



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

MODELOS TERMO-ELÁSTICOS E NÃO LOCAIS
DO TIPO TIMOSHENKO

Belém-PA

2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA UFPA/UFAM

MODELOS TERMO-ELÁSTICOS E NÃO LOCAIS DO TIPO TIMOSHENKO

João Carlos Pantoja Fortes
Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F738m Fortes, João Carlos Pantoja
Modelos Termo-Elásticos e não locais do tipo Timoshenko /
João Carlos Pantoja Fortes. — 2019.
93 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática
e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade
Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Modelos termo-elásticos. 2. Análise de dispersão. 3.
Hipótese de Elishakoff. 4. Estabilização exponencial. I. Título.

CDD 519.8

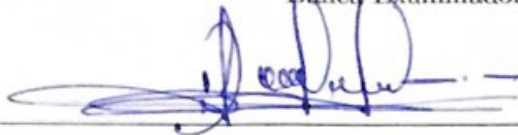
MODELOS TERMO-ELÁSTICOS E NÃO LOCAIS DO TIPO TIMOSHENKO

João Carlos Pantoja Fortes

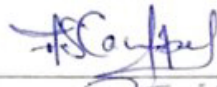
Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática da Universidade Federal do Pará (PDM-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Banca Examinadora



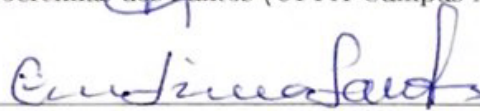
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (PDM-UFPA)



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (PPGME/PDM-UFPA)



Prof. Dr. Manoel Jeremias dos Santos (UFPA Campus Abaetetuba)



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (PDM-UFPA)



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (UFPA Campus Abaetetuba)

Data da defesa: 20/12/2019

Resultado: APROVADO

Resumo

MODELOS TERMO-ELÁSTICOS E NÃO LOCAIS DO TIPO DE TIMOSHENKO

João Carlos Pantoja Fortes

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática da Universidade Federal do Pará (PDM-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Nesta tese iremos efetuar a análise de dispersão em modelos do tipo termoelásticos de Timoshenko e para um modelo com efeito não local. Também mostraremos que os damping's considerados eliminam o espectro não físico. Tais modelos termoelásticos, com a hipótese de Elishakoff, são estabilizados exponencialmente sem precisar de qualquer relação entre os seus coeficientes, e por fim, nos modelos com efeito não local, abordaremos a existência e unicidade de solução e estabilização exponencial.

Palavras-chave: Modelos termoelásticos e não local de Timoshenko, análise de dispersão, hipótese de Elishakoff e estabilização exponencial.

Belém-Pará

2019

Abstract

THERMOELASTIC AND NONLOCAL MODELS OF TIMOSHENKO TYPE

João Carlos Pantoja Fortes

Advisor: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Abstract of Master's Thesis submitted to the Postgraduate Program in Mathematics, Federal University of Pará (UFPA-PDM) as part of the requirements for obtaining a Master's Degree in Mathematics .

In this thesis we will show the dispersion analysis in Timoshenko thermoelastic models and in a nonlocal effect model. We will also show that the damping's analysed eliminate the non-physical spectrum. These thermoelastic models, with the Elishakoff hypothesis, are exponentially stabilized without the need of any relationship between their coefficients, and finally, in models with nonlocal effect, we will address the existence and uniqueness of solution and exponential stabilization.

Keywords: Thermoelastic Timoshenko and nonlocal models; dispersion analysis; Elishakoff hypothesis and stabilization exponential.

Belém-Pará

2019

“Dedico as minhas avós Maria e Paixão que mesmo ao lado de Deus sempre estarão torcendo pelas minhas vitórias. E, também, à minha filha Ágatha que veio para renovar minhas energias e encher minha vida de felicidade e amor.”

“Paciência e tempo dão mais resultados do que a força e a raiva.”

(La Fontaine)

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por me dar esta oportunidade de ser um estudante de doutorado em matemática.

À CAPES pelo incentivo financeiro de suma importância, pois sem o mesmo não conseguiria desenvolver essa tese.

Aos meus familiares, em especial a minha mãe Terezinha do Socorro Pantoja Fortes, meu pai Edir Corrêa Fortes e a minha irmã Tamyris Pantoja Fortes por sempre me apoiarem e entender os estresses do dia-a-dia.

A minha esposa Jessica Bianca Silva e Silva por sempre estar ao meu lado nas horas mais difíceis e me confortar com suas palavras.

Ao meu orientador Dilberto da Silva Almeida Júnior que nunca se recusou a esclarecer minhas dúvidas e extrema paciência em repassar seu conhecimento e orientação excepcional.

E finalmente, porém não menos importante, aos meus amigos do GPAMN, em especial ao Marcos Lima, Manoel Jeremias e Leonardo, os quais sempre tiraram as minhas dúvidas e até mesmo pararam de fazer seus compromissos para me ajudar em algum momento de fraqueza.

A todos, meu muitíssimo obrigado.

Sumário

Introdução	9
1 Termo-elasticidade parabólica para sistemas do tipo Timoshenko	17
1.1 Análise de dispersão e conjecturas correlatas	17
1.2 Decaimento exponencial do modelo simplificado via critério de Routh-Hurwitz . .	22
1.3 Decaimento exponencial sem o segundo espectro de frequência	26
2 Termo-elasticidade hiperbólica para sistemas do tipo Timoshenko	32
2.1 Análise de dispersão e conjecturas correlatas	32
2.2 Decaimento exponencial do modelo simplificado via critério de Routh-Hurwitz . .	38
2.3 Decaimento exponencial sem o segundo espectro de frequência	43
3 O modelo de Timoshenko não local e análise de dispersão	50
3.1 A caracterização dos espectros	50
3.2 A eliminação do segundo espectro	55
4 Boa colocação de solução do modelo de Timoshenko não local	59
4.1 Boa colocação com efeito não local nas equações de deslocamento e de rotação .	59
4.2 Boa colocação de solução com efeito não local na equação de deslocamento . . .	63
4.3 Boa colocação de solução com efeito não local na equação de rotação	66
4.4 Boa colocação com efeito não local geral e com damping tipo Kelvin-Voigt	69
5 O cenário de estabilidade exponencial	73
5.1 Damping viscoso com efeito não local em ambas as equações	73
5.2 Damping viscoso com efeito não local na equação de deslocamento	76
5.3 Damping viscoso com efeito não local na equação de rotação	80

5.4 Damping tipo Kelvin-Voigt com efeito não local em ambas as equações	82
6 Conclusões e Perspectivas	87
Referências Bibliográficas	89

Introdução

Na literatura, as teorias de pequenas oscilações em estruturas flexíveis do tipo vigas é amplamente utilizada para vários objetivos na engenharia, matemática pura e análise numérica, e todos esses modelos de vigas têm várias e importantes aplicações na alta tecnologia de estruturas flexíveis. É bem conhecido que as teorias de vigas mais comuns são a equação de Euler-Bernoulli, a equação de Rayleigh e a equação Timoshenko. Claro que existem diferenças entre tais teorias assim como em suas frequências naturais. Historicamente, a teoria de vigas de Rayleigh é uma melhoria a teoria de Euler-Bernoulli (remonta ao século XVIII) e a teoria de vigas de Timoshenko é uma melhoria na teoria de Rayleigh.

O modelo de vigas de Euler-Bernoulli inclui elementos de viga de deslocamento vertical e de flexão, mas negligencia a inércia rotatória e a deformação por cisalhamento. Como consequência, o modelo de vigas de Euler-Bernoulli tende a superestimar as frequências naturais, e o modelo de vigas de Rayleigh, incluindo a inércia rotatória, corrige parcialmente essas superestimações. Por sua vez, o modelo de viga de Timoshenko é reconhecido por representar uma teoria mais completa, pois este modelo inclui o efeito da força de cisalhamento, bem como o efeito da inércia rotatória. Estas suposições oferecem uma grande melhoria para vigas não-delgadas e para respostas de alta frequência. Nessa direção, tendo em conta que estas equações são parabólicas ou hiperbólicas, a velocidade de propagação de ondas desempenha um papel importante na natureza dispersiva desses modelos.

O modelo de vigas de Euler-Bernoulli é governado por uma equação parabólica e prevê que comprimento de ondas infinitamente curtos viajam com velocidade infinita. Naturalmente, isso é oposto à realidade física e constitui a principal crítica no modelo de vigas de Euler-Bernoulli. É claro que existem razões pelas quais o modelo de vigas de Euler-Bernoulli quebra em alta frequência e um deles é que os elementos da viga permanecem retangulares durante o

movimento. Por outro lado, o efeitos de onda do modelo de viga de Rayleigh são mais realistas em comparação ao modelo de viga de Euler-Bernoulli, pois as ondas se propagam com velocidade finita em alta frequência. No entanto, o modelo de viga Rayleigh não leva em conta a deformação de cisalhamento. No caminho oposto, o modelo de viga de Timoshenko inclui a inércia rotatória e a deformação de cisalhamento em que tais hipóteses geram uma equação hiperbólica que tem uma velocidade finita de propagação de ondas do primeiro espectro. Entretanto, a combinação entre essas duas hipóteses introduz um novo espectro conhecido como segundo espectro no qual resulta uma velocidade infinita de propagações de ondas em frequência curta.

Agora, vamos descrever os modelos citados no cenário unidimensional. Do ponto de vista matemático, o clássico modelo de Euler-Bernoulli para vibrações de uma viga uniforme é:

$$\rho Ay_{tt} + EIy_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

onde ρ é a densidade da massa do material, A é a área da seção transversal, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da área de seção transversal, y é a deflexão da viga em sua posição de equilíbrio, t é o tempo, x é a distância ao longo da linha central da viga, $(\cdot)_t$ indica a derivada com relação ao tempo t e $(\cdot)_x$ indica a derivada com relação a variável espacial x . Lord Rayleigh incluiu movimentos rotatórios no modelo de Euler-Bernoulli. Do ponto de vista da modelagem de vibrações de vigas, um ângulo de rotação é igual a inclinação da curva de deflexão, no qual é y_x e a aceleração angular é dada por y_{ttx} . Como consequência, o momento de inércia dos elementos da viga é $\rho I y_{ttx} dx$ e incorporando esse momento e mais o princípio de D'Alembert's, temos

$$\rho I y_{ttx} - M_x + S = 0, \quad (2)$$

onde S denota a força de cisalhamento e M o momento de torce. Substituindo S no equilíbrio dinâmico (de acordo com a lei de Newton), teremos

$$S_x = (M_x - \rho I y_{ttx})_x = -\rho A y_{tt}. \quad (3)$$

Da teoria de elasticidade, temos que $M = EI y_{xx}$ e assim resulta no modelo de Rayleigh para vibrações de vigas uniformes dada por

$$\rho A y_{tt} + EI y_{xxxx} - \rho I y_{ttxx} = 0. \quad (4)$$

Em (TIMOSHENKO,1921), descreve-se um modelo de viga e mostra-se como o efeito de cisalhamento deve ser levado em conta nos estudos das vibrações transversais de vigas. Ele melhorou

o modelo de Rayleigh e de Euler-Bernoulli incorporando a deformação de cisalhamento. Devido a essa hipótese, Timoshenko considerou que

$$y_x = \beta - \psi, \quad (5)$$

em que ψ corresponde a rotação da seção transversal e β é o ângulo associado com o cisalhamento na mesma seção transversal. Da teoria elástica, temos:

$$M = EI\psi_x, \quad (6)$$

$$S = k'\beta AG = k'AG(y_x + \psi), \quad (7)$$

em que G é o módulo de cisalhamento e k' é o fator de cisalhamento transversal. Desse novo ponto de vista, Timoshenko leva em conta outro equilíbrio dinâmico. Em particular, ele substituiu o equilíbrio dinâmico por:

$$\rho I \psi_{tt} - M_x + S = 0, \quad (8)$$

bem como a condição de equilíbrio dinâmico para forças na direção vertical dada por:

$$\rho A y_{tt} - S_x = 0. \quad (9)$$

Assim, dessas equações, Timoshenko estabeleceu um novo modelo para vibrações de vigas dada pelo seguinte sistema acoplado de equações hiperbólicas

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x - \psi)_x = 0, \quad (10)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_t - \psi) = 0. \quad (11)$$

Aqui, $\rho_1 = \rho A$, $k = k'GA$, $\rho_2 = \rho I$ e $b = EI$. Esse modelo inclui os efeitos da curvatura, do deslocamento vertical, da deformação de cisalhamento e a rotação de inércia.

Porém, tal modelagem nos fornece duas velocidades de propagação. A primeira corrige o aspecto não físico do modelo de Euler-Bernoulli (primeiro espectro) e a segunda, existe a inconsistência física no regime de baixa frequência conhecida como o segundo espectro.

Perguntas pertinentes aparecem de forma natural como:

- Existe um sistema de equações diferenciais parciais do tipo Timoshenko que exista somente o espectro físico?
- Efeitos dissipativos eliminam o segundo espectro?

- Qual é a relação do cenário de estabilidade com o espectro não físico?

Em (ELISHAKOFF,2010), na sua teoria, combinando a equação (2) que veio do princípio de D'Alembert's mais (9) resulta no seguinte sistema acoplado

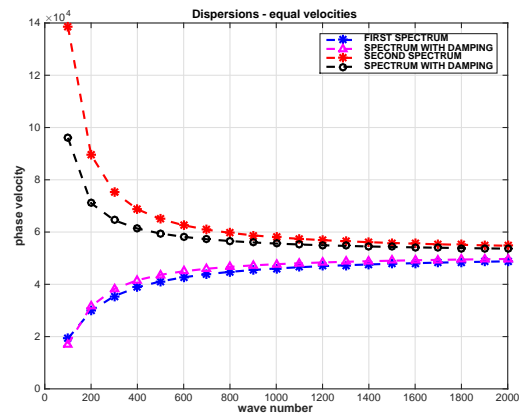
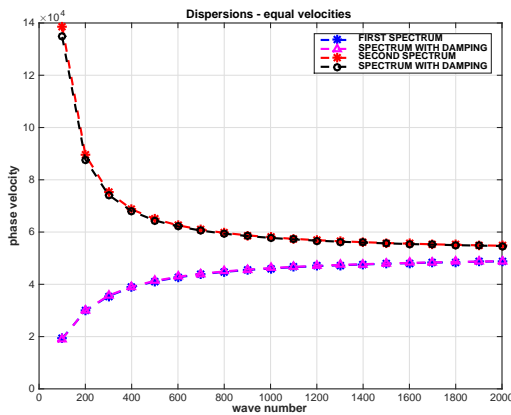
$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x - \psi)_x = 0, \tag{12}$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + k(y_t - \psi) = 0. \tag{13}$$

O sistema acima preserva todas as propriedades físicas conjecturadas resolvidas por Timoshenko e além disso, é livre do segundo espectro. Logo, esse sistema seria o que admite apenas o espectro físico.

Já em relação ao segundo questionamento, alguns pesquisadores mostraram uma resposta positiva a essa questão. A primeira contribuição nesta direção foi dada em (MANEVICH, KOLAKOWSKI,2015), onde os mesmos analisaram uma dinâmica do modelo de Timoshenko no qual o damping do tipo elástico elimina o segundo espectro. Uma notável consequência disso é se outros tipos de damping tem a mesma propriedade.

Por exemplo, em (ALMEIDA JÚNIOR,RAMOS,2017), os autores consideração o sistema de (RIVERA,RACKE,2003) e mostraram que o damping do tipo atrito elimina o segundo espectro.



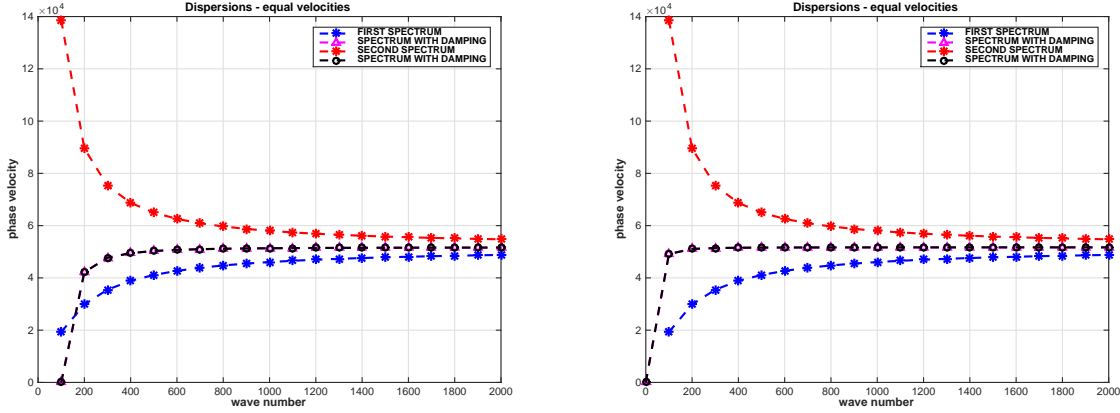


Figura 1: Gráfico da dispersão para o sistema de Timoshenko conservativo (cores azul e vermelha) e dissipativo (cores magenta e preta). No caso dissipativo tomamos a parte dos valores reais da velocidade e parâmetro de damping usamos $j\sqrt{k\rho_2}$, $j = \frac{1}{2}, 1, 3, 4$. Para $\mu \geq \sqrt{k\rho_2}$ podemos observar que o segundo espectro começa a ser truncado para comprimentos de onda suficientemente pequenos de tal forma que resta apenas o espectro físico.

Por fim, em relação ao último questionamento, na literatura temos vários resultados de sistemas dissipativos de Timoshenko cujo eles são exponencialmente estáveis se, e somente, existe alguma relação entre seus coeficientes. A mais conhecida é a relação entre as velocidades, ou seja,

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}. \quad (14)$$

Em (RIVERA,RACKE,2003) mostraram que o sistema de Timoshenko com damping do tipo atrito decai exponencialmente se, e somente se, (14) ocorre. Todavia, temos que

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \Rightarrow \frac{k'GA}{\rho A} = \frac{EI}{\rho I} \Rightarrow G = \frac{E}{k'}, \quad (15)$$

em que $0 < k' < \frac{1}{2}$. Fisicamente, a relação entre os módulos G e E é dada por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (16)$$

em que ν é a razão de Poisson tal que $\nu \in (0, \frac{1}{2})$. Assim, temos que a relação entre as velocidades é um fenômeno não físico.

Baseado em estudos e trabalhos publicados, temos que apesar do damping ter a propriedade de eliminar o segundo espectro, a estabilidade só é atingida se houver alguma relação entre os seus coeficientes. Desta forma, ainda teremos um sistema não físico.

Sendo assim, será que existe um sistema livre do segundo espectro e que tenha decaimento exponencial sem precisar de qualquer relação entre os seus coeficientes? Também em (ALMEIDA JÚNIOR, RAMOS, 2017) os autores mostraram que o sistema

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x - \psi)_x = 0, \quad (17)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + k(y_t - \psi) + \mu\psi_t = 0, \quad (18)$$

decai exponencialmente sem precisar da relação das velocidades.

Motivados por esses resultados o trabalho a seguir está dividido da seguinte forma:

- No primeiro capítulo, consideraremos o modelo dado em (RIVERA,RACKE,2002) cujo o mesmo é dado por:

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (19)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (20)$$

$$\rho_3 \theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (21)$$

com as condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0. \quad \forall t > 0 \quad (22)$$

Aqui efetuaremos a análise de dispersão e pela expansão assintótica, mostraremos que o damping do tipo atrito elimina o segundo espectro e simularemos tal eliminação.

Em seguida, combinaremos com hipótese de Elishakoff, que nos dá o seguinte sistema

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (23)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (24)$$

$$\rho_3 \theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (25)$$

com as condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (26)$$

Provaremos que esse sistema é exponencialmente estável sem precisar de nenhuma relação entre as velocidades, via critério de Routh-Hurwitz e método da energia.

- No segundo capítulo, (SANTOS, ALMEIDA JÚNIOR, RIVERA, 2012) consideram o seguinte modelo

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (27)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (28)$$

$$\rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (29)$$

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (30)$$

com condições de contorno

$$y(\bar{x}, t) = \psi_x(\bar{x}, t) = \theta(\bar{x}, t) = q_x(\bar{x}, t) = 0, \quad \bar{x} = 0, L \quad \forall t > 0. \quad (31)$$

E mostraremos que o damping do tipo Cattaneo nesse modelo também elimina o segundo espectro via análise de dispersão, expansão assintótica e por simulação numérica.

Após isso, consideraremos o mesmo modelo, porém livre do segundo espectro, ou seja,

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (32)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (33)$$

$$\rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (34)$$

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (35)$$

com condições de contorno

$$y(\bar{x}, t) = \psi_x(\bar{x}, t) = \theta(\bar{x}, t) = q_x(\bar{x}, t) = 0, \quad \bar{x} = 0, L \quad \forall t > 0. \quad (36)$$

Cujo o mesmo decai exponencialmente, via critério de Routh-Hurwitz e método da energia, sem precisar de nenhuma relação entre seus coeficientes.

- No terceiro capítulo, iremos abordar a análise de dispersão do modelo de Timoshenko com o efeito não local. O mesmo é trabalhado em (ZHANG,2013) no qual a modelagem é uma combinação da inércia rotatória, deformação de cisalhamento, teoria da elasticidade e a relação constitutiva generalizada do efeito não local, que nos resulta no seguinte modelo:

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x - \alpha l^2 \rho_1 y_{ttxx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (37)$$

$$\rho_2 (\psi_{tt} - l^2 \psi_{ttxx}) - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) - (1 - \alpha) l^2 \rho_1 y_{ttx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (38)$$

com condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, L) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (39)$$

Ressaltamos que o efeito não local é indicado pelos termos que são acompanhados pelo parâmetro intrínseco l e, também, quando adicionamos o o termo viscoso (ψ_t) na equação de rotação, o segundo espectro é eliminado.

- No quarto capítulo, provaremos a existência e unicidade de solução do modelo de Timoshenko não local, sendo que iremos considerar o efeito não local em ambas as equações, apenas na equação do deslocamento e apenas na equação de rotação. Tal consideração são por motivos de mudanças nas condições de contorno (o efeito não local está unido com a condição de Dirichlet) e tipos de mecanismos dissipativos considerados (viscoso e Kelvin-Voigt).
- Por fim, no quinto capítulo, trabalharemos o cenário de estabilidade exponencial dos modelos do capítulo 4.

Capítulo 1

Termo-elasticidade parabólica para sistemas do tipo Timoshenko

Apresentaremos neste capítulo a análise de dispersão do modelo de Timoshenko com a lei de Fourier. O mecanismo dissipativo do mesmo elimina o segundo espectro, conforme iremos mostrar nas simulações numéricas a sua eliminação.

1.1 Análise de dispersão e conjecturas correlatas

Consideremos o seguinte sistema linear

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (1.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \tilde{\gamma}\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (1.2)$$

$$\rho_3 \theta_t - \tilde{k}\theta_{xx} + \tilde{\gamma}\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (1.3)$$

com constantes positivas ρ_1, k, ρ_2, b definidas na introdução, $\rho_3, \tilde{\gamma}, \tilde{k}$ constantes positivas já conhecidas da literatura e, com as condições iniciais

$$\begin{aligned} y(., 0) &= y_0, & y_t(., 0) &= y_1 & \psi(., 0) &= \psi_0, & \psi_t(., 0) &= \psi_1, \\ \theta(., 0) &= \theta_0 & \forall x \in (0, L), \end{aligned} \quad (1.4)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0. \quad \forall t > 0 \quad (1.5)$$

Para efetuarmos a análise de dispersão, consideremos que a solução do sistema é do tipo harmônica, ou seja,

$$y = Ae^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \psi = Be^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \theta = Ce^{i(\gamma x + \omega t)}. \quad (1.6)$$

Aqui, A , B e C são as amplitudes referentes a y , ψ e θ , respectivamente. γ é o número de ondas e ω é a frequência. Assim, substituindo na equação (1.1) obteremos:

$$- \rho_1 A \omega^2 + k A \gamma^2 - k B i \gamma = 0.$$

De onde resulta

$$\frac{A}{B} = \frac{i k \gamma}{k \gamma^2 - \rho_1 \omega^2}. \quad (1.7)$$

Em (1.2),

$$- \rho_2 B \omega^2 + b B \gamma^2 + k i A \gamma + k B + \tilde{\gamma} C i \gamma = 0.$$

De onde obtemos

$$\frac{A}{B} = \frac{\rho_2 \omega^2 - b \gamma^2 - k}{i k \gamma} - \frac{\tilde{\gamma} C}{k B}. \quad (1.8)$$

Em (1.3),

$$- \tilde{\gamma} \omega \gamma B + \rho_3 i \omega C + \tilde{k} \gamma^2 C = 0,$$

ou seja,

$$\frac{C}{B} = \frac{\tilde{\gamma} \gamma \omega}{i \rho_3 \omega + \tilde{k} \gamma^2}. \quad (1.9)$$

Combinando (1.7), (1.8) e (1.9), segue

$$\frac{i k \gamma}{k \gamma^2 - \rho_1 \omega^2} = \frac{i \rho_2 \rho_3 \omega^3 + \rho_2 \tilde{k} \gamma^2 \omega^2 - i b \rho_3 \gamma^2 \omega - \tilde{k} \gamma^4 - i k \rho_3 \omega - \tilde{k} \gamma^2 - i \tilde{\gamma}^2 \gamma^2 \omega}{-k \rho_3 \gamma \omega + i \tilde{k} \gamma^3}. \quad (1.10)$$

Portanto obtemos a seguinte equação de dispersão

$$\begin{aligned} & - i \rho_1 \rho_2 \rho_3 \omega^5 - \rho_1 \rho_2 \tilde{k} \gamma^2 \omega^4 + i (k \rho_2 \rho_3 \gamma^2 + b \rho_1 \rho_3 \gamma^2 + k \rho_1 \rho_3 + \rho_1 \tilde{\gamma}^2 \gamma^2) \omega^3 \\ & + (\rho_2 \tilde{k} \gamma^4 + \rho_1 b \tilde{k} \gamma^4 + \rho_1 \tilde{k} \gamma^2) \omega^2 - i (k b \rho_3 \gamma^4 + k \tilde{\gamma}^2 \gamma^4) \omega - b \tilde{k} \gamma^6 = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Por outro lado, podemos também obter a equação de dispersão em função da velocidade. De fato, sabe-se da identidade física que $\omega = \gamma c$, logo substituindo em (1.11) obteremos:

$$\begin{aligned}
 & - i\rho_1\rho_2\rho_3\gamma^5c^5 - \rho_1\rho_2\tilde{k}\gamma^6c^4 + i(k\rho_2\rho_3\gamma^5 + b\rho_1\rho_3\gamma^5 + k\rho_1\rho_3\gamma^3 + \rho_1\tilde{\gamma}^2\gamma^5)c^3 \\
 & + (\rho_2k\tilde{k}\gamma^6 + \rho_1b\tilde{k}\gamma^6 + \rho_1k\tilde{k}\gamma^4)c^2 - i(kb\rho_3\gamma^6 + k\tilde{\gamma}^2\gamma^6)c - bk\tilde{k}\gamma^6 = 0.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Note que existe uma dificuldade para determinarmos a solução explícita da equação de dispersão. Desta forma usaremos o método da expansão assintótica dado em (MORI,2018) e (NAYFEH,1993) na qual consiste em assumir uma forma aproximada para a solução quando $\gamma \rightarrow 0$. Tal forma, para $\gamma \rightarrow 0$, é dada pela seguinte aproximação:

$$c(\gamma) = a_j^{(0)} + a_j^{(1)}\gamma + a_j^{(2)}\gamma^2 + a_j^{(3)}\gamma^3 + a_j^{(4)}\gamma^4 + \dots \tag{1.13}$$

