UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

JOSÉ ROBERTO SILVA DO NASCIMENTO

Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

BELÉM- PA

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

JOSE ROBERTO SILVA DO NASCIMENTO

Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação ampla UFPA - UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior.
Coorientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta.

BELÉM - PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N244e Nascimento, José Roberto Silva do
Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares / José Roberto Silva do Nascimento. — 2019.
70 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Coorientador(a): Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Problema assintoticamente linear. 2. variedade de Nehari. 3. Teoria de gênero.. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

JOSÉ ROBERTO SILVA DO NASCIMENTO

Existência e Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação ampla UFPA - UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática:

Data da defesa: 03/12/2019

Resultado: APROVADO

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior- PPGME/PDM/UFPA - Orientador

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta- Unesp - Coorientador

Amanda Suellen Sena Corrêa Leão

Prof^a. Dra. Amanda Suellen Sena Corrêa Leão-FACMAT/UFPA

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa- UFCG

Prof^a. Dra. Joelma Morbach- PPGME/UFPA

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por dar-me forças para realizar este trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Rodrigues, pelo profissionalismo com que conduziu esta orientação, mostrando-se sempre disposto a esclarecer minhas dúvidas.

À minha família, em especial ao meus pais, José Nascimento e Elizete Freitas, pelos exemplos de honestidade, trabalho e dedicação á família, e pela forma que me conduziram até aqui.

A todo o corpo docente do PDM.

Aos amigos, pelo companheirismo nos bons e maus momentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PDM.

Dedicatória

Aos meus "grandes"amigos e aos meus familiares,

em especial a meu pai, José Delcir do Nascimento

Sempre que te perguntarem se podes fazer um trabalho,

respondas que sim e te ponhas em seguida a aprender como se faz.

F. Roosevelt

Resumo

Neste trabalho investigamos questões sobre existência e multiplicidade de soluções ground state para a seguinte classe de problemas elípticos semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde a não linearidade $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo assintoticamente linear e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$. Essa classe de problemas pode ser dividida em dois casos. Mais especificamente, (P) é um problema ressonante quando

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{|t|} \in \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega)).$$

No caso em que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{|t|} \notin \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega)).$$

dizemos que (P) é não ressonante. O caso ressonante pode ser subdividido em diferentes “graus”de ressonância, ressonância forte e não forte. Nossas hipóteses sobre f nos permitirão lidar de uma só vez com o caso não-ressonante, os casos ressonantes fortes e não-fortes.

Palavras-chave: Problema assintoticamente linear, variedade de Nehari, Teoria de gênero.

Abstract

In this paper, we investigate issues about the presence and multiplicity of ground state solutions for the following class of semilinear elliptical problems:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

where nonlinearity $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is asymptotically linear and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a limited domain, $N \geq 1$. This class of problems can be divided into two cases. More specifically, (P) is a resonant problem when

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{|t|} \in \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega)).$$

In case

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{|t|} \notin \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega)).$$

we say that (P) is no resonate. The resonant case can be subdivided into different degrees of resonance, strong resonance, and not strong. Our assumptions about f will allow us to deal at once with the non-resonant case, the strong and non-strong resonant cases.

Key-words: Asymptotically linear problem, Nehari variety, Genus theory. .

Conteúdo

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar questões de existência e multiplicidade de solução para uma classe de problemas elípticos com não linearidade tendo um comportamento assintoticamente linear no infinito.

Mais precisamente, consideraremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory com

$$\alpha(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{|t|} \;\text{ e }\; \eta(x) := \lim_{|t| \to \infty} \frac{f(x,t)}{|t|}.$$

Na literatura, problemas desse tipo são conhecidos como assintoticamente lineares e podem ser classificados como

(i) ressonantes no infinito se $\eta(x) = \lambda_j$ para algum natural j ;

(ii) não ressonante no infinito quando $\eta(x) \neq \lambda_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

onde λ_j é o j-ésimo autovalor do Laplaciano. O caso ressonante é subdividido dependendo do quão pequeno no infinito é a função

$$g(x,t) = \eta(x)t - f(x,t)$$

obtendo assim diferentes "graus"de ressonância nas seguintes situações:

(a) $g(x,t) \to l_-^+(x)$ para $t \to \pm\infty$ e $(l_-(x), l^+(x)) \neq (0,0)$ $\forall\, x \in \Omega$;

(b) $\lim\limits_{|t|\to\infty} g(x,t) = 0$ e $\lim\limits_{|t|\to\infty} \displaystyle\int_0^t g(x,s)ds = \pm\infty, \ \ \forall x \in \Omega.$

A pior situação é quando,

$$\lim_{|t|\to\infty} g(x,t) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{|t|\to\infty} \int_0^t g(x,s)ds = b(x), \ \ \forall x \in \Omega,$$

com $b(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \Omega$, o qual é chamado de ressonância forte. Um dos primeiros trabalhos a tratar desta situação foi [7] no qual Bartolo, Benti e Fortunato mostram a existência e multiplicidade de soluções para problemas de ressonância forte na presença de alguma simetria na não-linearidade.

Landesman e Lazer em [22] foram os primeiros a considerar problemas de ressonância . Eles encontraram condições suficientes para a existência de soluções para o problema no caso (i) e seus resultados foram estendidos por vários autores (ver [9] e as referências nele contidas). Ahmad, Lazer e Paul em [2] são os primeiros a considerar o problema no caso (ii).

Existem outros trabalhos que tratam do problema (P) para o caso em que a não linearidade não depende da variável x. Por exemplo, no caso não-ressonante com $m = 1$ correspondente ao primeiro autovalor do laplaciano λ_1, Amann e Zehnder, em [3], provaram que o problema (P) tem pelo menos uma solução não trivial. Mais precisamente, Amann e Zehnder investigaram o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

onde, $f \in C^1$, $f(0) = 0$

$$f'(\infty) = \lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{t} \notin \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega))$$

e

$$f'(0) < \lambda_j < f'(\infty) \text{ ou } f'(\infty) < \lambda_j < f'(0)$$

para algum autovalor λ_j. Para resultados de existência, Amann e Zehnder utilizaram duas diferentes abordagem (Teoria de Pontos Críticos e a Teoria de Morse generalizada). Considerando ainda o caso não-ressonante com $m \geq 1$, Ahmad, em [1], provou a existência de pelo menos duas soluções não triviais.

Outros resultados interessantes sobre o mesmo assunto podem ser encontrados em [4], [13], [25] e [30].

No que se refere ao caso ressonante, a existência de solução não trivial foi estudada em [17] por de Figueiredo e Miyagaki e em [24] por Li e Willem.

Resultados de multiplicidade para o problema (P) no caso ressonante também foram investigados em [25] por Li e Willem, [26] por Liu e Zou,[32] por Su e em [33] por Su e Zhao.

Observe ainda o caso em que a não linearidade f não depende da variável x, a condição $(f_2)_m$ do Capítulo 2 nos diz que $\lambda_m < \eta$ onde λ_m é o m-ésimo autovalor do Laplaciano e

$$\eta = \lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{|t|}.$$

Assim, $(f_2)_m$ afirma que para $|t|$ suficientemente grande, $t\lambda_m < f(t)$. Deste modo, o problema (P) neste caso, tem tantas soluções quanto mais funções lineares com inclinações dadas pelos autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, a funcão $f(t)$ intersecta.

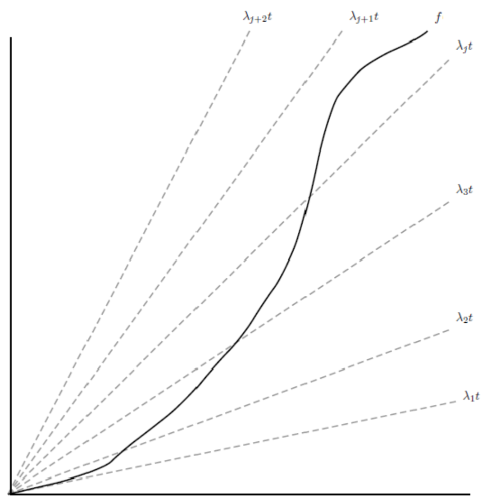

Figura 1: Multiplicidade de solução

Ressaltamos que em todas as referências acima, a não linearidade f é diferenciável (ou mesmo C^1) na segunda variável, sendo essa suposição crucial em todos os argumentos.

Recentemente, Li e Zhou em [23] consideraram o caso particular em que $\alpha(x) = 0$ e $\eta(x) = \eta$ é um número real e f depende apenas de uma variável. Entre outras coisas, os autores provaram que no caso ressonante $\eta = \lambda_{m+1}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, o problema (P) tem pelo menos $1 + \sum_{j=2}^{m} d_j$ pares de soluções não triviais, desde que $f(x, .)$ seja ímpar com respeito à segunda variável e

$$\beta(x) := \lim_{|t|\to\infty} [(1/2)f(x,t)t - F(x,t)] = +\infty \text{ uniformemente em } x \in \Omega, \tag{fF}$$

onde d_j denota a dimensão do j-ésimo autoespaço associado a λ_j e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$. A condição (fF) é uma suposição mais fraca de uma série de condições que melhoram a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz e que apareceu em outros trabalhos, por exemplo, veja condição $(F_2)_+$ em [12].

É importante ressaltar que as hipóteses consideradas em ambos os capítulos deste trabalho mostram que o funcional energia associado ao problema admite uma certa estrutura geométrica que garante a consistência de nossos argumentos.

No Capítulo 1 trataremos o problema utilizando um argumento de minimização para mostrar existência de solução.

Uma das principais ferramentas utilizadas para atacar problemas na teoria das equações diferenciais parciais não lineares é a formulação de um problema variacional equivalente.

Neste capítulo trataremos o problema (P) assumindo que f satisfaz a seguinte hipótese

(F_1) $\alpha(x) := \lim_{t\to 0} \dfrac{2F(x,t)}{t^2} \in L^r(\Omega)$ para algum $r > N/2$ e $\eta(x) := \lim_{|t|\to\infty} \dfrac{2F(x,t)}{t^2} \in L^\infty(\Omega)$ são funções com parte positiva não triviais α^+, η^+;

$(F_2)_m$ $0 < \lambda_m(\alpha) < 1 < \lambda_1(\eta)$, para algum $m \geq 1$, onde $\lambda_m(\theta)$ denota o m-ésimo autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\theta(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Observe que se $\alpha(x) = \alpha$ e $\eta(x) = \eta$ são constantes, $(F_2)_m$ é equivalente a $\eta < \lambda_1 < \lambda_m < \alpha$.

Os principais resultados do Capítulo 1 são:

Teorema 0.1. *Suponha que f seja uma função Carathéodory satisfazendo (F_1). Se $(F_2)_m$ for satisfeita para $m = 1$, o problema (1.1) terá pelo menos uma solução ground state não trivial .*

Teorema 0.2. *Suponha que f seja uma função Carathéodory satisfazendo (F_1). Se f é ímpar (q.t.p em Ω) em relação à segunda variável e $(F_2)_m$ for satisfeita para algum $m \geq 1$, então o problema (P) tem pelo menos $\chi(\alpha)$ pares de soluções não triviais com energia negativa, em que $\chi(\theta) = \sum_{j=1}^{m} dim V_{\lambda_j(\theta)}$ é a soma das dimensões dos primeiros m autoespaços $V_{\lambda_j(\theta)}$ associados a (1.1).*

É importante ressaltar que para obter estes resultados, foi necessário provar um resultado preliminar que é interessante por si só e que implica em uma generalização do Lema de Fatou (ver Proposição 1.1).

No Capítulo 2, explorando a topologia, e a relação entre a variedade de Nehari e a aplicação fibração, iremos discutir a existência e multiplicidade de soluções ground state para o problema (P). O método da aplicação fibração foi introduzido e discutido inicialmente em [10] e [14] relacionando o funcional de Euler Lagrange com uma função real.

O Método da Aplicação Fibração é uma ótima ferramenta para resolução de Problemas Diferenciais Elípticos. Ele é um método variacional e é baseado no Método de Nehari, relacionando a Variedade de Nehari com a Aplicação Fibração. Este método relaciona o funcional associado ao problema com uma função real e como veremos adiante, as informações sobre esta função (como pontos de máximo, pontos de mínimo, intervalos de crescimento, intervalos de decrescimento,etc) nos ajudarão a fornecer uma demonstração da existência de solução .

Neste capítulo assumiremos que f satisfaz as seguintes hipóteses

(f_1) a aplicação $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{|t|}$ é crescente q.t.p. em Ω, $\alpha(x) := \lim_{t \to 0} f(x,t)/|t| \geq 0$ e $\eta(x) := \lim_{|t| \to \infty} f(x,t)/|t|$ são funções em $L^\infty(\Omega)$;

$(f_2)_m$ $\lambda_m(\eta) < 1 < \lambda_1(\alpha)$, para algum $m \geq 1$, onde $\lambda_m(\theta)$ denota o m-ésimo autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\theta(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Observe que para $\alpha(x) = \alpha$ e $\eta(x) = \eta$ constantes, $(f_2)_m$ é equivalente a $\alpha < \lambda_1 < \lambda_m < \eta$.

Os principais resultados deste capítulo 2 são:

Teorema 0.3. *Suponha que f satisfaz $(f_1) - (f_2)_m$ e*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \beta(x) > \frac{|\eta|_\infty \tau^2}{2\lambda_1(\eta - \alpha)S(\Omega)^{N/2}}, \tag{β}$$

onde τ é definido na Proposição 2.2(A_1). Então, existe uma solução ground-state (no nível de passo da montanha) para o problema (3).

