_x^1 + z^2)_x = 0, \text{ em } L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L)) \quad (1.49)$$

$$-\rho_2 z_{tt}^1 - bz_{xx}^2 + \kappa (z_x^1 + z^2) = 0, \text{ em } L^\infty(0, T; H^{-1}(0, L)) \quad (1.50)$$

$$z^1(0, t) = z_x^2(0, t) = z^1(L, t) = z_x^2(L, t) = 0, \text{ em } (0, T) \quad (1.51)$$

$$z^1(0) = z_t^1(0) = z^2(0) = 0, \text{ em } (0, L). \quad (1.52)$$

Observe que não faz sentido  $z_{tt}^1(t)$ ,  $z_t^1(t)$  na dualidade  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(0, L), H_0^1(0, L)}$  uma vez que  $z_t^1(t)$  pertence quase sempre a  $V$ . Para resolvermos este problema definamos a seguinte função auxiliar:

$$\xi^i(t) = \begin{cases} -\int_t^s z^i(\sigma) d\sigma, & \text{if } 0 \leq t \leq s, \\ 0, & \text{if } s \leq t \leq T. \end{cases}$$

A única conclusão a ser tirada é,  $\xi^i \in L^\infty(0, T; H)$  e  $\xi_t^i = z^i(t)$ . Tomando  $z_1^i(t) = \int_0^t z^i(\sigma) d\sigma$ , pode-se concluir que  $\xi^i(t) = z_1^i(t) - z_1^i(s)$ . Desde modo, podemos compor a dualidade  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  de (1.49) com  $\xi^1$  e (1.50) com  $\xi^2$ , onde  $X = L^\infty(0, T; H)$ . Multiplicando (1.49) por  $\xi^1(t)$  e de (1.50) com  $\xi^2(t)$  e integrando de 0 a  $s$ , obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^s \langle z_{tt}^1(t), \xi^1(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \rho_2 \int_0^s \langle z_{tt}^1(t), \xi_x^1(t) \rangle_{H^{-1}, H^{-1}} dt + b \int_0^s ((z^2(t), \xi^2(t))) dt \\ + \kappa \int_0^s ((z_x^1 + z^2)(t), (\xi_x^1 + \xi^2)(t)) dt = 0; \end{aligned} \quad (1.53)$$

Agora, iremos analisar alguns termos da identidade (1.53),

1.

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^s \langle z_{tt}^1(t), \xi^1(t) \rangle_{H^{-1}(0, L), H_0^1(0, L)} dt &= \int_0^s \frac{d}{dt} (z_t^1(t), \xi^1(t)) dt - \int_0^s (z_t^1(t), \xi_t^1(t)) dt \\ &= (z_t^1(t), \xi^1(t)) \Big|_0^s - \int_0^s (z_t^1(t), z^1(t)) dt \\ &= -\frac{1}{2} |z^1(s)|^2 + \frac{1}{2} |z^1(0)|^2 \\ &= -\frac{\rho_1}{2} |z^1(s)|^2. \end{aligned} \quad (1.54)$$

2.

$$\begin{aligned} b \int_0^s ((z^2(t), \xi^2(t))) dt &= \int_0^s ((\xi_t^2(t), \xi^2(t))) dt = \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \|\xi^2(t)\|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \|\xi^2(s)\|^2 - \frac{1}{2} \|\xi^2(0)\|^2 \\ &= -\frac{b}{2} \|z_1^2(s)\|^2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

3.

$$\begin{aligned}
\kappa \int_0^s ((z_x^1 + z^2)(t), (\xi_x^1 + \xi^2)(t)) dt &= \int_0^s ((\xi_x^1 + \xi^2)_t(t), (\xi_x^1 + \xi^2)(t)) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} |\xi_x^1(t) + \xi^2(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2} (|\xi_x^1(t) + \xi^2(t)|^2) \Big|_0^s \\
&= \frac{1}{2} |\xi_x^1(s) + \xi^2(s)|^2 - \frac{1}{2} |\xi_x^1(0) + \xi^2(0)|^2 \\
&= -\frac{\kappa}{2} |z_{1x}^1(s) + z_1^2(s)|^2. \tag{1.56}
\end{aligned}$$

Substituindo (1.54), (1.55) e (1.56) em (1.53), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_1}{2} |z^1(s)|^2 + \frac{b}{2} \|z_1^2(s)\|^2 + \frac{\kappa}{2} |z_{1x}^1(s) + z_1^2(s)|^2 &= \rho_2 \int_0^s \langle z_{tt}^1(t), \xi_x^1(t) \rangle_{H^{-1}, H^{-1}} dt; \\
\frac{\rho_1}{2} |z^1(s)|^2 + \frac{\rho_2}{2} |z^2(s)|^2 + \frac{b}{2} \|z_1^2(s)\|^2 + \frac{\kappa}{2} |z_{1x}^1(s) + z_1^2(s)|^2 &= \rho_2 \int_0^s \langle z_{tt}^1(t), \xi_x^1(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt + \\
&\quad - \rho_2 \int_0^s \langle z_{tt}^2(t), \xi^2(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt. \tag{1.57}
\end{aligned}$$

Agora, iremos analisar os termos do lado direito de (1.57). De fato,

$$\begin{aligned}
&\rho_2 \int_0^s \langle z_{tt}^1(t), \xi_x^1(t) \rangle_{H^{-1}, H^{-1}} dt - \rho_2 \int_0^s \langle z_{tt}^2(t), \xi^2(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt \\
&\leq \rho_2 \int_0^s \int_0^L |z_{tt}^1(x, t)| |\xi_x^1(x, t)| dx dt + \rho_2 \int_0^s \int_0^L |z_{tt}^2(x, t)| |\xi^2(x, t)| dx dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_0^L |z_{tt}^1(x, t)| |\xi_x^1(x, t)| dx + \int_0^L |z_{tt}^2(x, t)| |\xi^2(x, t)| dx \\
&\leq C \int_0^L (|z_{tt}^1(x, t)| |z_{1x}^1(x, t) - z_{1x}^1(x, s)| + |z_{tt}^2(x, t)| |z_1^2(x, t) - z_1^2(x, s)|) dx;
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\leq CL^{1/2} (|z_{tt}^1(t)| |z_{1x}^1(t) - z_{1x}^1(s)| + |z_{tt}^2(t)| \|z_1^2(t) - z_1^2(s)\|); \\
&\leq CL^{1/2} |z_{tt}^1(t)| (|z_{1x}^1(t)| + |z_{1x}^1(s)|) + CL^{1/2} |z_{tt}^2(t)| (\|z_1^2(t)\| + \|z_1^2(s)\|). \tag{1.58}
\end{aligned}$$

Observe que

$$CL |z_{tt}^i(t)|^{1/2} |z_{tt}^i(t)|^{1/2} |z_{1x}^i(t)| = CL |z_{tt}^i(t)| |z_{1x}^i(t)|, \quad i = 1, 2. \tag{1.59}$$

and

$$|z_{1x}^1(t)|^2 \leq |z_{1x}^1(t) + z_1^1(t)|^2 + c_p \|z_1^2(t)\|^2. \tag{1.60}$$

Agora, usando a desigualdade de Young em (1.58) e considerando (1.59) e a estimativa (1.60), obtemos

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C^2 L}{2} \left( |z_{tt}^i(t)| + \epsilon |z_{tt}^i(t)|^2 \right) + \frac{c_p + 1}{2\epsilon} \|z_1^2(s)\|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |z_{1x}^1(s) + z_1^2(s)|^2 + \\ &+ C |z_{tt}^i(t)| \left( \frac{\rho_1}{2} |z^1(t)|^2 + \frac{\rho_2}{2} |z^2(t)|^2 + \frac{b}{2} \|z_1^2(t)\|^2 + \frac{\kappa}{2} |z_{1x}^1(t) + z_1^2(t)|^2 \right) \end{aligned} \quad (1.61)$$

com  $i = 1, 2$  e  $\epsilon > 1$ . Logo, pela substituição de (1.61) na identidade (1.57) obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_1}{2} |z^1(s)|^2 + \frac{\rho_2}{2} |z^2(s)|^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{c_p + 1}{2\epsilon} \right) \|z_1^2(s)\|^2 + \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{2\epsilon} \right) |z_{1x}^1(s) + z_1^2(s)|^2 \\ &\leq C \left( \|z_{tt}^i(t)\|_M + \|z_{tt}^i(t)\|_{M_1} \right) + C \int_0^s |z_{tt}^i(t)| \left( \frac{\rho_1}{2} |z^1(t)|^2 + \frac{\rho_2}{2} |z^2(t)|^2 + \frac{b}{2} \|z_1^2(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{2} |z_{1x}^1(t) + z_1^2(t)|^2 \right) dt; \end{aligned}$$

onde  $M_1 = L^2(0, T; V)$ . Assim pelo lema de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} Z(s) &\leq K + C \int_0^s |z_{tt}^i(t)| Z(t) dt \\ Z(s) &\leq Z(0) e^{\int_0^s |z_{tt}^i(t)| dt}, \end{aligned} \quad (1.62)$$

onde  $K = C \left( \|z_{tt}^i(t)\|_M + \|z_{tt}^i(t)\|_{M_1} \right)$ .

Então,

$$|z^1(0)|^2 + |z^2(0)|^2 + \|z_1^2(0)\|^2 + |z_{1x}^1(0) + z_1^2(0)|^2 = 0, \quad (1.63)$$

ou seja,  $|z^1(s)|^2 = |z^2(s)|^2 = 0$ . Portanto  $z^1(s) = z^2(s) = 0$  para todo  $s \in [0, T]$ , tal que  $\varphi = \bar{\varphi}$  e  $\psi = \bar{\psi}$ .

■

## 1.4 Desigualdade de Energia

Nesta seção vamos mostrar alguns resultados acerca da energia associada ao sistema simplificado de Timoshenko. Sabemos que a energia total da solução do sistema (1.3) - (1.6) é dada por

$$E(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2 \rho_1}{2\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx, \quad (1.64)$$

que é conservativa, isto é

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.65)$$

De fato, como podemos ver na seguinte proposição.

**Proposição 1.1** *A energia total definida  $E(t)$  por (1.64) satisfaz a taxa de variação*

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

para toda  $(\varphi, \psi, \varphi_t)$  solução do sistema (1.3) - (1.6).

**Prova:** Multiplicando (1.3) por  $\varphi_t$  e integrando por partes em  $(0, L)$  para obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx - \kappa (\varphi_x + \psi) \varphi_t \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx = 0 \quad (1.66)$$

seguindo da mesma forma para equação (1.4), temos

$$- \int_0^L \rho_2 \varphi_{ttx} \psi_t dx + \frac{d}{dt} \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \psi_x \psi_t \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \quad (1.67)$$

Usando as condições apropriadas de fronteira, considere

$$- \int_0^L \rho_2 \varphi_{ttx} \psi_t dx = \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_{tx} dx$$

a partir (1.3), temos

$$\begin{aligned} \psi_x &= \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} \\ \psi_{xt} &= \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{ttt} - \varphi_{xxt}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Multiplicando a equação (1.68) por  $\rho_2 \varphi_{tt}$  e integrando por partes em  $(0, L)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_{xt} &= \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{ttt} \varphi_{tt} - \rho_2 \int_0^L \varphi_{xxt} \varphi_{tt} \\ &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{xt} \varphi_{ttx} \\ &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, segue

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_t|^2 + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x|^2 + \frac{\kappa}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |(\varphi_x + \psi)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 = 0. \quad (1.69)$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.70)$$

onde  $E(t)$  é definido por (1.64). ■

O sistema (1.3) – (1.6) é bem-posto no espaço de energia  $\mathcal{H} = H \times V$ . Mais precisamente, para qualquer  $\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{H}$  existe uma única solução na classe

$$(\varphi, \psi, \varphi_t) \in C([0, T]; \mathcal{H}). \quad (1.71)$$

Agora, vamos usar a seguinte norma

$$\|\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L \left( |\varphi_x^0|^2 + |\psi_x^0|^2 + |\varphi^1|^2 + |\varphi_x^1|^2 \right) dx \quad (1.72)$$

onde  $\{\varphi^0, \varphi^1, \psi^0\}$  são os dados iniciais do sistema (1.3) – (1.6).

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \rho_1 |\varphi^1|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''(0)|^2 + \rho_2 |\varphi_x^1|^2 + b |\psi_x^0|^2 + \kappa |(\varphi_x^0 + \psi^0)|^2 \right) dx. \quad (1.73)$$

No que segue, vamos mostrar um resultado que garante a equivalência entre a norma canonical do espaço  $\mathcal{H}$  que é (1.72) e a energia (1.73). Mas, antes temos o seguinte lema técnico.

**Lema 1.1** *Se  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  é uma solução para a versão truncada do sistema de Bresse-Timoshenko (1.3) – (1.6), então existe uma constante positiva, tal que*

$$\int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^L \left[ (\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2 \right] dx dt.$$

**Prova:** De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt &= \int_0^T \int_0^L (\varphi_x^2 + 2\varphi_x \psi + \psi^2) dx dt - \int_0^T \int_0^L (2\varphi_x \psi + \psi^2) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L (\varphi_x^2 + \psi)^2 dx dt - \int_0^T \int_0^L \varphi_x \psi dx dt - \int_0^T \int_0^L \psi (\varphi_x + \psi) dx dt \end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Young aos dois últimos termos do lado direito da igualdade acima, temos

$$\int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt \leq 3 \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^L \psi^2 dx dt,$$

a partir da desigualdade de Poincaré aplicada ao últimos, obtemos

$$\int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt \leq 3 \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + 2c_p \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 dx dt,$$

onde  $c_p > 0$  é a constante de Poincaré e considerando  $C = \max\{3, 2c_p\}$  segue

$$\int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_0^L [(\varphi_x + \psi)^2 + \psi_x^2] dx dt. \quad (1.74)$$

■

Agora vamos mostrar o resultado principal desta seção.

**Teorema 1.2** *Se  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  é uma solução para a versão truncada do sistema de Bresse-Timoshenko (1.3) – (1.6) com dados iniciais  $\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{H}$ . Então, existem constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tal que*

$$c_1 E(0) \leq \|\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_2 E(0). \quad (1.75)$$

**Prova:** De fato, usando a desigualdade de Young

$$|\varphi_x^0 + \psi^0|^2 \leq |\varphi_x^0|^2 + |\psi^0|^2 + 2|\varphi_x^0||\psi^0| \leq |\varphi_x^0|^2 + |\psi^0|^2 + 2\left(\frac{|\varphi_x^0|^2}{2} + \frac{|\psi^0|^2}{2}\right)$$

$$|\varphi_x^0 + \psi^0|^2 \leq 2\left(|\varphi_x^0|^2 + |\psi^0|^2\right)$$

a partir da desigualdade de Poincaré'

$$\int_0^L |\psi^0|^2 dx \leq c_p \int_0^L |\psi_x^0|^2 dx,$$

assim, obtemos

$$|\varphi_x^0 + \psi^0|^2 \leq 2|\varphi_x^0|^2 + 2c_p |\psi_x^0|^2. \quad (1.76)$$

Além do mais, temos  $\varphi'' \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ , de modo que  $\varphi''(t) \in H_0^1(0, L)$  que implica

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \kappa \varphi_{xx}(t) + \kappa \psi_x(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ |\varphi''(0)| &\leq \kappa |\varphi_{xx}^0| + c |\psi_x^0|, \end{aligned}$$

assim pela desigualdade (1.76) obtemos,

$$|\varphi''(0)|^2 \leq c (|\varphi_{xx}^0| + |\psi_x^0|)^2 \leq 2c (|\varphi_{xx}^0|^2 + |\psi_x^0|^2). \quad (1.77)$$

Usando a desigualdade (1.76) e (1.77) em (1.73), resulta

$$\begin{aligned} E(0) &\leq \frac{1}{2} \int_0^L \left( \rho_1 |\varphi^1|^2 + \rho_2 |\varphi_x^1|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2 2c}{\kappa} (|\varphi_x^0|^2 + |\psi_x^0|^2) + b |\psi_x^0|^2 + \right. \\ &\quad \left. \kappa (2 |\varphi_x^0|^2 + 2c_p |\psi_x^0|^2) \right) dx; \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( 2 \left( \frac{\rho_1 \rho_2 c}{\kappa} + \kappa \right) |\varphi_x^0|^2 + 2 \left( \frac{\rho_1 \rho_2 c}{\kappa} + \frac{b}{2} + \kappa c_p \right) |\psi_x^0|^2 + \rho_1 |\varphi^1|^2 + \rho_2 |\varphi_x^1|^2 \right) dx; \end{aligned}$$

escolhendo  $C_3 = \max \{ \rho_1, \rho_2, 2 \left( \frac{\rho_1 \rho_2 c}{\kappa} + \kappa \right), 2 \left( \frac{\rho_1 \rho_2 c}{\kappa} + \frac{b}{2} + \kappa c_p \right) \}$  teremos

$$E(0) \leq \frac{C_3}{2} \int_0^L (|\varphi_x^0|^2 + |\psi_x^0|^2 + |\varphi^1|^2 + |\varphi_x^1|^2) dx = \|\{\varphi^0, \varphi^1, \psi^0\}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

com  $c_1 = \frac{2}{C_3}$ , logo

$$c_1 E(0) \leq \|\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.78)$$

Por outro lado, usando o Lema (1.1) obtemos,

$$\int_0^L |\varphi_x^0|^2 dx \leq \int_0^L (2 |\varphi_x^0 + \psi^0|^2 + 2c_p |\psi_x^0|^2) dx. \quad (1.79)$$

Agora, usando (1.79)

$$\begin{aligned} \|\{\varphi^0, \varphi^1, \psi^0\}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \int_0^L (2 |\varphi_x^0 + \psi^0|^2 + (1 + 2c_p) |\psi_x^0|^2 + |\varphi^1|^2 + |\varphi''(0)|^2 + |\varphi_x^1|^2) dx; \\ &\leq \int_0^L \left( \frac{\rho_1}{\rho_1} |\varphi^1|^2 + \frac{\rho_2}{\rho_2} |\varphi_x^1|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \frac{\kappa}{\rho_1 \rho_2} |\varphi''(0)|^2 + (2c_p + 1) \frac{b}{b} |\psi_x^0|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\kappa}{\kappa} |\varphi_x^0 + \psi^0|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Tomando  $C_6 = \max \left\{ \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{\kappa}{\rho_1 \rho_2}, \left( \frac{2c_p + 1}{b} \right), \frac{2}{\kappa} \right\}$ , temos

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1, \psi^0\}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_6 \int_0^L \left( \rho_1 |\varphi^1|^2 + \rho_2 |\varphi_x^1|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''(0)|^2 + b |\psi_x^0|^2 + \kappa (|\varphi_x^0 + \psi^0|^2) \right) dx.$$

como  $c_2 = 2C_6$ , obtemos

$$\|\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_2 E(0). \quad (1.80)$$

Como queríamos demonstrar. ■



## 1.5 Resultados de Observabilidade e controlabilidade

Nesta seção vamos mostrar a controlabilidade para o sistema de simplificado de Timoshenko. A fim de conseguir tal controle é necessário mostrar que o sistema satisfaz a desigualdade de observabilidade. Observe a seguinte condição:

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$$

Ele expressa que são iguais as velocidades de propagação das duas ondas de deformação, associadas a  $\varphi$  e  $\psi$ . Neste trabalho mostraremos que essa condição não é necessária para assegurar a desigualdade de observabilidade (Note que esta condição é necessária para se obter desigualdade de observabilidade para o sistema de Timoshenko, cf. [60]). O controle  $h \in L^2(O)$  é uma força aplicada em  $\varpi$  que conduz o deslocamento rotatório para repouso em algum tempo  $T > 0$  suficientemente grande devido à velocidade finita de propagação, assegurando que todo o processo atinge o equilíbrio. O resultado de controle é provado através de dualidade, ou seja, por meio da prova de uma desigualdade de observabilidade do sistema adjunto usando técnicas multiplicadoras.

### 1.5.1 Desigualdade Inversa e Controle Nulo

Consideremos o seguinte sistema de controle:

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa (y_x + z)_x = 0, \text{ em } Q \quad (1.81)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa (y_x + z) = h\chi_\varpi, \text{ em } Q \quad (1.82)$$

com as condições iniciais:

$$y(x, 0) = y^0, y_t(x, 0) = y^1, z(x, 0) = z^0 \quad \text{em } (0, L). \quad (1.83)$$

e as condições de fronteira:

$$y(0) = y(L) = z_x(0) = z_x(L) = 0 \quad \text{em } (0, T). \quad (1.84)$$

Observe que pelo fato do sistema (1.81) – (1.84) ser linear e reversível no tempo, controlabilidade de nula e exata são conceitos equivalentes.

Para estudar a controlabilidade nula do sistema (1.81) – (1.84), vamos introduzir o sistema

adjunto:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0 \text{ em } Q; \quad (1.85)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = 0 \text{ em } Q; \quad (1.86)$$

$$\varphi(T) = \varphi^0, \varphi_t(T) = \varphi^1, \psi(T) = \psi^0 \text{ em } (0, L); \quad (1.87)$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0 \text{ em } (0, T), \quad (1.88)$$

onde  $\varphi^0 \in V$ ,  $\varphi^1 \in H^{-1}(0, L)$  e  $\psi^0 \in V$ .

**Definição 1.2** *O sistema (1.85) – (1.88) é dito ser inicialmente observável em  $O$  se,*

$$\|\varphi(0)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + \|\psi(0)\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\varphi_t(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}(0)|_V^2 \leq C \int_0^T \int_{\varpi} |\psi|_V^2 dx dt, \quad (1.89)$$

para todo  $\varphi^0 \in V$ ,  $\varphi^1 \in H^{-1}(0, L)$  e  $\psi^0 \in V$ .

**Proposição 1.2** *O sistema (1.81)–(1.84) é nulo controlável se, e somente se, o sistema (1.85)–(1.88) é inicialmente observável em  $O$ .*

A desigualdade de observabilidade é obtida através de estimativas da energia total do sistema adjunto por meio de uma medida no controle em  $O$ . Inspirados nas ideias contidas no trabalho de Zuazua [43] consideramos o problema de observabilidade e controlabilidade, no seguinte configuração de espaço de funções alternativo.

**Definição 1.3** *i) O sistema (1.81) – (1.84) com dado inicial em  $V \times V \times H^{-1}(0, L)$  é dito ser nulo controlável se para qualquer  $(y^0, z^0, y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$ , existe um controle  $h \in L^2(0, T, H^{-1}(\varpi))$  tal que a solução correspondente  $(y, z)$  satisfaz*

$$y(T) = 0, y_t(T) = 0, y_{tx}(T) = 0 \text{ e } z(T) = 0 \text{ em } (0, L). \quad (1.90)$$

*ii) O sistema (1.85) – (1.88) como dado final em  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$  é chamado de observável em  $O$  se existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que*

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}(0)|_V^2 \leq C_1 \int_0^T \int_{\varpi} |\psi|_V^2 dx dt, \quad (1.91)$$

para todo  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{F}$ .

Temos o seguinte resultado. Para efeitos de facilita as contas, vamos usar a notação  $(l_1, l_2)$  invés de  $\varpi$ .

**Teorema 1.3** *Existe um  $T_0 > 0$  tal que para todo  $T > T_0$ , e para todo  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{F}$ , existe uma constante positiva  $C_1$  tal que, a solução  $(\varphi, \psi)$  de (1.85) – (1.88) satisfaz*

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}(0)|_V^2 \leq C_1 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\psi|_V^2 dxdt, \quad (1.92)$$

onde  $C_1$  depende de  $T, L, \rho_1, \rho_2, \kappa$  e  $b$ .

**Prova:** A prova é baseado em técnicas presentes em [13] adaptações foram feitas a fim de demonstramos a desigualdade inversa. No que segue denotamos  $c$  ou  $C$  constantes genéricas que dependem somente  $L, \rho_1, \rho_2, \kappa$  e  $b$ .

Vamos considerar  $0 < \epsilon < \frac{|\varpi|}{2}$  onde  $|\varpi| := l_2 - l_1$ , e definamos a função auxiliar, como em [13] e [31]

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda - 1)x, & x \in [0, \tilde{l}_1[ \\ \lambda(x - \tilde{l}_1) + \frac{(\tilde{l}_1 - \tilde{l}_2)\tilde{l}_1}{L}, & x \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2], \\ (\lambda - 1)(x - L), & x \in ]\tilde{l}_2, L] \end{cases}$$

onde  $\tilde{l}_1 = l_1 + \epsilon$ ,  $\tilde{l}_2 = l_2 - \epsilon$  e  $\lambda := \frac{L - (\tilde{l}_2 - \tilde{l}_1)}{L} \in ]0, 1[$ .

Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  solução de (1.85) – (1.88). Multiplicamos a equação (1.85) por  $\varphi_x g_\lambda$  e integrando por partes, temos

$$0 = \left[ \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x g_\lambda dx \right]_{t=0}^T + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_t^2 g'_\lambda dxdt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_x g_\lambda dxdt. \quad (1.93)$$

Da mesma forma, multiplicamos a equação (1.86) por  $\psi_x g_\lambda$ , teremos

$$0 = \left[ -\rho_2 \int_0^L \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda dx \right]_{t=0}^T + \rho_2 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tx} \psi_{xt} g_\lambda dxdt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 g'_\lambda dxdt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi g_\lambda dxdt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dxdt. \quad (1.94)$$

Tomando  $\psi_{xt} = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{ttt} - \varphi_{xxt}$  e substituindo esta expressão em (1.94) e integrando por partes novamente, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}^2 g'_\lambda dxdt + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tx}^2 g'_\lambda dxdt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 g'_\lambda dxdt \\ &+ \left[ \int_0^L \left( \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi g_\lambda dxdt \\ &- \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dxdt. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Então, adicionando (1.93) e (1.95), chegamos em

$$0 = \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\kappa}{2} (\varphi_x + \psi)^2 + \frac{b}{2} \psi_x^2 + \frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tt}^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{xt}^2 \right) g'_\lambda dx dt \\ + \left[ \int_0^L \left( \rho_1 \varphi_t \varphi_x g_\lambda + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt.$$

Agora, observando que

$$g'_\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda - 1), & x \in [0, \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2, L], \\ \lambda, & x \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2], \end{cases}$$

Concluiremos a partir da identidade acima que

$$(1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt = \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{xt}^2 + b \psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 dx dt \\ + \left[ \int_0^L \left( \rho_1 \varphi_t \varphi_x g_\lambda + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt. \quad (1.96)$$

Agora, vamos estimar cada um dos termos do lado direito de (1.96). Usando argumentos padrões, podemos estimar o termo entre colchetes e temos

$$\left| \left[ \int_0^L \left( \rho_1 \varphi_t \varphi_x g_\lambda + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T \right| \leq CE(0). \quad (1.97)$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré e o fato que  $\sup_{x \in [0, L]} |g'_\lambda(x)| \leq 1$  do seguinte modo

$$\left| -\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt \right| \leq \eta \frac{\kappa}{2} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + \frac{\kappa c_p}{\eta} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 dx dt; \\ \leq \eta TE(0). \quad (1.98)$$

onde  $\eta > 0$  é uma constante, a qual será determinada posteriormente. Então, vamos considerar as estimativas (1.97), (1.98), em (1.96), obtemos

$$(1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt \leq \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{xt}^2 + b \psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + CE(0) \\ + \eta TE(0). \quad (1.99)$$

onde  $C$  denota uma constante positiva qualquer.

