UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Solução positiva para uma equação elíptica envolvendo o Laplaciano fracionário em domínio não limitado

Jeziel do Nascimento Correia

BELÉM- PA
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Jeziel do Nascimento Correia

Solução positiva para uma equação elíptica envolvendo o Laplaciano fracionário em domínio não limitado

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus M. Figueiredo

BELÉM - PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C824s Correia, Jeziel do Nascimento.
Solução positiva para uma equação elíptica envolvendo o Laplaciano fracionário em domínio não limitado / Jeziel do Nascimento Correia, . — 2019.
x, 220 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Laplaciano fracionário. 2. Resultado de compacidade global. 3. Método variacional. 4. Grau topológico de Brouwer. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Jeziel do Nascimento Correia

Solução positiva para uma equação elíptica envolvendo o Laplaciano fracionário em domínio não limitado

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 11/03/2019

Resultado: APROVADO

Banca Examinadora

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UNB - Orientador

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento - PPGME/PDM/UFPA

Gelson Conceição G. dos Santos

Prof. Dr. Gelson Conceição Gonçalves dos Santos - PPGME/PDM/UFPA

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva - PPGME/PDM/UFPA

Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares - UFCA

Dedicatória

À minha família, em especial a meu pai, Adauto Correia e a minha mãe, Maria Conceição do Nascimento Correia.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, essência de minha vida, por dar-me esta oportunidade, por dar-me forças e ter guiado-me nesta conquista tão especial. Sem Ele esta conquista não teria se realizado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Giovany de Jesus M. Figueiredo, por aceitar-me como seu orientando, pelo profissionalismo e brilhantismo com que conduziu esta orientação, mostrando-se sempre disposto a esclarecer minhas dúvidas. Graças ao seu imenso conhecimento matemático, proporcionou-me esta grande conquista. A esta pessoa, que tem minha admiração e respeito, serei eternamente grato.

À minha amada esposa, Vilma Nunes, pelo carinho, companheirismo, paciência, compreensão e, a minha filha, Maria Clara Nunes Correia.

À minha família, em especial aos meus pais, Adauto Correia e Maria Conceição do Nascimento Correia, pelo exemplo de honestidade, trabalho e dedicação à família, e pela forma que me educaram.

Aos professores João Pablo Pinheiro da Silva, Gelson Conceição Gonçalves dos Santos, Leandro da Silva Tavares e a professora Rúbia Gonçalves Nascimento, por aceitarem participar da banca examinadora desta Tese e contribuir para a melhoria da mesma.

Ao Programa de Doutorado em Matemática da UFPA, a todos os funcionários, por estarem sempre disponíveis a ajudar e a todos os professores do programa.

Aos colegas do curso de mestrado e doutorado em matemática, em especial: João Carlos Pantoja Fortes, André Almeida, Willian Cintra, Ítalo Duarte, Julio Roberto, Raimundo Leão, Claudionei Pereira, Mirelson Freitas, Fernando Bruno M. Nunes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior - (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Epígrafe

"Se fui capaz de ver mais longe, é porque me apoiei em ombros de gigantes".

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho provamos alguns resultados de existência de solução positiva para equações do tipo

$$(-\Delta)^s u + a(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N,$$

onde $0 < s < 1$, $N > 2s$ e $(-\Delta)^s$ denota o Laplaciano fracionário. Consideramos dois casos distintos: no primeiro caso consideramos $\Omega = \mathbb{R}^N$, a não linearidade $f(t) = |t|^{2_s^*-2}t$ e $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $a \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz outras condições adequadas a serem apresentadas ao longo do trabalho; no segundo caso, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio não limitado, $\partial\Omega \neq \emptyset$ limitada, $a(x) \equiv \lambda$ uma constante positiva e a não linearidade $f(t) = |t|^{p-2}t$ com $2 < p < 2_s^*$. A fim de obter nossos resultados usamos métodos variacionais combinados com argumentos topológicos.

Palavras-chave: Laplaciano fracionário; resultado de Compacidade Global; método variacional; grau topológico de Brouwer.

Abstract

In this work we prove some results of existence of positive solutions for equations of the type

$$(-\Delta)^s u + a(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N,$$

where $0 < s < 1$, $N > 2s$ and $(-\Delta)^s$ denotes the fractional Laplacian. We consider two cases: in the first case we consider $\Omega = \mathbb{R}^N$, the nonlinearity $f(t) = |t|^{2_s^*-2}t$ and $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ is a function with $a \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N)$ and satisfying suitable conditions that will be presented throughout the work; in the second case we consider $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ an unbounded domain, $\partial\Omega \neq \emptyset$ bounded, $a(x) \equiv \lambda$ positive constant and the nonlinearity $f(t) = |t|^{p-2}t$ with $2 < p < 2_s^*$. In order to obtain our results we use variational methods combined with topological arguments.

Key-Words: Fractional Laplacian; Global Compactness result; variational methods; Brouwer's topological degree.

Notação e Terminologia

Neste trabalho, faremos uso das seguintes notações e terminologias:

- $C, C_0, C_1, ...$ denotam constantes positivas (possivelmente distintas);
- $\blacksquare$, denota o fim de uma demonstração;
- $B_r(x)$, denota a bola aberta de centro x e raio r;
- $A, B \subset \mathbb{R}^N$, então $A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$;
- $supp(f)$, denota o suporte da função f;
- $\rightarrow$, denota convergência forte em um espaço normado X;
- $\rightharpoonup$, denota convergência fraca em um espaço normado X;
- $o_n(1)$, denota uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} o_n(1) = 0$;
- $2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$, denota o expoente crítico de Sobolev;
- χ_Ω, denota a função característica do conjunto Ω;
- $q.t.p$, significará em quase toda parte;
- $|\Omega|$, denota a medida de Lebesgue de um conjunto Ω em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$;
- Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Diremos que uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência Palais-Smale no nível c para I, ou de forma resumida, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_c$ para I, se $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$;

- Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Diremos que I satisfaz a condição de Palais-Smale em c, ou de forma resumida, I satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência Palais-Smale possui uma subsequência convergente em E;

- Dada uma função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ indicará a i_ésima derivada parcial de f no ponto x, quando esta derivada existir.

- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$, denota o gradiente da função u;

- $\Delta\, u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u^2}{\partial x_i^2}$, denota o operador laplaciano de u;

- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurvel}; \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}$, em que $1 \leq p \leq +\infty$, denotará o espaço de Lebesgue munido com a norma

$$|u|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{1/p}, \ \ 0 < p < \infty;$$

- $L^\infty(\Omega)$, denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em $\mathbb{R}^N$ com norma dada por

$$|u|_\infty = \inf\{C; |u(x)| \leq C, \ \text{ quase sempre em } \ \Omega\}, \ \text{ se } \ p = \infty.$$

- $C(\Omega)$, denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ são as funções de suporte compacto em Ω;

- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \cap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;

- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;

- Para $1 \leq p < \infty$ e $0 < s < 1$, $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$, denotará o espaço de Sobolev fracionário dado por

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in L^p(\Omega) \ \text{ e } \ (-\Delta)^{s/2} u \in L^p(\Omega)\right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_{s,p} = \left[\int_\Omega (|(-\Delta)^{s/2}u|^p + |u|^p)dx\right]^{1/p}$$

- Para o caso particular em que $p = 2$, denotaremos $W^{s,2}(\mathbb{R}^N) = H^s(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, então

$$H_0^s(\Omega) = \left\{u \in H^s(\mathbb{R}^N); u = 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega\right\};$$

- $D^{s,2}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \in L^{2^*}(\Omega) \ \text{ e } \ (-\Delta)^{s/2}u \in L^2(\Omega)\right\}$, denotará o espaço de Sobolev munido com a norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |(-\Delta)^{s/2}u|^2 dx\right)^{1/2};$$

- $(D^{s,2}(\mathbb{R}^N))'$, denotará o dual topológico do espaço $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\|\cdot\|_{D'}$ representa a norma do dual.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência de solução positiva para equações do tipo

$$(-\Delta)^s u + a(x)u = f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $0 < s < 1$, $N > 2s$ e $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função potêncial que satisfaz condições adequadas a serem apresentadas posteriormente. A não linearidade f é uma função do tipo potência pura que tem crescimento subcritico ou crítico e $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário que é definido por

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s)P.V \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $P.V$ representa o valor principal de Cauchy e $C(N,s)$ é a constante de normalização; para um estudo mais detalhado sobre o operador Laplaciano fracionário, sugerimos os trabalhos [33, 59].

Soluções da equação (1) estão relacionadas com soluções de ondas estacionárias da seguinte equação de Schrödinger fracionária que depende do tempo:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = (-\Delta)^s \psi + a(x)\psi - f(x,\psi), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{2}$$

onde $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função potencial, $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $0 < s < 1$ é um parâmetro fixo. Soluções de ondas estacionárias para a equação (2) são soluções da forma

$$\psi(x,t) = u(x)\exp(-ict),$$

onde u resolve a equação elíptica (1).

A equação de Schrödinger fracionária (2) foi introduzida por Laskin [51, 52] e é usada na mecânica quântica fracionária para estudo de partículas em campos estacionários modelados por processos de Lévy. Além disso, o operador Laplaciano fracionário também surge naturalmente em várias áreas diferentes, como Probabilidade, Finanças, Física, Química e Biologia, veja por exemplo [7, 8, 14, 29, 57, 71, 72]. O operador $(-\Delta)^s$ pode ser visto como os geradores infinitesimais do processo de difusão estável, chamado de processo de Lévy, veja [51].

Quando $s = 1$, a equação (2) se reduz a equação clássica de Schrödinger

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + a(x)\psi - f(x,\psi), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

que tem sido amplamente investigada em relação a existência e multiplicidade de solução de ondas estacionárias nas últimas décadas, veja [1, 2, 10, 11, 16, 17, 35, 47, 70] e suas referências. O estudo da equação de Schrödinger fracionária quando $s \in (0,1)$, recentemente tem atraido a atenção de vários pesquisadores, tanto pelo ponto de vista de sua aplicabilidade em diferentes contextos como também pelo interesse puramente matemático, veja por exemplo [9, 18, 22, 23, 28, 30, 39, 40, 60, 61, 66] e suas referências.

Considerando o caso do Laplaciano clássico, isto é, o caso em que $s = 1$, assumindo a não linearidade do tipo potência pura com crescimento crítico, citamos os trabalhos [1, 3, 10, 15, 20, 24, 45, 46, 48], onde os autores estudaram a equação

$$-\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u, \quad \text{em} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

onde $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ é uma função potencial tal que $a \in L^{N/2}(\Omega)$, $N > p \geq 2$ e $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev. Em [20], Brezis e Nirenberg, considerando o caso em que $p = 2$ e $a(x) \equiv -\lambda$ constante, Ω um domínio limitado, mostraram que a equação (3) possui uma solução positiva quando $N \geq 4$ e $\lambda \in (0, \lambda_1)$ ou $N = 3$ e λ é grande, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador laplaciano $-\Delta$ com as condições de fronteira de Dirichlet. Cerami, Fortunato e Struwe [24], estudaram a equação (3) e provaram resultados de multiplicidade de solução (mas não de solução positiva) usando o fato que a condição $(PS)_c$ ocorre para o funcional energia associado ao problema (3) abaixo de certo nível. Benci e Cerami [10] , considerando $\Omega = \mathbb{R}^N$, mostraram que a equação (3) tem uma solução positiva se a é uma função não negativa, estritamente positiva em algum ponto do $\mathbb{R}^N$, com $|a|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)} < S(2^{2/N} - 1)$ e $a \in L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $p_1 \leq s \leq p_2$ e $p_1 < N/2 < p_2$. Para o caso em que Ω é um domínio limitado e $a(x) \equiv -\lambda$ constante, sugerimos os trabalhos [45, 46, 48]. Além desses, Ben-Naoum, Troestler e Willem [15], mostraram existência de solução positiva para a equação (3) com hipóteses distintas das mencionadas acima na não linearidade e na função potencial $a(x)$. Citamos também o trabalho de C. O. Alves [1], onde considerando $\Omega = \mathbb{R}^N$ e hipótese semelhantes as utilizadas por Benci e Cerami [10], generalizou os resultados obtido pelos autores no referido artigo para o operador p-Laplaciano $-\Delta_p$. Assumindo hipóteses semelhantes com as utilizadas por Benci e Cerami [10], sobre o potencial $a(x)$, citamos também o trabalho de C. O. Alves, Angelo R. F. de Holanda e José A. Fernandes [3], onde os autores mostraram resultado de existência de solução positiva para a Equação (3) considerando o semiplano $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ e condições de fronteira de Neumann.

Assumindo a não linearidade com crescimento do tipo subcrítico, citamos [2, 10, 16, 17, 35], onde os autore estudaram equações da forma

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{4}$$

onde $N \geq 3$, $2 < p < 2^*$ e Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^N$. Berestycki e Lions [16, 17] mostraram existência de infinitas soluções para a Equação (4) quando $\Omega = \mathbb{R}^N$. Esteban e Lions [35], obtiveram resultados análogos considerando Ω como sendo o complementar de uma bola e, Benci e Cerami [11], provaram resultados de existência e não existência de solução ground state para a equação (4) em domínio exterior.

Considerando o Laplaciano fracionário, Felmer, Quass e Tan [38] estudaram questões relacionadas à existência e regularidade de solução positiva para equação (1), onde $a(x) \equiv 1$ e f tem crescimento subcrítico e satisfaz a bem conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz, isto é, existe $\theta > 2$ tal que:

$$0 < \theta F(u) \leq f(u)u, \quad u > 0,$$

onde $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(t)dt$. Secchi [64], obteve existência de solução ground state para a equação (1) assumindo que $a(x)$ é uma função coerciva (isto é, $a(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$) e que f satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Para resultados à respeito da equação (1), onde a não linearidade f é uma função geral com crescimento subcrítico e não satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz; veja, por exemplo, [25, 26, 63, 75]. Além desses, em [36], Évéquoz e Fall obtiveram resultado de existência de solução positiva para a equação (1) considerando $f(x,u) = Q(x)|u|^{p-2}u$ e assumindo que:

(a) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} a(x) > 0$ e $a(x) \to 1$ quando $|x| \to \infty$;

(Q) $Q \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $Q \geq 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e $Q(x) \to 1$ quando $|x| \to \infty$.

Chang e Wang [27] estudaram uma classe de problemas do tipo (1). Eles mostraram existência de solução radial ground state assumindo a conhecida condição de Berestycki-Lions. Alves, Figueiredo e Siciliano em [4] também considerando condições do tipo Berestycki-Lions, obtiveram existência de solução ground state para equação do tipo (1). Também assumindo condições do tipo Berestychi-Lions, $a(x) \equiv 1$ e $f(t) = -t + |t|^{p-1}t$, em [34], Dipierro, Palatucci e Valdinoci provaram existência de solução positiva radialmente simétrica e monótona para equação (1). É importante ressaltar, que tanto em [4] quanto em [34] os autores consideram o caso crítico.

Para não linearidade envolvendo uma pertubação na potência crítica, citamos o Trabalho de Gabert e Rodrigues [44], onde eles mostraram resultado de existência de soluções nodais para a equação

$$(-\Delta)^s u = |u|^{2_s^*-2}u + \lambda f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave, $s \in (0,1)$, $N > 2s$, $\lambda > 0$ e $2_s^* = 2N/(N-2s)$ é o exponte crítico de Sobolev. Em [58], Mosconi, Perera, Squassina e Yang provaram resultados de existência de solução do problema de Brezis-Nirenberg para o p-Laplaciano fracionário

$$(-\Delta)_p^s u = \lambda|u|^{p-2}u + |u|^{P_s^*-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{6}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira Lipschitz e $\lambda > 0$. Ainda considerando a equação (6), com $\lambda = 0$ e $p = 2$ (problema de Coron para o Laplaciano fracionário), citamos o estudo feito por Secchi, Shionji e Squassina em [65].

Motivado por todos esses trabalhos, principalmente por [1], [10] e [11], nesta tese estudaremos a equação (1). Mais detalhadamente, esse estudo será realizado da seguinte forma:

No *Capítulo 1*, motivado pelo trabalho de Alves em [1], onde foi estudado a equação (3), estudamos a equação de Schrödinger fracionária

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + a(x)u = |u|^{2_s^*-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{7}$$

em que $N > 2s$, $s \in (0,1)$ e $2_s^* = 2N/(N-2s)$ é o expoente crítico do espaço de Sobolev fracionário. O potencial $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínuo, $a \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as seguintes hipóteses:

(a_1) $a(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$;

(a_2) $a \in L^q(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [p_1, p_2]$, onde $1 < p_1 < \dfrac{N}{2s} < p_2$ com $p_2 < \dfrac{N}{4s-N}$ se $N < 4s$ e

(a_3) $|a|_{N/2s} < S(2^{2s/N} - 1)$,

onde S representa a melhor constante da imersão de Sobolev do espaço $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$ e será definida em um momento oportuno.

Inspirado nas idéias de Alves [1] e Benci e Cerami em [10], onde foi mostrado resultado de existência de solução positiva para a equação (3) usando métodos variaconais combinados com argumentos topológicos, mostramos resultados semelhantes para a equação de Schrödinger fracionária dada em (7), a saber, o principal resultado do *Capítulo 1* é o seguinte:

Teorema 0.1. *Assuma que $N > 2s$ e $(a_1) - (a_3)$ ocorrem. Então, a equação (7) possui uma solução positiva $u_0 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que $\dfrac{s}{N}S^{N/2s} < I(u_0) < \dfrac{2s}{N}S^{N/2s}$.*

Uma vez que estamos trabalhando no $\mathbb{R}^N$ e a não linearidade tem crescimento crítico, nossa principal dificuldade está relacionada com a falta da imersão compacta do

$D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$. Quando isto ocorre, em geral, a condição Palais-Smale não é válida. Portanto, a fim de provarmos o Teorema 0.1, devemos contornar essas e outras dificuldades. Nesse sentido, fizemos uma versão do resultado de "Compacidade Global"devido a Struwe [69] para o espaço de Sobolev fracionário $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. A partir deste resultado de compacidade, encontramos as faixas onde a condição Palais-Smale é válida e, aplicando uma variante do Lema de Deformação (veja Apêndice B, Teorema $B.0.5$) juntamente com resultados da Teoria do Grau de Brouwer, garantimos a validade do Teorema 0.1.

No *Capítulo 2*, motivado pelo trabalho de Benci e Cerami [11], onde os autores mostraram resultado de existência de solução positiva e resultado de não existência de solução ground state para a equação (4), consideramos a equação de Schrödinger fracionária

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = |u|^{p-2}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u \in H_0^s(\Omega), \end{cases} \tag{8}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio ilimitado, $\partial\Omega \neq \emptyset$ é limitado, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $N > 2s$ e $2 < p < 2_s^* = 2N/(N-2s)$.

Inspirado nas idéias de Benci e Cerami [11], estudamos a equação (8) e mostramos resultados análogos aos obtidos pelos autores para o caso do Laplaciano clássico. Ressaltamos que, para obter os resultados desejados, usamos os mesmos argumentos ultilizados em [11], a saber, fizemos uso de método variacional juntamente com argumentos topológicos. Os dois teoremas a seguir contém os principais resultados do *Capítulo 2*.