Teorema 0.4. *Suponha que $f(x, \cdot)$ seja ímpar q.t.p. em Ω, satisfazendo $(f_1) - (f_2)_m$ e*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \beta(x) > \frac{|\eta|_\infty \tau_m^2}{2\lambda_1(\eta - \alpha)S(\Omega)^{N/2}}, \tag{β_m}$$

onde τ_m é definida em (2.45). Então, o problema (3) tem pelo menos s_m pares de soluções não triviais, onde $s_m = 1 + \sum_{j=2}^{m} d_j$ é a soma das dimensões d_j dos m primeiros autoespaços V_j associados a $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Nossa abordagem é baseada no método Nehari, que consiste em minimizar o funcional I sobre a chamada Variedade de Nehari $\mathcal{N}$, um conjunto que contém todas as soluções não triviais do problema. O método de Nehari consiste em minimizar um funcional I sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}$, em outras palavras, obter $u \in \mathcal{N}$ tal que

$$I(u) = \inf_{\mathcal{N}} I.$$

Posteriormente, deve-se mostrar que o ponto de mínimo de I na variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é um ponto de crítico de I em todo o espaço. Note que este método caracteriza o ponto crítico u de I como ponto crítico ground state. Quando este ponto crítico de I é solução de um problema elíptico, então diz-se que esta solução é do tipo ground state.

Zeev Nehari, matemático Israelense (1915-1978), introduziu esse método através de dois artigos [28] e [27]. Nesses artigos, Nehari considerou uma EDO de segunda ordem em um intervalo (a, b) e mostrou existência de solução não trivial minimizando um funcional I de classe C^2 associado ao problema em $\mathcal{N}$. Após a minimização, Nehari usou o Teorema da Função Implícita e mostrou que o ponto de mínimo de I na variedade de Nehari era ponto crítico de I em todo o espaço.

Em [27], Nehari mostrou existência de solução com um determinado número de nós em (a, b). Desde essa época, este eficiente método vem sendo largamente aplicado, ficando quase impossível citar aqui todos os autores que difundiram o método. Além disso, a partir deste método, outros métodos foram criados, como, por exemplo, o método de Fibração introduzido por Pohozaev [14].

Em 2010, num celebrado livro [34], Szulkin e Weth apresentaram um resultado abstrato, o qual era uma prova unificada do Método de Nehari para alguns problemas cujo funcionais eram apenas de classe C^1 e tinham mínimo local em 0. Esses autores deram vários exemplos de problemas onde este método podia ser aplicado e ainda mostraram resultados de multiplicidade e uma generalização do método de Nehari para problemas onde 0 é um ponto de sela do funcional associado

Embora este método tenha sido cuidadosamente tratado por Szulkin e Weth em [34] para o caso das não-linearidades que satisfazem as condições de superquadraticidade no infinito, não é uma tarefa trivial usá-lo para tratar problemas assintoticamente lineares.

Apenas para citar as principais dificuldades para aplicar o método da variedade de Nehari a problemas envolvendo não-linearidades assintoticamente lineares, vamos descrevê-lo aqui de uma maneira muito superficial. Grosso modo, o método consiste em provar a existência de um homeomorfismo m entre $\mathcal{N}$ e uma subvariedade $\mathcal{M}$ de $H_0^1(\Omega)$. Apesar da ausência de uma estrutura diferenciável em $\mathcal{N}$, tal homeomorfismo nos permite definir um funcional Ψ em $\mathcal{M}$ de classe C^1, com propriedades muito úteis. Por exemplo, se u é um ponto crítico de Ψ, então $m(u)$ é um ponto crítico não trivial de I e se (u_n) for uma sequência $(PS)_c$ para Ψ, então, $(m(u_n))$ é uma sequência $(PS)_c$ para I.

Diferente do caso no qual as não-linearidades satisfazem condições de superquadraticidade no infinito, em que $\mathcal{M}$ é a esfera unitária $\mathcal{S}$ de $H_0^1(\Omega)$, não está claro exatamente como é $\mathcal{M}$ no nosso caso. Depois de um estudo cuidadoso, provamos que $\mathcal{M} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, onde $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} := \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ é uma subvariedade não completa de $H_0^1(\Omega)$ com

$$\mathcal{A} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|^2 < \int_\Omega \eta(x) u^2 dx \right\}.$$

Esse fato traz problemas adicionais. De fato, é importante assegurar que as sequências minimizantes (u_n) para Ψ não estejam perto da fronteira de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Em [34], este passo é fortemente baseado no fato de que f tem um crescimento superquadrático no infinito, o que implica que $\{\Psi(u_n)\}$ tende a infinito quando a distância de (u_n) para a fronteira tende a zero. No nosso caso, o comportamento de $\{\Psi(u_n)\}$ no infinito, como $dist(u_n, \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}) \to 0$, é indefinido. Este fato dificulta, por exemplo, saber como estender o Ψ para $\overline{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ para aplicar o Princípio Variacional de Ekeland, que é crucial para provar que (u_n) pode ser visto como uma sequência Palais-Smale.

A fim de responder a estas questões fundamentais, nós fornecemos um resultado técnico muito útil que acreditamos ser importante por si só. Finalmente, também é uma tarefa delicada provar que Ψ satisfaz a condição $(PS)_c$ sob condições (β) e (β_m) (veja Proposição 2.5).

Devemos destacar que as hipótese consideradas no Capítulo 2 para a não linearidade f é consistente. Uma vez que estamos utilizando as idéias do método de nehari, não podemos impor sobre f uma condição que possua uma configuração parecida com àquela considerada no Capítulo 1.

Neste trabalho, alguns progressos são obtidos em relação aos trabalhos anteriores. A seguir, enumeramos as principais contribuições: (1) Para obter nossos principais resultados no caso ressonante, não estamos exigindo a condição (fF). Em vez disso, usamos as condições (β) ou (β_m), que são mais fracas que (fF); (2) Como β depende de x, nossas premissas são mais gerais do que a maioria daqueles nos artigos anteriores, que geralmente exigem que β seja constante ou infinito. Tal restrição em alguns trabalhos anteriores se deve principalmente à hipótese (fF); (3) Fornecemos uma abordagem unificada para lidar de uma só vez com o caso não-ressonante, os casos ressonantes fortes e não-fortes.

Capítulo 1

O caso $0 < \lambda_m(\alpha) < 1 < \lambda_1(\eta)$

Neste capítulo estamos interessados em estudar a existência e multiplicidade de soluções não triviais para o seguinte problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory satisfazendo as seguintes condições:

(F_1) $\alpha(x) := \lim_{t \to 0} \dfrac{2F(x,t)}{t^2} \in L^r(\Omega)$ para algum $r > N/2$ e $\eta(x) := \lim_{|t| \to \infty} \dfrac{2F(x,t)}{t^2} \in L^\infty(\Omega)$ são funções com parte positiva não triviais α^+, η^+;

$(F_2)_m$ $0 < \lambda_m(\alpha) < 1 < \lambda_1(\eta)$, para algum $m \geq 1$, onde $\lambda_m(\theta)$ denota o m-ésimo autovalor associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\theta(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

que existe se, por exemplo, θ satisfaz (f_1), (consulte [16]). Além disso, definimos $\lambda_1(\alpha) = \infty$ se $\alpha = 0$. Denotaremos por λ_j um autovalor associado à (1.1) para $\theta = 1$.

Trataremos o problema utilizando um argumento de minimização para mostrar existência de solução.

1.1 Resultados Auxiliares

Nesta seção estabeleceremos alguns conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento deste capítulo.

Denotemos por $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (P), dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$. Em particular, $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

O resultado à seguir é uma interessante generalização do lema de Fatou.

Proposição 1.1. *Seja (u_n) uma seqüência de funções mensurável $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Então,*

(i)

$$\chi_{\left[\liminf\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0\right]}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \chi_{[u_n\neq 0]}(x) \ \text{ em } \Omega;$$

(ii) Se $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, então

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[u_n\neq 0]}(x) = \chi_{[u\neq 0]}(x) \ \text{ q.t.p em } [u \neq 0];$$

(iii) Seja (v_n) uma sequência de funções mensuráveis não negativas $v_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Então

$$\int_{\left[\liminf\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0\right]} \left[\liminf_{n\to\infty} v_n(x)\right] dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{[u_n\neq 0]} v_n(x)dx.$$

Em particular,

$$\left|\left[\liminf_{n\to\infty} u_n \neq 0\right]\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |[u_n \neq 0]|. \tag{1.2}$$

Demonstração

(i) Como $[w \neq 0] = [|w| \neq 0]$ para toda função mensuráveis w, é suficiente provar que

$$\chi_{\left[|\liminf\limits_{n\to\infty} u_n| \neq 0\right]}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \chi_{[|u_n|\neq 0]}(x).$$

Para isto, defina $u := \liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ e $g : \Omega \to \{0,1\}$ por

$$g(x) = \liminf_{n\to\infty} \chi_{[|u_n|\neq 0]}(x).$$

Se $g \equiv 1$, não há nada a ser provado. Caso contrário, é suficiente provar que se $g(x) = 0$, então $\chi_{[|u|\neq 0]}(x) = 0$. De fato, observe que se $g(x) = 0$ então existe uma subsequência u_{n_k} onde $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ depende de x, tal que

$$\chi_{[|u_{n_k}|\neq 0]}(x) = 0, \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Equivalentemente,

$$|u_{n_k}(x)| = 0, \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Passando o limite inferior para $k \to \infty$, obtemos

$$0 \leq |u(x)| = \liminf_{n\to\infty} |u_n(x)| \leq \liminf_{k\to\infty} |u_{n_k}(x)| = 0,$$

ou ainda

$$\chi_{[|u|\neq 0]}(x) = 0.$$

(ii) Pelo item anterior, basta provar que

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{[u_n\neq 0]}(x) \leq \chi_{[u\neq 0]}(x) \text{ q.t.p. em } [u \neq 0].$$

De fato, existe um conjunto $\hat{\Omega} \subset \Omega$ com medida nula, tal que

$$u_n(x) \to u(x), \ \forall\ x \in \Omega\backslash\hat{\Omega}.$$

Assim, para cada $x \in (\Omega\backslash\hat{\Omega}) \cap [u \neq 0]$,existe $n(x)$ tal que se $n \geq n(x)$ então $u_n(x) \neq 0$, ou equivalentemente, $\chi_{[u_n \neq 0]}(x) = 1$ para todo $n \geq n(x)$. Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \chi_{[u_n\neq 0]}(x) = 1 = \chi_{[u\neq 0]}(x), \ \forall\ x \in (\Omega \backslash \hat{\Omega}) \cap [u \neq 0].$$

(iii) Denote $v := \liminf\limits_{n\to\infty} v_n$. Segue do item (ii) e das propriedades de limite inferior que

$$v(x)\chi_{[u\neq 0]}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \left[v_n(x)\chi_{[u_n\neq 0]}(x)\right] \ \text{ a.e. em } \Omega.$$

Integrando a última desigualdade e usando o clássico Lema de Fatou, segue o resultado. Para concluir (1.2), escolha $v_n = v = 1$.

■

Lema 1.1. *Suponha que f seja uma função Carathéodory satisfazendo (F_1) e $(F_2)_1$. Então o funcional I é coercivo.*

Demonstração

Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência com $\|u_n\| \to \infty$. Se $v_n := u_n/\|u_n\|$, então

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2} - \int_\Omega \left[\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}\right] dx.$$

Note que, a menos de subsequencia,

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega), \tag{1.3}$$

e

$$\chi_{[v_n\neq 0]}(x) \to \chi_{[v\neq 0]}(x) \text{ q.t.p em } [v \neq 0],$$

Observe agora que

$$\int_\Omega \left[\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}\right] dx = \int_{[v\neq 0]} \left[\frac{F(x,\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2 v_n^2}\right] v_n^2\chi_{[v_n\neq 0]}(x)dx + \int_{[v=0]} \left[\frac{F(x,\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2 v_n^2}\right] v_n^2\chi_{[v_n\neq 0]}(x)dx,$$

Deste modo, por (F_1) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{[v=0]} \left[\frac{F(x,\|u_n\|v_n)}{\|u_n\|^2 v_n^2}\right] v_n^2\chi_{[v_n\neq 0]}(x)dx \to 0$$

Por outro lado, por (F_1), da Proposição 1.1 (ii) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_{[v\neq 0]} \left[\frac{F(x, \|u_n\| v_n)}{\|u_n\|^2 v_n^2} \right] v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]}(x) dx \to \frac{1}{2} \int_{[v\neq 0]} \eta(x) v^2 dx.$$

Deste modo, concluímos que

$$\int_\Omega \left[\frac{F(x, u_n)}{\|u_n\|^2} \right] dx \to \frac{1}{2} \int_\Omega \eta(x) v^2 dx.$$

Portanto, pela desigualdade de Poincaré (ver Proposição 1.10 em [16])

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} \to \frac{1}{2} \left(1 - \int_\Omega \eta(x) v^2 dx \right) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1(\eta)} \|v\|^2 \right).$$

Finalmente, da convergência (1.3) e a semicontinuidade inferior fraca da norma implica que $\|v\| \leq 1$. Consequentemente,

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} \to \frac{1}{2} \left(1 - \int_\Omega \eta(x) v^2 dx \right) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1(\eta)} \right) > 0,$$

onde a última desigualdade vem de $(F_2)_1$. Isso prova que I é coercivo.