Definamos a função cut-off  $p = p(x) \in C_0^\infty(0, L)$ , tal que

$$p(x) = \begin{cases} (x - \tilde{l}_2) + 1, & \forall x \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2] \\ 0, & \forall x \in [0, \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2, L], \\ 0 \leq p(x) \leq 1, & \forall x \in [0, L]. \end{cases}$$

Assim, multiplicamos a equação (1.85) por  $\varphi_x p$  e integrando por partes para obtemos

$$\frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_t^2 p_x dx dt = \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_x p dx dt - \left[ \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x p dx \right]_{t=0}^T. \quad (1.100)$$

Por outro lado, multiplicamos a equação (1.86) por  $\psi_x p$ , e levando em conta que  $\psi_{xt} = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{ttt} - \varphi_{xxt}$  e depois integramos por parte, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}^2 p_x dx dt + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tx}^2 p_x dx dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 p_x dx dt = \\ & - \left[ \int_0^L \left( \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} p - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} p \right) dx \right]_{t=0}^T + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi p dx dt \\ & + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi p_x dx dt. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Logo, somando (1.100) e (1.101) temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L 1/2(\kappa(\varphi_x + \psi)^2 + b\psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{xt}^2) p_x dx dt = \\ & - \left[ \int_0^L (\rho_2 \psi_x \varphi_{xt} - \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} - \rho_1 \varphi_t \varphi_x) p dx \right]_{t=0}^T + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi p_x dx dt \end{aligned} \quad (1.102)$$

O termo que está entre colchetes acima é estimado usando os mesmos argumentos usados para estimar (1.97). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi p_x dx dt &= \kappa \int_0^T \int_0^L \varphi_x \psi p_x dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt; \\ &\leq \kappa \frac{|p_x(x)|^2}{2\varepsilon} \eta \int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt + \kappa \frac{\varepsilon}{2\eta} \int_0^T \int_0^L \psi^2 dx dt \\ &+ \kappa \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Agora, consideramos  $\varepsilon = |p_x(x)|^2$  e o termo integral dado por

$$\int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt \leq 2 \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + 2c_p \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 dx dt$$

de (1.103), temos

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt &\leq \kappa \eta \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + \kappa c_p \eta \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 dx dt \\ &+ \kappa \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt + \frac{\kappa}{2\eta} \max_{x \in [0, L]} |p_x(x)| \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt \\ &\leq \eta T E(0) + \left( \frac{\kappa}{2\eta} \max_{x \in [0, L]} |p_x(x)| + \kappa \right) \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt \end{aligned} \quad (1.104)$$

Portanto, usando (1.104) e o fato que  $p_x$  tem suporte contido em  $[l_1, l_2]$ , podemos estimar a integral do lado esquerdo de (1.99) como segue

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} (\kappa(\varphi_x + \psi)^2 + b\psi_x^2 + \frac{\rho_1\rho_2}{\kappa}\varphi_{tt}^2 + \rho_1\varphi_t^2 + \rho_2\varphi_{xt}^2) dxdt &\leq CE(0) + \eta TE(0) \\ &+ \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dxdt. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Combinando (1.99) com (1.105), concluímos que

$$[(1 - \lambda) - \eta] TE(0) \leq \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dxdt + CE(0).$$

Escolhendo  $\eta > 0$  tal que  $K = (1 - \lambda) - \eta > 0$  e  $T$  suficientemente grande, segue da desigualdade anterior que

$$K \left( T - \frac{C}{K} \right) E(0) \leq \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dxdt. \quad (1.106)$$

Portanto, for  $T > T_0$ , temos a desigualdade desejada

$$E(0) \leq C_1 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dxdt, \quad (1.107)$$

onde  $C_1 = \frac{\tilde{C}}{K(T - \frac{C}{K})}$  e  $T_0 = \frac{C}{K}$ . ■

O próximo resultado assegura a controlabilidade nula de (1.85) – (1.88). Para simplificar a notação, consideramos  $O = \varpi \times (0, T)$ .

**Teorema 1.4** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) O sistema (1.85) – (1.88) com dado final em  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$  é inicial observável  $O$ ;
- ii) O sistema (1.81) – (1.84) como dado inicial em  $V \times V \times H^{-1}(0, L)$  é nulo controlável;
- iii) A solução de (1.85) – (1.88) satisfaz

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}(0)|_V^2 \leq C_1 \int_O |\psi|^2 dxdt, \quad (1.108)$$

para todo  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{F}$ .

**Prova:** Primeiro, vamos estabelecer uma relação de identidade entre a solução do problema de controle e seu adjunto, a qual será usada posteriormente. Multiplicando a primeira equação de (1.81) by  $\varphi$  e (1.82) por  $\psi$  e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 \langle y(T), \varphi^1 \rangle - \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle + \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt} y dxdt \\ - \kappa \int_0^T \int_0^L \varphi_{xx} y dxdt + \kappa \int_0^T \int_0^L \varphi_x z dxdt; \end{aligned} \quad (1.109)$$

e

$$\begin{aligned}
& -\rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \rho_2(\varphi_x^1, z(T)) - \rho_2(\varphi_{tx}(0), z^0) \\
& -\rho_2 \int_0^T \int_0^L \varphi_{ttx} z dx dt - b \int_0^T \int_0^L \psi_{xx} z dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L \psi_x y dx dt \\
& + \kappa \int_0^T \int_0^L \psi z dx dt + \rho_2 \int_0^T \int_0^L (y_{tx} \psi_t - \varphi_{tx} z_t) dx dt = \int_O h \psi dx dt. \tag{1.110}
\end{aligned}$$

De acordo com (1.109) – (1.110) e assumindo a condição de compatibilidade

$$\int_0^T \int_0^L (y_{tx} \psi_t - \rho_2 \varphi_{tx} z_t) dx dt = 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
& \rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 (y(T), \varphi^1) - \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 (y^0, \varphi_t(0)) - \rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle \\
& + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \rho_2(\varphi_x^1, z(T)) - \rho_2(\varphi_{tx}(0), z^0) + \int_0^T \int_0^L [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x] y dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^L [-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa(\varphi + \psi)] z dx dt = \int_O h \psi dx dt. \tag{1.111}
\end{aligned}$$

Agora, considerando (1.85) – (1.86), de (1.111) temos

$$\begin{aligned}
\rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 (y(T), \varphi^1) - \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 (y^0, \varphi_t(0)) - \rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle \\
+ \rho_2(\varphi_x^1, z(T)) - \rho_2(\varphi_{tx}(0), z^0) = \int_O h \psi dx dt. \tag{1.112}
\end{aligned}$$

$i) \Rightarrow ii)$  Denotamos por  $F$  o espaço de Hilbert da qual é complemento de

$$\left\{ (\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{F}; \int_O |\psi|^2 dx dt < \infty \right\} \tag{1.113}$$

com respeito a norma

$$|(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)|_F := \left( \int_O |\psi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.114}$$

onde  $(\varphi, \psi)$  resolve (1.85) – (1.86) com dado final  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)$ .

Afirmamos que  $F \subset \mathcal{H}$ . De fato, se  $(\varphi, \psi)$  é solução para (1.85) – (1.86), então também resolve o seguinte sistema:

$$\rho_1 \tilde{\varphi}_{tt} - \kappa \left( \tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} \right)_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T); \tag{1.115}$$

$$-\rho_2 \tilde{\varphi}_{ttx} - b \tilde{\psi}_{xx} + \kappa (\tilde{\varphi}_x + \psi) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T); \tag{1.116}$$

$$\tilde{\varphi}(0) = \varphi(0), \tilde{\varphi}_t(0) = \varphi_t(0), \tilde{\psi}(0) = \psi(0) \text{ em } (0, L); \tag{1.117}$$

$$\tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}(L) = \tilde{\psi}_x(0) = \tilde{\psi}_x(L) = 0 \quad \text{em} \quad (0, T), \quad (1.118)$$

De (1.91), sabemos que se  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in F$ , então

$$(\varphi(0), \psi(0), \varphi_t(0)) \in \mathcal{H} \subset V \times V \times H^{-1}(0, L). \quad (1.119)$$

Isso, junto com o fato do problema (1.115) – (1.118) ser bem-posto, implica que

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}_t) \in C([0, T]; V \times V \times H^{-1}(0, L)). \quad (1.120)$$

Desde  $(\varphi(0), \psi(0), \varphi_t(0)) \in \mathcal{H}$ , de (1.115) – (1.118), sabemos que

$$(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}_t) \in C([0, T]; \mathcal{H}). \quad (1.121)$$

Disto, junto com (1.120), implica que  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) = (\tilde{\varphi}(T), \tilde{\psi}(T), \tilde{\varphi}_t(T)) \in \mathcal{H}$ .

Fixado qualquer  $(y^0, z^0, y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$ , e definamos o funcional  $\mathcal{J} : F \rightarrow \mathbf{R}$  por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) &= \frac{1}{2} \int_O |\psi|^2 dxdt + \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle - \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle \\ &\quad - \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.122)$$

onde  $(\varphi, \psi)$  resolve (1.85) – (1.88) com dado final  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in F$ . Claramente,  $\mathcal{J}(\cdot, \cdot, \cdot)$  é contínua e estritamente convexa. De (1.91), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) &\geq \frac{1}{2} \int_O |\psi|^2 dxdt - \rho_1 |y^1| |\varphi(0)| - \rho_1 |y^0| |\varphi_t(0)| - \rho_2 |y_x^1| |\psi(0)| - \rho_2 |\varphi_{tx}(0)| |z^0|, \\ &\geq C_1 \int_O |\psi|^2 dxdt - (\rho_1 |y^1| |\varphi(0)| + \rho_1 |y^0| |\varphi_t(0)| + \rho_2 |y_x^1| |\psi(0)| + \rho_2 |\varphi_{tx}(0)| |z^0|), \\ &\geq C_1 \int_O |\psi|^2 dxdt - C_2 \int_O |\psi|^2 dxdt (|y^1| |\varphi(0)| + |y^0| |\varphi_t(0)| \\ &\quad + |y_x^1| |\psi(0)| + |\varphi_{tx}(0)| |z^0|), \end{aligned} \quad (1.123)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são independentes  $(\varphi, \psi)$ . Por (1.123),  $\mathcal{J}(\cdot, \cdot, \cdot)$  é coerciva. Assim,  $\mathcal{J}(\cdot, \cdot, \cdot)$  admite um único minimizante  $(\hat{\varphi}^0, \hat{\psi}^0, \hat{\varphi}^1) \in F$ . Denotamos por  $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$  a solução para (1.85) – (1.88) com o dado final  $(\hat{\varphi}^0, \hat{\psi}^0, \hat{\varphi}^1)$ . Desde modo, para qualquer  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{F}$  e  $\delta \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{J}(\hat{\varphi}^0 + \delta\varphi^0, \hat{\psi}^0 + \delta\psi^0, \hat{\varphi}^1 + \delta\varphi^1) - \mathcal{J}(\hat{\varphi}^0, \hat{\psi}^0, \hat{\varphi}^1), \\ &= \frac{1}{2} \int_O |\hat{\psi} + \delta\psi|^2 dxdt + \rho_1 \langle y^1, \hat{\varphi}(0) + \delta\varphi(0) \rangle - \rho_1 \langle y^0, \hat{\varphi}_t(0) + \delta\varphi_t(0) \rangle \\ &\quad - \rho_2 \langle y_x^1, \hat{\psi}(0) + \delta\psi(0) \rangle + \rho_2 \langle \hat{\varphi}_{tx}(0) + \delta\varphi_{tx}(0), z^0 \rangle - \frac{1}{2} \int_O |\hat{\psi}|^2 dxdt \\ &\quad - \rho_1 \langle y^1, \hat{\varphi}(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \hat{\varphi}_t(0) \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \hat{\psi}(0) \rangle - \rho_2 \langle \hat{\varphi}_{tx}(0), z^0 \rangle, \\ &= \delta \int_O \hat{\psi}\psi dxdt + \frac{\delta^2}{2} \int_O |\hat{\psi}|^2 dxdt + \delta\rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle - \delta\rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle \\ &\quad - \delta\rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \delta\rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.124)$$



Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\widehat{\varphi}^0 + \delta\varphi^0, \widehat{\psi}^0 + \delta\psi^0, \widehat{\varphi}^1 + \delta\varphi^1) - \mathcal{J}(\widehat{\varphi}^0, \widehat{\psi}^0, \widehat{\varphi}^1)}{\delta}, \\ &= \int_0^T \widehat{\psi}\psi dxdt + \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle - \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle - \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Afirmamos que

$$\int_0^T \int_{\varpi} \widehat{\psi}\psi dxdt = \langle \psi, h \rangle_{L^2(0,T;H_*^1(\varpi)), L^2(0,T;H^{-1}(\varpi))}.$$

Para ver isto, note que para cada  $h \in L^2(0, T; H_*^{-1}(\varpi))$ , existe um único  $v \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi))$ , tal que

$$\int_0^T ((v, \psi)) dt = \langle \psi, h \rangle_{L^2(0,T;H_*^1(\varpi)), L^2(0,T;H^{-1}(\varpi))}, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi)).$$

De (1.91) podemos definir a aplicação  $\mathcal{B} : L^2(0, T; H^{-1}(\varpi)) \rightarrow L^2(0, T; H_*^1(\varpi))$ , tal que  $\mathcal{B}h = v$  que é linear e limitada, conseqüentemente teremos

$$\|\mathcal{B}h\|_{L^2(0,T;H_*^1(\varpi))} = \|h\|_{L^2(0,T;H_*^{-1}(\varpi))},$$

portanto

$$\int_0^T ((\mathcal{B}h, \psi)) dt = \langle \psi, h \rangle_{L^2(0,T;H_*^1(\varpi)), L^2(0,T;H^{-1}(\varpi))}, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi)).$$

Por outro lado, fixamos  $\widehat{\psi} \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi))$ , o funcional linear  $\mathcal{L}_{\widehat{\psi}}(\psi) = \int_0^T ((\widehat{\psi}, \psi)) dt$  é limitado. Pelo Teorema de Riesz-Fréchet veja, página 135 em [11], existe uma única  $q \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi))$  tal que

$$\int_0^T ((\widehat{\psi}, \psi)) dt = \int_0^T ((q, \psi)) dt, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi)).$$

Considerando a aplicação  $\mathcal{A} : L^2(0, T; H_*^1(\varpi)) \rightarrow L^2(0, T; H_*^1(\varpi))$  linear e contínua, definamos  $q = \mathcal{A}\widehat{\psi}$ , então

$$\int_0^T ((\widehat{\psi}, \psi)) dt = \int_0^T ((\mathcal{A}\widehat{\psi}, \psi)) dt, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi)).$$

Portanto, por Lax-Milgram veja, página 140 em [11], podemos tomar  $\widehat{\psi} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}h$  isto implica que

$$\begin{aligned} \int_0^T ((\widehat{\psi}, \psi)) dt &= \int_0^T ((\mathcal{B}h, \psi)) dt, \\ &= \langle h, \psi \rangle \quad \forall \psi \in L^2(0, T; H_*^1(\varpi)). \end{aligned} \quad (1.126)$$

De (1.125), (1.126) e (1.112), concluímos que para todo  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{F}$ ,

$$\rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 \langle y(T), \varphi^1 \rangle - \rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle + \rho_2 \langle \varphi_x^1, z(T) \rangle = 0, \quad (1.127)$$

que implica em

$$y(T) = y_t(T) = y_{tx}(T) = z(T) = 0.$$

*ii)  $\Rightarrow$  iii).* Desde que o sistema (1.81) – (1.84) é nulo controlável, para qualquer dado  $(y^0, z^0, y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$  existe um controle  $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\varpi))$  conduzindo a solução correspondente ao repouso. Da prova de (1.112), temos que

$$-\rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle = \int_O h \psi dx dt. \quad (1.128)$$

Definamos o operador linear limitado  $\Lambda : F \rightarrow \mathcal{H}$  como segue

$$\Lambda(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) = (\varphi(0), \psi(0), \varphi_t(0), \varphi_{tx}(0)),$$

onde  $(\varphi(0), \psi(0), \varphi_t(0), \varphi_{tx}(0))$  é valor no tempo  $t = 0$  da solução do problema (1.85) – (1.88) com dado final  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)$ .

Agora iremos argumentar por contradição para prova que a solução da equação (1.85) – (1.88), satisfaz a condição (1.108). Se a afirmação for falsa, então, poderemos encontrar um sequência  $\{\varphi_k^0, \psi_k^0, \varphi_k^1\}_{k=1}^\infty \subset F$  com  $(\varphi_k^0, \psi_k^0, \varphi_k^1) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , tal que a solução correspondente  $(\varphi_k, \psi_k)$  para (1.85) – (1.88) com  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)$  substituída por  $(\varphi_k^0, \psi_k^0, \varphi_k^1)$  satisfaz que

$$\int_O |\psi_k|^2 dx dt \leq \frac{1}{k^2} \left( \|\varphi_k(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi_k(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t^k(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}^k(0)|_V^2 \right). \quad (1.129)$$

Escrevendo

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\|\varphi_k(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi_k(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t^k(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}^k(0)|_V^2}}$$

e

$$\tilde{\varphi}_k^0 = \lambda_k \varphi_k^0, \quad \tilde{\psi}_k^0 = \lambda_k \psi_k^0, \quad \tilde{\varphi}_k^1 = \lambda_k \varphi_k^1$$

e denote por  $(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k)$  a solução correspondente para (1.85) – (1.88) com  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)$  substituída por  $(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1)$ . Então, segue de (1.129) que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_O |\tilde{\psi}_k|^2 dx dt \leq \frac{1}{k} \quad (1.130)$$

e

$$\left| \Lambda(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1) \right|_{\mathcal{H}} = \sqrt{k}. \quad (1.131)$$

Em vista de (1.128), temos que

$$-\rho_1 \langle y^1, \tilde{\varphi}_k(0) \rangle + \rho_1 \left( y^0, \tilde{\varphi}_t^k(0) \right) + \rho_2 \langle y_x^1, \tilde{\psi}_k(0) \rangle - \rho_2 (\tilde{\varphi}_{tx}^k(0), z^0) = \int_O h \tilde{\psi}_k dx dt. \quad (1.132)$$

Por (1.130) e (1.132), temos

$$\Lambda(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1) \text{ tendendo } 0 \text{ fracamente em } \mathcal{H} \text{ com } k \rightarrow \infty.$$

Consequentemente, pelo Princípio da Limitação Uniforme, veja página 32 em [11], a sequência

$\left\{ \Lambda(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1) \right\}_{k=1}^{\infty}$  é uniformemente limitada em  $\mathcal{H}$  o que contradiz (1.131)

*iii*)  $\Rightarrow$  *i*). Isto é dado pelo Teorema 1.3. Portanto completamos a prova Teorema 1.4.

■

# Capítulo 2

## Controlabilidade nula para versão truncada do sistema de Timoshenko com memória

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, consideramos a versão truncada do sistema de Timoshenko com memória. Estudamos existência, unicidade, dependência contínua das soluções e controlabilidade nulo tipo memória. Para obtermos a existência de soluções usamos o método de Faedo-Galerkin, usamos um método de ponto fixo para obtermos a unicidade de soluções e estimativas de energia para mostramos a dependência contínua das soluções. Na seção 2.4 mostramos certas desigualdades de energia que são de fundamental importância para conseguirmos a desigualdade de observabilidade do sistema. Mostramos que o sistema adjunto é observável usando um método de multiplicadores, atingimos o resultado sem estabelecer qualquer relação entre as velocidades de propagação da onda, as técnicas usadas estão presentes em [15, 13, 31, 38]. Estudamos a controlabilidade nula do tipo memória para a versão truncada do sistema de Timoshenko envolvendo um termo de memória. Para isso, é necessário não apenas conduzir o deslocamento e a velocidade para o repouso no tempo  $T > 0$ , mas também exigir uma condição adicional, ou seja, o efeito do termo memória deve desaparecer ao mesmo tempo, haja vista que devemos considerar

o acúmulo de memória ao longo do tempo.

## 2.2 Hipóteses e notações iniciais

Consideramos a dinâmica do sistema simplificado de Timoshenko no caso unidimensional para vigas envolvendo um termo de memória. Para um feixe com comprimento  $L$ , este sistema é dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q \quad (2.1)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \alpha \int_0^t M(t, s) \psi_{xx}(s) ds = 0, \text{ em } Q. \quad (2.2)$$

em um domínio retangular  $Q = (0, L) \times (0, T)$  e  $\Gamma = \{0; L\}$  representa da fronteira do domínio e  $T > 0$  é um tempo controle. Para facilita nossa análise consideramos as seguintes condições iniciais

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi^0(x) \quad \text{em } (0, L) \quad (2.3)$$

e as condições de fronteira:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \text{in } (0, T), \quad (2.4)$$

com as constantes positivas  $\rho_1, \rho_2, \kappa, b$  e  $\alpha$  é um parâmetro pequeno.

Em relação ao kernel  $M$ , consideramos as seguintes hipóteses:

$$M \in C^1([0, T] \times [0, T]) \text{ and } T > 0, \quad (2.5)$$

$$M(t, t) \in L^\infty(0, T); \quad (2.6)$$

e para  $t \geq T$  o kernel  $M(t, s)$  satisfaz

$$M(t_1, t_3) = M(t_1, t_2) \widetilde{M}(t_2, t_3), \quad (2.7)$$

para todo  $t_1, t_2$  e  $t_3$  com  $0 \leq t_3 \leq t_2 \leq t_1 < \infty$ , e alguma função  $\widetilde{M}(\cdot, \cdot) \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ . Para efeito de controle do sistema iremos considerar a literatura existente, da qual assegura que para a dinâmica do sistema possa alcança o repouso em  $t \geq T$ , é necessário assumir a seguinte condição

$$\int_0^T M(T, s) z_{xx}(s) ds = 0. \quad (2.8)$$

Além do mais, definamos a notação

$$(M\psi)(t) := \int_0^t M(t, s) \psi(s) ds. \quad (2.9)$$

## 2.3 Existência e unicidade do sistema com memória

Agora, vamos enunciar o resultado que garante que o sistema (2.1) – (2.4) é bem-posto, a saber

**Teorema 2.1** *Para  $\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{H}$ . Existe uma única solução  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\} \in C([0, T]; \mathcal{H})$  de (2.1) – (2.4), satisfazendo a condição*

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)); \quad \psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)), \quad (2.10)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)), \quad \varphi_{tt} \in L^\infty(0, T; V). \quad (2.11)$$

**Prova:**

### Problema aproximado

A existência de soluções será feita usando o método de Faedo-Galerkin. A prova é inspirada nos argumentos contidos em [12], [41] e [43]. Realizando a mesma construção do problema (1.3) - (1.6) do capítulo 1, obtemos o seguinte problema aproximado

$$\begin{cases} \rho_1 (\varphi_m''(t), w_\nu) - \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))_x, w_\nu) = 0 \\ -\rho_2 (\varphi_{mx}''(t), \tilde{w}_\nu) - b (\psi_{mxx}(t), \tilde{w}_\nu) + \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)), \tilde{w}_\nu) - \alpha((M\psi_{xx})(t), \tilde{w}_\nu) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

onde  $\nu = 1, 2, \dots, m$ , com dados iniciais

$$\varphi_m(0) = \varphi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^0, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \quad (2.13)$$

$$\varphi_m'(0) = \varphi_m^1 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^1, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^1 \in H_0^1(0, L) \quad (2.14)$$

$$\psi_m(0) = \psi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\psi^0, \tilde{w}_\nu) \tilde{w}_\nu \longrightarrow \psi^0 \in H_*^1(0, L). \quad (2.15)$$

Além disso, assumiremos a hipótese que

$$\psi_m'(0) \text{ é limitada em } V. \quad (2.16)$$

Este modelo é uma extensão do conhecido modelo de vigas de Kirchhoff viscoelástico. De fato, note que negligenciar os efeitos de cisalhamento do viga é formalmente equivalente a fazer o módulo  $\kappa$  tende ao infinito (2.1) – (2.2), desde  $\kappa$  é inversamente proporcional ao ângulo de cisalhamento. Assim, deduziu-se dos fatos que o termo  $\kappa(\varphi_x + \psi) = 0$  entre as duas equações e introduzimos a suposição de Kirchhoff

$$\varphi_x = -\psi,$$

obtemos

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \rho_2 \varphi_{ttxx} + b \varphi_{xxxx} + \alpha \int_0^t M(t, s) \varphi_{mxxxx}(s) ds = 0.$$

que é equivalente a (2.1)–(2.4) e bem-posto de acordo com [35]. Então, para cada  $m$ , argumentos padrões asseguram que existe uma única função  $\varphi_m$ , tal que

$$\rho_1 \varphi_m'' - \rho_2 \varphi_m''_{mxx} + b \varphi_{mxxxx} + \alpha \int_0^t M(t, s) \varphi_{mxxxx}(s) ds = 0 \quad \text{a.e. in } Q.$$

A fim de resolver o problema, vamos aplicar as soluções aproximadas, obtemos

$$\rho_1 p''_{\nu m}(t) w_\nu(x) - \rho_2 p''_{\nu m}(t) w_{\nu xx}(x) + b p(t)_{\nu m} w_{\nu xxx}(x) + \alpha \int_0^t M(t, s) p(t)_{\nu m} w_{\nu xxx}(s) ds = 0. \quad (2.17)$$

Assim, o problema aproximado (2.12) pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \rho_1 p''_{\nu m}(t) + \rho_2 \sum_{\nu=1}^m p''_{\nu m}(t) ((w_\nu, w_\nu)) + b \sum_{\nu=1}^m p_{\nu m}(t) ((w_{x\nu}, w_{x\nu})) \\ + \alpha \int_0^t M(t, s) \sum_{\nu=1}^m p_{\nu m}(t) ((w_{x\nu}, w_{x\nu})) ds = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

com as condições iniciais

$$p_{\nu m}(0) = (\varphi^0, w_\nu), \quad p'_{\nu m}(0) = (\varphi^1, w_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, m. \quad (2.19)$$

No entanto, temos um problema de Cauchy para um sistema linear com equações diferenciais ordinárias em  $p_{\nu m}(t)$  cuja as soluções locais são  $C^1$  no intervalo  $(0, t_m)$ , usando teoremas clássicos da teoria de equações diferenciais é possível comprovar tal afirmação. Agora, multiplicando ambos os lados de (2.12)<sub>1</sub> e (2.12)<sub>2</sub> por  $p'_{\nu m}(t)$  e somando em  $\nu$  de 1 a  $m$  e integrando em  $(0, L)$ , temos:

$$\begin{aligned} \rho_1 (\varphi_m''(t), \varphi_m'(t)) - \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))_x, \varphi_m'(t)) = 0 \\ - \rho_2 (\varphi_m''_{mxx}(t), \psi_m'(t)) - b (\psi_{mxx}(t), \psi_m'(t)) + \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)), \psi_m'(t)) \\ - \alpha ((M\psi_{mxx})(t), \psi_m'(t)) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A seguir, mostramos estimativas a priori que permitem estender as soluções locais para o intervalo  $[0, T]$ , para qualquer  $T$ .