Substituindo em (1.12) produzimos:

$$\begin{aligned}
 & + i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)3}\gamma^3 + \left(3i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)2}a_j^{(1)} + \rho_1k\tilde{k}a_j^{(0)2}\right)\gamma^4 + \left(-i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)5} + i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)3} + i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)3}\right. \\
 & + i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)3} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)2}a_j^{(2)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(1)2} - i\rho_3bka_j^{(0)} - ik\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)} + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(1)}\left.)\gamma^5\right. \\
 & + \left(-5i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)4}a_j^{(1)} + 3i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)2}a_j^{(1)} + 3i\rho_1\tilde{\gamma}a_j^{(0)2}a_j^{(1)} + 3i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)}2a_j^{(1)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)2}a_j^{(3)}\right. \\
 & + 6i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(2)} + i\rho_1\rho_3ka_j^{(1)3} - \rho_1\rho_2\tilde{k}a_j^{(0)4} - i\rho_3kba_j^{(1)} - ik\tilde{\gamma}^2a_j^{(1)} + \rho_1b\tilde{k}a_j^{(0)2} + \rho_2k\tilde{k}a_j^{(0)2} + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(2)} \\
 & + \rho_1k\tilde{k}a_j^{(1)2} - bk\tilde{k}\left.)\gamma^6 + \left(3i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)}a_j^{(1)2} + 6i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(1)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)2}a_j^{(4)} - ik\tilde{\gamma}^2a_j^{(2)} + 3i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)}a_j^{(2)}\right. \right. \\
 & - i\rho_3bka_j^{(2)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(2)2} + 3i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)2}a_j^{(2)} - 5i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)4}a_j^{(2)} + 3i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)2}a_j^{(2)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(1)2}a_j^{(2)} \\
 & - 10i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)3}a_j^{(1)2} - 4\rho_1\rho_2\tilde{k}a_j^{(0)3}a_j^{(1)} + 3i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(1)2} + 3i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)}a_j^{(1)2} + 2\rho_1b\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(1)} + 2\rho_2k\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(1)} \\
 & + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(3)} + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(1)}a_j^{(2)}\left.)\gamma^7 + \left(i\rho_2\rho_3ka_j^{(1)3} + i\rho_1\rho_3ba_j^{(1)3} + 3i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)2}a_j^{(3)} + i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(1)3}\right. \right. \\
 & - 5i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)4}a_j^{(3)} - 10i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)2}a_j^{(1)3} - 4\rho_1\rho_2\tilde{k}a_j^{(0)3}a_j^{(2)} + 6i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(2)} + 6\rho_1\rho_2\tilde{k}a_j^{(0)2}a_j^{(1)2} \\
 & + 2\rho_1b\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(2)} + 2\rho_2k\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(2)} + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(4)} + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(1)}a_j^{(3)} - i\rho_3bka_j^{(3)} + \rho_1k\tilde{k}a_j^{(2)2} + \rho_1b\tilde{k}a_j^{(1)2} \\
 & + \rho_2k\tilde{k}a_j^{(1)2} + 6i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(2)} + 6i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(4)} + 6i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(2)}a_j^{(3)} - 20i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)3}a_j^{(1)}a_j^{(2)} \\
 & + 3i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)2}a_j^{(3)} + 3i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)2}a_j^{(3)} + 6i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(2)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(1)2}a_j^{(3)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(1)}a_j^{(2)2} - ik\tilde{\gamma}^2a_j^{(3)}\left.)\gamma^8\right. \\
 & + \left(3i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)2}a_j^{(4)} + 3i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)}a_j^{(2)2} + 3i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(1)2}a_j^{(2)} - 20i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)3}a_j^{(1)}a_j^{(3)} - 30i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)2}a_j^{(1)2}a_j^{(2)}\right. \\
 & + 6i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(3)} + 6i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(3)} - ik\tilde{\gamma}^2a_j^{(4)} + 2\rho_1b\tilde{k}a_j^{(1)}a_j^{(2)} + 2\rho_2k\tilde{k}a_j^{(1)}a_j^{(2)} + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(1)}a_j^{(4)} \\
 & + 2\rho_1k\tilde{k}a_j^{(2)}a_j^{(3)} + 6i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(2)}a_j^{(4)} + 6i\rho_1\rho_3ka_j^{(1)}a_j^{(2)}a_j^{(3)} - i\rho_3bka_j^{(4)} - 4\rho_1\rho_2\tilde{k}a_j^{(0)3}a_j^{(3)} - 12\rho_1\rho_2\tilde{k}a_j^{(0)2}a_j^{(1)}a_j^{(2)} \\
 & + i\rho_1\rho_3ka_j^{(2)3} - 5i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)4}a_j^{(4)} - 10i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)3}a_j^{(2)2} - 5i\rho_1\rho_2\rho_3a_j^{(0)}a_j^{(1)4} + 3i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)2}a_j^{(4)} \\
 & + 3i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)2}a_j^{(4)} + 6i\rho_1\tilde{\gamma}^2a_j^{(0)}a_j^{(1)}a_j^{(3)} + 3i\rho_1\rho_3ba_j^{(0)}a_j^{(2)2} + 3i\rho_2\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(2)2} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(0)}a_j^{(3)2} \\
 & + 3i\rho_1\rho_3ba_j^{(1)2}a_j^{(2)} + 3i\rho_2\rho_3ka_j^{(1)2}a_j^{(2)} + 3i\rho_1\rho_3ka_j^{(1)2}a_j^{(4)} - 4\rho_1\rho_2\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(1)3} + 2\rho_1b\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(3)} + 2\rho_2k\tilde{k}a_j^{(0)}a_j^{(3)}\left.)\gamma^9\right. \\
 & + \dots = 0,
 \end{aligned}$$

e calculando $a_j^{(n)}$ com $j = 1, \dots, 5$ e $n = 0, 1, \dots$ obteremos:

$$a_j^{(0)} = 0; a_j^{(1)} = i \begin{cases} S + T - \frac{1}{3}m_2, \\ -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}m_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}(S - T) \end{cases}; a_j^{(2)} = 0;$$

$$a_j^{(3)} = -\frac{\tilde{k}(k\rho_2 + b\rho_1)a_j^{(1)2} + i(k\rho_2\rho_3 + b\rho_1\rho_3 + \tilde{\gamma}\rho_1)a_j^{(1)3}}{k\left(2\tilde{k}\rho_1a_j^{(1)} - i(b\rho_3 + \tilde{\gamma}^2 - 3\rho_1\rho_3a_j^{(1)2})\right)}; a_j^{(4)} = 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Em que

$$m_2 = \frac{\tilde{k}}{\rho_3}; \quad m_1 = \frac{\tilde{\gamma}^2}{\rho_1\rho_3} + \frac{b}{\rho_1}; \quad m_0 = \frac{b\tilde{k}}{\rho_1\rho_3}; \quad Q = \frac{3m_1 - m_2^2}{9},$$

$$R = \frac{9m_1m_2 - 27m_0 - 2m_2^3}{54}; \quad S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}; \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}.$$

Observação: Caso $Q^3 + R^2 < 0$, então

$$a_j^{(2)} = \begin{cases} 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right); \\ 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{2}{3}\pi\right); \\ 2\sqrt{-Q} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{4}{3}\pi\right). \end{cases} \quad \cos\theta = -\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$$

Daí, tomando a parte real, podemos concluir que teremos a seguinte aproximação para solução em c :

$$Re\ c(\gamma) = a_j^{(1)}\gamma + a_j^{(3)}\gamma^3 + O(\gamma^4), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (1.14)$$

Sendo assim, quando $\gamma \rightarrow 0$ obteremos:

$$Re\ c(\gamma) = 0. \quad (1.15)$$

Ou seja, o mecanismo dissipativo do sistema elimina o segundo espectro. Desta forma, provamos o seguinte resultado:

5

Teorema 1.1 As soluções do tipo harmônicas de (1.1) – (1.5) são dadas por

$$y = Ae^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \psi = Be^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \theta = Ce^{i(\gamma x + \omega t)},$$

em que A, B, C são as amplitudes de y, ψ, θ respectivamente, e as velocidades de fases $c_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ satisfazem a seguinte equação

$$l_5 c^5 + l_4 c^4 + l_3 c^3 + l_2 c^2 + l_1 c + l_0 = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} l_5 &= -i\rho_1\rho_2\rho_3\gamma^5, \\ l_4 &= -\rho_1\rho_2\tilde{k}\gamma^6, \\ l_3 &= i(k\rho_2\rho_3\gamma^5 + b\rho_1\rho_3\gamma^5 + k\rho_1\rho_3\gamma^3 + \rho_1\tilde{\gamma}^2\gamma^5), \\ l_2 &= (\rho_2k\tilde{k}\gamma^6 + \rho_1b\tilde{k}\gamma^6 + \rho_1k\tilde{k}\gamma^4), \\ l_1 &= -i(kb\rho_3\gamma^6 + k\tilde{\gamma}^2\gamma^6), \\ l_0 &= -bk\tilde{k}\gamma^6. \end{aligned}$$

Em particular, c_2 tem velocidade no regime de baixa frequência tendendo a zero.

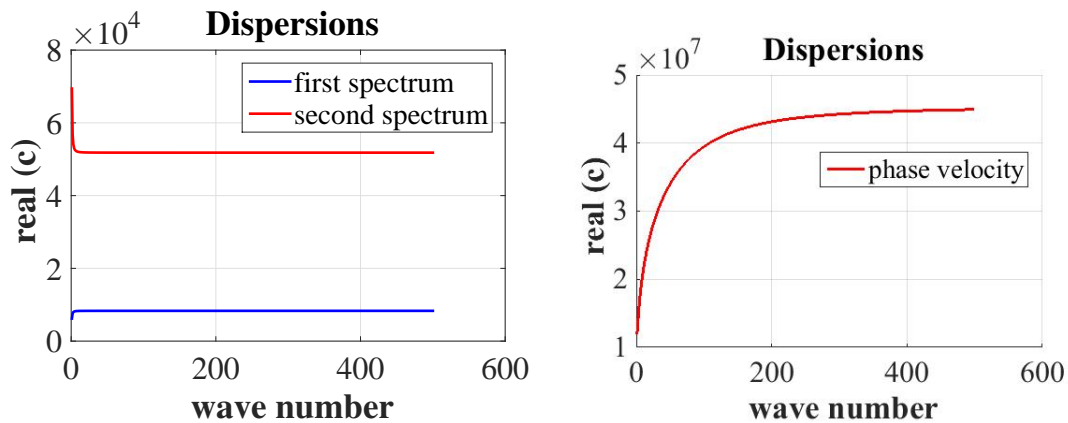


Figura 2: Número de ondas (γ) vs velocidade (c). Na figura à esquerda temos a análise de dispersão sem levar em consideração o damping do tipo Fourier. Note que as duas curvas são dispersivas e mostram um comportamento estável em alta frequência. A primeira curva que caracteriza o primeiro espectro (cor azul) se propaga por todo o domínio do espectro. Já a segunda curva que caracteriza o segundo espectro (cor vermelha) mostra uma velocidade infinita para valores próximos da frequência crítica. No entanto, na figura à esquerda, temos que tal anomalia é corrigida quando há a inserção do damping. Para essa simulação, usamos o tamanho $L = \pi$, $E = 21 \times 10^{12}$, $\rho = 7860$, $k' = 5/6$, $I = 0.0001171$ e $A = 3 \times 10^{-3}$. O domínio da dispersão foi tomado no intervalo $[-500, 500]$ e $G = 77.5 \times 10^{10}$. Por fim, tomamos a parte real dos valores cujo o parâmetro de damping utilizado foi $j\sqrt{k\rho_2(1 + \rho_3 + \tilde{\gamma})}$, $j \in \{0, 4\}$.

A seguir, mostraremos que combinando a hipótese de Elishakoff com o modelo (1.1) – (1.5), ou seja, um modelo livre do segundo espectro, decai exponencialmente sem precisar de nenhuma relação entre os seus coeficientes via critério de Routh-Hurwitz.

1.2 Decaimento exponencial do modelo simplificado via critério de Routh-Hurwitz

Vimos anteriormente que o sistema (1.1) – (1.5) tem o segundo espectro e que o damping do tipo Fourier o elimina. Porém, sabe-se da literatura que o mesmo decai exponencialmente se, e somente se, a relação das velocidades forem iguais, o qual (fisicamente) não tem relação. O objetivo agora é mostrar que existe um sistema do tipo Timoshenko com Fourier totalmente físico, ou seja, um sistema que não exista o segundo espectro e que tenha estabilidade exponencial sem precisar de nenhuma relação entre os seus coeficientes. De acordo com a modelagem de Elishakoff, tal sistema em termos leigos é dado na troca de ψ_{tt} por $-y_{tt}$. Desta forma, o sistema livre do segundo espectro será dado por

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (1.16)$$

$$-\rho_2 y_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (1.17)$$

$$\rho_3 \theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (1.18)$$

com constantes positivas $\rho_1, k, \rho_2, b, \rho_3, \kappa$ e com as condições iniciais

$$\begin{aligned} y(., 0) &= y_0; & y_t(., 0) &= y_1; & \psi(., 0) &= \psi_0; & \psi_t(., 0) &= \psi_1; \\ \theta(., 0) &= \theta_0, & \forall x \in (0, L) \end{aligned} \quad (1.19)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0. \quad \forall t > 0 \quad (1.20)$$

Para mostrarmos o decaimento exponencial, iremos usar o critério de Routh-Hurwitz.

O Critério de Routh-Hurwitz, usada em (QUINTANILLA,2003), considera para ϵ suficientemente pequeno que existe uma solução do problema (1.16) – (1.19) na forma harmônica dada por

$$y(x, t) = Ae^{\omega t} \sin(nx) \quad , \quad \psi(x, t) = Be^{\omega t} \cos(nx), \quad \theta(x, t) = Ce^{\omega t} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.21)$$

tal que substituindo em (1.16), (1.17) e (1.18) obtemos soluções que podem estar tanto à direita quanto à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$.

Desta forma, substituindo (1.21) em (1.16) obteremos,

$$\frac{A}{B} = -\frac{kn}{\rho_1\omega^2 + kn^2}. \quad (1.22)$$

Em (1.17)

$$\frac{A}{B} = -\frac{bn^2 + k}{kn - \rho_2\omega^2 n} - \frac{C}{B} \cdot \frac{\gamma n}{kn - \omega^2 n}. \quad (1.23)$$

Em (1.18)

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma\omega n}{\rho_3\omega + \kappa n^2}. \quad (1.24)$$

Segue da combinação de (1.22), (1.23), (1.24) que

$$\begin{aligned} \frac{kn}{\rho_1\omega^2 + kn^2} &= \frac{bn^2 + k}{kn - \rho_2\omega^2 n} + \frac{\gamma\omega n}{\rho_3\omega + \kappa n^2} \cdot \frac{\gamma n}{kn - \rho_2\omega^2 n} \\ &= \frac{bn^2 + k}{kn - \rho_2\omega^2 n} + \frac{\gamma^2\omega n^2}{(\rho_3\omega + \kappa n^2)(kn - \rho_2\omega^2 n)}. \\ &= \frac{(bn^2 + k)(kn - \rho_2\omega^2 n) + \gamma^2 n^2 \omega}{(kn - \rho_2\omega^2 n)(\rho_3\omega + \kappa n^2)}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Daí, segue que ω é a solução da equação

$$\begin{aligned} (bn^2\rho_1\rho_3 + \gamma^2n^2\rho_1 + kn^2\rho_2\rho_3 + k\rho_1\rho_3)x^3 &+ (b\kappa n^4\rho_1 + k\kappa n^4\rho_2 + k\kappa n^2\rho_1)x^2 \\ &+ (b\kappa n^4\rho_3 + \gamma^2kn^4)x + bk\kappa n^6 = 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Provaremos que as soluções da equação acima estão à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$. Para isso, verifiquemos o sinal das soluções da equação algébrica

$$\begin{aligned} (bn^2\rho_1\rho_3 + \gamma^2n^2\rho_1 + kn^2\rho_2\rho_3 + k\rho_1\rho_3)(x - \epsilon)^3 &+ (b\kappa n^4\rho_1 + k\kappa n^4\rho_2 + k\kappa n^2\rho_1)(x - \epsilon)^2 \\ &+ (b\kappa n^4\rho_3 + \gamma^2kn^4)(x - \epsilon) + bk\kappa n^6 = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ou seja,

$$l_3x^3 + l_2x^2 + l_1x + l_0 = 0, \quad (1.28)$$

em que

$$\begin{aligned} l_3 &= bn^2\rho_1\rho_3 + \gamma^2n^2\rho_1 + kn^2\rho_2\rho_3 + k\rho_1\rho_3 \\ l_2 &= b\kappa n^4\rho_1 + k\kappa n^4\rho_2 - 3ben^2\rho_1\rho_3 - 3\epsilon\gamma^2n^2\rho_1 - 3\epsilon kn^2\rho_2\rho_3 + k\kappa n^2\rho_1 - 3\epsilon k\rho_1\rho_3 \\ l_1 &= -2b\epsilon\kappa n^4\rho_1 - 2\epsilon k\kappa n^4\rho_2 + 3b\epsilon^2n^2\rho_1\rho_3 + b\kappa n^4\rho_3 + 3\epsilon^2\gamma^2n^2\rho_1 + 3\epsilon^2kn^2\rho_2\rho_3 + \gamma^2kn^4 \\ &\quad - 2\epsilon k\kappa n^2\rho_1 + 3\epsilon^2k\rho_1\rho_3 \\ l_0 &= b\epsilon^2\kappa n^4\rho_1 + bk\kappa n^6 + \epsilon^2k\kappa n^4\rho_2 - b\epsilon^3n^2\rho_1\rho_3 - b\epsilon\kappa n^4\rho_3 - \epsilon^3\gamma^2n^2\rho_1 - \epsilon^3kn^2\rho_2\rho_3 - \epsilon\gamma^2kn^4 \\ &\quad + \epsilon^2k\kappa n^2\rho_1 - \epsilon^3k\rho_1\rho_3 \end{aligned}$$

O critério de Routh-Hurwitz estabelece que a condição necessária e suficiente para que as soluções de uma equação do tipo (1.28) tenha a parte negativa é

$$\Lambda_0 = l_0 > 0, \Lambda_1 = l_1 > 0, \Lambda_2 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_0 & l_2 \end{pmatrix} > 0, \Lambda_3 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & 0 \\ l_0 & l_2 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 \end{pmatrix} > 0.$$

Analisemos Λ_2 . Temos que

$$\Lambda_2 = d_8n^8 + d_6n^6 + d_4n^4 + d_2n^2 + d_0, \quad (1.29)$$

em que

$$\begin{aligned}
 d_8 &= -2b^2\epsilon\kappa^2\rho_1^2 - 4b\epsilon k\kappa^2\rho_1\rho_2 - 2\epsilon k^2\kappa^2\rho_2^2 + \gamma^2 k^2\kappa\rho_2 \\
 d_6 &= 8b^2\epsilon^2\kappa\rho_1^2\rho_3 + 8b\epsilon^2\gamma^2\kappa\rho_1^2 + 16b\epsilon^2 k\kappa\rho_1\rho_2\rho_3 + 8\epsilon^2\gamma^2 k\kappa\rho_1\rho_2 + 8\epsilon^2 k^2\kappa\rho_2^2\rho_3 - 2b^2\epsilon k\rho_1\rho_3^2 \\
 &\quad - 4b\epsilon\gamma^2 k\rho_1\rho_3 - 2b\epsilon k^2\rho_2\rho_3^2 - 4b\epsilon k\kappa^2\rho_1^2 - 2\epsilon\gamma^4 k\rho_1 - 2\epsilon\gamma^2 k^2\rho_2\rho_3 - 4\epsilon k^2\kappa^2\rho_1\rho_2 + \gamma^2 k^2\kappa\rho_1 \\
 d_4 &= -8b^2\epsilon^3\rho_1^2\rho_3^2 - 16b\epsilon^3\gamma^2\rho_1^2\rho_3 - 16b\epsilon^3 k\rho_1\rho_2\rho_3^2 - 8\epsilon^3\gamma^4\rho_1^2 - 16\epsilon^3\gamma^2 k\rho_1\rho_2\rho_3 - 8\epsilon^3 k^2\rho_2^2\rho_3^2 \\
 &\quad + 16b\epsilon^2 k\kappa\rho_1^2\rho_3 + 8\epsilon^2\gamma^2 k\kappa\rho_1^2 + 16\epsilon^2 k^2\kappa\rho_1\rho_2\rho_3 - 2b\epsilon k^2\rho_1\rho_3^2 - 2\epsilon\gamma^2 k^2\rho_1\rho_3 - 2\epsilon k^2\kappa^2\rho_1^2 \\
 d_2 &= -16b\epsilon^3 k\rho_1^2\rho_3^2 - 16\epsilon^3\gamma^2 k\rho_1^2\rho_3 - 16\epsilon^3 k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2 + 8\epsilon^2 k^2\kappa\rho_1^2\rho_3 \\
 d_0 &= -8\epsilon^3 k^2\rho_1^2\rho_3^2.
 \end{aligned}$$

Note que o termo dominante é dado por $d_8 n^8$. Logo, para n suficientemente grande podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $\Lambda_2 > 0$. O mesmo argumento é válido para Λ_0 e Λ_1 . Por outro lado, temos:

$$\Lambda_3 = d_{10}n^{10} + d_8n^8 + d_6n^6 + d_4n^4 + d_2n^2 + d_0, \quad (1.30)$$

em que

$$\begin{aligned}
 d_{10} &= -2b^3\epsilon\kappa^2\rho_1^3\rho_3 - 2b^2\epsilon\gamma^2\kappa^2\rho_1^3 - 6b^2\epsilon k\kappa^2\rho_1^2\rho_2\rho_3 - 4b\epsilon\gamma^2 k\kappa^2\rho_1^2\rho_2 - 6b\epsilon k^2\kappa^2\rho_1\rho_2^2\rho_3 \\
 &\quad - 2\epsilon\gamma^2 k^2\kappa^2\rho_1\rho_2^2 - 2\epsilon k^3\kappa^2\rho_2^2\rho_3 + b\gamma^2 k^2\kappa\rho_1\rho_2\rho_3 + \gamma^4 k^2\kappa\rho_1\rho_2 + \gamma^2 k^3\kappa\rho_2^2\rho_3 \\
 d_8 &= 8b^3\epsilon^2\kappa\rho_1^3\rho_3^2 + 16b^2\epsilon^2\gamma^2\kappa\rho_1^3\rho_3 + 24b^2\epsilon^2 k\kappa\rho_1^2\rho_2\rho_3^2 + 8b\epsilon^2\gamma^4\kappa\rho_1^3 + 32b\epsilon^2\gamma^2 k\kappa\rho_1^2\rho_2\rho_3 \\
 &\quad + 24b\epsilon^2 k^2\kappa\rho_1\rho_2^2\rho_3^2 + 8\epsilon^2\gamma^4 k\kappa\rho_1^2\rho_2 + 16\epsilon^2\gamma^2 k^2\kappa\rho_1\rho_2^2\rho_3 + 8\epsilon^2 k^3\kappa\rho_2^2\rho_3^2 - 2b^3\epsilon k\rho_1^3\rho_3^3 \\
 &\quad - 6b^2\epsilon\gamma^2 k\rho_1^2\rho_3^2 - 4b^2\epsilon k^2\rho_1\rho_2\rho_3^3 - 6b^2\epsilon k\kappa^2\rho_1^3\rho_3 - 6b\epsilon\gamma^4 k\rho_1^2\rho_3 - 8b\epsilon\gamma^2 k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2 \\
 &\quad - 4b\epsilon\gamma^2 k\kappa^2\rho_1^3 - 2b\epsilon k^3\rho_2^2\rho_3^3 - 12b\epsilon k^2\kappa^2\rho_1^2\rho_2\rho_3 - 2\epsilon\gamma^6 k\rho_1^2 - 4\epsilon\gamma^4 k^2\rho_1\rho_2\rho_3 - 2\epsilon\gamma^2 k^3\rho_2^2\rho_3^2 \\
 &\quad - 4\epsilon\gamma^2 k^2\kappa^2\rho_1^2\rho_2 - 6\epsilon k^3\kappa^2\rho_1\rho_2^2\rho_3 + b\gamma^2 k^2\kappa\rho_1^2\rho_3 + \gamma^4 k^2\kappa\rho_1^2 + 2\gamma^2 k^3\kappa\rho_1\rho_2\rho_3 \\
 d_6 &= -8b^3\epsilon^3\rho_1^3\rho_3^3 - 24b^2\epsilon^3\gamma^2\rho_1^3\rho_3^2 - 24b^2\epsilon^3 k\rho_1^2\rho_2\rho_3^3 - 24b\epsilon^3\gamma^4\rho_1^3\rho_3 - 48b\epsilon^3\gamma^2 k\rho_1^2\rho_2\rho_3^2 \\
 &\quad - 24b\epsilon^3 k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3^3 - 8\epsilon^3\gamma^6\rho_1^3 - 24\epsilon^3\gamma^4 k\rho_1^2\rho_2\rho_3 - 24\epsilon^3\gamma^2 k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3^2 - 8\epsilon^3 k^3\rho_2^3\rho_3^3 \\
 &\quad + 24b^2\epsilon^2 k\kappa\rho_1^3\rho_3^2 + 32b\epsilon^2\gamma^2 k\kappa\rho_1^3\rho_3 + 48b\epsilon^2 k^2\kappa\rho_1^2\rho_2\rho_3^2 + 8\epsilon^2\gamma^4 k\kappa\rho_1^3 + 32\epsilon^2\gamma^2 k^2\kappa\rho_1^2\rho_2\rho_3 \\
 &\quad + 24\epsilon^2 k^3\kappa\rho_1\rho_2^2\rho_3^2 - 4b^2\epsilon k^2\rho_1^3\rho_3^3 - 8b\epsilon\gamma^2 k^2\rho_1^2\rho_3^2 - 4b\epsilon k^3\rho_1\rho_2\rho_3^3 - 6b\epsilon k^2\kappa^2\rho_1^3\rho_3 - 4\epsilon\gamma^4 k^2\rho_1^2\rho_3 \\
 &\quad - 4\epsilon\gamma^2 k^3\rho_1\rho_2\rho_3^2 - 2\epsilon\gamma^2 k^2\kappa^2\rho_1^3 - 6\epsilon k^3\kappa^2\rho_1^2\rho_2\rho_3 + \gamma^2 k^3\kappa\rho_1^2\rho_3 \\
 d_4 &= -24b^2\epsilon^3 k\rho_1^3\rho_3^3 - 48b\epsilon^3\gamma^2 k\rho_1^3\rho_3^2 - 48b\epsilon^3 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^3 - 24\epsilon^3\gamma^4 k\rho_1^3\rho_3 - 48\epsilon^3\gamma^2 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^2 \\
 &\quad - 24\epsilon^3 k^3\rho_1\rho_2^2\rho_3^3 + 24b\epsilon^2 k^2\kappa\rho_1^3\rho_3^2 + 16\epsilon^2\gamma^2 k^2\kappa\rho_1^3\rho_3 + 24\epsilon^2 k^3\kappa\rho_1^2\rho_2\rho_3^2 - 2b\epsilon k^3\rho_1^3\rho_3^3 - 2\epsilon\gamma^2 k^3\rho_1^2\rho_3^2 \\
 &\quad - 2\epsilon k^3\kappa^2\rho_1^3\rho_3 \\
 d_2 &= -24b\epsilon^3 k^2\rho_1^3\rho_3^3 - 24\epsilon^3\gamma^2 k^2\rho_1^3\rho_3^2 - 24\epsilon^3 k^3\rho_1^2\rho_2\rho_3^3 + 8\epsilon^2 k^3\kappa\rho_1^3\rho_3^2 \\
 d_0 &= -8\epsilon^3 k^3\rho_1^3\rho_3^3
 \end{aligned}$$

Aqui o termo dominante de Λ_3 é $d_{10}n^{10}$. Note que também podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno para um n suficientemente grande tal que $\Lambda_3 > 0$.