■

1.2 Existência de Solução

Nesta seção iremos mostrar a existência de pelo menos uma solução não trivial para o problema (P).

Teorema 1.1. *Suponha que f seja uma função Carathéodory satisfazendo (F_1). Se $(F_2)_m$ for satisfeita para $m = 1$, o problema (P) terá pelo menos uma solução ground state não trivial.*

Demonstração

Pelo Lema 1.1 segue que o funcional I é coercivo. Além disso, como f é Caratheódory, temos que I é fracamente semicontínuo inferiormente. Deste modo, pelo Teorema B.2, I

é limitado inferiormente e possui um ponto de mínimo $u_* \in H_0^1(\Omega)$ que é uma solução ground state não trivial de (P). De fato, se e_1 é a autofunção normalizada associada a $\lambda_1(\alpha)$ em $H_0^1(\Omega)$, que existe pelo Teorema 1.13 em [16], então

$$I(te_1) = \frac{1}{2} - \int_\Omega \left[\frac{F(x,te_1)}{(te_1)^2}\right] e_1^2 dx, \ \forall\, t > 0.$$

Segue de $(F_1) - (F_2)_1$ e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{I(te_1)}{t^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \int_\Omega \alpha(x)e_1^2 dx\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\lambda_1(\alpha)}\right] < 0. \tag{1.4}$$

Mostrando que existe $\varepsilon, t_* > 0$ pequeno o suficiente para que

$$I(u_*) \leq I(te_1) \leq -\varepsilon t_*^2.$$

$\blacksquare$

1.3 Multiplicidade de Soluções

Teorema 1.2. *Suponha que f seja uma função Carathéodory satisfazendo (F_1). Se f é ímpar (q.t.p em Ω) em relação à segunda variável e $(F_2)_m$ for satisfeita para algum $m \geq 1$, então o problema (P) tem pelo menos $\chi(\alpha)$ pares de soluções não triviais com energia negativa, onde $\chi(\theta) = \sum_{j=1}^m dim V_{\lambda_j(\theta)}$ é a soma das dimensões dos primeiros m autoespaços $V_{\lambda_j(\theta)}$ associados a (1.1)*

Demonstração

Seja $\mathcal{S}_\chi$ a (esfera unitária) de $V_{\lambda_{1(\alpha)}} \oplus V_{\lambda_{2(\alpha)}} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_{m(\alpha)}}$, $\chi(\alpha)$-dimensional. Observe que para cada $u \in \mathcal{S}_\chi$ e $t > 0$,

$$\frac{I(tu)}{t^2} = \frac{1}{2} - \int_{[u\neq 0]} \left[\frac{F(x,tu)}{(tu)^2}\right] u^2 dx.$$

Segue de (F_1) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{I(tu)}{t^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \int_\Omega \alpha(x)u^2 dx\right]. \tag{1.5}$$

Considerando que u pode ser escrito como

$$u = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{dimV_{\lambda_i(\alpha)}} u_{ij} e_{ij},$$

onde $dimV_{\lambda_i(\alpha)}$ significa a dimensão do autoespaço $V_{\lambda_i(\alpha)}$ e as autofunções $\{e_{ij}\} \subset \oplus_{k=1}^{m} V_{\lambda_k(\alpha)}$ formam uma base ortonormal. Deste modo, concluímos que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{I(tu)}{t^2} = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{dimV_{\lambda_i(\alpha)}} u_{ij}^2 \int_{\Omega} \alpha(x) e_{ij}^2 dx\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{dimV_{\lambda_i(\alpha)}} \frac{u_{ij}^2}{\lambda_i(\alpha)}\right]. \quad (1.6)$$

Como $\lambda_i(\alpha) \leq \lambda_m(\alpha)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $u \in \mathcal{S}_\chi$,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{I(tu)}{t^2} \leq \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\lambda_m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{dimV_{\lambda_i(\alpha)}} u_{ij}^2\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\lambda_m(\alpha)}\right] < 0, \quad (1.7)$$

onde a última desigualdade vem de $(F_2)_m$. Portanto, existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$I(tu) = (I(tu)/t^2)t^2 \leq -\varepsilon t^2,$$

para todo $0 < t < \delta$ e $u \in \mathcal{S}_\chi$. Fixando $0 < t_* < \delta$, temos

$$\sup_{w \in t_* \mathcal{S}_\chi} I(w) < 0.$$

Como I é coercivo (ver Lema 1.1), segue que I satisfaz a condição $(PS)_c$. Finalmente, como I é funcional C^1 e $I(0) = 0$, segue-se do Teorema 9.1 em [29], que I possui pelo menos $\chi(\alpha)$ pares de pontos críticos.

■

Capítulo 2

O caso $\lambda_m(\eta) < 1 < \lambda_1(\alpha)$

Neste capítulo estudaremos o problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $N \geq 1$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory satisfazendo as seguintes hipóteses:

(f_1) a aplicação $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{|t|}$ é crescente q.t.p. em Ω, $\alpha(x) := \lim_{t\to 0} f(x,t)/|t| \geq 0$ e $\eta(x) := \lim_{|t|\to\infty} f(x,t)/|t|$ são funções em $L^\infty(\Omega)$;

$(f_2)_m$ $\lambda_m(\eta) < 1 < \lambda_1(\alpha)$, para algum $m \geq 1$, onde $\lambda_m(\theta)$ denota o m-ésimo autovalor associado ao problema (1.1).

Como mencionado, nossa abordagem é baseada no método Nehari, que consiste em minimizar o funcional I sobre a chamada Variedade de Nehari $\mathcal{N}$. O método da Variedade de Nehari se tornou muito útil na Teoria de Pontos Críticos e remonta aos trabalhos de Nehari. Porém, há diversas dificuldades que impedem a utilização deste método de maneira trivial. Para contornar esta dificuldade, definimos o conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|^2 < \int_\Omega \eta(x) u^2 dx \right\}$$

e consideraremos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} := \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ onde $\mathcal{S}$ é a esfera unitária de $H_0^1(\Omega)$. Em seguida, com as propriedades da aplicação de fibração mostraremos que existe um homeomorfismo entre $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{N}$. Este argumentos são cruciais neste capítulo.

2.1 Resultados auxiliares

Nesta seção estabeleceremos alguns conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento deste capítulo.

Para resultados de existência introduzimos a variedade Nehari associado à I definido por

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\} : I'(u)u = 0\}.$$

Embora seja chamado de variedade, não podemos garantir que admita uma estrutura diferenciável.

Das condições (f_1) e (f_2) temos que $\mathcal{N} \neq \emptyset$ (ver Proposição 1.1). Além disso, observe que não podemos afirmar que $\mathcal{N}$ admite um estrutura de variedade diferenciável. Isto insere uma dificuldade natural nas técnicas de minimização.

Considere agora, para cada $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$, $h_u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h_u(t) = I(tu)$. Aplicações deste tipo são conhecidas como Aplicações de Fibração e seu comportamento está intimamente relacionado com a variedade Nehari como mostra o seguinte lema.

Lema 2.1. *Seja h_u a aplicação definida acima, $u \in H_0^1(\Omega) \backslash \{0\}$. Então*

(i) *$u \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $h_u'(1) = 0$;*

(ii) *Mais geralmente $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $h_u'(t) = 0$.*

Demonstração:

Note que

$$h_u'(t) = t\|u\|^2 - \int_{\Omega} f(x, tu)u dx = I'(tu)u, \ \forall t \in (0, \infty) \tag{2.1}$$

(i) Para $t = 1$ temos $h'_u(1) = I'(u)u$ e portanto segue que $h'_u(1) = 0$ se, e somente se $u \in \mathcal{N}$.

(ii) Multiplicando (2.1) por $t > 0$ obtemos

$$h'_u(t) = 0 \Leftrightarrow tu \in \mathcal{N}.$$

■

Desta forma, os elementos em $\mathcal{N}$ correspondem aos pontos estacionários da Aplicação de Fibração, isto é

$$\mathcal{N} = \{tu; u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} \text{ e } h'_u(t) = 0\}$$

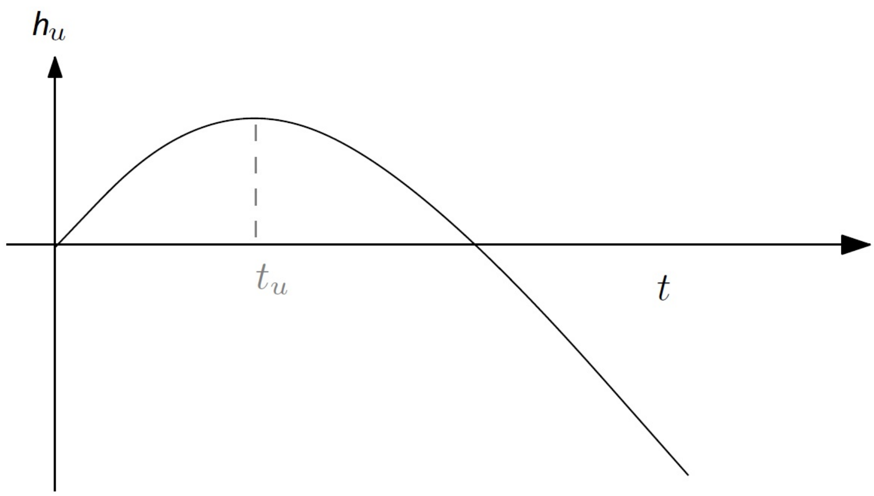

Figura 2.1: Aplicação de Fibração h_u

Nosso objetivo agora é estudar a topologia da variedade Nehari e o comportamento do funcional energia I em $\mathcal{N}$. Para isto, considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{A} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|^2 < \int_\Omega \eta(x) u^2 dx \right\}.$$

Lema 2.2. *Se f satisfaz as condições $(f_1) - (f_2)_m$, então:*

(i) *O conjunto $\mathcal{A}$ é aberto e não vazio;*

(ii) $\partial\mathcal{A} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|^2 = \int_\Omega \eta(x) u^2 dx\}$;

(*iii*) $\mathcal{A}^c = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|^2 \geq \int_\Omega \eta(x)u^2dx\}$;

(*iv*) $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$;

(*v*) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Demonstração:

(*i*) Note que, de $(f_2)_m$, se u é a autofunção associada à $\lambda_j(\eta)$ para algum $j \in \{1, \ldots, m\}$, então $u \in \mathcal{A}$. Além disso, $\mathcal{A} = \varphi^{-1}(-\infty, 0)$ onde $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua definida por $\varphi(u) = \|u\|^2 - \int_\Omega \eta(x)u^2dx$.Os itens (*ii*) e (*iii*) são diretos.

(*iv*) Se $u \in \mathcal{N}$ então

$$\|u\|^2 = \int_{[u\neq 0]} \left[\frac{f(x,u)}{u}\right] u^2dx.$$

Por (f_1), concluímos que

$$\|u\|^2 < \int_\Omega \eta(x)u^2dx.$$

(*v*) É sufuciente considerar a autofunção normalizada e_1 associada à $\lambda_j(\eta)$ para qualquer $j \in \{1, \ldots, m\}$. Claramente $e_j \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$.

$\blacksquare$

Proposição 2.1. *Suponha que f verifique as condições $(f_1) - (f_2)_m$ e seja $h_u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h_u(t) = I(tu)$. Então*

(*i*) *para cada $u \in \mathcal{A}$, existe um único $t_u > 0$ tal que $h_u'(t) > 0$ em $(0, t_u)$, $h_u'(t_u) = 0$ e $h_u'(t) < 0$ em (t_u, ∞). Além disso, $tu \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $t = t_u$;*

(*ii*) *para cada $u \in \mathcal{A}^c$, $h_u'(t) > 0$ para todo $t \in (0, \infty)$.*

Demonstração:

(*i*) Primeiro observe que $h_u(0) = 0$. Além disso, para cada $u \in \mathcal{A}$, temos

$$\frac{h_u(t)}{t^2} = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{[u\neq 0]} \left[\frac{F(x,tu)}{(tu)^2}\right] u^2dx. \tag{2.2}$$

Portanto, de (f_1), $(f_2)_m$, da regra de L'Hospital e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{t\to 0}\frac{h_u(t)}{t^2}=\frac{1}{2}\left(\|u\|^2-\int_\Omega \alpha(x)u^2dx\right)>0$$

e

$$\lim_{t\to \infty}\frac{h_u(t)}{t^2}=\frac{1}{2}\left(\|u\|^2-\int_\Omega \eta(x)u^2dx\right)<0.$$

Deste modo,

$$h_u(t)=\frac{h_u(t)}{t^2}t^2$$

é positivo para t suficientemente pequeno e

$$\lim_{t\to\infty}h_u(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{h_u(t)}{t^2}t^2=-\infty.$$

Como h_u é uma função contínua, os argumentos anteriores implicam que existe um ponto de máximo global $t_u>0$ de h_u. Vamos mostrar que t_u é o único ponto crítico de h_u. De fato, supondo que exista $t_1>t_2>0$ tais que $h'_u(t_1)=h'_u(t_2)=0$, obtemos

$$0=\int_{[u\neq 0]}\left[\frac{f(x,t_1u)}{t_1u}-\frac{f(x,t_2u)}{t_2u}\right]u^2dx$$

por (f_1), $t_1=t_2$. Daí, segue o resultado.