### Estimativas

Para facilitar a notação em argumentos futuros, definamos:

$$r_0^m(t) = \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds; \quad r_1^m(t) = \int_0^t M_t(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)); \quad (2.21)$$

$$r_2^m(t) = M(t, t)(\psi_x(s), \psi_x(s))ds. \quad (2.22)$$

Primeiramente, vamos estimar  $\varphi_m''(0)$ . Desde que as sequências  $(\varphi_m^0, \varphi_m^1, \psi_m^0)$  convergem, multiplicamos (2.12)<sub>1</sub> por  $p_{\nu m}''(t)$  e escolhendo  $t = 0$ , por cálculos padrões, obtemos

$$\rho_1 |\varphi_m''(0)| \leq \kappa (|\varphi_{mxx}^0| + |\psi_{mxx}^0|).$$

de (2.13), (2.14) e (2.15), temos

$$|\varphi_m''(0)| \leq C,$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

Observe que ao integrar (2.20)<sub>1</sub> e (2.20)<sub>2</sub> em  $(0, L)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |\varphi_m'(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m''(t)|^2 \right. \\ \left. + \rho_2 |\varphi_{mx}'(t)|^2 + 2\alpha r_0^m(t) \right) = \alpha (r_1^m(t) + r_2^m(t)). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Vamos definir a energia associada ao sistema (2.1) – (2.4). Temos,

$$\frac{d}{dt} E_1^m(t) = \alpha (r_1^m(t) + r_2^m(t)) \quad (2.24)$$

onde

$$\begin{aligned} E_1^m(t) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi_m'(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m''(t)|^2 \right. \\ \left. + \rho_2 |\varphi_{mx}'(t)|^2 + 2\alpha r_0^m(t) \right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

desde que  $r_0^m(t) \geq 0$ , temos

$$E^m(t) \leq E_1^m(t), \quad (2.26)$$

onde definimos o funcional energia por

$$\begin{aligned} E^m(t) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi_m'(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m''(t)|^2 \right. \\ \left. + \rho_2 |\varphi_{mx}'(t)|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, integrando (2.24) de 0 a  $t$  e usando (2.26) obtemos

$$\begin{aligned} E^m(t) &\leq E_1^m(0) + \alpha \int_0^t (r_1^m(s) + r_2^m(s)) ds; \\ &= E^m(0) + \alpha \int_0^t (r_1^m(s) + r_2^m(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.28)$$



Então, da desigualdade (2.28) temos

$$\begin{aligned} E^m(t) &\leq E^m(0) + C(T) \int_0^t E^m(s) ds; \\ E^m(t) &\leq C_0 + C(T) \int_0^t E^m(s) ds. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Portanto, a desigualdade de Gronwall assegura que

$$E^m(t) \leq C_0 e^{C_1 t}, \text{ for all } 0 < t < t_m < T, \quad (2.30)$$

com  $m = 1, 2, \dots$ . Assim, obtemos

$$(\varphi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (2.31)$$

$$(\varphi'_x)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (2.32)$$

$$(\varphi_x)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (2.33)$$

$$(\varphi'')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (2.34)$$

$$(\psi_x)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V). \quad (2.35)$$

Usando a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow V$ , temos

$$(\varphi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (2.36)$$

$$(\varphi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (2.37)$$

$$(\psi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)). \quad (2.38)$$

Note que

$$L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]';$$

$$L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'$$

e

$$L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'.$$

Como um resultado, de (2.36) – (2.38) e Teorema de Banach-Alaoglu-bourbaki e resultados de regularidade elíptica, veja por exemplo página 66 em [11], existe uma subsequência  $(\varphi_\mu)$  e  $(\psi_\mu)$ , tal que

$$(\varphi')_\mu \xrightarrow{*} \varphi' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'; \quad (2.39)$$

$$(\varphi)_\mu \xrightarrow{*} \varphi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]'; \quad (2.40)$$

$$(\psi)_\mu \xrightarrow{*} \psi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'. \quad (2.41)$$

Portanto, de (2.39) – (2.41), temos

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)), \quad \varphi_t \in L^\infty(0, T; V), \quad \psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)). \quad (2.42)$$

Explorando uma propriedade de imersão bem conhecida (cf. Lema 1.2, em [40] e Lema 8.1 em [41]), temos que

$$\varphi \in C(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)), \quad \varphi_t \in C(0, T; H_0^1(0, L)), \quad \psi \in C(0, T; H_*^1(0, L)). \quad (2.43)$$

### Unicidade e condições iniciais

Denotamos  $\mathcal{Z}$  o espaço  $C([0, T]; \mathcal{H})$  com a seguinte norma:

$$|v|_{\mathcal{Z}} := \left( \left| e^{-\beta t} \varphi \right|_{C([0, T]; H_0^1(0, L))}^2 + \left| e^{-\beta t} \varphi_t \right|_{C([0, T]; V)}^2 + \left| e^{-\beta t} \psi \right|_{C([0, T]; H_*^1(0, L))}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

com  $v = (\varphi, \psi)$  a solução correspondente para (2.1) – (2.4) onde  $\beta$  é um número positivo do qual o seu valor será dado abaixo. Observe que,

$$e^{-\beta T} |v|_{C([0, T]; \mathcal{H})} \leq |v|_{\mathcal{Z}} \leq |v|_{C([0, T]; \mathcal{H})}.$$

Então,  $\mathcal{Z}$  é um espaço de Banach com a norma  $|\cdot|_{\mathcal{Z}}$  e  $\mathcal{Z}$  igual  $C([0, T]; \mathcal{H})$ . Definamos o mapa  $\mathcal{G}$  em  $\mathcal{Z}$  como,

$$\mathcal{G}(v) = u,$$

onde  $v \in \mathcal{Z}$ , e  $u$  é solução de (2.1) – (2.4) com  $\int_0^t M(t, s) \psi_{xx}(s) ds$  sendo substituído por  $\int_0^t M(t, s) v_{xx}(s) ds$ . A partir da boa colocação para o sistema simplificado de Timoshenko não-homogêneo, temos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{Z}} &\leq \|u\|_{C([0, T]; \mathcal{H})}; \\ &\leq C \left( \|(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)\|_{\mathcal{H}} + \left| \alpha \int_0^t M(t, s) v_{xx}(s) ds \right|_{L^2(Q)} \right); \\ &\leq C \left( \|(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)\|_{\mathcal{H}} + |v|_{L^2(Q)} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Consequentemente, é um mapa invariante, quer dizer,  $\mathcal{G}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$ .

Agora, para  $v, \tilde{v} \in \mathcal{Z}$ ,

$$\begin{aligned} &|\mathcal{G}(\varphi)(t) - \mathcal{G}(\tilde{\varphi})(t)|_{H_0^1(0, L)} + |\mathcal{G}(\varphi)_t(t) - \mathcal{G}(\tilde{\varphi})_t(t)|_V + \left| \mathcal{G}(\psi)(t) - \mathcal{G}(\tilde{\psi})(t) \right|_{H_*^1(0, L)} \\ &\leq C \int_0^T \int_0^L \left| \alpha \int_0^t M(t, s) (v(x, s)_{xx} - \tilde{v}(x, s)_{xx}) ds \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

**Observação 2.1** Seja  $\mathcal{A} := -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  definido por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ f \in V; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in V \right\},$$

tal que,  $\mathcal{A}f = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . Por argumentos padrão, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in V \Leftrightarrow \mathcal{F} \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \xi^2 \mathcal{F}(f) \in V,$$

onde “ $\mathcal{F}$ ” é a Transformada de Fourier, ou seja,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ f \in V; \quad \xi^2 \mathcal{F}(f) \in V \},$$

e

$$\mathcal{A}f = \mathcal{F}^{-1} (\xi^2 \mathcal{F}(f)), \quad f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Então, é natural definir a “Função de operador”  $\mathcal{A}$  como

$$\mathcal{D}(F(\mathcal{A})) = \{ f \in V; \quad F(\xi^2) \mathcal{F}(f) \in V \},$$

e

$$F(\mathcal{A})f = \mathcal{F}^{-1} (F(\xi^2) \mathcal{F}(f)), \quad f \in \mathcal{D}(F(\mathcal{A})),$$

onde  $F[0, \infty) \rightarrow K$  é função limitada ou não. Portanto, se  $F$  é limitada, então

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f = \mathcal{F}^{-1} (\xi^2 \mathcal{F}(f)) &\Rightarrow F(\mathcal{A})f = \mathcal{F}^{-1} (F(\xi^2) \mathcal{F}(f)) \\ &= \|F(\mathcal{A})f\|_V = \|\mathcal{F}^{-1} (F(\xi^2) \mathcal{F}(f))\|_V \\ &\leq \|F\|_\infty \|f\|_V. \end{aligned}$$

De fato, tomando  $F(\mathcal{A}) = e^{t\mathcal{A}}$ ,  $t \geq 0$  e  $y(t) = e^{t\mathcal{A}}f$ , onde  $y(t)$  é solução de

$$\begin{cases} y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad \forall t \geq 0; \\ \frac{d}{dt}y = \mathcal{A}y \\ y(0) = f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{cases}$$

Agora, substituindo  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x, s)$  por  $F(\mathcal{A})v(x, s)$ , temos

$$\begin{aligned}
& e^{-2\beta t} |\mathcal{G}(\varphi)(t) - \mathcal{G}(\tilde{\varphi})(t)|_{H_0^1(0,L)}^2 + e^{-2\beta t} |\mathcal{G}(\varphi)_t(t) - \mathcal{G}(\tilde{\varphi})_t(t)|_V^2 + e^{-2\beta t} \left| \mathcal{G}(\psi)(t) - \mathcal{G}(\tilde{\psi})(t) \right|_{H_*^1(0,L)}^2; \\
& \leq C \int_0^T \int_0^L \left| \alpha \int_0^t e^{-\beta t} M(t, s) F(\mathcal{A})[v(x, s) - \tilde{v}(x, s)] ds \right|^2 dx dt; \\
& \leq C_0 |M|_{C([0,T] \times [0,T])} |F|_\infty \int_0^T \int_0^L \int_0^t e^{-2\beta t} |v(x, s) - \tilde{v}(x, s)|^2 ds dx dt; \\
& \leq C_0 |M|_{C([0,T] \times [0,T])} |F|_\infty \int_0^T \int_0^L \int_0^t e^{-2\beta(t-s)} e^{-2\beta s} |v(x, s) - \tilde{v}(x, s)|^2 ds dx dt; \\
& \leq C_0 T |M|_{C([0,T] \times [0,T])} |F|_\infty \int_0^t e^{-2\beta(t-s)} ds \\
& \quad \times \sup_{s \in [0,t]} \left( e^{-2\beta s} |\varphi(s) - \tilde{\varphi}(s)|_{H_0^1(0,L)} + e^{-2\beta s} |\varphi_t(s) - \tilde{\varphi}_t(s)|_V + e^{-2\beta s} \left| \psi(s) - \tilde{\psi}(s) \right|_{H_*^1(0,L)} \right); \\
& \leq C_0 T |M|_{C([0,T] \times [0,T])} |F|_\infty \frac{1 - e^{-2\beta T}}{2\beta} \\
& \quad \times \sup_{s \in [0,t]} \left( e^{-2\beta s} |\varphi(s) - \tilde{\varphi}(s)|_{H_0^1(0,L)} + e^{-2\beta s} |\varphi_t(s) - \tilde{\varphi}_t(s)|_V + e^{-2\beta s} \left| \psi(s) - \tilde{\psi}(s) \right|_{H_*^1(0,L)} \right);
\end{aligned}$$

isto implica que

$$|\mathcal{G}(v) - \mathcal{G}(\tilde{v})|_{\mathcal{Z}} \leq \left( C_0 T |M|_{C([0,T] \times [0,T])} |F|_\infty \frac{1 - e^{-2\beta T}}{2\beta} \right)^{\frac{1}{2}} |v - \tilde{v}|_{\mathcal{Z}}.$$

Vamos tomar  $\beta = C_0 T |M|_{C([0,T] \times [0,T])} |F|_\infty$  e quando  $T$  grande o suficiente, obtemos

$$|\mathcal{G}(v) - \mathcal{G}(\tilde{v})|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |v - \tilde{v}|_{\mathcal{Z}}, \quad (2.46)$$

o que conclui que é um mapeamento contrativo. Portanto, aqui está um único ponto fixo de  $\mathcal{G}$ , que é a solução para (2.1) – (2.4).

Seja  $\{\varphi, \psi\}$  solução para (2.1) – (2.4), então definamos.

$$G(t) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi'(t)| + b \|\psi(t)\| + \kappa |\varphi_x(t) + \psi(t)| + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''(t)| + \rho_2 \|\varphi'(t)\| \right),$$

e

$$G(0) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi^1| + b \|\psi^0\| + \kappa |\varphi_x^0 + \psi^0| + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''(0)| + \rho_2 \|\varphi^1\| \right).$$

Note que

$$E(t) \leq G(t)G(t) \quad \text{and} \quad E(0) \leq G(0)G(0)$$

de (2.29) obtemos

$$G(t)^2 \leq G(0)^2 + C_1 \int_0^t G(s) ds,$$

consideramos a desigualdade padrão:

$$\frac{1}{2}G(t)^2 \leq 2a^2 + 2 \int_0^t m(s)G(s)ds.$$

Então,

$$\frac{1}{2}G(t)^2 \leq G(t)^2 \leq 2a^2 + 2 \int_0^t m(s)G(s)ds \quad (2.47)$$

onde  $m(s) = C_1$  e  $a = \left(\frac{2G(0)^2}{2}\right)^{1/2}$ . Pelo lema de Gronwall, obtemos

$$G(t) \leq 2 \left( a + \int_0^t m(s)ds \right) \text{ in } [0, T],$$

que implica na desigualdade

$$\|\varphi(t), \psi(t), \varphi_t(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C (\|(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)\|_{\mathcal{H}}). \quad (2.48)$$

■

## 2.4 Desigualdades de Energia

Por uma questão de mostrar a desigualdade de observabilidade, nesta seção estudamos as desigualdades energia relevantes para o sistema Timoshenko envolvendo um termo de memória.

A energia total das soluções do sistema (2.1) - (2.4), é dada por

$$E(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx. \quad (2.49)$$

Inspirados por [38], agora definamos a identidade de energia da solução de (2.1) - (2.4) em qualquer tempo positivo  $t$  pela seguinte proposição:

**Proposição 2.1** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  uma solução para (2.1) - (2.4). O funcional energia  $E(t)$  satisfaz.*

$$E(t) + \alpha r_0(t) = E(0) + \alpha \int_0^t (r_1(s) + r_2(s)) ds; \quad (2.50)$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Prova:** Multiplicando a equação (2.1) por  $\varphi_t$  e (2.2) por  $\psi_t$  integrando por partes em  $(0, L)$  obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) + \alpha \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_{xt}(t)) ds = 0. \quad (2.51)$$

Denotamos,

$$\begin{aligned} r_0(t) &= ((M\psi_x)(t), \psi_x(t))_{L^2(0,L)} = \left( \int_0^t M(t, s) \psi_x(s) ds, \psi_x(t) \right)_{L^2(0,L)} \\ &= \int_0^L \left( \int_0^t M(t, s) \psi_x(s) ds \right) \psi_x dx \\ &= \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(t))_{L^2(0,L)} ds. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} r_0(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(t)) ds \\ &= \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_{xt}(t)) ds + \int_0^t M_t(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(t)) ds + M(t, t) (\psi_x(s), \psi_x(t)) ds. \end{aligned}$$

Agora, usando a notação estabelecida em (2.21) e (2.22) temos

$$r_1(t) = \int_0^t M_t(t, s) (\psi_x(t), \psi_x(t)) ds$$

e

$$r_2(t) = M(t, t) (\psi_x(s), \psi_x(t)) ds,$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r_0(t) &= \int_0^t M(t,s)(\psi_x(s), \psi_{xt}(t))ds + r_1(t) + r_2(t) \\ \int_0^t M(t,s)(\psi_x(s), \psi_{xt}(t))ds &= \frac{d}{dt}r_0(t) - r_1(t) - r_2(t).\end{aligned}\quad (2.52)$$

Pela substituição de (2.52) in (2.51), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}\alpha r_0(t) &= \alpha(r_1(t) + r_2(t)); \\ \frac{d}{dt}(E(t) + \alpha r_0(t)) &= \alpha(r_1(t) + r_2(t));\end{aligned}\quad (2.53)$$

integrando de 0 a  $t$  em (2.53), temos

$$E(t) + \alpha r_0(t) = E(0) + \alpha r_0(0) + \alpha \int_0^t (r_1(s) + r_2(s))ds,$$

mas,

$$r_0(t) = \int_0^t M(t,s)(\psi_x(s), \psi_x(t))ds = r_0(0) = 0.$$

Portanto,

$$E(t) + \alpha r_0(t) = E(0) + \alpha \int_0^t (r_1(s) + r_2(s))ds.\quad (2.54)$$

■

Com este resultado, podemos mostrar as seguintes estimativas. Considerando a notação abaixo:

$$K_0(t) = \left( \int_0^t |M(t,s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (2.55)$$

$$K_1(t) = \left( \int_0^t |M_t(t,s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.56)$$

**Proposição 2.2** *Seja  $r_i(t)$  com  $i = 0, 1, 2$  conforme definido na proposição (2.1), as seguintes estimativas são verdadeiras:*

$$1) \int_0^T |r_i(t)|dt \leq N_i(T) \int_0^T E(t)dt, \text{ where } N_i(T) = 2c \left( \int_0^T |K_i(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, i = 0, 1.$$

$$2) \int_0^T |r_2(t)|dt \leq 2c \int_0^T E(t)dt.$$

**Prova:** 1) Começamos considerando o caso  $i = 0$ , assim  $r_0(t) = \int_0^t M(t,s)(\psi_x(s), \psi_x(t))ds$  usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}|((M\psi_x)(t), \psi_x(t))| &\leq \left( \int_0^t |M(t,s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t |\psi_x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} |\psi_x|_V \\ &\leq K_0(t) \left( \int_0^T |\psi_x(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} |\psi_x|_V;\end{aligned}\quad (2.57)$$

Observe que

$$\begin{aligned}\|\psi_x\|_{L^2(0,T;V)}^2 &= \int_0^T |\psi_x(t)|^2 dt = \int_0^T \int_0^L \psi_x(t)^2 dx dt \\ &\leq \int_0^T \left( \int_0^L (\varphi_t^2 + \varphi_{tx}^2 + \psi_x^2 + \varphi_{tt}^2 + [\varphi_x + \psi]^2) dx \right) dt.\end{aligned}$$

Logo, escolhendo  $c = \max \left\{ \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{b}, \frac{\kappa}{\rho_1 \rho_2}, \frac{1}{\kappa} \right\}$  temos

$$\begin{aligned}\|\psi_x\|_{L^2(0,T;V)}^2 &\leq \int_0^T \left( c \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx}^2 + b \psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \kappa [\varphi_x + \psi]^2) dx \right) dt; \\ &\leq \int_0^T 2cE(t) dt; \\ \|\psi_x\|_{L^2(0,T;V)} &\leq \left( \int_0^T 2cE(t) dt \right)^{\frac{1}{2}};\end{aligned}$$

isto implica que

$$\left( \int_0^T |\psi_x(t)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2c} \left( \int_0^T E(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.58)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}|\psi_x|_V^2 &= \int_0^L \psi_x^2 dx; \\ &\leq \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{tx}^2 + (1+b)\psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \kappa [\varphi_x + \psi]^2) dx; \\ &\leq 2cE(t).\end{aligned}$$

Como consequência, resulta em

$$|\psi_x|_V \leq \sqrt{2cE(t)}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.59)$$

Pela substituição em (2.58) e (2.59) em (2.57) temos

$$|r_0(t)| \leq 2cK_0(t)E(t)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T E(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.60)$$

Agora, integrando em (2.60) de 0 a  $T$  e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T |r_0(t)| dt &\leq 2c \int_0^T K_0(t)E(t)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T E(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} dt. \\ &\leq 2c \left( \int_0^T |K_0(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |E(t)^{1/2}|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T E(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq N_0(T) \int_0^T E(t) dt;\end{aligned} \quad (2.61)$$



com  $N_0 = 2c \left( \int_0^T |K_0(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Semelhante ao que foi feito anteriormente, no caso  $i = 1$  teremos,

$$\int_0^T |r_1(t)| dt \leq N_1(T) \int_0^T E(t) dt \quad (2.62)$$

com  $N_1 = 2c \left( \int_0^T |K_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ .

2) Consideramos  $r_2(t)$  e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} |r_2(t)| &= |(M(t, t)\psi_x)(t), \psi_x(t)|; \\ &\leq \left( \int_0^L |M(t, t)\psi_x(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^L |\psi_x(t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}; \\ &\leq |M(t, t)\psi_x(t)| |\psi_x(t)|; \\ &\leq \|M(t, t)\|_{\infty} |\psi_x(t)| |\psi_x(t)|, \end{aligned} \quad (2.63)$$

desde  $M(t, t) \in L^{\infty}(0, T)$  existe uma constante  $c$ , tal que  $\|M(t, t)\|_{\infty} \leq c$ , então a partir (2.63) temos

$$|r_2(t)| \leq 2cE(t),$$

agora integrando de 0 a  $T$ , resulta

$$\int_0^T |r_2(t)| dt \leq 2c \int_0^T E(t) dt. \quad (2.64)$$

■

**Proposição 2.3** *Seja  $r_i(t)$  com  $i = 0, 1, 2$  e  $E(t)$  o funcional de energia que satisfaz a identidade (2.50), então as seguintes desigualdades são verdadeiras:*

1) *Para todo  $t \geq 0$ ,*

$$E(T) \leq \frac{1}{(1-\alpha)} E(0) + \frac{\alpha}{(1-\alpha)} P_1(T) \int_0^T E(t) dt.$$

2) *Além do mais*

$$E(0) \leq \frac{(1+\alpha P_2(T))}{T} \int_0^T E(t) dt,$$

onde  $P_1(T)$  e  $P_2(T)$  são constantes dadas abaixo.

**Prova:** 1) Primeiro, vamos considerar a identidade (2.50), com  $t = T$ , então

$$E(T) = E(0) + \alpha \int_0^T (r_1(t) + r_2(t))dt - \alpha r_0(T). \quad (2.65)$$

Usando a desigualdade de Young em (2.60) concluimos

$$|r_0(T)| \leq E(T) + (cK_0(t))^2 \int_0^T E(t)dt. \quad (2.66)$$

Agora, usando a proposição 2.2 a estimativa (2.66) em (2.65), e assumindo  $\alpha < 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} E(T) &\leq E(0) + \alpha N_1(T) \int_0^T E(t)dt + 2c\alpha \int_0^T E(t)dt + \alpha \left( E(T) + (cK_0)^2 \int_0^T E(t)dt \right); \\ (1 - \alpha)E(T) &\leq E(0) + \alpha P_1(T) \int_0^T E(t)dt; \\ E(T) &\leq \frac{1}{(1 - \alpha)}E(0) + \frac{\alpha}{(1 - \alpha)}P_1(T) \int_0^T E(t)dt. \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde  $P_1(T) = N_1(T) + 2c + (cK_0)^2$ . Portanto, temos a estimativa desejada.

2) Por outro lado, integrando em (2.50) de 0 a  $T$  com  $t \leq s$  e  $s, t \in [0, T]$  obtemos

$$\int_0^T E(t)dt = TE(0) + \alpha \int_0^T \int_0^t (r_1(s) + r_2(s))dsdt - \alpha \int_0^T r_0(t)dt. \quad (2.68)$$

Tomando o segundo termo do lado direito de (2.68) e aplicando o Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t (r_1(s) + r_2(s))dsdt &= \int_0^T \int_s^T ((r_1(s) + r_2(s))dt) ds; \\ &= \int_0^T \left( \int_0^{T-s} (r_1(t) + r_2(t))dt \right) ds; \\ &\leq \int_0^T \left( \int_0^{T-t} ds \right) (r_1(t) + r_2(t))dt; \\ &\leq \left| (T - t) \int_0^T (r_1(t) + r_2(t))dt \right|; \\ &\leq T \int_0^T (|r_1(t)| + |r_2(t)|)dt. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Então, usando a estimativa (2.69) em (2.68) e depois pela proposição 2.2 temos

$$\begin{aligned} &\geq TE(0) - \alpha T \int_0^T (|r_1(t)| + |r_2(t)|)dt - \alpha \int_0^T |r_0(t)|dt; \\ &\geq TE(0) - \alpha T(N_1(T) + 2c) \int_0^T E(t)dt - \alpha N_0(T) \int_0^T E(t)dt; \\ &\geq TE(0) - \alpha (T(N_1(T) + 2c) + N_0(T)) \int_0^T E(t)dt; \end{aligned}$$

que implica

$$(1 + \alpha P_2(T)) \int_0^T E(t) dt \geq TE(0), \quad (2.70)$$

onde  $P_2(T) = N_0(T) + T(N_1(T) + 2c)$ , como queríamos demonstrar. ■

## 2.5 Resultados de Observabilidade e controlabilidade com termo de memória

Neste capítulo vamos seção está resumido no teorema Segue. Observe que a condição Ele expressa que são iguais às velocidades de propagação das duas ondas de deformação, associadas a  $\varphi$  e  $\psi$ . Neste papel que condição não é necessária para assegurar a desigualdade de observabilidade (esta condição é necessária a desigualdade de observabilidade a solução de sistema de Timoshenko, cf. [60]). O controle  $h \in L^2(0, T; H_*^{-1}(\varpi))$  é uma força aplicada em  $\varpi \subset Q = (0, L) \times (0, T)$  para impulsionar o deslocamento vertical para descansar em algum momento  $T > 0$  suficientemente grande devido à velocidade finita de propagação, assegurando que todo o processo atinja o equilíbrio. O resultado do controle é provado pela dualidade por meio de uma desigualdade de observabilidade usando técnicas multiplicadoras.

### 2.5.1 Resultados de observabilidade e controlabilidade nula tipo-memória

Consideramos o seguinte sistema de controle:

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa (y_x + z)_x = 0, \text{ em } Q \quad (2.71)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa (y_x + z) - \alpha \int_0^t M(t, s) z_{xx}(s) ds = h\chi_\varpi, \text{ em } Q \quad (2.72)$$

com as condições iniciais:

$$y(x, 0) = y^0, y_t(x, 0) = y^1, z(x, 0) = z^0 \text{ em } (0, L). \quad (2.73)$$

e condições de fronteira:

$$y(0) = y(L) = z_x(0) = z_x(L) = 0 \text{ em } (0, T). \quad (2.74)$$

Desde que (2.71)–(2.74) é linear e reversível no tempo, a controlabilidade nula e exata são noções equivalentes. Agora estudaremos as propriedades de controle para o sistema (2.71) – (2.74) que chamamos de controlabilidade nula tipo-memória. Para isso, somos inspirados em [15], [43] e nas referências contidas nele. Nós consideramos  $M \neq 0$ , esta condição assegura da presença não trivial do termo de memória, claro que  $M = 0$ , o sistema (2.71) – (2.74) reduz o caso clássico. Note que a condição (2.8), ou seja,

$$\int_0^T M(T, s) z_{xx}(s) ds = 0$$

se faz necessária para evitar o acúmulo de memória e garantir que o sistema (2.71) – (2.74) alcance o repouso para  $t \geq T$ , veja por exemplo [15, 43]. Além disto, precisamos supor a hipótese (2.7). De fato, se (2.7) é garantida, então para qualquer  $t_1 > t_2 = T$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} M(t_1, t_3)z(t_3)dt_3 &= \int_0^{t_1} \widetilde{M}(t_1, T)M(T, t_3)z(t_3)dt_3; \\ &= \widetilde{M}(t_1, T) \int_0^T M(T, t_3)z(t_3)dt_3 + \int_T^{t_1} \widetilde{M}(t_1, T)M(T, t_3)z(t_3)dt_3; \\ &= \int_T^{t_1} M(t_1, t_3)z(t_3)dt_3. \end{aligned}$$

Então, se a condição (2.8) e (2.7) são asseguradas, então a solução do sistema (2.71) – (2.74) com controle  $h = 0$  em  $[T, +\infty)$  satisfaz

$$\rho_1 y_{tt} - \kappa (y_x + z)_x = 0, \text{ em } (0, L) \times (T, +\infty) \quad (2.75)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - bz_{xx} + \kappa (y_x + z) - \alpha \int_T^t M(t, s)z_{xx}(s)ds = 0, \text{ em } (0, L) \times (T, +\infty) \quad (2.76)$$

com condições iniciais:

$$y(x, T) = 0, \quad y_t(x, T) = 0, \quad z(x, T) = 0 \quad \text{in } (0, L). \quad (2.77)$$

e condições de fronteira:

$$y(0) = y(L) = z_x(0) = z_x(L) = 0 \quad \text{in } (T, +\infty). \quad (2.78)$$

Vamos abordar o problema de controlabilidade nula tipo-memória através da noção dual de observabilidade. Para isso, considere o seguinte problema adjunto:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0 \text{ em } Q; \quad (2.79)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \alpha \int_t^T M(s, t)\psi_{xx}(s)ds - \alpha M(T, t)q_{xx}^0 = 0 \text{ em } Q; \quad (2.80)$$

$$\varphi(x, T) = \varphi^0, \quad \varphi_t(x, T) = \varphi^1, \quad \psi(x, T) = \psi^0 \quad \text{in } (0, L); \quad (2.81)$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0 \quad \text{in } (0, T), \quad (2.82)$$

onde  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$  e  $q^0 \in V$  tem uma única solução em  $(\varphi, \psi, \varphi_t) \in C([0, T], \mathcal{H})$ .