Desta forma, provamos o seguinte resultado

Teorema 1.1 *Assuma que ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno. Então existem soluções do sistema (1.16) – (1.20) da forma (1.21) que estão à esquerda do linha $Re(z) = -\epsilon$ implicando assim na estabilidade exponencial de soluções.*

A seguir, iremos mostrar o decaimento exponencial para o mesmo sistema considerado nesta seção, porém via método da energia.

1.3 Decaimento exponencial sem o segundo espectro de frequência

Consideremos o sistema (1.16) – (1.20). Para obtermos o decaimento exponencial da energia, iremos construir o funcional Lyapunov L satisfazendo

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t \geq 0$$

com constantes positivas β_1, β_2 tal que

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -\alpha L(t)$$

para algum $\alpha > 0$. Temos que

Proposição 1.2 *A energia $E(t)$ do sistema (1.16) – (1.20) dada por (1.31) satisfaz a lei de dissipação dada por:*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\kappa \int_0^L \theta_x^2 dx,$$

em que

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 y_t^2 + b \psi_x^2 + k(y_x + \psi)^2 + \rho_3 \theta^2 + \rho_2 y_{tx}^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{k} y_{tt}^2 \right] dx. \quad (1.31)$$

Demonstração: Multiplicando por y_t , ψ_t e θ as equações (1.16), (1.17) e (1.18) respectivamente e integrando em $(0, L)$ obteremos:

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y_t dx - k \int_0^L (y_x + \psi)_x y_t dx = 0, \quad (1.32)$$

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi_t dx + \gamma \int_0^L \theta_x \psi_t dx = 0, \quad (1.33)$$

$$\rho_3 \int_0^L \theta_t \theta dx - \kappa \int_0^L \theta_{xx} \theta dx + \gamma \psi_{tx} \theta dx = 0. \quad (1.34)$$

Efetuada as devidas integrações por partes e somando (1.32), (1.33) e (1.34):

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho_1 y_t^2 + k(y_x + \psi)^2 + b\psi_x^2 + \rho_3 \theta^2] dx - \rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi_t dx = -\kappa \int_0^L \theta_x^2 dx. \quad (1.35)$$

Note que, da equação (1.16), temos

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi_t dx &= \rho_2 \int_0^L y_{tt} \psi_{tx} dx = \rho_2 \int_0^L y_{tt} \left(\frac{\rho_1}{k} y_{ttt} - y_{xxt} \right) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{2k} y_{tt}^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{tx}^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Combinando (1.35) com (1.36) teremos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\kappa \int_0^L \theta_x^2 dx, \quad (1.37)$$

em que $E(t)$ é dada por (1.31). ■

Agora, faremos uma escolha adequada dos multiplicadores e sequências de estimativas que serão dadas pelos Lemas seguintes, nos quais assumiremos as regularidades necessárias nas funções y e ψ , de modo que possamos construir os mesmos para a obtenção do decaimento exponencial.

Lema 1.1 *Seja (y, ψ, θ) solução de (1.16) – (1.20) e o seguinte funcional dado por:*

$$I_1(t) := -\rho_1 \int_0^L y_t y dx.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} I_1(t) \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + C(\epsilon_1) \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx.$$

Demonstração: Multiplicando a equação (1.16) por y teremos:

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y dx - k \int_0^L (y_x + \psi)_x y dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima

$$\rho_1 \int_0^L \frac{d}{dt} y_t y dx - \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) y_x dx = 0. \quad (1.38)$$

Logo,

$$-\rho_1 \int_0^L \frac{d}{dt} y_t y dx = -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) y_x dx.$$

Usando a desigualdade de Young obteremos

$$\frac{d}{dt} I_1(t) \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + \frac{k}{4\epsilon} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \epsilon k \int_0^L y_x^2 dx.$$

Tendo em mente que

$$\int_0^L y_x^2 dx \leq 2 \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + 2C_p \int_0^L \psi_x^2 dx,$$

onde C_p denota a constante de Poincaré, obtém-se que

$$\frac{d}{dt} I_1(t) \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + C(\epsilon_1) \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx.$$

■

Lema 1.2 *Seja (y, ψ, θ) solução de (1.16) – (1.20) e o seguinte funcional dado por:*

$$I_2(t) := \int_0^L \left(\rho_1 y_t y + \rho_2 y_t \psi_x - \frac{\rho_1 \rho_2}{k} y_{tt} y_t \right) dx.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + C_1 \int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx,$$

em que C_1 é uma constante positiva.

Demonstração: Temos de (1.38):

$$\rho_1 \int_0^L \frac{d}{dt} y_t y dx = \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - k \int_0^L (y_x + \psi) y_x dx. \quad (1.39)$$

Por outro lado, multiplicando (1.17) por ψ obtemos:

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx = 0.$$

Ou seja,

$$\rho_2 \int_0^L y_{tt} \psi_x dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima:

$$\rho_2 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} y_t \psi_x - y_t \psi_{tx} \right) dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx = 0.$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 y_t \psi_x = -b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx - \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx + \rho_2 \int_0^L y_t \psi_{tx} dx. \quad (1.40)$$

Segue de $\psi_{tx} = \frac{\rho_1}{k} y_{ttt} - y_{txx}$ que :

$$\rho_2 \int_0^L y_t \psi_{tx} dx = \rho_2 \int_0^L y_t \left(\frac{\rho_1}{k} y_{ttt} - y_{txx} \right) dx = \frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L \left(\frac{d}{dt} y_{tt} y_t - y_{tt}^2 \right) dx + \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx.$$

Sendo assim produzimos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 y_t \left(\psi_x - \frac{\rho_1}{k} y_{tt} \right) dx &= -b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx - \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx - \frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Somando (1.39) com (1.41) encontramos

$$\frac{d}{dt} I_2(t) = \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - \gamma \int_0^L \theta_x \psi dx - \frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx.$$

Daí, segue da desigualdade de Young que:

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + C_1 \int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx. \quad \blacksquare$$

Lema 1.3 *Seja (y, ψ, θ) solução de (1.16) – (1.20) e o seguinte funcional dado por:*

$$I_3(t) := \int_0^L \left(-\rho_2 y_{tx} (y_x + \psi) + \frac{\rho_1 b}{k} y_t \psi_x - C_2 \theta y_t \right) dx.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} I_3(t) \leq -\rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx - \frac{k}{2} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L y_{tt}^2 dx + C(\epsilon_1) \int_0^L \theta_x^2 dx,$$

em que C_2 é uma constante positiva.

Demonstração: Multiplicando a equação (1.17) por $(y_x + \psi)$ obteremos

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx}(y_x + \psi) dx - b \int_0^L \psi_{xx}(y_x + \psi) dx + k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \gamma \int_0^L \theta_x(y_x + \psi) dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L \frac{d}{dt} y_{tx}(y_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^L y_{tx}(y_x + \psi)_t dx + b \int_0^L \psi_x(y_x + \psi)_x + k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx \\ + \gamma \int_0^L \theta_x(y_x + \psi) dx = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L \frac{d}{dt} y_{tx}(y_x + \psi) dx &= -\rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx - \frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L \psi_x y_{tt} dx - k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \gamma \int_0^L \theta_x(y_x + \psi) dx \\ &- \rho_2 \int_0^L y_{tx} \psi_t dx. \end{aligned}$$

Note que,

$$-\frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L \psi_x y_{tt} dx = -\frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L \left(\frac{d}{dt} y_t \psi_x - y_t \psi_{tx} \right) dx$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(-\rho_2 y_{tx}(y_x + \psi) + \frac{\rho_1 b}{k} y_t \psi_x \right) dx &= -\rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx - \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \int_0^L y_t \psi_{tx} dx - k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx \\ &- \gamma \int_0^L \theta_x(y_x + \psi) dx. \end{aligned}$$

Veamos que de (1.18) temos

$$\psi_{tx} = -\frac{\rho_3}{\gamma} \theta_t + \frac{\kappa}{\gamma} \theta_{xx}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \int_0^L y_t \psi_{tx} dx &= -\left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \int_0^L y_t \left(-\frac{\rho_3}{\gamma} \theta_t + \frac{\kappa}{\gamma} \theta_{xx} \right) dx = C_2 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} \theta y_t - \theta y_{tt} \right) dx \\ &+ \overline{C_2} \int_0^L y_{tx} \theta_x dx. \end{aligned}$$

Finalmente, da desigualdade de Young produzimos

$$\frac{d}{dt} I_3 \leq -\rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx - \frac{k}{2} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L y_{tt}^2 dx + C(\epsilon_1) \int_0^L \theta_x^2 dx.$$

■

Considere agora o funcional Lyapunov L definido como:

$$L := NE(t) + N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) + N_3 I_3(t)$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t) &\leq -(N_1\rho_1 - N_2\rho_1) \int_0^L y_t^2 dx - \left(N_2 \frac{\rho_1\rho_2}{k} - N_3\epsilon_1\right) \int_0^L y_{tt}^2 dx - \left(N_2 \frac{b}{2} - N_1\epsilon\right) \int_0^L \psi_x^2 dx \\ &\quad - \left(N_2k + N_3 \frac{k}{2} - N_1C(\epsilon)\right) \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \left(N_3 \frac{\rho_2}{2} - N_2\rho_2\right) \int_0^L y_{tx}^2 dx \\ &\quad - (N\kappa - N_2C_1 - N_3C(\epsilon_1)) \int_0^L \theta_x^2 dx. \end{aligned}$$

Tomemos as constantes na seguinte ordem: ϵ suficientemente pequeno, $N_1 > N_2$, ϵ_1 suficientemente pequeno, $N_3 > N_1, N_2$ e N suficientemente grande.

Assim, teremos

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\beta_0 E(t)$$

para algum $\beta_0 > 0$. Além disso, existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tal que para $t \geq 0$

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t). \quad (1.42)$$

De onde segue que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -2\alpha L(t)$$

para $\alpha := \frac{\beta_0}{2\beta_2}$. Usando (1.42) teremos provado o principal resultado.

Teorema 1.3 *Seja (y, ψ, θ) uma solução particular do sistema (1.16) – (1.20). Então existem constantes positivas C e α , independente das condições iniciais e dos coeficientes tal que para todo $t \geq 0$*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-2\alpha t}.$$

A seguir, iremos mostrar que tais resultados do capítulo 1 são também válidos para um sistema termoelástico de Timoshenko porém, com a lei de Cattaneo.

Capítulo 2

Termo-elasticidade hiperbólica para sistemas do tipo Timoshenko

Consideraremos um modelo de Timoshenko com a lei de Cattaneo e mostraremos que tal damping também tem a propriedade de eliminar o espectro não físico, para tal feito usaremos a análise assintótica e simulações numéricas.

2.1 Análise de dispersão e conjecturas correlatas

Considere o seguinte sistema termoelástico linear junto com a lei de Cattaneo

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.2)$$

$$\rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.3)$$

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.4)$$

com constantes positivas $\rho_1, k, \rho_2, b, \delta, \rho_3, \tau, \beta$ e com as condições iniciais

$$\begin{aligned} y(., 0) &= y_0; & y_t(., 0) &= y_1; & \psi(., 0) &= \psi_0; & \psi_t(., 0) &= \psi_1; \\ \theta(., 0) &= \theta_0; & q(., 0) &= q_0 & \forall x \in (0, L) \end{aligned} \quad (2.5)$$

e condições de contorno

$$y(\bar{x}, t) = \psi_x(\bar{x}, t) = \theta(\bar{x}, t) = q_x(\bar{x}, t) = 0 \quad \bar{x} = 0, L \quad \forall t > 0. \quad (2.6)$$

De forma análoga a seção anterior, consideremos que a solução do sistema é tipo harmônica, isto é,

$$y = Ae^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \psi = Be^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \theta = Ce^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad q = De^{i(\gamma x + \omega t)}.$$

Sendo assim, substituindo na equação (2.1) obteremos:

$$\begin{aligned} - \rho_1 A \omega^2 + k A \gamma^2 - k B i \gamma &= 0 \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{i k \gamma}{k \gamma^2 - \rho_1 \omega^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por outro lado, segue da equação (2.4) que

$$\delta \theta_x = -\tau \delta q_t - \beta \delta q$$

e substituindo em (2.2) obteremos

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k(y_x + \psi) - \tau \delta q_t - \beta \delta q = 0. \quad (2.8)$$

Usando soluções harmônicas em (2.8) obteremos

$$\begin{aligned} - \rho_2 \omega^2 B + b \gamma^2 B + i k \gamma B + k B - i \tau \delta \omega D - \beta \delta D &= 0 \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{\rho_2 \omega^2 - b \gamma^2 - k}{i k \gamma} + \frac{D}{B} \frac{i \tau \delta \omega + \beta \delta}{i k \gamma}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Também de (2.4) temos que

$$\rho_3 \theta_{tx} = -\tau \rho_3 q_{tt} - \beta \rho_3 q_t. \quad (2.10)$$

Derivando (2.3) em relação a x e combinando com (2.10) encontramos

$$-\tau \rho_3 q_{tt} - \beta \rho_3 q_t + q_{xx} + \delta \psi_{txx} = 0. \quad (2.11)$$

Das soluções harmônicas temos que (2.11) será dada por

$$\begin{aligned} + \tau \rho_3 \omega^2 D - i \beta \rho_3 \omega D - \gamma^2 D - i \delta \omega \gamma^2 B &= 0 \\ \Rightarrow \frac{D}{B} &= \frac{i \delta \gamma^2 \omega}{\tau \rho_3 \omega^2 - i \beta \rho_3 \omega - \gamma^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Combinando (2.7), (2.9) e (2.12) encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{ik\gamma}{k\gamma^2 - \rho_1\omega^2} &= \frac{\rho_2\omega^2 - k - b\gamma^2}{ik\gamma} + \frac{i\delta\gamma^2\omega}{\tau\rho_3\omega^2 - i\beta\rho_3\omega - \gamma^2} \cdot \frac{i\tau\delta\omega + \beta\delta}{ik\gamma} \\
 &= \frac{\rho_2\omega^2 - k - b\gamma^2}{ik\gamma} + \frac{i\tau\delta^2\gamma\omega^2 + \beta\delta^2\gamma\omega}{k(\tau\rho_3\omega^2 - i\beta\rho_3\omega - \gamma^2)} \\
 &= \frac{(\rho_2\omega^2 - k - b\gamma^2)(\tau\rho_3\omega^2 - i\beta\rho_3\omega - \gamma^2) + i\gamma(i\tau\delta^2\gamma\omega^2 + \beta\delta^2\gamma\omega)}{ik\gamma(\tau\rho_3\omega^2 - i\beta\rho_3\omega - \gamma^2)}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a equação de dispersão será dada por

$$\begin{aligned}
 &- \rho_1\rho_2\rho_3\tau\omega^6 + i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\omega^5 + (\rho_1\rho_2\gamma^2 + k\rho_1\rho_3\tau + \rho_1\rho_3b\tau\gamma^2 + \rho_1\tau\delta^2\gamma^2 + k\rho_2\rho_3\tau\gamma^2)\omega^4 \\
 &- i(k\rho_1\rho_3\beta + \rho_1\rho_3b\beta\gamma^2 + \rho_1\beta\delta^2\gamma^2 + \rho_2\rho_3k\beta\gamma^2)\omega^3 - (\rho_1k\gamma^2 + \rho_1b\gamma^4 + kb\rho_3\tau\gamma^4 + k\tau\delta^2\gamma^4)\omega^2 \\
 &+ i(kb\rho_3\beta\gamma^4 + k\beta\delta^2\gamma^4)\omega + kb\gamma^6 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Segue da identidade física que $\omega = \gamma c$ e substituindo em (2.13) obteremos:

$$\begin{aligned}
 &- \rho_1\rho_2\rho_3\tau\gamma^6c^6 + i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\gamma^5c^5 + (\rho_1\rho_2\gamma^6 + k\rho_1\rho_3\tau\gamma^4 + \rho_1\rho_3b\tau\gamma^6 + \rho_1\tau\delta^2\gamma^6 + k\rho_2\rho_3\tau\gamma^6)c^4 \\
 &- i(k\rho_1\rho_3\beta\gamma^3 + \rho_1\rho_3b\beta\gamma^5 + \rho_1\beta\delta^2\gamma^5 + \rho_2\rho_3k\beta\gamma^5)c^3 - (\rho_1k\gamma^4 + \rho_1b\gamma^6 + kb\rho_3\tau\gamma^6 + k\tau\delta^2\gamma^6)c^2 \\
 &+ i(kb\rho_3\beta\gamma^5 + k\beta\delta^2\gamma^5)c + kb\gamma^6 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como no capítulo 1, também há a dificuldade de obtermos a solução explícita da equação de dispersão, por isso usaremos novamente o método da expansão assintótica. Sendo assim, para $\gamma \rightarrow 0$, teremos a seguinte aproximação:

$$c(\gamma) = \eta_j^{(0)} + \eta_j^{(1)}\gamma + \eta_j^{(2)}\gamma^2 + \eta_j^{(3)}\gamma^3 + \eta_j^{(4)}\gamma^4 + \dots \tag{2.15}$$

Substituindo em (2.14) obtemos:

$$\begin{aligned}
 & - i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)3}\gamma^3 + \left(-3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)} + \rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)4} - \rho_1k\eta_j^{(0)2}\right)\gamma^4 + \left(i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)5} - i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)3}\right. \\
 & - i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)3} - i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)3} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)2} + 4\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)} + i\rho_3bk\beta\eta_j^{(0)} \\
 & + ik\beta\delta^2\eta_j^{(0)} - 2\rho_1k\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\left.\right)\gamma^5 + \left(5i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)4}\eta_j^{(1)} - \rho_1\rho_2\rho_3\tau\eta_j^{(0)6} + ik\beta\delta^2\eta_j^{(1)} - i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(1)3}\right. \\
 & - 6i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)} - 3i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(3)} + \rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)4} - 2\rho_1\delta^2\tau\eta_j^{(0)4} \\
 & + \rho_2\rho_3k\tau\eta_j^{(0)4} + 4\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(2)} + 6\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)2} - 3i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)} + i\rho_3bk\beta\eta_j^{(1)} + \rho_1\rho_2\eta_j^{(0)4} \\
 & - \rho_3bk\tau\eta_j^{(0)2} - k\delta^2\tau\eta_j^{(0)2} - \rho_1b\eta_j^{(0)2} - 2\rho_1k\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)} - \rho_1k\eta_j^{(1)2} + kb\left.\right)\gamma^6 + \left(-6i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(3)}\right. \\
 & - 3i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)2} + 12\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} + 4\rho_1\delta^2\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)} - 2k\delta^2\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)} \\
 & - 2\rho_3bk\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)} + 4\rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)} + 4\rho_2\rho_3k\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)} + 4\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(3)} + 4\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)3} + 4\rho_1\rho_2\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)} \\
 & - 2\rho_1b\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)} - 2\rho_1k\eta_j^{(0)}\eta_j^{(3)} - 2\rho_1k\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)2} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)2} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(2)} \\
 & - 6i\rho_1\rho_2\rho_3\tau\eta_j^{(0)5}\eta_j^{(1)} + 5i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)4}\eta_j^{(2)} + 10i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)2} - 3i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(2)} \\
 & - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(4)} - 3i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)2}\left.\right)\gamma^7 + \left(-3i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(3)} - i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(1)3} - i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(1)3}\right. \\
 & + 12\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)} + 12\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(2)} - i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(1)3} + 2\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(1)4} + 4\rho_1\delta^2\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(2)} + 4\rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)3} \\
 & + 6\rho_1\delta^2\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)2} - 2k\delta^2\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)} - \rho_3bk\tau\eta_j^{(1)2} - \rho_1b\eta_j^{(1)2} - \rho_1k\eta_j^{(2)2} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)2} \\
 & - 3i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(3)} - 3i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(3)} - 6i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} - 2\rho_3bk\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)} + 6\rho_2\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)2} \\
 & + 6\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(2)2} + 4\rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(2)} + 4\rho_2\rho_3k\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(2)} + 4\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(4)} + 6\rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)2} \\
 & - 6i\rho_1\rho_2\rho_3\tau\eta_j^{(0)5}\eta_j^{(2)} - 15i\rho_1\rho_2\rho_3\tau\eta_j^{(0)4}\eta_j^{(1)2} + 5i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)4}\eta_j^{(3)} + 10i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)3} + 4\rho_1\rho_2\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(2)} \\
 & + 6\rho_1\rho_2\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)2} - k\delta^2\tau\eta_j^{(1)2} - 2\rho_1b\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)} - 2\rho_1k\eta_j^{(0)}\eta_j^{(4)} - 2\rho_1k\eta_j^{(1)}\eta_j^{(3)} + 20i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} \\
 & - 6i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} - 6i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} - 6i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(4)} - 6i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)}\eta_j^{(3)}\left.\right)\gamma^8 \\
 & + \left(-i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(2)3} + 12\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(4)} + 12\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(2)}\eta_j^{(3)} + 12\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(3)}\right. \\
 & + 12\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)2} + 12\rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} + 12\rho_2\rho_3k\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} + 4\rho_1\delta^2\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(3)} + 4\rho_1\delta^2\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)3} \\
 & + 12\rho_1\rho_2\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} - 2k\delta^2\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(3)} - 2k\delta^2\tau\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} - 2\rho_3bk\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(3)} - 2\rho_3bk\tau\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} + 4\rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(3)} \\
 & + 4\rho_2\rho_3k\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(3)} + 12\rho_1\delta^2\tau\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} + 4\rho_1\rho_3b\tau\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)3} + 4\rho_2\rho_3k\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)3} + 4\rho_1\rho_3k\tau\eta_j^{(1)3}\eta_j^{(2)} \\
 & - 3i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(4)} - 3i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)2} - 3i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(4)} \\
 & - 3i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(2)} - 3i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)2} - 3i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(3)2} - 3i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(4)} - 6i\rho_1\beta\delta^2\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(3)} \\
 & - 3i\rho_1b\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)2} + 5i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)4}\eta_j^{(4)} + 10i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(2)2} + 5i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)4} - 3i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(4)} \\
 & - 6i\rho_1\rho_2\rho_3\tau\eta_j^{(0)5}\eta_j^{(3)} - 20i\rho_1\rho_2\rho_3\tau\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)3} + 4\rho_1\rho_2\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(3)} + 4\rho_1\rho_2\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)3} - 2\rho_1b\eta_j^{(0)}\eta_j^{(3)} - 2\rho_1b\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} \\
 & - 2\rho_1k\eta_j^{(1)}\eta_j^{(4)} - 2\rho_1k\eta_j^{(2)}\eta_j^{(3)} - 30i\rho_1\rho_2\rho_3\tau\eta_j^{(0)4}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)} + 20i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)3}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(3)} + 30i\rho_1\rho_2\rho_3\beta\eta_j^{(0)2}\eta_j^{(1)2}\eta_j^{(2)} \\
 & - 6i\rho_1\rho_3b\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(3)} - 6i\rho_2\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(1)}\eta_j^{(3)} - 6i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(0)}\eta_j^{(2)}\eta_j^{(4)} - 6i\rho_1\rho_3k\beta\eta_j^{(1)}\eta_j^{(2)}\eta_j^{(3)}\left.\right)\gamma^9 + \dots = 0
 \end{aligned}$$

e calculando $\eta_j^{(n)}$ com $j = 1, \dots, 5$ e $n = 0, 1, \dots$ obteremos:

$$\eta_j^{(0)} = 0; \eta_j^{(1)} = i \begin{cases} S_1 + T_1 - \frac{1}{3}u_2, \\ -\frac{1}{2}(S_1 + T_1) - \frac{1}{3}u_2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}(S_1 - T_1) \end{cases}; \eta_j^{(2)} = 0;$$

$$\eta_j^{(3)} = \frac{(b\rho_1 + \delta^2 k\tau + bk\tau)\eta_j^{(1)2} + i(\beta(\delta^2\rho_1 + k\rho_2\rho_3 + b\rho_1\rho_3)a_j^{(1)3} - k\rho_1\rho_3\tau\eta_j^{(1)4})}{k\left(-2k\rho_1a_j^{(1)} + i(\beta\delta^2 + b\beta\rho_3 - 3\beta\rho_1\rho_3a_j^{(1)2})\right)}; \eta_j^{(4)} = 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

Em que

$$u_2 = \frac{1}{\beta\rho_3} \quad ; \quad u_1 = \frac{\delta^2}{\rho_1\rho_3} + \frac{b}{\rho_1} \quad ; \quad m_0 = \frac{b}{\beta\rho_1\rho_3} \quad ; \quad Q_1 = \frac{3u_1 - u_2^2}{9},$$

$$R_1 = \frac{9u_1u_2 - 27u_0 - 2u_2^3}{54} \quad ; \quad S_1 = \sqrt[3]{R_1 + \sqrt{Q_1^3 + R_1^2}} \quad ; \quad T_1 = \sqrt[3]{R_1 - \sqrt{Q_1^3 + R_1^2}}.$$

Observação: Caso $Q_1^3 + R_1^2 < 0$, então

$$\eta_j^{(2)} = \begin{cases} 2\sqrt{-Q_1} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right); \\ 2\sqrt{-Q_1} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{2}{3}\pi\right); \\ 2\sqrt{-Q_1} \cos\left(\frac{1}{3}\theta + \frac{4}{3}\pi\right). \end{cases} \quad \cos\theta = -\frac{R_1}{\sqrt{-Q_1^3}}$$

Daí, tomando a parte real, podemos concluir que teremos a seguinte aproximação para solução em c :

$$Re c(\gamma) = \eta_j^{(1)}\gamma + \eta_j^{(3)}\gamma^3 + O(\gamma^4), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Sendo assim, quando $\gamma \rightarrow 0$ obteremos:

$$Re c(\gamma) = 0.$$

Ou seja, também neste caso o mecanismo dissipativo do sistema elimina o segundo espectro.