(ii) Se $u\in\mathcal{A}^c$, então$\|u\|^2\geq\int_\Omega\eta(x)u^2dx$. Deste modo, segue das hipóteses (f_1) que

$$\frac{h'_u(t)}{t}=\|u\|^2-\int_{[u\neq 0]}\frac{f(x,tu)}{tu}u^2dx\geq\int_{[u\neq 0]}\left[\eta(x)-\frac{f(x,tu)}{tu}\right]u^2dx>0,\ \forall\ t>0.$$

Consequentemente, $h'_u(t)=t(h'_u(t)/t)>0$ para todo $t\in(0,\infty)$.

■

Observação 2.1. *A condição (i) afirma ser* $t=t_u$ *um ponto de máximo (global) para* h_u*, enquanto que a condição (ii) nos diz que* h_u *não possui ponto estacionário em* $(0,+\infty)$ *se* $u\in\mathcal{A}^c$*. Além disso, uma consequência imediata é que para cada* $u\in\mathcal{A}$ *e* $s\in(0,\infty)$*,* $t_{su}=t_u/s$*.*

Antes de prosseguirmos, daremos adiante alguns resultados técnicos que terão um papel fundamental neste trabalho.

Lema 2.3. *Temos:*

$$\inf_{u \in \partial \mathcal{S}_{\mathcal{A}}} |[u \neq 0]| \geq (S(\Omega)/|\eta|_\infty)^{N/2},$$

onde $1/S(\Omega)$ *é a melhor constante da imersão contínua de* $H_0^1(\Omega)$ *em* $L^{2^*}(\Omega)$.

Demonstração

Pela desigualdade de Hölder, temos que, para cada $u \in \partial \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$

$$1 \leq |\eta|_\infty \int_{[u \neq 0]} u^2 dx \leq |\eta|_\infty |u|_{2^*}^2 |[u \neq 0]|^{2/N}.$$

Da imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$,

$$1 \leq |\eta|_\infty (1/S(\Omega)) |[u \neq 0]|^{2/N}.$$

Portanto,

$$|[u \neq 0]| \geq (S(\Omega)/|\eta|_\infty)^{N/2}, \ \forall \ u \in \partial \mathcal{S}_{\mathcal{A}}.$$

■

Observe que sendo $\mathcal{S}$ uma C^1-variedade de $H_0^1(\Omega)$, concluímos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ é também uma variedade de classe C^1. Além disso, temos

$$\partial \mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{u \in \mathcal{S}; 1 = \int_\Omega \eta(x) u^2 dx\} \text{ e } \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^c = \{u \in \mathcal{S}; 1 \geq \int_\Omega \eta(x) u^2 dx\}.$$

Proposição 2.2. *Suponha que* f *verifique as condições* $(f_1) - (f_2)_m$. *Então,*

(A_1) $\tau := \inf_{u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}} t_u > 0$;

(A_2) $\zeta_{\mathcal{W}} := \max_{u \in \mathcal{W}} t_u < \infty$, *para todo compacto* $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$;

(A_3) *a aplicação* $\widehat{m} : \mathcal{A} \to \mathcal{N}$ *dada por* $\widehat{m}(u) = t_u u$ *é continua e* $m := \widehat{m}_{|\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ *é um homeomorfismo entre* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ *e* $\mathcal{N}$. *Além disso,* $m^{-1}(u) = u/\|u\|$.

Demonstração:

(A_1) Suponha, por contradição, que existe $(u_n) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ tal que $t_n := t_{u_n} \to 0$. Neste caso, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Observe que

$$1 = \int_{[u \neq 0]} \left[\frac{f(x, t_n u_n)}{t_n u_n} \right] \chi_{[u_n \neq 0]} u_n^2 dx + \int_{[u=0]} \left[\frac{f(x, t_n u_n)}{t_n u_n} \right] \chi_{[u_n \neq 0]} u_n^2 dx, \ \forall\ n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Por (f_1) e pelo Teorema da Convergência Dominda de Lebesgue,

$$\int_{[u=0]} \left[\frac{f(x, t_n u_n)}{t_n u_n} \right] \chi_{[u_n \neq 0]} u_n^2 dx \to 0. \quad (2.4)$$

Por outro lado, por (f_1), Proposição 1.1(ii) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{[u \neq 0]} \left[\frac{f(x, t_n u_n)}{t_n u_n} \right] \chi_{[u_n \neq 0]} u_n^2 dx \to \int_\Omega \alpha(x) u^2 dx. \quad (2.5)$$

Assim, por (2.4) e (2.5), passando para o limite em (2.3), obtemos

$$1 = \int_\Omega \alpha(x) u^2 dx.$$

Se $\alpha = 0$, temos claramente uma contradição. Caso contrário, a inequação

$$1 \leq (1/\lambda_1(\alpha)) \|u\|^2 \leq 1/\lambda_1(\alpha),$$

contradiz $(f_2)_m$.

(A_2) Suponha que exista $(u_n) \subset \mathcal{W}$ tal que $t_n := t_{u_n} \to \infty$. Como $\mathcal{W}$ é compacto, obtemos (a menos de subsequencia) $u \in \mathcal{W}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Deste modo, passando o limite inferior em

$$1 = \|u_n\|^2 = \int_{[u_n \neq 0]} \frac{f(x, t_n u_n)}{t_n u_n} u_n^2 dx, \ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

segue da Proposição 1.1(iii) que

$$1 = \|u\|^2 \geq \int_\Omega \eta(x) u^2 dx.$$

Isto mostra que $u \in \mathcal{S}_\mathcal{A}^c$, o que é uma contradição pois $u \in \mathcal{W} \subset \mathcal{S}_\mathcal{A}$.

(A_3) Mostraremos inicialmente que $\widehat{m}$ é contínuo. Sejam $(u_n) \subset \mathcal{A}$ e $u \in \mathcal{A}$, tais que

$u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $\widehat{m}(tw) = \widehat{m}(w)$ para todo $w \in \mathcal{A}$ e $t > 0$, podemos considerar $(u_n) \subset S_{\mathcal{A}}$. Assim,

$$t_n = t_n\|u_n\|^2 = \int_\Omega f(x, t_n u_n)u_n dx, \tag{2.6}$$

onde $t_n := t_{u_n}$. De (A_1)-(A_2), segue-se que, passando para uma subsequência, $t_n \to t > 0$. Daí, passando o limite $n \to \infty$ em (2.6), obtemos

$$t = t\|u\|^2 = \int_\Omega f(x, tu)udx,$$

isto é, $\widehat{m}(u_n) = t_n u_n \to tu = \widehat{m}(u)$.

Considere agora a aplicação $\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ dada por $m(u) = \frac{u}{||u||}$. Note que μ é contínua.

De fato, uma que temos

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}_{\mathcal{A}} & \to & \mathcal{N} & \to & \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \\ u & \mapsto & t_u u & \mapsto & \dfrac{t_u u}{||t_u u||} = u \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} & \to & \mathcal{S}_{\mathcal{A}} & \to & \mathcal{N} \\ u & \mapsto & \dfrac{u}{||u||} & \mapsto & t_{\frac{u}{||u||}} \dfrac{u}{||u||} = u \end{array}$$

(pois, pela unicidade de t tal que $t_u u \in \mathcal{N}$, temos que $\frac{1}{||u||} t_{\frac{u}{||u||}} = 1$) provamos assim que μ é a inversa de m e, portanto, que m é um homeomorfismo entre $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{N}$ com inversa dada por $m^{-1}(u) = \frac{u}{||u||}$.

■

Lema 2.4. *O funcional I é limitado inferiormente em $\mathcal{N}$. Mais precisamente*

$$I(u) > 0,$$

para todo $u \in \mathcal{N}$.

Demonstração

Para cada $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ temos

$$I(t_u u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \frac{f(x, t_u u)}{t_u u} - \frac{F(x, t_u u)}{(t_u u)^2} \right] (t_u u)^2 dx.$$

Agora, o resultado segue de Lema D.1(*iii*).

$\blacksquare$

Observação 2.2. *Uma consequência imediata do lema anterior é que se* $c_{\mathcal{N}} = \inf_{\mathcal{N}} I$ *então* $c_{\mathcal{N}} \geq 0$. *Note que, se* $(f_1) - (f_2)_m$ *são satisfeitas, então segue diretamente das Proposições 2.1 e 2.2 que*

$$c_{\mathcal{N}} := \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = \inf_{u \in \mathcal{A}} \max_{t>0} I(tu) = \inf_{u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \max_{t>0} I(tu). \tag{2.7}$$

Além disso, se $c_{\mathcal{N}}$ *é atingido, então ele é positivo.*

Considere agora as seguintes aplicações $\widehat{\Psi} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ e $\Psi : \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\widehat{\Psi}(u) = I(\widehat{m}(u)) \text{ e } \Psi := \widehat{\Psi}_{|\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}.$$

Estas aplicações serão muito importantes em nossos argumentos, principalmente por causa de suas propriedades, que serão apresentadas no próximo resultado. A prova de tal resultado é uma consequência da Proposição 2.2 e os detalhes, no caso de $\mathcal{N}$ ser homeomorfo à $\mathcal{S}$ podem ser encontrados em [34]. Uma vez que $\mathcal{N}$ é homeomorfo a uma subvariedade não completa de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, por conveniência fornecemos a prova à seguir.

Proposição 2.3. *Suponha que* f *verifique as condições* $(f_1) - (f_2)_m$. *Então,*

(*i*) $\widehat{\Psi} \in C^1(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ *e*

$$\widehat{\Psi}'(u)v = \frac{\|\widehat{m}(u)\|}{\|u\|} I'(\widehat{m}(u))v, \ \forall u \in \mathcal{A} \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(*ii*) $\Psi \in C^1(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}, \mathbb{R})$ *e*

$$\Psi'(u)v = \|m(u)\| I'(m(u))v, \ \forall v \in T_u \mathcal{S}_{\mathcal{A}}.$$

(iii) *Se (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para Ψ então $(m(u_n))$ é uma sequência $(PS)_c$ para I. Se $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é uma sequência $(PS)_c$ limitada para I então $(m^{-1}(u_n))$ é uma sequência $(PS)_c$ para Ψ.*

(iv) *u é um ponto crítico para Ψ se, e somente se, $m(u)$ é um ponto crítico não trivial para I. Além disso, os valores críticos correspondentes coincidem e*

$$\inf_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \Psi = \inf_{\mathcal{N}} I.$$

Demonstração:

(i) Considere $u \in \mathcal{A}$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Das definições de $\widehat{\Psi}$ e t_u e do Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(u+sv) - \widehat{\Psi}(u) &= I(t_{u+sv}(u+sv)) - I(t_u u) \\ &\leq I(t_{u+sv}(u+sv)) - I(t_{u+sv}u) \\ &= I'(t_{u+sv}(u+\tau sv))t_{u+sv}sv, \end{aligned}$$

onde $|s|$ é suficientemente pequeno e $\tau \in (0,1)$. Por outro lado,

$$\widehat{\Psi}(u+sv) - \widehat{\Psi}(u) \geq I(t_u(u+sv)) - I(t_u u) = I'(t_u(u+\varsigma sv))t_u sv,$$

onde $\varsigma \in (0,1)$. Como $u \mapsto t_u$ é uma aplicação contínua, segue das desigualdades anteriores que

$$\lim_{s\to 0} \frac{\widehat{\Psi}(u+sv) - \widehat{\Psi}(u)}{s} = t_u I'(t_u u)v = \frac{\|\widehat{m}(u)\|}{\|u\|} I'(\widehat{m}(u))v.$$

Uma vez que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, segue-se que a derivada Gatêaux de $\widehat{\Psi}$ é um funcional linear contínuo em v e uma aplicação contínua em u. Deste modo, $\widehat{\Psi} \in C^1(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ e

$$\widehat{\Psi}'(u)v = \frac{\|\widehat{m}(u)\|}{\|u\|} I'(\widehat{m}(u))v, \ \forall u \in \mathcal{A} \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(ii) É uma consequência direta de (i).

(iii) Uma vez $H_0^1(\Omega) = T_u\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \oplus \mathbb{R}u$ para cada $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, a projeção linear

$$P : H_0^1(\Omega) \to T_u\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$$

definido por $P(v + tu) = v$, é contínuo, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|v\| \leq C\|v + tu\|, \ \forall u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}, v \in T_u\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \text{ e } t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

De (ii), obtemos

$$\|\Psi'(u)\|_* = \sup_{\substack{v \in T_u\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \\ \|v\|=1}} \Psi'(u)v = \|w\| \sup_{\substack{v \in T_u\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \\ \|v\|=1}} I'(w)v, \tag{2.9}$$

onde $w = m(u)$. Desde $w \in \mathcal{N}$, concluímos que

$$I'(w)u = I'(w)\frac{w}{\|w\|} = 0. \tag{2.10}$$

Por (2.9), temos

$$\|\Psi'(u)\|_* \leq \|w\|\|I'(w)\| = \|w\| \sup_{\substack{v \in T_u\mathcal{S}_{\mathcal{A}}, t \in \mathbb{R} \\ v+tu \neq 0}} \frac{I'(w)(v + tu)}{\|v + tu\|}.$$

Deste modo, a partir de (2.8) e (2.10)

$$\|\Psi'(u)\|_* \leq \|w\|\|I'(w)\| \leq C\|w\| \sup_{v \in T_u\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \setminus \{0\}} \frac{I'(w)(v)}{\|v\|} = C\|\Psi'(u)\|_*,$$

Isto mostra que,

$$\|\Psi'(u)\|_* \leq \|w\|\|I'(w)\| \leq C\|\Psi'(u)\|_*, \ \forall \ u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}. \tag{2.11}$$

Da Proposição 2.2 (A_1), segue-se que existe $\tau > 0$ tal que $\|w\| \geq \tau > 0$ para todo $w \in \mathcal{N}$. Portanto, a desigualdade (2.11) junto com $I(w) = \Psi(u)$ conclui a prova de (iii).