Observe que, de acordo com [43], a adição do termo não homogêneo  $M(T, t)q_{xx}^0$  é necessária para garantir que o termo de memória esteja sob controle.

Agora estamos prontos para definir a propriedade de controlabilidade nula tipo-memória.

**Definição 2.1** *Seja  $(y^0, z^0, y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$  e um controle  $h$ . Vamos definir*

$$R(T; (y^0; z^0; y^1)) = \left\{ y(T); y_t(T); y_{tx}(T); z(T); \int_0^T M(T, s) z_{xx}(s) ds : h \in L^2(0, T; H^{-1}(\varpi)) \right\}. \quad (2.83)$$

*i) O sistema (2.71)–(2.74) é nulo controlável no tempo  $T$  se  $(0, 0, 0, 0, 0) \in R(T; (y^0; z^0; y^1))$  para todo  $(y^0; z^0; y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$ .*

*ii) O sistema (2.79)–(2.82) com dado final em  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H} \times V$  é chamado inicialmente observável em  $O$  se existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que*

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}(0)|_V^2 \leq C_1 \int_0^T \int_{\varpi} |\psi|_V^2 dx dt, \quad (2.84)$$

para todo  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, q^0) \in \mathcal{F}$ .

Temos o seguinte resultado. Para efeito desses cálculos, estaremos usando a notação  $(l_1, l_2)$  em vez de  $\varpi$ .

**Lema 2.1** *Existe um  $T_0 > 0$  tal que para todo  $T > T_0$ , e para todo  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, q^0) \in \mathcal{F}$ , existe uma constante positiva  $C_1$ , tal que, a solução  $(\varphi, \psi)$  de (2.79) - (2.82) satisfas*

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}(0)|_V^2 \leq C_1 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\psi|_V^2 dx dt, \quad (2.85)$$

onde  $C_1$  depende de  $T, L, \rho_1, \rho_2, \kappa$  e  $b$ .

**Prova:** A prova é baseado em técnicas presentes em [13] adaptações foram feitas a fim de demonstramos a desigualdade inversa. No que segue denotamos  $c$  ou  $C$  constantes genéricas que dependem somente  $L, \rho_1, \rho_2, \kappa$  e  $b$ .

Vamos considerar  $0 < \epsilon < \frac{|\varpi|}{2}$  onde  $|\varpi| := l_2 - l_1$ , e definimos a função auxiliar, como em [13] e [31]

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda - 1)x, & x \in [0, \tilde{l}_1[ \\ \lambda(x - \tilde{l}_1) + \frac{(\tilde{l}_1 - \tilde{l}_2)}{L} \tilde{l}_1, & x \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2], \\ (\lambda - 1)(x - L), & x \in ]\tilde{l}_2, L] \end{cases}$$

onde  $\tilde{l}_1 = l_1 + \epsilon$ ,  $\tilde{l}_2 = l_2 - \epsilon$  e  $\lambda := \frac{L - (\tilde{l}_2 - \tilde{l}_1)}{L} \in ]0, 1[$ .

Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  solução de (2.79) - (2.82) . Multiplicamos a equação (2.79) por  $\varphi_x g_\lambda$  e integrando por partes, temos

$$0 = \left[ \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x g_\lambda dx \right]_{t=0}^T + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_t^2 g'_\lambda dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_x g_\lambda dx dt. \quad (2.86)$$

Da mesma forma, multiplicamos a equação (2.80) por  $\psi_x g_\lambda$ , temos

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ -\rho_2 \int_0^L \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda dx \right]_{t=0}^T + \rho_2 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tx} \psi_{xt} g_\lambda dx dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 g'_\lambda dx dt \\
&- \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi g_\lambda dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt \\
&- \alpha \int_0^T \left\langle \int_t^T M(s, t) \psi_{xx}(s) ds, \psi_x g_\lambda \right\rangle dt - \alpha \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x g_\lambda \rangle dt \quad (2.87)
\end{aligned}$$

Tomando  $\psi_{xt} = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{ttt} - \varphi_{xxt}$  e substituindo esta expressão em (2.87) e integrando por partes novamente, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}^2 g'_\lambda dx dt + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tx}^2 g'_\lambda dx dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 g'_\lambda dx dt \\
&+ \left[ \int_0^L \left( \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi g_\lambda dx dt \\
&- \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt - \frac{g'_\lambda}{2} \alpha \int_0^T \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds dt \\
&- \alpha \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x g_\lambda \rangle dt \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Então, adicionando (2.86) e (2.88), chegamos em

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\kappa}{2} (\varphi_x + \psi)^2 + \frac{b}{2} \psi_x^2 + \frac{\rho_1}{2} \varphi_t^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tt}^2 + \frac{\rho_2}{2} \varphi_{xt}^2 \right) g'_\lambda dx dt \\
&+ \left[ \int_0^L \left( \rho_1 \varphi_t \varphi_x g_\lambda + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt \\
&- \frac{g'_\lambda}{2} \alpha \int_0^T \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds dt - \alpha \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x g_\lambda \rangle dt
\end{aligned}$$

Agora, observando que

$$g'_\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda - 1), & x \in [0, \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_2, L], \\ \lambda, & x \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2], \end{cases}$$

Concluiremos a partir da identidade acima que

$$\begin{aligned}
(1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt &= \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{xt}^2 + b \psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 dx dt \\
&+ \left[ \int_0^L \left( \rho_1 \varphi_t \varphi_x g_\lambda + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt \\
&- \frac{g'_\lambda}{2} \alpha \int_0^T \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds dt - \alpha \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x g_\lambda \rangle dt. \quad (2.89)
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar cada um dos termos do lado direito de (2.89). Usando argumentos padrões, podemos estimar o termo entre colchetes e temos

$$\left| \left[ \int_0^L \left( \rho_1 \varphi_t \varphi_x g_\lambda + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T \right| \leq C \{E(T) + E(0)\}. \quad (2.90)$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré e o fato que  $\sup_{x \in [0, L]} |g'_\lambda(x)| \leq 1$  do seguinte modo

$$\begin{aligned} \left| -\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi g'_\lambda dx dt \right| &\leq \eta \frac{\kappa}{2} \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + \frac{\kappa c_p}{\eta} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 dx dt. \\ &\leq \eta \int_0^T E(t) dt, \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde  $\eta > 0$  é uma constante, a qual será determinada posteriormente. No que segue, usando a desigualdade de Hölder e as estimativas da proposição (2.2), temos

$$\begin{aligned} &\left| -\frac{g'_\lambda}{2} \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds dt \right| \\ &\leq \frac{|g'_\lambda(x)|}{2} \left( \int_0^t |M(t, s)|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_0^t |\psi_x(s, x)|^2 ds \right)^{1/2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx; \\ &\leq \frac{c}{2} K_0(t) \left( \int_0^T E(t) dt \right)^{1/2} E(t)^{1/2}; \\ &\leq \frac{c}{2} \int_0^T K_0(t) E(t)^{1/2} \left( \int_0^T E(t) dt \right)^{1/2} dt; \\ &\leq \frac{N_0(T)}{2} \int_0^T E(t) dt; \end{aligned} \quad (2.92)$$

Agora, vamos obter uma estimativa para o último termo do lado direito (2.89). Desde

$$q_{xx}^0 = \frac{1}{M(T, t)} \left( -\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \alpha \int_t^T M(s, t) \psi_{xx}(s) ds \right),$$

de

$$- \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x g_\lambda \rangle dt,$$

obtemos que

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x g_\lambda \rangle dt &= \left[ \int_0^L \left( \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} g_\lambda - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} g_\lambda \right) dx \right]_{t=0}^T - \\ &\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_x g_\lambda dx dt - \int_0^T \int_0^L \left( \frac{\rho_2}{2} \varphi_{tx}^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \varphi_{tt}^2 + \frac{b}{2} \psi_x^2 \right) g'_\lambda dx dt + \\ &\int_0^T \left\langle \int_t^T M(s, t) \psi_{xx}(s) ds, \psi_x g_\lambda \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Isto, juntamente com as estimativas de energia, implica que

$$\left| - \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x g_\lambda \rangle dt \right| \leq C \{E(T) + E(0)\} + C \int_0^T E(t) dt + \frac{N_0(T)}{2} \int_0^T E(t) dt. \quad (2.93)$$



Então, vamos considerar a estimativa (2.90), (2.91), (2.92) e (2.93) em (2.89), obtemos

$$(1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt \leq \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\tilde{l}_1}^{\tilde{l}_2} \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{xt}^2 + b \psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \kappa (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + C(\alpha) \{E(T) + E(0)\} + \eta \int_0^T E(t) dt + \alpha C \int_0^T E(t) dt + \alpha N_0(T) \int_0^T E(t) dt. \quad (2.94)$$

onde  $C$  denota uma constante positiva qualquer.

Vamos definir a função de corte  $p = p(x) \in C^\infty(0, L)$ , tal que

$$p(x) = \begin{cases} (x - \tilde{l}_2) + 1, & \forall x \in [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2] \\ 0, & \forall x \in [0, l_1 \cup ]l_2, L], \\ 0 \leq p(x) \leq 1, & \forall x \in [0, L]. \end{cases}$$

Então, multiplicamos a equação (2.79) por  $\varphi_x p$  e integrando por parte a fim de concluir

$$\frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_t^2 p_x dx dt = \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_x p dx dt - \left[ \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x p dx \right]_{t=0}^T. \quad (2.95)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (2.80) por  $\psi_x p$ , levando em conta que  $\psi_{xt} = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{ttt} - \varphi_{xxt}$  e integrando por parte, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1 \rho_2}{2\kappa} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}^2 p_x dx dt + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L \varphi_{tx}^2 p_x dx dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L \psi_x^2 p_x dx dt = \\ & - \left[ \int_0^L \left( \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} p - \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} p \right) dx \right]_{t=0}^T + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi p dx dt + \\ & \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi p_x dx dt - \frac{p_x}{2} \alpha \int_0^T \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds dt \\ & - \alpha \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x p \rangle dt \end{aligned} \quad (2.96)$$

Então, adicionando (2.95) e (2.96), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L 1/2 (\kappa (\varphi_x + \psi)^2 + b \psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{xt}^2) p_x dx dt = \\ & - \left[ \int_0^L \left( \rho_2 \psi_x \varphi_{xt} - \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{xt} \varphi_{tt} - \rho_1 \varphi_t \varphi_x \right) p dx \right]_{t=0}^T + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi p_x dx dt \\ & - \frac{p_x}{2} \alpha \int_0^T \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds dt - \alpha \int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x p \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.97)$$

O termo entre colchetes na identidade anterior é estimado usando os mesmos argumentos usados em (2.90). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi p_x dx dt &= \kappa \int_0^T \int_0^L \varphi_x \psi p_x dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt; \\ &\leq \kappa \frac{|p_x(x)|^2}{2\varepsilon} \eta \int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt + \kappa \frac{\varepsilon}{2\eta} \int_0^T \int_0^L \psi^2 dx dt \\ &\quad + \kappa \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Consideramos  $\varepsilon = |p_x(x)|^2$  e além do mais a desigualdade dada por

$$\int_0^T \int_0^L \varphi_x^2 dx dt \leq 2 \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + 2c_p \int_0^T \int_0^L \psi^2 dx dt$$

De (2.98), temos

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt &\leq \kappa \eta \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx dt + \kappa c_p \eta \int_0^T \int_0^L \psi^2 dx dt \\ &\quad + \frac{\kappa}{2\eta} \max_{x \in [0, L]} |p_x(x)| \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt \\ &\leq \eta \int_0^T E(t) dt + \left( \frac{\kappa}{2\eta} \max_{x \in [0, L]} |p_x(x)| + \kappa \right) \int_0^T \int_0^L \psi^2 p_x dx dt \end{aligned} \quad (2.99)$$

Para estimar os dois últimos termos de (2.97) procedemos da mesma maneira como em (2.92) e (2.93). Então, temos

$$\left| -\frac{p_x}{2} \int_0^t M(t, s) (\psi_x(s), \psi_x(s)) ds dt \right| \leq \frac{N_0(T)}{2} \int_0^T E(t) dt \quad (2.100)$$

e

$$\left| -\int_0^T \langle M(T, t) q_{xx}^0, \psi_x p \rangle dt \right| \leq C \{E(T) + E(0)\} + C \int_0^T E(t) dt + \frac{N_0(T)}{2} \int_0^T E(t) dt \quad (2.101)$$

Portanto, usando essas estimativas e o fato de que  $p_x$  tem suporte contido em  $[l_1, l_2]$ , podemos estimar a integral no lado esquerdo do (2.97) do seguinte modo

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{l_1}^{\tilde{l}_2} (\kappa (\varphi_x + \psi)^2 + b \psi_x^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} \varphi_{tt}^2 + \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \varphi_{xt}^2) dx dt \\ &\leq \eta \int_0^T E(t) dt + \alpha (C + N_0(T)) \int_0^T E(t) dt \\ &\quad + \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dx dt + C(\alpha) \{E(T) + E(0)\}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Combinando (2.94) com (2.102), concluímos

$$(1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt \leq \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dx dt + \eta \int_0^T E(t) dt + \alpha(C + N_0(T)) \int_0^T E(t) dt + C(\alpha) \{E(T) + E(0)\}. \quad (2.103)$$

Para completar a demonstração, temos que estimar os seguintes termos  $E(T)$  e  $\int_0^T E(t) dt$ . Mas, graças à proposição (3.3)<sub>1</sub>, obtemos

$$(1 - \lambda) \int_0^T E(t) dt \leq \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dx dt + \eta \int_0^T E(t) dt + \alpha P_3(T) \int_0^T E(t) dt + C(\alpha) \left( \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) E(0), \quad (2.104)$$

onde  $P_3(T) = \left( \frac{C(\alpha)}{1 - \alpha} P_1(T) + C + N_0(T) \right)$ .

Escolhendo  $\eta > 0$  tal que  $K = (1 - \lambda) - \alpha P_3(T) - \eta > 0$  e  $T$  suficientemente grande, decorre da desigualdade anterior que

$$K \int_0^T E(t) dt \leq \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dx dt + C(\alpha) \left( \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) E(0). \quad (2.105)$$

Aplicando a proposição (3.3)<sub>2</sub> mais uma vez, teremos

$$\left[ TP_4(T) - C(\alpha) \left( \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \right) \right] E(0) \leq \tilde{C} \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dx dt, \quad (2.106)$$

onde  $P_4(T) = \frac{K}{1 + \alpha P_2(T)}$ . Portanto, para  $T > T_0$ , teremos a desigualdade desejada

$$E(0) \leq C_1 \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} \psi^2 dx dt, \quad (2.107)$$

onde  $C_1 = \frac{\tilde{C}}{TP_4(T) - C(\alpha) \left( \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \right)}$  e  $T_0 = \frac{C(\alpha) \left( \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \right)}{P_4(T)}$ . ■

Temos o seguinte resultado.

**Lema 2.2** Para todo  $(y^0, z^0, y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$  existe um controle  $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\varpi))$  tal que a seguinte identidade é válida para qualquer  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, q^0) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H} \times V$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T h \psi dx dt &= \rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 \langle y(T), \varphi^1 \rangle - \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle - \rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle \\ &+ \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \rho_2 \langle \varphi_x^1, z(T) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle + \alpha \int_0^T \langle M(T, s) z_{xx}(s), q^0(x) \rangle dt. \end{aligned} \quad (2.108)$$

onde  $(\varphi, \psi)$  é uma solução única para o sistema adjunto (2.79) - (2.82).

**Prova:** Observe que o sistema (2.79) - (2.82) tem uma solução no espaço de energia associada aos dados iniciais, que foi estudada no Teorema (2.1). Multiplicamos (2.71) por  $\varphi$  e (1.93) por  $\psi$  e integrando por partes em  $[0, L] \times [0, T]$ , levando em conta as condições de fronteira e adicionando as equações resultantes, temos

$$0 = \left[ \int_0^L (y_t(x, t)\varphi(x, t) - y(x, t)\varphi_t(x, t)) dx \right]_{t=0}^T + \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt} y dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L \varphi_{xx} y dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \varphi_x z dx dt; \quad (2.109)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L h \chi_{\overline{\varpi}} \psi dx dt &= \left[ \int_0^L (-y_{tx}(x, t)\psi(x, t) + \varphi_{tx}(x, t)z(x, t)) dx \right]_{t=0}^T - \rho_2 \int_0^T \int_0^L \varphi_{ttx} z dx dt \\ &\quad - b \int_0^T \int_0^L \psi_{xx} z dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L \psi_x y dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L \psi z dx dt \\ &\quad + \rho_2 \int_0^T \int_0^L (y_{tx}\psi_t - \varphi_{tx}z_t) dx dt - \alpha \int_0^T \left\langle \int_0^t M(t, s) z_{xx}(s) ds, \psi(x, t) \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (2.110)$$

De acordo com (2.87) - (2.88) e assumindo a condição de compatibilidade

$$\int_0^T \int_0^L (y_{tx}\psi_t - \rho_2 \varphi_{tx} z_t) dx dt = 0,$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\overline{\varpi}} h \psi dx dt &= \rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 \langle y(T), \varphi^1 \rangle - \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle - \rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle \\ &\quad + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \rho_2 \langle \varphi_x^1, z(T) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle + \int_0^T \int_0^L [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi + \psi)_x] y dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L [-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi + \psi)] z dx dt \\ &\quad - \alpha \int_0^T \left\langle \int_0^t M(t, s) z_{xx}(s) ds, \psi(x, t) \right\rangle dt. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Além do mais, podemos calcular

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \left\langle \int_0^t M(t, s) z_{xx}(s) ds, \psi(x, t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^T \left\langle \int_0^t M(t, s) z_{xx}(s) ds, \frac{d}{dt} \left( \int_t^T \psi(x, s) ds + q^0(x) \right) \right\rangle dt; \\
&= \int_0^T \left\langle \int_0^t M(t, s) z(s) ds, \frac{d}{dt} \left( \int_t^T \psi_{xx}(x, s) ds + q_{xx}^0(x) \right) \right\rangle dt \\
&+ \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} \int_0^t M(t, s) z_{xx}(s) ds, q^0(x) \right\rangle dt; \\
&= - \int_0^T \left\langle \int_t^T M(s, t) \psi_{xx}(s) ds, z(x, t) \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} \int_t^T M(s, t) z(s) ds, q_{xx}^0(x) \right\rangle dt \\
&+ \int_0^T \langle M(T, s) z_{xx}(s), q^0(x) \rangle dt; \\
&= -\alpha \int_0^T \left\langle \int_t^T M(s, t) \psi_{xx}(s) ds + M(T, t) q_{xx}^0(x), z(x, t) \right\rangle dt \\
&+ \alpha \int_0^T \langle M(T, s) z_{xx}(s), q^0(x) \rangle dt. \tag{2.112}
\end{aligned}$$

Agora considerando (2.112), a partir de (2.111) e a notação  $O = \varpi \times (0, T)$ , temos

$$\begin{aligned}
\int_O h \psi dx dt &= \rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 \langle y(T), \varphi^1 \rangle - \rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle - \rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle \\
&+ \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle + \rho_2 \langle \varphi_x^1, z(T) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle + \alpha \int_0^T \langle M(T, s) z_{xx}(s), q^0(x) \rangle dt. \tag{2.113}
\end{aligned}$$

■

O próximo resultado do trabalho, declarado a seguir, garante a controlabilidade nula tipo-memória (2.71) – (2.74).

**Teorema 1** *O sistema (2.71) – (2.74) é nulo controlável tipo-memória se, e somente se, existe uma constante  $C_1$  tal que*

$$\|\varphi(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}(0)|_V^2 \leq C_1 \int_O |\psi|^2 dx dt, \tag{2.114}$$

para todo  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, q^0) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H} \times V$ . Onde  $(\varphi, \psi)$  é solução de (2.79) – (2.82)

**Prova:** A parte “Se”. Fixado  $(y^0, z^0, y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$ . Seja

$$F = \{ \chi_O(\varphi, \psi) \mid (\varphi, \psi) \text{ resolve (2.79) - (2.82) para algum } (\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, q^0) \in \mathcal{F} \subset \mathcal{H} \times V \} \tag{2.115}$$

O  $F$  é um subespaço linear de  $H^{-1}(\varpi)$ . Definamos o funcional  $\mathcal{L}$  em  $F$  como segue:

$$\mathcal{L}(\chi_{\mathcal{O}}(\varphi, \psi)) = -\rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle, \quad \forall \chi_{\mathcal{O}}(\varphi, \psi) \in F. \quad (2.116)$$

Pelo Lema (2.1) sabemos que existe uma constante  $C_1$  tal que (2.114) é verdadeira, e consequentemente temos que  $\mathcal{L}$  é um funcional linear limitado no espaço normalizado linear  $F$ . Pelo Teorema de Hahn-Banach,  $\mathcal{L}$  pode ser estendido ao funcional linear limitado sobre  $H^{-1}(\varpi)$ . Então, pelo Teorema da representação de Riez, existe uma função controle  $h(t) \in H^{-1}(\varpi)$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} h(x, t) \psi(x, t) dx dt &= \mathcal{L}(\chi_{\mathcal{O}}(\varphi, \psi)); \\ &= -\rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Esta  $h(x, t) \in L^2(0, T, H^{-1}(\varpi))$  é o controle desejado. De fato, pelo Lema (2.2) e (2.117), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \langle y_t(T), \varphi^0 \rangle - \rho_1 \langle y(T), \varphi^1 \rangle - \rho_2 \langle y_{tx}(T), \psi^0 \rangle + \rho_2 \langle \varphi_x^1, z(T) \rangle + \\ \alpha \left( \int_0^T M(T, s) z_{xx}(s) ds, q^0(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Logo deduzimos que

$$y(T) = 0 \text{ em } V, \quad y_t(T) = 0 \text{ em } H^{-1}(0, L), \quad y_{tx}(T) = 0 \text{ em } H^{-1}(0, L), \quad z(T) = 0 \text{ em } V$$

e

$$\int_0^T M(T, s) z_{xx}(s) ds = 0 \text{ em } V.$$

A parte “somente se”. Desde o sistema (2.71) - (2.74) é nulo controlável tipo-memória, para qualquer dado  $(y^0, z^0, y^1) \in V \times V \times H^{-1}(0, L)$  existe um controle  $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\varpi))$  dirigindo a solução correspondente para o resto. Da prova do Lema (2.2), temos que

$$-\rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle = \int_{\mathcal{O}} h \psi dx dt. \quad (2.118)$$

Definamos um operador linear limitado  $\Lambda : F \rightarrow \mathcal{H}$  como segue

$$\Lambda(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, q^0) = (\varphi(0), \psi(0), \varphi_t(0), \varphi_{tx}(0)),$$

onde  $(\varphi(0), \psi(0), \varphi_t(0), \varphi_{tx}(0))$  é o valor no tempo  $t = 0$  da solução para a equação (2.79) – (2.82) com o dado final  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)$ .

Agora usamos um argumento de contradição para provar que soluções para o sistema (2.79) – (2.82), que satisfazem (2.114). Se isso fosse falso, então, poderíamos encontrar uma sequência  $\{\varphi_k^0, \psi_k^0, \varphi_k^1\}_{k=1}^\infty \subset F$  com  $(\varphi_k^0, \psi_k^0, \varphi_k^1) \neq (0, 0, 0)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , tal que as soluções correspondentes  $(\varphi_k, \psi_k)$  para (2.79) – (2.82) com  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)$  substituído por  $(\varphi_k^0, \psi_k^0, \varphi_k^1)$  satisfaz que

$$\int_O |\psi_k|^2 dxdt \leq \frac{1}{k^2} \left( \|\varphi_k(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi_k(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t^k(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}^k(0)|_V^2 \right). \quad (2.119)$$

Escrever

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\|\varphi_k(0)\|_{H_0^1(0,L)}^2 + \|\psi_k(0)\|_{H_*^1(0,L)}^2 + |\varphi_t^k(0)|_V^2 + |\varphi_{tx}^k(0)|_V^2}}$$

e

$$\tilde{\varphi}_k^0 = \lambda_k \varphi_k^0, \quad \tilde{\psi}_k^0 = \lambda_k \psi_k^0, \quad \tilde{\varphi}_k^1 = \lambda_k \varphi_k^1$$

e denotando por  $(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k)$  a solução correspondente para (2.79) – (2.82) com  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1)$  substituído por  $(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1)$ . Então, segue from (2.119) que, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_O |\tilde{\psi}_k|^2 dxdt \leq \frac{1}{k} \quad (2.120)$$

e

$$\left| \Lambda(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1) \right|_{\mathcal{H}} = \sqrt{k}. \quad (2.121)$$

Em vista disso (2.118), temos que

$$\begin{aligned} \int_O h\psi dxdt &= -\rho_1 \langle y^1, \varphi(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \varphi_t(0) \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \psi(0) \rangle - \rho_2 \langle \varphi_{tx}(0), z^0 \rangle; \\ &= \langle \Lambda(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, q^0), (y^0, z^0, y^1, y_x^1) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_O h\psi_k dxdt &= -\rho_1 \langle y^1, \tilde{\varphi}_k(0) \rangle + \rho_1 \langle y^0, \tilde{\varphi}_t^k(0) \rangle + \rho_2 \langle y_x^1, \tilde{\psi}_k(0) \rangle - \rho_2 \langle \tilde{\varphi}_{tx}^k(0), z^0 \rangle; \\ &= \langle \Lambda(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1), (y^0, z^0, y^1, y_x^1) \rangle. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Por (2.122) e (2.120), temos que

$$\Lambda(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1) \text{ tendendo a } 0 \text{ fracamente em } \mathcal{H} \text{ com } k \rightarrow \infty.$$

Assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme, veja a página 32 em [11], a sequência  $\left\{ \Lambda(\tilde{\varphi}_k^0, \tilde{\psi}_k^0, \tilde{\varphi}_k^1) \right\}_{k=1}^\infty$  é uniformemente limitado em  $\mathcal{H}$  que contradiz (2.121). ■

# Capítulo 3

## Estabilização uniforme para versão truncada do sistema de Timoshenko com damping não linear

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos a versão truncada do sistema Timoshenko sob o efeito de um damping friccional não-linear e localizado agindo na equação do deslocamento rotacional. Provamos um resultado de existência global usando o método de energia combinado com o método de Faedo-Galerkin. Além disso, estudamos o comportamento assintótico de soluções usando o método de energia e algumas propriedades de funções convexas. Estes argumentos de convexidade foi introduzido e desenvolvido por [36] e usados por [21, 29, 48]. Para alcançamos o resultado de estabilidade assintótica das soluções não é necessário estabelecer qualquer relação entre as velocidade de propagação de onda. O capítulo está organizado da seguinte forma, na seção 3.2 apresentamos as notações e hipóteses do problema. Na seção 3.3 mostramos o resultado de existência global para a versão truncada do sistema de Timoshenko, para uma melhor compreensão da demonstração do Teorema 3.1 dividimos a prova em subseções. Na seção 3.4 vamos prova o resultado de decaimento uniforme para a energia do sistema.