Desta forma, provamos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *As soluções do tipo harmônicas de (2.1) – (2.6) são dadas por*

$$y = Ae^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \psi = Be^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad \theta = Ce^{i(\gamma x + \omega t)} \quad , \quad q = De^{i(\gamma x + \omega t)} \quad ,$$

em que A, B, C e D são as amplitudes de y, ψ, θ, q respectivamente, tem a velocidade no regime de baixa frequência tendendo a zero.

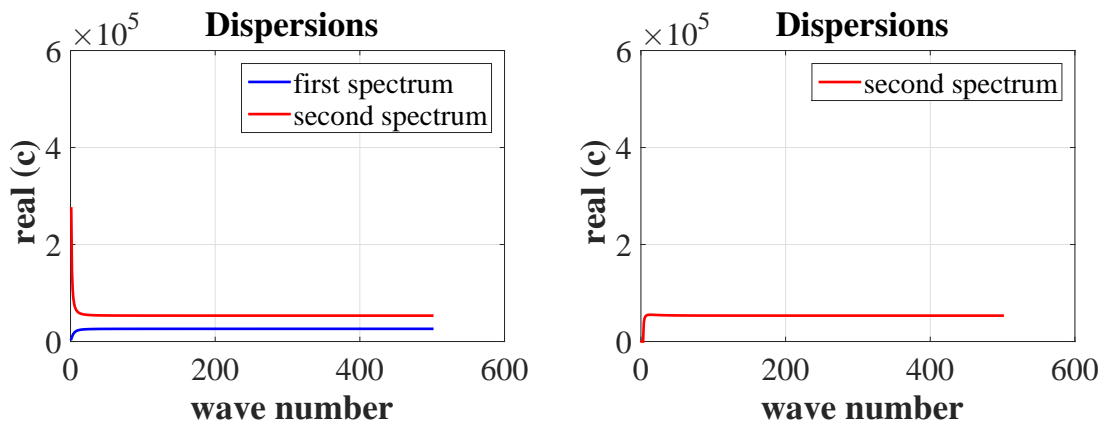


Figura 3: Número de ondas (γ) vs velocidade (c). Na figura à esquerda temos a análise de dispersão sem levar em consideração o damping do tipo Cattaneo. Note que as duas curvas são dispersivas e mostram um comportamento estável em alta frequência. A primeira curva que caracteriza o primeiro espectro (cor azul) se propaga por todo o domínio do espectro. Já a segunda curva que caracteriza o segundo espectro (cor vermelha) mostra uma velocidade infinita para valores próximos da frequência crítica. No entanto, na figura à esquerda, temos que tal anomalia é corrigida quando há a inserção do damping. Para essa simulação, usamos o tamanho $L = \pi, E = 21 \times 10^{12}, \rho = 7860, k' = 5/6, I = 0.0001171$ e $A = 0.0097389$. O domínio da dispersão foi tomado no intervalo $[-500, 500]$ e $G = E/(2 \times 1.29)$. Por fim, tomamos a parte real dos valores cujo o parâmetro de damping utilizado foi $j\sqrt{k\rho_2(1+\tau)}, j = \{0, 2\}$.

A seguir, mostraremos que combinando a hipótese de Elishakoff com o modelo (2.1) – (2.6), ou seja, um modelo livre do segundo espectro, decai exponencialmente sem precisar de nenhuma relação entre os seus coeficientes.

2.2 Decaimento exponencial do modelo simplificado via critério de Routh-Hurwitz

Conforme raciocínios anteriores, queremos a estabilidade do sistema de Timoshenko com Cattaneo livre do segundo espectro, ou seja, de acordo com a hipótese de Elishakoff, o sistema agora será:

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.16)$$

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \delta\theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.17)$$

$$\rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{tx} = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.18)$$

$$\tau q_t + \beta q + \theta_x = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (2.19)$$

com constantes positivas $\rho_1, k, \rho_2, b, \delta, \rho_3, \tau, \beta$ e com as condições iniciais

$$\begin{aligned} y(\cdot, 0) &= y_0; & y_t(\cdot, 0) &= y_1; & \psi(\cdot, 0) &= \psi_0; & \psi_t(\cdot, 0) &= \psi_1; \\ \theta(\cdot, 0) &= \theta_0; & q(\cdot, 0) &= q_0 & \forall x \in (0, L) \end{aligned} \quad (2.20)$$

e condições de contorno

$$y(\bar{x}, t) = \psi_x(\bar{x}, t) = \theta(\bar{x}, t) = q_x(\bar{x}, t) = 0 \quad \bar{x} = 0, L \quad \forall t > 0. \quad (2.21)$$

Usando o critério de Routh-Hurwitz teremos,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= Ae^{\omega t} \sin(nx), & \psi(x, t) &= Be^{\omega t} \cos(nx), & \theta(x, t) &= Ce^{\omega t} \sin(nx), \\ q(x, t) &= De^{\omega t} \cos(nx), & n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.16) obteremos,

$$\frac{A}{B} = -\frac{kn}{\rho_1 \omega^2 + kn^2}. \quad (2.23)$$

Por outro lado, segue da equação (2.19) que

$$\delta\theta_x = -\tau\delta q_t - \beta\delta q$$

e substituindo em (2.17) obteremos

$$-\rho_2 y_{ttx} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) - \tau\delta q_t - \beta\delta q = 0. \quad (2.24)$$

Segue da combinação de (2.24) com (2.22) que

$$\frac{A}{B} = -\frac{bn^2 + k}{kn - \rho_2\omega^2 n} + \frac{D}{B} \cdot \frac{\tau\delta\omega + \beta\delta}{kn - \rho_2\omega^2 n}. \quad (2.25)$$

Em (2.11)

$$\frac{D}{B} = -\frac{\delta n^2 \omega}{\tau \rho_3 \omega^2 + \beta \rho_3 \omega + n^2}. \quad (2.26)$$

Segue da combinação de (2.23), (2.25), (2.26) que

$$\frac{kn}{\rho_1\omega^2 + kn^2} = \frac{\delta n^2 \omega (\tau\delta\omega + \beta\delta) + (bn^2 + k)(\tau\rho_3\omega^2 + \beta\rho_3\omega + n^2)}{(\tau\rho_3\omega^2 + \beta\rho_3\omega + n^2)(kn - \rho_2\omega^2 n)}. \quad (2.27)$$

Daí, segue que ω é a solução da equação

$$\begin{aligned} &+ (bn^2\rho_1\rho_3\tau + \delta^2 n^2\rho_1\tau + kn^2\rho_2\rho_3\tau + k\rho_1\rho_3\tau)x^4 + \beta\delta^2 n^2\rho_1 x^3 \\ &+ (bkn^4\rho_3\tau + \delta^2 kn^4\tau + b\beta n^2\rho_1\rho_3 + bn^4\rho_1 + \beta kn^2\rho_2\rho_3 + kn^4\rho_2 + \beta k\rho_1\rho_3 + kn^2\rho_1)x^2 \\ &+ \beta\delta^2 kn^4 x + b\beta kn^4\rho_3 + bkn^6 = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Provaremos que as soluções da equação acima estão à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$. Para isso, verifiquemos o sinal das soluções da equação algébrica

$$\begin{aligned} &+ (bn^2\rho_1\rho_3\tau + \delta^2 n^2\rho_1\tau + kn^2\rho_2\rho_3\tau + k\rho_1\rho_3\tau)x^4 + \beta\delta^2 n^2\rho_1(x - \epsilon)^3 \\ &+ (bkn^4\rho_3\tau + \delta^2 kn^4\tau + b\beta n^2\rho_1\rho_3 + bn^4\rho_1 + \beta kn^2\rho_2\rho_3 + kn^4\rho_2 + \beta k\rho_1\rho_3 + kn^2\rho_1)(x - \epsilon)^2 \\ &+ \beta\delta^2 kn^4(x - \epsilon) + b\beta kn^4\rho_3 + bkn^6 = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ou seja,

$$l_4 x^4 + l_3 x^3 + l_2 x^2 + l_1 x + l_0 = 0, \quad (2.30)$$

em que

$$\begin{aligned} l_4 &= bn^2\rho_1\rho_3\tau + \delta^2 n^2\rho_1\tau + kn^2\rho_2\rho_3\tau + k\rho_1\rho_3\tau \\ l_3 &= (-4bn^2\rho_1\rho_3\tau - 4\delta^2 n^2\rho_1\tau - 4kn^2\rho_2\rho_3\tau - 4k\rho_1\rho_3\tau)\epsilon + \beta\delta^2 n^2\rho_1 \\ l_2 &= (6bn^2\rho_1\rho_3\tau + 6\delta^2 n^2\rho_1\tau + 6kn^2\rho_2\rho_3\tau + 6k\rho_1\rho_3\tau)\epsilon^2 - 3\beta\delta^2 \epsilon n^2\rho_1 + bkn^4\rho_3\tau + \delta^2 kn^4\tau + b\beta n^2\rho_1\rho_3 + bn^4\rho_1 \\ &+ \beta kn^2\rho_2\rho_3 + kn^4\rho_2 + \beta k\rho_1\rho_3 + kn^2\rho_1 \\ l_1 &= (-4bn^2\rho_1\rho_3\tau - 4\delta^2 n^2\rho_1\tau - 4kn^2\rho_2\rho_3\tau - 4k\rho_1\rho_3\tau)\epsilon^3 + 3\beta\delta^2 \epsilon^2 n^2\rho_1 \\ &+ (-2bkn^4\rho_3\tau - 2\delta^2 kn^4\tau - 2b\beta n^2\rho_1\rho_3 - 2bn^4\rho_1 - 2\beta kn^2\rho_2\rho_3 - 2kn^4\rho_2 - 2\beta k\rho_1\rho_3 - 2kn^2\rho_1)\epsilon + \beta\delta^2 kn^4 \\ l_0 &= (bn^2\rho_1\rho_3\tau + \delta^2 n^2\rho_1\tau + kn^2\rho_2\rho_3\tau + k\rho_1\rho_3\tau)\epsilon^4 - \beta\delta^2 \epsilon^3 n^2\rho_1 \\ &+ (bkn^4\rho_3\tau + \delta^2 kn^4\tau + b\beta n^2\rho_1\rho_3 + bn^4\rho_1 + \beta kn^2\rho_2\rho_3 + kn^4\rho_2 + \beta k\rho_1\rho_3 + kn^2\rho_1)\epsilon^2 - \beta\delta^2 kn^4 \epsilon + b\beta kn^4\rho_3 \\ &+ bkn^6 \end{aligned}$$

O critério de Routh-Hurwitz estabelece que a condição necessária e suficiente para que as soluções de uma equação do tipo (2.30) tenha a parte negativa é

$$\Lambda_0 = l_0 > 0, \Lambda_1 = l_1 > 0, \Lambda_2 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_0 & l_2 \end{pmatrix} > 0, \Lambda_3 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_1 & l_3 \end{pmatrix} > 0,$$

$$\Lambda_4 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & 0 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 & 0 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 \end{pmatrix} > 0.$$

Analisemos Λ_2 . Temos que

$$\Lambda_2 = d_8 n^8 + d_6 n^6 + d_4 n^4 + d_2 n^2 + d_0, \quad (2.31)$$

em que

$$\begin{aligned} d_8 &= -2b^2 \epsilon k^2 \rho_3^2 \tau^2 - 4b\delta^2 \epsilon k^2 \rho_3 \tau^2 - 2\delta^4 \epsilon k^2 \tau^2 + b\beta\delta^2 k^2 \rho_3 \tau + \beta\delta^4 k^2 \tau - 4\delta^2 \epsilon k^2 \rho_2 \tau + \beta\delta^2 k^2 \rho_2 - 2b^2 \epsilon \rho_1^2 \\ &\quad - 4b\epsilon k \rho_1 \rho_2 - 2\epsilon k^2 \rho_2^2 \\ d_6 &= -12b^2 \epsilon^3 k \rho_1 \rho_3^2 \tau^2 - 24b\delta^2 \epsilon^3 k \rho_1 \rho_3 \tau^2 - 12b\epsilon^3 k^2 \rho_2 \rho_3^2 \tau^2 - 12\delta^4 \epsilon^3 k \rho_1 \tau^2 - 12\delta^2 \epsilon^3 k^2 \rho_2 \rho_3 \tau^2 + 10b\beta\delta^2 \epsilon^2 k \rho_1 \rho_3 \tau \\ &\quad + 10\beta\delta^4 \epsilon^2 k \rho_1 \tau + 2\beta\delta^2 \epsilon^2 k^2 \rho_2 \rho_3 \tau - 12b^2 \epsilon^3 \rho_1^2 \rho_3 \tau - 12b\delta^2 \epsilon^3 \rho_1^2 \tau - 24b\epsilon^3 k \rho_1 \rho_2 \rho_3 \tau - 2\beta^2 \delta^4 \epsilon k \rho_1 - 4\beta\delta^2 \epsilon k^2 \rho_2 \rho_3 \tau \\ &\quad - 12\delta^2 \epsilon^3 k \rho_1 \rho_2 \tau - 12\epsilon^3 k^2 \rho_2^2 \rho_3 \tau + 8b\beta\delta^2 \epsilon^2 \rho_1^2 + \beta^2 \delta^2 k^2 \rho_2 \rho_3 + 8\beta\delta^2 \epsilon^2 k \rho_1 \rho_2 - 4b^2 \beta \epsilon \rho_1^2 \rho_3 - 8b\beta \epsilon k \rho_1 \rho_2 \rho_3 \\ &\quad - 4\beta \epsilon k^2 \rho_2^2 \rho_3 - 4\delta^2 \epsilon k^2 \rho_1 \tau + \beta\delta^2 k^2 \rho_1 - 4b\epsilon k \rho_1^2 - 4\epsilon k^2 \rho_1 \rho_2 \\ d_4 &= -20b^2 \epsilon^5 \rho_1^2 \rho_3^2 \tau^2 - 40b\delta^2 \epsilon^5 \rho_1^2 \rho_3 \tau^2 - 40b\epsilon^5 k \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \tau^2 - 20\delta^4 \epsilon^5 \rho_1^2 \tau^2 - 40\delta^2 \epsilon^5 k \rho_1 \rho_2 \rho_3 \tau^2 - 20\epsilon^5 k^2 \rho_2^2 \rho_3^2 \tau^2 \\ &\quad + 25b\beta\delta^2 \epsilon^4 \rho_1^2 \rho_3 \tau + 25\beta\delta^4 \epsilon^4 \rho_1^2 \tau + 25\beta\delta^2 \epsilon^4 k \rho_1 \rho_2 \rho_3 \tau - 12b^2 \beta \epsilon^3 \rho_1^2 \rho_3^2 \tau - 12b\beta\delta^2 \epsilon^3 \rho_1^2 \rho_3 \tau - 24b\beta \epsilon^3 k \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \tau \\ &\quad - 12b\epsilon^3 k^2 \rho_1 \rho_3^2 \tau - 8\beta^2 \delta^4 \epsilon^3 \rho_1^2 - 12\beta\delta^2 \epsilon^3 k \rho_1 \rho_2 \rho_3 \tau - 12\beta \epsilon^3 k^2 \rho_2^2 \rho_3^2 \tau - 12\delta^2 \epsilon^3 k^2 \rho_1 \rho_3 \tau^2 + 8b\beta^2 \delta^2 \epsilon^2 \rho_1^2 \rho_3 \\ &\quad + 8\beta^2 \delta^2 \epsilon^2 k \rho_1 \rho_2 \rho_3 + 2\beta\delta^2 \epsilon^2 k^2 \rho_1 \rho_3 \tau - 2b^2 \beta^2 \epsilon \rho_1^2 \rho_3^2 - 4b\beta^2 \epsilon k \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 - 24b\epsilon^3 k \rho_1^2 \rho_3 \tau - 2\beta^2 \epsilon k^2 \rho_2^2 \rho_3^2 \\ &\quad - 4\beta\delta^2 \epsilon k^2 \rho_1 \rho_3 \tau - 12\delta^2 \epsilon^3 k \rho_1^2 \tau - 24\epsilon^3 k^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \tau + \beta^2 \delta^2 k^2 \rho_1 \rho_3 + 8\beta\delta^2 \epsilon^2 k \rho_1^2 - 8b\beta \epsilon k \rho_1^2 \rho_3 - 8\beta \epsilon k^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \\ &\quad - 2\epsilon k^2 \rho_1^2 \\ d_2 &= -40b\epsilon^5 k \rho_1^2 \rho_3^2 \tau^2 - 40\delta^2 \epsilon^5 k \rho_1^2 \rho_3 \tau^2 - 40\epsilon^5 k^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \tau^2 + 25\beta\delta^2 \epsilon^4 k \rho_1^2 \rho_3 \tau - 24b\beta \epsilon^3 k \rho_1^2 \rho_3^2 \tau - 12\beta\delta^2 \epsilon^3 k \rho_1^2 \rho_3 \tau \\ &\quad - 24\beta \epsilon^3 k^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 \tau + 8\beta^2 \delta^2 \epsilon^2 k \rho_1^2 \rho_3 - 4b\beta^2 \epsilon k \rho_1^2 \rho_3^2 - 4\beta^2 \epsilon k^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3^2 - 12\epsilon^3 k^2 \rho_1^2 \rho_3 \tau - 4\beta \epsilon k^2 \rho_1^2 \rho_3 \\ d_0 &= -20\epsilon^5 k^2 \rho_1^2 \rho_3^2 \tau^2 - 12\beta \epsilon^3 k^2 \rho_1^2 \rho_3^2 \tau - 2\beta^2 \epsilon k^2 \rho_1^2 \rho_3^2 \end{aligned}$$

Note que o termo dominante é dado por $d_8 n^8$. Logo, para n suficientemente grande podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno tal que $\Lambda_2 > 0$. O mesmo argumento é válido para Λ_0 e Λ_1 . Também, note que $\Lambda_4 = l_4 \Lambda_3$. Logo, basta analisarmos o sinal de Λ_3 . Sendo assim, temos que

$$\Lambda_3 = d^{10} n^{10} + d_8 n^8 + d_6 n^6 + d_4 n^4 + d_2 n^2 + d_0, \quad (2.32)$$

em que

$$\begin{aligned}
 d_{10} &= 4b^3\epsilon^2k^2\rho_1\rho_3^3\tau^3 + 12b^2\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_3^2\tau^3 + 4b^2\epsilon^2k^3\rho_2\rho_3^3\tau^3 + 12b\delta^4\epsilon^2k^2\rho_1\rho_3\tau^3 + 8b\delta^2\epsilon^2k^3\rho_2\rho_3^2\tau^3 + 4\delta^6\epsilon^2k^2\rho_1\tau^3 \\
 &+ 4\delta^4\epsilon^2k^3\rho_2\rho_3\tau^3 - 2b^2\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_3^2\tau^2 - 4b\beta\delta^4\epsilon k^2\rho_1\rho_3\tau^2 - 2\beta\delta^6\epsilon k^2\rho_1\tau^2 - 8b^3\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3^2\tau^2 - 16b^2\delta^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3\tau^2 \\
 &- 16b^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2\tau^2 - 8b\delta^4\epsilon^2k\rho_1^2\tau^2 - 8b\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau^2 - 8b\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3^2\tau^2 - \beta^2\delta^4k^3\rho_2\rho_3\tau + 8\delta^4\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\tau^2 \\
 &+ 8\delta^2\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3\tau^2 + 4b^2\beta\delta^2\epsilon k\rho_1^2\rho_3\tau + 4b\beta\delta^4\epsilon k\rho_1^2\tau + 4b\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau - 4\beta\delta^4\epsilon k^2\rho_1\rho_2\tau + 4b^3\epsilon^2\rho_1^3\rho_3\tau \\
 &+ 4b^2\delta^2\epsilon^2\rho_1^3\tau + 12b^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_2\rho_3\tau + 8b\delta^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_2\tau + 12b\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3\tau + \beta^2\delta^4k^2\rho_1\rho_2 + 4\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2^2\tau \\
 &+ 4\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3\tau - 2b^2\beta\delta^2\epsilon\rho_1^3 - 4b\beta\delta^2\epsilon k\rho_1^2\rho_2 - 2\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_2^2 \\
 d_8 &= 4b^3\epsilon^2k^2\rho_1\rho_3^3\tau^3 + 12b^2\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_3^2\tau^3 + 4b^2\epsilon^2k^3\rho_2\rho_3^3\tau^3 + 12b\delta^4\epsilon^2k^2\rho_1\rho_3\tau^3 + 8b\delta^2\epsilon^2k^3\rho_2\rho_3^2\tau^3 + 4\delta^6\epsilon^2k^2\rho_1\tau^3 \\
 &+ 4\delta^4\epsilon^2k^3\rho_2\rho_3\tau^3 - 2b^2\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_3^2\tau^2 - 4b\beta\delta^4\epsilon k^2\rho_1\rho_3\tau^2 - 2\beta\delta^6\epsilon k^2\rho_1\tau^2 - 8b^3\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3^2\tau^2 \\
 &- 16b^2\delta^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3\tau^2 - 16b^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2\tau^2 - 8b\delta^4\epsilon^2k\rho_1^2\tau^2 - 8b\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau^2 - 8b\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3^2\tau^2 - \beta^2\delta^4k^3\rho_2\rho_3\tau \\
 &+ 8\delta^4\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\tau^2 + 8\delta^2\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3\tau^2 + 4b^2\beta\delta^2\epsilon k\rho_1^2\rho_3\tau + 4b\beta\delta^4\epsilon k\rho_1^2\tau + 4b\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau - 4\beta\delta^4\epsilon k^2\rho_1\rho_2\tau \\
 &+ 4b^3\epsilon^2\rho_1^3\rho_3\tau + 4b^2\delta^2\epsilon^2\rho_1^3\tau + 12b^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_2\rho_3\tau + 8b\delta^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_2\tau + 12b\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3\tau + \beta^2\delta^4k^2\rho_1\rho_2 \\
 &+ 4\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2^2\tau + 4\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3\tau - 2b^2\beta\delta^2\epsilon\rho_1^3 - 4b\beta\delta^2\epsilon k\rho_1^2\rho_2 - 2\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_2^2 \\
 d_6 &= 32b^3\epsilon^4k\rho_1^3\tau^3 + 96b^2\delta^2\epsilon^4k\rho_1^2\rho_3^2\tau^3 + 64b^2\epsilon^4k^2\rho_1\rho_2\rho_3^3\tau^3 + 96b\delta^4\epsilon^4k\rho_1^2\rho_3\tau^3 + 128b\delta^2\epsilon^4k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2\tau^3 \\
 &+ 32b\epsilon^4k^3\rho_2^2\rho_3^3\tau^3 + 32\delta^6\epsilon^4k\rho_1^3\tau^3 + 64\delta^4\epsilon^4k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau^3 + 32\delta^2\epsilon^4k^3\rho_2^2\rho_3^2\tau^3 - 32b^2\beta\delta^2\epsilon^3k\rho_1^2\rho_3^2\tau^2 \\
 &- 64b\beta\delta^4\epsilon^3k\rho_1^2\rho_3\tau^2 - 32b\beta\delta^2\epsilon^3k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2\tau^2 - 32\beta\delta^6\epsilon^3k\rho_1^2\tau^2 - 32\beta\delta^4\epsilon^3k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau^2 - 8b^3\beta\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3^3\tau^2 \\
 &+ 32b^3\epsilon^4\rho_1^3\rho_3^2\tau^2 - 16b^2\beta\delta^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3^2\tau^2 - 16b^2\beta\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3^3\tau^2 + 64b^2\delta^2\epsilon^4\rho_1^3\rho_3\tau^2 + 96b^2\epsilon^4k\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau^2 \\
 &+ 4b^2\epsilon^2k^3\rho_1\rho_3^3\tau^3 + 12b\beta^2\delta^4\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3\tau - 8b\beta\delta^4\epsilon^2k\rho_1^2\rho_3\tau^2 - 8b\beta\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2\tau^2 - 8b\beta\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3^3\tau^2 + 32b\delta^4\epsilon^4\rho_1^3\tau^2 \\
 &+ 128b\delta^2\epsilon^4k\rho_1^2\rho_2\rho_3\tau^2 + 8b\delta^2\epsilon^2k^3\rho_1\rho_3^3\tau^3 + 96b\epsilon^4k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3^2\tau^2 + 12\beta^2\delta^6\epsilon^2k\rho_1^2\tau + 4\beta^2\delta^4\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau \\
 &+ 8\beta\delta^4\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau^2 + 8\beta\delta^2\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3^2\tau^2 + 32\delta^4\epsilon^4k\rho_1^2\rho_2\tau^2 + 4\delta^4\epsilon^2k^3\rho_1\rho_3\tau^3 + 64\delta^2\epsilon^4k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3\tau^2 \\
 &+ 32\epsilon^4k^3\rho_2^2\rho_3^2\tau^2 + 4b^2\beta^2\delta^2\epsilon k\rho_1^2\rho_3^2\tau - 32b^2\beta\delta^2\epsilon^3\rho_1^3\rho_3\tau + 4b\beta^2\delta^4\epsilon k\rho_1^2\rho_3\tau + 4b\beta^2\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_2\rho_3^2\tau - 32b\beta\delta^4\epsilon^3\rho_1^3\tau \\
 &- 64b\beta\delta^2\epsilon^3k\rho_1^2\rho_2\rho_3\tau - 2\beta^3\delta^6\epsilon k\rho_1^2 - 4\beta^2\delta^4\epsilon k^2\rho_1\rho_2\rho_3\tau - 32\beta\delta^4\epsilon^3k\rho_1^2\rho_2\tau - 32\beta\delta^2\epsilon^3k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3\tau + 8b^3\beta\epsilon^2\rho_1^3\rho_3^2\tau \\
 &+ 8b^2\beta\delta^2\epsilon^2\rho_1^3\rho_3\tau + 24b^2\beta\epsilon^2k\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau - 16b^2\epsilon^2k^2\rho_1^2\rho_3^2\tau^2 + 8b\beta^2\delta^4\epsilon^2\rho_1^3 + 16b\beta\delta^2\epsilon^2k\rho_1^2\rho_2\rho_3\tau \\
 &+ 24b\beta\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3^2\tau - 8b\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1^2\rho_3\tau^2 - 16b\epsilon^2k^3\rho_1\rho_2\rho_3^2\tau^2 + \beta^3\delta^4k^2\rho_1\rho_2\rho_3 + 8\beta^2\delta^4\epsilon^2k\rho_1^2\rho_2 - \beta^2\delta^4k^3\rho_1\rho_3\tau \\
 &+ 8\beta\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3\tau + 8\beta\epsilon^2k^3\rho_2^2\rho_3^2\tau + 8\delta^4\epsilon^2k^2\rho_1^2\tau^2 + 16\delta^2\epsilon^2k^3\rho_1\rho_2\rho_3\tau^2 - 4b^2\beta^2\delta^2\epsilon\rho_1^3\rho_3 - 8b\beta^2\delta^2\epsilon k\rho_1^2\rho_2\rho_3 \\
 &+ 4b\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1^2\rho_3\tau - 4\beta^2\delta^2\epsilon k^2\rho_1\rho_2^2\rho_3 - 4\beta\delta^4\epsilon k^2\rho_1^2\tau + 12b^2\epsilon^2k\rho_1^3\rho_3\tau + 8b\delta^2\epsilon^2k\rho_1^3\tau + 24b\epsilon^2k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3\tau \\
 &+ \beta^2\delta^4k^2\rho_1^2 + 8\delta^2\epsilon^2k^2\rho_1^2\rho_2\tau + 12\epsilon^2k^3\rho_1\rho_2^2\rho_3\tau - 4b\beta\delta^2\epsilon k\rho_1^3 - 4\beta\delta^2\epsilon k^2\rho_1^2\rho_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_4 &= 192b^2\epsilon^6 k\rho_1^3\rho_3^3\tau^3 + 384b\delta^2\epsilon^6 k\rho_1^3\rho_3^2\tau^3 + 384b\epsilon^6 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^3\tau^3 + 192\delta^4\epsilon^6 k\rho_1^3\rho_3\tau^3 \\
 &+ 384\delta^2\epsilon^6 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau^3 + 192\epsilon^6 k^3\rho_1\rho_2^2\rho_3^3\tau^3 - 192b\beta\delta^2\epsilon^5 k\rho_1^3\rho_3^2\tau^2 - 192\beta\delta^4\epsilon^5 k\rho_1^3\rho_3\tau^2 \\
 &- 192\beta\delta^2\epsilon^5 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau^2 + 96b^2\beta\epsilon^4 k\rho_1^3\rho_3^3\tau^2 + 128b\beta\delta^2\epsilon^4 k\rho_1^3\rho_3^2\tau^2 + 192b\beta\epsilon^4 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^3\tau^2 + 32b\epsilon^4 k^3\rho_1^2\rho_3^3\tau^3 \\
 &+ 48\beta^2\delta^4\epsilon^4 k\rho_1^3\rho_3\tau + 32\beta\delta^4\epsilon^4 k\rho_1^3\rho_3\tau^2 + 128\beta\delta^2\epsilon^4 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau^2 + 96\beta\epsilon^4 k^3\rho_1\rho_2^2\rho_3^3\tau^2 + 32\delta^2\epsilon^4 k^3\rho_1^2\rho_3^2\tau^3 \\
 &- 64b\beta^2\delta^2\epsilon^3 k\rho_1^3\rho_3^2\tau - 32\beta^2\delta^4\epsilon^3 k\rho_1^3\rho_3\tau - 64\beta^2\delta^2\epsilon^3 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau + 12b^2\beta^2\epsilon^2 k\rho_1^3\rho_3^3\tau + 8b\beta^2\delta^2\epsilon^2 k\rho_1^3\rho_3^2\tau \\
 &+ 24b\beta^2\epsilon^2 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^3\tau - 8b\beta\epsilon^2 k^3\rho_1^2\rho_3^3\tau^2 + 96b\epsilon^4 k^2\rho_1^3\rho_3^2\tau^2 + 8\beta^3\delta^4\epsilon^2 k\rho_1^3\rho_3 + 8\beta^2\delta^2\epsilon^2 k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau \\
 &+ 12\beta^2\epsilon^2 k^3\rho_1\rho_2^2\rho_3^3\tau + 8\beta\delta^2\epsilon^2 k^3\rho_1^2\rho_3^2\tau^2 + 64\delta^2\epsilon^4 k^2\rho_1^3\rho_3\tau^2 + 96\epsilon^4 k^3\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau^2 - 4b\beta^3\delta^2\epsilon k\rho_1^3\rho_3^2 \\
 &- 4\beta^3\delta^2\epsilon k^2\rho_1^2\rho_2\rho_3^2 - 32\beta\delta^2\epsilon^3 k^2\rho_1^3\rho_3\tau + 24b\beta\epsilon^2 k^2\rho_1^3\rho_3^2\tau + 8\beta\delta^2\epsilon^2 k^2\rho_1^3\rho_3\tau + 24\beta\epsilon^2 k^3\rho_1^2\rho_2\rho_3^2\tau - 4\beta^2\delta^2\epsilon k^2\rho_1^3\rho_3 \\
 &+ 4\epsilon^2 k^3\rho_1^3\rho_3\tau \\
 d_2 &= 192b\epsilon^6 k^2\rho_1^3\rho_3^3\tau^3 + 192\delta^2\epsilon^6 k^2\rho_1^3\rho_3^2\tau^3 + 192\epsilon^6 k^3\rho_1^2\rho_2\rho_3^3\tau^3 - 96\beta\delta^2\epsilon^5 k^2\rho_1^3\rho_3^2\tau^2 + 96b\beta\epsilon^4 k^2\rho_1^3\rho_3^3\tau^2 \\
 &+ 64\beta\delta^2\epsilon^4 k^2\rho_1^3\rho_3^2\tau^2 + 96\beta\epsilon^4 k^3\rho_1^2\rho_2\rho_3^3\tau^2 - 32\beta^2\delta^2\epsilon^3 k^2\rho_1^3\rho_3^2\tau + 12b\beta^2\epsilon^2 k^2\rho_1^3\rho_3^3\tau + 4\beta^2\delta^2\epsilon^2 k^2\rho_1^3\rho_3^2\tau \\
 &+ 12\beta^2\epsilon^2 k^3\rho_1^2\rho_2\rho_3^3\tau + 32\epsilon^4 k^3\rho_1^3\rho_3^2\tau^2 - 2\beta^3\delta^2\epsilon k^2\rho_1^3\rho_3^2 + 8\beta\epsilon^2 k^3\rho_1^3\rho_3^2\tau \\
 d_0 &= 64\epsilon^6 k^3\rho_1^3\rho_3^3\tau^3 + 32\beta\epsilon^4 k^3\rho_1^3\rho_3^3\tau^2 + 4\beta^2\epsilon^2 k^3\rho_1^3\rho_3^3\tau
 \end{aligned}$$