(iv) Segue de (2.11) que $\Psi'(u) = 0$ se, e somente se, $I'(w) = 0$. Agora, o resultado decorre da definição de Ψ.

$\blacksquare$

Como $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ pode ser incompleta, precisamos ter muito cuidado com o comportamento das sequências minimizantes para Ψ perto da fronteira. O próximo resultado nos ajuda nessa questão.

Proposição 2.4. *Suponha que $(f_1)-(f_2)_m$ sejam satisfeitas. Se $\{u_n\} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ é tal que $dist(u_n, \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}) \to 0$, então existe $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, $t_{u_n} \to \infty$ e*

$$\liminf_{n\to\infty} \Psi(u_n) \geq \int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx,$$

onde $\beta(x)$ é definida na observação D.1.

Demonstração:

Como $\{u_n\} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ é limitado, a menos de subsequencia, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $dist(u_n, \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}) \to 0$, existe $\{z_n\} \subset \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ tal que $\|u_n - z_n\| \to 0$ para $n \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \eta(x)u_n^2dx - 1\right| &= \left|\int_\Omega \eta(x)(u_n^2 - z_n^2)dx\right| \\ &\leq |\eta|_\infty |u_n + z_n|_2 |u_n - z_n|_2 \\ &\leq (2|\eta|_\infty/\lambda_1)\|u_n - z_n\|. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\int_\Omega \eta(x)u_n^2dx \to 1.$$

Da imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$1 = \int_\Omega \eta(x)u^2dx. \tag{2.12}$$

Assim, $u \neq 0$. Suponha por contradição que, para alguma subsequência, $\{t_{u_n}\}$ seja limitada. Neste caso, passando novamente para uma subsequência, existe $t_0 > 0$ (veja Proposição 2.2(A_1)) tal que

$$t_{u_n} \to t_0. \tag{2.13}$$

Segue de (2.13) e

$$t_n = \int_\Omega f(x, t_{u_n} u_n) u_n dx, \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

que

$$1 = \int_\Omega \frac{f(x, t_0 u)}{t_0 u} u^2 dx.$$

Combinando a última igualdade e (f_1), temos

$$1 < \int_\Omega \eta(x) u^2 dx.$$

Mas a desigualdade anterior contradiz (2.12). Mostrando que $t_{u_n} \to \infty$. Como o comportamento no infinito de $(t_{u_n} u_n)$ é indefinido em $[u = 0]$, não podemos usar o padrão Lema de Fatou. Em vez disso, usaremos a Proposição 1.1 (iii). Isto mostra que,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \Psi(u_n) &= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[\frac{1}{2} f(x, t_{u_n} u_n) t_{u_n} u_n - F(x, t_{u_n} u_n) \right] dx \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{[u_n \neq 0]} \left[\frac{1}{2} f(x, t_{u_n} u_n) t_{u_n} u_n - F(x, t_{u_n} u_n) \right] dx \\
&\geq \int_{[u \neq 0]} \beta(x) dx.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.5. *Suponha que f satisfaz $(f_1) - (f_2)_m$ e (β). Então*

$$0 \leq c_{\mathcal{N}} < \inf_{u \in \partial \mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{[u \neq 0]} \beta(x) dx.$$

Demonstração:

Segue de (f_1) que, para cada $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned}
c_{\mathcal{N}} \leq \Psi(u) &= \int_\Omega \left[\frac{f(x, m(u))}{2m(u)} - \frac{F(x, m(u))}{m(u)^2} \right] m(u)^2 dx \\
&< (1/2) \int_\Omega [\eta(x) - \alpha(x)] m(u)^2 dx \\
&\leq [1/2\lambda_1(\eta - \alpha)] t_u^2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por outro lado, do Lema(2.3), para cada $u \in \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$

$$\int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx \geq |[u \neq 0]| \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \beta(x) \geq (S(\Omega)/|\eta|_\infty)^{N/2} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \beta(x). \tag{2.15}$$

O resultado segue de (β), (2.14) e (2.15).

■

Dizemos que o funcional Ψ satisfaz a condição $(PS)_c$ em $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se cada sequência (u_n) em $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ tal que $\Psi(u_n) \to c$ e $\Psi'(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, admite uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 2.5. *Suponha que $(f_1) - (f_2)_m$ e (β) sejam satisfeitas. Então Ψ satisfaz a condição $(PS)_c$ em $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, para todo $c \in [c_{\mathcal{N}}, \inf_{u\in\partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx)$.*

Demonstração:

Pelas Proposições 2.2(A_3) e 2.3(iii), é suficiente mostrar que I satisfaz a condição $(PS)_c$ em $\mathcal{N}$ para $c \in [c_{\mathcal{N}}, \inf_{u\in\partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx)$.

Para isto, seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência $(PS)_c$ para I. Mostraremos que (u_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$. De fato, suponha por contradição que, para alguma subsequência, $\|u_n\| \to \infty$. Defina $v_n := u_n/\|u_n\| = m^{-1}(u_n) \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Então $\{v_n\}$ é limitado em $H_0^1(\Omega)$ e

$$\Psi(v_n) \to c. \tag{2.16}$$

Deste modo, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ in } \ H_0^1(\Omega). \tag{2.17}$$

Suponha $v = 0$. Como $(\Psi(v_n))$ é limitado, existe $C > 0$ tal que

$$C > \Psi(v_n) = I(t_{v_n}v_n) \geq I(tv_n) = (1/2)t^2 - \int_\Omega F(x, tv_n)dx, \ \forall\, t > 0. \tag{2.18}$$

De $(f_1) - (f_2)_m$ e da imersão compacta, fazendo $n \to \infty$ em (2.18), obtemos

$$C \geq (1/2)t^2, \ \forall\, t > 0,$$

que é claramente uma contradição. Concluimos assim, que $v \neq 0$.

Desde que $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é uma sequência $(PS)_c$ para I, temos

$$o_n(1) + \int_\Omega \nabla u_n \nabla w dx = \int_\Omega f(x, u_n) w dx, \ \forall\ w \in H_0^1(\Omega).$$

Dividindo a última igualdade por $\|u_n\|$, temos

$$o_n(1) + \int_\Omega \nabla v_n \nabla w dx =$$

$$\int_{[v \neq 0]} \left[\frac{f(x, \|u_n\| v_n)}{\|u_n\| v_n} \right] \chi_{[v_n \neq 0]}(x) v_n w dx + \int_{[v=0]} \left[\frac{f(x, \|u_n\| v_n)}{\|u_n\| v_n} \right] \chi_{[v_n \neq 0]}(x) v_n w dx. \quad (2.19)$$

Por (f_1), (2.17) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{[v=0]} \left[\frac{f(x, \|u_n\| v_n)}{\|u_n\| v_n} \right] \chi_{[v_n \neq 0]}(x) v_n w dx \to 0. \quad (2.20)$$

Por outro lado, pela Proposição1.1(ii), (2.17) e novamente pelo Teorema da Convergência Dominado de Lebesgue, obtemos

$$\int_{[v \neq 0]} \left[\frac{f(x, \|u_n\| v_n)}{\|u_n\| v_n} \right] \chi_{[v_n \neq 0]}(x) v_n w dx \to \int_\Omega \eta(x) v w dx. \quad (2.21)$$

Segue de (2.20) e (2.21) que, fazendo $n \to \infty$ em (2.19), obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w dx = \int_\Omega \eta(x) v w dx, \ \forall\ w \in H_0^1(\Omega). \quad (2.22)$$

Agora temos que considerar dois casos:

(i) Se $\lambda_{m+k}(\eta) \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue de (2.22) que $v = 0$. Mas isso é uma contradição. Portanto (u_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$.

(ii) Se $\lambda_{m+k}(\eta) = 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então (2.22) implica que $v = e_{m+k}$, onde e_{m+k} é uma autofunção normalizada associada a $\lambda_{m+k}(\eta)$. De (2.22), segue também que

$\|v\|^2 = \int_\Omega \eta(x)v^2dx$, isto é, $v \in \partial\mathcal{A}$. Por outro lado,

$$\int_\Omega \eta(x)v^2dx = \|v\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = 1.$$

Suponha que

$$\int_\Omega \eta(x)v^2dx < 1. \tag{2.23}$$

Como

$$t_{v_n} = \|t_{v_n}v_n\| = \|u_n\| \to \infty, \tag{2.24}$$

por (f_1), (2.17) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{[v=0]} \left[\frac{F(x, \|u_n\|v_n)}{(\|u_n\|v_n)^2}\right] \chi_{[v_n\neq 0]}(x)v_n^2dx \to 0. \tag{2.25}$$

Por outro lado, pela Proposição1.1(ii), (2.17) e novamente pelo Teorema da Convergência Dominado de Lebesgue, obtemos

$$\int_{[v\neq 0]} \left[\frac{F(x, \|u_n\|v_n)}{(\|u_n\|v_n)^2}\right] \chi_{[v_n\neq 0]}(x)v_n^2dx \to (1/2)\int_\Omega \eta(x)vdx. \tag{2.26}$$

deste modo, concluímos que

$$\int_\Omega \left[\frac{F(x, \|u_n\|v_n)}{(\|u_n\|v_n)^2}\right] v_n^2dx \to (1/2)\int_\Omega \eta(x)v^2dx. \tag{2.27}$$

Assim, fazendo $n \to \infty$ na identidade

$$\Psi(v_n) = \|u_n\|^2 \left\{\frac{1}{2} - \int_\Omega \left[\frac{F(x, \|u_n\|v_n)}{(\|u_n\|v_n)^2}\right] v_n^2dx\right\}$$

e usando (2.27) concluímos que $\Psi(v_n) \to \infty$, o que contradiz (2.16). Consequentemente,

$$\|v\|^2 = \int_\Omega \eta(x)v^2dx = 1, \tag{2.28}$$

mostra que

$$\|v_n\| \to \|v\|. \tag{2.29}$$

Usando (2.17) e (2.29), temos que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$ com $v \in \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ (ver (2.28)).

Usando a Proposição2.4, obtemos

$$c \geq \int_{[v \neq 0]} \beta(x)dx, \tag{2.30}$$

com $v = e_{m+k} \in \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, contradizendo o fato de que $c < \inf_{u \in \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{[u \neq 0]} \beta(x)dx$. Isto mostra que (u_n) é limitado.

Agora, como $\{u_n\}$ é uma sequencia limitada, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência.

Então, o que nos resta provar é que $\|u_n\| \to \|u\|$. Para isso, basta observar que, como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$, temos

$$o_n(1) + \int_\Omega \nabla u_n \nabla u dx = \int_\Omega f(x, u_n) u dx.$$

Fazendo $n \to \infty$ na igualdade anterior, obtemos

$$\|u\|^2 = \int_\Omega f(x, u) u dx. \tag{2.31}$$

Então de (2.31) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega f(x, u_n) u_n dx = \int_\Omega f(x, u) u dx + o_n(1) = \|u\|^2 + o_n(1).$$

■

2.2 Teorema de existência

Nesta seção provaremos o principal resultado de existência deste capítulo.

Teorema 2.1. *Suponha que f satisfaz $(f_1) - (f_2)_m$ e*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} \beta(x) > \frac{|\eta|_\infty \tau^2}{2\lambda_1(\eta - \alpha) S(\Omega)^{N/2}}, \tag{β}$$

onde τ é definida na Proposição 2.2(A_1). Então existe uma solução ground-state (no *nível do passo da montanha) para o problema (P).*

Demonstração:

Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $I(u_n) \to c_{\mathcal{N}}$. Note que $v_n := u_n/\|u_n\| \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e

$$\Psi(v_n) \to c_{\mathcal{N}}. \tag{2.32}$$

Mostraremos que (v_n) é uma sequência $(PS)_{c_{\mathcal{N}}}$ para Ψ. Para isto, definimos a aplicação $\Upsilon : \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por

$$\Upsilon(u) = \begin{cases} \Psi(u) & \text{se } u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}, \\ \int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx & \text{se } u \in \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Segue do Lema2.5 que $c_{\mathcal{N}} = \inf_{u \in \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}} \Upsilon(u)$. Observe que $\overline{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ é um espaço métrico completo com a metrica induzida pela norma de $H_0^1(\Omega)$.

Afirmação: Υ é semicontínuo inferiormente .

Seja $(u_n) \subset \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ e $u \in \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Se $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ então, para n suficientemente grande, $\Upsilon(u_n) = \Psi(u_n)$ e

$$\Upsilon(u_n) = \Psi(u_n) \to \Psi(u) = \Upsilon(u),$$

pois Ψ é continuo. Por outro lado, se $u \in \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, teremos dois casos a considerar. Se existir uma subsequencia $(u_n) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, pela Proposição 2.4

$$\Upsilon(u) = \int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \Psi(u_n) = \liminf_{n\to\infty} \Upsilon(u_n).$$

Se existir uma subsequência $(u_n) \subset \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ então pela Proposição 1.1(iii) com $v_n = v = \beta(x)$, temos

$$\Upsilon(u) = \int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{[u_n\neq 0]} \beta(x)dx = \liminf_{n\to\infty} \Upsilon(u_n).$$

Em qualquer caso, Υ é uma aplicação semicontínua inferiormente.