Teorema 0.2. *Assuma $N > 2s$, $2 < p < 2_s^*$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Então, para todo λ existe um $\sigma = \sigma(\lambda)$, tal que se*

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_\sigma(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x - x_0| \leq \sigma\right\},$$

o problema (8) *possui pelo menos uma solução positiva.*

Teorema 0.3. *Assuma $N > 2s$, $2 < p < 2_s^*$. Então, existe $\lambda_* = \lambda_*(\Omega)$, tal que para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_*)$ o problema* (8) *possui pelo menos uma solução positiva.*

Uma vez que estamos trabalhando em domínio ilimitado, sabemos que de um modo geral não valem as imersões compactas de Sobolev. Portanto, a fim de provarmos o Teorema 0.2, recorremos a um "Lema de Compacidade global", cuja versão original foi provado por Struwe [69] (veja também [68]). Este Lema é ferramenta fundamental para garantirmo o nosso resultado de existência de solução para a equação (8), pois a partir deste Lema, mostramos que sob condições adequadas, o funcional energia associado a equação (8) satisfaz a condição Palais-Smale. Resultado como deste lema somam-se a outros, como estudos feitos sobre soluções positivas simétricas para equações elípticas no $\mathbb{R}^N$, as propriedades básicas do grau topológico de Brouwer e uma variante do Lema de Deformação devido a Hofer [49], garantimos a validade do Teorema 0.2. A fim de provar o Teorema 0.3, fazemos uma mudança de variável na equação (8) e o resultado segue do Teorema 0.2.

Concluimos nosso trabalho com um apêndice que contém alguns resultados que foram usados no decorrer do texto.

No *Apêndice A*, provamos a continuidade da função concentração de levy e da função baricentro.

No *Apêndice B*, colocamos alguns resultados de análise no $\mathbb{R}^N$, medida e integração, análise funcional, convergência e imersão. Além disso, enunciamos resultados de Simetrização de Schwarz, bem como, Lema de Deformação e o Princípio Variacional de Ekeland.

Finalmente, no *Apêndice C*, enunciamos os principais resultados da Teoria do Grau de Brouwer.

Capítulo 1

Equação elíptica envolvendo o operador Laplaciano fracionário com crescimento crítico em $\mathbb{R}^N$

Neste capítulo, estamos interessados em mostrar existência de solução positiva para a seguinte equação elíptica fracionária:

$$(-\Delta)^s u + a(x)u = |u|^{2_s^*-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

onde $2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$, $N > 2s$, $s \in (0,1)$, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ é uma função tal que $a \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N)$ e $(-\Delta)^s$ é o operador Laplaciano fracionário definido por

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &= C(N,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy \\ &= C(N,s)\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $P.V.$ é entendido como o valor principal da integral e

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{N+2s}}d\zeta\right)^{-1}, \quad \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_N).$$

Ao longo do trabalho, omitiremos a constante $C(N,s) > 0$. Esta constante de normalização é sempre usada quando se deseja recuperar o Laplaciano usual quando $s \to 1$, para detalhes veja [33].

Denotaremos por S a melhor constante para a imersão de Sobolev $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$S = \inf_{\substack{u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx \right)^{2/2_s^*}} = \inf_{\substack{u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{|u|_{2_s^*}^2}. \tag{1.2}$$

Assumimos também que a função a satisfaz as seguintes hipóteses:

(a_1) $a(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$;

(a_2) $a \in L^q(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [p_1, p_2]$, onde $1 < p_1 < \dfrac{N}{2s} < p_2$ com $p_2 < \dfrac{N}{4s - N}$ se $N < 4s$ e

(a_3) $|a|_{N/2s} < S(2^{2s/N} - 1)$.

Antes de enunciarmos nosso resultado, vamos introduzir algumas notações básicas. Para uma função mensurável $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ seja

$$[u]^2_{D^{s,2}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy$$

a seminorma de Gagliardo de u.

Definimos o espaço de Hilbert

$$D^{s,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy < +\infty \right\},$$

o qual está imerso continuamente em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$.

Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é solução fraca de (P) se $u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e para todo $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u (-\Delta)^{s/2} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^* - 2} u \varphi dx.$$

Assim, para obtermos uma solução fraca de (P) é suficiente encontrarmos pontos críticos do funcional $I : D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx, \tag{1.3}$$

o qual está bem definido em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, é de classe C^1 e sua derivada é dada por

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}u(-\Delta)^{s/2}\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*-2}u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Neste texto, em vista [33, Proposição 3.4 e Proposição 3.6], usaremos a seguinte relação

$$\|u\|^2 = |(-\Delta)^{s/2}u|_2^2 = [u]^2.$$

O teorema a seguir contém o principal resultado deste capítulo:

Teorema 1.1. *Assuma que $N > 2s$ e $(a_1) - (a_3)$ vale. Então a equação (P) possui uma solução positiva $u_0 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\frac{s}{N}S^{N/2s} < I(u_0) < \frac{2s}{N}S^{N/2s}$.*

Os resultados obtidos neste capítulo, é versão de [10] e [1] para o operador Laplaciano fracionário. Destacamos que as idéias ultilizadas por Benci e Cerami [10] e Alves [1] não são imediatamente aplicáveis ao nosso problema devido ao fato de que o operador Laplaciano fracionário é não-local. Algumas estimativas refinadas foram necessárias. Por exemplo, veja Lema 1.7 e Teorema 1.2, onde provamos uma versão do resultado de Compacidade Global de Struwe [69] para o operador Laplaciano fracionário, que também pode ser útil em contextos diferentes. Ao menos dos nossos conhecimentos, este resultado ainda não havia sido provado no contexto do operador Laplaciano fracionário.

1.1 Resultados preliminares

Nesta seção, mostraremos um resultado que será de suma importância para a prova do *"Lema Principal"* e do Teorema 1.2 que apresentaremos na próxima seção. Este resultado estuda o comportamento das sequências Palais-Smale do funcional energia I_∞ :

$D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u|^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx, \quad \forall u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \tag{1.4}$$

associado ao problema limite

$$(-\Delta)^s u = |u|^{2_s^*-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \tag{P_∞}$$

onde $2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$, $N > 2s$, $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s$ é o operador laplaciano fracionário. Para resultado de existência de solução do problema (P_∞), indicamos o trabalho de R. Servadei e E. Valdinoci [66, Seção 4, Afirmação 6].

Lema 1.1. *Sejam (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para I_∞. Então:*

(a) *(u_n) é uma sequência limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$;*

(b) *Existe $u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que $I'_\infty(u) = 0$;*

(c) *Se $c < \dfrac{s}{N}S^{N/2s}$, onde S é a constante definida em (1.2), então, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, mostrado que I_∞ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração: (a) Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞, temos que

$$I_\infty(u_n) \to c \tag{1.5}$$

e

$$\|I'_\infty(u_n)\|_{D'} \to 0. \tag{1.6}$$

De (1.5), $(I_\infty(u_n))$ é uma sequência limitada de números reais. Logo podemos tomar $K = \sup_{n\in\mathbb{N}} I_\infty(u_n)$. De (1.6), segue que tomando $\epsilon = 2_s^* > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'_\infty(u_n)\|_{D'} < 2_s^*, \forall n \geq n_0.$$

Daí,

$$-\frac{1}{2_s^*}I'_\infty(u_n)v_n \leq \frac{1}{2_s^*}|I'_\infty(u_n)u_n| \leq \frac{1}{2_s^*}\|I'_\infty(u_n)\|_{D'}\|u_n\| < \frac{1}{2_s^*}2_s^*\|u_n\| = \|u_n\|, \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$I_\infty(u_n) - \frac{1}{2_s^*} I'_\infty(u_n)u_n < K + \|u_n\|, \forall n \geq n_0. \tag{1.7}$$

Agora, observando que

$$I_\infty(u_n) - \frac{1}{2_s^*} I'_\infty(u_n)u_n \quad = \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \frac{s}{N}\|u_n\|^2. \tag{1.8}$$

Segue de (1.7) e (1.8) que

$$\frac{s}{N}\|u_n\|^2 = I_\infty(u_n) - \frac{1}{2_s^*} I'_\infty(u_n)u_n < K + \|u_n\|, \forall n \geq n_0. \tag{1.9}$$

Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: (b) Mostramos no ítem anterior que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço reflexivo, existe $u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Argumentando como em [2, Lema A.1], segue que, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Queremos mostrar que o limite fraco de u_n é ponto crítico do funcional I_∞. Para isto, devemos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*-2} u \varphi dx, \;\; \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Com efeito, consideremos as sequências de funções $g_n(x) = |u_n(x)|^{2_s^*-2} u_n(x)$ e $g(x) = |u(x)|^{2_s^*-2} u(x)$. Então, a menos de subsequência,

$$g_n(x) \to g(x) \;\; q.t.p. \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N$$

além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_n|^{2_s^*/(2_s^*-1)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} ||u_n|^{2_s^*-2} u_n|^{2_s^*/(2_s^*-1)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx = |u_n|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

Uma vez que (u_n) é limitada em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, existe $M > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_n|^{2_s^*/(2_s^*-1)} dx = |u_n|_{2_s^*}^{2_s^*} \leq M, \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

de onde deduzimos também que $(g_n) \subset L^{2_s^*/(2_s^*-1)}(\mathbb{R}^N)$. Além do mais, $g \in L^{2_s^*/(2_s^*-1)}(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g|^{2_s^*/(2_s^*-1)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx,$$

e desde que $u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g|^{2_s^*/(2_s^*-1)} dx < +\infty.$$

Como $2_s^*/(2_s^*-1) > 1$, então aplicando o Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Lema $B.2$), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*-2} u \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.10}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u (-\Delta)^{s/2} \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.11}$$

Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞, temos em particular, que

$$I'_\infty(u_n)\varphi \to 0 \ \ \text{em} \ \ (D^{s,2}(\mathbb{R}^N))',$$

onde

$$I'_\infty(u_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx, \ \ \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $n \to \infty$, de (1.10), (1.11) e da unicidade do limite, obtemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u (-\Delta)^{s/2} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*-2} u \varphi dx = I'_\infty(u)\varphi, \ \ \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$$

e portanto, $I'_\infty(u) = 0$ como queriamos mostrar.

Demonstração: (c) Façamos $v_n = u_n - u$ e observemos que

$$o_n(1) = I'_\infty(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - |u_n|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

Aplicando o Teorema de Brezies-Lieb (ver Apêndice B, Teorema $B.9$), segue que

$$o_n(1) = I'_\infty(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - |u_n|_{2_s^*}^{2_s^*} = \|v_n\|^2 + \|u\|^2 - |v_n|_{2_s^*}^{2_s^*} - |u|_{2_s^*}^{2_s^*} + o_n(1). \quad (1.12)$$

Desde que u é solução fraca de (P_∞),

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u (-\Delta)^{s/2} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*-2} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$$

e visto que $u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, tomando $\varphi = u$ na igualdade acima, temos

$$\|u\|^2 = |u|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

Logo, de (1.12) e da última igualdade, decorre que

$$o_n(1) = I'_\infty(u_n)u_n = \|v_n\|^2 - |v_n|_{2_s^*}^{2_s^*} + o_n(1). \quad (1.13)$$

Como as sequências $(\|v_n\|^2)$ e $(|v_n|_{2_s^*}^{2_s^*})$ são limitadas, passando a uma subsequência se necessário, temos de (1.13) que

$$\lim_{n\to\infty} (\|v_n\|^2 - |v_n|_{2_s^*}^{2_s^*}) = 0,$$

implicando que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} |v_n|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

Consideremos

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} |v_n|_{2_s^*}^{2_s^*}. \quad (1.14)$$

Desde que $\|v_n\|^2 \geq 0$ e $|v_n|_{2_s^*}^{2_s^*} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\rho \geq 0$. Nosso objetivo é provar que $\rho = 0$. Para isto, assuma que $\rho > 0$. Pela definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que $S|v_n|_{2_s^*}^2 \leq \|v_n\|^2$. Passando ao limite de $n \to +\infty$ na última desigualdade e tendo em conta (1.14), resulta que

$$\rho \geq S\rho^{2/2_s^*} \Rightarrow \rho \geq S^{N/2s}. \quad (1.15)$$

De (1.13) e do fato que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞, encontramos

$$\begin{aligned} c &= I_\infty(u_n) + o_n(1) = I_\infty(u_n) - \frac{1}{2_s^*} I'_\infty(u_n)u_n + o_n(1) \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{2_s^*}|u_n|_{2_s^*}^{2_s^*} - \frac{1}{2_s^*}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2_s^*}|v_n|_{2_s^*}^{2_s^*} + o_n(1) \\ &= \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2_s^*}|v_n|_{2_s^*}^{2_s^*} - \frac{1}{2_s^*}|u|_{2_s^*}^{2_s^*} - \frac{1}{2_s^*}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2_s^*}|v_n|_{2_s^*}^{2_s^*} + o_n(1) \\ &= \frac{s}{N}\|v_n\|^2 + I_\infty(u) + o_n(1). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Lembrando que $\|u\|^2 = |u|_{2_s^*}^{2_s^*}$, temos também

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2_s^*}|u|_{2_s^*}^{2_s^*} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)\|u\|^2 = \frac{s}{N}\|u\|^2 \geq 0.$$

Portanto, de (1.16), obtemos

$$c = \frac{s}{N}\|v_n\|^2 + I_\infty(u) + o_n(1) \geq \frac{s}{N}\|v_n\|^2 + o_n(1) = \frac{s}{N}\rho$$

e de (1.15)

$$c \geq \frac{s}{N}\rho \geq \frac{s}{N}S^{N/2s},$$

o que é uma contradição. Logo $\rho = 0$ e portanto

$$\|v_n\|^2 = \|u_n - u\|^2 \to 0.$$

Concluimos então que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. ∎

1.2 Resultado de compacidade global

Nesta seção, apresentaremos um "Teorema de Compacidade Global"para problemas não locais. Este resultado é uma extensão do resultado de compacidade global de Struwe (veja [69, Lema 3.3 e Teorema 3.1]) para o caso fracionário. Uma versão deste resultado para domínio limitado evolvendo o operador Laplaciano fracionário pode ser encontrada em [18], veja também [60, 61].

Antes de seguirmos para o principal teorema desta seção, provaremos alguns lemas que serão ferramenta fundamentel, tanto na demonstração do *"Lema Principal"* que apresentaremos mais adiante, como também na prova de outros resultados que virão.

No próximo resultado seguiremos as ideias de V. Ambrosio em [5, Lema 2.3], (veja também X. Zhang, B. Zhang e D. Repovs [75, Lema 3.3]).

Lema 1.2. *Seja $(u_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada e $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$, $\psi = 1$ em $B_{1/2}(0)$, $\psi = 0$ em $B_1^c(0)$ e $|\nabla\psi|_\infty \leq 2$. Para cada $\epsilon > 0$ definamos $\psi_\epsilon(x) = \psi\left(\dfrac{x - x_i}{\epsilon}\right)$, onde $x_i \in \mathbb{R}^N$ é um ponto fixado. Então, o seguinte resultado é verdadeiro:*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}}dxdy = 0.$$

Demonstração: Inicialmente, observemos que usando a definição de ψ, encontramos que

$$\psi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i), \\ 0, & \text{se } \; x \in B_\epsilon^c(x_i). \end{cases}$$

Notemos também que podemos ver o espaço $\mathbb{R}^{2N}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{R}^{2N} = ((\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x_i)) \times (\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x_i))) \cup (B_\epsilon(x_i) \times \mathbb{R}^N) \cup (\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x_i)) =: \Omega_{1,\epsilon} \cup \Omega_{2,\epsilon} \cup \Omega_{3,\epsilon}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}}dxdy \\ &= \int_{\Omega_{1,\epsilon}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\Omega_{2,\epsilon}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}}dxdy \\ &+ \int_{\Omega_{3,\epsilon}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}}dxdy. \end{aligned} \tag{1.17}$$

No que segue, iremos estimar cada uma das integrais em (1.17). Desde que $\psi(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x_i)$, temos

$$\int_{\Omega_{1,\epsilon}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}}dxdy = 0. \tag{1.18}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2,\epsilon}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy &= \int_{B_\epsilon(x_i)} dx \int_{\{y\in\mathbb{R}^N; |x-y|\le\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy \\ &+ \int_{B_\epsilon(x_i)} dx \int_{\{y\in\mathbb{R}^N; |x-y|>\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy\end{aligned}$$

e desde que $0 \le \psi(x) \le 1$ em $\mathbb{R}^N$, aplicando o Teorema do Valor Médio, encontramos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2,\epsilon}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy &= \epsilon^{-2}\|\nabla\psi\|_\infty^2 \int_{B_\epsilon(x_i)} dx \int_{\{y\in\mathbb{R}^N; |x-y|\le\epsilon\}} \frac{|u_n(x)|^2}{|x-y|^{N+2s-2}} dy \\ &+ 4\int_{B_\epsilon(x_i)} dx \int_{\{y\in\mathbb{R}^N; |x-y|>\epsilon\}} \frac{|u_n(x)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy.\end{aligned}$$

Mudando para coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{2,\epsilon}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy &\le C_1\epsilon^{-2s} \int_{B_\epsilon(x_i)} |u_n(x)|^2 dx + C_2\epsilon^{-2s}\int_{B_\epsilon(x_i)} |u_n(x)|^2 dx \\ &= C_3\epsilon^{-2s}\int_{B_\epsilon(x_i)} |u_n(x)|^2 dx, \qquad (1.19)\end{aligned}$$

onde C_3 é uma constante positiva que independe de ϵ e de n. Para estimar a integral em $\Omega_{3,\epsilon}$, note que

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{3,\epsilon}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(x_i)} dx \int_{\{y\in B_\epsilon(x_i); |x-y|\le\epsilon\}} |u_n(x)| \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy \qquad (1.20) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(x_i)} dx \int_{\{y\in B_\epsilon(x_i); |x-y|>\epsilon\}} |u_n(x)| \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy =: P_{\epsilon,n} + Q_{\epsilon,n}.\end{aligned}$$

Observemos ainda que, se

$$|x-y| < \epsilon \ \text{ e } \ |y-x_i| < \epsilon,$$

então $|x-x_i| < 2\epsilon$, pois

$$|x-x_i| = |x-y+y-x_i| \le |x-y| + |y-x_i| < \epsilon+\epsilon = 2\epsilon.$$

Portanto, argumentando como anteriormente, encontramos que

$$\begin{aligned}
P_{\epsilon,n} &\leq \epsilon^{-2}\|\nabla\psi\|_\infty^2 \int_{B_{2\epsilon}(x_i)} dx \int_{\{y\in B_\epsilon(x_i);|x-y|\leq\epsilon\}} \frac{|u_n(x)|^2}{|x-y|^{N+2s-2}}dy \\
&\leq \epsilon^{-2}\|\nabla\psi\|_\infty^2 \int_{B_{2\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^2 dx \int_{\{z\in\mathbb{R}^N;|x-y|\leq\epsilon\}} \frac{1}{|z|^{N+2s-2}}dz \\
&= C_4\epsilon^{-2s}\int_{B_{2\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^2dx, \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

onde C_4 é uma constante positiva que independe de ϵ e n. Observe que para todo $k>2$, vale

$$(\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(x_i)) \times B_\epsilon(x_i) \subset (B_{k\epsilon}(x_i)\times B_\epsilon(x_i)) \cup ((\mathbb{R}^N\setminus B_{k\epsilon}(x_i))\times B_\epsilon(x_i)).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} dx \int_{\{y\in B_\epsilon(x_i);|x-y|>\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dy \\
&\leq 4\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} dx \int_{\{y\in B_\epsilon(x_i);|x-y|>\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}dy \\
&\leq 4\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} dx \int_{\{z\in B_\epsilon(x_i);|z|>\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{1}{|z|^{N+2s}}dy \\
&= C_5\epsilon^{-2s}\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^2dx,
\end{aligned} \qquad (1.22)$$

onde C_5 é uma constante positiva que independe de ϵ e n. Por outro lado, se $|x-x_i|\geq k\epsilon$ e $|y-xi|<\epsilon$, então

$$|x-y| \geq |x-x_i| - |y-x_i| > |x-x_i| - \epsilon. \qquad (1.23)$$

Observe também que sendo $k>2$ e $|x-x_i|\geq k\epsilon$, então

$$|x-x_i| \geq k\epsilon > 2\epsilon \Rightarrow \frac{|x-x_i|}{2} > \epsilon$$

e assim,

$$|x-x_i| - \frac{|x-x_i|}{2} - \epsilon = \frac{|x-x_i|}{2} - \epsilon > 0 \Rightarrow |x-x_i| - \epsilon > \frac{|x-x_i|}{2}. \qquad (1.24)$$