Aqui o termo dominante de Λ_3 é $d_{10}n^{10}$. Note que também podemos encontrar um ϵ_0 suficientemente pequeno para um n suficientemente grande tal que $\Lambda_3 > 0$.

Desta forma, provamos o seguinte resultado

Teorema 2.2 *Assuma que ϵ é um parâmetro suficientemente pequeno. Então existem soluções do sistema (2.16) – (2.20) da forma (2.22) que estão à esquerda do linha $Re(z) = -\epsilon$ implicando assim na estabilidade exponencial de soluções.*

A seguir, iremos mostrar o decaimento exponencial para o mesmo sistema considerado nesta seção, porém via método da energia.

2.3 Decaimento exponencial sem o segundo espectro de frequência

Consideremos o sistema (2.16) – (2.20). Para obtermos o decaimento exponencial da energia, iremos construir o funcional Lyapunov L satisfazendo

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \quad t \geq 0$$

com constantes positivas β_1, β_2 tal que

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -\alpha L(t)$$

para algum $\alpha > 0$. Temos que

Proposição 2.3 *A energia $E(t)$ do sistema (2.16) – (2.20) dada por (2.33) satisfaz a lei de dissipação dada por:*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\beta \int_0^L q^2 dx,$$

em que

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 y_t^2 + b \psi_x^2 + k(y_x + \psi)^2 + \rho_3 \theta^2 + \rho_2 y_{tx}^2 + \frac{\rho_1 \rho_2}{k} y_{tt}^2 + \tau q^2 \right] dx. \quad (2.33)$$

Demonstração: Multiplicando por y_t, ψ_t, θ e q as equações (2.16), (2.17), (2.18) e (2.19) respectivamente e integrando em $(0, L)$ obteremos:

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y_t dx - k \int_0^L (y_x + \psi)_x y_t dx = 0, \quad (2.34)$$

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi_t dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi_t dx + \delta \int_0^L \theta_x \psi_t dx = 0, \quad (2.35)$$

$$\rho_3 \int_0^L \theta_t \theta dx - \kappa \int_0^L \theta_{xx} \theta dx + \delta \int_0^L \psi_{tx} \theta dx = 0, \quad (2.36)$$

$$\tau \int_0^L q_t q dx + \beta \int_0^L q^2 dx + \int_0^L \theta_x q dx = 0. \quad (2.37)$$

Somando (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [\rho_1 y_t^2 + k(y_x + \psi)^2 + b \psi_x^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau q^2] dx - \rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi_t dx = -\beta \int_0^L q^2 dx. \quad (2.38)$$

Note que

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi_t dx &= \rho_2 \int_0^L y_{tt} \psi_{tx} dx = \rho_2 \int_0^L y_{tt} \left(\frac{\rho_1}{k} y_{ttt} - y_{xxt} \right) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\frac{\rho_1 \rho_2}{2k} y_{tt}^2 + \frac{\rho_2}{2} y_{tx}^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Combinando (2.38) com (2.39) teremos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\beta \int_0^L q^2 dx, \quad (2.40)$$

em que $E(t)$ é dada por (2.33). ■

Agora, faremos uma escolha adequada dos multiplicadores e das sequencias de estimativas do método da energia que serão dadas pelos Lemas seguintes. Aqui, definiremos os espaços

$$L_*^2 = \left\{ f \in L^2(0,L); \int_0^L f(x)dx = 0 \right\}, \quad H_*^1 = H^1(0,L) \cap L_*^2(0,L)$$

os quais precisamos para obtermos as regularidades necessárias para o decaimento exponencial.

Lema 2.1 *Seja (y, ψ, θ, q) solução de (2.16) – (2.21) e o seguinte funcional dado por*

$$I_1(t) := \int_0^L \rho_2 y_{tx} y_x dx.$$

Então:

$$\frac{d}{dt}I_1(t) \leq -\frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 + \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \frac{k^2 C_p}{b} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta^2 C_p}{b} \int_0^L \theta^2 dx.$$

Demonstração: Multiplicando por ψ a equação (2.17) encontramos

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx} \psi dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx - \delta \int_0^L \theta \psi_x dx = 0.$$

Das condições de contorno e da integração por partes temos

$$\rho_2 \int_0^L y_{tt} \psi_x dx + b \int_0^L \psi_x^2 + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \delta \int_0^L \theta_x \psi dx = 0.$$

Usando fato que $\psi_x = \frac{\rho_1}{k} y_{tt} - y_{xx}$, segue que

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx - \rho_2 \int_0^L y_{tt} y_{xx} dx + b \int_0^L \psi_x^2 + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx - \delta \int_0^L \theta \psi_x dx = 0,$$

\Rightarrow

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^L y_{ttx} y_x dx + b \int_0^L \psi_x^2 + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx - \delta \int_0^L \theta \psi_x dx = 0,$$

\Rightarrow

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx + \rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L y_{tx} y_x dx - \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + b \int_0^L \psi_x^2 + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx - \delta \int_0^L \theta \psi_x dx = 0.$$

Portanto,

$$\rho_2 \frac{d}{dt} \int_0^L y_{tx} y_x dx = -\frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx + \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 - k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \delta \int_0^L \theta \psi_x dx.$$

Segue da desigualdade de Young que

$$\frac{d}{dt} I_1(t) \leq -\frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 + \rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \frac{k^2 C_p}{b} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta^2 C_p}{b} \int_0^L \theta^2 dx.$$

■

Lema 2.2 *Seja (y, ψ, θ, q) solução de (2.16) – (2.21) e o seguinte funcional dado por*

$$I_2(t) := -\rho_1 \int_0^L y_t y dx.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + C_\epsilon \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \epsilon \int_0^L \psi_x^2 dx.$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.16) por y teremos:

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y dx - k \int_0^L (y_x + \psi)_x y dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima

$$\rho_1 \int_0^L \frac{d}{dt} y_t y dx - \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) y_x dx = 0.$$

Logo,

$$-\rho_1 \int_0^L \frac{d}{dt} y_t y dx = -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) y_x dx.$$

Usando a desigualdade de Young obteremos

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + \frac{k\epsilon}{2} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \frac{k}{2\epsilon} \int_0^L y_x^2 dx.$$

Tendo em mente que

$$\int_0^L y_x^2 dx \leq 2 \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + 2C_p \int_0^L \psi_x^2 dx,$$

encontra-se

$$\frac{d}{dt} I_2(t) \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + C_\epsilon \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \epsilon \int_0^L \psi_x^2 dx.$$

■

Lema 2.3 *Seja (y, ψ, θ, q) solução de (2.16) – (2.21) e o seguinte funcional dado por*

$$I_3(t) := \int_0^L \left(-\rho_2 y_{tx}(y_x + \psi) + \frac{\rho_1 b}{k} \psi_x y_t + \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \frac{\rho_3}{k} \theta y_t - C_1 q y_x \right) dx.$$

Então,

$$\frac{d}{dt} I_3(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L y_{tx}^2 dx - \frac{k}{2} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + C_{\epsilon_1} \int_0^L q^2 dx + C_2 \int_0^L \psi_x \theta dx,$$

em que C_1, C_2 são constantes positivas.

Demonstração: Multiplicando a equação (2.17) por $(y_x + \psi)$ obteremos

$$-\rho_2 \int_0^L y_{ttx}(y_x + \psi) dx - b \int_0^L \psi_{xx}(y_x + \psi) dx + k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \delta \int_0^L \theta_x(y_x + \psi) dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L \frac{d}{dt} y_{tx}(y_x + \psi) dx + \rho_2 \int_0^L y_{tx}(y_x + \psi)_t dx + b \int_0^L \psi_x(y_x + \psi)_x \\ + k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \delta \int_0^L \theta(y_x + \psi)_x dx = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} -\rho_2 \int_0^L \frac{d}{dt} y_{tx}(y_x + \psi) dx &= -\rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx - \frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L \psi_x y_{tt} dx - k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx \\ &+ \delta \int_0^L \theta(y_x + \psi)_x dx - \rho_2 \int_0^L y_{tx} \psi_t dx. \end{aligned}$$

Note que,

$$-\frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L \psi_x y_{tt} dx = -\frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L \frac{d}{dt} \psi_x y_t dx + \frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L \psi_{tx} y_t dx.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d}{dt} \left(-\rho_2 y_{tx}(y_x + \psi) + \frac{\rho_1 b}{k} \psi_x y_t \right) dx &= -\rho_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \int_0^L \psi_{tx} y_t dx \\ &- k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \frac{\delta \rho_1}{k} \int_0^L \theta y_{tt} dx. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Por outro lado, segue de (2.18) que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \int_0^L \psi_{tx} y_t &= \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \int_0^L y_t \left(-\frac{\rho_3}{k} \theta_t - \frac{1}{\delta} q_x \right) dx \\ &= - \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \frac{\rho_3}{k} \int_0^L \frac{d}{dt} \theta y_t dx + \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \frac{\rho_3}{k} \int_0^L \theta y_{tt} dx \\ &+ \left(\frac{\rho_1 b}{k} + \rho_2 \right) \frac{1}{\delta} \int_0^L y_{tx} q dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Também, ainda temos que:

$$\int_0^L \theta y_{tt} dx = \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta (y_x + \psi)_x dx = \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta y_{xx} dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta \psi_x dx = -\frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta_x y_x dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta \psi_x dx.$$

De (2.19) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^L \theta y_{tt} dx &= -\frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta_x y_x dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta \psi_x dx \\ &= \frac{k}{\rho_1} \int_0^L (\tau q_t + \beta q) y_x dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta \psi_x dx \\ &= \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \left(\frac{d}{dt} q y_x - q y_{tx} \right) dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L q y_x dx + \frac{k}{\rho_1} \int_0^L \theta \psi_x dx. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Desta forma, combinando (2.41), (2.42), (2.43) e usando a desigualdade de Young, produzimos:

$$\frac{d}{dt} I_3(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L y_{tx}^2 dx - \frac{k}{2} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L \psi_x^2 dx + C_{\epsilon_1} \int_0^L q^2 dx + C_2 \int_0^L \psi_x \theta dx.$$

■

Lema 2.4 *Seja (y, ψ, θ, q) solução de (2.16) – (2.21) e o seguinte funcional dado por*

$$I_4(t) := \tau \rho_3 \int_0^L \int_0^x q \theta dy dx + \tau \delta \int_0^L \int_0^x q dy \psi_x dx$$

Então,

$$\frac{d}{dt} I_4(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^L \theta^2 dx + C_{\epsilon_2} \int_0^L q^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L \psi_x^2 dx.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tau \rho_3 \int_0^L \int_0^x q \theta dy dx &= \tau \rho_3 \int_0^L \int_0^x q_t dy \theta dx + \tau \rho_3 \int_0^L \int_0^x q dy \theta_t dx \\
 &= -\rho_3 \int_0^L \int_0^x (\beta q + \theta_x) dy \theta dx - \tau \int_0^L \int_0^x q dy (q_x + \delta \psi_{tx}) dx \\
 &= -\rho_3 \beta \int_0^L \int_0^x q dy \theta dx - \rho_3 \int_0^L \theta^2 dx - \tau \int_0^L \int_0^x q dy q_x dx - \tau \delta \int_0^L \int_0^x q dy \psi_{tx} dx \\
 &= -\rho_3 \beta \int_0^L \int_0^x q dy \theta dx - \rho_3 \int_0^L \theta^2 dx - \tau \int_0^L \int_0^x q dy q_x dx - \tau \delta \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^x q dy \psi_x dx \\
 &\quad + \tau \delta \int_0^L \int_0^x q_t dy \psi_x dx \\
 &= -\rho_3 \beta \int_0^L \int_0^x q dy \theta dx - \rho_3 \int_0^L \theta^2 dx - \tau \int_0^L \int_0^x q dy q_x dx - \tau \delta \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^x q dy \psi_x dx \\
 &\quad - \tau \int_0^L \int_0^x (\beta q + \theta_x) dy \psi_x dx \\
 &= -\rho_3 \beta \int_0^L \int_0^x q dy \theta dx - \rho_3 \int_0^L \theta^2 dx - \tau \int_0^L \int_0^x q dy q_x dx - \tau \delta \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^x q dy \psi_x dx \\
 &\quad - \tau \beta \int_0^L \int_0^x q dy \psi_x dx - \tau \int_0^L \theta \psi_x dx.
 \end{aligned}$$

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da desigualdade de Young que:

$$\frac{d}{dt} I_4(t) \leq -\frac{\rho_3}{2} \int_0^L \theta^2 dx + C_{\epsilon_2} \int_0^L q^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L \psi_x^2 dx - \tau \int_0^L \theta \psi_x dx.$$

■

Por fim, introduziremos o funcional linear dado por

$$I_5(t) := I_3(t) + \frac{C_1}{\tau} I_4(t),$$

no qual nos fornece a seguinte estimativa:

$$\frac{d}{dt} I_5(t) \leq -\frac{\rho_2}{2} \int_0^L y_{tx}^2 dx - \frac{k}{2} \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \frac{\rho_3 C_1}{2} \int_0^L \theta^2 dx + (\epsilon_1 + C_1 \epsilon_2) \int_0^L \psi_x^2 dx + (C_{\epsilon_1} + C_1 C_{\epsilon_2}) \int_0^L q^2 dx.$$

Considere agora o funcional Lyapunov L definido como

$$L := NE(t) + N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) + N_3 I_5(t).$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}L(t) &\leq -N_1 \frac{\rho_1 \rho_2}{k} \int_0^L y_{tt}^2 dx - \left(N_1 \frac{b}{2} - N_2 \epsilon - N_3 (\epsilon_1 + C_1 \epsilon_2) \right) \int_0^L \psi_x^2 dx - (N_3 \rho_2 - N_1 \rho_2) \int_0^L y_{tx}^2 dx \\
 &\quad - N_2 \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - \left(N_3 \frac{k}{2} - N_1 \frac{k^2 C_p}{b} - N_2 C_\epsilon \right) \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \left(N_3 \frac{\rho_3 C_1}{2} - N_1 \frac{\delta^2 C_p}{b} \right) \int_0^L \theta_x^2 dx \\
 &\quad - (N\beta - N_3 (C_{\epsilon_1} + C_1 C_{\epsilon_2})) \int_0^L q^2 dx.
 \end{aligned}$$

Tomemos as constantes na seguinte ordem: $N_3 > N_1$, ϵ_1 suficientemente pequeno, ϵ_2 suficientemente pequeno e N suficientemente grande. Daí, segue que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\beta_0 E(t).$$

para algum $\beta_0 > 0$. Além disso, existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tal que para $t \geq 0$

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t) \tag{2.44}$$

De onde segue que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -2\alpha L(t).$$

para $\alpha := \frac{\beta_0}{2\beta_2}$. Usando (2.44) teremos provado o principal resultado:

Teorema 2.4 *Seja (y, ψ, θ, q) uma solução particular do sistema (2.16) – (2.20). Então existem constantes positivas C e α , independente das condições iniciais e dos coeficientes tal que para todo $t \geq 0$*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-2\alpha t}.$$

Capítulo 3

O modelo de Timoshenko não local e análise de dispersão

Neste capítulo iremos efetuar a análise de dispersão do modelo de Timoshenko não local no qual teremos a caracterização do primeiro e segundo espectro, e em seguida, mostraremos que o damping tipo atrito na equação de rotação elimina o espectro não físico.

3.1 A caracterização dos espectros

Seja o seguinte sistema linear Timoshenko não local

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x - \alpha l^2 \rho_1 y_{ttxx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (3.1)$$

$$\rho_2(\psi_{tt} - l^2 \psi_{ttxx}) - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) - (1 - \alpha)l^2 \rho_1 y_{ttx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (3.2)$$

Junto com as condições iniciais

$$y(., 0) = y_0; y_t(., 0) = y_1; \psi(., 0) = \psi_0; \psi_t(., 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L), \quad (3.3)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi(0, L) = \psi(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (3.4)$$

Aqui, y e ψ são o deslocamentos transversal e a rotação de seção transversal, respectivamente; l é um comprimento intrínseco do efeito não local; α é um indicador escalar adimensional no

qual tomasse o valor de 0 ou 1. Quando $\alpha = 0$ significa que o efeito não local é negligenciado na relação constitutiva de tensão de cisalhamento, enquanto $\alpha = 1$ significa que o efeito não local é considerado. As demais constantes são positivas conhecidas pela literatura.

Iremos efetuar a análise de dispersão do sistema acima e, para isto, consideremos soluções do tipo harmônicas, isto é,

$$y = Ae^{i(\gamma x + \omega t)} \quad ; \quad \psi = Be^{i(\gamma x + \omega t)}, \quad (3.5)$$

em que A, B são as amplitudes, γ é o número de ondas e ω é a frequência. Assim, substituindo na equação (3.1) teremos:

$$\begin{aligned} - \rho_1 A \omega^2 + k A \gamma^2 - k B i \gamma - \alpha l^2 \rho_1 A \gamma^2 \omega^2 &= 0 \\ \Rightarrow A(k \gamma^2 - \rho_1 \omega^2 - \alpha l^2 \rho_1 \gamma^2 \omega^2) &= k i \gamma B \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{i k \gamma}{k \gamma^2 - \rho_1 \omega^2 - \alpha l^2 \rho_1 \gamma^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora, para equação (3.2):

$$\begin{aligned} - \rho_2 B \omega^2 - \rho_2 l^2 B \gamma^2 \omega^2 + b B \gamma^2 + k i A \gamma + k B + i(1 - \alpha) l^2 \rho_1 A \gamma \omega^2 &= 0 \\ \Rightarrow A(i k \gamma + i(1 - \alpha) l^2 \rho_1 \gamma \omega^2) &= B(\rho_2 \omega^2 + \rho_2 l^2 \gamma^2 \omega^2 - k - b \gamma^2) \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{\rho_2 \omega^2 + \rho_2 l^2 \gamma^2 \omega^2 - k - b \gamma^2}{i k \gamma + i(1 - \alpha) l^2 \rho_1 \gamma \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Combinando (3.6) com (3.7) obteremos a seguinte equação de dispersão

$$P_4(\gamma) \omega^4 - P_2(\gamma) \omega^2 + P_0(\gamma) = 0, \quad (3.8)$$

em que

$$\begin{aligned} P_4(\gamma) &= (1 + l^2 \gamma^2)(1 + \alpha l^2 \gamma^2); \\ P_2(\gamma) &= \left(\frac{k l^2}{\rho_2} + \frac{k}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \gamma^2 + \left(\frac{k}{\rho_1} + \frac{\alpha b}{\rho_2} \right) l^2 \gamma^4 + \frac{k}{\rho_2}; \\ P_0(\gamma) &= \frac{k b \gamma^4}{\rho_1 \rho_2}. \end{aligned}$$

Da relação física $\omega = c\gamma$, encontramos as velocidades de fase do Timoshenko não local dada por:

$$c = \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{P_2(\gamma)}{2P_4(\gamma)} \pm \frac{\sqrt{P_2^2(\gamma) - 4P_4(\gamma)P_0(\gamma)}}{2P_4(\gamma)}}. \quad (3.9)$$

Verificando o comportamento da dispersão quando $\gamma \rightarrow 0$ e $\gamma \rightarrow \infty$, concluímos que:

- Para $\alpha = 0$ temos

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_1 \rightarrow \infty \quad ; \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_1 \rightarrow \sqrt{\frac{k}{\rho l}}$$

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_2 \rightarrow 0 \quad ; \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_2 \rightarrow 0$$

- Para $\alpha = 1$ temos

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_1 \rightarrow \infty \quad ; \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_1 \rightarrow 0$$

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_2 \rightarrow 0 \quad ; \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_2 \rightarrow 0$$

Desta forma, provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *As soluções do tipo harmônicas de (3.1) – (3.4) são dadas por*

$$y = Ae^{i(\gamma x + \omega t)} \quad ; \quad \psi = Be^{i(\gamma x + \omega t)} \quad ,$$

em que A, B são as amplitudes de y, ψ respectivamente, e as velocidades de fase são:

$$c = \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{P_2(\gamma)}{2P_4(\gamma)} \pm \frac{\sqrt{P_2^2(\gamma) - 4P_4(\gamma)P_0(\gamma)}}{2P_4(\gamma)}}.$$

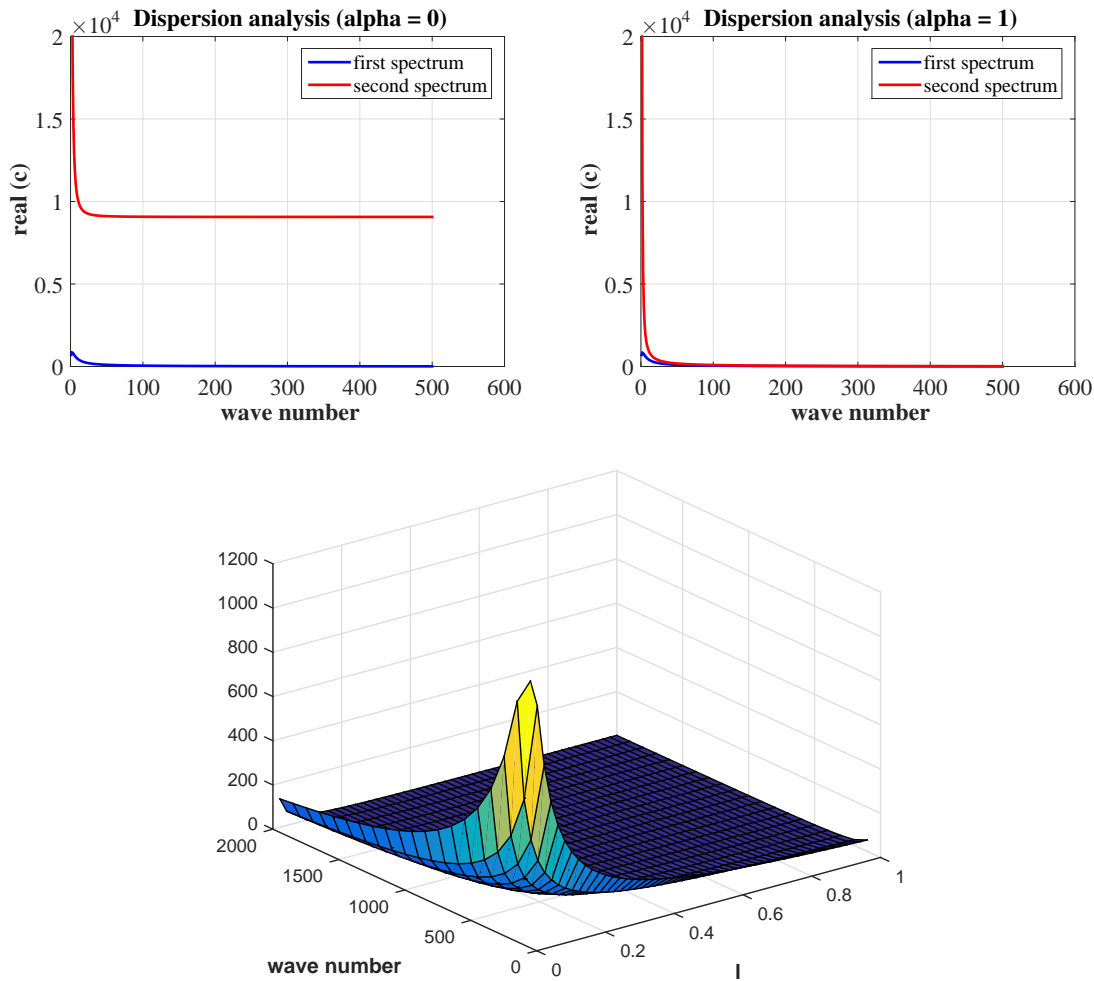


Figura 4: Número de ondas (γ) vs velocidade (c). Na figura à esquerda consideramos primeiramente o valor de α igual a zero. Note que as duas curvas são dispersivas e mostram um comportamento estável em alta frequência. A primeira curva que caracteriza o primeiro espectro (cor azul) se propaga por todo o domínio do espectro. Já a segunda curva que caracteriza o segundo espectro (cor vermelha) mostra uma velocidade infinita para valores próximos da frequência crítica. Na figura à esquerda, temos agora a consideração de α igual a 1 e, observe que, ambas as curvas tendem a zero o que nos resulta em velocidades de propagação de ondas nulas. Na figura central, mostra a superfície espectral do sistema sem damping. Para essa simulação, usamos o tamanho $L = \pi, l = 1, E = 21 \times 10^{10}, \rho = 7860, k' = 5/6, I = 0.0001171$ e $A = 3 \times 10^{-3}$. O domínio da dispersão foi tomado no intervalo $[-500, 500]$ e $G = 77.5 \times 10^{10}$.