Como Υ é limitado inferiormente(ver Lema2.4), segue do Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 1.1 de [15]) que para cada $\varepsilon, \lambda > 0$ suficientemente pequeno e $u \in \Upsilon^{-1}[c_{\mathcal{N}}, c_{\mathcal{N}} + \varepsilon]$ existe $v \in \overline{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ tal que

$$c_{\mathcal{N}} \leq \Upsilon(v) \leq \Upsilon(u), \ \|u - v\| \leq \lambda \text{ e } \Upsilon(w) > \Upsilon(v) - (\varepsilon/\lambda)\|v - w\|, \ \forall \ w \neq v. \tag{2.34}$$

Por outro lado, segue do Lema2.5 que

$$\Upsilon^{-1}[c_{\mathcal{N}}, c_{\mathcal{N}} + \varepsilon] = \Psi^{-1}[c_{\mathcal{N}}, c_{\mathcal{N}} + \varepsilon], v \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \text{ e } \Upsilon(v) = \Psi(v), \tag{2.35}$$

para ε suficientemente pequeno. Segue de(2.32) que podemos escolher em (2.34) $u = v_n$, $\varepsilon = 1/n^2$ e $\lambda = 1/n$, de modo que $\widehat{v}_n \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, satisfaz

$$\Psi(\widehat{v}_n) \to c_{\mathcal{N}}, \ \|v_n - \widehat{v}_n\| \to 0 \tag{2.36}$$

e

$$\Upsilon(w) > \Psi(\widehat{v}_n) - (1/n)\|\widehat{v}_n - w\|, \ \forall \ w \neq \widehat{v}_n. \tag{2.37}$$

Seja $\gamma_n : (-\delta_n, \delta_n) \to \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ uma curva diferenciável, com $\delta_n > 0$ suficientemente pequeno, tal que $\gamma_n(0) = \widehat{v}_n$ e $\gamma_n'(0) = z \in T_{\widehat{v}_n}(\mathcal{S}_{\mathcal{A}})$, onde $T_{\widehat{v}_n}(\mathcal{S}_{\mathcal{A}})$ denota o espaço tangente de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ em $\widehat{v}_n$. Escolhendo $w = \gamma_n(t)$, segue de (2.37) que

$$-[\Psi(\gamma_n(t)) - \Psi(\gamma_n(0))] < (1/n)\|\gamma_n(t) - \gamma_n(0)\|. \tag{2.38}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0, t)$ tal que

$$\|\gamma_n(t) - \gamma_n(0)\| \leq \|\gamma_n'(c)\|t. \tag{2.39}$$

Assim, multiplicando ambos os lados de (2.38) por $1/t$, passando o limite para $t \to 0$, usando (2.39), obtemos

$$-\Psi'(\widehat{v}_n)z \leq \frac{1}{n}\|z\|,$$

onde $z \in T_{\widehat{v}_n}(\mathcal{S}_\mathcal{A})$ é arbitrário. Por linearidade, obtemos

$$|\Psi'(\widehat{v}_n)z| \leq \frac{1}{n}\|z\|.$$

Portanto,

$$\|\Psi'(\widehat{v}_n)\|_* \to 0, \tag{2.40}$$

para $n \to \infty$, e, por (2.36), concluímos que (v_n) é uma sequência $(PS)_{c_\mathcal{N}}$ para Ψ.

Deste modo, segue do Lema2.5 e da Proposição2.5 que existe $v \in \mathcal{S}_\mathcal{A}$ tal que, a menos de subsequência,

$$v_n \to v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Assim $\Psi'(v) = 0$ e $\Psi(v) = c_\mathcal{N}$. Definindo $u := m(v) \in \mathcal{N}$ e usando a Proposição 2.3(iv), concluímos que $I'(u) = 0$ e $I(u) = c_\mathcal{N}$.

Mostraremos agora que u não muda de sinal. De fato, observe que se $u^\pm \neq 0$, então $u^\pm \in \mathcal{N}$. Assim,

$$c_\mathcal{N} = I(u) = I(u^+) + I(u^-) \geq 2c_\mathcal{N}, \tag{2.41}$$

que é um contradição. Daí, resulta que $u^+ = 0$ ou $u^- = 0$ e portanto, u é uma solução com sinal.

■

2.3 Resultados sobre multiplicidade do problema (P)

O objetivo principal desta seção é provar o Teorema 2.2. Em sua prova, usamos a teoria do gênero de Krasnoselski's. Assim, começamos a definir algumas notações preliminares:

$$\gamma_j := \{B \in \mathcal{E} : B \subset \mathcal{S}_\mathcal{A} \text{ e } \gamma(B) \geq j\},$$

onde

$$\mathcal{E} = \{B \subset H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : B \text{ é fechado e } B = -B\}$$

e $\gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ é a função gênero de Krasnoselski's, definida por

$$\gamma(B) = \begin{cases} n := \min\{m \in \mathbb{N};\ \text{existe } \varphi \in C(B, \mathbb{R}^m \backslash \{0\}) \text{ ímpar}\}, \\ \infty, \text{se não existe } \varphi \in C(B, \mathbb{R}^m \backslash \{0\}), \\ 0, \text{if } B = \emptyset. \end{cases} \tag{2.42}$$

É importante notar que, desde que $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = -\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, γ_j está bem definido.

De agora em diante, denotamos por s_m a soma das dimensões de todos os autoespaços V_j associados aos autovalores $\lambda_j(\eta)$, onde $1 \leq j \leq m$.

Lema 2.6. *Suponha* $(f_2)_m$*. Então*

(i) $\gamma_{s_m} \neq \emptyset$;

(ii) $\gamma_1 \supset \gamma_2 \supset \ldots \supset \gamma_{s_m}$;

(iii) *Se* $\varphi \in C(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}, \mathcal{S}_{\mathcal{A}})$ *é ímpar, então* $\varphi(\gamma_j) \subset \gamma_j$*, para todo* $1 \leq j \leq s_m$;

(iv) *Se* $B \in \gamma_j$ *e* $C \in \mathcal{E}$ *com* $\gamma(C) \leq s < j \leq s_m$*, então* $\overline{B \backslash C} \in \gamma_{j-s}$.

Demonstração:

(i) Seja $\mathcal{S}_{s_m}$ a esfera unitária (s_m-dimensional) de $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$. De $(f_2)_m$, temos que $\mathcal{S}_{s_m} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Além disso, a partir do Prop.E.1(iii), temos $\gamma(\mathcal{S}_{s_m}) = s_m$, e portanto, $\mathcal{S}_{s_m} \in \gamma_{s_m}$. (ii) Imediato. (iii) Segue diretamente do Prop.E.1(ii). (iv) É uma consequência do Prop.E.1(v).

∎

Agora, para cada $1 \leq j \leq s_m$, definimos os seguintes níveis minimax

$$c_j = \inf_{B \in \gamma_j} \sup_{u \in B} \Psi(u). \tag{2.43}$$

Lema 2.7. *Suponha* $(f_1) - (f_2)_m$ *e* (β_m)*. Então,*

$$0 < c_{\mathcal{N}} = c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{s_m} < \inf_{u \in \partial \mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{[u \neq 0]} \beta(x) dx.$$

Demonstração:

A primeira desigualdade decorre do Lema2.4. A equação $c_{\mathcal{N}} = c_1$ pode ser facilmente obtido a partir do Prop.E.1(i) e da definição de c_1. Por outro lado, a monotonicidade dos níveis c_j é uma consequência de Lema2.6(ii). Para provar a última desigualdade, observe que pela prova do Lema2.5, temos

$$\Psi(u) \leq [1/2\lambda_1(\eta - \alpha)]t_u^2, \ \forall \ u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}.$$

Portanto,

$$c_{s_m} \leq \max_{u \in \mathcal{S}_{s_m}} \Psi(u) \leq [1/2\lambda_1(\eta - \alpha)]\tau_m^2, \tag{2.44}$$

onde, pelos itens (A_1) e (A_2) da Proposição 2.2

$$0 < \tau_m := \max_{u \in \mathcal{S}_{s_m}} t_u < \infty. \tag{2.45}$$

O resultado segue agora do Lema 2.3, (β_m) e (2.44).

$\blacksquare$

A próxima proposição é crucial para garantir a multiplicidade de soluções.

Proposição 2.6. *Suponha que f satisfaz $(f_1) - (f_2)_m$ e (β_m). Se $c_j = \ldots = c_{j+p} \equiv c$, $j + p \leq s_m$, então $\gamma(K_c) \geq p + 1$, onde $K_c := \{v \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}} : \Psi(v) = c \ \text{ and } \Psi'(v) = 0\}$.*

Demonstração:

Suponha que $\gamma(K_c) \leq p$. Segue da Proposição 2.5 e do Lema2.7 que K_c é um conjunto compacto. Assim, pelo Prop.E.1(iv), existe uma vizinhança compacta K (em $H_0^1(\Omega)$) de K_c tal que $\gamma(K) \leq p$. Definindo $M := K \cap \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, obtemos da Prop.E.1$(ii)$ que $\gamma(M) \leq p$. Do Teorema 3.11 em [31], podemos garantir a existência de uma família de homeomorfismos $\eta(.,t)$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ tais que, para cada $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$,

$$\eta(u, 0) = u \tag{2.46}$$

e

$$t \mapsto \Psi(\eta(u,t)) \text{ é não crescente.} \tag{2.47}$$

Além disso, segue da Proposição2.4, Lema2.7 e (2.47) que, para cada $\varepsilon > 0$ pequeno, a aplicação $\eta(u,.)$ está bem definida em $[0,\infty)$, para cada $u \in \Psi_{c_{s_m}+\varepsilon} = \{u \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}} : \Psi(u) \leq c_{s_m} + \varepsilon\}$. De fato, suponha que por contradição $\eta(u,t_0) \in \partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ para algum $u \in \Psi_{c_{s_m}+\varepsilon}$ e $t_0 > 0$, onde $\varepsilon \in (0, \inf_{u\in\partial\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \int_{[u\neq 0]} \beta(x)dx - c_{s_m})$. Então, pela equação (2.46), Proposição2.4 e Lema2.7

$$\Psi(\eta(u,0)) = \Psi(u) \leq c_{s_m} + \varepsilon < \int_{[\eta(u,t_0)\neq 0]} \beta(x)dx \leq \liminf_{t\to t_0} \Psi(\eta(u,t)).$$

Assim, existe $0 < t_* < t_0$, tal que $\eta(u,t_*) \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e

$$\Psi(\eta(u,0)) < \Psi(\eta(u,t_*)),$$

que contradiz (2.47).

Portanto, faz sentido o terceiro item do Teorema 3.11 em [31], ou seja,

$$\eta(\Psi_{c+\varepsilon}\backslash M, 1) \subset \Psi_{c-\varepsilon}. \tag{2.48}$$

Escolha $B \in \gamma_{j+p}$ tal que $\sup_B \Psi \leq c + \varepsilon$. Do Lema 2.6$(iv)$, $\overline{B\backslash M} \in \gamma_j$. Segue-se novamente do Lema 2.6(iii) que $\eta(\overline{B\backslash M}, 1) \in \gamma_j$. Portanto, por (2.48) e da definição de c,

$$c \leq \sup_{\eta(\overline{B\backslash M},1)} \Psi \leq c - \varepsilon,$$

que é uma contradição. Assim $\gamma(K_c) \geq p + 1$.

■

Agora estamos prontos para provar o seguinte resultado de multiplicidade.

Teorema 2.2. *Suponha que $f(x,\cdot)$ seja ímpar q.t.p. em Ω, satisfazendo $(f_1) - (f_2)_m$ e*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \beta(x) > \frac{|\eta|_\infty \tau_m^2}{2\lambda_1(\eta-\alpha)S(\Omega)^{N/2}}, \tag{β_m}$$

onde τ_m é definida em (2.45). Então, o problema (P) tem pelo menos s_m pares de soluções não triviais, onde $s_m = 1 + \sum_{j=2}^m d_j$ é a soma das dimensões d_j dos m primeiros autoespaços V_j associados a $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Demonstração: Note inicialmente que os níveis $0 < c_j < \infty$ são níveis críticos de Ψ.

De fato, suponha que por contradição que c_j é regular para algum j. Pelo Teorem 3.11 de [31], com $\beta = c_j$, $\overline{\varepsilon} = 1$, $N = \emptyset$, existe $\varepsilon > 0$ uma família de homeomorfismos ímpas $\eta(.,t)$ satisfazendo as propriedades de tal teorema. Escolhendo $B \in \gamma_j$ tal que $\sup_B \Psi < c_j + \varepsilon$ e argumentando como na prova da Proposição 2.6, obtemos uma contradição.

Finalmente, se os níveis c_j, $1 \leq j \leq s_m$, são diferentes uns dos outros, o resultado segue da Proposição2.3(iv). Por outro lado, se $c_j = c_{j+1} \equiv c$ para algum $1 \leq j \leq s_m$, segue da Proposição (2.6) que $\gamma(K_c) \geq 2$. Combinando a última desigualdade com Proposição E.1(vi) e a Proposição 2.3(iv),concluímos que (P) tem infinitos pares de soluções não triviais.

■

Apêndice A

Resultados da Teoria de Medida e Integração

Neste apêndice apresentaremos alguns conceitos e resultados da teoria de medida e integração utilizadas em nosso trabalho. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [8].