Combinando (1.23) e (1.24), segue que

$$|x-y| > |x-x_i| - \epsilon > \frac{|x-x_i|}{2},$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} dx \int_{\{y \in B_\epsilon(x_i); |x-y|>\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy \\
&\leq 2^{N+2s} 4 \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} dx \int_{\{y \in B_\epsilon(x_i); |x-y|>\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{1}{|x-x_i|^{N+2s}} dy \\
&\leq 2^{N+2s+2} \epsilon^N \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^2 \frac{1}{|x-x_i|^{N+2s}} dx.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Usando desigualdade de Hölder com expoentes $2_s^*/(2_s^*-2)$ e $2_s^*/2$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} \frac{|u_n(x)|^2}{|x-x_i|^{N+2s}} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{2}{2_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} |x-x_i|^{-\frac{(N+2s)N}{2s}} dx \right)^{\frac{2s}{N}}
\end{aligned}$$

e mudando para coordenadas esféricas, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} \frac{|u_n(x)|^2}{|x-x_i|^{N+2s}} dx \leq (k\epsilon)^{-N} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^{2_s^*} \right)^{\frac{2}{2_s^*}}. \tag{1.26}$$

Combinando (1.25) e (1.26), tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} dx \int_{\{y \in B_\epsilon(x_i); |x-y|>\epsilon\}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x)-\psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dy \\
&\leq C_6 k^{-N} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^{2_s^*} \right)^{\frac{2}{2_s^*}},
\end{aligned} \tag{1.27}$$

onde C_6 é uma constante positiva que independe de ϵ e n. Juntando (1.22) com (1.27) e o fato que (u_n) é uma sequência limitada em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, encontramos uma constante $C_7 > 0$ independente de ϵ e n tal que

$$Q_{\epsilon,n} \leq C_5 \epsilon^{-2s} \int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^2 dx + C_7 k^{-N} \tag{1.28}$$

Tento em conta (1.17), (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) e (1.28), encontramos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \leq C_8 \epsilon^{-2s} \int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^2 dx + C_9 k^{-N}, \qquad (1.29)$$

onde C_8 e C_9 são constantes positivas que independem de ϵ e n. Recordando que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, que por sua vez é um espaço reflexivo, segue que $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Usando imersão compacta de Sobolev para os espaços fracionários, obtemos que $u_n \to u$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} C_8 \epsilon^{-2s} \int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u_n(x)|^2 dx + C_9 k^{-N} = C_8 \epsilon^{-2s} \int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^2 dx + C_9 k^{-N}.$$

Usando desigualdade de Hölder com expoentes $2^*_s/(2^*_s - 2)$ e $2^*_s/2$, resulta que

$$\begin{aligned} C_8 \epsilon^{-2s} \int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^2 dx &\leq C_8 \epsilon^{-2s} \left(\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^{2^*_s} dx \right)^{\frac{2}{2^*_s}} |B_{k\epsilon}(x_i)|^{\frac{2s}{N}} \\ &\leq C_{10} \epsilon^{-2s} (k\epsilon)^{2s} \left(\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^{2^*_s} dx \right)^{\frac{2}{2^*_s}} \\ &= C_{10} k^{2s} \left(\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^{2^*_s} dx \right)^{\frac{2}{2^*_s}}. \end{aligned}$$

e pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, tem-se

$$\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^{2^*_s} dx \to 0, \quad \text{quando} \ \ \epsilon \to 0.$$

Logo,

$$C_8 \epsilon^{-2s} \int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^2 dx + C_9 k^{-N} \leq C_{10} k^{2s} \left(\int_{B_{k\epsilon}(x_i)} |u(x)|^{2^*_s} dx \right)^{\frac{2}{2^*_s}} + C_9 k^{-N} \to C_9 k^{-N}$$

quando $\epsilon \to 0$. Decorre daí que

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \lim_{k\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\epsilon(x) - \psi_\epsilon(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 1.3. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então a sequência (φu_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Temos

$$
\begin{aligned}
\|\varphi u_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\varphi(x)u_n(x)-\varphi(y)u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\varphi(x)u_n(x)-\varphi(y)u_n(x)+\varphi(y)u_n(x)-\varphi(y)u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leq 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\psi(y)|^2\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leq 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + C_1\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&= 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + C_1\|u_n\|^2.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $N/(N-2s)$ e $N/2s$ na primeira parcela da desigualdade acima, obtemos

$$\|\varphi u_n\|^2 \leq |u_n|_{2_s^*}^2\|\varphi\|^{N/s} + C_2\|u_n\|^2,$$

e pela imersão contínua de Sobolev dos espaços fracionário, temos

$$\|\varphi u_n\|^2 \leq C_1\|u_n\|^2 + C_2\|u_n\|^2.$$

Assim, a limitação de (φu_n) em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ segue da limitação de (u_n) em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. ■

O próximo resultado é uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions para o laplaciano fracionário. Para um estudo mais detalhado à respeito do referido resultado, consulte [5] e suas referências.

Lema 1.4. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos que*

$$|(-\Delta)^{s/2}u_n|^p \rightharpoonup \mu$$

e

$$|u_n|^{p_s^*} \rightharpoonup \nu$$

no sentido das medidas, onde μ e ν são duas medidas não-negativas em $\mathbb{R}^N$. Então, existe um conjunto de índices J, enumerável, uma família de pontos $(x_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}^N$ e $(\mu_j)_{j\in J}, (\nu_j)_{j\in J} \subset (0,\infty)$ tais que

$$\nu = |u|^{p_s^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j} \tag{1.30}$$

e

$$\mu \geq |(-\Delta)^{s/2} u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}. \tag{1.31}$$

Além disso, vale a seguinte relação

$$\mu_j \geq S \nu_j^{\frac{p}{p_s^*}}, \quad \forall j \in J.$$

No próximo resultado usaremos as ideias de C. Alves em [2, Lema 2.5] com as devidas adaptações.

Lema 1.5. *Seja J o conjunto de índices dado no Lema 1.4 e $(u_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência (PS) para o funcional I_∞. Então, vale a seguinte relação $S\nu_j^{2/2_s^*} \leq \nu_j$. Em particular, $\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{2/2_s^*} < \infty$ e consequentemente J é finito.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência (PS) para I_∞ e $\psi_\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ a função dada no enunciado do Lema 1.2. Segue do Lema 1.3 que $(\psi_\rho u_n)$ é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e como (u_n) é uma sequência (PS) para I_∞, temos

$$I'_\infty(u_n)(\psi_\rho u_n) \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{1.32}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} I'_\infty(u_n)(\psi_\rho u_n) &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(x) \frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^{2N}} \psi_\rho(y) \frac{(u_n(x)-u_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} \psi_\rho dx, \end{aligned}$$

que por sua vez é equivalente a

$$\begin{aligned} I'_\infty(u_n)(\psi_\rho u_n) &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2\psi_\rho dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*}\psi_\rho dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &= I'_\infty(u_n)(\psi_\rho u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*}\psi_\rho dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2\psi_\rho dx. \qquad (1.33) \end{aligned}$$

Desde que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, temos $(|u_n|^{2_s^*})$ limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e assim, a menos de identificação, $(|u_n|^{2_s^*})$ é uma sequência limitada em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, onde $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ denota o conjunto das medidas de Radon. Daí, a menos de subsequência,

$$|u_n|^{2_s^*} \rightharpoonup \hat{\nu} \ \text{ em } \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} w dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\nu} w dx, \quad \forall w \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Analogamente, justifica-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 w dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\mu} w dx, \quad \forall w \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Do Lema 1.4, as medidas $\hat{\nu}$, $\hat{\mu}$ são da seguinte forma:

$$\hat{\nu} = |u|^{2_s^*} + \nu \ \text{ e } \ \hat{\mu} \geq |(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \mu,$$

onde $\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$, $\mu = \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$ e $\nu_j, \mu_j > 0$, com J no máximo enumerável. Temos então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} w dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} w dx + \int_{\mathbb{R}^N} w d\nu,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 w dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\mu} w dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u|^2 w dx + \int_{\mathbb{R}^N} w d\mu.$$

Desde que $\psi_\rho \in C_0(\mathbb{R}^M)$, então existem medidas ν e μ, tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*}\psi_\rho dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\psi_\rho dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\rho d\nu \tag{1.34}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2\psi_\rho dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\mu}\psi_\rho dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u|^2\psi_\rho dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\rho d\mu. \tag{1.35}$$

Então, de (1.32), (1.33), (1.34) e (1.35), obtemos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\psi_\rho dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\rho d\nu - \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u|^2\psi_\rho dx - \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\rho d\mu
\end{aligned}$$

e lembrando que $supp(\psi_\rho) \subset B_\rho(x_j)$, temos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leq \int_{B_\rho(x_j)} |u|^{2_s^*}\psi_\rho dx + \int_{B_\rho(x_j)} \psi_\rho d\nu - \int_{B_\rho(x_j)} |(-\Delta)^{s/2}u|^2\psi_\rho dx - \int_{B_\rho(x_j)} \psi_\rho d\mu.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Observemos que para cada $\rho > 0$,

$$\int_{B_\rho(x_j)} |u|^{2_s^*}\psi_\rho dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*}\psi_\rho \chi_{B_\rho(x_j)} dx$$

e

$$\left| |u(x)|^{2_s^*}\psi_\rho(x)\chi_{B_\rho(x_j)}(x) \right| \leq |u(x)|^{2_s^*} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, se $\rho \to 0$, temos

$$|u(x)|^{2_s^*}\psi_\rho(x)\chi_{B_\rho(x_j)}(x) \to 0 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{B_\rho(x_j)} |u|^{2_s^*}\psi_\rho dx = 0. \tag{1.37}$$

De maneira análoga ao que fizemos anteriormente, mostra-se que

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{B_\rho(x_j)}|(-\Delta)^{s/2}u|^2\psi_\rho dx=0. \tag{1.38}$$

Notemos ainda que, para cada $\rho>0$, tem-se $|\psi_\rho(x)\chi_{B_\rho(x_j)}(x)|\le 1$ e que

$$\psi_\rho(x)\chi_{B_\rho(x_j)}(x)\to\chi_{\{x_j\}}\ \text{ quando }\ \rho\to 0.$$

Desde que as medidas de Radon são finitas, temos que 1 é integrável com relação a ν. Portanto, do Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{B_\rho(x_j)}\psi_\rho d\nu=\lim_{\rho\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_\rho\chi_{B_\rho(x_j)}d\nu=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\{x_j\}}d\nu=\int_{\{x_j\}}d\nu. \tag{1.39}$$

De maneira análoga, mostra-se também que

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{B_\rho(x_j)}\psi_\rho d\mu=\lim_{\rho\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\psi_\rho\chi_{B_\rho(x_j)}d\mu=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\{x_j\}}d\mu=\int_{\{x_j\}}d\mu. \tag{1.40}$$

Agora, nosso objetivo será mostrar que

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2N}}u_n(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right]=0. \tag{1.41}$$

De fato, escrevendo $T=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2N}}u_n(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$, temos

$$|T|\ \le\ \int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u_n(x)-u_n(y)||u_n(x)||\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y)|}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.$$

Logo, fazendo uso da desigualdade de Hölder, encontramos

$$\begin{aligned}|T| &\le \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac12}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}}|u_n(x)|^2\frac{|\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac12}\\ &= \|u_n\|\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}}|u_n(x)|^2\frac{|\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Desde que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, existe $C>0$ tal que $\|u_n\|\le C$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Daí, decorre que

$$|T| \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} |u_n(x)|^2 \frac{|\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}},$$

e aplicando o Lema 1.2, temos que $\lim\limits_{\rho\to 0}\limsup\limits_{n\to\infty}|T| = 0$, ou seja,

$$\lim_{\rho\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2N}} u_n(x)\frac{(u_n(x)-u_n(y))(\psi_\rho(x)-\psi_\rho(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right] = 0,$$

mostrando que (1.41) de fato ocorre. Assim, passando ao limite de $\rho \to 0$ em (1.36), de (1.37), (1.38), (1.39), (1.40) e (1.41), segue que

$$0 \leq \int_{\{x_j\}} d\nu - \int_{\{x_j\}} d\mu,$$

ou seja,

$$\mu(\{x_j\}) \leq \nu(\{x_j\}). \tag{1.42}$$

Além disso, temos

$$\nu(\{x_j\}) = \int_{\{x_j\}} d\nu = \int_{\{x_j\}} \psi_\rho d\nu = \nu_j\psi_\rho(x_j) = \nu_j \tag{1.43}$$

e da mesma forma

$$\mu(\{x_j\}) = \int_{\{x_j\}} d\mu = \int_{\{x_j\}} \psi_\rho d\mu = \mu_j\psi_\rho(x_j) = \mu_j.$$

Do Lema 1.4, sabemos que $S\nu_j^{2/2_s^*} \leq \mu_j$ e por (1.42), obtemos

$$S\nu_j^{2/2_s^*} \leq \mu_j \leq \nu_j.$$

Sendo $\nu_j > 0$, obtemos $S^{N/2s} \leq \nu_j$, implicando que $\nu_j \nrightarrow 0$. Como por (1.30) e (1.43) tem-se que $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\nu_j^{2/2_s^*} < \infty$, concluimos que J é finito. ■

Na demonstração do resultado a seguir, seguiremos as mesmas ideias do Lema 1.2.

Lema 1.6. *Seja $v_0 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ em $B_1(0)$ e $\psi = 0$ em $B_2^c(0)$. Definamos a função $\psi_n(x) = \psi\left(\dfrac{x}{\tilde{R}_n}\right)$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 0, \tag{1.44}$$

onde $\tilde{R}_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Demonstração: Inicialmente, notemos que pela definição de ψ, temos $\psi_n = 1$ em $B_{\tilde{R}_n}(0)$ e $\psi_n = 0$ em $B^c_{2\tilde{R}_n}(0)$. Além disso, observe que podemos escrever $\mathbb{R}^{2N}$ como:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^{2N} &= ((\mathbb{R}^N \setminus B_{2\tilde{R}_n}(0)) \times (\mathbb{R}^N \setminus B_{2\tilde{R}_n}(0))) \cup (B_{2\tilde{R}_n}(0) \times \mathbb{R}^N) \cup ((\mathbb{R}^N \setminus B_{2\tilde{R}_n}(0)) \times B_{2\tilde{R}_n}(0)) \\ &= \Omega_{1,n} \cup \Omega_{2,n} \cup \Omega_{3,n}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \int_{\Omega_{1,n}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + \int_{\Omega_{2,n}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &+ \int_{\Omega_{3,n}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy.\end{aligned} \tag{1.45}$$

No que segue, iremos estimar cada uma das integrais em (1.45). Desde que $\psi_n = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{2\tilde{R}_n}(0)$, temos

$$\int_{\Omega_{1,n}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 0. \tag{1.46}$$

Pela definição de $\Omega_{2,n}$, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{2,n}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{y \in \mathbb{R}^N; |x-y| \leq \tilde{R}_n\}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &+ \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{y \in \mathbb{R}^N; |x-y| > \tilde{R}_n\}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy,\end{aligned}$$

e sendo $0 \leq \psi_n \leq 1$ e $|\nabla \psi_n| \leq \dfrac{C}{\tilde{R}_n}$, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{2,n}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x)-\psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\
&\leq C\tilde{R}_n^{-2} \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{y\in\mathbb{R}^N; |x-y|\leq \tilde{R}_n\}} \frac{|v_0(x)|^2}{|x-y|^{N+2s-2}} dxdy \\
&+ 4\int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{y\in\mathbb{R}^N; |x-y|> \tilde{R}_n\}} \frac{|v_0(x)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\
&\leq C_1\tilde{R}_n^{-2s} \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} |v_0(x)|^2 dx + C_2\tilde{R}_n^{-2s} \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} |v_0(x)|^2 dx \\
&= C_3\tilde{R}_n^{-2s} \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} |v_0(x)|^2 dx,
\end{aligned} \tag{1.47}$$

onde $C_3 > 0$ independe de n. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{3,n}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x)-\psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{y\in B_{\tilde{R}_n(0)}; |x-y|\leq \tilde{R}_n\}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x)-\psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{2\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{y\in B_{\tilde{R}_n}; |x-y|> \tilde{R}_n\}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x)-\psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy =: A_n + B_n.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Agora, observemos que se $|x-y| \leq \tilde{R}_n$ e $|y| < 2\tilde{R}_n$, então $|x| < 3\tilde{R}_n$. Assim, argumentando como anteriormente, encontramos que

$$\begin{aligned}
A_n &\leq C\tilde{R}_n^{-2} \int_{B_{3\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{y\in B_{2\tilde{R}_n}(0); |x-y|\leq \tilde{R}_n\}} \frac{|v_0(x)|^2}{|x-y|^{N+2s-2}} dxdy \\
&\leq C\tilde{R}_n^{-2} \int_{B_{3\tilde{R}_n}(0)} \int_{\{z\in\mathbb{R}^N; |z|\leq \tilde{R}_n\}} \frac{|v_0(x)|^2}{|x-y|^{N+2s-2}} dzdx \\
&= C_4\tilde{R}_n^{-2s} \int_{B_{3\tilde{R}_n}(0)} |v_0(x)|^2 dx,
\end{aligned} \tag{1.49}$$

onde $C_4 > 0$ não depende de n. Observemos também que para todo $k > 4$, vele:

$$((\mathbb{R}^N \setminus B_{2\tilde{R}_n(0)}) \times B_{2\tilde{R}_n}(0)) \subset (B_{k\tilde{R}_n}(0) \times B_{2\tilde{R}_n}(0)) \cup ((\mathbb{R}^N \setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)) \times B_{2\tilde{R}_n}(0)).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{k\tilde{R}_n}(0)}\int_{\{y\in B_{2\tilde{R}_n}(0);|x-y|>\tilde{R}_n\}}|v_0(x)|^2\frac{|\psi_n(x)-\psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&\leq 4\int_{B_{k\tilde{R}_n}(0)}\int_{\{y\in B_{2\tilde{R}_n}(0);|x-y|>\tilde{R}_n\}}\frac{|v_0(x)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&\leq 4\int_{B_{k\tilde{R}_n}(0)}\int_{\{z\in\mathbb{R}^N;|z|>\tilde{R}_n\}}\frac{|v_0(x)|^2}{|z|^{N+2s}}dxdy\\
&= C_5\tilde{R}_n^{-2s}\int_{B_{k\tilde{R}_n}(0)}|v_0(x)|^2dx,
\end{aligned}\tag{1.50}$$

onde $C_5>0$ não depende de n. Por outro lado, se $|x|>k\tilde{R}_n$ e $|y|<2\tilde{R}_n$, então

$$\begin{aligned}
|x-y| &\geq |x|-|y|=\frac{|x|}{2}+\frac{|x|}{2}-|y|\geq\frac{|x|}{2}+k\tilde{R}_n-2\tilde{R}_n\\
&> \frac{|x|}{2}+4\tilde{R}_n-2\tilde{R}_n=\frac{|x|}{2}+2\tilde{R}_n>\frac{|x|}{2}.
\end{aligned}$$

Como consequência,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)}\int_{\{y\in B_{2\tilde{R}_n}(0);|x-y|>\tilde{R}_n\}}|v_0(x)|^2\frac{|\psi_n(x)-\psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&\leq 2^{N+2s+2}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)}\int_{\{y\in B_{2\tilde{R}_n}(0);|x-y|>\tilde{R}_n\}}\frac{|v_0(x)|^2}{|x|^{N+2s}}dxdy\\
&= 2^{N+2s+2}(2\tilde{R}_n)^N\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)}\int_{\{y\in B_{2\tilde{R}_n}(0);|x-y|>\tilde{R}_n\}}\frac{|v_0(x)|^2}{|x|^{N+2s}}dxdy
\end{aligned}$$

e usando desigualdade de Hölder com expoentes $2_s^*/(2_s^*-2)$ e $2_s^*/2$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)}\int_{\{y\in B_{2\tilde{R}_n}(0);|x-y|>\tilde{R}_n\}}|v_0(x)|^2\frac{|\psi_n(x)-\psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\\
&\leq 2^{2N+2s+2}\tilde{R}_n^N\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)}|v_0(x)|^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)}|x|^{-\frac{(N+2s)N}{2s}}dx\right)^{\frac{2s}{N}}\\
&= C_6\tilde{R}_n^N(k\tilde{R}_n)^{-N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}_n}(0)}|v_0(x)|^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}}\\
&= C_6k^{-N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{k\tilde{R}}(0)}|v_0(x)|^{2_s^*}dx\right)^{\frac{2}{2_s^*}},
\end{aligned}\tag{1.51}$$

onde $C_6>0$ não depende de n. Combinando (1.50) e (1.51) e o fato que $v_0\in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, encontramos $C_7 > 0$ independente de n tal que

$$B_n \leq C_5 \tilde{R}_n^{-2s} \int_{B_{k\tilde{R}_n}(0)} |v_0(x)|^2 dx + C_7 k^{-N}. \tag{1.52}$$

Tendo em conta (1.45), (1.46), (1.47), (1.48), (1.49) e (1.52), temos

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \leq C_8 \tilde{R}_n^{-2s} \int_{B_{k\tilde{R}_n}(0)} |v_0(x)|^2 dx + C_9 k^{-N}, \tag{1.53}$$

onde $C_8, C_9 > 0$ não depende de n.