Note que, para $\alpha = 1$, o sistema admite velocidade nula. Portanto, uma pergunta pertinente aparece: o que seria a causa da velocidade se anular.

Fisicamente, o parâmetro l , que é um comprimento de características externa, pode ser visto como o inverso do comprimento de ondas.

Portanto, tomando $l = O\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ ou $l = O\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)$ obteremos, respectivamente,

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_1 \rightarrow \infty \quad , \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{b}{\rho_2}}$$

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_2 \rightarrow 0 \quad , \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_2 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{k}{\rho_1}}$$

e

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_1 \rightarrow \infty \quad , \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_1 \rightarrow \sqrt{\frac{b}{\rho_2}}$$

$$\gamma \rightarrow 0 \implies c_2 \rightarrow 0 \quad , \quad \gamma \rightarrow \infty \implies c_2 \rightarrow \sqrt{\frac{k}{\rho_1}}$$

Sendo assim, o parâmetro intrínseco l é o fator que está fazendo a velocidade se anular para $\alpha = 1$ e, quanto mais o valor de l se aproxima de zero, obtemos todos os resultados da literatura sobre o sistema de Timoshenko clássico.

Ou seja, provamos o seguinte resultado

Corolário 3.1 *O sistema (3.1) – (3.4) admite velocidades nulas quando α é igual a zero. Se o parâmetro intrínseco l for da ordem de $\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ ou $\left(\frac{1}{\gamma^2}\right)$, em que γ é o número de ondas, temos as velocidades tendem à $C\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}$ e $C\sqrt{\frac{b}{\rho_2}}$ com C uma constante positiva.*

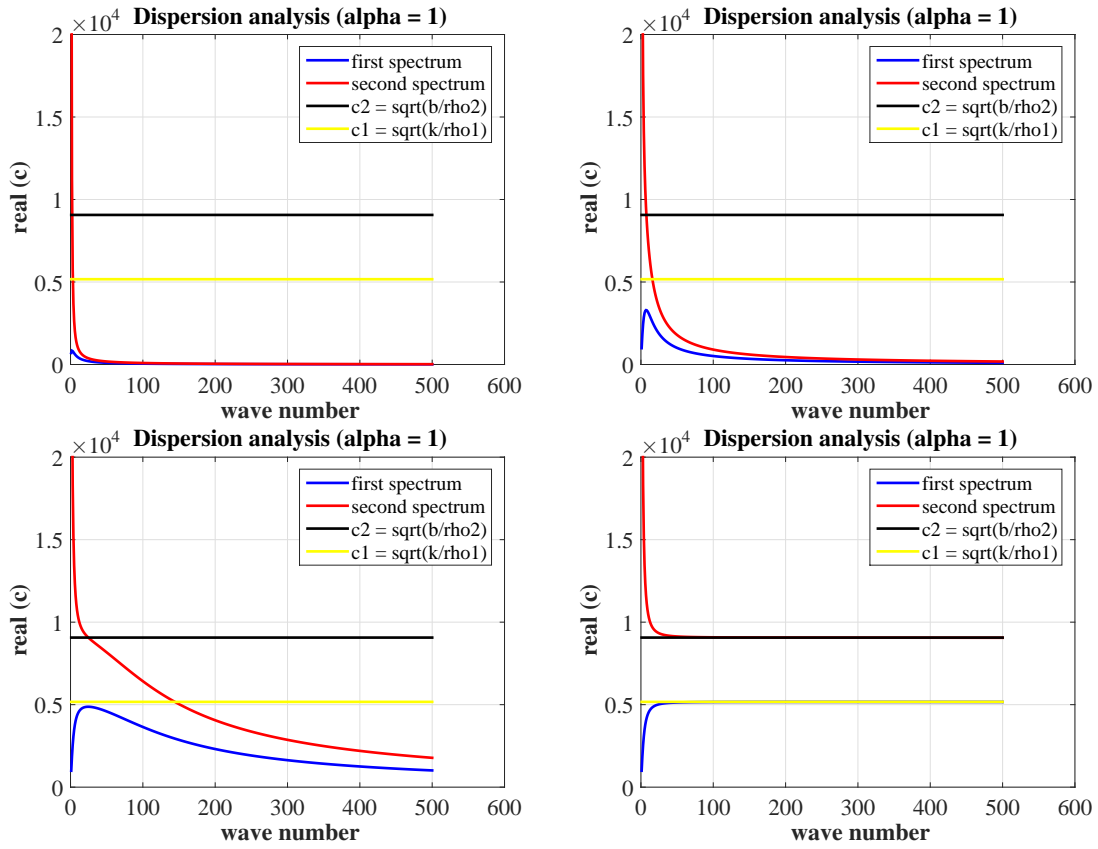


Figura 5: Número de ondas (γ) vs velocidade (c). Na primeira figura acima à esquerda, consideramos $\alpha = 1$ e o parâmetro intrínseco $l = 1$. Depois, tomando o valor de $l = 1/100$ temos que o comportamento das velocidades começam a ser alterados. Em seguida tomamos o valor $l = 1/1000$ e, por fim, a partir do valor $l = 1/10000$ obtemos as velocidades do Timoshenko clássico.

Na próxima seção, iremos considerar um damping do tipo atrito na equação de rotação e mostrar que o mesmo elimina o segundo espectro (para $\alpha = 1$ e um valor intrínseco qualquer).

3.2 A eliminação do segundo espectro

Nesta seção, iremos mostrar que o damping tipo atrito na equação de rotação elimina o segundo espectro. Sendo assim, considere o seguinte sistema dissipativo

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x - \alpha l^2 \rho_1 y_{ttxx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (3.10)$$

$$\rho_2(\psi_{tt} - l^2 \psi_{ttxx}) - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) - (1 - \alpha)l^2 \rho_1 y_{ttx} + \mu\psi_t = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (3.11)$$

Junto com as condições iniciais

$$y(., 0) = y_0; y_t(., 0) = y_1; \psi(., 0) = \psi_0; \psi_t(., 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L), \quad (3.12)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi(0, L) = \psi(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (3.13)$$

Agora, considerando (3.5) e substituindo em (3.10) obteremos:

$$\begin{aligned} - \rho_1 A \omega^2 + k A \gamma^2 - k B i \gamma - \alpha l^2 \rho_1 A \gamma^2 \omega^2 &= 0 \\ \Rightarrow A(k \gamma^2 - \rho_1 \omega^2 - \alpha l^2 \rho_1 \gamma^2 \omega^2) &= k i \gamma B \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{i k \gamma}{k \gamma^2 - \rho_1 \omega^2 - \alpha l^2 \rho_1 \gamma^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agora, para equação (3.11):

$$\begin{aligned} - \rho_2 B \omega^2 - \rho_2 l^2 B \gamma^2 \omega^2 + b B \gamma^2 + k i A \gamma + k B + i(1 - \alpha) l^2 \rho_1 A \gamma \omega^2 + i \mu B \omega &= 0 \\ \Rightarrow A(i k \gamma + i(1 - \alpha) l^2 \rho_1 \gamma \omega^2) &= B(\rho_2 \omega^2 + \rho_2 l^2 \gamma^2 \omega^2 - k - b \gamma^2 - i \mu \omega) \\ \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{\rho_2 \omega^2 + \rho_2 l^2 \gamma^2 \omega^2 - b \gamma^2 - k - i \mu \omega}{i k \gamma + i(1 - \alpha) l^2 \rho_1 \gamma \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Combinando (3.14) com (3.15) encontramos a seguinte equação de dispersão

$$P_4(\gamma) \omega^4 - i P_3(\gamma) \omega^3 - P_2(\gamma) \omega^2 + i P_1(\gamma) \omega + P_0(\gamma) = 0, \quad (3.16)$$

em que

$$\begin{aligned} P_4(\gamma) &= (1 + l^2 \gamma^2)(1 + \alpha l^2 \gamma^2); \\ P_3(\gamma) &= \frac{\mu}{\rho_2} (1 + \alpha l^2 \gamma^2); \\ P_2(\gamma) &= \left(\frac{k l^2}{\rho_2} + \frac{k}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} \right) \gamma^2 + \left(\frac{k}{\rho_1} + \frac{\alpha b}{\rho_2} \right) l^2 \gamma^4 + \frac{k}{\rho_2}; \\ P_1(\gamma) &= \frac{\mu k}{\rho_1 \rho_2} \gamma^2; \\ P_0(\gamma) &= \frac{k b \gamma^4}{\rho_1 \rho_2}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
 -iP_3(\gamma)\omega^3 + iP_1(\gamma)\omega &= -i\frac{\mu}{\rho_2}(1 + \alpha l^2\gamma^2)\omega^3 + i\frac{\mu k}{\rho_1\rho_2}\gamma^2\omega \\
 &= i\frac{\mu}{\rho_2}\left[\frac{k\gamma^2}{\rho_1}\omega - (1 + \alpha l^2\gamma^2)\omega^3\right] \\
 &= i\frac{\mu}{\rho_2}\underbrace{\left[\frac{k\gamma^2}{\rho_1\omega} - (1 + \alpha l^2\gamma^2)\omega\right]}_{:=z}\omega^2.
 \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$z^2 = \frac{k}{\rho_1}\frac{k}{\rho_1}\frac{\gamma^4}{\omega^2} - 2\frac{k}{\rho_1}\gamma^2(1 + \alpha l^2\gamma^2) + (1 + \alpha l^2\gamma^2)^2\omega^2.$$

Desta forma, supondo que $\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$, $\alpha = 1$ e dividindo (3.16) por ω^2 obteremos:

$$z^2 + i\frac{\mu}{\rho_2}z - \frac{k}{\rho_2}(1 + l^2\gamma^2) = 0.$$

Ou seja,

$$z_{1,2} = -i\frac{\mu}{2\rho_2} \pm \frac{\Delta}{2} \quad ; \quad \Delta = -\frac{\mu^2}{\rho_2^2} + 4\frac{k}{\rho_2}(1 + l^2\gamma^2).$$

Como $z = \frac{k\gamma^2}{\rho_1\omega} - (1 + \alpha l^2\gamma^2)\omega$, então

$$(1 + l^2\gamma^2)\omega^2 + z\omega - \frac{k\gamma^2}{\rho_1} = 0,$$

isto é,

$$\omega = -\frac{z_{1,2}}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta_{1,2}}}{2} \quad ; \quad \Delta_{1,2} = z_{1,2}^2 + 4\frac{k}{\rho_1}(1 + l^2\gamma^2)\gamma^2.$$

Segue da identidade $\omega = c\gamma$ que:

$$c = -\frac{z_{1,2}}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{\Delta_{1,2}}}{2\gamma}. \quad (3.17)$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *As soluções do tipo harmônicas de (3.10) – (3.13) são dadas por*

$$y = Ae^{i(\gamma x + \omega t)} \quad ; \quad \psi = Be^{i(\gamma x + \omega t)} \quad ,$$

em que A, B são as amplitudes de y, ψ respectivamente, e as velocidades de fase são:

$$c = -\frac{z_{1,2}}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{\Delta_{1,2}}}{2\gamma}.$$

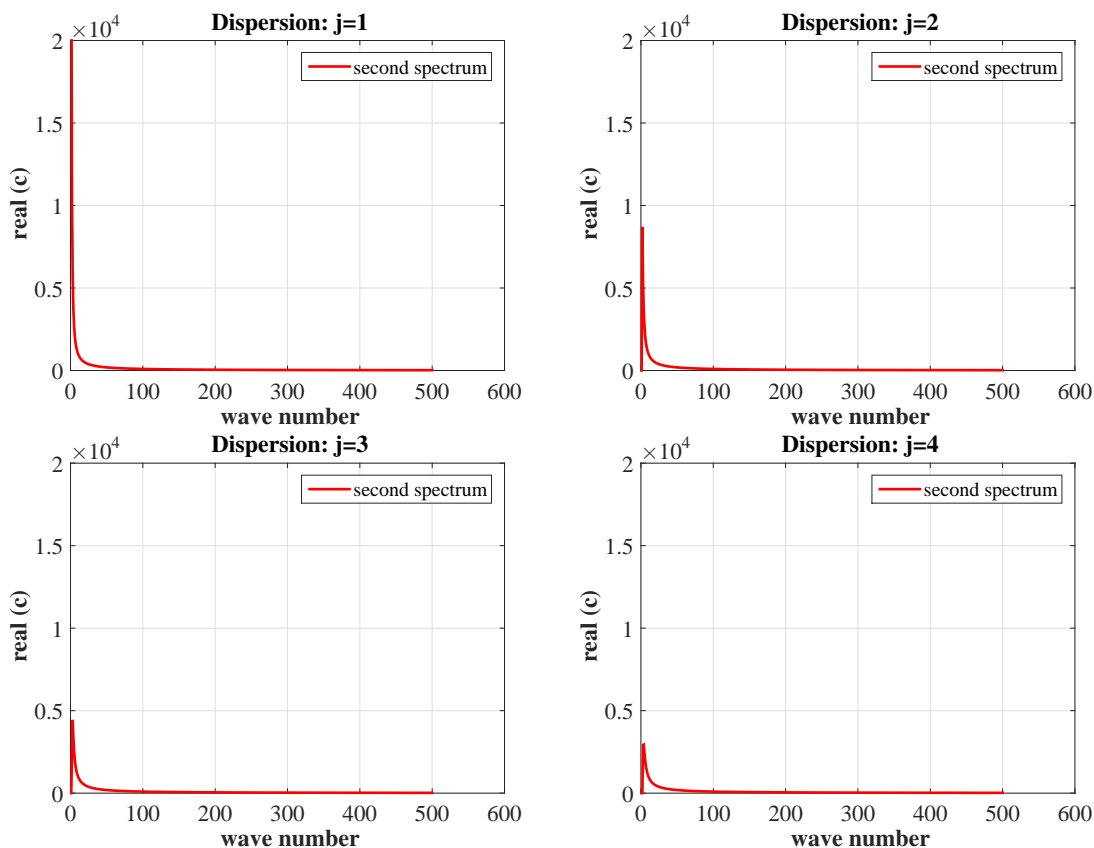


Figura 6: Número de ondas (γ) vs velocidade (c). Na primeira figura, temos a análise de dispersão sem levar em consideração o damping do tipo atrito com $\alpha = 1$ e $l = 1$ sendo que o segundo espectro está caracterizado pela curva de cor vermelha. No entanto, as próximas figuras mostram que a anomalia física é corrigida quando há a inserção do damping. Para essa simulação, usamos o tamanho $L = \pi, l = 1, E = 21 \times 10^{12}, \rho = 7860, k' = 5/6, I = 0.0001171$ e $A = 3 \times 10^{-3}$. O domínio da dispersão foi tomado no intervalo $[-500, 500]$ e $G = 77.5 \times 10^{10}$. Por fim, tomamos a parte real dos valores cujo o parâmetro de damping utilizado foi $j\sqrt{k\rho_2(1+l^2)}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

A seguir, abordaremos a existência e unicidade de solução para o sistema de Timoshenko não local considerando tal efeito em ambas as equações, apenas a equação do deslocamento e apenas na equação de rotação.

Capítulo 4

Boa colocação de solução do modelo de Timoshenko não local

Neste capítulo, iremos provar a existência e unicidade de solução do sistema de Timoshenko não local dissipativo via Teorema de Lummer Phillips. O mesmo argumento é válido para o caso conservativo.

4.1 Boa colocação com efeito não local nas equações de deslocamento e de rotação

Iremos considerar $\alpha = 1$ em (3.10) – (3.11). Com isso, podemos reescrever o problema como:

$$\rho_1 \mathcal{A} y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \mathcal{A} \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \mu\psi_t = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (4.2)$$

com as mesmas condições iniciais e de contorno dadas por (3.12) e (3.13). Aqui, $\mathcal{A} = I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ é um operador auto-adjunto definido positivo com domínio denso num espaço de Hilbert \mathcal{H} .

A energia do problema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 y_t^2 + \rho_1 l^2 y_{tx}^2 + (y_x + \psi)^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_2 l^2 \psi_{tx}^2 + b\psi_x^2) dx, \quad (4.3)$$

sendo que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Considere o seguinte espaço de fase:

$$\mathcal{X} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

Tal espaço é munido com a norma:

$$\begin{aligned} \|(y, u, \psi, v)\|_{\mathcal{X}}^2 &= \rho_1 \|u\|^2 + \rho_1 l^2 \|u_x\|^2 + k \|y_x + \psi\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_2 l^2 \|v_x\|^2 + b \|\psi_x\|^2 \\ &= \int_0^L \rho_1 u^2 dx + \int_0^L \rho_1 l^2 u_x^2 dx + \int_0^L k (y_x + \psi)^2 dx + \int_0^L \rho_2 v^2 dx + \int_0^L \rho_2 l^2 v_x^2 dx + \int_0^L b \psi_x^2 dx, \end{aligned}$$

para cada $(y, u, \psi, v) \in \mathcal{X}$, em que $\|\cdot\|$ denota a norma em $L^2(0, L)$. E, com produto interno

$$\langle (y, u, \psi, v), (\tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{v}) \rangle = \int_0^L \left(\rho_1 u \tilde{u} + \rho_1 l^2 u_x \tilde{u}_x + k (y_x + \psi)(\tilde{y}_x + \tilde{\psi}) + \rho_2 v \tilde{v} + \rho_2 l^2 v_x \tilde{v}_x + b \psi_x \tilde{\psi}_x \right) dx.$$

Para $U = (y, u, \psi, v)^T$, com $u = y_t$ e $v = \psi_t$, $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)^T$, podemos escrever o problema como de Cauchy da seguinte forma

$$\begin{aligned} U_t &= AU \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que $A : D(A) \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é o operador dado por

$$U_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{b}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} & -\frac{\mu}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ u \\ \psi \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} ((y_x + \psi)_x) \\ v \\ \mathcal{A}^{-1} \left(-\frac{k}{\rho_2} y_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi - \frac{\mu}{\rho_2} v \right) \end{pmatrix}}_{AU},$$

com domínio

$$D(A) = H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L). \tag{4.5}$$

Observemos ainda que $\left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1}$ denota a inversa do operador

$$\left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) : H_0^1(0, L) \rightarrow H^{-1}(0, L).$$

Temos que $D(A)$ é denso em \mathcal{X} . E, além disso, A é dissipativo. De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle AU, U \rangle &= k \int_0^L \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + kl^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u_x dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + l^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v_x dx \\
 &+ b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + kl^2 \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + l^2 \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx \\
 &+ b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L \left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L \left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx + \int_0^L (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= -\mu \int_0^L v^2 dx \leq 0
 \end{aligned}$$

Portanto, A é dissipativo, porém vale ressaltar que a dissipação do operador é garantida pelas condições de contorno, isto é, o operador \mathcal{A} é auto-adjunto. Sem tal propriedade, não podemos garantir a dissipação do operador, logo não teríamos o semigrupo associado ao sistema considerado.

Resta mostrar que $0 \in \rho(A)$. Devemos garantir que A^{-1} é limitado em \mathcal{X} , ou seja, devemos obter para cada $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{X}$ um único $U = (y, u, \psi, v)^T \in D(A)$ que satisfaça

$$-AU = F, \quad (4.6)$$

tal que

$$\|U\|_{\mathcal{X}} \leq C\|F\|_{\mathcal{X}}, \quad (4.7)$$

par alguma constante $C > 0$.

Reescrevendo a equação (4.6) em termos de suas componentes escalares, obtemos:

$$-u = f_1 \quad \in H_0^1(0, L) \quad (4.8)$$

$$-\frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) = f_2 \quad \in L^2(0, L) \quad (4.9)$$

$$-v = f_3 \quad \in H_0^1(0, L) \quad (4.10)$$

$$\mathcal{A}^{-1} \left(\frac{k}{\rho_2} (y_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} + \frac{\mu}{\rho_2} v \right) = f_4. \quad \in L^2(0, L) \quad (4.11)$$

Desta forma temos $u = -f_1 \in H_0^1(0, L)$, $v = -f_3 \in H_0^1(0, L)$ e

$$-k(y_x + \psi)_x = \rho_1(f_2 - l^2 f_{2xx}) \quad \in L^2(0, L) \quad (4.12)$$

$$k(y_x + \psi) - b\psi_{xx} = \rho_2(f_4 - l^2 f_{4xx}) + \mu f_3. \quad \in L^2(0, L) \quad (4.13)$$

Devemos impor as condições de contorno (3.4) para que a solução pertença a $D(A)$. Com isso, definamos a forma bilinear

$$a_1 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_1((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) = k \int_0^L (y_x + \psi)(\bar{y}_x + \bar{\psi}) dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\psi}_x dx,$$

na qual podemos observar que a mesma é contínua e coerciva. Definamos agora a forma bilinear,

$$a_2 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_2((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) = \int_0^L (\rho_1 (f_2 \bar{y} + l^2 f_{2x} \bar{y}_x) + \rho_2 (f_4 \bar{\psi} + l^2 f_{4x} \bar{\psi}_x)) dx,$$

na qual vemos que a mesma é contínua.

Desta forma, pelo Teorema de Lax-Milgran, existe uma única solução $(y, \psi) \in [H_0^1(0, L)]^2$ que satisfaz (4.12) – (4.13) sob as condições (3.4). Também, segue da regularização para problemas de valores de fronteiras elípticos (vide [15] e [16]) que $(y, \psi) \in [H^2(0, L)]^2$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ que verifica (4.7).