Definição A.1. *Seja Ω um conjunto mensurável. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, como o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \textit{mensurável e} \int_\Omega |u|^p dx < \infty\},$$

munido com a norma

$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição A.2. *Seja um subconjunto mensurável. Definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ como o espaço das (classes de equivalência de) funções reais u essencialmente limitadas, isto é, existe $C = C(u) > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$, q.t.p. em Ω,*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \textit{mensurável e essencialmente limitada em } \Omega\},$$

dotado de norma

$$||u||_\infty = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C, q.t.p \text{ em } \Omega\}.$$

Teorema A.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mesuráveis em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

(i) $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p em* Ω,

(ii) Existe g em $L^1(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então $u \in L^1(\Omega)$ e $||u_n - u||_1 \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n dx = \int_\Omega u dx.$$

Demonstração: Ver [8].

∎

Teorema A.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração: Ver [8].

∎

Teorema A.3 (Lema de Fatou). *Seja uma sequência de funções mensuráveis não negativas em $L^1(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \liminf u_n dx \leq \liminf \int_\Omega u dx.$$

Demonstração: Ver [8].

∎

Teorema A.4. *Sejam (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então, a menos de subsequência,

(i) $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p em* Ω.

(ii) *existe* $g \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|u_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p em* Ω.

Demonstração: Ver [8].

■

Apêndice B

Resultados Sobre Funcionais Semicontínuos Inferiormente

Neste apêndice definiremos funcional semicontínuo inferiormente e mostraremos algumas propriedades sobre essa classe de funções. Para mais detalhes veja [8, 11].

Definição B.1. *Seja X um Espaço Topológico. Uma função $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é um funcional semicontínuo inferiormente (s.c.i) quando o conjunto $\Phi^{-1}(a, \infty)$ é aberto em X, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Além disso, se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade (por exemplo, se X é um espaço métrico), então $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é s.c.i se, e somente se*

$$\Phi(u) \leq \liminf \Phi(u_n), \textit{ para } u_n \to u \textit{ em } X.$$

Teorema B.1. *Seja X um Espaço Topológico compacto e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Então Φ é limitado inferiormente e existe $u_* \in X$ tal que*

$$\Phi(u_*) = \inf_X \Phi$$

Demonstração: Ver [11].

■

Dizemos que $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é um funcional fracamente semicontínuo inferiormente de Φ é um funcional s.c.i considerando X com sua topologia fraca.

Enunciaremos à seguir um resultado clássico na Teoria de Pontos Crítico.

Teorema B.2. *Seja H um espaço de Hilbert (ou, mais geralmente, um Banach reflexivo) e suponha que o funcional Φ seja*

(i) fracamente semicontínuo inferiormente

(ii) coercivo (isto é, $\Phi(u) \to +\infty$ para $\|u\| \to \infty$).

Então Φ é limitado inferiormente e exite $u_* \in H$ tal que

$$\Phi(u_*) = \inf_H \Phi.$$

Demonstração: Ver [11].

■

Apresentaremos agora um resultado clássico conhecido como o Princípio Variacional de Ekeland (P.V.E). Desde sua publicação em 1972, o Princípio Variacional de Ekeland vem sendo utilizado em diversas aplicações em diferentes campos da Análise, Geometria Diferencial,e é uma poderosa ferramenta que resolve uma ampla classe de Equações Diferenciais Elípticas.

Teorema B.3 (Princípio Variacional de Ekeland)**.** *Considere (X, d) um espaço métrico completo e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional limitado inferiormente e s.c.i.. Sejam $\epsilon > 0$ e $x \in X$ tais que*

$$\Phi(x) < \inf_X \Phi + \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, para cada $\delta > 0$, existe $y = y(\delta) \in X$ tal que

(i) $\Phi(y) \leq \Phi(x)$,

(ii) $d(x, y) \leq \delta$,

(iii) $\Phi(y) < \Phi(u) + \frac{\epsilon}{\delta} d(u, y)$ *para todo $u \in X$ com $u \neq y$.*

O Princípio Variacional de Ekeland garante a existência de um sequência minimizante de um tipo particular (sequência quase-crítica).

Os itens (i) e (iii) do Teorema B.3 admitem uma idéia geométrica que é bastante intuitiva. De fato, se o mínimo de $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é atingido em $u \in X$, então o gráfico de

Φ ficará inteiramente contido no conjunto

$$\{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}\,; \lambda \geq \Phi(u)\}.$$

O Princípio Variacional de Ekeland afirma que dado $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que

$$\Phi(y) < \inf_X \Phi + \epsilon$$

e

$$graf\Phi \subset \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}\,; \lambda \geq \Phi(y) - \epsilon d(y, x)\}.$$

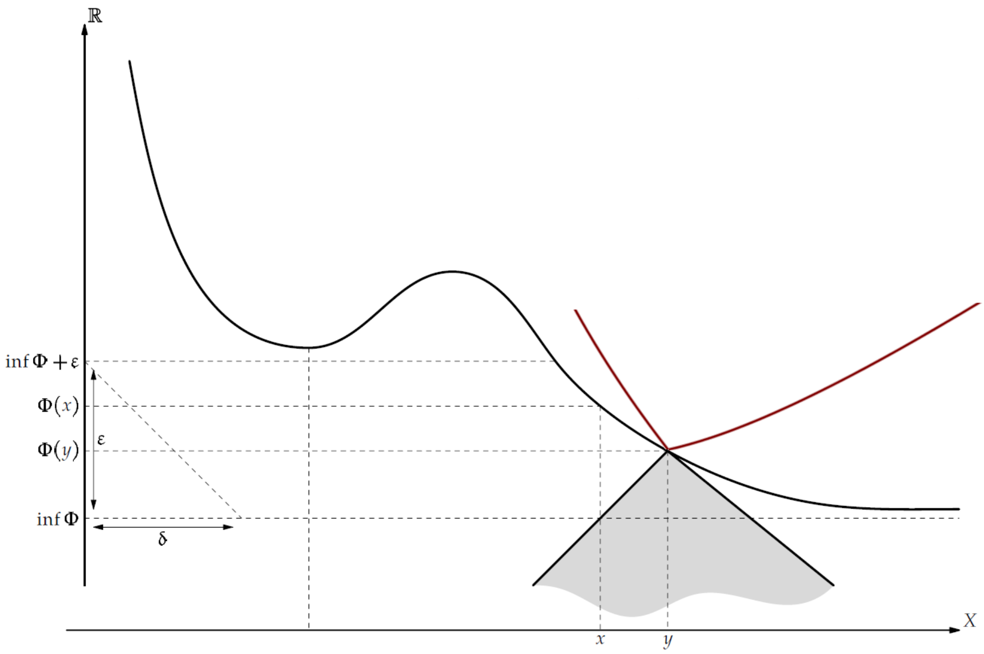

Figura B.1: (P.V.E) O cone delimitado por $\tilde{\Phi}(y) = \Phi(y) - \dfrac{\epsilon}{\delta} d(y, x)$ toca o gráfico de Φ abaixo de y.

Apêndice C

Diferenciabilidade do Funcional Energia

Apresentaremos alguns dos principais conceitos e resultados sobre diferenciabilidade de funcionais definidos em um espaço de Banach X. Uma discussão sobre este assunto pode ser encontrados, por exemplo, em [6].

Definição C.1. *Dados um espaço de Banach X e um funcional $\Phi : X \to \mathbb{R}$, dizemos que Φ possui Derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existe $T_0 \in X'$ tal que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u) - T_0 v}{t} = 0, \quad \forall v \in X.$$

A Derivada de Gateaux quando existe, é única e será denotada por $D\Phi(u)$.

Definição C.2. *Dizemos que o funcional $\Phi : X \to \mathbb{R}$, definido no espaço de Banach X possui Derivada de Fréchet no ponto $u \in X$ quando existe $T \in X'$ tal que*

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\Phi(u+v) - \Phi(u) - Tv}{\|v\|} = 0, \quad \forall v \in X.$$

A Derivada de Fréchet quando existe, é única e será denotada por $\Phi'(u)$. Pela própria definição de Fréchet diferenciabilidade, é óbvio que se Φ é diferenciável em u, então ele também é Gateaux diferenciável e $D\Phi(u) = \Phi'(u)$. Porém, não é sempre verdade que Gateaux diferenciabilidade implica Fréchet diferenciabilidade. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Proposição C.1. *Suponha que $\Phi : X \to \mathbb{R}$ seja Gateaux diferenciável em X com $u \mapsto D\Phi(u)$ contínua em u (de classe C^1). Então Φ é Fréchet diferenciável em u e vale $D\Phi(u) = \Phi'(u)$.*

A importância desta proposição reside no fato de que muitas vezes é tecnicamente mais fácil de calcular a derivada Gâteaux e provar que ela é contínua, em vez de provar diretamente o (Fréchet) diferenciabilidade.

Definição C.3. *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável. Dizemos que $u \in X$ é ponto crítico do funcional Φ se $\Phi'(u) = 0$.*

Um mínimo (local) de um funcional diferenciável é um ponto crítico. De fato, se $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é um funcional diferenciável em um espaço de Banach X e

$$\Phi(u) = \min_{v \in X} \Phi(v),$$

então, para cada $v \in X$ fixado, podemos considerar a função diferenciável $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(t) = \Phi(u+tv)$. Logo, ϕ tem um mínimo (local) no ponto $t = 0$ e portanto,

$$0 = \phi'(0) = I'(u)v, \quad \forall v \in X.$$

Mostraremos agora que o funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (P), dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,u)dx,$$

onde $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x,u)\varphi dx.$$

Para isto, consideraremos o funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$$

e observamos que $I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \Phi(u)$. Para mostrar que $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ é suficiente provar que a derivada Gateaux de Φ existe e é contínua.

Inicialmente vamos supor que a não linearidade f seja do tipo assintoticamente linear e satisfaz:

(f_1) $\alpha(x) := \lim_{t\to 0} \dfrac{2F(x,t)}{t^2} \in L^r(\Omega)$ para algum $r > N/2$ e $\eta(x) := \lim_{|t|\to\infty} \dfrac{2F(x,t)}{t^2} \in L^\infty(\Omega)$ são funções com parte positiva não triviais α^+, η^+;

Da condição acima, existe $C_\infty > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq (C_\infty + |\alpha|)|t|$$

De fato, da primeira parte de (f_1) , temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq (|\alpha| + \epsilon)|t|, \ \forall 0 < |t| < \delta \text{ e } x \in \Omega. \tag{C.1}$$

Por outro lado, da segunda parte de (f_1), existem $M_\epsilon > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|f(x,t)| \leq (||\eta||_\infty + \epsilon)|t|, \ \forall |t| \geq M_\epsilon \text{ e } x \in \Omega \tag{C.2}$$

e

$$|f(x,t)| \leq C|t|, \ \forall \delta \leq |t| \leq M_\epsilon, \tag{C.3}$$

uma vez que os intervalos $[-M_\epsilon, -\delta]$ e $[\delta, M_\epsilon]$ são compactos, respectivamente. De (C.1), (C.2) e (C.3) obtemos

$$|f(x,t)| \leq (C_\infty + |\alpha|)|t|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$.

Afirmação: $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$$

é de classe C^1.

Considere $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(s) = F(x, u + stv)$. Observe que $h'(s) = f(x, u + stv)v$, $h(0) = F(x,u)$ e $h(1) = F(x, u + tv)$.

Pelo Teorema do Valor Médio existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$h(1) - h(0) = h'(\gamma)$$

de onde concluímos

$$\frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x, u + \gamma tv)v$$

Da condição (f_1) obtemos

$$|f(x, u + \gamma tv)v| \leq (C_\infty + |\alpha|)|u + \gamma tv||v| \in L^1(\Omega).$$

Além disso, para $t \to 0$ temos

$$f(x, u(x) + \gamma tv(x))v(x) \to f(x, u(x))v(x), \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} dx \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(x, u + \gamma tv)v dx \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(x,u)v dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$D\Phi(u)v = \int_\Omega f(x,u)vdx.$$

Afirmação: $D\Phi(\cdot)$ é contínuo em $H_0^1(\Omega)$.

De fato, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Assim, das imersões contínuas

$$u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega),\ q \in [1, 2^*], N \geq 3.$$

Do Teorema A.4, existe $g \in L^q(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x),\ \text{q.t.p em } \Omega$$

e

$|u_n(x)| \leq g(x),\ \text{q.t.p em } \Omega.$

Desde que f é uma função Carathéodory,

$$f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x)),\ \text{q.t.p em } \Omega,$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x, u_n)vdx = \int_\Omega f(x, u_)vdx,$$

isto é, tomando $||v|| \leq 1$, resulta

$$||D\Phi(u_n) - D\Phi(u)|| \to 0$$

para $n \to \infty$. Isto mostra que Φ é de classe C^1

Com um argumento análogo ao anterior obtemos que $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ para f satisfazendo

(f_1) a aplicação $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{|t|}$ é crescente q.t.p. em Ω, $\alpha(x) := \lim_{t\to 0} f(x,t)/|t| \geq 0$ e $\eta(x) := \lim_{|t|\to\infty} f(x,t)/|t|$ são funções em $L^\infty(\Omega)$.

De fato, basta notar que

$$|f(x,t)| \leq (|\alpha| + \epsilon)|t| \leq (||\alpha||_\infty + \epsilon)|t|, \ \forall 0 < |t| < \delta \text{ e } x \in \Omega. \tag{C.4}$$

$$|f(x,t)| \leq (||\eta||_\infty + \epsilon)|t| \leq (||\eta||_\infty + \epsilon)|t|, \ \forall |t| \geq M_\epsilon \text{ e } x \in \Omega \tag{C.5}$$

e

$$|f(x,t)| \leq C|t|, \ \forall \delta \leq |t| \leq M_\epsilon, \tag{C.6}$$

uma vez que os intervalos $[-M_\epsilon, -\delta]$ e $[\delta, M_\epsilon]$ são compactos, respectivamente. De (C.4), (C.5) e (C.6) obtemos

$$|f(x,t)| \leq (C_\infty)|t|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$.