## 3.2 Hipóteses e notações iniciais

Consideramos a dinâmica do Sistema de Timoshenko unidimensional para vigas envolvendo um termo de memória. Para um feixe com comprimento  $L$ , este sistema é dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q, \quad (3.1)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \alpha(x)g(\psi_t) = 0, \text{ em } Q, \quad (3.2)$$

em um domínio retangular  $Q = (0, L) \times (0, T)$  e  $\Gamma = \{0; L\}$  representa a borda do domínio e  $T > 0$  é um dado tempo de controle. Para facilitar nossa análise, consideramos as seguintes condições iniciais:

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi^0(x) \quad (3.3)$$

e condições de fronteira:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } (0, T), \quad (3.4)$$

Consideramos as seguintes hipóteses sobre a localização e função:

- *Hipótese 2.1:* A função  $\alpha \in C^\infty(0, L)$  é não negativa e satisfaz

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0, \quad x \in \varpi \subset (0, L)$$

- *Hipótese 2.2 :* Seja  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função não decrescente de classe  $C^0$  tal que existe uma função convexa e crescente  $G_0 \in C^1([0, \infty) \cap C^2]0, \infty[)$ , satisfazendo  $G_0(0) = 0$ , e  $G_0$  linear em  $[0, \varepsilon]$  ou ( $G_0'(0) = 0$ ,  $G_0'' \geq 0$  em  $]0, \varepsilon[$ ) onde  $c, c_0$  e  $\varepsilon$  são constantes positivas, tal que

$$s^2 + g(s)^2 \leq G_0^{-1}(sg(s)) \quad \text{para todo } |s| \leq \varepsilon \quad (3.5)$$

$$cs^2 \leq g(s)s \leq c_0s^2 \quad \text{para todo } |s| \geq \varepsilon \quad (3.6)$$

**Observação 3.1** *A hipótese (2.1) implica que a função de localização  $\alpha$  é suave e não-negativa e (2.2) implica que  $sg(s) > 0$ , para todo  $s \neq 0$ .*

No que segue, adotaremos a notação padrão para os espaços de funções estabelecidos anteriormente.

### 3.3 Existência global

Agora, enunciaremos o resultado que garante o sistema (3.1) – (3.4) seja bem posicionado.

**Teorema 3.1** *Seja  $\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{H}$ . Assumindo que as hipóteses 2.1 e 2.2 são verdadeiras. O problema (3.1) – (3.4) admite uma única solução fraca, satisfazendo as condições*

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)); \quad \psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)); \quad (3.7)$$

$$\varphi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad \varphi_{tt} \in L^\infty(0, T; V);$$

**Prova:**

**Problema Aproximado:** Vamos usar o método de Faedo-Galerkin para construção de uma solução global. Seguiremos as técnicas de [12, 21]. Dado  $T > 0$  e realizando a mesma construção dos problemas aproximados dos capítulos 1 e 2, obtemos o seguinte problema aproximado

$$\rho_1 (\varphi_m''(t), w_\nu) - \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))_x, w_\nu) = 0 \quad (3.8)$$

$$-\rho_2 (\varphi_{mxx}''(t), \tilde{w}_\nu) - b(\psi_{mxx}(t), \tilde{w}_\nu) + \kappa ((\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)), \tilde{w}_\nu) + \alpha(x)(g(\psi_m'(t)), \tilde{w}_\nu) = 0 \quad (3.9)$$

onde  $\nu = 1, 2, \dots, m$ , com dados iniciais

$$\varphi_m(0) = \varphi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^0, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \quad (3.10)$$

$$\varphi_m'(0) = \varphi_m^1 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^1, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^1 \in H_0^1(0, L) \quad (3.11)$$

$$\psi_m(0) = \psi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\psi^0, \tilde{w}_\nu) \tilde{w}_\nu \longrightarrow \psi^0 \in H_*^1(0, L). \quad (3.12)$$

Além disso, assumiremos a hipótese que

$$\psi_m'(0) \text{ é limitada em } V. \quad (3.13)$$

Contudo, note que o sistema (3.8) - (3.11) após devidas mudanças é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias, cuja a existência e assegurada pelo Teorema de Carathéodory seja por exemplo em [17]. Conseqüentemente, o problema (3.8) - (3.11) possui uma solução local  $(\varphi_m, \psi_m)$  em algum intervalo  $[0, T_m)$  com  $0 < T_m < T$ . No próximo capítulo iremos a abordar com mais detalhes as passagem acima, haja vista, que o problema a ser tratado será bem mais geral do que neste caso.

A seguir, mostramos estimativas a priori que permitem estender as soluções locais para o intervalo  $[0, T]$ , para qualquer  $T$ .

**Estimativas:**

*Primeira estimativa:* Desde que as seqüências  $(\varphi_m^0, \varphi_m^1, \psi_m^0)$  convergem, segue que integrando (3.8) e (3.9) sobre  $(0, L)$  e usando as condições (3.4), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |\varphi'_m(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''_m(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 \right) \\ + \int_0^L \alpha(x) \psi'_m g(\psi'_m) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Vamos definir a energia associada a (3.8) – (3.9)

$$E_m(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \rho_1 |\varphi'_m(t)|^2 + b |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''_m(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 \right) dx. \quad (3.15)$$

A partir de (3.14) e (3.15) integrando de 0 a  $t$ , resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_m(t) + \int_0^L \alpha(x) \psi'_m g(\psi'_m) dx &= 0 \\ E_m(t) + \int_0^t \int_0^L \alpha(x) \psi'_m g(\psi'_m) dx ds &\leq E_m(0) \leq C. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Estas estimativas implicam que a solução  $(\varphi_m, \psi_m)$  existem globalmente em  $[0, +\infty)$ . Conseqüentemente, obtemos

$$(\varphi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (3.17)$$

$$(\varphi'_x)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (3.18)$$

$$(\varphi_x)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (3.19)$$

$$(\varphi'')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (3.20)$$

$$(\psi_x)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (3.21)$$

$$(\psi' g(\psi'))_m \text{ é limitada em } L^1(Q), \quad (3.22)$$

para todo  $T > 0$ .

*Segunda estimativa:* Primeiro, vamos estimar  $\varphi''_m(0)$ . Multiplicando (3.8) por  $p''_{\nu m}(t)$  e escolhendo  $t = 0$ , obtemos

$$\rho_1 |\varphi''_m(0)| \leq \kappa (|\varphi_{mxx}^0| + |\psi_{mx}^0|).$$

Portanto, de (3.10), (3.11) e (3.12), temos

$$|\varphi''_m(0)| \leq C.$$

Consequentemente, pela hipótese (3.13), temos

$$|\varphi_m'''(0)| \leq C,$$

onde  $C$  é uma constante positiva.

Diferenciando (3.8) e (3.9) com respeito a  $t$ , obtemos

$$(\rho_1 \varphi_m'''(t) - \kappa \varphi'_{mxx}(t) + \kappa \psi'_{mx}(t), w_\nu) = 0 \quad (3.23)$$

$$(-\rho_2 \varphi_m'''(t) - b \psi'_{mxx}(t) + \kappa \varphi'_{mx}(t) + \kappa \psi'_m(t) + \alpha(x) \psi_m''(t) g'(\psi'_m(t)), \tilde{w}_\nu) = 0. \quad (3.24)$$

Multiplicando (3.23) e (3.24) por  $p_{\nu m}''(t)$ , e somando  $\nu$  de 1 a  $m$ , segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |\varphi_m''(t)|^2 + b |\psi'_{mxx}(t)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m'''(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mxx}(t)|^2 \right) - \kappa \int_0^L (\varphi'_{mx} + \psi'_m)_x \varphi_m'' dx \\ + \kappa \int_0^L (\varphi'_{mx} + \psi'_m)_x \psi_m'' dx + \int_0^L \alpha(x) \psi_m''^2 g'(\psi'_m) dx = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |\varphi_m''(t)|^2 + b |\psi'_{mxx}(t)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m'''(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mxx}(t)|^2 + \kappa |\varphi'_{mx}(t) + \psi'_m(t)|^2 \right) \\ + \int_0^L \alpha(x) \psi_m''^2 g'(\psi'_m) dx = 0. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Integrando sobre  $(0, t)$ , de (3.16) temos que a energia  $E_m(t) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  é uma função não-negativa e não-crescente, logo deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi_m''(t)|^2 + b |\psi'_{mxx}(t)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m'''(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mxx}(t)|^2 + \kappa |\varphi'_{mx}(t) + \psi'_m(t)|^2 \right) \\ + \int_0^t \int_0^L \alpha(x) \psi_m''^2 g'(\psi'_m) dx dt \\ \leq \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi_m''(0)|^2 + b |\psi'_{mxx}(0)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi_m'''(0)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mxx}(0)|^2 + \kappa |\varphi'_{mx}(0) + \psi'_m(0)|^2 \right) \leq M, \end{aligned} \quad (3.26)$$

para todo  $t \in [0, T]$  e  $M$  uma constante positiva independente de  $m \in \mathbb{N}$ . Portanto, concluímos que

$$(\psi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V). \quad (3.27)$$

Usando a imersão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow V$ , temos

$$(\varphi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (3.28)$$

$$(\psi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (3.29)$$

$$(\varphi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (3.30)$$

$$(\psi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)); \quad (3.31)$$

$$(\psi'g(\psi'))_m \text{ é limitada em } L^1(Q), \quad (3.32)$$

para todo  $T > 0$ .

Note que

$$L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]';$$

$$L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'$$

e

$$L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'.$$

Como um resultado de (3.28) – (3.32) e Teorema de Banach-Alaoglu-bourbaki e resultados de regularização elíptica, veja por exemplo página 66 em [11], existe um subsequência  $(\varphi_\mu)$  e  $(\psi_\mu)$ , tal que

$$(\varphi')_\mu \xrightarrow{*} \varphi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'; \quad (3.33)$$

$$(\psi')_\mu \xrightarrow{*} \psi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'; \quad (3.34)$$

$$(\varphi)_\mu \xrightarrow{*} \varphi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]'; \quad (3.35)$$

$$(\psi)_\mu \xrightarrow{*} \psi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'; \quad (3.36)$$

$$g(\psi')_\mu \xrightarrow{*} \chi \text{ fraco estrela em } L^1(Q), \quad (3.37)$$

Logo, de (3.33) – (3.37), temos

$$\varphi \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L) \cap H_0^1(0, L)), \quad \varphi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1), \quad \psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)). \quad (3.38)$$

De (3.29) e (3.31) temos que  $\psi'_m$  é limitada em  $L^\infty(0, T; V)$ . Então  $\psi'_m$  é limitada em  $L^2(0, T; V)$ , usando Aubin-Lions [40], podemos extrair uma subsequência  $\psi'_\mu$  tal que

$$\psi'_\mu \rightarrow \psi' \text{ fortemente em } L^2(Q).$$

Portanto

$$\psi'_\mu \rightarrow \psi' \text{ fortemente q.t.p em } Q. \quad (3.39)$$

**Lema 3.1** [21] Para cada  $T > 0$ ,  $g(\psi') \in L^1(Q)$  e  $\|g(\psi')\|_{L^1(Q)} \leq K$ , onde  $K$  é uma constante independente de  $t$ .

**Lema 3.2** [21] Seja  $\psi(x, t)$  solução de (3.1) - (3.4), então a convergência  $g(\psi'_m) \rightarrow g(\psi')$  em  $L^1(Q)$  é assegurada.

Assim

$$g(\psi'_m) \rightarrow g(\psi') \text{ fraco estrela em } L^1(Q),$$

e disto implica que

$$\int_0^T \int_0^L g(\psi'_m) v dx dt \rightarrow \int_0^T \int_0^L g(\psi') v dx dt \text{ para todo } v \in L^2(0, T; V), \quad (3.40)$$

com  $m \rightarrow +\infty$ . Segue das convergências (3.33) - (3.37) e (3.40) cada  $u, v \in L^2(0, T; H_0^1(0, L))$

$$\int_0^T \int_0^L (\rho_1 \varphi''_m - \kappa(\varphi_{mx} + \psi_m)_x) u dx dt \rightarrow \int_0^T \int_0^L (\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x) u dx dt \quad (3.41)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L (-\rho_2 \varphi''_{xm} - b\psi_{mxx} + \kappa(\varphi_{xm} + \psi_m)_x + \alpha(x)g(\psi'_m)) v dx dt \rightarrow \\ \int_0^T \int_0^L (-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha(x)g(\psi_t)) v dx dt \end{aligned} \quad (3.42)$$

com  $m \rightarrow +\infty$ . Assim

$$\int_0^T \int_0^L (\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x) u dx dt = 0 \quad (3.43)$$

$$\int_0^T \int_0^L (-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \alpha(x)g(\psi_t)) v dx dt = 0. \quad (3.44)$$

Portanto o problema (3.1) - (3.4) admite uma solução  $(\varphi, \psi, \varphi_t)$ . ■

### 3.4 Comportamento assintótico

Nesta seção, vamos mostrar que a energia associada a solução do problema decai uniformemente. Para isso, usamos o método de energia combinando com uma escolha adequada de um Funcional de Lyapunov.

**Proposição 3.1** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  uma solução de (3.1) – (3.4). Desta forma, a energia total dada por*

$$E(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx, \quad (3.45)$$

que satisfaz a seguinte taxa de variação

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \alpha(x) \psi_t g(\psi_t) dx \leq 0, \quad (3.46)$$

para todo  $t \geq 0$ .

**Prova:** Multiplicando a equação (3.1) por  $\varphi_t$  e a equação (3.2) por  $\psi_t$ , integrando o resultado sobre  $(0, L)$  em relação a  $x$  e usando as condições de fronteiras (3.4), obtemos (3.46) para qualquer solução regular. ■

A seguir, vamos enunciar e prova lemas auxiliares que nos ajudaram a mostrar o decaimento uniforme da energia total. Ao longo de toda a prova, iremos usar extensivamente as desigualdades de Hölder e Young.

**Lema 3.3** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  a solução do sistema (3.1) – (3.4). Então, o funcional*

$$\mathcal{E}(t) := -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx + \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx, \quad (3.47)$$

satisfaz a estimativa

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx - \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\kappa} \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)^2 dx.$$

**Prova:** Multiplicando a equação (3.2) por  $(\varphi_x + \psi)$ , integrando por partes sobre  $(0, L)$  temos

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L \varphi_{ttx}(\varphi_x + \psi) dx + b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx = \\ - \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx \right) + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx = -\rho_2 \int_0^L \varphi_{ttx}(\varphi_x + \psi) dx,$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx \right) + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx + b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx \\ + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx = - \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned}$$

isto implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx \right) &= -\rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx \\ &- \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Multiplicando a equação (3.1) por  $\frac{b}{\kappa} \psi_x$ , integrando por partes sobre  $(0, L)$  temos

$$\frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx - b \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_{xx} dx = 0,$$

e usando a identidade

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx = \int_0^L \varphi_t \psi_{tx} dx + \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx.$$

Resulta que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx \right) = -\frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx + b \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi_x dx. \quad (3.50)$$

Finalmente, adicionando (3.49) e (3.50), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx + \frac{\rho_1 b}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx \right) &= -\rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx - \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &- \left( \rho_2 + \frac{\rho_1 b}{\kappa} \right) \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx - \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Vamos examinar com detalhe os dois últimos termos que aparecem no lado direito de (3.51).

Segue da desigualdade de Young que

$$-b \left( \frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_1}{\kappa} \right) \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx \leq \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + C \int_0^L |\psi_t|^2 dx. \quad (3.52)$$

onde  $C = b^2 \left( \frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_1}{\kappa} \right)^2 / 2\rho_2$ . Da mesma forma, obtemos

$$- \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)(\varphi_x + \psi) dx \leq \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\kappa} \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx, \quad (3.53)$$

Usando as estimativas (3.52) e (3.53) em (3.51), obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx - \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\kappa} \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)^2 dx.$$

■



**Lema 3.4** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  solução do sistema (3.1) – (3.4). Então, o funcional*

$$\mathcal{H}(t) := -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx. \quad (3.54)$$

*satisfaz a estimativa*

$$\frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) \leq -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + C(\epsilon) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + 2\epsilon c_p \kappa \int_0^L |\psi_x|^2 dx.$$

**Prova:** Multiplicando (3.1) por  $\varphi$  e integrando sobre  $(0, L)$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) = -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx. \quad (3.55)$$

Usando a desigualdade de Young e considerando a estimativa dada por

$$\int_0^L |\varphi_x|^2 dx \leq 2 \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + 2c_p \int_0^L |\psi_x|^2 dx,$$

temos

$$\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx \leq \left( \frac{1}{4\epsilon} + 2\epsilon \right) \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + 2\epsilon c_p \kappa \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \quad (3.56)$$

Adicionando as equações (3.55) e (3.56) obtemos o resultado esperado,

$$\frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) \leq -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + C(\epsilon) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + 2\epsilon c_p \kappa \int_0^L |\psi_x|^2 dx.$$

onde  $C(\epsilon) = (1/4\epsilon + 2\epsilon)\kappa$ . ■

**Lema 3.5** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  solução do sistema (3.1 – 3.4). Então, o funcional*

$$\mathcal{K}(t) := \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx. \quad (3.57)$$

*satisfaz a estimativa*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx \right) &\leq -\frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\ &+ \frac{\kappa^2 c_p}{2b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\epsilon_1} \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t)^2 dx. \end{aligned}$$

**Prova:** Multiplicando a equação (3.2) por  $\psi$  e integrando por partes, temos

$$\rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx = - \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t) \psi dx. \quad (3.58)$$

Segue da equação (3.1) que  $\psi_x = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{tt} - \varphi_{xx}$ . Então, substituindo  $\psi_x$  em (3.58) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx \right) &= -\frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx - b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\ &- \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx - \int_0^L \alpha(x) g(\psi_t) \psi dx. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Agora, usando as desigualdades de Young e Poincaré, chegamos

$$-\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\psi dx \leq \frac{\kappa^2 c_p}{2b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \quad (3.60)$$

Para a próxima estimativa procedemos de maneira similar a anterior, logo temos

$$-\int_0^L \alpha(x)g(\psi_t)\psi dx \leq \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\epsilon_1} \int_0^L \alpha(x)g(\psi_t)^2 dx + \frac{\epsilon_1 c_p}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \quad (3.61)$$

Usando as estimativas (3.60), (3.61), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx \right) &\leq - \left( 1 - \frac{c_p \epsilon_1}{b} \right) \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\ &+ \frac{\kappa^2 c_p}{2b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\epsilon_1} \int_0^L \alpha(x)g(\psi_t)^2 dx. \end{aligned}$$

Agora, escolhemos

$$\epsilon_1 < \tilde{\epsilon}_1 = \frac{b}{c_p}.$$

Portanto, temos a estimativa desejada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx \right) &\leq -\frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\ &+ \frac{\kappa^2 c_p}{2b} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\epsilon_1} \int_0^L \alpha(x)g(\psi_t)^2 dx. \end{aligned}$$

■

Para  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  constantes positivas suficientemente grande e considerando os funcionais dados nos lemas 3.3, 3.4, 3.5 definimos o seguinte funcional de Lyapunov  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(t) := N_1 E_1(t) + N_2 \mathcal{E}(t) + N_3 \mathcal{H}(t) + N_4 \mathcal{K}(t). \quad (3.62)$$

Agora, estabelecemos a equivalência entre funcional de Lyapunov e a energia total associada ao sistema (3.1) – (3.4). Mais precisamente, vamos prova o seguinte resultado.

**Lema 3.6** *Para  $N_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  constantes positivas suficientemente grande, existem constantes positivas  $k_1$  e  $k_2$  tal que o funcional (3.62) satisfaz*

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t), \quad t \geq 0. \quad (3.63)$$

**Prova:** De fato, considerando o funcional  $\mathcal{L}(t)$  definido acima, segue que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| &\leq N_2 \mathcal{E}(t) + N_3 \mathcal{H}(t) + N_4 \mathcal{K}(t), \\ &\leq N_2 \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}(\varphi_x + \psi)| dx + N_2 \frac{\rho_1 b_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_t \psi_x| dx + N_3 \rho_1 \int_0^L |\varphi_t \varphi| dx \\ &\quad + N_4 \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx} \varphi_x| dx. \end{aligned}$$

Pela aplicação das desigualdades de Young e Poincaré, concluímos que existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$|\mathcal{L}(t) - N_1 E(t)| \leq c E(t), \quad t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$(N_1 - c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (c + N_1)E(t) \quad t \geq 0,$$

escolhendo  $N_1 > c$  suficientemente grande, obtemos

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t). \quad (3.64)$$

■

Agora, estamos em condições de prova o resultado principal deste capítulo que é estabilidade assintótica do sistema.

**Teorema 3.2** *Vamos assumir as hipóteses 2.1 e 2.2. A energia  $E(t)$  do sistema (3.1) – (3.4) tem uma estimativa uniforme com o tempo  $t$  tendendo ao infinito. Isto é, existem constantes positivas,  $\omega$  e  $\omega_1$  independente do dado inicial, tal que*

$$E(t) \leq \omega_1 G_1^{-1} \left( \omega \int_0^t \zeta(s) ds \right) \quad \forall t \geq 0, \quad (3.65)$$

onde

$$G_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{G_2(s)} ds, \quad (3.66)$$

e

$$G_2(t) = \begin{cases} t & \text{se } G_0 \text{ é linear em } [0, m] \\ t G_0'(\epsilon_0 t) & \text{se } G_0'(0) = 0 \text{ e } G_0'' > 0 \text{ em } ]0, m]. \end{cases} \quad (3.67)$$

**Prova:** Segue dos Lemas 3.3, 3.4, 3.5 e da lei de dissipação (3.46) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -N_1 \int_0^L \alpha(x)\psi_t g(\psi_t) dx - 2N_3 \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - (N_2 - 2N_4) \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\
&\quad - 2N_4 \frac{\rho_2 \rho_1}{2\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx - \left( N_4 - N_3 \frac{4\epsilon c_p \kappa}{b} \right) \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
&\quad - \left( N_2 - N_4 \frac{\kappa c_p}{b} - 2N_3 \frac{C(\epsilon)}{b} \right) \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + N_2 C \int_0^L |\psi_t|^2 dx - N_2 \int_0^L \alpha(x) |\psi_t|^2 dx \\
&\quad + N_2 \int_0^L \alpha(x) |\psi_t|^2 dx + \left( N_2 \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\kappa} + N_4 \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\epsilon_1} \right) \int_0^L \alpha(x) |g(\psi_t)|^2 dx. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Agora, tomamos cuidadosamente as constantes

$$\epsilon = \frac{b}{4c_p \kappa}$$

e

$$d > C \text{ onde } d = \inf_{x \in [0, L]} \alpha(x), \text{ satisfaz } N_2(d - C) > 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -2N_3 \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx - (N_2 - 2N_4) \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx - 2N_4 \frac{\rho_2 \rho_1}{2\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx \\
&\quad - (N_4 - N_3) \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \left( N_2 - N_4 \frac{\kappa c_p}{b} - 2N_3 \frac{C(\epsilon)}{b} \right) \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
&\quad + N_2 \int_0^L \alpha(x) |\psi_t|^2 dx + \left( N_2 \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\kappa} + N_4 \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\epsilon_1} \right) \int_0^L \alpha(x) |g(\psi_t)|^2 dx. \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Agora, escolhemos  $N_4 > N_3$  seguido por  $N_2$  suficientemente grande tal que

$$N_2 > \max \left\{ 2N_4, N_4 \frac{\kappa c_p}{b} + 2N_3 \frac{C(\epsilon)}{b} \right\}$$

isto implica que,

$$N_2 - 2N_4 > 0 \text{ and } N_2 - N_4 \frac{\kappa c_p}{b} - 2N_3 \frac{C(\epsilon)}{b} > 0.$$

Agora, podemos concluir que existe uma constante positiva  $N_0 > 0$ , que resulta em

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -N_0 E(t) + \tilde{C} \int_0^L \alpha(x) (|\psi_t|^2 + |g(\psi_t)|^2) dx \tag{3.70}$$

onde  $\tilde{C} = \max \left\{ (C_0 + N_2 C), C_0 + N_2 \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\kappa} + N_4 \frac{\|\alpha\|_\infty}{2\epsilon_1} \right\}$ .