Agora, observemos que

$$C_8 \tilde{R}_n^{-2s} \int_{B_{k\tilde{R}_n}(0)} |v_0(x)|^2 dx + C_9 k^{-N} \to C_8 \tilde{R}_n^{-2s} \int_{\mathbb{R}^N} |v_0(x)|^2 dx \leq C_{10} \tilde{R}_n^{-2s} \|v_0\|^2$$

quando $k \to \infty$. Disso decorre que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \leq \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} C_{10} \tilde{R}_n^{-2s} \|v_0\|^2 = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_0(x)|^2 \frac{|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = 0$$

como queríamos mostrar. ∎

Lema 1.7. *(Lema Principal) Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_∞ com $u_n \rightharpoonup 0$ e $u_n \nrightarrow 0$. Então, existem sequências $(R_n) \subset \mathbb{R}$, $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, $v_0 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ solução não-trivial para o problema (P_∞) e uma sequência (w_n) o qual é $(PS)_{\tilde{c}}$ para I_∞ tais que, para uma subsequência de (u_n), temos*

$$w_n(x) = u_n(x) - R_n^{(N-2s)/2} v_0(R_n(x - x_n)) + o_n(1).$$

Demonstração: Seja $(u_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I_∞, ou seja,

$$I_\infty(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'_\infty(u_n) \to 0. \tag{1.54}$$

Do Lema 1.1 (a), temos (u_n) limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $u_n \rightharpoonup 0$ e $u_n \nrightarrow 0$, segue do ítem (c) do Lema 1.1 que

$$c \geq \frac{s}{N} S^{N/2s}.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} I_\infty(u_n) - \frac{1}{2_s^*} I'_\infty(u_n) u_n &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx - \frac{1}{2_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx \\ &- \frac{1}{2_s^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \frac{s}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx, \end{aligned}$$

tendo em conta (1.54), encontramos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = c,$$

de onde segue que

$$\lim_{n \to} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \frac{N}{s} c \geq S^{N/2s}. \tag{1.55}$$

Desde que $\bar{B}_2(0) \subset \mathbb{R}^N$ é compacto e $\bigcup_{y \in \bar{B}_2(0)} B_1(y)$ é uma cobertura aberta para $\bar{B}_2(0)$, então existe $L \in \mathbb{N}$, tal que

$$\bar{B}_2(0) \subset \bigcup_{k=1}^{L} B_1(y_k)$$

e, em particular,

$$B_2(0) \subset \bigcup_{k=1}^{L} B_1(y_k).$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{R_n^{-1}}(y)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \frac{S^{N/2s}}{2L},$$

onde $(R_n) \subset \mathbb{R}^+$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$. Para isto, fixemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos a função concentração de Levy

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(y)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $Q_n(\lambda)$ é contínua (veja Apêndice A, Lema $A.1$). Além disso, obsevemos também que

$$\lim_{\lambda \to 0} Q_n(\lambda) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e da definição de limite, existe $\delta > 0$, tal que

$$Q_n(\lambda) < \frac{S^{N/2s}}{2L}, \quad \forall \lambda \in (0, \delta), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.56}$$

Por outro lado, observando que $2L > 1$, obtemos de (1.55) que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx \geq S^{N/2s} > \frac{S^{N/2s}}{2L},$$

e portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx > \frac{S^{N/2s}}{2L}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tomando arbitrariamente $y \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{B_\lambda(y)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx > \frac{S^{N/2s}}{2L}, \quad \forall n \geq n_0,$$

ou seja, existe $k > 0$, tal que

$$\int_{B_\lambda(y)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx > \frac{S^{N/2s}}{2L}, \quad \forall \lambda > k, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim,

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(y)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx \geq \int_{B_\lambda(y)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx > \frac{S^{N/2s}}{2L}, \ \forall \lambda > k, \ \forall n \geq n_0$$

e, sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$Q_n(\lambda) > \frac{S^{N/2s}}{2L}, \quad \forall \lambda > k, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.57}$$

Segue de (1.56), (1.57) e do Teorema do Valor Intermediário que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $R_n \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$Q_n(R_n^{-1}) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{R_n^{-1}}(y)} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \frac{S^{N/2s}}{2L}.$$

Da definição de supremo podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, uma sequência $(y_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^N$, tal que

$$\lim_{k \to \infty} \int_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \frac{S^{N/2s}}{2L}. \tag{1.58}$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $(y_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois supondo o contrário, a menos de subsequência teriamos

$$\lim_{k \to \infty} |y_{n,k}| = \infty.$$

Dessa forma, definindo a sequência

$$f_{n,k}(x) = |(-\Delta)^{s/2} u_n(x)|^2 \chi_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})}(x),$$

encontramos

$$f_{n,k}(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

e

$$|f_{n,k}| \leq |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

onde $|(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{k \to \infty} \int_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_{n,k}|^2 dx = 0,$$

o que contradiz (1.58).

Desde que $(y_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, passando a uma subsequência se necessário, temos para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_{n,k} \to x_n$ em $\mathbb{R}^N$. Assim, decorre que

$$|(-\Delta)^{s/2}u_n(x)|^2\chi_{B_{R_n^{-1}(y_{n,k})}}(x) \to |(-\Delta)^{s/2}u_n(x)|^2\chi_{R_n^{-1}(x_n)}(x) \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

e

$$\Big||(-\Delta)^{s/2}u_n|^2\chi_{B_{R_n^{-1}(y_{n,k})}}\Big| \leq |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

onde $|(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B_{R_n^{-1}(y_{n,k})}} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 dx = \int_{B_{R_n^{-1}(x_n)}} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 dx$$

e de (1.58) juntamente com a unicidade do limite, concluimos que

$$\int_{B_{R_n^{-1}(x_n)}} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 dx = \frac{S^{N/2s}}{2L} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_{R_n^{-1}(y)}} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $(R_n) \subset \mathbb{R}^+$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função

$$v_n(x) = R_n^{(2s-N)/2}u_n\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right).$$

Provaremos que

$$\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx = \frac{S^{N/2s}}{2L} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx.$$

De fato, tomando arbitrariamente $y \in \mathbb{R}^N$ e fazendo mudança de variável, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_1(y)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx &= R_n^{2s-N}\int_{B_1(y)} \left|(-\Delta)^{s/2}u_n\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)\right|^2 dx \\ &= \int_{B_{R_n^{-1}(y')}} |(-\Delta)^{s/2}u_n(z)|^2 dz, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad y' = x_n + \frac{y}{R_n},\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}\frac{S^{N/2s}}{2L} = \sup_{y'\in\mathbb{R}^N}\int_{B_{R_n^{-1}}(y')}|(-\Delta)^{s/2}u_n|^2dx &= \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_{R_n^{-1}}(x_n+\frac{y}{R_n})}|(-\Delta)^{s/2}u_n|^2dx\\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|(-\Delta)^{s/2}v_n|^2dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $z = \dfrac{x}{R_n} + x_n$ e observando que para todo $x \in B_1(0)$ temos $z \in B_{R_n^{-1}}(x_n)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)}|(-\Delta)^{s/2}v_n(x)|^2dx &= R_n^{2s-N}\int_{B_1(0)}\left|(-\Delta)^{s/2}u_n\left(\frac{x}{R_n}+x_n\right)\right|^2dx\\ &= R_n^{2s-N}\int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)}R_n^{-2s}|(-\Delta)^{N/2s}u_n(z)|^2R_n^Ndz\\ &= \int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)}|(-\Delta)^{s/2}u_n(z)|^2dz.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{S^{N/2s}}{2L} = \int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)}|(-\Delta)^{s/2}u_n|^2dx = \int_{B_1(0)}|(-\Delta)^{s/2}v_n|^2dx. \tag{1.59}$$

Agora, para cada $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, definamos a seguinte sequência

$$\tilde{\Phi}_n(x) = R_n^{(N-2s)/2}\Phi(R_n(x-x_n)).$$

Fazendo mudança de variável, por um cálculo direto, obtemos $\|\tilde{\Phi}_n\| = \|\Phi\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e com isso concluimos também que $(\tilde{\Phi}_n)$ é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

Nosso próximo objetivo será verificar a validade das seguintes identidades:

$$\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{s/2}u_n(-\Delta)^{s/2}\tilde{\Phi}_ndx = \int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi dx \tag{1.60}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*-2}u_n\tilde{\Phi}_ndx = \int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{2_s^*-2}v_n\Phi dx. \tag{1.61}$$

Para verificar a primeira identidade, observemos que pela definição de $\tilde{\Phi}_n$ e por mudança de variável, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \tilde{\Phi}_n(x) dx &= R_n^{(N-2s)/2} \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n(x) (-\Delta)^{s/2} \Phi(R_n(x - x_n)) dx \\
&= R_n^{(2s-N)/2} \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n \left(\frac{z}{R_n} + x_n \right) (-\Delta)^{s/2} \Phi(z) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} v_n(z) (-\Delta)^{s/2} \Phi(z) dz,
\end{aligned}$$

e portanto (60) é válida.

Para verificar a validade da segunda identidade, notemos que pela definição de $\tilde{\Phi}_n$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{2_s^*-2} u_n(x) \tilde{\Phi}_n(x) dx = R_n^{(N-2s)/2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{2_s^*-2} u_n(x) \Phi(R_n(x - x_n)) dx.$$

Fazendo $z = R_n(x - x_n)$ e usando a definição de v_n, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{2_s^*-2} u_n(x) \tilde{\Phi}_n(x) dx \\
&= R_n^{(N-2s)/2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| u_n \left(\frac{z}{R_n} + x_n \right) \right|^{2_s^*-2} u_n \left(\frac{z}{R_n} + x_n \right) \Phi(z) R_n^{-N} dz \\
&= R_n^{(N-2s)/2} \int_{\mathbb{R}^N} R^{2s} |v_n(z)|^{2_s^*-2} R_n^{(N-2s)/2} v_n(z) \Phi(z) R_n^{-N} dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(z)|^{2_s^*-2} v_n(z) \Phi(z) dz,
\end{aligned}$$

e portanto (61) também é verdadeira.

Já mostramos que

$$\int_{B_1(y)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx = \int_{B_{R_n^{-1}}(y')} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

onde $y' = \dfrac{y}{R_n} + x_n$, e desde que $\mathbb{R}^N$ é invariante por translação e dilatação, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx.$$

Da mesma forma concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_\infty(v_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx = I_\infty(u_n) \end{aligned}$$

e de (1.54), segue que

$$I_\infty(v_n) \to c \;\text{ quando }\; n \to +\infty.$$

Além disso, por (60) e (61), temos

$$\begin{aligned} I'_\infty(u_n)\tilde{\Phi}_n &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \tilde{\Phi}_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \tilde{\Phi}_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} v_n (-\Delta)^{s/2} \Phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*-2} v_n \Phi dx = I'_\infty(v_n)\Phi, \end{aligned}$$

logo, para todo $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\Phi\| \leq 1$, obtemos

$$|I'_\infty(v_n)\Phi| = |I'_\infty(u_n)\tilde{\Phi}_n| \leq \|I'_\infty(u_n)\|_{D'}\|\tilde{\Phi}_n\| = \|I'_\infty(u_n)\|_{D'}\|\Phi\| \leq \|I'_\infty(u_n)\|_{D'}.$$

Daí,

$$0 \leq \|I'_\infty(v_n)\|_{D'} = \sup_{\substack{\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|\Phi\| \leq 1}} |I'_\infty(v_n)\Phi| \leq \|I'_\infty(u_n)\|_{D'}$$

e passando ao limite de $n \to +\infty$, segue que

$$\|I'_\infty(v_n)\|_{D'} \to 0.$$

Do que foi exposto até aqui, (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞ e, portanto, do ítem (a) do Lema 1.1, segue que (v_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, existe $v_0 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e pelo ítem (c) do Lema 1.1, segue que v_0 é ponto crítico do funcional I_∞.

Como consequência do Lema 1.4, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*} \phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{2_s^*} \phi dx + \sum_{j \in J} \phi(x_j)\nu_j, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{1.62}$$

para alguma família $\{x_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}^N$ e para alguma família $\{\nu_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}^+$. Do Lema 1.5, sabemos que J é finito. Daqui em diante, denotemos por $J = \{1, 2, ..., m\}$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ o conjunto definido por

$$\Gamma = \{x_j \in \{x_j\}_{j\in J}; |x_j| > 1\} \quad (x_j \quad \text{dado por} \quad (1.62)).$$

Observe que podemos considerar x_j, $j = 1, ..., m$, pertencentes a Γ, pois caso contrário, escolhemos o ponto de menor distância para zero neste conjunto. Nosso objetivo é mostrar que $v_0 \neq 0$. Para isto, suponhamos por contradição que $v_0 = 0$. Assim, de (1.62) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*} \phi dx \to 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, x_2, ..., x_m\}). \tag{1.63}$$

Consideremos a sequência $\phi_n = \phi v_n$ com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, x_2, ..., x_m\})$. Do Lema 1.18, segue-se que (ϕ_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Disso, decorre que $I'_\infty(v_n)\phi_n = o_n(1)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v_n(x) - v_n(y))(\phi_n(x) - \phi_n(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*-2} v_n \phi_n dx = o_n(1)$$

que por sua vez é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v_n(x) - v_n(y))(\phi(x)v_n(x) - \phi(y)v_n(y))}{|x-y|^{N+2s}} dxdy - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*-2} v_n (\phi v_n) dx = o_n(1).$$

Somando e subtraindo o termo $\phi(y)v_n(x)$ na primeira parcela da igualdade acima, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(v_n(x) - v_n(y))[\phi(x)v_n(x) - \phi(y)v_n(x) + \phi(y)v_n(x) - \phi(y)v_n(y)]}{|x-y|^{N+2s}} dxdy$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*} \phi dx = o_n(1),$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} v_n(x)\frac{(v_n(x)-v_n(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + \int_{\mathbb{R}^{2N}} \phi(y)\frac{(v_n(x)-v_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*}\phi dx = o_n(1)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^{2N}} \phi(y)\frac{|v_n(x)-v_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*}\phi dx - \int_{\mathbb{R}^{2N}} v_n(x)\frac{(v_n(x)-v_n(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + o_n(1)\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*}\phi dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^{2N}} v_n(x)\frac{(v_n(x)-v_n(y))(\phi(x)-\phi(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right| + o_n(1) \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*}\phi dx\right| + \|v_n\|\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_n(x)|^2\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Agora, focaremos nossa atenção para a última parcela da desigualdade acima. Nosso objetivo é mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_n(x)|^2\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = o_n(1). \tag{1.65}$$

Porque supondo que (1.65) ocorre, teremos de (1.63), (1.64) e do fato de (v_n) ser limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \phi(y)\frac{|v_n(x)-v_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \to 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, ..., x_m\}). \tag{1.66}$$

Para esta finalidade, consideremos $R > 0$, tal que $supp(\phi) \subset B_R(0)$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2N}} |v_n(x)|^2\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &\leq \int_{[B_R(0)]^2} |v_n(x)|^2\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&= \int_{B_R(0)}\int_{B_R(0)} |v_n(x)|^2\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leq C\int_{B_R(0)}\int_{B_R(0)} \frac{|v_n(x)|^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&\leq CR^{N-2s}\int_{B_R(0)} |v_n(x)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Desde que (v_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, segue que (v_n) é limitada em $D^{s,2}(B_R(0))$ e usando a imersão compacta $D^{s,2}(B_R(0)) \hookrightarrow L^2(B_R(0))$ segue que, a menos de subsequência, $v_n \to 0$ em $L^2(B_R(0))$. Assim, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\int_{B_R(0)} |v_n(x)|^2 dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.68}$$

Logo, de (1.67) e (1.68), obtemos que (1.65) de fato ocorre.

Seja $\rho \in \mathbb{R}$ verificando a desigualdade $0 < \rho < \min\{dist(\Gamma, \bar{B}_1(0), 1)\}$. Mostraremos que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx \to 0. \tag{1.69}$$

Consideremos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e $\phi(x) = 1$ se $x \in B_{1+\rho}(0)$. Fazendo $\tilde{\phi} = \phi|_{\mathbb{R}^N \setminus \{x_1, \dots, x_m\}}$, segue de (1.66) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 \tilde{\phi} dx \to 0.$$

Desde que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx \leq \int_{B_{1+\rho}(0)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx dt \\
&= \int_{B_{1+\rho}(0)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 \tilde{\phi} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 \tilde{\phi} dx,
\end{aligned}$$

segue que (1.69) ocorre.