Para mostrar que $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ o argumento segue o raciocínio considerado anteriormente.

Apêndice D

Resultados Importantes

Com o objetivo de esclarecer ao leitor algumas consequências das hipóteses considerada sobre a não linearidade f, apresentaremos o seguinte resultado

Lema D.1. *Suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory satisfazendo a condição*

(f_1) *a aplicação* $t \mapsto \dfrac{f(x,t)}{|t|}$ *é crescente q.t.p. em* Ω, $\alpha(x) := \lim_{t\to 0} f(x,t)/|t| \geq 0$ *e* $\eta(x) := \lim_{|t|\to\infty} f(x,t)/|t|$ *são funções em* $L^\infty(\Omega)$.

Então,

(i) $t \mapsto (1/2)f(x,t)t - F(x,t)$ *é crescente em* $(0,\infty)$ *e decrescente em* $(-\infty,0)$*;*

(ii) $t \mapsto F(x,t)/t^2$ *é crescente em* $(0,\infty)$ *e decrescente em* $(-\infty,0)$*;*

(iii) $f(x,t)/t > 2F(x,t)/t^2$ *para todo* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*;*

Demonstração

(i) Sejam $t_1 > t_2 > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_1) &= \frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_2) - \int_{t_2}^{t_1}\left[\frac{f(x,s)}{s}\right]sds \\
&> \frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_2) - \frac{f(x,t_1)}{t_1}\int_{t_2}^{t_1} sds \\
&= \frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_2) - \frac{f(x,t_1)}{t_1}\frac{(t_1^2 - t_2^2)}{2} \\
&= \frac{f(x,t_1)}{t_1}\frac{t_2^2}{2} - F(x,t_2) \\
&> \frac{1}{2}f(x,t_2)t_2 - F(x,t_2),
\end{aligned}$$

onde foi usado (f_1) nas duas últimas desigualdades. O outro caso é análogo.

Sejam agora $t_2 < t_1 < 0$. De modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_1) &= \frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_2) + \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{f(x,s)}{s}\right]sds \\
&< \frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_2) + \frac{f(x,t_2)}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} sds \\
&= \frac{1}{2}f(x,t_1)t_1 - F(x,t_2) + \frac{f(x,t_2)}{t_2}\frac{(t_2^2 - t_1^2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}f(x,t_2)t_2 - F(x,t_2) + \frac{t_1^2}{2}\left(\frac{f(x,t_1)}{t_1} - \frac{f(x,t_2)}{t_2}\right) \\
&< \frac{1}{2}f(x,t_2)t_2 - F(x,t_2).
\end{aligned}$$

(ii) Considere, para cada $x \in \Omega$, a função

$$t \longmapsto g(t) = \frac{1}{2}f(x,t)t - F(x,t).$$

Desde que $g(0) = 0$, por (i) obtemos

$$g(t) = \frac{1}{2}f(x,t)t - F(x,t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Isto mostra que $t \mapsto F(x,t)/t^2$ é crescente em $(0,\infty)$ pois

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(x,t)}{t^2}\right) = \frac{2}{t^3}g(t) > 0, \ \forall t \in (0,\infty)$$

Para o outro caso, observe que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(x,t)}{t^2}\right) = \frac{2}{t^3}g(t) < 0,\ \forall t \in (-\infty, 0)$$

Isto mostra que $t \mapsto F(x,t)/t^2$ é decrescente em $(-\infty, 0)$. O item (iii) segue diretamente do item (ii).

$\blacksquare$

Observação D.1. *Segue do lema anterior que* $\beta : \Omega \to (0, \infty]$ *está bem definida por*

$$\beta(x) := \lim_{|t|\to\infty} \left[(1/2)f(x,t)t - F(x,t)\right].$$

Apêndice E

Teoria do Gênero

Apresentaremos alguns resultados da teoria de gênero de Krasnoselski, para mais detalhes veja [5, 29].

Seja X um espaço de Banach e considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{E} = \{B \subset X; B \text{ é fechado e } B = -B\}$$

Definição E.1. *Dado $B \in \mathcal{E}$, definimos o gênero de Krasnoselski γ como sendo uma função $\gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definida por*

(i) $\gamma(B) = \inf\{n \in \mathbb{N};$ *existe* $\varphi \in C(B, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *ímpar*$\}$*;*

(ii) $\gamma(B) = \infty$ *se não existe* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\varphi \in C(B, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *ímpar;*

(iii) $\gamma(\emptyset) = 0.$

Observação E.1. *Note que dizer que $\gamma(B) = j$ equivale a dizer que j é o menor número natural tal que existe uma aplicação ímpar $\varphi \in C(B, \mathbb{R}^j \backslash \{0\})$*

Exemplo E.1. *Dado qualquer subconjunto fechado $A \subset X \backslash \{0\}$, temos que se $A \cap (-A) = \emptyset$ então $\gamma(A \cup (-A)) = 1$. De fato, seja $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e defina $\varphi : A \cup (-A) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(u) = a$ se $u \in A$ e $\varphi(u) = -a$ se $u \in -A$. Deste modo, φ é uma aplicação ímpar em $C(A \cup (-A), \mathbb{R} \backslash \{0\})$ e*

$$\gamma(A \cup (-A)) = 1.$$

Proposição E.1 (Propriedades de gênero)**.** *Sejam B e C conjuntos em $\mathcal{E}$.*

(i) *Se $x \neq 0$, então $\gamma(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$;*

(ii) *Se existe um aplicação ímpar $\varphi \in C(B, C)$, então $\gamma(B) \leq \gamma(C)$. Em particular, se $B \subset C$, então $\gamma(B) \leq \gamma(C)$.*

(iii) *Se existe um homeomorfismo ímpar $\varphi : B \to C$, então $\gamma(B) = \gamma(C)$. Em particular, se B é homeomorfo à esfera unitária de $\mathbb{R}^n$, então $\gamma(B) = n$.*

(iv) *Se B é um conjunto compacto, então existe uma vizinhança simétrica $K \in \mathcal{E}$ de B tal que $\gamma(B) = \gamma(K)$.*

(v) *Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A \backslash B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.*

(vi) *Se $\gamma(A) \geq 2$, então A tem infinitos pontos.*

Demonstração:

(i) É um caso especial do Exemplo E.1.

(ii) Suponha que $\gamma(C) = m$. Deste modo, existe uma aplicação ímpar $\phi \in C(C, \mathbb{R}^m \backslash \{0\})$. Consequentemente, $\phi \circ \varphi \in C(B, \mathbb{R}^m \backslash \{0\})$ é uma aplicação ímpar e

$$\gamma(B) \leq m = \gamma(C).$$

A segunda afirmação é uma consequência imediata da primeira considerando $\varphi = Id$. De fato, se $B \subset C$ então $\varphi : B \to C$, $\varphi(x) = x$ é uma aplicação ímpar em $C(B, C)$ e pela primeira parte

$$\gamma(B) \leq \gamma(C).$$

(iii) Segue diretamente do item (i).

(iv) Para cada $x \in B$ seja $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(-x) = \emptyset$. Então $C_x = B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(-x)$ é tal que $\gamma(C_x) = 1$. Como B é compacto, temos que existe um conjunto finito $\{x_1, ..., x_k\}$ tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^k C_{x_i}$. Deste modo, de (ii) obtemos

$$\gamma(B) \leq \sum_{i=1}^{k} \gamma(C_{x_i}) = k.$$

Além disso, se $\gamma(B) = n$, então existe uma aplicação ímpar $\varphi \in C(B, \mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, isto é, $\varphi \in C(B, \mathbb{R}^n)$ é tal que $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in B$. Por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in V_\epsilon(B)$, onde $V_\epsilon(B)$ é uma vizinhança fechada de B. Então $\gamma(N_\epsilon(B)) \leq n$. Por outro lado $B \subset V_\epsilon(B)$ implica por (ii) que $\gamma(B) \leq \gamma(V_\epsilon(B))$. Isto prova (iv).

(v) Como $A \subset B \cup \overline{(A \backslash B)}$, segue de (ii) que

$$\gamma(A) \leq \gamma(B) + \gamma(\overline{A \backslash B})$$

e como $\gamma(B)$ é finito, obtemos

$$\gamma(\overline{A \backslash B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B).$$

(vi) Suponha por contradição que A seja um conjunto com uma quantidade finita de pontos. Então podemos podemos escrever

$$A = F \cup (-F)$$

com F fechado e $F \cap (-F) = \emptyset$. Deste modo, obtemos uma contradição pois, $2 \leq \gamma(A) = 1 < 2$.

■

Bibliografia

[1] Ahmad S. Multiple non-trivial solutions of resonant and non-resonant asymptotically linear problems, *Proc. Amer. Math. Soc.* 96 , 405-409 (1987).

[2] Ahmad S., Lazer A. C. and Paul J. L. Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value at resonance, *Indiana Univ. Math. J.* 25, 933-944 (1976).

[3] Amann H. and Zehnder E. *Nontrivial solutions for a class of non resonant problems and applications to nonlinear differential equations*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 7 , 539-603 (1980).

[4] Ambrosettic A. Differential equations with multiple solutions and nonlinear functional analysis, *Equadiff. 1982; LN in Math.* **1017** 1-22 (1983).

[5] Ambrosetti A. and Rabinowitz P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Functional Analysis*, 14 , 349-381 (1973).

[6] Badiale M. and Serra E. Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach, Springer, 2011.

[7] Bartolo P., Benti V. and Fortunato D. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with s̈trong"resonance at infinity, *Nonlinear Anal.*, 7 , 981-1012 (1983).

[8] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations. New York: Springer. 2010.

[9] Brezis H. and Nirenberg L. Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to the boundary value problems, *Annali SW. norm. sup. Piss.* 5, 225-326 (1978).

[10] Brown, K. J. and Zhang Y. The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign changing weight function, *J. Differential Equations.* No. 193, 481-499 (2003).

[11] Costa D. G. An invitation to variational methods in differential equations, *Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.*

[12] Costa D. G. and Magalhães C. A. Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity, *Nonlin. Analysis*, 23 ,1401-1412 (1994).

[13] Dancer E. N. Degenerate critical points, homotopy indices and Morse inequalities, *J. Reine Angew. Math.*, **350**1-22 (1984).

[14] Drabek, P. and Pohozaev, S. I. Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A.* 703-726 (1997).

[15] Ekeland I. On the variational principle , *J. Math. Anal. Appl.*, 47 324-353 (1974).

[16] Figueiredo D. G. Positive solutions of semilinear elliptic problems in differential equations, *volume 957 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin-New York* (1982).

[17] Figueiredo D. G. and Miyagaki O. H. Semilinear elliptic equations with the primitive of the nonlinearity away from spectrum, *Nonlinear Anal.*, 17, 1201-1219 (1991).

[18] Figueiredo G. M. and Pimenta M. T. O. Nehari method for locally Lipsctz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions, preprint (2016).

[19] Figueiredo G. M. and Ramos H. Ground states of elliptic problems involving non homogeneous operators,*to appear in Indiana Univ. Math. J.* (2015).

[20] Figueiredo G. M. and Santos J. R. Multiplicity and concentration behavior of positive solutions for a Schrödinger-Kirchhoff type problem via penalization method, *ESAIM Control Optim. Calc. Var. 20* , no. 2, 389-415 (2014).

[21] Krasnoselski M. A. Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. *MacMillan, New York*, (1964).

[22] Landesman E. M. and Lazer A. C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary values problems at resonance, *J. marh. Mech.* 19, 609-623.

[23] Li G. and Zhou H. S. Multiple solutions to p-laplacian problems with asymptotic nonlinearity as u^{p-1} at infinity, *J. London Math. Soc.*, 65 123-138 (2002).

[24] Li S. J. and Willem M. *Applications of local linking to critical point theory. J. Math. Anal. Appl.*, 189 , 6-32 (1995).

[25] Li S. and Willem M. Multiple solutions for asymptotically linear boundary value problems in which the nonlinearity crosses at least one eigenvalue, *NoDEA*, 5 , 479-490 (1998).

[26] Liu J. Q. and Zou W. Multiple Solutions for Resonant Elliptic Equations via Local Linking Theory and Morse Theory. *Journal of Differential Equations*, 170 , 68 -95 (2001).

[27] Nehari Z. Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations, *Acta Math.* 105 , 141-175 (1961).

[28] Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 101-123 (1960)

[29] Rabinowitz P. H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations-AMS (1986)

[30] Struwe M. Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to nonlinear BVP, *Manuscripta Math.* 32 , 753-770 (1982).

[31] Struwe M. Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, *Springer*, (2008).

[32] Su J. Multiplicity results for asymptotically linear elliptic problems at resonance, *J. Math. Anal. Appl.* 278 397-408 (2003).

[33] Su J. and Zhao L. An elliptic resonance problem with multiple solutions, *J. Mah. Anal. Appl.*, 319 604-616 (2006).

[34] Szulkin A. and Weth T. The method of Nehari manifold, *Handbook of Nonconvex Analysis and Applications. D.Y. Gao and D. Montreanu eds., International Press, Boston,* 597-632 (2010).