A partir deste ponto, nosso objetivo será obter uma estimativa para o termo integral da desigualdade (3.70). Iniciamos por considerar que o conjunto  $\{\varphi, \psi, \varphi_t\}$  é solução para (3.1) - (3.4) e define o seguinte conjunto

$$\Omega^+ = \{x \in (0, L) : |\psi_t| \geq \varepsilon\}, \quad \Omega^- = \{x \in (0, L) : |\psi_t| \leq \varepsilon\}.$$

**Primeiro caso:**  $G_0$  é linear em  $[0, \varepsilon]$ . Então assumindo a hipótese 2.2 e a lei de dissipação (3.46), implica que

$$\begin{aligned} \int_0^L \alpha(x) (\psi_t^2 + g(\psi_t)^2) dx &\leq \int_{\Omega^-} \alpha(x) (\psi_t^2 + g(\psi_t)^2) dx + \int_{\Omega^+} \alpha(x) (\psi_t^2 + g(\psi_t)^2) dx \\ &\leq \widehat{\delta}_1 \int_{\Omega^-} \alpha(x) \psi_t g(\psi_t) dx + \delta_1 \int_{\Omega^+} \alpha(x) \psi_t g(\psi_t) dx; \\ &\leq -\delta E'(t). \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde  $\delta = \widetilde{C}(\widehat{\delta}_1 + \delta_1)$ . Combinando (3.70) e (3.71)

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(t) + \delta E(t)) \leq -N_0 E(t). \quad (3.72)$$

Desde que  $G_0$  é uma função crescente, deduziremos de (3.72) que existe uma constante  $N > 0$  tal que

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(t) + \delta E(t)) \leq -N G_2(E(t)). \quad (3.73)$$

**Segundo caso:** Consideramos  $G_0$  em  $]0, \varepsilon]$ , tal que  $G_0'(0) = 0$  e  $G'' > 0$ . Desde que  $G_0$  é uma função convexa e crescente e  $G_0^{-1}$  é concava e crescente. Pela hipótese 2.1 e a partir da desigualdade (3.70), podemos aplicar a desigualdade de Jensen para funções concavas. Obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \alpha(x) (\psi_t^2 + g(\psi_t)^2) dx &\leq (1 + c^{-1}) \int_{\Omega^-} \alpha(x) G_0^{-1}(\psi_t g(\psi_t)) dx \\ &\leq (1 + c^{-1}) \int_{\Omega^-} (1 + \|\alpha\|_\infty) G_0^{-1} \left( \frac{\alpha}{(1 + \|\alpha\|_\infty)} \psi_t g(\psi_t) \right) dx \\ \int_{\Omega^-} \alpha(x) (\psi_t^2 + g(\psi_t)^2) dx &\leq |C| G_0^{-1} \left( \frac{1}{|C|} \int_{\Omega^-} \psi_t g(\psi_t) dx \right), \\ &\leq C_1 G_0^{-1}(-C_1' E'(t)). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Um combinação de (3.70), (3.71) e (3.74) produz

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L}(t) + \widetilde{C} \delta_1 E(t)) \leq -N_0 E(t) + \widetilde{C}_1 G_0^{-1}(-C_1' E'(t)), \quad t \geq 0. \quad (3.75)$$

Vamos denota por  $G_0^*$  a função conjugado convexo de  $G_0$

$$G_0^*(s) := \sup_{t \in \mathbf{R}_+} (st - G_0(t)).$$

Então  $G_0^*$  é a Transformada de Legendre  $G_0$ , da qual é dada por

$$G_0^*(s) = s(G_0')^{-1}(s) - G_0[(G_0')^{-1}(s)], \quad \forall s \geq 0 \quad (3.76)$$

e satisfaz a seguinte desigualdade

$$st \leq G_0^*(s) + G_0(t), \quad \forall s, t \geq 0. \quad (3.77)$$

A relação (3.76) e o fato de que  $G_0'(0) = 0$  e  $(G_0')^{-1}$ ,  $G_0$  são funções crescentes temos

$$G_0^*(s) \leq s(G_0')^{-1}(s), \quad \forall s \geq 0. \quad (3.78)$$

A fim de completar a demonstração do caso 2, considere para  $\epsilon_0 < \varepsilon$  e usando (3.75) e o fato de que  $E'(t) < 0$   $G_0'' \geq 0$ , definamos o funcional  $\mathcal{G}(t)$  dado por

$$\mathcal{G}(t) := G_0'(\epsilon_0 E(t))[\mathcal{L}(t) + \tilde{C} \delta_1 E(t)] + \tilde{C}_1 C_1' E(t),$$

onde  $\epsilon_0$  é uma constante positiva a ser determinada mais tarde.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( G_0'(\epsilon_0 E(t))[\mathcal{L}(t) + \tilde{C} \delta_1 E(t)] + \tilde{C}_1 C_1' E(t) \right) &= \epsilon_0 E'(t) G_0''(\epsilon_0 E(t))[\mathcal{L}(t) + \tilde{C} \delta_1 E(t)] \\ &+ G_0'(\epsilon_0 E(t))[\mathcal{L}'(t) + \tilde{C} \delta_1 E'(t)] + \tilde{C}_1 C_1' E'(t). \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável  $s = G_0'(\epsilon_0 E(t))$ ,  $t = G_0^{-1}(-C_1' E'(t))$  e usando as desigualdades (3.77) e (3.78) respectivamente, temos

$$\begin{aligned} &\leq -N_0 G_0'(\epsilon_0 E(t)) E(t) + \tilde{C}_1 G_0'(\epsilon_0 E(t)) G_0^{-1}(-C_1' E'(t)) + \tilde{C}_1 C_1' E'(t); \\ &\leq -N_0 G_0'(\epsilon_0 E(t)) E(t) + \tilde{C}_1 G_0^*(G_0'(\epsilon_0 E(t))); \\ &\leq -N_0 G_0'(\epsilon_0 E(t)) E(t) + \tilde{C}_1 G_0'(\epsilon_0 E(t)) \epsilon_0 E(t); \\ &\leq - \left( 1 - \frac{\tilde{C}_1 \epsilon_0}{N_0} \right) G_0'(\epsilon_0 E(t)) E(t); \end{aligned}$$

agora escolhendo  $\epsilon_0 < \tilde{\epsilon}_0 = \frac{N_0}{\tilde{C}_1}$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) \leq -G_2(E(t)). \quad (3.79)$$

Seja

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) = \begin{cases} \mathcal{L}(t) + \delta E(t) & \text{se } G_0 \text{ é linear em } [0, \varepsilon] \\ G_0'(\epsilon_0 E(t))[\mathcal{L}(t) + \tilde{C} \delta_1 E(t)] + \tilde{C}_1 C_1' E(t) & \text{se } G_0'(0) = 0 \text{ e } G_0'' > 0 \text{ em } ]0, \varepsilon]. \end{cases} \quad (3.80)$$

De (3.73) e (3.79), segue

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{L}}(t) \leq -c_3 G_2(E(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.81)$$

Resta ver que  $\tilde{\mathcal{L}}(t)$  é equivalente a  $E(t)$ . De fato, pelo Lema (4.4) podemos escolher uma constante positiva grande o suficiente tal que  $\mathcal{L}(t) \sim E(t)$ . Então,  $\tilde{\mathcal{L}}(t)$  é equivalente também a  $E(t)$  e explorando o fato que a função  $G_2$  é crescente, obtemos

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{L}}(t) \leq -\tilde{c}_3 G_2(\tilde{\mathcal{L}}(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.82)$$

Inspirado nas técnicas de [29], levamos em conta (3.66), que implica que  $G_1' = -1/G_2$ , e usando (3.82), temos

$$\tilde{\mathcal{L}}'(t) G_1'(\tilde{\mathcal{L}}(t)) \geq \tilde{c}_3. \quad (3.83)$$

Integrando sobre  $(0, t)$  e usando o fato que  $E(t)$  é uma função não-negativa e não-crescente, então produzimos

$$G_1(\tilde{\mathcal{L}}(0)) + \frac{t\tilde{c}_3}{\tilde{\mathcal{L}}(0)} \leq G_1(\tilde{\mathcal{L}}(0)), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (3.84)$$

Então, explorando o fato que  $G_1^{-1}$  é decrescente, obtemos

$$G_1^{-1}\left(G_1(\tilde{\mathcal{L}}(0)) + t\omega\right) \geq \tilde{\mathcal{L}}(0) \quad (3.85)$$

Finalmente, a equivalência de  $\mathcal{L}$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}$  e  $E$ , resulta na estimativa

$$E(0) \leq \omega_1 G_1^{-1}\left(G_1(\tilde{\mathcal{L}}(0)) + t\omega\right), \quad (3.86)$$

mas

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (3.87)$$

Portanto,

$$E(t) \leq \omega_1 G_1^{-1}\left(\omega \int_0^t \zeta(s) ds\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.88)$$

Além do mais, desde  $G_2$  e  $G_0$  são convexas, então  $\lim_{t \rightarrow 0} G_1(t) = +\infty$  e supondo

$$\int_0^\infty \zeta(s) ds = +\infty,$$

temos estabilidade uniforme do sistema, quer dizer,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0. \quad (3.89)$$

■

# Capítulo 4

## Estabilização uniforme para versão truncada do sistema de Timoshenko semilinear e memória com história

### 4.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a existência, unicidade e dependência contínua das soluções da versão truncada do sistema de Timoshenko com perturbações não lineares e memória com história, isto é para  $t < 0$ . No estudo de propriedades qualitativas do sistema estudamos o comportamento assintótico das soluções. A existência de soluções se dá via método de Faedo-Garlerkin. A estabilidade assintótica do sistema é alcançada através do método de energia.

Para resolvermos este problema faz se necessário transformar o problema com história em um problema autônomo equivalente. Seguindo as ideias desenvolvidas por Darfemos [18], vamos introduzir uma nova variável ao problema, conhecida como história de deslocamento relativo (ver [27, 28, 51]). Vale apenas ressaltar que a contribuição deste resultado se dá pelo fato que alcançamos o mesmo resultado contido em [27], mas no caso dessa Tese não usamos qualquer relação entre as velocidades de propagação da ondas.

O resto do capítulo esta organizado da seguinte forma. Na seção 4.2 apresentamos as hipóteses e notações pertinentes ao problema. Na seção 4.3 mostramos a existência, unicidade e dependência contínua das soluções para facilitar a leitura do texto dividiremos a demonstração em subseções. Na seção 4.4 mostramos o resultado principal do capítulo que o a estabilização das soluções



quando o tempo  $t$  tende ao infinito.

## 4.2 Hipóteses e notações iniciais

Vamos considera a dinâmica unidimensional do sistema de Timoshenko semilinear para vigas envolvendo um termo de memória. Para vigas com comprimento  $L$ , este sistema é dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = f(\varphi), \text{ em } Q, \quad (4.1)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty \beta(s) \psi_{xx}(t-s) ds = g(\psi), \text{ em } Q, \quad (4.2)$$

no domínio retangular  $Q = (0, L) \times (0, T)$  e  $\Gamma = \{0; L\}$  representa a fronteira do domínio e  $T > 0$  é uma tempo controle dado. Para facilitar nossa análise consideramos as seguintes condições iniciais:

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), \quad \psi(x, 0) = \psi^0(x) \quad (4.3)$$

e condições de fronteira:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \text{em } (0, T), \quad (4.4)$$

com constantes positivas  $\rho_1, \rho_2, \kappa, b$ .

Seguindo as ideias de [18], introduzirmos uma variável conhecida como história de deslocamento relativo, dada por

$$\eta^t(x, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t-s), \quad s \geq 0; \quad (4.5)$$

consequentemente obtemos as seguintes condições iniciais e de fronteira

$$\eta^t(x, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (4.6)$$

$$\eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, \quad \forall s, t \geq 0; \quad (4.7)$$

$$\eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), \quad \forall s \geq 0; \quad (4.8)$$

Claramente, (4.5) dado

$$\eta_t^t(x, s) + \eta_s^t(x, s) = \psi_t(x, t). \quad (4.9)$$

Quando o kernel  $\beta$  é somável, adicionamos e subtraímos a equação (4.2) o termo  $\psi_{xx} \int_0^\infty \beta(s) ds$  e consideramos (4.5), obtemos

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b_1 \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}^t(s) ds = g(\psi) \quad (4.10)$$

onde temos

$$b_1 = \left( b + \int_0^\infty \beta(s) ds \right) \text{ e } \mu(s) = -\beta(s)$$

é uma constante positiva relacionada com o núcleo de memória  $\mu$ .

O sistema (4.1) – (4.2) é transformado no sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = f(\varphi), \quad (4.11)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b_1 \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}^t(s) ds = g(\psi), \quad (4.12)$$

$$\eta_t^t + \eta_s^t = \psi_t, \quad (4.13)$$

em  $(0, L)$ , para qualquer  $t \geq 0$  e qualquer  $s \geq 0$ , com as condições iniciais

$$\varphi(x, 0) = \varphi^0(x) \text{ em } (0, L) \quad (4.14)$$

$$\varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x) \text{ em } (0, L) \quad (4.15)$$

$$\psi(x, 0) = \psi^0(x) \text{ em } (0, L) \quad (4.16)$$

$$\eta^0 = \eta_0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (4.17)$$

e condições de fronteira:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.18)$$

$$\psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.19)$$

$$\eta^t(0) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.20)$$

$$\eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, \quad \forall t, s \geq 0. \quad (4.21)$$

**Observação 2** Note que o sistema (4.11) - (4.21) é um sistema autônomo e equivalente ao sistema (4.1) - (4.4).

O núcleo de memória  $\mu$  é requerido que satisfaça as seguintes hipóteses:

$$(h1) \quad \mu \in C^1(\mathbf{R}^+) \cap L^1(\mathbf{R}^+) \quad \forall s \in \mathbf{R}^+;$$

$$(h2) \quad \mu(s) \geq 0 \text{ e } \mu'(s) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}^+;$$

$$(h3) \quad \int_0^\infty \mu(s) ds = \mu_0 > 0;$$

$$(h4) \quad \mu'(s) + \delta \mu(s) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbf{R}^+ \text{ e algum } \delta > 0;$$

$$(h5) \quad \text{Existe } s_0 \geq 0 \text{ tal que } L^2(0, s_0) \text{ e } \mu'(s) + M\mu(s) \geq 0 \quad \forall s \geq s_0 \text{ e algum } M > 0.$$

Vamos introduzir espaço  $\mathcal{T}$  de  $L^p_{loc}$ -translações limitadas  $L^p$  a valores de funções sobre  $\mathbf{R}_+$ , a saber

$$\mathcal{T} = \left\{ u \in L^p_{loc}(\mathbf{R}_+, V); \|u\|_{\mathcal{T}} := \underbrace{\sup}_{\xi \geq 0} \int_{\xi}^{\xi+1} \left( \int_0^L |u(t)|^p dx \right)^{1/p} dy < \infty \right\}.$$

Veja, por exemplo [28].

Em vista de (h1), seja  $L^2_{\mu}(\mathbf{R}^+, H^1_*(0, L))$ , será um espaço de Hilbert  $H^1_*(0, L)$  a valores de funções sobre  $\mathbf{R}^+$ ,

$$\mathcal{M} = L^2_{\mu}(\mathbf{R}^+, H^1_*(0, L)) = \left\{ u : \mathbf{R}^+ \rightarrow H^1_*(0, L) \mid \int_0^{\infty} \mu(s) \|u_x(s)\|_V^2 ds < \infty \right\} \quad (4.22)$$

munido com o produto interno

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{M}} = \int_0^{\infty} \mu(s) (\varphi_x(s), \psi_x(s))_V ds. \quad (4.23)$$

Finalmente introduzimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H \times V \times \mathcal{M}.$$

Agora, vamos formular mais precisamente as condições de não linearidade do problema. Assumindo que ambos os termos forçantes  $f$  e  $g$  são funções Lipschitz em suas variáveis, ou seja,

$$|f(u) - f(v)| \leq c_f |u - v| \text{ e } |g(u) - g(v)| \leq c_g |u - v| \quad (4.24)$$

para cada  $u, v \in \mathbf{R}$ , onde  $c_f$  e  $c_g$  são constantes positivas, e  $g$  é zero na origem. Outras hipóteses sobre a não linearidade são dadas. Vamos introduzir os seguintes funcionais

$$F(s) = - \int_0^s f(y) dy, \quad G(s) = - \int_0^s g(y) dy$$

e

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^L F(\varphi(x)) dx, \quad \mathcal{G}(\psi) = \int_0^L G(\psi(x)) dx.$$

Temos as seguintes hipóteses: existe uma constante  $C_f > 0$  tal que

(f1)

$$\liminf_{|y| \rightarrow \infty} \inf \frac{F(y)}{y^2} \geq 0;$$

(f2)

$$|f'(y)| \leq C_f;$$

(g1)

$$\liminf_{|y| \rightarrow \infty} \frac{G(y)}{y^2} \geq 0;$$

(g2)

$$\liminf_{|y| \rightarrow \infty} \frac{-yg(y) - G(y)}{y^2} \geq 0.$$

As seguintes desigualdades são consequências direta de (f1) – (g2):

$$-\mathcal{F}(\varphi) + \epsilon \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \geq -c_0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(0, L); \quad (4.25)$$

$$-\mathcal{G}(\psi) + \epsilon \int_0^L |\psi_x|^2 dx \geq -c_0 \quad \forall \psi \in H_*^1(0, L); \quad (4.26)$$

$$-\int_0^L \psi g(\psi) dx + \mathcal{G}(\psi) + \epsilon \int_0^L |\psi_x|^2 dx \geq -c_1 \quad \forall \psi \in H_*^1(0, L); \quad (4.27)$$

para algum  $c_0, c_1 > 0$ .

### 4.3 Existência e Unicidade

Iniciamos essa seção com o conceito de solução fraca para problema (4.11) – (4.17) que será usado neste trabalho.

**Definição 4.1** *Seja  $I = [0, T]$  com  $T > 0$ . Chamamos o conjunto de funções  $\{\varphi, \psi, \varphi_t, \eta\} \in C(I; \mathcal{H})$  solução fraca para o sistema (4.11) – (4.17) no intervalo  $I$ , se  $(\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, \eta^0) \in \mathcal{H}$  e*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi_t(t), \rho_1 v + \rho_2 u_x) + b_1((\psi(t), u)) + \kappa((\varphi_x + \psi), (v_x + u)) \\ + \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), u_x(s)) ds = (f(\varphi), u) + (g(\psi), v); \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$(\partial_t \eta + \partial_s \eta, \xi)_{\mathcal{M}} = (\psi_t, \xi)_{\mathcal{M}}. \quad (4.29)$$

Para todo  $(v, u, \xi) \in H \times \mathcal{M}$  no sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

Agora, vamos mostrar o resultado que garante que o sistema (4.11) – (4.17) é bem posto, de acordo com a definição (4.1).

**Teorema 3** *Seja (h1) – (h2) e (f1) – (g2) verdades então, dado qualquer  $T > 0$ :*

- (i) *O problema (4.11) – (4.17) possui uma solução fraca  $\{\varphi, \psi, \varphi_t, \eta\} \in C(I; \mathcal{H})$ , com dado inicial  $\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, \eta^0\} \in \mathcal{H}$ , satisfazendo a condição*

$$\begin{aligned} \varphi \in L^\infty(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)); \quad \psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)); \\ \varphi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad \eta \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}); \end{aligned} \quad (4.30)$$

- (ii) *Sejam  $z_i = \{\varphi_i, \psi_i, \varphi_{t,i}, \eta_i\}$  duas soluções para o problema (4.11) – (4.17) correspondentes aos dados iniciais  $z_{0,i} = \{\varphi_i^0, \psi_i^0, \varphi_i^1, \eta_i^0\}$  para  $i = 1, 2$ . Então, vale a seguinte estimativa*

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}} \leq e^{ct} \|z_{0,1} - z_{0,2}\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.31)$$

para alguma constante  $C > 0$ . Em particular, o problema (4.11) – (4.17) tem uma única solução.

**Prova:**

**Problema aproximado**

A existência de soluções será feita usando o método de Faedo-Galerkin. A demonstração segue os argumentos contidos em [12], [41] and [51]. Primeiro construiremos uma base adequada para as soluções aproximadas. De fato, seja  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma base para  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ , tal base existe pelo fato de  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  ser um espaço de Hilbert separável, aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  ortonormal em  $V$ . Para resolvermos este problema precisamos de uma outras base para  $H_*^1(0, L)$ , usando os mesmo argumentos prévios encontramos uma base  $\{\widetilde{w}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  que é ortonormal em  $H_*^1(0, L)$ . Definamos

$$V_m = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m];$$

e

$$U_m = [\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_3, \dots, \widetilde{w}_m],$$

os subespaços gerados pelos primeiros  $m$  elementos das bases  $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  e  $\{\widetilde{w}_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  respectivamente. Agora vamos selecionar uma base ortonormal regular  $(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  para o espaço  $\mathcal{M}$ . Para isso seguiremos os passos contidos em [51], tomando vetores funções  $\xi_\nu$  da forma  $(c_i \widehat{w}_j)_{i,j \in \mathbb{N}}$ , onde  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma base ortonormal de  $L_\mu^2(\mathbf{R}^+) \cap C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$  e  $\widehat{w}_j = \frac{\widetilde{w}_j}{\|\widetilde{w}_j\|_{H_*^1(0,L)}}$ . De fato, se  $\xi_\nu = c_p \widehat{w}_j$  e  $\xi_i = c_q \widehat{w}_k$ , então

$$(\xi_\nu, \xi_i)_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \mu(s) c_p(s) c_q(s) ds ((\widehat{w}_j, \widehat{w}_k)) = \delta_{pq} \delta_{jk}. \quad (4.32)$$

onde  $(\xi_\nu, \xi_i)_{\mathcal{M}} = \delta_{\nu,i}$  (Delta de Kronecker). Então,  $(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  é ortonormal em  $\mathcal{M}$  e  $\xi_\nu \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+, H_*^1(0, L))$  para  $\nu \in \mathbb{N}$ . Consideremos para cada  $m \in \mathbb{N}$  o subespaço de dimensão finita

$$Z_m = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m]. \quad (4.33)$$

Agora para cada dado inicial  $\{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, \eta^0\} \in \mathcal{H}$  e uma função  $p_{jm}(t)$  fixa, procuraremos funções da forma

$$\begin{aligned} \varphi_m & : (0, t_m) \longrightarrow V_m \\ t & \longmapsto \varphi_m(t) = \sum_{j=1}^m p_{jm}(t) w_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_m & : (0, t_m) \longrightarrow U_m \\ t & \longmapsto \psi_m(t) = \sum_{j=1}^m p_{jm}(t) \widetilde{w}_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_m^t &: (0, t_m) \longrightarrow Z_m \\ t &\longmapsto \eta_m^t(s) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)\xi_j\end{aligned}$$

que satisfaça o seguinte problema aproximado

$$(\rho_1\varphi_m''(t) - \kappa(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)))_x = f(\varphi_m(t), w_\nu) \quad (4.34)$$

$$(-\rho_2\varphi_{mxx}''(t) - b_1\psi_{mxx}(t) + \kappa(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)) + \eta_m^t)_x = g(\psi_m(t), \tilde{w}_\nu) \quad (4.35)$$

$$(\partial_t\eta_m^t, \xi_\nu)_{\mathcal{M}} + (\partial_s\eta_m^t, \xi_\nu)_{\mathcal{M}} = (\psi_m'(t), \xi_\nu)_{\mathcal{M}} \quad (4.36)$$

onde  $j = 1, 2, \dots, m$ , com dados iniciais

$$\varphi_m(0) = \varphi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^0, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^0 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \quad (4.37)$$

$$\varphi_m'(0) = \varphi_m^1 = \sum_{\nu=1}^m (\varphi^1, w_\nu) w_\nu \longrightarrow \varphi^1 \in H_0^1(0, L) \quad (4.38)$$

$$\psi_m(0) = \psi_m^0 = \sum_{\nu=1}^m (\psi^0, \tilde{w}_\nu) \tilde{w}_\nu \longrightarrow \psi^0 \in H_*^1(0, L). \quad (4.39)$$

$$\eta_m^0 = \eta_m^{0,0} = \sum_{\nu=1}^m (\eta^0, \xi_\nu) \xi_\nu \longrightarrow \eta^0 \in \mathcal{M} \quad (4.40)$$

Como já foi visto nos capítulos anteriores o modelo (4.1) -(4.2) é equivalente ao seguinte modelo

$$\rho_1\varphi_{tt} - \rho_2\varphi_{ttxx} + b\varphi_{xxxx} + \int_0^\infty \mu(s)\varphi_{xxxx}(t-s)ds = f(\varphi). \quad (4.41)$$

Além do mais, podemos transforma o problema (4.41) em um problema autônomo. De fato,

$$\rho_1\varphi_{tt} - \rho_2\varphi_{ttxx} + b_1\varphi_{xxxx} + \int_0^\infty \mu(s)\eta_{xxxx}^t(s)ds = f(\varphi), \quad (4.42)$$

$$\eta_t^t + \eta_s^t = \varphi_t, \quad (4.43)$$

A partir dessas observações podemos verificar que o sistema (4.34) – (4.40) é equivalente a (4.42) – (4.43) na forma aproximada, ou seja, para cada  $m$  temos  $(\varphi_m, \eta_m^t)$ , temos

$$\rho_1(\varphi_m''(t), w_\nu) - \rho_2(\varphi_{mxx}''(t), w_\nu) + b_1((\varphi_{xm}(t), w_{\nu x})) + (\eta_{xm}^t, w_{\nu x})_{\mathcal{M}} = (f(\varphi_m(t)), w_\nu), \quad (4.44)$$

$$(\partial_t\eta_m^t, \xi_\nu)_{\mathcal{M}} + (\partial_s\eta_m^t, \xi_\nu)_{\mathcal{M}} = (\varphi_m'(t), \xi_\nu)_{\mathcal{M}}. \quad (4.45)$$

A fim de resolver este problema, devemos aplicar as soluções aproximadas, obtemos

$$\begin{aligned} \rho_1 \sum_{j=1}^m (p''_{jm}(t) w_j, w_\nu) - \rho_2 \sum_{j=1}^m ((p''_{jm}(t) w_j, w_\nu)) + b_1 \sum_{j=1}^m ((p_{jm}(t) w_{jx}, w_{\nu x})) \\ + \sum_{j=1}^m (g_{jm}(t) \xi_{jx}, w_{\nu x})_{\mathcal{M}} = (f(\varphi_m(t)), w_\nu), \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\sum_{j=1}^m (g'_{jm}(t) \xi_j, \xi_\nu)_{\mathcal{M}} + \sum_{j=1}^m (\partial_s g_{jm}(t) \xi_j, \xi_\nu)_{\mathcal{M}} = \sum_{j=1}^m (p'_{jm}(t) w_j, \xi_\nu)_{\mathcal{M}}. \quad (4.47)$$

Assim, o problema aproximado (4.46) – (4.47) pode ser escrito como,

$$(\rho_1 - \rho_2) p''_{jm}(t) + b_1 \sum_{j=1}^m p_{jm}(t) ((w_{jx}, w_{\nu x})) + \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) (\xi_{jx}, w_{\nu x})_{\mathcal{M}} = \quad (4.48)$$

$$\left( f \left( \sum_{j=1}^m p_{jm}(t) w_j \right), w_\nu \right), \quad (4.49)$$

$$g'_{jm}(t) = \sum_{j=1}^m p'_{jm}(t) (w_j, \xi_\nu)_{\mathcal{M}} - \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) (\partial_s \xi_j, \xi_\nu)_{\mathcal{M}}. \quad (4.50)$$

com as condições iniciais

$$p_{jm}(0) = (\varphi^0, w_j), \quad p'_{jm}(0) = (\varphi^1, w_j), \quad g_{jm}(0) = (\eta^0, \xi_j)_{\mathcal{M}}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.51)$$

além do mais, satisfaz as convergências (4.37) – (4.40).

Contudo, temos um problema de Cauchy para um sistema de Equação Diferencial Ordinária (EDO) não lineares de segunda ordem, em  $(p_{jm}(t), g_{jm}(t))$ , que tem soluções locais  $p_{jm}(t) \in C^1$  e  $g_{jm}(t) \in C$  no intervalo  $(0, t_m)$ , cuja existência de soluções pode ser provada via teoria clássica de EDO's, ver por exemplo [17].