Portanto, pelo Teorema de Lummer-Phillips, A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semi-grupo de contrações tal que a solução U tem a seguinte regularidade:

$$U \in C([0, \infty[; D(A)) \cup C^1([0, \infty[; \mathcal{X}) \quad \text{se } U_0 \in D(A)$$

ou

$$U \in C([0, \infty[; \mathcal{X}), \quad \text{se } U_0 \in \mathcal{X}.$$

4.2 Boa colocação de solução com efeito não local na equação de deslocamento

Conforme vimos anteriormente, o efeito não local está localizado nas duas equações do sistema considerado. Aqui, abordaremos mesmo sistema, porém com o efeito não local apenas na equação de deslocamento. Sendo assim, o sistema é dado por:

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x - l^2 \rho_1 y_{ttxx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (4.14)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \mu\psi_t = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (4.15)$$

Junto com as condições iniciais

$$y(\cdot, 0) = y_0; y_t(\cdot, 0) = y_1; \psi(\cdot, 0) = \psi_0; \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L), \quad (4.16)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi(0, L) = \psi(L, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \text{ou} \quad (4.17)$$

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, L) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (4.18)$$

Também podemos reescrever o problema acima como:

$$\rho_1 \mathcal{A}y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (4.19)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \mu\psi_t = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (4.20)$$

com as mesmas condições iniciais e de contorno. A energia do problema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 l^2 y_{tx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k(y_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_2 \psi_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L b\psi_x^2 dx, \quad (4.21)$$

sendo que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\mu \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Considere o seguinte espaço de fase para (4.17):

$$\mathcal{X}_1 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

e para (4.18):

$$\mathcal{X}_2 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

em que

$$L_*^2(0, L) = \left\{ f \in L^2(0, L); \int_0^L f(x) dx = 0 \right\} \quad ; \quad H_*^m(0, L) = \left\{ f \in H^m(0, L); \int_0^L f(x) dx = 0 \right\}.$$

Tais espaços são munidos com a norma:

$$\begin{aligned} \|(y, u, \psi, v)\|_{\mathcal{X}_{1,2}}^2 &= \rho_1 \|u\|^2 + \rho_1 l^2 \|u_x\|^2 + k \|y_x + \psi\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + b \|\psi_x\|^2 \\ &= \int_0^L \rho_1 u^2 dx + \int_0^L \rho_1 l^2 u_x^2 dx + \int_0^L k (y_x + \psi)^2 dx + \int_0^L \rho_2 v^2 dx + \int_0^L b \psi_x^2 dx, \end{aligned}$$

e com produto interno

$$\langle (y, u, \psi, v), (\tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{v}) \rangle = \int_0^L \left(\rho_1 u \tilde{u} + \rho_1 l^2 u_x \tilde{u}_x + k (y_x + \psi)(\tilde{y}_x + \tilde{\psi}) + \rho_2 v \tilde{v} + b \psi_x \tilde{\psi}_x \right) dx.$$

Para $U = (y, u, \psi, v)^T$, com $u = y_t$ e $v = \psi_t$, $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)^T$, podemos escrever o problema como de Cauchy da seguinte forma

$$\begin{aligned} U_t &= AU \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

em que $A : D(A) \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é o operador dado por

$$U_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{b}{\rho_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k}{\rho_2} I & -\frac{\mu}{\rho_2} I \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ u \\ \psi \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} ((y_x + \psi)_x) \\ v \\ -\frac{k}{\rho_2} y_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi - \frac{\mu}{\rho_2} v \end{pmatrix}}_{AU},$$

com domínio dado por (4.5) para \mathcal{X}_1 e para \mathcal{X}_2 temos

$$D(A) = H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L) \cap H_*^2(0, L) \times H_*^1(0, L).$$

Temos que $D(A)$ é denso em $\mathcal{X}_{1,2}$. E, além disso, A é dissipativo. De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle AU, U \rangle &= k \int_0^L \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + kl^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u_x dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + kl^2 \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L \left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx + \int_0^L (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= -\mu \int_0^L v^2 dx \leq 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, A é dissipativo. Resta mostrar que $0 \in \rho(A)$. Considerando (4.6) e pondo em termos de suas componentes escalares, obtemos:

$$-u = f_1 \quad (4.23)$$

$$-\frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) = f_2 \quad (4.24)$$

$$-v = f_3 \quad (4.25)$$

$$\frac{k}{\rho_2} (y_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} + \frac{\mu}{\rho_2} v = f_4, \quad (4.26)$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{X}_{1,2}$. Definamos a forma bilinear

$$a_1 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_1((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) = k \int_0^L (y_x + \psi)(\bar{y}_x + \bar{\psi}) dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\psi}_x dx,$$

na qual podemos observar que a mesma é contínua e coerciva.

Definamos agora a forma bilinear,

$$a_2 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_2((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) = \int_0^L (\rho_1 (f_2 \bar{y} + l^2 f_{2x} \bar{y}_x) + \rho_2 f_4 \bar{\psi}) dx,$$

na qual vemos que a mesma é contínua. O mesmo argumento é válido para $[H_*^1(0, L)]^2 \times [H_*^1(0, L)]^2$.

Portanto, pelo Teorema de Lummer-Phillips, A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semi-grupo de contrações tal que a solução U tem a seguinte regularidade:

$$U \in C([0, \infty[; D(A)) \cup C^1([0, \infty[; \mathcal{X}_{1,2}) \quad \text{se } U_0 \in D(A)$$

ou

$$U \in C([0, \infty[; \mathcal{X}_{1,2}), \quad \text{se } U_0 \in \mathcal{X}_{1,2}.$$

4.3 Boa colocação de solução com efeito não local na equação de rotação

Agora, considerando o efeito não local apenas na equação de rotação, teremos:

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (4.27)$$

$$\rho_2(\psi_{tt} - l^2 \psi_{ttxx}) - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \mu\psi_t = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (4.28)$$

Junto com as condições iniciais

$$y(\cdot, 0) = y_0; y_t(\cdot, 0) = y_1; \psi(\cdot, 0) = \psi_0; \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L), \quad (4.29)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi(0, L) = \psi(L, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad \text{ou} \quad (4.30)$$

$$y_x(0, t) = y_x(L, t) = \psi(0, L) = \psi(L, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad (4.31)$$

Podemos reescrever o problema acima como:

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (4.32)$$

$$\rho_2 \mathcal{A}\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \mu\psi_t = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (4.33)$$

com as mesmas condições iniciais e de contorno.

A energia do problema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k(y_x + \psi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_2 \psi_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_2 l^2 \psi_{tx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L b \psi_x^2 dx, \quad (4.34)$$

sendo que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Considere os seguintes espaços de fases:

$$\mathcal{X}_1 = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

e

$$\mathcal{X}_2 = H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$$

Tais espaços são munidos com a norma:

$$\begin{aligned} \|(y, u, \psi, v)\|_{\mathcal{X}}^2 &= \rho_1 \|u\|^2 + k \|y_x + \psi\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_2 l^2 \|v_x\|^2 + b \|\psi_x\|^2 \\ &= \int_0^L \rho_1 u^2 dx + \int_0^L k(y_x + \psi)^2 dx + \int_0^L \rho_2 v^2 dx + \int_0^L \rho_2 l^2 v_x^2 dx + \int_0^L b \psi_x^2 dx, \end{aligned}$$

e com produto interno

$$\langle (y, u, \psi, v), (\tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{v}) \rangle = \int_0^L \left(\rho_1 u \tilde{u} + k(y_x + \psi)(\tilde{y}_x + \tilde{\psi}) + \rho_2 v \tilde{v} + \rho_2 l^2 v_x \tilde{v}_x + b \psi_x \tilde{\psi}_x \right) dx.$$

Para $U = (y, u, \psi, v)^T$, com $u = y_t$ e $v = \psi_t$, $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)^T$, podemos escrever o problema como de Cauchy da seguinte forma

$$\begin{aligned} U_t &= AU \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

em que $A : D(A) \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é o operador dado por

$$U_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{k}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{b}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} & -\frac{\mu}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ u \\ \psi \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1} (y_x + \psi)_x \\ v \\ \mathcal{A}^{-1} \left(-\frac{k}{\rho_2} y_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi - \frac{\mu}{\rho_2} v \right) \end{pmatrix}}_{AU},$$

com domínio dado por (4.5) para \mathcal{X}_1 e para \mathcal{X}_2 temos

$$D(A) = H_*^1(0, L) \cap H_*^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \times H_0^1(0, L).$$

Temos que $D(A)$ é denso em $\mathcal{X}_{1,2}$. E, além disso, A é dissipativo. De fato,

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx + \int_0^L \mathcal{A}^{-1} (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx \\ &+ l^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}^{-1} (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v_x dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\ &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx + \int_0^L \mathcal{A}^{-1} (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx \\ &+ l^2 \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{A}^{-1} (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\ &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x u dx + \int_0^L \left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{A}^{-1} (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx \\ &+ b \int_0^L \psi_x v_x dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\ &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx + \int_0^L (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi - \mu v) v dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\ &= -\mu \int_0^L v^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

Portanto, A é dissipativo. Resta mostrar que $0 \in \rho(A)$. Considerando (4.6) e pondo em termos de suas componentes escalares, obtemos:

$$-u = f_1 \tag{4.36}$$

$$-\frac{k}{\rho_1} (y_x + \psi)_x = f_2 \tag{4.37}$$

$$-v = f_3 \tag{4.38}$$

$$\mathcal{A}^{-1} \left(\frac{k}{\rho_2} (y_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} + \frac{\mu}{\rho_2} v \right) = f_4, \tag{4.39}$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{X}_{1,2}$. Definamos a forma bilinear

$$a_1 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_1((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) = k \int_0^L (y_x + \psi)(\bar{y}_x + \bar{\psi}) dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\psi}_x dx,$$

na qual podemos observar que a mesma é contínua e coerciva.

Definamos agora a forma bilinear,

$$a_2 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_2((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) = \int_0^L \rho_1 f_2 \bar{y} + \rho_2 (f_4 \bar{\psi} + l^2 f_{4x} \bar{\psi}_x) dx,$$

na qual vemos que a mesma é contínua. Portanto, pelo Teorema de Lummer-Phillips, A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações tal que a solução U tem a seguinte regularidade:

$$U \in C([0, \infty[; D(A)) \cup C^1([0, \infty[; \mathcal{X}_{1,2}) \quad \text{se } U_0 \in D(A)$$

ou

$$U \in C([0, \infty[; \mathcal{X}_{1,2}), \quad \text{se } U_0 \in \mathcal{X}_{1,2}.$$

4.4 Boa colocação com efeito não local geral e com damping tipo Kelvin-Voigt

Iremos considerar $\alpha = 1$ em (3.1) – (3.2), porém com um damping do tipo Kelvin-Voigt ($\mu\psi_{txx}$).

Logo, podemos reescrever o problema como:

$$\rho_1 \mathcal{A}y_{tt} - k(y_x + \psi)_x = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (4.40)$$

$$\rho_2 \mathcal{A}\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) - \mu\psi_{txx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (4.41)$$

com as mesmas condições iniciais e de contorno dadas por (3.3) e (3.4).

A energia do problema é dada por (1.31) sendo que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^L \psi_{tx}^2 dx.$$

Considere o seguinte espaço de fase:

$$\mathcal{X} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

Tal espaço é munido com a norma:

$$\begin{aligned} \|(y, u, \psi, v)\|_{\mathcal{X}}^2 &= \rho_1 \|u\|^2 + \rho_1 l^2 \|u_x\|^2 + k \|y_x + \psi\|^2 + \rho_2 \|v\|^2 + \rho_2 l^2 \|v_x\|^2 + b \|\psi_x\|^2 \\ &= \int_0^L \rho_1 u^2 dx + \int_0^L \rho_1 l^2 u_x^2 dx + \int_0^L k (y_x + \psi)^2 dx + \int_0^L \rho_2 v^2 dx + \int_0^L \rho_2 l^2 v_x^2 dx + \int_0^L b \psi_x^2 dx, \end{aligned}$$

e com produto interno

$$\langle (y, u, \psi, v), (\tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{\psi}, \tilde{v}) \rangle = \int_0^L \left(\rho_1 u \tilde{u} + \rho_1 l^2 u_x \tilde{u}_x + k (y_x + \psi)(\tilde{y}_x + \tilde{\psi}) + \rho_2 v \tilde{v} + \rho_2 l^2 v_x \tilde{v}_x + b \psi_x \tilde{\psi}_x \right) dx.$$

Para $U = (y, u, \psi, v)^T$, com $u = y_t$ e $v = \psi_t$, $U_0 = (y_0, y_1, \psi_0, \psi_1)^T$, podemos escrever o problema como de Cauchy da seguinte forma

$$\begin{aligned} U_t &= AU \\ U(0) &= U_0, \end{aligned} \tag{4.42}$$

em que $A : D(A) \subseteq \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ é o operador dado por

$$U_t = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{b}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{k}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} & \frac{\mu}{\rho_2} \mathcal{A}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ u \\ \psi \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ \frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1} ((y_x + \psi)_x) \\ v \\ \mathcal{A}^{-1} \left(-\frac{k}{\rho_2} y_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi + \frac{\mu}{\rho_2} v_{xx} \right) \end{pmatrix}}_{AU}$$

com domínio dado por (4.5).

Temos que $D(A)$ é denso em \mathcal{X} . E, além disso, A é dissipativo. De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle AU, U \rangle &= k \int_0^L \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + kl^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u_x dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi + \mu v_{xx}) v dx + l^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi + \mu v_{xx}) v_x dx \\
 &+ b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + kl^2 \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx \\
 &+ \int_0^L \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi + \mu v_{xx}) v dx + l^2 \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi + \mu v_{xx}) v dx \\
 &+ b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &= k \int_0^L \left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) u dx + k \int_0^L (y_x + \psi)(u_x + v) dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx \\
 &+ \int_0^L \left(I - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{A}^{-1}(-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi + \mu v_{xx}) v dx \\
 &= k \int_0^L ((y_x + \psi)_x u + (y_x + \psi)(u_x + v)) dx + b \int_0^L \psi_x v_x dx + \int_0^L (-ky_x + b\psi_{xx} - k\psi + \mu v_{xx}) v dx \\
 &= -\mu \int_0^L v_x^2 dx \leq 0
 \end{aligned}$$

Portanto, A é dissipativo. Resta mostrar que $0 \in \rho(A)$. Considerando (4.6) e pondo em termos de suas componentes escalares obtemos:

$$-u = f_1 \quad \in H_0^1(0, L) \quad (4.43)$$

$$-\frac{k}{\rho_1} \mathcal{A}^{-1}((y_x + \psi)_x) = f_2 \quad \in L^2(0, L) \quad (4.44)$$

$$-v = f_3 \quad \in H_0^1(0, L) \quad (4.45)$$

$$\mathcal{A}^{-1} \left(\frac{k}{\rho_2} (y_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{\mu}{\rho_2} v_{xx} \right) = f_4. \quad \in L^2(0, L) \quad (4.46)$$

Desta forma temos $u = -f_1 \in H_0^1(0, L)$, $v = -f_3 \in H_0^1(0, L)$ e

$$-k(y_x + \psi)_x = \rho_1(f_2 - l^2 f_{2_{xx}}) \in L^2((0, L)) \quad (4.47)$$

$$k(y_x + \psi) - b\psi_{xx} = \rho_2(f_4 - l^2 f_{4_{xx}}) - \mu f_{3_{xx}} \in L^2(0, L) \quad (4.48)$$

Devemos impor as condições de contorno (3.4) para que a solução pertença a $D(A)$. Com isso, definamos a forma bilinear

$$a_1 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_1((y, \psi), (\bar{y}, \bar{\psi})) = k \int_0^L (y_x + \psi)(\bar{y}_x + \bar{\psi}) dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\psi}_x dx,$$

na qual podemos observar que a mesma é contínua e coerciva. Definamos agora a forma bilinear,

$$a_2 : [H_0^1(0, L)]^2 \times [H_0^1(0, L)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) \longmapsto a_2((f_2, f_4), (\bar{y}, \bar{\psi})) = \int_0^L (\rho_1 (f_2 \bar{y} + l^2 f_{2_x} \bar{y}_x) + \rho_2 (f_4 \bar{\psi} + l^2 f_{4_x} \bar{\psi}_x)) dx,$$

na qual vemos que a mesma é contínua. Portanto, pelo Teorema de Lummer-Phillips, A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações tal que a solução U tem a seguinte regularidade:

$$U \in C([0, \infty[; D(A)) \cup C^1([0, \infty[; \mathcal{X}) \quad \text{se } U_0 \in D(A)$$

ou

$$U \in C([0, \infty[; \mathcal{X}), \quad \text{se } U_0 \in \mathcal{X}.$$

A seguir, iremos discutir sobre decaimento exponencial de todos os modelos abordados desta seção.

Capítulo 5

O cenário de estabilidade exponencial

Neste capítulo, iremos falar sobre o decaimento exponencial do modelo Timoshenko não local considerando tal efeito na equação de deslocamento, de rotação e ambas com damping tipo atrito. E também com damping do tipo Kelvin-Voigt, porém apenas no caso em que o efeito esteja em ambas as equações.

5.1 Damping viscoso com efeito não local em ambas as equações

Consideremos o modelo governado pelas seguintes equações:

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x - l^2 \rho_1 y_{ttxx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (5.1)$$

$$\rho_2(\psi_{tt} - l^2 \psi_{ttxx}) - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) + \mu\psi_t = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (5.2)$$

Junto com as condições iniciais

$$y(., 0) = y_0; y_t(., 0) = y_1; \psi(., 0) = \psi_0; \psi_t(., 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L), \quad (5.3)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, L) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (5.4)$$

Apesar de não termos o semigrupo associado ao problema (5.1) – (5.4), podemos supor que a existência e unicidade é dada pelo Teorema de Galerkin e assim, conseguimos mostrar que o sistema não exponencialmente estável pelo critério de Routh-Hurwitz.

O Critério de Routh-Hurwitz, usada em (QUINTANILLA,2003), considera para ϵ suficientemente pequeno que existe uma solução do problema (3.1) – (3.4) na forma harmônica dada por

$$y(x, t) = Ae^{\omega t} \sin(nx) \quad ; \quad \psi(x, t) = Be^{\omega t} \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.5)$$

tal que substituindo em (3.1) e (3.2) obtemos soluções que podem estar tanto à direita quanto à esquerda da linha $Re(z) = -\epsilon$.

Desta forma, substituindo (5.5) em (3.1) e (3.2) obteremos, respectivamente,

$$\frac{A}{B} = -\frac{kn}{\rho_1\omega^2 + kn^2 + \alpha l^2\rho_1 n^2\omega^2} \quad (5.6)$$

e

$$\frac{A}{B} = \frac{\rho_2\omega^2 + \rho_2 l^2 n^2 \omega^2 + bn^2 + k + \mu\omega}{(1 - \alpha)\rho_1 l^2 n \omega^2 - kn}. \quad (5.7)$$

Daí, segue que ω é a solução da equação

$$\begin{aligned} \rho_1\rho_2(1 + \alpha l^2 n^2)(1 + l^2 n^2)x^4 + \mu\rho_1(1 + \alpha l^2 n^2)x^3 + (l^4 n^4(\alpha b\rho_1 + k\rho_2) + n^2(b\rho_1 + k\rho_2) + k\rho_1(1 + l^2 n^2))x^2 \\ + k\mu n^2 x + bkn^4 = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Provaremos que podemos encontrar soluções da equação acima que estão à direita da linha $Re(z) = -\epsilon$. Portanto, verifiquemos o sinal das soluções da equação algébrica

$$\begin{aligned} \rho_1\rho_2(1 + \alpha l^2 n^2)(1 + l^2 n^2)(x - \epsilon)^4 + \mu\rho_1(1 + \alpha l^2 n^2)(x - \epsilon)^3 + (l^4 n^4(\alpha b\rho_1 + k\rho_2) + n^2(b\rho_1 + k\rho_2) \\ + k\rho_1(1 + l^2 n^2))(x - \epsilon)^2 + k\mu n^2(x - \epsilon) + bkn^4 = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ou seja,

$$l_4 x^4 + l_3 x^3 + l_2 x^2 + l_1 x + l_0 = 0, \quad (5.10)$$

em que

$$l_4 = \rho_1 \rho_2 (1 + \alpha l^2 n^2) (1 + l^2 n^2),$$

$$l_3 = -4\rho_1 \rho_2 (1 + \alpha l^2 n^2) (1 + l^2 n^2) \epsilon + \mu \rho_1 (1 + \alpha l^2 n^2),$$

$$l_2 = 6\rho_1 \rho_2 (1 + \alpha l^2 n^2) (1 + l^2 n^2) \epsilon^2 - 3\mu \rho_1 (1 + \alpha l^2 n^2) \epsilon + l^2 n^4 (\alpha b \rho_1 + k \rho_2) + n^2 (b \rho_1 + k \rho_2) + k \rho_1 (1 + l^2 n^2),$$

$$l_1 = -4\rho_1 \rho_2 (1 + \alpha l^2 n^2) (1 + l^2 n^2) \epsilon^3 + 3\mu \rho_1 (1 + \alpha l^2 n^2) \epsilon^2 - 2(l^2 n^4 (\alpha b \rho_1 + k \rho_2) + n^2 (b \rho_1 + k \rho_2)) \epsilon + k \rho_1 (1 + l^2 n^2) \epsilon + k \mu n^2,$$

$$l_0 = \rho_1 \rho_2 (1 + \alpha l^2 n^2) (1 + l^2 n^2) \epsilon^4 - \mu \rho_1 (1 + \alpha l^2 n^2) \epsilon^3 + (l^2 n^4 (\alpha b \rho_1 + k \rho_2) + n^2 (b \rho_1 + k \rho_2) + k \rho_1 (1 + l^2 n^2)) \epsilon^2 + k \mu n^2 \epsilon + b k n^4.$$

O critério de Routh-Hurwitz estabelece que a condição necessária e suficiente para que as soluções de uma equação do tipo (5.10) tenha a parte negativa é

$$\Lambda_0 = l_0 > 0, \Lambda_1 = l_1 > 0, \Lambda_2 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_0 & l_2 \end{pmatrix} > 0, \Lambda_3 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 \\ 0 & l_1 & l_3 \end{pmatrix} > 0, \Lambda_4 = \det \begin{pmatrix} l_1 & l_3 & 0 & 0 \\ l_0 & l_2 & l_4 & 0 \\ 0 & l_1 & l_3 & 0 \\ 0 & l_0 & l_2 & l_4 \end{pmatrix} > 0.$$

Porém, note que

$$\Lambda_2 = d_8 n^8 + d_6 n^6 + d_4 n^4 + d_2 n^2 + d_0,$$

em que

$$d_8 = -20\alpha^2\epsilon^5 l^8 \rho_1^2 \rho_2^2 - 12\alpha^2 b \epsilon^3 l^6 \rho_1^2 \rho_2 - 12\alpha \epsilon^3 k l^6 \rho_1 \rho_2^2 - 2\alpha^2 b^2 \epsilon l^4 \rho_1^2 - 2\epsilon k^2 l^4 \rho_2^2,$$

$$\begin{aligned} d_6 = & -40\alpha^2\epsilon^5 l^6 \rho_1^2 \rho_2^2 + 25\alpha^2 \epsilon^4 l^6 \mu \rho_1^2 \rho_2 - 40\alpha \epsilon^5 l^6 \rho_1^2 \rho_2^2 - 12\alpha \epsilon^3 k l^6 \rho_1^2 \rho_2 - 12\alpha^2 b \epsilon^3 l^4 \rho_1^2 \rho_2 + 8\alpha^2 b \epsilon^2 l^4 \mu \rho_1^2 \\ & - 24\alpha b \epsilon^3 l^4 \rho_1^2 \rho_2 - 24\alpha \epsilon^3 k l^4 \rho_1 \rho_2^2 + 10\alpha \epsilon^2 k l^4 \mu \rho_1 \rho_2 - 12\epsilon^k l^4 \rho_1 \rho_2^2 - 4\alpha b \epsilon k l^4 \rho_1^2 - 4\epsilon k^2 l^4 \rho_1 \rho_2 - 4\alpha b^2 \epsilon l^2 \rho_1^2 \\ & - 4\epsilon k^2 l^2 \rho_2^2 + k^2 l^2 \mu \rho_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4 = & -20\alpha^2\epsilon^5 l^4 \rho_1^2 \rho_2^2 + 25\alpha^2 \epsilon^4 l^4 \mu \rho_1^2 \rho_2 - 80\alpha \epsilon^5 l^4 \rho_1^2 \rho_2^2 - 8\alpha^2 \epsilon^3 l^4 \mu^2 \rho_1^2 + 50\alpha \epsilon^4 l^4 \mu \rho_1^2 \rho_2 - 20\epsilon^5 l^4 \rho_1^2 \rho_2^2 \\ & - 24\alpha \epsilon^3 k l^4 \rho_1^2 \rho_2 + 8\alpha \epsilon^2 k l^4 \mu \rho_1^2 - 12\epsilon^3 k l^4 \rho_1^2 \rho_2 - 24\alpha b \epsilon^3 l^2 \rho_1^2 \rho_2 - 12\alpha \epsilon^3 k l^2 \rho_1 \rho_2^2 + 16\alpha b \epsilon^2 l^2 \mu \rho_1^2 \\ & + 10\alpha \epsilon^2 k l^2 \mu \rho_1 \rho_2 - 12b \epsilon^3 l^2 \rho_1^2 \rho_2 - 24\epsilon^3 k l^2 \rho_1 \rho_2^2 - 2\epsilon k^2 l^4 \rho_1^2 - 4\alpha b \epsilon k l^2 \rho_1^2 - 2\alpha \epsilon k l^2 \mu^2 \rho_1 + 10\epsilon^2 k l^2 \mu \rho_1 \rho_2 \\ & - 4b \epsilon k l^2 \rho_1^2 - 8\epsilon k^2 l^2 \rho_1 \rho_2 + k^2 l^2 \mu \rho_1 - 2b^2 \epsilon \rho_1^2 - 2\epsilon k^2 \rho_2^2 + k^2 \mu \rho_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 = & -40\alpha \epsilon^5 l^2 \rho_1^2 \rho_2^2 + 50\alpha \epsilon^4 l^2 \mu \rho_1^2 \rho_2 - 40\epsilon^5 l^2 \rho_1^2 \rho_2^2 - 12\alpha \epsilon^3 k l^2 \rho_1^2 \rho_2 - 16\alpha \epsilon^3 l^2 \mu^2 \rho_1^2 + 25\epsilon^4 l^2 \mu \rho_1^2 \rho_2 + 8\alpha \epsilon^2 k l^2 \mu \rho_1^2 \\ & - 24\epsilon^3 k l^2 \rho_1^2 \rho_2 + 8\epsilon^2 k l^2 \mu \rho_1^2 - 12b \epsilon^3 \rho_1^2 \rho_2 - 12\epsilon^3 k \rho_1 \rho_2^2 - 4\epsilon k^2 l^2 \rho_1^2 + 8b \epsilon^2 \mu \rho_1^2 + 10\epsilon^2 k \mu \rho_1 \rho_2 - 4b \epsilon k \rho_1^2 \\ & - 4\epsilon k^2 \rho_1 \rho_2 - 2\epsilon k \mu^2 \rho_1 + k^2 \mu \rho_1, \end{aligned}$$

$$d_0 = -20\epsilon^5 \rho_1^2 \rho_2^2 + 25\epsilon^4 \mu \rho_1^2 \rho_2 - 12\epsilon^3 k \rho_1^2 \rho_2 - 8\epsilon^3 \mu^2 \rho_1^2 + 8\epsilon^2 k \mu \rho_1^2 - 2\epsilon k^2 \rho_1^2.$$

Note que o termo dominante de Λ_2 é dado por $d_8 n^8$. Como $d_8 < 0$, podemos dizer que existe uma solução do sistema tal que ω está à direita da linha de $Re(z) = -\epsilon$, e conseqüentemente, não podemos obter o decaimento exponencial uniforme de soluções. Portanto, provamos o principal resultado dessa seção:

Teorema 5.1 *O sistema (5.1) – (5.4) não é exponencialmente estável.*

5.2 Damping viscoso com efeito não local na equação de deslocamento

Anteriormente vimos que o sistema de Timoshenko com o efeito não local em ambas as equações (deslocamento e rotação) não decai exponencialmente. Porém, vamos mostrar que se considerar-

mos o efeito não local apenas na equação de deslocamento, conseguimos a estabilidade exponencial. Para isso usaremos o método da energia. Sendo assim, considere o sistema (4.14) – (4.17).