Agora, consideremos a função $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $0 \leq \Phi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e tal que

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_{1+\frac{\rho}{3}}(0), \\ 0, & x \in B^c_{1+\frac{2\rho}{3}}(0). \end{cases}$$

Consideremos também a sequência (Φ_n) dada por $\Phi_n(x) = \Phi(x)v_n(x)$ e observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx &= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}(\Phi v_n)|^2 dx \\
&\leq 4\int_{[B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\Phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&+ 4\int_{[B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)]^2} \Phi^2(x)\frac{(v_n(x)-v_n(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy.
\end{aligned}$$

Uma vez que $0 \leq \Phi(x) \leq 1$, segue que $|\Phi|^2 \leq 1$. Assim, decorre que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx \\
&\leq 4\int_{[B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\Phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy + 4\int_{[B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)]^2} \frac{(\Phi(x)-\Phi(x))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&= 4\int_{[B_{1+\rho}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\Phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy - 4\int_{[B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\Phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\
&+ 4\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx.
\end{aligned}$$

Se $(x, y) \in B_{1+\frac{\rho}{3}}(0) \times B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)$, então $\Phi(x) = 1$ e $\Phi(y) = 1$. Daí, temos $\Phi(x) - \Phi(y) = 0$ e consequentemente

$$\int_{[B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{[B_{1+\rho}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\Phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy &\leq C\int_{B_{1+\rho}(0)} dx \int_{B_{1+\rho}(0)} v_n^2(x)\frac{1}{|x-y|^{N+2s}}dy \\
&\leq \tilde{C}\int_{B_{1+\rho}(0)} v_n^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Recordando que $v_n \rightharpoonup 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e usando a imersão compacta $D^{s,2}(B_{1+\rho}(0)) \hookrightarrow L^2(B_{1+\rho}(0))$ segue que, a menos de subsequência, $v_n \to 0$ em $L^2(B_{1+\rho}(0))$, ou seja,

$$\int_{B_{1+\rho}(0)} v_n^2(x)dx \to 0$$

e consequentemente,

$$\int_{[B_{1+\rho}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\Phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \to 0. \tag{1.70}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx \leq 4\int_{[B_{1+\rho}(0)]^2} v_n^2(x)\frac{(\Phi(x)-\Phi(y))^2}{|x-y|^{N+2s}}dxdy \\ &+ \quad 4\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Assim, passando ao limite de $n \to \infty$ na desigualdade acima, segue de (1.69) e (1.70) que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx \to 0. \tag{1.71}$$

Agora, note que sendo (v_n) limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, tem-se do Lema 1.3 que (Φ_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e disso, segue que

$$I'_\infty(v_n)\Phi_n = o_n(1)$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*-2}v_n\Phi_n dx = o_n(1).$$

Da definição de Φ temos

$$\int_{B_{1+\rho}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{2/s}\Phi_n dx - \int_{B_{1+\rho}(0)} |v_n|^{2_s^*-2}v_n\Phi_n dx = o_n(1),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} &\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx \\ &- \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\Phi dx - \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\Phi dx = o_n(1). \end{aligned}$$

Entretanto, em $B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)$ temos que $\Phi = 1$ e assim, $\Phi_n = v_n$. Disso, resulta que

$$\begin{aligned}&\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx + \int_{B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx \\ &- \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\Phi dx - \int_{B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\Phi dx = o_n(1).\end{aligned} \tag{1.72}$$

Afirmamos que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx = o_n(1). \tag{1.73}$$

Com efeito, temos

$$\left|\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx\right| \;\leq\; \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}v_n||(-\Delta)^{s/2}\Phi_n| dx$$

e usando desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx\right| \\ &\leq \left(\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Desde que (v_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e (1.71) ocorre, segue da desigualdade acima que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\Phi_n dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Além disso, observemos também que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\Phi dx = o_n(1). \tag{1.74}$$

De fato, considerando $\bar{\Phi} = \Phi|_{\mathbb{R}^N\setminus\{x_1,...,x_m\}}$, vemos claramente que $\bar{\Phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\{x_1,...,x_m\})$ e, além disso,

$$\bar{\Phi}(x) = \Phi(x) \quad \text{se} \quad x \in B_{1+\rho}(0) \setminus B_{1+\frac{\varrho}{3}}(0).$$

Dessas considerações, inferimos que

$$0 \leq \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\Phi dx = \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\bar{\Phi} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*}\bar{\Phi} dx.$$

De (1.63) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*}\bar{\Phi} dx \to 0,$$

e portanto,

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}\Phi dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Voltando a igualdade (1.72), segue de (1.73) e (1.74) que

$$\int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx - \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{2_s^*} dx = o_n(1). \tag{1.75}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx &= \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx \\
&= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx \\
&= o_n(1) + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx,
\end{aligned}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_n|^{2_s^*} dx &= \int_{B_{1+\rho}(0)} |\Phi_n|^{2_s^*} dx \\
&= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{2_s^*} dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{2_s^*} dx \\
&= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}|\Phi|^{2_s^*} dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{2_s^*} dx.
\end{aligned}$$

De forma análoga ao que fizemos para provar (1.74), mostra-se também que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{2_s^*}|\Phi|^{2_s^*} dx = o_n(1)$$

e assim, encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_n|^{2_s^*} dx = o_n(1) + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{2_s^*} dx.$$

Então, da igualdade (1.75) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_n|^{2_n^*} dx = o_n(1),$$

ou ainda, $\|\Phi_n\|^2 - |\Phi_n|_{2_s^*}^{2_s^*} = o_n(1)$. Da definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$|\Phi_n|_{2_s^*}^2 S \leq \|\Phi_n\|^2 \Leftrightarrow |\Phi_n|_{2_s^*}^{2_s^*} S^{2_s^*/2} \leq \|\Phi_n\|^{2_s^*} \Leftrightarrow -\frac{1}{S^{2_s^*/2}}\|\Phi_n\|^{2_s^*} \leq -|\Phi_n|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

Portanto,

$$\|\Phi_n\|^2 \left[1 - \left(\frac{1}{S^{2_s^*/2}}\right)\|\Phi_n\|^{2_s^*-2}\right] = \|\Phi_n\|^2 - \frac{1}{S^{2_s^*/2}}\|\Phi_n\|^{2_s^*} \leq \|\Phi_n\|^2 - |\Phi_n|_{2_s^*}^{2_s^*} = o_n(1). \quad (1.76)$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} \|\Phi_n\|^2 &= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx \\ &= o_n(1) + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Recordando que $\Phi_n = v_n$ em $B_{1+\frac{\rho}{3}(0)}$ e observando que $B_{1+\frac{\rho}{3}(0)} \subset B_2(0)$, obtemos

$$\|\Phi_n\|^2 \leq o_n(1) + \int_{B_2(0)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx.$$

Recordando também que $B_2(0) \subset \bigcup_{k=1}^{L} B_1(y_k)$, segue que

$$\begin{aligned} \|\Phi_n\|^2 &\leq o_n(1) + \int_{\bigcup_{k=1}^{L} B_1(y_k)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx \leq o_n(1) + \sum_{k=1}^{L} \int_{B_1(y_k)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx \\ &\leq o_n(1) + L \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx, \end{aligned}$$

e desde que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_1(y)}|(-\Delta)^{s/2}v_n|^2dx = \frac{S^{N/2s}}{2L},$$

temos

$$\|\Phi_n\|^2 \leq o_n(1) + L\frac{S^{N/2s}}{2L} = o_n(1) + \frac{S^{N/2s}}{2},$$

assim,

$$\begin{aligned}\|\Phi_n\|^2 \leq o_n(1) + \frac{S^{N/4s}}{2^{1/2}} \quad &\Rightarrow \quad \|\Phi_n\|^{2_s^*-2} \leq o_n(1) + \left(\frac{S^{N/4s}}{2^{1/2}}\right)^{2_s^*-2} \\ &\Rightarrow \quad o_n(1) - \left(\frac{S^{N/4s}}{2^{1/2}}\right) \leq -\|\Phi_n\|^{2_s^*-2}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Combinando (1.76) e (1.77), temos

$$\begin{aligned}\|\Phi_n\|^2\left[1 + o_n(1) - \frac{1}{S^{2_s^*/2}}\left(\frac{S^{N/4s}}{2^{1/2}}\right)^{2_s^*-2}\right] &= \|\Phi_n\|^2\left\{1 + \frac{1}{S^{2_s^*/2}}\left[o_n(1) - \left(\frac{S^{N/4s}}{2^{1/2}}\right)^{2_s^*-2}\right]\right\} \\ &\leq \|\Phi_n\|^2\left[1 - \frac{1}{S^{2_s^*/2}}\|\Phi_n\|^{2_s^*-2}\right] = o_n(1),\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|\Phi_n\|^2\left[1 - \frac{1}{S^{2_s^*/2}}\left(\frac{S^{N/4s}}{2^{1/2}}\right)^{2_s^*-2}\right] \leq o_n(1).$$

Observando que

$$\frac{N}{4s}(2_s^* - 2) - \frac{2_s^*}{2} = \frac{N}{4s}\left(\frac{4s}{N-2s}\right) - \frac{N}{N-2s} = 0,$$

segue que

$$\|\Phi_n\|^2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(2_s^*-2)/2}\right] \leq o_n(1).$$

Uma vez que $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(2_s^*-2)/2} > 0$, decorre que

$$0 \leq \|\Phi_n\|^2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{(2_s^*-2)/2}\right] \leq o_n(1),$$

e passando ao limite de $n \to +\infty$, concluimos que $\Phi_n \to 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Como $v_n = \Phi_n$

em $B_1(0)$, segue que

$$0 \leq \int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx = \int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2} \Phi_n|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} \Phi_n|^2 dx.$$

Daí,

$$\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

contradizendo (1.59). Logo, $v_0 \neq 0$.

Agora só nos resta provar a existência de (w_n) em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ onde (w_n) é uma sequência $(PS)_{\tilde{c}}$ para I_∞ verificando

$$w_n(x) = u_n(x) - R_n^{(N-2s)/2} v_0(R_n(x - x_n)) + o_n(1)$$

para alguma subsequência de (u_n) que ainda denotaremos por (u_n). Para isto, consideremos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B_1(0), \\ 0, & \text{se} \quad x \in B_2^c(0) \end{cases}$$

e seja

$$w_n(x) = u_n(x) - R_n^{(N-2s)/2} v_0(R_n(x - x_n)) \psi(\bar{R}_n(x - x_n)), \tag{1.78}$$

onde a sequência $(\bar{R}_n)$ é escolhido verificando $\tilde{R}_n = \dfrac{R_n}{\bar{R}_n} \to +\infty$. De (1.78) obtemos

$$R_n^{(2s-N)/2} w_n(x) = R_n^{(2s-N)/2} u_n(x) - v_0(R_n(x - x_n)) \psi(\bar{R}_n(x - x_n)).$$

Fazendo $z = R_n(x - x_n)$, segue que

$$R_n^{(2s-N)/2} w_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) = R_n^{(2s-N)/2} u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) - v_0 \psi\left(\frac{z}{\tilde{R}_n}\right).$$

Definindo

$$\tilde{w}_n = R_n^{(2s-N)/2} w_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right)$$

e recordando que $v_n(x) = R_n^{(2s-N)/2} u_n\left(\dfrac{x}{R_n} + x_n\right)$, obtemos

$$\tilde{w}_n(z) = v_n(z) - v_0(z)\psi\left(\frac{z}{\tilde{R}_n}\right). \tag{1.79}$$

Definindo também

$$\psi_n(z) = \psi\left(\frac{z}{\tilde{R}_n}\right) \tag{1.80}$$

e observando que, $0 \leq \psi_n(z) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, e que

$$\psi_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{se} \;\; z \in B_{\tilde{R}_n}(0), \\ 0, & \text{se} \;\; z \in B^c_{2\tilde{R}_n}(0). \end{cases}$$

De (1.79) e (1.80), resulta que $\tilde{w}_n(z) = v_n(z) - v_0(z)\psi_n(z)$.

O lema estará provado se provarmos que $v_0\psi_n \to v_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e que (w_n) é uma sequência $(PS)_{\tilde{c}}$ para I_∞. Para isto, notemos que

$$\begin{aligned} &\|v_0\psi_n - v_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}(v_0\psi_n - v_0)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_0(x)\psi_n(x) - v_0(x) - v_0(y)\psi_n(y) + v_0(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_0(x)(\psi_n(x) - \psi_n(y)) + (\psi_n(y) - 1)(v_0(x) - v_0(y))|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &\leq 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v_0(x)|^2|\psi_n(x) - \psi_n(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy + 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\psi_n(y) - 1|^2|v_0(x) - v_0(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Nosso objetivo é mostrar que as duas parcelas do lado direito da desigualdade em (1.81) convergem para zero. Para isto, observemos que pela definição de ψ_n e o fato que $0 \leq \psi_n \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\psi_n(y) - 1|^2 \frac{|v_0(x) - v_0(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy = \int_{[\mathbb{R}^N \setminus B_{\tilde{R}_n}]^2} (\psi_n(y) - 1)^2 \frac{|v_0(x) - v_0(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy \\ &\leq \int_{[\mathbb{R}^N \setminus B_{\tilde{R}_n}]^2} \frac{|v_0(x) - v_0(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\tilde{R}_n}} |(-\Delta)^{s/2} v_0(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\left| |(-\Delta)^{s/2} v_0|^2 \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} \right| \leq |(-\Delta)^{s/2} v_0|^2,$$

onde $|(-\Delta)^{s/2} v_0|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, sabemos que $\tilde{R}_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, logo

$$|(-\Delta)^{s/2} v_0(z)|^2 \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\tilde{R}_n}(0)}(z) \to 0 \;\text{ q.t.p em }\; \mathbb{R}^N.$$

Então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |(-\Delta)^{s/2} v_0|^2 dx \to 0 \;\text{ quando }\; n \to +\infty$$

e como consequência, temos

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\psi_n(y) - 1|^2 \frac{|v_0(x) - v_0(y)|}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \to 0 \;\text{ quando }\; n \to +\infty. \tag{1.82}$$

Voltando a desigualdede (1.81), segue de (1.82) e Lema 1.6 que

$$v_0 \psi_n \to v_0 \;\text{ em }\; D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$$

e portanto,

$$\tilde{w}_n = v_n - v_0 + o_n(1).$$

Mostraremos agora que, a menos de subsequência, (w_n) é uma sequência $(PS)_{\tilde{c}}$ para I_∞.

De forma análoga ao que fizemos para mostrar que $I_\infty(u_n) = I_\infty(v_n)$, mostra-se que $I_\infty(w_n) = I_\infty(\tilde{w}_n)$. Daí,

$$I_\infty(w_n) = I_\infty(v_n - v_0 + o_n(1)) = I_\infty(v_n - v_0) + o_n(1).$$

Agora, notando que (v_n) é limitada em $L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, argumentando como em [2, Lema A.1], temos

$$v_n(x) \to v_0(x) \;\text{ q.t.p em }\; \mathbb{R}^N$$

e que

$$(-\Delta)^{s/2}v_n(x) \to (-\Delta)^{s/2}v_0(x) \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N$$

e $((-\Delta)^{s/2}v_n)$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Segue então do Teorema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Teorema $B.9$) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |(\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}(v_n - v_0)|^2 dx + o_n(1),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{2_s^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n - v_0|^2 dx + o_n(1),$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
I_\infty(w_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}w_n|^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |w_n|^{2_s^*} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}v_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*} dx \\
&+ \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{2_s^*} dx + o_n(1) \\
&= I_\infty(v_n) - I_\infty(v_0) + o_n(1).
\end{aligned}$$

Desde que (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞, segue que

$$I_\infty(w_n) = c - I_\infty(v_0) + o_n(1),$$

e fazendo $\tilde{c} = c - I_\infty(v_0)$ concluimos que

$$I_\infty(w_n) \to \tilde{c} \ \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

Agora, estamos interessados em mostrar que $\|I'_\infty(w_n)\|_{D'} \to 0$. Para isto, provaremos que

$$\|I'_\infty(\tilde{w}_n)\|_{D'} \to 0, \tag{1.83}$$

porque supondo provado que (1.83) ocorre, para cada $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ podemos definir a sequência $\tilde{\Phi}_n(x) = R_n^{(2s-N)/2}\Phi\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)$, que satisfaz $\|\tilde{\Phi}_n\| = \|\Phi\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$I'_\infty(w_n)\Phi = I'_\infty(\tilde{w}_n)\tilde{\Phi}_n.$$

Daí, tomando $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\Phi\| \leq 1$, temos

$$|I'_\infty(w_n)\Phi| = |I'_\infty(\tilde{w}_n\tilde{\Phi}_n)| \leq \|I'_\infty(\tilde{w}_n)\|_{D'}\|\tilde{\Phi}_n\| = \|I'_\infty(\tilde{w}_n)\|_{D'}\|\Phi\| \leq \|I'_\infty(\tilde{w}_n)\|_{D'},$$

e portanto,

$$0 \leq \|I'_\infty(w_n)\|_{D'} \leq \|I'_\infty(\tilde{w}_n)\|_{D'}.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ na última desigualdade e tendo em conta (1.83), segue que

$$\|I'_\infty(w_n)\|_{D'} \to 0,$$

como desejamos.

Afirmamos que

$$\|I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)\|_{D'} \to 0. \tag{1.84}$$

De fato, para todo $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\Phi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|[I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)]\Phi| &= \bigg| \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}\tilde{w}_n(-\Delta)^{s/2}\Phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{w}_n|^{2_s^*-2}\tilde{w}_n\Phi dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*-2}v_n\Phi dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}v_0(-\Delta)^{s/2}\Phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{2_s^*-2}v_0\Phi dx\bigg| \\
&= \bigg| \int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2}\tilde{w}_n - (-\Delta)^{s/2}v_n + (-\Delta)^{s/2}v_0](-\Delta)^{s/2}\Phi dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} [|\tilde{w}_n|^{2_s^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{2_s^*-2}v_n + |v_0|^{2_s^*-2}v_0]\phi dx\bigg| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\tilde{w}_n - (-\Delta)^{s/2}v_n + (-\Delta)^{s/2}v_0||(-\Delta)^{s/2}\Phi| dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} ||\tilde{w}_n|^{2_s^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{2_s^*-2}v_n + |v_0|^{2_s^*-2}v_0||\phi| dx.
\end{aligned}$$

Usando desigualdade de Hölder com expoentes 2 e 2 na primeira parcela e $2_s^*/(2_s^*-1)$ e 2_s^* na segunda parcela da última expressão, encontramos

$$\begin{aligned}
|[I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)]\Phi| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\tilde{w}_n - (-\Delta)^{s/2}v_n + (-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\| \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\tilde{w}_n|^{2_s^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{2_s^*-2}v_n \right. \\
&+ \left. |v_0|^{2_s^*-2}v_0|^{\frac{2_s^*}{(2_s^*-1)}} dx\right)^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*}} |\phi|_{2_s^*}.
\end{aligned}$$

Pela imersão contínua de $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$ e do fato que $\|\Phi\| \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned}
|[I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)]\Phi| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\tilde{w}_n - (-\Delta)^{s/2}v_n + (-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\| \\
&+ C\left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\tilde{w}_n|^{2_s^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{2_s^*-2}v_n \right. \\
&+ \left. |v_0|^{2_s^*-2}v_0|^{\frac{2_s^*}{(2_s^*-1)}} dx\right)^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*}} \|\phi\| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\tilde{w}_n - (-\Delta)^{s/2}v_n + (-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C\left(\int_{\mathbb{R}^N} ||\tilde{w}_n|^{2_s^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{2_s^*-2}v_n \right. \\
&+ \left. |v_0|^{2_s^*-2}v_0|^{\frac{2_s^*}{(2_s^*-1)}} dx\right)^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*}}. \qquad (1.85)
\end{aligned}$$

Pela definição de $\tilde{w}_n$, é imediato que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\tilde{w}_n - (-\Delta)^{s/2}v_n + (-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx = o_n(1). \qquad (1.86)$$

Além disso, fazendo $A(y) = |y|^{2_s^*-2}y$, $\eta_n = v_n - v_0$ e $w = v_0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} ||\tilde{w}_n|^{2_s^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{2_s^*-2}v_n + |v_0|^{2_s^*-2}v_0|^{\frac{2_s^*}{2_s^*-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{\frac{2_s^*}{2_s^*-1}} dx.$$

Desde que

$$\eta_n, w \in L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N),$$

$$\eta_n(x) \to 0 \;\; \text{q.t.p} \;\; \text{em} \;\; \mathbb{R}^N$$

e

$$|\eta_n|_{2_s^*} \le C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

segue de [1, Lema 3] que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{2_s^*/(2_s^*-1)} dx = o_n(1). \tag{1.87}$$

Portanto, de (1.85), (1.86) e (1.87), a relação (1.84) ocorre. Daí,

$$I'_\infty(\tilde{w}_n) = I'_\infty(v_n) - I'_\infty(v_0) + o_n(1).$$

Desde que v_0 é ponto crítico do funcional I_∞, segue que

$$I'_\infty(\tilde{w}_n) = I'_\infty(v_n) + o_n(1),$$

e portanto,

$$\|I'_\infty(\tilde{w}_n)\|_{D'} = \|I'_\infty(v_n) + o_n(1)\|_{D'} \le \|I'_\infty(v_n)\|_{D'} + \|o_n(1)\|_{D'}.$$

Como (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞, concluimos que

$$\|I'_\infty(\tilde{w}_n)\|_{D'} \to 0 \;\; \text{quando} \;\; n \to +\infty$$

e a prava está concluida. ■

Finalmente, com o auxílio dos lemas anteriores estamos prontos para demonstração do teorema principal desta seção. Como veremos, obtemos um critério para estabelecer os intervalos nos quais o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale.