### Estimativas

Multiplicando ambos os lados da equação aproximada (4.34), (4.35) por  $p'_{jm}(t)$  e (4.36) por  $g_{jm}(t)$  e somando em  $j$  de 1 a  $m$  e integrando por partes sobre  $(0, L)$ , obtemos:

$$(\rho_1 \varphi''_m(t) - \kappa (\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)))_x = f(\varphi_m(t), \varphi'_m(t)) \quad (4.52)$$

$$(-\rho_2 \varphi''_{mx}(t) - b_1 \psi_{mxx}(t) + \kappa (\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t)) + \eta_m^t = g(\psi_m(t), \psi'_m(t)) \quad (4.53)$$

$$(\partial_t \eta_m^t, \eta_m^t(s))_{\mathcal{M}} + (\partial_s \eta_m^t, \eta_m^t(s))_{\mathcal{M}} = (\psi'_m(t), \eta_m^t(s))_{\mathcal{M}} \quad (4.54)$$

Vamos obter estimativas que nos permitam estender as soluções locais do intervalo  $[0, t_m]$ , para qual quer  $T$ . Definamos o funcional

$$\begin{aligned} E^m(t) = \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi'_m(t)|^2 + b_1 |\psi_{mxx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''_m(t)|^2 \right. \\ \left. + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 + \|\eta_m^t(s)\|_{\mathcal{M}}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$



Multiplicando as equações (4.52), (4.53) por  $\varphi'_m$ ,  $\psi'_m$  respectivamente e integrando por partes sobre  $(0, L)$ . Em seguida adicionando o resultados, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |\varphi'_m(t)|^2 + b_1 |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''_m(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 \right) \\ & - \mathcal{F}_m(\varphi_m(t)) - \mathcal{G}_m(\psi_m(t)) = - \int_0^\infty \mu(s) (\eta_{xm}^t(s), \psi'_{xm}(s)) ds + \int_0^L f'_m(\varphi_m(t)) \varphi''_m(t) dx. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Multiplicando , (4.54) por  $\eta_m^t(s)$  obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta_m^t(s)\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(s) \partial_s |\eta_{xm}^t(s)|^2 ds = \int_0^\infty \mu(s) (\eta_{xm}^t(s), \psi'_{xm}(s)) ds. \quad (4.57)$$

Agora, somando (4.56) e (4.57), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |\varphi'_m(t)|^2 + b_1 |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''_m(t)|^2 + \right. \\ & \left. \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 + \|\eta_m^t(s)\|_{\mathcal{M}}^2 + 2 \int_0^L F(\varphi_m(t)) dx + 2 \int_0^L G(\psi_m(t)) dx \right) = \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(s) \partial_s |\eta_{xm}^t(s)|^2 ds + \int_0^L f'_m(\varphi_m(t)) \varphi''_m(t) dx. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Em particular, observamos que se integramos por partes o primeiro termo do lado direito de (4.58) em  $s$  e usando as hipóteses (h2), (h4) temos

$$- \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(s) \partial_s |\eta_{xm}^t(s)|^2 ds \leq - \frac{\delta}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_{xm}^t(s)|^2 ds, \quad (4.59)$$

enquanto que usando a desigualdade de Hölder e a condição (f2) para o segundo termo do lado direito temos,

$$\int_0^L f'_m(\varphi_m(t)) \varphi''_m(t) dx \leq C_f \left( \int_0^L |\varphi''_m(t)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.60)$$

Assim usando as estimativas (4.59) e (4.60) em (4.58) temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1^m(t) & \leq - \frac{\delta}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_{xm}^t(s)|^2 ds + C_f \left( \int_0^L |\varphi''_m(t)|^2 dx \right)^{1/2}, \\ & \leq - \frac{\delta}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_{xm}^t(s)|^2 ds + C_f \sqrt{2c} E^m(t)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

além do mais, usando a desigualdade de Young em  $C_f \sqrt{2c} E^m(t)^{1/2}$  e omitindo termos não negativos, obtemos

$$\frac{d}{dt} E_1^m(t) \leq C + \frac{1}{2} E^m(t), \quad (4.62)$$

onde

$$\begin{aligned} E_1^m(t) & = \frac{1}{2} \left( \rho_1 |\varphi'_m(t)|^2 + b_1 |\psi_{mx}(t)|^2 + \kappa |(\varphi_{mx}(t) + \psi_m(t))|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |\varphi''_m(t)|^2 + \rho_2 |\varphi'_{mx}(t)|^2 \right. \\ & \left. + \|\eta_m^t(s)\|_{\mathcal{M}}^2 + 2 \int_0^L F(\varphi_m(t)) dx + 2 \int_0^L G(\psi_m(t)) dx \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Das condições (4.25) e (4.26),

$$\int_0^L F(\varphi_m(t))dx \geq -c_0 \text{ e } \int_0^L G(\psi_m(t))dx \geq -c_0,$$

então, estes resultados garantem

$$E^m(t) \leq E_1^m(t) + 2c_0. \quad (4.64)$$

Consequentemente, após integração de (4.62) no intervalo de 0 a  $t$  e usando a estimativa (4.64) obtemos

$$\begin{aligned} E^m(t) &\leq E_1^m(0) + TC + \frac{1}{2} \int_0^t E^m(s)ds + 2c_0; \\ &= C_0(T) + \frac{1}{2} \int_0^t E^m(s)ds. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Logo, pela desigualdade de Gronwall asseguramos que

$$E^m(t) \leq C_0 e^{\frac{t}{2}}, \text{ para todo } 0 < t < t_m < T, \quad (4.66)$$

com  $m = 1, 2, \dots$ . Portanto, obtemos

$$(\varphi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (4.67)$$

$$(\varphi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (4.68)$$

$$(\psi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V); \quad (4.69)$$

$$(\eta)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V). \quad (4.70)$$

Usando a imersão de  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow V$ , temos

$$(\varphi')_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (4.71)$$

$$(\varphi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)); \quad (4.72)$$

$$(\psi)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)); \quad (4.73)$$

$$(\eta)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{M}). \quad (4.74)$$

Note que

$$L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]';$$

$$L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'$$

e

$$L^\infty(0, T; V) \equiv [L^1(0, T; V)]'.$$

Como resultado, de (4.71) – (4.74) e Teorema de Banach-Alaoglu-bourbaki e resultados de regularização elíptica, existem subsequências  $(\varphi_\mu)$ ,  $(\psi_\mu)$  e  $(\eta_\mu)$  tais que

$$(\varphi')_\mu \xrightarrow{*} \varphi' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, l)) \equiv [L^1(0, T; H_0^1(0, L))]'; \quad (4.75)$$

$$(\varphi)_\mu \xrightarrow{*} \varphi \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H^{-1}(0, L))]'; \quad (4.76)$$

$$(\psi)_\mu \xrightarrow{*} \psi \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)) \equiv [L^1(0, T; H_*^{-1}(0, L))]'; \quad (4.77)$$

$$(\eta)_\mu \xrightarrow{*} \eta \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; \mathcal{M}) \equiv [L^1(0, T; \mathcal{M})]'. \quad (4.78)$$

Portanto, de (4.75) – (4.78), temos

$$\begin{aligned} \varphi &\in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L) \cap H_0^1(0, L)), \quad \varphi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)), \\ \psi &\in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L)), \quad \eta \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Explorando uma bem conhecida propriedade de imersão (cf. Lema 1.2, em [40] e Lema 8.1 em [41]), temos que

$$\begin{aligned} \varphi &\in C(0, T; H_0^1(0, L) \cap H_0^1(0, L)), \quad \varphi_t \in C(0, T; H_0^1(0, L)), \\ \psi &\in C(0, T; H_*^1(0, L)), \quad \eta \in C(0, T; \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (4.80)$$

### Unicidade e dependência contínua

Vamos considerar  $z_1 = \{\varphi, \psi, \varphi_t, \eta\}$  e  $z_2 = \{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\eta}\}$  duas soluções para o problema (4.11) – (4.17) com dados iniciais  $z_{0,1} = \{\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, \eta^0\}$  e  $z_{0,2} = \{\tilde{\varphi}^0, \tilde{\psi}^0, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\eta}^0\}$ . Definamos  $u := \varphi - \tilde{\varphi}$ ,  $v := \psi - \tilde{\psi}$  e  $\zeta = \eta - \tilde{\eta}$ , então a função  $z = \{u, v, u_t, \zeta\}$  é solução do problema

$$\rho_1 u_{tt} - \kappa(u_x + v)_x = f(\varphi) - f(\tilde{\varphi}), \quad (4.81)$$

$$-\rho_2 u_{ttx} - b_1 v_{xx} + \kappa(u_x + v) - \int_0^\infty \mu(s) \zeta_{xx}^t(s) ds = g(\psi) - g(\tilde{\psi}), \quad (4.82)$$

$$\zeta_t^t + \zeta_s^t = v_t, \quad (4.83)$$

com condições iniciais

$$z(0) = \{\varphi^0 - \tilde{\varphi}^0; \psi^0 - \tilde{\psi}^0; \varphi^1 - \tilde{\varphi}^1; \zeta^0 - \tilde{\zeta}^0\}. \quad (4.84)$$

Multiplicando a equação (4.81) por  $u_t$ , (4.82) por  $v_t$  e (4.83) por  $\zeta$ , integrando por partes em  $(0, L)$  e adicionando as expressões resultantes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \rho_1 |u_t(t)|^2 + b_1 |v_x(t)|^2 + \rho_2 |u_{xt}(t)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |u_{tt}(t)|^2 + \kappa |u_x(t) + v(t)|^2 + \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \right) = \\ -(\zeta_s^t, \zeta)_{\mathcal{M}} + (f(\varphi(t)) - f(\tilde{\varphi}(t)), u_t(t)) + (g(\psi(t)) - g(\tilde{\psi}(t)), v_t(t)) + \\ (f_t(\varphi(t)) - f_t(\tilde{\varphi}(t)), u_{tt}(t)). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Vamos estimar de forma conveniente os termos do lado direito da igualdade acima. Com respeito aos três últimos termos,  $f$  e  $g$  são funções Lipschitz, em particular usando desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |(f(\varphi(t)) - f(\tilde{\varphi}(t)), u_t(t))| &\leq \int_0^L |f(\varphi(t)) - f(\tilde{\varphi}(t))| |u_t(t)| dx; \\ &\leq c_f \int_0^L |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| |u_t(t)| dx; \\ &\leq c_f \int_0^L |u(t)| |u_t(t)| dx, \end{aligned}$$

para qualquer constante  $c_f > 0$ . Portanto, pelas desigualdades de Young e Poincaré, temos

$$\begin{aligned} |(f(\varphi(t)) - f(\tilde{\varphi}(t)), u_t(t))| &\leq \frac{c_f}{2\lambda} |u_x(t)|^2 + \frac{|u_t(t)|^2}{2}, \\ &\leq \bar{c} \left( |u_x(t) + v(t)|^2 + |v_x(t)|^2 \right) + \frac{|u_t(t)|^2}{2}; \end{aligned} \quad (4.86)$$

para qualquer constante  $\bar{c} > 0$ .

Da mesma forma com (4.86) temos a estimativa para

$$\left| \left( g(\psi(t)) - g(\tilde{\psi}(t)), v_t(t) \right) \right| \leq \frac{c_g}{2\lambda} |v_x(t)|^2 + \frac{|v_t(t)|^2}{2}. \quad (4.87)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |(f_t(\varphi(t)) - f_t(\tilde{\varphi}(t)), u_{tt}(t))| &\leq c_p |u_x(t)|^2 + \frac{c |u_{tt}(t)|^2}{2}, \\ &\leq c \left( |u_x(t) + v(t)|^2 + |v_x(t)|^2 \right) + c \frac{|u_{tt}(t)|^2}{2}; \end{aligned} \quad (4.88)$$

Além do que, das hipóteses (h1) – (h5) e como  $\zeta \in L^\infty(0, T, \mathcal{M})$  com  $\zeta^t(0) = 0$ , resulta

$$\begin{aligned} -(\zeta_s^t, \zeta^t)_{\mathcal{M}} &= - \int_0^\infty \mu(s) (\zeta_x^t(s), \zeta_x^t(s)) ds; \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) |\zeta_x^t(s)|^2 ds; \\ &\leq -\frac{\delta}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\zeta_x^t(s)|^2 ds; \\ &\leq \frac{\delta}{2} \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Substituindo as estimativas (4.86) – (4.89) em (4.85) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \rho_1 |u_t(t)|^2 + b_1 |v_x(t)|^2 + \rho_2 |u_{xt}(t)|^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{\kappa} |u_{tt}(t)|^2 + \kappa |u_x(t) + v(t)|^2 + \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \right\} \leq \\ c^2 \left\{ |u_t(t)|^2 + |v_x(t)|^2 + |u_{xt}(t)|^2 + |u_{tt}(t)|^2 + |u_x(t) + v(t)|^2 + \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \right\} + \frac{|v_t(t)|^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.90)$$

apara qualquer constante  $c > 0$ . Observe que  $z = \{u, v, u_t, \zeta\} = z_1 - z_2$ , portanto podemos rescrever (4.90) como

$$\frac{d}{dt}w(t) \leq cw(t) + h_v(t). \quad (4.91)$$

onde  $w(t) = \|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2$  e  $h_v(t) = \frac{|v_t(t)|^2}{2}$ . Sem perda de generalidade, podemos definir uma função  $\tilde{f}(t, w(t))$  tal que é Lipschitz na segunda variável. Então, temos

$$\frac{d}{dt}w(t) \leq \tilde{f}(t, w(t)). \quad (4.92)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (4.92) temos

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq e^{Kt} \|z_{0,1}(t) - z_{0,2}(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.93)$$

Isto mostra a condição (4.31) e a dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais em  $\mathcal{H}$ . Além do mais, temos a unicidade de soluções. ■

## 4.4 Comportamento assintótico

Nesta seção vamos mostrar que a energia associada ao sistema tem um estimativa uniforme e a existência de um conjunto absorvente para as soluções do problema. Para alcançarmos este objetivo, usamos o método da energia combinado com a escolha de um funcional de Lyapunov adequado.

**Proposição 4.1** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t, \eta\}$  solução para o sistema (4.11)–(4.17), desde modo, a energia total é dada por*

$$E(t) = \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^\infty \mu(s) |\eta_x^t|^2 ds dx, \quad (4.94)$$

e satisfaz a seguinte taxa de variação

$$\frac{d}{dt} E_1(t) \leq -\frac{\delta}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds + C_f \sqrt{2c} E(t)^{1/2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.95)$$

**Prova:** A prova segue imediatamente da desigualdade (4.61) quando  $m \rightarrow \infty$ . Portanto, a desigualdade (4.95) é verdadeira, onde

$$E_1(t) = E(t) + 2 \int_0^L F(\varphi(t)) dx + 2 \int_0^L G(\psi(t)) dx.$$

■

A seguir enunciaremos e provaremos lemas auxiliares que serão necessários para provar a estimativa uniforme da energia total. Ao longo de toda prova, usaremos extensivamente as desigualdades de Hölder e Young.

**Lema 4.1** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t, \eta\}$  solução para o sistema (4.11)–(4.17). Então, o funcional*

$$\mathcal{E}(t) := -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx + \frac{\rho_1 b_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s) (\varphi_t, \eta_x^t(s)) ds. \quad (4.96)$$

satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &\leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx - \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_2(\epsilon_1) \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\ &+ C_3(\epsilon_2) \int_0^\infty \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds + C_0 h_\psi(t) + C_1. \end{aligned}$$

**Prova:** Multiplicando a equação (4.12) por  $(\varphi_x + \psi)$ , integrando por partes  $(0, L)$  temos

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L \varphi_{ttx}(\varphi_x + \psi) dx + b_1 \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx + \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), (\varphi_x + \psi)_x) ds \\ + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx = \int_0^L g(\psi)(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Usando a identidade

$$\frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx \right) + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx = -\rho_2 \int_0^L \varphi_{ttx}(\varphi_x + \psi) dx,$$

acontece que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx \right) + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx + b_1 \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx \\ + \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), (\varphi_x + \psi)_x) ds + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx = \int_0^L g(\psi)(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned}$$

isto implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx \right) = -\rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx - \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx - b_1 \int_0^L \psi_x(\varphi_x + \psi)_x dx \\ - \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), (\varphi_x + \psi)_x) ds - \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \int_0^L g(\psi)(\varphi_x + \psi) dx. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Multiplicando a equação por (4.11) por  $\frac{b_1}{\kappa} \psi_x$ , integrando por em  $(0, L)$  temos

$$\frac{\rho_1 b_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + b_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_{xx} dx = \frac{b_1}{\kappa} \int_0^L f(\varphi) \psi_x dx,$$

e usando a identidade

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx = \int_0^L \varphi_t \psi_{tx} dx + \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx.$$

Portanto, resulta

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_1 b_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx \right) = -\frac{\rho_1 b_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx + b_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi_x dx + \frac{b_1}{\kappa} \int_0^L f(\varphi) \psi_x dx. \quad (4.99)$$

Agora, multiplicando a equação (4.11) por  $\frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \eta_x(s) ds$ , usando a identidade

$$\int_0^\infty \mu(s)(\varphi_{tt}, \eta_x^t(s)) ds = \frac{d}{dt} \left( \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, \eta_x^t(s)) ds \right) - \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, (\psi_t - \eta_s^t)_x) ds,$$

e integrando por partes em  $(0, L)$  temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, \eta_x^t(s)) ds \right) - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, \psi_{xt}) ds + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, \eta_{sx}^t(s)) ds \\ - \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), (\varphi_x + \psi)_x) ds = \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), f(\varphi)) ds. \end{aligned}$$

isto implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, \eta_x^t(s)) ds \right) &= -\frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_{tx}, \psi_x) ds - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, \eta_{sx}^t(s)) ds \\ &+ \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), (\varphi_x + \psi)_x) ds + \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), f(\varphi)) ds. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Finalmente, adicionando (4.98), (4.99) e (4.100) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( -\rho_2 \int_0^L \varphi_{tx}(\varphi_x + \psi) dx + \frac{\rho_1 b_1}{\kappa} \int_0^L \varphi_t \psi_x dx + \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\varphi_t, \eta_x^t(s)) ds \right) &= \\ -\rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx - \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \left( \rho_2 + \frac{\rho_1 b_1}{\kappa} + \frac{\rho_1 \mu_0}{\kappa} \right) \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx + \\ \int_0^L g(\psi)(\varphi_x + \psi) dx + \frac{b_1}{\kappa} \int_0^L f(\varphi) \psi_x dx - \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu'(s)(\varphi_{xt}, \eta^t(s)) ds + \\ \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty \mu(s)(\eta_x^t(s), f(\varphi)) ds \end{aligned} \quad (4.101)$$

Vamos examinar em detalhes os termos que aparecem no lado direito da expressão (4.101). Em relação ao terceiro termo usamos a desigualdade de Hölder, obtemos

$$-\left( \rho_2 + \frac{\rho_1 b_1 + \rho_1 \mu_0}{\kappa} \right) \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx \leq \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + C_0 \int_0^L |\psi_t|^2 dx.$$

De (4.79) temos  $\psi \in L^\infty(0, T; H_*^1(0, L))$ , explorando as propriedades da imersão  $H_*^1(0, L) \hookrightarrow V$  resulta  $\psi_t \in L^\infty(0, T; V)$ . Que significa que existe um constante  $k_0$  tal que  $\|\psi_t(t)\|_V \leq k_0$  q.t.p em  $(0, T)$ , além do mais temos  $L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L_{loc}^1(0, T; V)$ .

Vamos considerar o conjunto  $U \subset \mathcal{T}$  tal que,

$$k_0 = \underbrace{\sup}_{u \in U} \|u\|_{\mathcal{T}}.$$

Seja  $\psi_t(t) \in U$  e denote

$$h_\psi(t) = \int_0^L |\psi_t(t)|^2 dx.$$

Assim,

$$\underbrace{\sup}_{\xi \geq 0} \int_\xi^{\xi+1} h_\psi(\xi) dy \leq k_0.$$

Portanto, da desigualdade acima resulta

$$-\left( \rho_2 + \frac{\rho_1 b_1 + \rho_1 \mu_0}{\kappa} \right) \int_0^L \varphi_{tx} \psi_t dx \leq h_\psi(t) C_0 + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx. \quad (4.102)$$



onde  $C_0 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{b}{\kappa}\right)^2 / 2\rho_2$ . Note que  $\left(\rho_2 + \frac{\rho_1 b_1 + \rho_1 \mu_0}{\kappa}\right)$  pode ser reescrita como  $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{b}{\kappa}\right)$ . De fato, pela definição temos que

$$b_1 = b - \int_0^\infty \mu(s) ds = b - \mu_0 \text{ por (h3),}$$

então,

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{(b - \mu_0)}{\kappa} + \frac{\mu_0}{\kappa}\right).$$

e esta expressão  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$  e  $\frac{b}{\kappa}$  são as velocidades de propagação de ondas devido aos descolamento associados a  $\varphi$  e  $\psi$ .

Agora, temos que  $f$  e  $g$  são funções Lipschitz e assumindo que  $g(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \int_0^L g(\psi)(\varphi_x + \psi) dx &\leq \int_0^L |g(\psi)| |\varphi_x + \psi| dx, \\ &\leq c_g \left(\int_0^L |\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \frac{c_g}{2\kappa\lambda} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.103)$$

onde  $\lambda$  é o primeiro autor valor do operador  $-\psi_{xx}$ .

Pelo fato de (f2),

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{\kappa} \int_0^L f(\varphi) \psi_x dx &\leq \frac{b_1}{\kappa} \int_0^L |f(\varphi) \psi_x| dx, \\ &\leq \frac{b_1}{\kappa} \int_0^L (C_f |\varphi| + f(0)) |\psi_x| dx, \\ &\leq \frac{C_f b_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi| |\psi_x| dx + f(0) \int_0^L |\psi_x| dx, \\ &\leq \frac{C_f b_1}{2\kappa\lambda} \epsilon_1 \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \left(\frac{C_f b_1 + \epsilon_1 \kappa \lambda^2}{\epsilon_1 \kappa \lambda^2}\right) \int_0^L |\psi_x| dx + C_1 \end{aligned} \quad (4.104)$$

onde  $C_1 = \frac{L|f(0)|^2}{2}$ .

Para estimar os dois últimos termos do lado direito de (4.101) exploramos as hipóteses (h2), (h5) e (f2), temos

$$-\frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty \mu'(s) (\varphi_{xt}, \eta^t(s)) ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^{s_0} \mu'(s)(\varphi_{xt}, \eta^t(s)) ds + \frac{M\rho_1}{\kappa} \int_{s_0}^{\infty} \mu(s)(\varphi_{xt}, \eta^t(s)) ds; \\
&\leq \frac{\rho_1}{\kappa\mu(s_0)^{1/2}} \int_0^{s_0} \mu(s)^{1/2} |\mu'(s)| |\varphi_{xt} \eta^t(s)| ds \\
&+ \frac{M\rho_1}{\kappa} \int_{s_0}^{\infty} \mu(s)^{1/2} \mu(s)^{1/2} |\varphi_{xt} \eta^t(s)| ds; \\
&\leq \frac{\rho_1 |\varphi_{xt}|}{\kappa\mu(s_0)^{1/2}} \left( \int_0^{s_0} [\mu(s)^{1/2} |\eta_x^t(s)|]^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_0^{s_0} |\mu'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\
&+ \frac{M\rho_1 |\varphi_{xt}|}{\kappa} \left( \int_{s_0}^{\infty} [\mu(s)^{1/2} |\eta_x^t(s)|]^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_{s_0}^{\infty} |\mu(s)^{1/2}|^2 ds \right)^{1/2}; \\
&\leq \frac{\rho_1 |\varphi_{xt}|}{\kappa\mu(s_0)^{1/2}} \left( \int_0^{s_0} |\mu'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_0^{s_0} \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds \right)^{1/2} \\
&+ \frac{M\rho_1 |\varphi_{xt}| \mu_0^{1/2}}{\kappa} \left( \int_{s_0}^{\infty} \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds \right)^{1/2}; \\
&\leq \left( \frac{\rho_1 \delta + \kappa}{2\kappa} \epsilon_2 \right) \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx + \left( \frac{\kappa \delta + \rho_1 M \mu_0}{2\kappa \epsilon_2} \right) \int_0^{\infty} \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds,
\end{aligned} \tag{4.105}$$

onde  $\delta = \int_0^{s_0} |\mu'(s)|^2 ds / \mu(s_0)$ .

De maneira análoga a anterior temos

$$\frac{1}{\kappa} \int_0^{\infty} \mu(s) (\eta_x^t(s), g(\psi)) ds \leq \frac{c_g}{2\lambda\kappa} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\mu_0}{2} \int_0^{\infty} \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds. \tag{4.106}$$

Fazendo uso de (4.102) – (4.105), obtemos de (4.101) a estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &\leq -\left( \frac{\rho_2}{2} - \frac{\rho_1 \delta + \kappa}{2\kappa} \epsilon_2 \right) \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx - \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{C_f b_1}{2\kappa \lambda} \epsilon_1 \right) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_1 \\
&+ \left( \left[ \frac{C_f b_1 + \epsilon_1 \kappa \lambda^2}{\epsilon_1 \kappa \lambda^2} \right] + \frac{c_g}{\lambda \kappa} \right) \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \left( \frac{\kappa \delta + \rho_1 M \mu_0}{2\kappa \epsilon_2} + \frac{\mu_0}{2} \right) \int_0^{\infty} \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$\epsilon_1 < \frac{\kappa^2 \lambda}{C_f b_1}$$

e

$$\epsilon_2 < \frac{\rho_2 \kappa}{\rho_1 \delta + \kappa},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &\leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\varphi_{xt}|^2 dx - \frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_2(\epsilon_1) \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \\
&C_3(\epsilon_2) \int_0^{\infty} \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds + C_1.
\end{aligned}$$

onde  $C_2(\epsilon_1) = \left( \left[ \frac{C_f b_1 + \epsilon_1 \kappa \lambda^2}{\epsilon_1 \kappa \lambda^2} \right] + \frac{c_g}{\lambda \kappa} \right)$  e  $C_3(\epsilon_2) = \left( \frac{\kappa \delta + \rho_1 M \mu_0}{2\kappa \epsilon_2} + \frac{\mu_0}{2} \right)$ . ■

**Lema 4.2** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t, \eta\}$  solução para os sistema (4.11) – (4.17). Então, o funcional*

$$\mathcal{H}(t) := -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx. \quad (4.107)$$

*satisfaz a estimativa*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) \leq -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + C(\epsilon) \mathcal{F}(\varphi).$$

**Prova:** Multiplicando (4.11) por  $-\varphi$  e integrando em  $(0, L)$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) = -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx - \int_0^L f(\varphi) \varphi dx. \quad (4.108)$$

Usando a desigualdade de Young e considerando a seguinte desigualdade

$$\int_0^L |\varphi_x|^2 dx \leq 2 \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{2}{\lambda} \int_0^L |\psi_x|^2 dx, \quad (4.109)$$

temos

$$\kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_x dx \leq \left( \frac{1}{4\epsilon} + 2\epsilon \right) \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{2\epsilon\kappa}{\lambda} \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \quad (4.110)$$

Do último termo da equação (4.108) é estimado como

$$-\int_0^L f(\varphi) \varphi dx \leq \left( \frac{2C_f + 1}{\lambda} \right) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \left( \frac{2C_f + 1}{\lambda^2} \right) \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{L|f(0)|^2}{2}. \quad (4.111)$$

Substituindo na equação (4.108) as estimativas (4.110) e (4.111) obtemos,

$$\frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) \leq -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + C_4(\epsilon) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_5(\epsilon) \int_0^L |\psi_x|^2 dx + C_1.$$

Por outro lado, por (4.109) e usando a hipótese (4.25) temos

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^L |\varphi_t|^2 dx &\geq \frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) - C_4(\epsilon) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - C_5(\epsilon) \int_0^L |\psi_x|^2 dx - C_1, \\ &\geq \frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) - C(\epsilon) \int_0^L |\varphi_x|^2 dx - C_1, \\ &\geq \frac{d}{dt} \left( -\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx \right) - C(\epsilon) \mathcal{F}(\varphi), \end{aligned} \quad (4.112)$$

disto segue o resultado. ■

**Lema 4.3** *Seja  $\{\varphi, \psi, \varphi_t, \eta\}$  solução para (4.11) – (4.17). Então, o funcional*

$$\mathcal{K}(t) := \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx. \quad (4.113)$$

satisfaz a estimativa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t) &\leq -\frac{b_1}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \mathcal{G}(\psi) + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\ &+ \frac{\mu_0 \epsilon_3}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds + C_6(\epsilon_3, \epsilon_4) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_7(\epsilon_4). \end{aligned}$$

**Prova:** Multiplicando a equação (4.12) por  $\psi$  e integrando por partes em  $(0, L)$ , temos

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L \varphi_{tt} \psi_x dx + b_1 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \int_0^\infty \mu(s) (\eta_{xx}^t(s), \psi) ds + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx = \\ \int_0^L g(\psi) \psi dx. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Segue da equação (4.11) que  $\psi_x = \frac{\rho_1}{\kappa} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \frac{f(\varphi)}{\kappa}$ . Então,  $\psi_x$  aplicado a (4.114) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx \right) &= -\frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx - b_1 \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\ &- \int_0^\infty \mu(s) (\eta_x^t(s), \psi_x) ds - \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx + \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} f(\varphi) dx \\ &+ \int_0^L g(\psi) \psi dx. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Agora vamos estimar os termos que aparecem do lado direito da equação (4.114). As contas feitas para obter as estimativas são análogas as feitas nos lemas anteriores, por isso iremos omitir de maneira conveniente algumas passagem. Assim temos

$$- \int_0^\infty \mu(s) (\eta_x^t(s), \psi_x) ds \leq \frac{\mu_0 \epsilon_3}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon_3} \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \quad (4.116)$$

Agora vamos usar a desigualdade de Young e Poicaré e chegamos em

$$- \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx \leq \frac{\kappa}{2b_1 \lambda} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \frac{b_1}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx. \quad (4.117)$$

Para próxima estimativa usamos (f2), assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\kappa} \int_0^L \varphi_{tt} f(\varphi) dx &\leq \left( \frac{\rho_2 (C_f \epsilon_3 + 1)}{2\kappa} \right) \epsilon_4 \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \frac{1}{\epsilon_3 \lambda \epsilon_4} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &+ \frac{1}{\epsilon_3 \lambda^2 \epsilon_4} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{L|f(0)|^2}{2\epsilon_4}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Finalmente, por (4.26) obtemos

$$\int_0^L g(\psi) \psi dx \leq c_1 + \frac{1}{2\epsilon_3} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \mathcal{G}(\psi). \quad (4.119)$$