Introduziremos o seguinte funcional

$$I_1 := \int_0^L \left(\rho_1(y_t y + l^2 y_{tx} y_x) + \rho_2 \psi_t \psi + \frac{\mu}{2} \psi^2 \right) dx.$$

Lema 5.1 *Seja (y, ψ) solução do sistema (4.14) – (4.17). Então temos:*

$$\frac{d}{dt} I_1 = -k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Demonstração: Multiplicando (4.14) por y obteremos:

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y dx - k \int_0^L (y_x + \psi)_x y dx - l^2 \rho_1 \int_0^L y_{ttxx} y dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima

$$\rho_1 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} y_t y - y_t^2 \right) dx + k \int_0^L (y_x + \psi) y_x dx + l^2 \rho_1 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} y_{tx} y_x - y_{tx}^2 \right) dx = 0. \quad (5.11)$$

Por outro lado, multiplicando (4.15) por ψ encontramos:

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \mu \int_0^L \psi_t \psi dx = 0.$$

Ou então,

$$\rho_2 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} \psi_t \psi - \psi_t^2 \right) dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi^2 dx = 0. \quad (5.12)$$

Somando (5.11) e (5.12) teremos:

$$\frac{d}{dt} I_1 = -k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx. \quad \blacksquare$$

Vamos considerar agora w solução de

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(L) = 0.$$

Introduziremos o funcional

$$I_2 := \int_0^L \left(\rho_1(y_t w + l^2 y_{tx} w_x) + \rho_2 \psi_t \psi + \frac{\mu}{2} \psi^2 \right) dx$$

Lema 5.2 *Seja (y, ψ) solução do sistema (4.14) – (4.17). Então, para todo $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, temos:*

$$\frac{d}{dt} I_2 \leq -b \int_0^L \psi_x^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L y_t^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + C(\epsilon_1, \epsilon_2) \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_0^L \left(\rho_1(y_t w + l^2 y_{tx} w_x) + \rho_2 \psi_t \psi + \frac{\mu}{2} \psi^2 \right) dx &= \int_0^L \rho_1(y_{tt} w + y_t w_t + l^2 y_{ttx} w_x + l^2 y_{tx} w_{tx}) dx \\
 &+ \int_0^L \rho_2(\psi_{tt} \psi + \psi_t^2) dx + \mu \int_0^L \psi \psi_t dx \\
 &= \int_0^L \rho_1(y_{tt} w + y_t w_t - l^2 y_{ttx} w_x + l^2 y_{tx} w_{tx}) dx \\
 &+ \int_0^L \rho_2(\psi_{tt} \psi + \psi_t^2) dx + \mu \int_0^L \psi \psi_t dx.
 \end{aligned}$$

Segue de (4.14) que

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \rho_1(y_{tt} w + y_t w_t - l^2 y_{ttx} w_x + l^2 y_{tx} w_{tx}) dx &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x w dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx} w_{tx} dx + \int_0^L \rho_1 y_t w_t dx \\
 &= -k \int_0^L y \psi_x dx + k \int_0^L w_x^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx} w_{tx} dx \\
 &+ \int_0^L \rho_1 y_t w_t dx. \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

E de (4.17)

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \rho_2(\psi_{tt} \psi + \psi_t^2) dx + \mu \int_0^L \psi \psi_t dx &= b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx - \int_0^L k(y_x + \psi) \psi dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx \\
 &= -b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L y_x \psi dx - k \int_0^L \psi^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

Somando tais equações, segue que

$$\frac{d}{dt} I_2 = k \int_0^L w_x^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx} w_{tx} dx + \int_0^L \rho_1 y_t w_t dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L \psi^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Young e Poincaré, tem-se:

$$\frac{d}{dt} I_2 \leq -b \int_0^L \psi_x^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L y_t^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + C(\epsilon_1, \epsilon_2) \int_0^L \psi_t^2 dx. \quad \blacksquare$$

Por fim, seja I_3 o funcional linear dado por

$$I_3 := \int_0^L \rho_1(y_t y + l^2 y_{tx} y_x) dx$$

Lema 5.3 *Seja (y, ψ) solução do sistema (4.14) – (4.17). Então, para todo $\epsilon_3 > 0$, temos:*

$$\frac{d}{dt} I_3 \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L (y_x + \psi) dx + C_{\epsilon_3} \int_0^L \psi_x^2 dx.$$

Demonstração: Segue de (5.11) e da desigualdade de Young que:

$$\frac{d}{dt} I_3 \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L (y_x + \psi) dx + C_{\epsilon_3} \int_0^L \psi_x^2 dx. \quad \blacksquare$$

Definamos o funcional Lyapunov \mathcal{L} da seguinte forma:

$$\mathcal{L} := ME(t) + N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3.$$

Desta forma, levando em conta os resultados dos Lemas anteriores e substituindo tais na derivada de \mathcal{L} obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L} \leq & -(N_1 k - N_3 \epsilon_3) \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - (N_1 b + N_2 b - N_3 C_{\epsilon_3}) \int_0^L \psi_x^2 dx - (N_3 \rho_1 - N_1 \rho_1 - N_2 \epsilon_1) \int_0^L y_t^2 dx \\ & - (N_3 \rho_1 l^2 - N_1 \rho_1 l^2 - N_2 \epsilon_2) \int_0^L y_{tx}^2 dx - (M\mu - \rho_2 N_1 - N_2 C(\epsilon_1, \epsilon_2)) \int_0^L \psi_t^2 dx. \end{aligned}$$

Tomando

- M suficientemente grande;
- $\epsilon_3 = \frac{N_1 k}{2N_3}$;
- $N_2 > \frac{N_3 C_{\epsilon_3}}{b}$;
- $\epsilon_1 = \frac{\rho_1}{N_2}$;
- $\epsilon_2 = \frac{\rho_1 l^2}{N_2}$;
- $N_3 > N_1 + 1$;

segue que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\beta_0 E(t).$$

para algum $\beta_0 > 0$. Além disso, existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tal que para $t \geq 0$

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t) \tag{5.15}$$

De onde segue que

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -2\alpha_1 L(t).$$

para $\alpha_1 := \frac{\beta_0}{2\beta_2}$. Usando (5.15) teremos provado o principal resultado:

Teorema 5.2 *Sejam as condições iniciais satisfazendo*

$$y_0, \psi_0 \in H_0^1(0, L), \quad \psi_1, y_1 \in L^2(0, L).$$

Então, a energia E da solução (y, ψ) para (4.14) – (4.17) decai exponencialmente, isto é, existe uma constante $C > 0$ e $\beta > 0$, que independe das condições iniciais, tal que para todo $t \geq 0$

$$E(t) \leq CE(0)e^{-2\beta t}.$$

Vale ressaltar que se considerarmos as condições de contorno dadas por (4.18), o sistema ainda decai exponencialmente.

5.3 Damping viscoso com efeito não local na equação de rotação

Apesar de termos o decaimento exponencial do sistema de Timoshenko com o efeito não local na equação de deslocamento, o mesmo não se aplica quando consideramos o efeito apenas na equação de rotação. Para provarmos tal afirmação, usaremos o Teorema de Gearhart-Herbs-Huang-Prüss.

Sendo assim, considere o modelo (4.27) – (4.31) tal que o semigrupo é dado por (4.36). Considere a equação resolvente dada por

$$\lambda U - AU = F,$$

em que $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)' \in \mathcal{X}_2$ e $U = (y, u, \psi, v)' \in \mathcal{X}_2$. Reescrevendo a equação acima em termos de suas componentes escalares obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda y - u &= f_1 \\ \lambda u - \frac{k}{\rho_1}(y_x + \psi)_x &= f_2 \\ \lambda \psi - v &= f_3 \\ \lambda v + \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{k}{\rho_2}(y_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\mu}{\rho_2}v \right) &= f_4, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda y - u = f_1 \quad (5.16)$$

$$\lambda u - \frac{k}{\rho_1}(y_x + \psi)_x = f_2 \quad (5.17)$$

$$\lambda \psi - v = f_3 \quad (5.18)$$

$$\lambda v - \lambda v_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(y_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\mu}{\rho_2}v = f_4 - f_{4_{xx}}. \quad (5.19)$$

Tomando $f_1 = f_3 = 0$ obtemos $u = \lambda y$ e $v = \lambda \psi$, o qual substituindo em (5.17) e (5.19) produzimos respectivamente,

$$\lambda^2 y - \frac{k}{\rho_1}(y_x + \psi)_x = f_2 \quad (5.20)$$

$$\lambda^2 \psi - \lambda^2 \psi_{xx} + \frac{k}{\rho_2}(y_x + \psi) - \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{\mu}{\rho_2}\lambda \psi = f_4 - f_{4_{xx}}. \quad (5.21)$$

Levando em conta as condições de contorno (4.31), tomaremos as soluções particulares na forma:

$$y_n = A \cos(\eta x) \quad ; \quad \psi_n = B \sin(\eta x) \quad \eta = \frac{n\pi x}{L}, \quad (5.22)$$

e para f_2 e f_4 :

$$f_{2,n} = \cos(\eta x) \quad ; \quad f_{4,n} = \sin(\eta x). \quad (5.23)$$

Combinando (5.22), (5.23) com (5.20) e (5.21) encontramos:

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{\rho_1}\eta^2\right)A - \frac{k}{\rho_1}\eta B = 1 \quad (5.24)$$

$$\left(\lambda^2 + \lambda^2\eta^2 + \frac{b}{\rho_2}\eta^2 + \frac{k}{\rho_2} + \frac{\mu}{\rho_2}\lambda\right)B - \frac{k}{\rho_2}\eta A = 1 + \eta^2. \quad (5.25)$$

Considere a seguinte sequência dos números complexos

$$\lambda_n = i\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\eta, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.26)$$

Desta forma, encontramos:

$$A = -\frac{-k\eta^4\rho_2 + i\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\mu\rho_1\eta + \eta^3\rho_2k + (b\rho_1 - k\rho_2)\eta^2 + \rho_2k\eta + k\rho_1}{k^2\eta^2} \quad ; \quad B = -\frac{\rho_1}{\eta k}. \quad (5.27)$$

Construímos então as seguintes soluções de (5.16) – (5.19):

$$y_n(x) = -\frac{-k\eta^4\rho_2 + i\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\mu\rho_1\eta + \eta^3\rho_2k + (b\rho_1 - k\rho_2)\eta^2 + \rho_2k\eta + k\rho_1}{k^2\eta^2} \cos(\eta x) \quad (5.28)$$

$$u_n(x) = -\frac{-k\eta^4\rho_2 + i\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\mu\rho_1\eta + \eta^3\rho_2k + (b\rho_1 - k\rho_2)\eta^2 + \rho_2k\eta + k\rho_1}{k^2\eta^2} \lambda_n \cos(\eta x) \quad (5.29)$$

$$\psi_n(x) = -\frac{\rho_1}{\eta k} \sin(\eta x) \quad (5.30)$$

$$v_n(x) = -\frac{\rho_1}{\eta k} \lambda_n \sin(\eta x). \quad (5.31)$$

Daí, segue que

$$\int_0^L |u_n(x)|^2 dx = \left| -\rho_1 \frac{-k\eta^4\rho_2 + i\sqrt{\frac{k}{\rho_1}}\mu\rho_1\eta + \eta^3\rho_2k + (b\rho_1 - k\rho_2)\eta^2 + \rho_2k\eta + k\rho_1}{k^2\eta^2} \lambda_n \right|^2 \frac{L}{2} \quad (5.32)$$

no qual podemos observar que quando $\eta \rightarrow \infty$ temos:

$$\int_0^L |u_n(x)|^2 dx \rightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n|_{\mathcal{X}_2}^2 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{L^2(0,L)}^2 \rightarrow \infty,$$

o que caracteriza o não decaimento exponencial das soluções para este caso. Com isso provamos o seguinte resultado

Teorema 5.3 *O semigrupo $(e^{At})_{t>0}$ associado ao sistema (4.27)–(4.31) não é exponencialmente estável.*

5.4 Damping tipo Kelvin-Voigt com efeito não local em ambas as equações

Sabemos da literatura que o damping Kelvin-Voigt em sistemas do tipo Timoshenko faz com que o sistema perca estabilidade exponencial. Porém, aqui iremos mostrar que tal mecanismo de dissipação faz com que o sistema não local tenha estabilidade exponencial independente de

qualquer relação entre os seus coeficientes. A técnica que será utilizada é o método da energia.

Desta forma, consideremos o seguinte sistema linear

$$\rho_1 y_{tt} - k(y_x + \psi)_x - l^2 \rho_1 y_{ttxx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L) \quad (5.33)$$

$$\rho_2(\psi_{tt} - l^2 \psi_{ttxx}) - b\psi_{xx} + k(y_x + \psi) - \mu\psi_{txx} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (5.34)$$

Junto com as condições iniciais

$$y(\cdot, 0) = y_0; y_t(\cdot, 0) = y_1; \psi(\cdot, 0) = \psi_0; \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L), \quad (5.35)$$

e condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = \psi_x(0, L) = \psi_x(L, t) = 0 \quad \forall t > 0. \quad (5.36)$$

Temos que a energia é dada por (4.3) sendo que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\mu \int_0^L \psi_{tx}^2 dx. \quad (5.37)$$

Com isso, introduziremos o seguinte funcional

$$I_1 := \int_0^L (\rho_1(y_t y + l^2 y_{tx} y_x) + \rho_2(\psi_t \psi + l^2 \psi_{tx} \psi_x)) dx.$$

Lema 5.4 *Seja (y, ψ) solução do sistema (5.33) – (5.36). Então temos:*

$$\frac{d}{dt} I_1 \leq -k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + C_1 \int_0^L \psi_{tx}^2 dx.$$

Demonstração: Multiplicando (5.33) por y obteremos:

$$\rho_1 \int_0^L y_{tt} y dx - k \int_0^L (y_x + \psi)_x y dx - l^2 \rho_1 \int_0^L y_{ttxx} y dx = 0.$$

Reescrevendo a equação acima

$$\rho_1 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} y_t y - y_t^2 \right) dx + k \int_0^L (y_x + \psi) y_x dx + l^2 \rho_1 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} y_{tx} y_x - y_{tx}^2 \right) dx = 0. \quad (5.38)$$

Por outro lado, multiplicando (5.34) por ψ encontramos:

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi dx - l^2 \rho_2 \int_0^L \psi_{ttxx} \psi dx - b \int_0^L \psi_{xx} \psi dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx - \mu \int_0^L \psi_{txx} \psi dx = 0.$$

Ou então,

$$\rho_2 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} \psi_t \psi - \psi_t^2 \right) dx + l^2 \rho_2 \int_0^L \left(\frac{d}{dt} \psi_{tx} \psi_x - \psi_{tx}^2 \right) dx + b \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (y_x + \psi) \psi dx + \mu \int_0^L \psi_{tx} \psi_x dx = 0. \quad (5.39)$$

Somando (5.38) e (5.39) teremos:

$$\frac{d}{dt}I_1 = -k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + l^2 \rho_2 \int_0^L \psi_{tx}^2 dx - \mu \int_0^L \psi_{tx} \psi_x dx.$$

Usando a desigualdade de Young e Poincaré, segue que

$$\frac{d}{dt}I_1 \leq -k \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L y_t^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + C_1 \int_0^L \psi_{tx}^2 dx. \quad \blacksquare$$

Vamos considerar agora w solução de

$$-w_{xx} = \psi_x, \quad w(0) = w(L) = 0.$$

Introduziremos o funcional

$$I_2 := \int_0^L (\rho_1(y_t w + l^2 y_{tx} w_x) + \rho_2(\psi_t \psi + l^2 \psi_{tx} \psi_x)) dx$$

Lema 5.5 *Seja (y, ψ) solução do sistema (5.33) – (5.36). Então, para todo $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, temos:*

$$\frac{d}{dt}I_2 \leq -\frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L y_t^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + C(\epsilon_1, \epsilon_2) \int_0^L \psi_{tx}^2 dx.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L (\rho_1(y_t w + l^2 y_{tx} w_x) + \rho_2(\psi_t \psi + l^2 \psi_{tx} \psi_x)) dx &= \int_0^L \rho_1(y_{tt} w + y_t w_t + l^2 y_{ttx} w_x + l^2 y_{tx} w_{tx}) dx \\ &+ \int_0^L \rho_2(\psi_{tt} \psi + \psi_t^2 + l^2 \psi_{ttx} \psi_x + l^2 \psi_{tx}^2) dx \\ &= \int_0^L \rho_1(y_{tt} w + y_t w_t - l^2 y_{ttx} w_x + l^2 y_{tx} w_{tx}) dx \\ &+ \int_0^L \rho_2(\psi_{tt} \psi + \psi_t^2 - l^2 \psi_{ttx} \psi_x + l^2 \psi_{tx}^2) dx. \end{aligned}$$

Segue de (5.33) que

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho_1(y_{tt} w + y_t w_t - l^2 y_{ttx} w_x + l^2 y_{tx} w_{tx}) dx &= k \int_0^L (y_x + \psi)_x w dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx} w_{tx} dx + \int_0^L \rho_1 y_t w_t dx \\ &= -k \int_0^L y \psi_x dx + k \int_0^L w_x^2 dx + l^2 \rho_1 \int_0^L y_{tx} w_{tx} dx \\ &+ \int_0^L \rho_1 y_t w_t dx. \end{aligned} \tag{5.40}$$

E de (5.34)

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \rho_2(\psi_{tt}\psi + \psi_t^2 - l^2\psi_{ttxx}\psi + l^2\psi_{tx}^2)dx &= b \int_0^L \psi_{xx}\psi dx - \int_0^L k(y_x + \psi)\psi dx + \mu \int_0^L \psi_{txx}\psi dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx \\
 &+ l^2\rho_2 \int_0^L \psi_{tx}^2 dx \\
 &= -b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L y_x\psi dx - k \int_0^L \psi^2 dx - \mu \int_0^L \psi_{tx}\psi_x dx \\
 &+ \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + l^2\rho_2 \int_0^L \psi_{tx}^2 dx
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Somando tais equações, segue que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_2 &= k \int_0^L w_x^2 dx + l^2\rho_1 \int_0^L y_{tx}w_{tx} dx + \int_0^L \rho_1 y_t w_t dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L \psi^2 dx - \mu \int_0^L \psi_{tx}\psi_x dx \\
 &+ \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + l^2\rho_2 \int_0^L \psi_{tx}^2 dx.
 \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young e Poincaré, tem-se:

$$\frac{d}{dt}I_2 \leq -\frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \epsilon_1 \int_0^L y_t^2 dx + \epsilon_2 \int_0^L y_{tx}^2 dx + C(\epsilon_1, \epsilon_2) \int_0^L \psi_{tx}^2 dx. \quad \blacksquare$$

Por fim, seja I_3 o funcional linear dado por

$$I_3 := \int_0^L \rho_1(y_t y + l^2 y_{tx} y_x) dx$$

Lema 5.6 *Seja (y, ψ) solução do sistema (5.33) – (5.36). Então, para todo $\epsilon_3 > 0$, temos:*

$$\frac{d}{dt}I_3 \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - l^2\rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L (y_x + \psi) dx + C_{\epsilon_3} \int_0^L \psi_x^2 dx.$$

Demonstração: Segue de (5.38) e da desigualdade de Young que:

$$\frac{d}{dt}I_3 \leq -\rho_1 \int_0^L y_t^2 dx - l^2\rho_1 \int_0^L y_{tx}^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L (y_x + \psi) dx + C_{\epsilon_3} \int_0^L \psi_x^2 dx. \quad \blacksquare$$

Definamos o funcional Lyapunov \mathcal{L} da seguinte forma:

$$\mathcal{L} := ME(t) + N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3.$$

Desta forma, levando em conta os resultados dos Lemas anteriores e substituindo tais na derivada de \mathcal{L} obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L} \leq & -(N_1k - N_3\epsilon_3) \int_0^L (y_x + \psi)^2 dx - \left(N_1\frac{b}{2} + N_2\frac{b}{2} - N_3C_{\epsilon_3}\right) \int_0^L \psi_x^2 dx - (N_3\rho_1 - N_1\rho_1 - N_2\epsilon_1) \int_0^L y_t^2 dx \\ & - (N_3\rho_1l^2 - N_1\rho_1l^2 - N_2\epsilon_2) \int_0^L y_{tx}^2 dx - (M\mu - C_1N_1 - N_2C(\epsilon_1, \epsilon_2)) \int_0^L \psi_{tx}^2 dx. \end{aligned}$$

Tomando

- M suficientemente grande;
- $\epsilon_3 = \frac{N_1k}{2N_3}$;
- $N_2 > \frac{2N_3C_{\epsilon_3}}{b}$;
- $\epsilon_1 = \frac{\rho_1}{N_2}$;
- $\epsilon_2 = \frac{\rho_1l^2}{N_2}$;
- $N_3 > N_1 + 1$;

segue que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta_0 E(t).$$

para algum $\beta_0 > 0$. Além disso, existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tal que para $t \geq 0$

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta_2 E(t) \tag{5.42}$$

De onde segue que

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -2\alpha_1 L(t).$$

para $\alpha_1 := \frac{\beta_0}{2\beta_2}$. Usando (2.44) teremos provado o principal resultado:

Teorema 5.4 *Sejam as condições iniciais satisfazendo*

$$y_0 \in H_0^1((0, L)), \quad \psi_0 \in H_*^1((0, L)), \quad \psi_1 \in L_*^2((0, L)), \quad y_1 \in L^2((0, L)).$$

Então, a energia E da solução (y, ψ) para (5.33) – (5.36) decai exponencialmente, isto é, existe uma constante $C > 0$ e $\beta > 0$, que independe das condições iniciais, tal que para todo $t \geq 0$

$$E(t) \leq CE(0)e^{-2\beta t}.$$

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Iniciamos este trabalho faz uma descrição dos resultados matemáticos consolidados na literatura que versam sobre a estabilidade exponencial de sistemas do tipo Timoshenko e seus paradigmas físicos, como o segundo espectro e a relação das velocidades. Este tipo de patologia física já tinha sido observado por Traill-Nash e Collar em 1953, porém em 2010 Isaac Elishakoff mostrou um sistema do tipo Timoshenko que não apresenta paradigmas físicos e em 2017 D.S. Almeida e A.J.A. Ramos mostram que mecanismos dissipativos podem eliminar tal anomalia física. As conclusões por eles tiradas são de grande importância para a análise de estabilidade de modelos dissipativos, principalmente quando se quer colocar em um aspecto físico.

Tudo isso possibilitou uma série de novas investigações no campo matemático-físico. Nesta direção, nosso trabalho se baseou nesses resultados, porém foram realizados sobre sistemas termoelásticos e não locais do tipo Timoshenko. Nossas conclusões de um modo bem amplo, é que se considerarmos damping tipo Fourier, Cattaneo e atrito nos sistemas dados respectivamente, podemos obter um sistema livre do segundo espectro e além disso, no modelo não local, conseguimos um novo resultado cujo é desconhecido pela literatura ; um modelo que com o damping do tipo Kelvin-Voigt decai exponencialmente.

Como continuidade deste trabalho, objetivamos mostrar:

- Existência e Unicidade de solução para modelos do tipo Timoshenko com a hipótese de Elishakoff (via teoria de Galerkin)
- Uma Análise numérica dos decaimentos obtidos

- Decaimento polinomial para os sistemas que não tem estabilidade exponencial
- Modelagem de sistemas do tipo Timoshenko com efeito não local.

Referências Bibliográficas

- [1] A.C.Eringen, **On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves.**Journal of Applied Physics 54, 4703 (1983).
- [2] A.H.Nayfeh, **Introduction to perturbation techniques.** Wiley Classics Library (1993).
- [3] A.Manevich, Z. Kolakowski **Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material.** Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 49 (1), 316 (2015).
- [4] D.S.Almeida Júnior, A.J.A.Ramos **On the nature os dissipative Timoshenko systems at light of the second spectrum.** Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, v.68, n.3, p.145, (2017).
- [5] D.S.Almeida Júnior, M.L.Santos, J.E. Muñoz Rivera **Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force.** Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 65. 1233 – 1249 (2014).
- [6] Elishakoff, I. **Advances in Mathematical Modeling and Experimental Methods for Materials and Structures, Solid Mechanics and Its Applications.**An equation both more consistent and simpler than the Bresse-Timoshenko equation. Springer, Berlim. 249-254 (2010).
- [7] G. Prathap, **The two frequency spectra of Timoshenko beams: a reassessment.** Journal of sound and Vibration. 90, 443-445.(1983)
- [8] G. R. Bhashyam and G. Prathap. **The second frequency spectrum of Timoshenko beams.** Journal of Sound and Vibration, 76(3). 407 – 420 (1981).
- [9] J.E.M.Rivera and R Racke. **Global stability for damped Timoshenko systems.**.Discrete Continuous and Dynamical Systems,B, 9, 1625-1639 (2003).

- [10] J.E.Muñoz Rivera and R. Racke, **Timoshenko systems with indefinite damping**. J. Math. Anal.Appl. 341, 1068-1083 (2008).
- [11] J.E.Muñoz Rivera and R. Racke, **Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability**. J. Math. Anal.Appl. 276, 248-276 (2002).
- [12] J.E.M.Rivera, **Semigrupos e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: LNCC, 2007.
- [13] J.W.S. Rayleigh, **Theory of Sound**. London: Macmillan Publications Co., Inc (1877).
- [14] M. Levinson and D. W. Cooke. **On the two frequency spectral of Timoshenko beams**. Journal of Sound and Vibration, 84(3) . 319 – 326 (1982).
- [15] L.J.Lions and E. Magenes, **Non-homogeneous boundary value problems and applications**. New York: Springer, 1972.
- [16] L.Nirenberg, **Topics in nonlinear functional analysis**. Rhode Island: AMS, 1974.
- [17] M.L.Santos, D.S.Almeida Júnior, J.E. Muñoz Rivera **The stability number of the Timoshenko system with second sound**. J. Differential Equations, 253. 2715 – 2733 2012.
- [18] M.J.Santos, **Controlabilidade, Estabilização e propriedades dispersivas para sistemas poro-elásticos unidimensionais**. Tese de Doutorado
- [19] N. G. Stephen, **The second frequency spectrum of Timoshenko beams**. Journal of Sound and Vibration. 80, 578-582.(1982)
- [20] N. G. Stephen, **The second spectrum of Timoshenko beam theory - Further assessment**. Journal of Sound and Vibration 292. 372 – 389 (2006)
- [21] N.Mori, **Dissipative structure and global existence in critical space for Timoshenko system of memory type**.J. Differential Equations 265,1627?1653(2018)
- [22] P.Q.Souza, **Estabilização da equação de Berger-Timoshenko como limite singular da estabilização uniforme do sistema de Von-kármán para vigas** (Dissertação de mestrado).

-
- [23] R. Quintanilla, **Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity**. Applied Mathematics Letters. 16:487-491, 2003.
- [24] R.W.Traill-Nasch and A.R. Collar, **The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams**. The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics. 6, 186-222 (1953).
- [25] S.A.Messaoudi and B.S.Houari, **Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III**. J. Math. Anal. Appl, 348(1). 298 – 307. (2008).
- [26] S. Timoshenko, **On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars**. Philos. Mag. 41, 744 – 746, (1921).
- [27] Y.Zhang, **Frequency spectra of nonlocal Timoshenko beams and effective method of determining nonlocal effect**. International Journal of Mechanical Sciences,128-129,572-582 (2017).
- [28] Z.Zhang,N. Challamel, C.M.Wang, **Eringen’s small length scale coefficient for buckling of nonlocal Timoshenko beam based on microstructured beam model**. J. Appl. Phys. 114, 114902 (2013)