Teorema 1.2. *(Teorema de Compacidade Global) Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para I com $u_n \rightharpoonup u_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Então, a menos de subsequência, (u_n) verifica uma, e somente uma, das afirmações abaixo:*

(a) $u_n \to u_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ ou,

(b) existe $k \in \mathbb{N}$ e soluções não-triviais $z_0^1, z_0^2, ..., z_0^k$ para o problema (P_∞), tais que

$$\|u_n\|^2 \to \|u_0\|^2 + \sum_{j=1}^{k} \|z_0^j\|^2$$

e

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Demonstração: Inicialmente, notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_0 (-\Delta)^{s/2} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \tag{1.88}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2_s^*-2} u_0 \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.89}$$

Observemos também que $a u_n \varphi = a^{1/2} u_n a^{1/2} \varphi$ para toda $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, onde pela desigualdade de Hölder $a^{1/2} u_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $a^{1/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Agora, considerando a sequência de funções $f_n(x) = a(x)^{1/2} u_n(x)$ e $f(x) = a(x)^{1/2} u_0(x)$, temos a menos de subsequência, $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e, uma vez que $|u_n|^{2_s^*}, |u_0|^{2_s^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |a||u_n|^2 dx \leq |a|_{N/2s} |u_n|_{2_s^*}^2 < C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |a||u_0|^2 dx \leq |a|_{N/2s} |u_0|_{2_s^*}^2 < +\infty.$$

Assim, pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Lema $B.2$), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

e sabendo que $a^{1/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a^{1/2} u_n a^{1/2} \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} a^{1/2} u_0 a^{1/2} \varphi dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} a u_0 \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.90}$$

Como por hipótese (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, temos $I'(u_n) \to 0$ em $(D^{s,2}(\mathbb{R}^N))'$, onde

$$I'(u_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a u_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

Passando ao limite de $n \to \infty$ na igualdade acima, segue de (1.88), (1.89), (1.90) e da unicidade do limite que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_0 (-\Delta)^{s/2} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a u_0 \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2_s^*-2} u_0 \varphi dx = 0,$$

para toda $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, u_0 é ponto crítico do funcional I.

Suponhamos que $u_n \nrightarrow u_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e seja $(z_n^1) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ dada por $z_n^1 = u_n - u_0$. Então, $z_n^1 \rightharpoonup 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e $z_n^1 \nrightarrow 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Provaremos que (z_n^1) é uma sequência (PS) para I_∞. De fato, do Teorema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Teorema B.9), encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} z_n^1|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} (u_n - u_0)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_0|^2 dx + o_n(1) \end{aligned} \tag{1.91}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n^1|^{2_s^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^{2_s^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2_s^*} dx + o_n(1). \tag{1.92}$$

Por outro lado, a menos de subsequência, temos

$$|u_n(x)|^2 \to |u_0(x)|^2 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N$$

e que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^2)^{N/(N-2s)}dx = \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*}dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, como $|u_0|^2 \in L^{N/(N-2s)}(\mathbb{R}^N)$, aplicando o Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Lema $B.2$), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^2\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^2\varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N)$$

e desde que $a \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}a|u_n|^2dx \to \int_{\mathbb{R}^N}a|u_0|^2dx,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}^N}a|u_n|^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}a|u_0|^2dx = o_n(1). \tag{1.93}$$

Assim, de (1.91), (1.92) e (1.93), obtemos

$$\begin{aligned}
I_\infty(z_n^1) &= I_\infty(u_n - u_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}(u_n - u_0)|^2dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n - u_0|^{2_s^*}dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}u_n|^2dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}u_0|^2dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*}dx\\
&+ \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{2_s^*}dx + o_n(1)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}u_n|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}a|u_n|^2dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}u_0|^2dx\\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}a|u_0|^2dx - \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{2_s^*}dx + \frac{1}{2_s^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_0|^{2_s^*}dx + o_n(1),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\infty(z_n^1) = I(u_n) - I(u_0) + o_n(1). \tag{1.94}$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que $\|I'_\infty(z_n^1) - I'(u_n) + I'(u_0)\|_{D'} \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Para isto, para cada $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|[I'_\infty(z_n^1) - I'(u_n) + I'(u_0)]\varphi| &= \bigg| \int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2} z_n^1 - (-\Delta)^{s/2} u_n + (-\Delta)^{s/2} u_0](-\Delta)^{s/2}\varphi dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} [|z_n^1|^{2_s^*-2} z_n^1 - |u_n|^{2_s^*-2} u_n + |u_0|^{2_s^*-2} u_0]\varphi dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n - u_0|\varphi dx \bigg| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} z_n^1 - (-\Delta)^{s/2} u_n + (-\Delta)^{s/2} u_0||(-\Delta)^{s/2}\varphi| dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} ||z_n^1|^{2_s^*-2} z_n^1 - |u_n|^{2_s^*-2} u_n + |u_0|^{2_s^*-2} u_0||\varphi| dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n - u_0|\varphi dx.
\end{aligned}$$

Usando desigualdade de Hölder com expoentes 2 e 2 na primeira e na última parcela da desigualdade acima e expoentes $2_s^*/(2_s^*-1)$ e 2_s^* na segunda parcela, juntamente com imersão contínua de Sobolev e o fato que $\|\varphi\| \leq 1$, vem que

$$\begin{aligned}
|[I'_\infty(z_n^1) - I'(u_n) + I'(u_0)]\varphi| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} z_n^1 - (-\Delta)^{s/2} u_n + (-\Delta)^{s/2} u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} ||z_n^1|^{2_s^*-2} z_n^1 - |u_n|^{2_s^*-2} u_n + |u_0|^{2_s^*-2} u_0|^{\frac{2_s^*}{2_s^*-1}} dx \right)^{\frac{2_s^*-1}{2_s^*}} \\
&+ C \left(\int_{\mathbb{R}^N} a|u_n - u_0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.95)
\end{aligned}$$

Como $z_n^1 = u_n - u_0$, por um cálculo direto podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} z_n^1 - (-\Delta)^{s/2} u_n + (-\Delta)^{s/2} u_0|^2 dx = o_n(1). \qquad (1.96)$$

Além disso, considereando $A(t) = |t|^{2_s^*-2}t$, $\eta_n = z_n^1$ e $w = u_0$, temos

$$\eta_n, w \in L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N),$$

$$\eta_n(x) \to 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N,$$

$$|\eta_n|_{2_s^*} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

portanto, de [1, Lema 3] obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} ||z_n^1|^{2_s^*-2} z_n^1 - |u_n|^{2_s^*-2} u_n + |u_0|^{2_s^*-2} u_0|^{2_s^*/(2_s^*-1)} dx = o_n(1). \tag{1.97}$$

Temos também, a menos de subsequência,

$$|u_n(x) - u_0(x)|^2 \to 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n - u_0|^2)^{2_s^*/2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^{2_s^*} dx \leq C|u_n|_{2_s^*}^{2_s^*} + C|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} < K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, do Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Lema $B.2$), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_0|^2 \varphi dx \to 0, \quad \forall \varphi \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N),$$

e desde que $a \in L^{N/2s}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|u_n - u_0|^2 dx \to 0. \tag{1.98}$$

De (1.95), (1.96), (1.97) e (1.98) concluimos que

$$\|I'_\infty(z_n^1) - I'(u_n) + I'(u_0)\|_{D'} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty$$

e daí,

$$I'_\infty(z_n^1) = I'(u_n) - I'(u_0) + o_n(1). \tag{1.99}$$

Concluimos então de (1.94) e (1.99) que (z_n^1) é uma sequência $(PS)_{c_1}$ para I_∞. Portanto, do Lema 1.7, existem sequências $(R_{n,1}) \subset \mathbb{R}$, $(x_{n,1}) \subset \mathbb{R}^N$, $z_0^1 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ solução não-trivial para o problema (P_∞) e uma sequência $(z_n^2) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ o qual é $(PS)_{c_2}$ para I_∞ e tais que

$$z_n^2(x) = z_n^1(x) - R_{n,1}^{(N-2s)/2} z_0^1(R_{n,1}(x - x_{n,1})) + o_n(1).$$

Se definirmos

$$v_n^1(x) = R_{n,1}^{(2s-N)/2} z_n^1\left(\frac{x}{R_{n,1}} + x_{n,1}\right) \tag{1.100}$$

e

$$\tilde{z}_n^2(x) = R_{n,1}^{(2s-N)/2} z_n^2\left(\frac{x}{R_{n,1}} + x_{n,1}\right),$$

segue que

$$\tilde{z}_n^2(x) = v_n^1(x) - z_0^1(x) + o_n(1). \tag{1.101}$$

De modo análogo ao que fizemos na prova do Lema 1.7, usando mudança de variável, mostra-se que

$$\|v_n^1\| = \|z_n^1\| \ \text{ e } \ |v_n^1|_{2_s^*} = |z_n^1|_{2_s^*}, \tag{1.102}$$

logo,

$$I_\infty(v_n^1) = I_\infty(z_n^1). \tag{1.103}$$

Agora, para cada $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, definimos a sequência

$$\tilde{\Phi}_n(x) = R_{n,1}^{(N-2s)/2} \Phi(R_{n,1}(x - x_{n,1}))$$

e de modo inteiramente análogo ao que fizemos na prova do Lema 1.7, mostra-se que

$$\|\Phi\| = \|\tilde{\Phi}_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} z_n^1 (-\Delta)^{s/2} \tilde{\Phi}_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} v_n^1 (-\Delta)^{s/2} \Phi dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n^1|^{2_s^*-2} z_n^1 \tilde{\Phi}_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^{2_s^*-2} v_n^1 \Phi dx.$$

Disso, decorre que $I'_\infty(z_n^1)\tilde{\Phi}_n = I'_\infty(v_n^1)\Phi$, e então, para todo $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\Phi\| \leq 1$,

temos

$$|I'_\infty(v_n^1)\Phi| = |I'_\infty(z_n^1)\tilde{\Phi}_n| \leq \|I'_\infty(z_n^1)\|_{D'}\|\tilde{\Phi}_n\| = \|I'_\infty(z_n^1)\|_{D'}\|\Phi\| \leq \|I'_\infty(z_n^1)\|_{D'},$$

e portanto,

$$0 \leq \|I'_\infty(v_n^1)\|_{D'} \leq \|I'_\infty(z_n^1)\|_{D'}.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ na desigualdade acima, encontramos que

$$I'_\infty(v_n^1) \to 0 \quad \text{em} \quad (D^{s,2}(\mathbb{R}^N))'. \tag{1.104}$$

De (1.103), (1.104) e do ítem (a) do Lema 1.1, temos que (v_n^1) é uma sequência limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, a menos de subsequência,

$$v_n^1 \rightharpoonup z_0^1 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.105}$$

De (1.101), aplicando o Teorema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Teorema $B.9$), obtemos

$$\|\tilde{z}_n^2\|^2 = \|v_n^1\|^2 - \|z_0^1\|^2 + o_n(1), \tag{1.106}$$

$$|\tilde{z}_n^2|_{2_s^*}^{2_s^*} = |v_n^1|_{2_s^*}^{2_s^*} - |z_0^1|_{2_s^*}^{2_s^*} + o_n(1)$$

e daí, resulta que

$$I_\infty(\tilde{z}_n^2) = I_\infty(v_n^1) - I_\infty(z_0^1) + o_n(1). \tag{1.107}$$

Por outro lado, para cada $\Phi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\Phi\| \leq 1$, novamente fazendo uso de [1, Lema 3], mostra-se que

$$\|I'_\infty(\tilde{z}_n^2) - I'_\infty(v_n^1) + I'_\infty(z_0^1)\|_{D'} = o_n(1),$$

ou seja,

$$I'_\infty(\tilde{z}_n^2) = I'_\infty(v_n^1) - I'_\infty(z_0^1) + o_n(1). \tag{1.108}$$

Combinando (1.102) com (1.106), obtemos

$$\|\tilde{z}_n^2\|^2 = \|z_n^1\|^2 - \|z_0^1\|^2 + o_n(1)$$

e de (1.91) segue que

$$\|\tilde{z}_n^2\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 - \|z_0^1\|^2 + o_n(1). \tag{1.109}$$

De (1.103) e (1.107), temos

$$I_\infty(\tilde{z}_n^2) = I_\infty(z_n^1) - I_\infty(z_0^1) + o_n(1)$$

e de (1.94), vem que

$$I_\infty(\tilde{z}_n^2) = I(u_n) - I(u_0) - I_\infty(z_0^1) + o_n(1). \tag{1.110}$$

Se $\tilde{z}_n^2 \to 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, o teorema fica provado com $k = 1$, pois neste caso $\|\tilde{z}_n^2\|^2 \to 0$ e de (1.109), obtemos

$$\|u_n\|^2 \to \|u_0\|^2 + \|z_0^1\|^2.$$

Além disso, da continuidade de I_∞, temos $I_\infty(\tilde{z}_n^2) \to 0$ e de (1.110), vem que

$$I(u_n) \to I(u_0) + I_\infty(z_0^1).$$

Se $\tilde{z}_n^2 \nrightarrow 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, desde que temos por (1.101) e (1.105) que $\tilde{z}_n^2 \rightharpoonup 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e por (1.107) e (1.108) que $(\tilde{z}_n^2)$ é $(PS)_{c_2}$ para I_∞, aplicando o Lema 1.7 encontramos $(R_{n,2}) \subset \mathbb{R}$, $(x_{n,2}) \subset \mathbb{R}^N$, $z_0^2 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ solução não-trivial para o problema

(P_∞) e uma sequência $(z_n^3) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ o qual é $(PS)_{c_3}$ para I_∞ e tais que

$$z_n^3(x) = \tilde{z}_n^2(x) - R_{n,2}^{(N-2s)/2} z_0^2(R_{n,2}(x - x_{n,2})) + o_n(1).$$

Se definirmos

$$v_n^2(x) = R_{n,2}^{(2s-N)/2} \tilde{z}_n^2\left(\frac{x}{R_{n,2}} + x_{n,2}\right)$$

e

$$\tilde{z}_n^3(x) = R_{n,2}^{(2s-N)/2} z_n^3\left(\frac{x}{R_{n,2}} + x_{n,2}\right),$$

segue que

$$\tilde{z}_n^3(x) = v_n^2(x) - z_0^2(x) + o_n(1). \tag{1.111}$$

Argumentando de forma inteiramente análoga ao que fizemos anteriormente, encontramos os seguintes resultados:

$$\|v_n^2\| = \|\tilde{z}_n^2\|, \tag{1.112}$$

$$I_\infty(v_n^2) = I_\infty(\tilde{z}_n^2), \tag{1.113}$$

$$I'_\infty(v_n^2) \to 0 \quad \text{em} \quad (D^{s,2}(\mathbb{R}^N))', \tag{1.114}$$

$$v_n^2 \rightharpoonup z_0^2 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \tag{1.115}$$

$$\|\tilde{z}_n^3\|^2 = \|v_n^2\|^2 - \|z_0^2\|^2 + o_n(1), \tag{1.116}$$

$$I_\infty(\tilde{z}_n^3) = I_\infty(v_n^2) - I_\infty(z_0^2) + o_n(1) \tag{1.117}$$

e

$$I'_\infty(\tilde{z}_n^3) = I'_\infty(v_n^2) - I'_\infty(z_0^2) + o_n(1). \tag{1.118}$$

Combinando (1.112) e (1.116), obtemos

$$\|\tilde{z}_n^3\|^2 = \|\tilde{z}_n^2\|^2 - \|z_0^2\|^2 + o_n(1)$$

e de (1.109), segue que

$$\|\tilde{z}_n^3\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 - \|z_0^1\|^2 - \|z_0^2\|^2 + o_n(1). \tag{1.119}$$

De (1.113) e (1.117), obtemos

$$I_\infty(\tilde{z}_n^3) = I_\infty(\tilde{z}_n^2) - I_\infty(z_0^2) = o_n(1)$$

e de (1.110), segue que

$$I_\infty(\tilde{z}_n^3) = I(u_n) - I(u_0) - I_\infty(z_0^1) - I_\infty(z_0^2) + o_n(1). \tag{1.120}$$

Se $\tilde{z}_n^3 \to 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, o teorema fica provado com $k = 2$, pois neste caso $\|\tilde{z}_n^3\|^2 \to 0$ e de (1.119), obtemos

$$\|u_n\|^2 \to \|u_0\|^2 + \sum_{j=1}^{2} \|z_0^j\|^2.$$

Além disso, da continuidade de I_∞, temos $I_\infty(\tilde{z}_n^3) \to 0$, que juntamente com (1.120) nos dá

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{2} I_\infty(z_0^j).$$

Se $\tilde{z}_n^3 \nrightarrow 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, repetimos os mesmos argumentos anteriores e encontramos $z_0^1, z_0^2, ..., z_0^{k-1}$ soluções não-triviais para o problema (P_∞) satisfazendo

$$\|\tilde{z}_n^k\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \|z_0^j\|^2 + o_n(1) \tag{1.121}$$

e

$$I_\infty(\tilde{z}_n^k) = I(u_n) - I(u_0) - \sum_{j=1}^{k-1} I_\infty(z_0^j) + o_n(1). \tag{1.122}$$

Da definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|z_0^j|_{2_s^*}^2 S \leq \|z_0^j\|^2, \quad j = 1, 2, ..., k-1. \tag{1.123}$$

Desde que z_0^j é solução fraca do problema (P_∞) para todo $j = 1, 2, ..., k-1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} z_0^j (-\Delta)^{s/2} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |z_0^j|^{2_s^*-2} z_0^j \varphi dx, \quad \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N),$$

e desde que $z_0^j \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ para todo $j = 1, 2, ..., k-1$, em particular vale que

$$\|z_0^j\|^2 = |z_0^j|_{2_s^*}^{2_s^*}$$

e portanto,

$$\|z_0^j\|^{2/2_s^*} = |z_0^j|_{2_s^*}, \quad j = 1, 2, ..., k-1. \tag{1.124}$$

Substituindo (1.124) em (1.123), obtemos

$$\left(\|z_0^j\|^{2/2_s^*} \right)^2 S \leq |z_0^j|_{2_s^*}^2 S \leq \|z_0^j\|^2, \quad j = 1, 2, ..., k-1.$$

Logo,

$$\left(\|z_0^j\|^{2/2_s^*} \right)^2 S \leq \|z_0^j\|^2 \Leftrightarrow S \leq \left(\|z_0^j\|^2 \right)^{1-2/2_s^*} = \left(\|z_0^j\|^2 \right)^{2s/N} \Leftrightarrow S^{N/2s} \leq \|z_0^j\|^2$$

e, portanto,

$$-\|z_0^j\|^2 \leq -S^{N/2s}, \quad j = 1, 2, ..., k-1. \tag{1.125}$$

De (1.121) e (1.125), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\tilde{z}_n^k\|^2 &= \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \|z_0^j\|^2 + o_n(1) && (1.126)\\
&\leq \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} S^{N/2s} + o_n(1) && (1.127)\\
&= \|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 - (k-1)S^{N/2s} + o_n(1). && (1.128)
\end{aligned}$$

Desde que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\|u_n\|^2 - \|u_0\|^2 + o_n(1) \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, de (1.126), vem que

$$0 \leq \|\tilde{z}_n^k\|^2 \leq C - (k-1)S^{N/2s}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desde que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$C - (k-1)S^{N/2s} \leq 0,$$

segue que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \|\tilde{z}_n^k\| = 0.$$

Assim, $\tilde{z}_n^k \to 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e o teorema está provado. ■

Como consequência do Teorema 1.2, temos os seguintes resultados:

Corolário 1.1. *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para I com $c \in (0, \frac{s}{N}S^{N/2s})$. Então, (u_n) possui uma subsequência que converge forte em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I, temos que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Como $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço reflexivo segue que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Suponhamos, por contradição, que

$$u_n \nrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Então, do Teorema 1.2, existem $k \in \mathbb{N}$ e soluções não-triviais $z_0^1, z_0^2, ..., z_0^k$ do problema (P_∞) tais que, a menos de subsequência,

$$\|u_n\|^2 \to \|u_0\|^2 + \sum_{j=1}^{k} \|z_0^j\|^2$$

e

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Na prova do Teorema 1.2, mostramos que nessas condições u_0 é ponto crítico do funcional I. Isto nos diz que

$$I'(u_0)u_0 = 0,$$

ou seja,

$$\|u_0\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_0^2 dx - |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} = 0$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_0^2 dx = |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} - \|v_0\|^2. \tag{1.129}$$

Agora, mostraremos que $I(u_0) \geq 0$. Para tanto, observe que

$$I(u_0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_0^2 dx - \frac{1}{2_s^*}|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

A última igualdade juntamente com (1.129), nos dá

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_0^2 dx - \frac{1}{2_s^*}|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} \\ &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{2}\Big(|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} - \|u_0\|^2\Big) - \frac{1}{2_s^*}|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right)|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} = \frac{s}{N}|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} \geq 0. \end{aligned}$$

Da unicidade do limite

$$c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j)$$

e daí, temos

$$c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) \geq \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) \geq \frac{ks}{N} S^{N/2s} \geq \frac{s}{N} S^{N/2s}.$$

Logo, $c \notin (0, \frac{s}{N} S^{N/2s})$, o que é uma contradição. ■

Corolário 1.2. *O funcional* $I : D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ *satisfaz a condição Palais-Smale no intervalo* $(\frac{s}{N} S^{N/2s}, \frac{2s}{N} S^{N/2})$.