Usando as estimativas (4.116), (4.117), (4.118) e (4.119) em (4.115) obtemos o resultado esperado,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx \right) \\
& \leq - \left( \frac{b_1}{2} - \left( \frac{\lambda^2 \epsilon_4 + 1}{\lambda^2 \epsilon_4} \right) \frac{1}{\epsilon_3} \right) \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \left( \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} - \left( \frac{\rho_2 (C_f \epsilon_3 + 1)}{2\kappa} \right) \epsilon_4 \right) \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx \\
& + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx + \frac{\mu_0 \epsilon_3}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds + \left( \frac{\kappa}{2b_1 \lambda} + \frac{1}{\epsilon_3 \lambda^2 \epsilon_4} \right) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\
& + \mathcal{G}(\psi) + \frac{L|f(0)|^2}{2\epsilon_4} + c_1. \tag{4.120}
\end{aligned}$$

Agora, iremos escolher constantes

$$\begin{aligned}
\epsilon_3 & < \frac{2(\lambda^2 \epsilon_4 + 1)}{\lambda^2 \epsilon_4 b_1}, \\
& \text{e} \\
\epsilon_4 & < \frac{2\rho_1 \rho_2}{\rho_2 C_f \epsilon_3 + \rho_2},
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \rho_2 \int_0^L \varphi_{tx} \varphi_x dx \right) & \leq - \frac{b_1}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx - \frac{\rho_2 \rho_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_{tt}|^2 dx + \mathcal{G}(\psi) + \rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}|^2 dx \\
& + \frac{\mu_0 \epsilon_3}{2} \int_0^\infty \mu(s) |\eta_x^t(s)|^2 ds + C_6(\epsilon_3, \epsilon_4) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_7(\epsilon_4).
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Para estabelecermos o comportamento assintótico da solução, precisamos definir uma funcional de Lyapunov para que possamos usar os resultados acima. Na verdade, tomemos  $\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_1 > 0$  e usando os lemas 4.1, 4.2, 4.3, definamos  $\mathcal{L}_1(t) = \mathcal{H}(t) + \tilde{\epsilon}\mathcal{K}(t) + \tilde{\epsilon}_1\mathcal{E}(t)$ , podemos escolher,  $\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}_1$  constantes suficientemente pequenas de forma que

$$\left( \frac{\rho_2}{2} - \tilde{\epsilon}\rho_2 \right), \tag{4.121}$$

$$\left( \frac{b_1}{2} - \tilde{\epsilon}_1 C_2(\epsilon_1) \right), \tag{4.122}$$

$$\left( \frac{\kappa}{2} - \tilde{\epsilon} C_6(\epsilon_3, \epsilon_4) \right), \tag{4.123}$$

sejam positivas. Novamente, tomemos  $\gamma > 0$  e definamos  $\mathcal{L}_2(t) = \gamma\mathcal{L}_1(t)$ . Agora, tomemos  $N > 0$  e  $\gamma$  suficientemente pequeno, assim definimos o funcional de Lyapunov  $\mathcal{L}$  como segue

$$\mathcal{L}(t) := NE_1(t) + \mathcal{L}_2(t). \tag{4.124}$$

Agora, estabelecemos a equivalência entre o funcional de Lyapunov e a energia total do sistema de vigas (4.11) – (4.17). Vamos provar precisamente o seguinte resultado

**Lema 4.4** *Seja  $N$  uma constante positiva suficientemente grande, então existiram constantes positivas  $k_1$  e  $k_2$  tal que o funcional (4.124) satisfaça*

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t) + \mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{G}(\psi) + \widehat{c}_0, \quad t \geq 0. \quad (4.125)$$

**Prova:** De fato, considerando o funcional  $\mathcal{L}(t)$  definido acima, segue que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t) - NE(t)| &\leq \gamma(\mathcal{H}(t) + \widetilde{\epsilon}\mathcal{K}(t) + \widetilde{\epsilon}_1\mathcal{E}(t)) + 2 \int_0^L F(\varphi(t))dx + 2 \int_0^L G(\psi(t))dx, \\ &\leq \gamma\rho_1 \int_0^L |\varphi_t\varphi|dx + \gamma\widetilde{\epsilon}\rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}\varphi_x|dx + \gamma\widetilde{\epsilon}\rho_2 \int_0^L |\varphi_{tx}(\varphi_x + \psi)|dx \\ &+ \frac{\gamma\widetilde{\epsilon}_1\rho_1 b_1}{\kappa} \int_0^L |\varphi_t\psi_x|dx + \gamma\widetilde{\epsilon}_1 \frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^\infty |\mu(s)(\varphi_t, \eta_x^t(s))|ds \\ &+ 2 \int_0^L F(\varphi(t))dx + 2 \int_0^L G(\psi(t))dx. \end{aligned}$$

Pela aplicação das desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq cE(t) + \mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{G}(\psi), \quad t \geq 0.$$

Recordando as condições (4.24) – (4.25), podemos concluir que existem constantes  $c_0 > 0$  tais que

$$(N - c)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (c + N)E(t) + \mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{G}(\psi) + \widehat{c}_0 \quad t \geq 0,$$

desde que  $N$  é grande o suficiente, temos

$$k_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_2 E(t) + \mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{G}(\psi) + \widehat{c}_0, \quad (4.126)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são duas constantes positivas dependentes de  $N$ . ■

Agora, estamos em condições de provar o principal resultado desta seção que é a estabilidade assintótica do sistema. O principal resultado da seção é

**Teorema 4** *A energia  $E(t)$  do sistema (4.11) – (4.17) tem uma estimativa uniforme com o tempo  $t$  tendendo ao infinito. Ou seja, existem constantes positivas,  $\omega$  e  $\Lambda$  independentes do dado inicial  $t$  tal que*

$$E(t) \leq \mathcal{J}(M)e^{-\omega t} + \Lambda, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.127)$$

**Prova:** Seguindo dos lemas (4.1) - (4.3) e usando a condições (4.121) - (4.123), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}_2(t) &+ \varpi \int_0^L \left( \rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\varphi_{xt}|^2 + b_1|\psi_x|^2 + \frac{\rho_1\rho_1}{\kappa}|\varphi_{tt}|^2 + \kappa|\varphi_x + \psi|^2 + \int_0^\infty \mu(s)|\eta_x^t(s)|^2 ds \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{G}(\psi) \right) dx; \\ &\leq \left( \frac{\tilde{\epsilon}\mu_0\epsilon_3 + 2\tilde{\epsilon}_1C_3(\epsilon_2) + 2}{2} \right) \int_0^\infty \mu(s)|\eta_x^t(s)|^2 ds + C_7(\epsilon_4) + C_0h_\psi(t) + C_1, \end{aligned} \quad (4.128)$$

onde  $\varpi$  é uma constante positiva.

Tomando  $N$  a ser determinado depois e multiplicando a Lei de dissipação (4.95), e adicionando a (4.128), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_2(t) + NE_1(t)) + \varpi E_1(t) &\leq - \left( \frac{N\delta}{2} - \frac{\tilde{\epsilon}\mu_0\epsilon_3 + 2\tilde{\epsilon}_1C_3(\epsilon_2) + 2}{2} \right) \int_0^\infty \mu(s)|\eta_x^t(s)|^2 ds \\ &\quad + NC_f\sqrt{2c}E(t)^{1/2} + C_7(\epsilon_4) + C_0h_\psi(t) + C_1. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Agora, escolhemos  $N$  de modo que

$$\left( \frac{N\delta}{2} - \frac{\tilde{\epsilon}\mu_0\epsilon_3 + 2\tilde{\epsilon}_1C_3(\epsilon_2) + 2}{2} \right) > 0$$

seja positivo, de onde obtemos

$$N > \frac{\tilde{\epsilon}\mu_0\epsilon_3 + 2\tilde{\epsilon}_1C_3(\epsilon_2) + 2}{\delta}$$

e usando o lema (4.4) na desigualdade (4.129), pela omissão de termos não negativos temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \omega_1\mathcal{L}(t) \leq C_8^{1/2}NC_f\sqrt{2c}\mathcal{L}(t)^{1/2} + C_0h_\psi(t) + C_1 + C_7(\epsilon_4). \quad (4.130)$$

Denotando

$$C_9 = C_8^{1/2}NC_f\sqrt{2c}; \quad C_{10} = C_1 + C_7(\epsilon_4).$$

Do lema 4.4 tomamos  $k_1 = \frac{1}{C_8}$  (note que  $C_9 = C_{10} = 0$  quando  $f \equiv g \equiv 0$ ), de (4.130) obtemos a desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \omega_1\mathcal{L}(t) \leq C_9\mathcal{L}(t)^{1/2} + C_0h_\psi(t) + C_{10}. \quad (4.131)$$

Agora, considerando para cada  $t \geq t_0$ ,  $\omega_1$  satisfazendo  $\omega_1(t - t_0) \geq \omega(t - t_0) - \gamma$  para algum  $\omega > 0, \gamma \geq 0$  e por virtude da generalização do lema de Gronwall, veja por exemplo Lema 2.2 em [16], consequentemente temos

$$\mathcal{L}(t) \leq e^\gamma\mathcal{L}(0)e^{-\omega t} + C_9e^\gamma \int_0^t e^{-\omega(t-s)}\mathcal{L}(s)^{1/2}ds + C_0e^\gamma \int_0^t e^{-\omega(t-s)}h_\psi(s)ds + \frac{C_{10}e^\gamma}{\omega}.$$

Mas, graças a desigualdade dada pelo Lema 2.1 em [16], podemos tomar  $k_0 \geq 0$ , tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\leq Me^{-\omega t} + C_9 e^\gamma \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \mathcal{L}(s)^{1/2} ds + \frac{C_0 e^\gamma}{1 - e^{-\omega}} \sup_{\xi \geq 0} \int_\xi^{\xi+1} h_\psi(s) ds + \frac{C_{10} e^\gamma}{\omega}; \\
&\leq Me^{-\omega t} + C_9 e^\gamma \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \mathcal{L}(s)^{1/2} ds + \frac{C_0 e^\gamma \|h_\psi\|_{\mathcal{J}}^2}{1 - e^{-\omega}} + \frac{C_{10} e^\gamma}{\omega}; \\
&\leq Me^{-\omega t} + C_9 e^\gamma \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \mathcal{L}(s)^{1/2} ds + C\omega^{-1},
\end{aligned} \tag{4.132}$$

onde  $C = \omega \frac{C_0 k_0^2 e^\gamma}{1 - e^{-\omega}} + C_{10} e^\gamma$ .

Finalmente pelo Lema 1 em [26], encontramos constantes  $\omega$ ,  $\Lambda$  e uma função crescente  $\mathcal{J} : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  tal que a seguinte desigualdade é assegurada

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{J}(M) e^{-\omega t} + \Lambda. \tag{4.133}$$

Portanto a prova é completada aplicando mais uma vez (4.126).

■



# Capítulo 5

## Conclusão

Nesta tese foram estudados questões sobre a versão truncada do sistema de Timoshenko. O enfoque dessas questões foram os estudo dos aspectos quantitativos como existência e unicidade de soluções e qualitativos, tal como, controlabilidade nula e estabilidade assintótica das soluções. Nesta tese foram abordados tanto problemas lineares quanto não lineares. Ressaltamos ainda, que neste trabalho ficamos conhecendo um pouco mais sobre o chamado “segundo espectro de frequência” e sua influência no problemas de estabilização e controle de sistemas do tipo Timoshenko.

Estes tópicos são de grande interesse e relevância na matemática despertando importantes problemas. No que diz respeito a estudo do “segundo espectro de frequência” podemos vislumbrar uma série de novas questões sobre controlabilidade e estabilização para soluções da versão truncada do sistema de Timoshenko, muitas das quais são possivelmente complexas e exigem um desenvolvimento significativo.

Vamos mencionar brevemente os temas tratados neste trabalho.

### 5.1 Controlabilidade

No capítulo 1 em um primeiro momento fizemos uma abordagem quantitativa do seguinte sistema:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q \quad (5.1)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) = h(t), \text{ em } Q. \quad (5.2)$$

conhecido como versão truncada do sistema de Timoshenko, ou seja, livre da anomalia não-física conhecida como “segundo espectro”. Para este sistema estudamos o problema de existência e unicidade e dependência contínua das soluções. A principal dificuldade em resolver o problema de existência de soluções, encontra-se no fato de que não é possível colocar o sistema acoplado (5.1) - (5.2) na forma de um problema de Cauchy, e assim usar a teoria de semigrupo para resolver. Para contornar estes problemas usamos o método de Faedo-Galerkin assumindo a hipótese de duas bases distintas, uma que gera o espaço  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$  e outra que gera  $H_*^1(0, L)$ , haja vista, que o nosso problema era com condições de contorno do tipo Dirichlet-Neumann. Assim foi possível definimos duas funções

$$\begin{aligned} \varphi_m & : (0, t_m) \longrightarrow V_m \\ t & \longmapsto \varphi_m(t) = \sum_{\nu=1}^m p_{\nu m}(t)w_{\nu} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_m & : (0, t_m) \longrightarrow U_m \\ t & \longmapsto \psi_m(t) = \sum_{\nu=1}^m p_{\nu m}(t)\tilde{w}_{\nu}. \end{aligned}$$

Logo o problema aproximado se restringiu a encontrar um função do tipo  $p_{\nu m}$  que é solução para o problema de Cauchy do sistema (5.1) - (5.2) desacoplado. O resto da demonstração seguimos usando as técnicas de estimativa de energia.

Na parte qualitativa estudamos a controlabilidade nula(ou exata, pois o sistema é linear) com uma função controle atuando na segunda equação (5.2) com valores em subconjunto do domínio. Para o obtermos o controle usamos o método (H.U.M). A contribuição desse resultado deve ao fato de não usamos a relação entre as velocidades para obtermos a observabilidade, desigualdade fundamental na obtenção do controle.

No capítulo 2 estudamos o seguinte sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q \tag{5.3}$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \alpha \int_0^t M(t, s)\psi_{xx}(s)ds = h(t), \text{ em } Q. \tag{5.4}$$

Os aspectos qualitativos e quantitativos estudados para este problema foram os mesmos do capítulo anterior, a diferença entre os dois problemas se deve ao fato de que o sistema (5.3)-(5.4) a apresentar uma dissipação fraca do tipo memória que torna o sistema não conservativo

na ausência do termo de controle. Este detalhe faz muita diferença na hora de obtermos as estimativas de energia necessária para alcançamos a desigualdade de observabilidade. Para contornamos essa dificuldade usamos técnicas introduzidas e desenvolvidas por Lions em [38]. Com respeito a controlabilidade nula, usamos o método (H.U.M), além de adicionamos hipóteses ao núcleo de memória e exigir que o termo integral que é a convolução do núcleo coma função seja zero para todo  $t \geq T$ . Como isso garantimos que o acúmulo de memória ao longo do tempo não impeça que todo o sistema fique em repouso para todo  $t \geq T$ .

## 5.2 Estabilização

No capítulo 3 estudamos o seguinte sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } Q, \quad (5.5)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) + \alpha(x)g(\psi_t) = 0, \text{ em } Q, \quad (5.6)$$

Para este sistema foi estabelecido resultados quantitativos, tais como existência e unicidades das soluções via método de Faedo-Galerkin, sempre usando as mesmas hipóteses dos capítulos 1 e 2. No que diz respeito a existência de soluções a diferença é que precisamos fazer um estimativa a mais para localizamos a função  $\psi_t$ , uma vez que precisamos garantir a limitação do termo não linear  $g(\psi_t)$ . No contexto da análise qualitativa, estudamos o comportamento assintótico das soluções via método da energia. Foi feito a construção do funcional de Lyapunov, foi mostrado sua equivalência com a energia associada à solução do problema (5.5) - (5.6). Foi usado propriedades de funções convexas para mostramos que a energia tem uma limitação uniforme quando o tempo  $t$  tende ao infinito. A contribuição desse resultado deve se ao fato de que não foi necessário usamos a hipóteses de igualdade entre as velocidades de propagação da ondas do deslocamento para alcançamos o resultado de estabilização.

No capítulo 4 assim como nos capítulos anteriores trabalho com uma variação da versão truncada do sistema de Timoshenko, dessa vez usamos o seguinte problema semilinear

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi)_x = f(\varphi), \text{ em } Q, \quad (5.7)$$

$$-\rho_2 \varphi_{ttx} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi) - \int_0^\infty \beta(s)\psi_{xx}(t-s)ds = g(\psi), \text{ em } Q. \quad (5.8)$$

Inspirados no trabalhos de [27, 28] foi estudado a existência, unicidade e dependência contínua da solução para o sistema (5.7) - (5.8) via método de Faedo-Galerkin, as dificuldades encontradas

em relação a existência de soluções foram as mesma dos problemas apresentados acima. Foi estudado o aspecto qualitativo das soluções do sistema (5.7) - (5.8) via método da energia. Para obtermos as estimativas necessárias a estabilização usamos versões generalizadas da desigualdade de Gronwall produzidas e desenvolvidas por Gatti e Pata em [26, 50], como estas técnicas foi possível obter a seguinte limitação uniforme para energia

$$E(t) \leq \mathcal{J}(M)e^{-\omega t} + \Lambda. \quad (5.9)$$

Foi observado que da desigualdade acima podemos obter a existência de um conjunto absorvente, ou seja, podemos escolher uma constante  $R$ , um tempo  $T$  finito, tal que

$$\|S(t) (\varphi^0, \psi^0, \varphi^1, \eta^0)\|_{\mathcal{H}} \leq R \quad (5.10)$$

para todo  $t \geq T$ . Como consequência qualquer bola em  $\mathcal{H}$  de raio maior que  $\Lambda$  pode ser tomado como conjunto absorvente do semigrupo  $S(t)$  agindo sobre  $\mathcal{H}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] B. A. H, ABBAS, J. THOMAS, *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, J. Sounds Vib. 51(1), 123-137 (1977).
- [2] H. ABRAMOVICH and I. ELISHAKOFF, *Application of the Krein's method for determination of natural frequencies of periodically supported beam based on simplified Bresse-Timoshenko equations*, Acta Mech. 66(1-4),39-59(1987).
- [3] D. S. ALMEIDA JUNIOR, A. J. A RAMOS, *On the nature of dissipative Timoshenko systems at light of the second spectrum of frequency*, ZAMP Journal of Applied Mathematics and Physics, 2017, 68-145.
- [4] D.S. ALMEIDA JUNIOR, A.J.A RAMOS and M. L. SANTOS, *Obsevability inequality for the finite-difference semi-discretization of the 1-d coupled wave equations*, Adv. Comput. Math., **41**, 2015, 105-130.
- [5] D. S. ALMEIDA JUNIOR, A. J. A RAMOS, M. L. SANTOS, L. GUTEMBERG R. M, *Asymptotic behavior of weakly dissipative Bresse-Timoshenko system on influence of the second spectrum of frequency*, Z Angew Math Mech. 2018; 1-14.
- [6] R. A, ANDERSON, *Flexural vibration in uniform beams according to the Timoshenko theory*, J. Appl. Mech. 75, 504-510 (1953).
- [7] F. D. ARARUNA AND E. ZUAZUA, *Controllability of the Kirchhoff system for beams as limit of the Mindlin-Timoshenko system*, SIAM J. Control Optim, vol. 40, pp. 1909-1938, 2008.
- [8] U. BICCARI AND S. MICU, *Null-controllability properties of the wave equation with a second order memory term*, J. arXiv e-prints. 2018, pp. arXiv:1807.03035.

- [9] A. BHASKAR, *Elastic waves in Timoshenko beams: the 'lost' and 'found' of an eigemode*, Proc.R. Soc. 2009, 465-239.
- [10] G. R. BHASHYAM, G. PRATHAP, *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, J. Sound Vib. 1981, 76-407.
- [11] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Differential Partial Equations*, Springer, New York, 2010.
- [12] M.M. CAVALCANTE and V.N DOMINGOS CAVALCANTE, *Introdução as Equações Diferenciais Parciais*, EDUEM, Maringá, 2010.
- [13] M. M. CAVALCANTE, V. N DOMINGOS CAVALCANTE, F. A. F. NASCIMENTO, I. LASIECKA and J. H. RODRIGUES, *Uniforme decay rates for the energy of Timoshenko system with the arbitrary speeds of propagation and localized nonlinear damping*, ZAMP Journal of Applied Mathematics and Physics, 2014, 1189-1206.
- [14] K. T. CHAN, X. Q. WANG, R.M.C. RO, S.R. REID, *Superposed standing waves in a Timoshenko beam*, Proceedings of the Royal Society A, 458, 83-108, 2002.
- [15] F. W. CHAVES-SILVA, X. ZHANG and E. ZUAZUA, *Controllability of Evolution Equations with Memory*, In submission.
- [16] V.V. CHEPYZHOV, V. PATA, M.I. VISHIK, *Averaging of 2D Navier-Stokes equations with singularly oscillating forces*, Nonlinearity 22 (2009) 351 – 370.
- [17] E. A. CODDINGTON and N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Inc., New York, 1995.
- [18] C. M. DARFEMOS, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. 37. (1970) , 297-308.
- [19] R. DATKO, *Uniform asymptotic stability of evolutionary processes in a Banach space*, SIAM J. Math. Anal., vol. 3, p. 428-445, 1972.
- [20] R. DAUTRY, and J.L.LIONS, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Vol.3*, Springer, Paris, 1990.

- [21] L. DJILALI, A. BENAÏSSA and A. BENAÏSSA, *Global existence and energy decay of solutions to a viscoelastic Timoshenko beam system with a nonlinear delay term*, *Applicable Analysis*, 2015, DOI: 10.1080/00036811.2015.1105961.
- [22] I. ELISHAKOFF, *An equation both more consistent and simpler than Bresse-Timoshenko equation*, In: Gilat, R., Banks-Sills, L. (eds.) *Advanced in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, The jacob aboudi volume*, Springer, Berlin. pp. 249-254 (2010).
- [23] I. ELISHAKOFF, J. KAPLUNOV, E. NOLDE, *Celebrating the Centenary of Timoshenko's study of effects of shear deformation and rotary inertia*, *ASME - The American Society of Mechanical Engineers - Applied Mechanics Reviews*. 2015, 67 - 1.
- [24] I. ELISHAKOFF, F. HACHE, N. CHALLANEL, *Critical contrasting of three versions of vibrating Bresse-Timoshenko beam with a crack*, *Int. J. Solids Struct.* 2017, 109-143.
- [25] I. ELISHAKOFF, F. HACHE, N. CHALLANEL, *Variational derivation of governing equations for truncated version of Bresse-Timoshenko beams*, *Journal of Sound and Vibrations*. 2017, Article in press.
- [26] S. GATTI, V. PATA and S. ZELIK, *A Gronwall-type lemma with parameter and dissipative estimates for PDEs*, *Nonlinear Anal.* 70 (2009) 2337-2343.
- [27] C. GIORGI, F.M VEGNI, *Uniform Energy Estimates for a Semilinear Evolution Equation of the Mindlin-Timoshenko Beam with Memory*, *Mathematical and Computer Modelling* 39 (2004) 1005-1021.
- [28] C. GIORGI, J.E MUÑOZ RIVERA and V.PATA, *Global Attractors for a Semilinear Hyperbolic Equation in Viscoelasticity*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 260 (2001) 83-99.
- [29] A. GUESMIA and S. A. MESSAOUDI, *General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping*, *Math. Meth. Appl. Sci.* 2009; 32:21022122.
- [30] K. F. GRAFF, *Wave motion in elastic solids*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- [31] L. F. HO, *Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control*, *SIAM J. Control Optim.* 28(3), 733-748, 1990.

- [32] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and fourier analysis. Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin].* Classics in Mathematics. Springer, Berlin, 2003.
- [33] T.C. HUANG, *The effect the rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniforme beams with simple end conditions*, J. Appl.Mech. 1961, 28, 579 – 584.
- [34] J.E. LAGNESE; G. LEUGERING and J.P.G. SCHMIDT, *Control of planar networks of Timoshenko beams*, SIAM J. Control Optim, **31**, (2000), 780–811.
- [35] J.E. LAGNESE and J.L. LIONS, *Modelling analysis and control of thin plates*, MASSON, 1988.
- [36] I. LASIECKA and D. TATARU, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping*. Differ. Integral Equ. 1993;6:507?533.
- [37] J.L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués: Perturbations*, Tome. 1, Masson, 1988.
- [38] J.L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués: Perturbations*, Tome. 2, Masson, 1988.
- [39] J.L. LIONS, *Exact controllability, stabilization and parturbations for distributed systems*, SIAM Review, **30**, 1988, 1–68.
- [40] J.L. LIONS, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [41] J.L. LIONS and E. MAGENES, *Problèmes aux Limites non Homogènes, Vol. I*, Dunod, Paris, 1968.
- [42] M. LEVINSON, D. W. COOKE, *On the two frequency spectra of Timoshenko beams*, Journal of Sound Vibrations. 1982, 84-319.
- [43] Q. LÜ, X. ZHANG and E. ZUAZUA, *Null Controllability for Wave Equations with Memory*, 2016.
- [44] V. KOMORNIK, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, Département de Mathématique de l' Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.



- [45] L. MAJKUT, *Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 47, 1, pp. 193 – 210, 2009.
- [46] L.A. MEDEIROS, *Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, 1, 1993, 47–61.
- [47] L. MEIROVITCH, *Principles and techniques of vibrations*, int. edn. London, Prentice Hall, 1997.
- [48] S. A. MESSAOUDI and M. I. MUSTAFA, *On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation*. Math Meth Appl Sci. 2009; 32(4):454 – 469.
- [49] V. V. NESTERENKO, *A theory for transverse vibrations of the Timoshenko beam*, J. Appl. Math. Mech. 1993, 57 – 669.
- [50] V. PATA, *Uniforme estimates for Gronwall type*, Journal of Mathematical Analysis Applications, 373 (2011) 264 – 270.
- [51] M.A.J. SILVA, *Estabilidade assintótica para alguns modelos dissipativos de equações de placas*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- [52] A. SOUFYANE, *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. C.R Acad. Sci. 328(8), 731 - 734 (1999).
- [53] M.A. SHUBOV, *Exact controllability of damped Timoshenko*, IMA J. Math. Control Info., 17, 2000, 375–395.
- [54] N. G. STEPHEN, *The second frequency spectrum of Timoshenko beams*, Journal of Sound Vibrations. 1982, 80-578.
- [55] N. G. STEPHEN, *The second frequency spectrum of Timoshenko beams theory - Further assessment*, Journal of Sound Vibrations. 2006, 192-372.
- [56] S.W. TAYLOR, *Boudary control of a Timoshenko beam with variable physical characteristics*, The University of Auckland, Research Report, Nova Zelandia, 1996.
- [57] S. TIMOSHEONKO, *On the correction for the shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Philos. Mag. 6(41/246), 744-746 (1921).

- 
- [58] S. TIMOSHEONKO, *Vibration problems in engineering* 2nd Edition, Van Nostrand Company, 1937.
- [59] R.W, TRAIL-NASH, A.R. COLLAR, *The effects of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams*, Q.J. Mech. Appl. Math. 1953, 6-186.
- [60] W. YOUSSEF, *Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés*. Thèse de doctorat, l' Université Paul Verlaine de Metz, 2009.
- [61] C. ZHANG and X. HU, *Exact Controllability of a Timoshenko beam with dynamical boundary*, J. Math. Kyoto Univ., **47**, 2007, 643–655.
- [62] C. ZHANG and X. HU, *Exact Controllability of a Timoshenko beam with dynamical boundary*, J. Math. Kyoto Univ., **47**, 2007, 643–655.
- [63] E. ZUAZUA, *Exact Controllability for the Semilinear Wave Equation*, J. Math. pures et appl., **69**, 1990, 1–32.
- [64] E. ZUAZUA, *Propagation, observation, and control of Waves Approximated by finite difference Methods*, SIAM Review, **47**, 2005, 197–243.