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0.$$

Vimos que (u_n) é uma sequência limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ que é um espaço reflexivo. Logo, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Suponhamos, por contradição, que

$$u_n \nrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Então, do Teorema 1.2, existem $k \in \mathbb{N}$ e soluções não-triviais $z_0^1, z_0^2, ..., z_0^k$ do problema (P_∞) tais que, a menos de subsequência,

$$\|u_n\|^2 \to \|u_0\|^2 + \sum_{j=1}^{k} \|z_0^j\|^2$$

e

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Da unicidade do limite temos

$$c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Na prova do Corolário 1.1 mostramos que $I(u_0) \geq 0$ e daí, segue que k não pode ser maior do que 1 e z_0^1 não pode mudar de sinal, pois caso contrário, teríamos $c \notin (\frac{s}{N}S^{N/2s}, \frac{2s}{N}S^{N/2s})$ e então já teríamos uma contradição.

Então, temos

$$c = I(u_0) + I_\infty(z_0^1) = I(z_0^1) + \frac{s}{N}S^{N/2s}.$$

Da definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$S|u|_{2_s^*}^2 \leq \|u\|^2, \quad \forall u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.130}$$

Temos também, por argumentos usados na prova do Teorema 1.2 que, u_0 é ponto crítico do funcional I. Logo,

$$I'(u_0)u_0 = \|u_0\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_0^2 dx - |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} = 0$$

e daí,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u_0^2 dx = |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} - \|u_0\|^2,$$

logo,

$$\|u_0\|^2 \leq |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

Combinando esta desigualdade com (1.130), encontramos

$$S|u_0|_{2_s^*}^2 \leq \|u_0\|^2 \leq |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*}.$$

Daí,

$$S \leq |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*-2} \Rightarrow S^{N/2s} \leq |u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} \Rightarrow \frac{s}{N}S^{N/2s} \leq \frac{s}{N}|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*},$$

logo,

$$\frac{2s}{N}S^{N/2s} = \frac{s}{N}S^{N/2s} + \frac{s}{N}S^{N/2s} \leq \frac{s}{N}|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*} + \frac{s}{N}S^{N/2s}.$$

Na prova do Corolário 1.1, mostramos que

$$I(u_0) = \frac{s}{N}|u_0|_{2_s^*}^{2_s^*},$$

e assim,

$$\frac{2s}{N}S^{N/2s} \leq I(u_0) + \frac{s}{N}S^{N/2s} = c,$$

o que contradiz o fato de que $c \in (\frac{s}{N}S^{N/2s}, \frac{2s}{N}S^{N/2s})$. ■

Corolário 1.3. *Seja $(u_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_c$ para I com $c \in (\frac{ks}{N}S^{N/2}, \frac{(k+1)s}{N}S^{N/2})$, onde $k \in \mathbb{N}$. Então o limite fraco u_0 de (u_n) é não nulo.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $u_0 \equiv 0$. Então $u_n \to 0$ ou $u_n \nrightarrow 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

Se $u_n \to 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, então da continuidade de I e da unicidade do limite, temos que $c = 0$, o que contradiz o fato de que $c \in (\frac{ks}{N}S^{N/2s}, \frac{(k+1)s}{N}S^{N/2s})$.

Se $u_n \nrightarrow 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, então do Teorema 1.2, a menos de subsequência, vale

$$\|u_n\|^2 \to \|u_0\|^2 + \sum_{j=1}^{k} \|z_0^j\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \|z_0^j\|^2$$

e

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) = \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Da unicidade do limite, obtemos $c = \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j)$.

Se para todo $j = 1, 2, ..., k$, z_0^j é solução positiva do problema limite (P_∞), então $c = \frac{ks}{N}S^{N/2s}$. Se para algum j, z_0^j é uma solução que muda de sinal, então

$$c = \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) = \frac{2ks}{N}S^{N/2s} > \frac{(k+1)s}{N}S^{N/2s}.$$

Ambos os casos contradizem o fato de $c \in (\frac{ks}{N}S^{N/2s}, \frac{(k+1)s}{N}S^{N/2s})$. Portanto, $u_0 \neq 0$, como queríamos mostrar. ■

Daqui em diante, consideraremos o funcional $f : D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|(-\Delta)^{s/2} u|^2 + a(x)u^2 \Big) dx$$

ou equivalentemente,

$$f(u) = \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)u^2 dx.$$

Consideremos também a variedade $\mathcal{M} \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, dada por

$$\mathcal{M} = \Big\{ u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx = 1 \Big\}.$$

Lema 1.8. *Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}$ uma sequência satisfazendo*

$$f(u_n) \to c \quad e \quad f'|_{\mathcal{M}}(u_n) \to 0.$$

Então, a sequência $(v_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, onde $v_n = c^{(N-2s)/4s} u_n$, verifica os seguintes limites

$$I(v_n) \to \frac{s}{N} c^{N/2s} \quad e \quad I'(v_n) \to 0.$$

Demonstração: Pela definição do funional I, temos

$$I(v_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) v_n^2 dx - \frac{1}{2_s^*} |v_n|^{2_s^*} dx$$

e juntamente com a definição de v_n, obtemos

$$\begin{aligned}
I(v_n) &= \frac{1}{2} c^{(N-2s)/2s} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_n^2 dx \Big) \\
&- \frac{1}{2_s^*} c^{2_s^*(N-2s)/4s} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx \\
&= \frac{1}{2} c^{(N-2s)/2s} f(u_n) - \frac{1}{2_s^*} c^{N/2s} \\
&= \frac{1}{2} c^{N/2s} - \frac{1}{2_s^*} c^{N/2s} + o_n(1) \\
&= \frac{s}{N} c^{N/2s} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Daí, concluimos que

$$I(v_n) \to \frac{s}{N} c^{N/2s}.$$

Além disso, temos também

$$\|f'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f'(u) - \lambda J'(u)\|_{D'},$$

onde $\|\cdot\|_*$ é a norma da derivada da restrição de f a $\mathcal{M}$ em u e

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*} dx.$$

O funcional J é de classe C^1 e

$$J'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_s^*-2} u\varphi dx.$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\lambda_n \in \mathbb{R}$, tal que

$$\|f'(u_n)\|_* = \|f'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{D'}.$$

Para todo $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|I'(v_n)\varphi| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} v_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) v_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2_s^*-2} v_n \varphi dx \right| \\
&= \left| c^{(N-2s)/4s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_n \varphi dx \right) \right. \\
&- \left. c^{(N+2s)/4s} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx \right| \\
&= \left| c^{(N-2s)/4s} \frac{1}{2} \left(2 \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} a(x) v_n \varphi dx \right) \right. \\
&- \left. c^{(N+2s)/4s} \frac{1}{2_s^*} \left(2_s^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx \right) \right|.
\end{aligned}$$

Desde que

$$f'(u_n)\varphi = 2 \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} u_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_n \varphi dx$$

e

$$J'(u_n)\varphi = 2_s^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx,$$

segue que

$$\begin{aligned}
|I'(v_n)\varphi| &= \left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}f'(u_n)\varphi - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*}J'(u_n)\varphi \right| \\
&= \left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}f'(u_n)\varphi - c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n J'(u_n)\varphi \right. \\
&+ \left. c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n J'(u_n)\varphi - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*}J'(u_n)\varphi \right|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, segue-se que

$$\begin{aligned}
|I'(v_n)\varphi| &\leq c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\left| f'(u_n)\varphi - \lambda_n J'(u_n)\varphi \right| + \left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*} \right| |J'(u_n)\varphi| \\
&\leq c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\|f'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{D'}\|\varphi\| \\
&+ \left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*} \right| \|J'(u_n)\|_{D'}\|\varphi\|.
\end{aligned}$$

Como $\|\varphi\| \leq 1$ e $\|f'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{D'} = \|f'(u_n)\|_*$, segue que

$$\begin{aligned}
|I'(v_n)\varphi| &\leq c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\|f'(u_n)\|_* + \left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*} \right| \|J'(u_n)\|_{D'} \\
&= o_n(1) + \left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*} \right| \|J'(u_n)\|_{D'}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|I'(v_n)\|_{D'} \leq o_n(1) + \left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*} \right| \|J'(u_n)\|_{D'}. \tag{1.131}$$

Para concluir a demonstração, basta mostrarmos que

$$\|J'(u_n)\|_{D'} \leq 2_s^* C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.132}$$

e

$$\left| c^{(N-2s)/4s}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{(N+2s)/4s}\frac{1}{2_s^*} \right| \to 0. \tag{1.133}$$

Temos que (1.132) de fato ocorre, pois para cada $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\| \leq 1$, vem que

$$
\begin{aligned}
|J'(u_n)\varphi| &\leq \left| 2_s^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} u_n \varphi dx \right| \leq 2_s^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-2} |u_n| |\varphi| dx \\
&= 2_s^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*-1} |\varphi| dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $2_s^*/(2_s^*-1)$ e 2_s^*, obtemos

$$
|J'(u_n)\varphi| \leq 2_s^* \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{(2_s^*-1)}{2_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{1}{2_s^*}}.
$$

Recordando que $(u_n) \subset \mathcal{M}$, segue que

$$
|J'(u_n)\varphi| \leq 2_s^* \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{(2_s^*-1)}{2_s^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{1}{2_s^*}} \leq 2_s^* |\varphi|_{2_s^*} \leq 2_s^* C \|\varphi\| \leq 2_s^* C
$$

e, portanto,

$$
\|J'(u_n)\|_{D'} \leq 2_s^* C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
$$

Notemos agora que

$$
\|f'(u_n)\|_* \to 0 \Longleftrightarrow \|f'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{D'} \to 0.
$$

Desde que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e que

$$
|f'(u_n)u_n - \lambda_n J'(u_n)u_n| \leq \|f'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{D'} \|u_n\|
$$

segue que

$$
|f'(u_n)u_n - \lambda_n J'(u_n)u_n| \to 0
$$

e daí,

$$
\left| 2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) u_n^2 dx \right) - \lambda_n 2_s^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2_s^*} dx \right| \to 0.
$$

Assim,

$$|2f(u_n) - \lambda_n 2_s^*| \to 0 \Rightarrow 2f(u_n) - \lambda_n 2_s^* = o_n(1) \Rightarrow \lambda_n = \frac{2}{2_s^*} f(u_n) + o_n(1),$$

de onde concluimos que

$$\lambda_n = \frac{2}{2_s^*} c + o_n(1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left| c^{(N-2s)/4s} \frac{1}{2} \lambda_n - c^{(N+2s)/4s} \frac{1}{2_s^*} \right| &= \left| c^{(N-2s)/4s} \frac{1}{2} \frac{2}{2_s^*} c - c^{(N+2s)/4s} \frac{1}{2_s^*} + o_n(1) \right| \\ &= \left| c^{(N+2s)/4s} \frac{1}{2_s^*} - c^{(N+2s)/4s} \frac{1}{2_s^*} + o_n(1) \right| \\ &= o_n(1), \end{aligned}$$

mostrando que (1.133) de fato ocorre. De (1.131), (1.132) e (1.133) segue que $\|I'(v_n)\|_{D'} \to 0$, e isto conclui a prova. ■

Lema 1.9. *Suponha que existe uma sequência* $(u_n) \subset \mathcal{M}$ *e* $c \in (S, 2^{2s/N} S)$ *tais que*

$$f(u_n) \to c \quad e \quad f'|_{\mathcal{M}}(u_n) \to 0.$$

Então, a menos de subsequência, $u_n \to u$ *em* $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Vimos no lema 1.8 que a sequência $(v_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, dada por $v_n = c^{(N-2s)/4s} u_n$ é Palais-Smale de nível $\frac{s}{N} c^{N/2s}$ para o funcional I.

Desde que $c \in (S, 2^{2s/N} S)$, temos

$$\frac{s}{N} c^{2s/N} \in \left(\frac{2}{N} S^{N/2s}, \frac{2s}{N} S^{N/2s} \right)$$

e do Corolario 1.2 segue que, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Daí, fazendo $u = c^{(2s-N)/4s} v$, temos

$$c^{(N-2s)/4s} \|u_n - u\| = \|c^{(N-2s)/4s} u_n - c^{(N-2s)/4s} u\| = \|v_n - v\| \to 0.$$

Portanto, $u_n \to u$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. ■

Corolário 1.4. *Suponha que existem* $(u_n) \subset \mathcal{M}$ *e* $c \in (S, 2^{2s/N}S)$ *satisfazendo*

$$f(u_n) \to c \quad e \quad f'(u_n) \to 0.$$

Então, I *tem um ponto crítico* $v_0 \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ *com* $I(v_0) = \frac{s}{N}c^{N/2s}$.

Demonstração: Do lema 1.9, a sequência $(v_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ dada por $v_n = c^{(N-2s)/4s}u_n$ verifia os seguintes limites

$$I(v_n) \to \frac{s}{N}c^{N/2s} \quad e \quad I'(v_n) \to 0.$$

Desde que $c \in (S, 2^{2s/N}S)$, segue que

$$\frac{s}{N}c^{N/2s} \in \left(\frac{s}{N}S^{N/2s}, \frac{2s}{N}S^{N/2s}\right)$$

e do Corolário 1.2 temos, a menos de subsequência,

$$v_n \to v_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Da continuidade de I e da unicidade do limite, obtemos que v_0 é ponto crítico do funcional I e que $I(v_0) = \frac{s}{N}c^{N/2s}$, como queríamos mostrar. ∎

1.3 Existência de solução positiva para (P)

Nesta seção, mostraremos um resultado de existência de solução positiva para o problema (P). Para este propósito, usaremos os mesmos argumentos utilizados por C. O. Alves em [1]. Para isto, daqui em diante, consideraremos a função $\Phi_{\delta,b} \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\Phi_{\delta,b}(x) = c\left(\frac{\delta}{\delta^2 + |x-b|^2}\right)^{(N-2s)/2}, \quad x, b \in \mathbb{R}^N \text{ e } \delta > 0, \tag{1.134}$$

onde c é uma constante. A função $\Phi_{\delta,b}$ definida acima é conhecida na literatura como função Talenti. É sabido (veja, por exemplo [28]) que qualquer solução de (P_∞) é da forma (1.134). Além disso, temos também

$$\|\Phi_{\delta,b}\|^2 = S \quad \text{e} \quad |\Phi_{\delta,b}|_{2_s^*} = 1, \tag{1.135}$$

onde S é a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2_s^*}(\mathbb{R}^N)$. Para mais detalhes sobre a constante de Sobolev S, veja [30, 31, 73]. No decorrer desta seção, usaremos as igualdades em (1.135) sempre que necessário sem fazer referência.

1.3.1 Lemas técnicos

Nesta subseção, listamos algumas propriedades referentes a função Talenti $\Phi_{\delta,b}$ dada em (1.134). Tais propriedades serão de essencial importancia na demonstração do Teorema 1.1.

Começamos observando que $\Phi_{\delta,b}$ satisfaz

$$\Phi_{\delta,b} \in \Sigma = \left\{u \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N); u \geq 0\right\} \tag{1.136}$$

e

$$\Phi_{\delta,b} \in L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{para} \quad q \in \left(\frac{N}{N-2s}, 2_s^*\right], \quad \forall \delta > 0 \ \text{ e } \ \forall b \in \mathbb{R}^N. \tag{1.137}$$

A veracidade de (1.136) segue diretamente da definição de $\Phi_{\delta,b}$. Para verificar (1.137), observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} c^q \left| \frac{\delta^{(N-2s)/2}}{[\delta^2 + |x-b|^2]^{(N-2s)/2}} \right|^q dx \\
&= c^q \delta^{q(N-2s)/2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left\{\delta^2 \left[1 + \left|\frac{x-b}{\delta}\right|^2\right]\right\}^{q(N-2s)/2}} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = \dfrac{x-b}{\delta}$, segue que

$$x = \delta z + b \Rightarrow dx = \delta^N dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^q dx &= c^q \delta^{q(N-2s)/2} \delta^{q(2s-N)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{[1+|z|^2]^{q(N-2s)/2}} \delta^N dz \\
&= c^q \delta^{q(N-2s)/2+q(2s-N)+N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz \\
&= c^q \delta^{q(2s-N)/2+N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz.
\end{aligned}$$

Agora, para $R > 0$, observemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz + \int_{\bar{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz.$$

Como a função $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $h(z) = \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2}$ é contínua e $\bar{B}_R(0)$ é compacto, segue que

$$\int_{\bar{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz < +\infty.$$

Por outro lado, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_R(0)} \left[\frac{1}{|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz.$$

Mudando para coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_R(0)} \left[\frac{1}{|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz \\
&= \int_R^{+\infty} \left[\frac{1}{\rho^2}\right]^{q(N-2s)/2} \rho^{N-1} d\rho \\
&= \int_R^{+\infty} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{(q(N-2s)} \rho^{N-1} d\rho \\
&= \lim_{w \to +\infty} \int_R^w \rho^{q(2s-N)+N-1} d\rho.
\end{aligned}$$

Entretanto, temos

$$\lim_{w \to +\infty} \int_R^w \rho^{q(2s-N)+N-1} d\rho < +\infty$$

se, e somente se,

$$q(2s - N) + N - 1 < -1$$

que por sua vez é equivalente a

$$\frac{N}{N-2s} < q.$$

Portanto, se $q \in \left(\frac{N}{N-2s}, 2_s^*\right]$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^q dx = c^q \delta^{q(2s-N)/2+N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz < +\infty,$$

e daí concluimos que (1.137) de fato ocorre.

Lema 1.10. *Para cada $b \in \mathbb{R}^N$ fixado, temos*

(i) $\|\Phi_{\delta,b}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \to 0$ *quando* $\delta \to +\infty$,

(ii) $|\Phi_{\delta,b}|_q \to 0$ *quando* $\delta \to 0$, $\forall q \in \left(\frac{N}{N-2s}, 2_s^*\right)$,

(iii) $|\Phi_{\delta,b}|_q \to +\infty$ *quando* $\delta \to +\infty$, $\forall q \in \left(\frac{N}{N-2s}, 2_s^*\right)$.

Demonstração: Pela definição de $\Phi_{\delta,b}$ temos

$$\Phi_{\delta,b}(x) = c\left(\frac{\delta}{\delta^2 + |x-b|^2}\right)^{(N-2s)/2} = c\delta^{(N-2s)/2}[\delta^2 + |x-b|^2]^{-(N-2s)/2}.$$

Calculando a i-ésima derivada parcial de $\Phi_{\delta,b}$ com relação a variável x, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\delta,b}(x)}{\partial x_i} &= c\delta^{(N-2s)/2}\left(\frac{2s-N}{2}\right)2(x_i - b_i)[\delta^2 + |x-b|^2]^{(2s-N-2)/2} \\ &= c\delta^{(N-2s)/2}(2s-N)(x_i - b_i)[\delta^2 + |x-b|^2]^{(2s-N-2)/2}, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} |\nabla \Phi_{\delta,b}(x)| &= \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \Phi_{\delta,b}(x)}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} \\ &= c\delta^{(N-2s)/2}(N-2s)|x-b|[\delta^2 + |x-b|^2]^{(2s-N-2)/2} \\ &= K\delta^{(N-2s)/2}|x-b|[\delta^2 + |x-b|^2]^{(2s-N-2)/2}, \end{aligned}$$

onde $K = c(N-2s)$.

Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(t) = K\delta^{(N-2s)/2} t[\delta^2 + t^2]^{(2s-N-2)/2}.$$

Observe que g é uma função não negativa, $g(0) = 0$ e $g(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Além disso, uma vez que a função g é contínua, concluimos que g admite valor máximo. No que segue, nosso objetivo será calcular o valor máximo de g. Para isto, note que

$$g'(t) = K\delta^{(N-2s)/2}\Big([\delta^2 + t^2]^{(2s-N-2)/2} - (N+2-2s)t^2[\delta^2 + t^2]^{(2s-N-4)/2}\Big).$$

Dessa forma, para calcular o ponto de máximo de g precisamos resolver a equação $g'(t) = 0$, que por sua vez é equivalente a resolver

$$K\delta^{(N-2s)/2}\Big([\delta^2 + t^2]^{(2s-N-2)/2} - (N+2-2s)t^2[\delta^2 + t^2]^{(2s-N-4)/2}\Big) = 0.$$

Entretanto, a igualdade acima ocorre se, e somente se,

$$[\delta^2 + t^2]^{(2s-N-2)/2} = (N+2-2s)t^2[\delta^2 + t^2]^{(2s-N-4)/2},$$

de onde deduzimos que

$$t = \left(\frac{\delta^2}{N+1-2s}\right)^{1/2}.$$

Aplicando g no ponto de máximo encontrado acima, por um cálculo direto vemos que

$$g\left(\frac{\delta}{(N+1-2s)^{1/2}}\right) = \tilde{K}\delta^{(2s-N-2)/2},$$

onde

$$\tilde{K} = K\frac{1}{(N+1-2s)^{1/2}}\left(\frac{N+2-2s}{N+1-2s}\right)^{(2s-N-2)/2}.$$

Assim, temos

$$\|\Phi_{\delta,b}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} = \tilde{K}\delta^{(2s-N-2)/2}.$$

Desde que $\tilde{K} > 0$ e $\dfrac{2s-N-2}{2} < 0$, segue-se que

$$\|\Phi_{\delta,b}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to +\infty,$$

mostrando que (i) ocorre.

Para provar os ítens (ii) e (iii), recordemos que na demonstração de (1.137), vimos que

$$|\Phi_{\delta,b}|_q^q = c^q \delta^{q(2s-N)/2+N} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz,$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1+|z|^2}\right]^{q(N-2s)/2} dz < +\infty, \quad \forall q \in \left(\frac{N}{N-2s}, 2_s^*\right).$$

Desde que $\dfrac{q(2s-N)}{2} + N > 0$ para todo $q < 2_s^*$, segue que

$$|\Phi_{\delta,b}|_q \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0$$

e

$$|\Phi_{\delta,b}|_q \to +\infty \quad \text{quando} \quad \delta \to +\infty$$

mostrando que (ii) e (iii) de fato ocorrem. ■

Lema 1.11. *Para cada $\epsilon > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2 dx \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0.$$

Demonstração: De [33, Proposição 2.2], inferimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2 dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\epsilon(0)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^2 dx. \tag{1.138}$$

Por outro lado, vimos na demonstração do ítem (i) do Lema 1.10 que

$$|\nabla \Phi_{\delta,b}(x)| = K\delta^{\frac{N-2s}{2}} |x-b| [\delta^2 + |x-b|^2]^{\frac{2s-N-2}{2}}, \quad \text{onde} \quad K = c(N-2s).$$

Em particular, temos

$$|\nabla\Phi_{\delta,0}(x)| = K\delta^{\frac{N-2s}{2}}\frac{|x|}{[\delta^2+|x|^2]^{N+2-2s/2}}. \tag{1.139}$$

Combinando (1.138) e (1.139), resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(0)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx \leq CK^2\delta^{N-2s}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(0)}\frac{|x|^2}{[\delta^2+|x|^2]^{N+2-2s}}dx.$$

Mudando para coordenadas esféricas, encontramos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(0)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx &\leq CK^2\delta^{N-2s}\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\rho^2}{[\delta^2+\rho^2]^{N+2-2s}}\rho^{N-1}d\rho\\ &\leq CK^2\delta^{N-2s}\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\rho^2}{\rho^{2N+4-4s}}\rho^{N-1}d\rho\\ &= CK^2\delta^{N-2s}\int_\epsilon^{+\infty}\rho^{4s-N-3}d\rho. \end{aligned}\tag{1.140}$$

Desde que $\displaystyle\int_\epsilon^{+\infty}\rho^{4s-N-3}d\rho < +\infty$, segue que

$$CK^2\delta^{N-2s}\int_\epsilon^{+\infty}\rho^{4s-N-3}d\rho \to 0 \;\text{ quando }\; \delta\to 0. \tag{1.141}$$

Juntando (1.140) e (1.141), concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(0)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx \to 0 \;\text{ quando }\; \delta\to 0,$$

como queríamos mostrar. ∎

Lema 1.12. *Assuma que a satisfaz* (a_2). *Então, para cada* $\epsilon > 0$, *existem* $\underline{\delta} = \underline{\delta}(\epsilon) > 0$ *e* $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\epsilon) > 0$ *tais que*

$$\sup_{b\in\mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,b}) < S+\epsilon, \quad \delta\in(0,\underline{\delta}]\cup[\bar{\delta},\infty).$$

Demonstração: Fixando $b \in \mathbb{R}^N$, $q \in \left(\frac{N}{2s}, p_2\right]$ e $t \in (1, +\infty)$ com $\frac{1}{q} + \frac{1}{t} = 1$. Temos

$$\frac{N}{N-2s} < 2t < 2_s^*. \tag{1.142}$$

De fato, primeiramente observemos que se $q \in \left(\frac{N}{2s}, p_2\right]$, então $q > 0$ e consequentemente

$$\frac{1}{q} > 0. \tag{1.143}$$

Como $\frac{N}{2s} < q$ e $\frac{1}{q} + \frac{1}{t} = 1$, temos

$$1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{t} < \frac{2s}{N} + \frac{1}{t} \Rightarrow 1 - \frac{2s}{N} < \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{N-2s}{N} < \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{N-2s}{2N} < \frac{1}{2t}$$

e portanto,

$$2t < \frac{2N}{N-2s} = 2_s^*. \tag{1.144}$$

Suponhamos, por contradição, que

$$2t \leq \frac{N}{N-2s}.$$

Daí, obtemos

$$\frac{2(N-2s)}{N} \leq \frac{1}{t},$$

e dessa forma,

$$\frac{1}{q} + \frac{2(N-2s)}{N} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{t} = 1$$

de onde resulta

$$\frac{1}{q} \leq 1 - \frac{2(N-2s)}{N}.$$

Logo,

$$\frac{1}{q} \leq \frac{N - 2N + 4s}{N} = \frac{4s - N}{N}. \tag{1.145}$$

Agora, temos dois casos a considerar: $N \geq 4s$ ou $N < 4s$.

Se $N \geq 4s$, temos por (1.145) que

$$\frac{1}{q} \leq \frac{4s-N}{N} \leq 0$$

e isso contradiz (1.143).

Se $N < 4s$, por hipótese, temos

$$p_2 < \frac{N}{4s-N}$$

e de (1.145) obtemos

$$p_2 < \frac{N}{4s-N} \leq q$$

o que contradiz o fato de $q \in \left(\frac{N}{2s}, p_2\right]$. Concluimos, então que

$$\frac{N}{N-2s} < 2t,$$

mostrando que (1.142) de fato ocorre.

Desde que $\Phi_{\delta,b} \in L^d(\mathbb{R}^N), \forall d \in \left(\frac{N}{N-2s}, 2_s^*\right)$, segue que $|\Phi_{\delta,b}|^2 \in L^t(\mathbb{R}^N)$. Portanto, aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes q e t, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx &\leq |a|_q \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^{2t} dx \right)^{1/t} \\
&= |a|_q \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{c\delta^{(N-2s)/2}}{[\delta^2 + |x-b|^2]^{(N-2s)/2}} \right|^{2t} dx \right)^{1/t}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x - b$, segue que $dx = dz$ e daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx &\leq |a|_q \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{c\delta^{(N-2s)/2}}{[\delta^2 + |x-b|^2]^{(N-2s)/2}} \right|^{2t} dx \right)^{1/t} \\
&= |a|_q \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{c\delta^{(N-2s)/2}}{[\delta^2 + |z|^2]^{(N-2s)/2}} \right|^{2t} dz \right)^{1/t} \\
&= |a|_q \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{2t} dz \right)^{1/t} \\
&= |a|_q |\Phi_{\delta,0}|_{2t}^2, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Pelo ítem (ii) do Lema 1.10 segue que dado $\epsilon > 0$, existe $\underline{\delta} = \underline{\delta}(\epsilon) > 0$, tal que

$$|\Phi_{\delta,0}|_{2t}^2 < \frac{\epsilon}{2|a|_q}, \quad \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \leq |a|_q |\Phi_{\delta,0}|_{2t}^2 < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \delta \in (0, \underline{\delta}] \ \text{ e } \ \forall b \in \mathbb{R}^N,$$

de onde deduzimos que

$$\sup_{b \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(\Phi_{\delta,b}) &= \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&= S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&\leq S + \sup_{b \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&\leq S + \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N \ \text{ e } \ \forall \delta \in (0, \underline{\delta}],
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\sup_{b \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,b}) \leq S + \frac{\epsilon}{2} < S + \epsilon, \quad \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Agora, fixemos novamente $b \in \mathbb{R}^N$ e assuma $q \in \left[p_1, \frac{N}{2s}\right)$ e $t \in (1, +\infty)$ com $\frac{1}{q} + \frac{1}{t} = 1$. Afirmamos que sob estas condições, tem-se $2t - 2_s^* > 0$. De fato,

$$q \in \left[p_1, \frac{N}{2s}\right) \Rightarrow \frac{2s}{N} < \frac{1}{q}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\frac{2s}{N} + \frac{1}{t} < \frac{1}{q} + \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow \frac{1}{t} < 1 - \frac{2s}{N} = \frac{N-2s}{N} \Rightarrow \frac{1}{2t} < \frac{N-2s}{2N} = \frac{1}{2_s^*} \\
&\Rightarrow 2_s^* < 2t \Rightarrow 2t - 2_s^* > 0.
\end{aligned}$$

Além disso, observe também que

$$|\Phi_{\delta,b}| \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N), \tag{1.146}$$

pois pela definição de $\Phi_{\delta,b}$, vemos que

$$|\Phi_{\delta,b}(x)| = \frac{c\delta^{(N-2s)/2}}{[\delta^2 + |x-b|^2]^{(N-2s)/2}} \leq \frac{c\delta^{(N-2s)/2}}{\delta^{N-2s}} = c\delta^{(2s-N)/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.147}$$

mostrando (1.146). Uma vez que (1.146) ocorre e que $|\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^{2t} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} |\Phi_{\delta,b}|^{2t-2_s^*} dx \leq |\Phi_{\delta,b}|_{\infty}^{2t-2_s^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx < \infty,$$

consequentemente, $|\Phi_{\delta,b}|^2 \in L^t(\mathbb{R}^N)$. Assim, aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes q e t, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx &\leq |a|_q \bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{2t} dz \bigg)^{1/t} \\
&= |a|_q \bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{2_s^*} |\Phi_{\delta,0}|^{2t-2_s^*} dz \bigg)^{1/t} \\
&\leq |a|_q |\Phi_{\delta,0}|_{\infty}^{(2t-2^*)/t} \bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{2^*} dz \bigg)^{1/t}.
\end{aligned}$$

Recordando que $|\Phi_{\delta,0}|_{2_s^*} = 1$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|f(\Phi_{\delta,b})|^2 dx \leq |a|_q |\Phi_{\delta,0}|_{\infty}^{(2t-2_s^*)/t}$$

e de (1.147)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx &\leq |a|_q |\Phi_{\delta,0}|_{\infty}^{(2t-2_s^*)/t} \leq |a|_q \Big(c\delta^{(N-2s)/2-(N-2s)} \Big)^{(2t-2_s^*)/t} \\
&= |a|_q c^{(2t-2_s^*)/t} \delta^{((2s-N)/2)((2t-2_s^*)/t)}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N,
\end{aligned}$$

de onde resulta que

$$\sup_{b\in\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \leq |a|_q c^{(2t-2_s^*)/t} \delta^{((2s-N)/2)((2t-2^*)/t)}. \tag{1.148}$$

Visto que $2t - 2_s^* > 0$ e $2s - N < 0$, segue que

$$\left(\frac{2s - N}{2}\right)\left(\frac{2t - 2_s^*}{t}\right) < 0. \tag{1.149}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\epsilon) > 0$, tal que

$$\delta^{((2s-N)/2)/2)((2t-2_s^*)/t)} < \frac{\epsilon}{2|a|_q c^{(2t-2_s^*)/t}}, \quad \forall \delta \in [\bar{\delta}, \infty).$$

De (1.148), temos

$$\sup_{b \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \leq |a|_q c^{(2t-2_s^*)/t} \delta^{((2s-N)/2)((2t-2_s^*)/t)} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \delta \in [\bar{\delta}, \infty).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f(\Phi_{\delta,b}) &= \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&\leq S + \sup_{b \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&< S + \frac{\epsilon}{2} < S + \epsilon, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall \delta \in [\bar{\delta}, \infty).
\end{aligned}$$

■

Lema 1.13. *Suponhamos que* $|a|_{N/2s} < S(2^{2s/N} - 1)$. *Então*

$$\sup_{\substack{b \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,b}) < 2^{2s/N} S.$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
f(\Phi_{\delta,b}) &= \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&= S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall \delta > 0.
\end{aligned}$$

Aplicando desigualdade de Hölder com expoentes $N/2s$ e $N/(N - 2s)$ e usando que

$|\Phi_{\delta,b}|_{2_s^*} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} f(\Phi_{\delta,b}) &= S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \leq S + |a|_{N/2s}\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\bigg)^{(N-2s)/N} \\ &= S + |a|_{N/2s}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

Lembrando que por hipótese

$$|a|_{N/2s} < S(2^{N/2s} - 1),$$

concluimos que

$$\sup_{\substack{b\in\mathbb{R}^N \\ \delta\in(0,\infty)}} f(\Phi_{\delta,b}) \leq S + S(2^{N/2s} - 1) = 2^{N/2s} S.$$

■

Consideremos a função

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 1, & \text{se} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

e definamos $\alpha : D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^{N+1}$ por

$$\alpha(u) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \bigg(\frac{x}{|x|}, \xi(x)\bigg)|(-\Delta)^{s/2} u|^2 dx = (\beta(u), \gamma(u)),$$

onde

$$\beta(u) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2} u|^2 dx \;\; \text{e} \;\; \gamma(x) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \xi(x)|(-\Delta)^{s/2} u|^2 dx.$$

A função α definida acima é conhecida na literatura como função baricentro. Além disso, α é contínua (veja Apêndice A, Teorema $A.2$).

Lema 1.14. *Se* $|b| \geq \frac{1}{2}$, *temos* $\beta(\Phi_{\delta,b}) = \frac{b}{|b|} + o_\delta(1)$ *quando* $\delta \to 0$.

Demonstração: Fixando $\epsilon > 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2 dz$$

e pelo Lema 1.11, existe $\hat{\delta} > 0$, tal que

$$\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx < \epsilon, \quad \forall \delta \in (0,\hat{\delta}). \tag{1.150}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\beta(\Phi_{\delta,b}) - \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right| &= \left|\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right.\\
&- \left.\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right|\\
&= \left|\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right|\\
&\leq \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} \frac{|x|}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx
\end{aligned}$$

e de (1.150), segue que

$$\begin{aligned}
\left|\beta(\Phi_{\delta,b}) - \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right| &\leq \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\\
&< \epsilon, \quad \forall \delta \in (0,\hat{\delta}).
\end{aligned} \tag{1.151}$$

Agora, notemos que se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $|b| > \frac{1}{2}$, então

$$\left|\frac{x}{|x|} - \frac{b}{|b|}\right| < 4\epsilon, \quad \forall x \in B_\epsilon(b).$$

De fato, se $x \in B_\epsilon(b)$ então $|x-b| < \epsilon$ e, além disso, se $|b| \geq \frac{1}{2}$, então $\frac{1}{|b|} \leq 2$. Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x}{|x|} - \frac{b}{|b|}\right| &= \left|\frac{x}{|x|} - \frac{x}{|b|} + \frac{x}{|b|} - \frac{b}{|b|}\right| \leq \left|\frac{x}{|x|} - \frac{x}{|b|}\right| + \left|\frac{x}{|b|} - \frac{y}{|b|}\right|\\
&= \left|\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|b|}\right||x| + \left|\frac{|x-b|}{|b|}\right| = \frac{||x|-|b||}{|x||b|}|x| + \frac{|x-b|}{|b|}\\
&= \frac{||x|-|b||}{|b|} + \frac{|x-b|}{|b|} \leq \frac{|x-b|}{|b|} + \frac{|x-b|}{|b|}\\
&< 2\epsilon + 2\epsilon\\
&= 4\epsilon.
\end{aligned}$$

Temos então que,

$$\left|\frac{b}{|b|} - \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right| = \left|\frac{Sb}{S|b|} - \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right|,$$

e recordando que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx = S$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b}{|b|} - \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right| &= \left|\frac{b}{S|b|}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right. \\
&- \left.\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{b}{|b|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right. \\
&- \left.\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right|.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{b}{|b|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} \frac{b}{|b|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&+ \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{b}{|b|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{b}{|b|} - \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right| &= \left|\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \left(\frac{b}{|b|} - \frac{x}{|x|}\right)|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right. \\
&+ \left.\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} \frac{b}{|b|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx\right| \\
&\leq \frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)} \left|\frac{b}{|b|} - \frac{x}{|x|}\right||(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&+ \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} \frac{|b|}{|b|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&\leq \frac{4\epsilon}{S}\int_{B_\epsilon(b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&+ \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx.
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}\left|\frac{b}{|b|}-\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)}\frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx\right| &< \frac{4\epsilon}{S}S+\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx\\ &= 4\epsilon+\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\epsilon(b)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx,\end{aligned}$$

obtemos de (1.150) que

$$\left|\frac{b}{|b|}-\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)}\frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx\right|<4\epsilon+\epsilon=C\epsilon,\quad\forall\delta\in(0,\hat{\delta}). \tag{1.152}$$

De (1.151) e (1.152), temos

$$\begin{aligned}\left|\beta(\Phi_{\delta,b})-\frac{b}{|b|}\right| &= \left|\beta(\Phi_{\delta,b})-\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)}\frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx\right.\\ &+ \left.\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)}\frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx-\frac{b}{|b|}\right|\\ &\le \left|\beta(\Phi_{\delta,b})-\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)}\frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx\right|\\ &+ \left|\frac{1}{S}\int_{B_\epsilon(b)}\frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2dx-\frac{b}{|b|}\right|\\ &< \epsilon+C\epsilon=K\epsilon,\quad\forall\delta\in(0,\hat{\delta}).\end{aligned}$$

∎

Lema 1.15. *Assuma que a satisfaz (a_2). Então, para qualquer $\delta>0$ fixado temos*

$$\lim_{|b|\to\infty}f(\Phi_{\delta,b})=S.$$

Demonstração: Desde que

$$f(\Phi_{\delta,b})=\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,y}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2dx=S+\int_{\mathbb{R}^N}a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2dx,$$

é suficiente provar que

$$\lim_{|b|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2dx=0,\quad\forall\delta>0. \tag{1.153}$$

Afirmamos que dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 > 0$, tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} a(x)^{N/2s} dx\right)^{2s/N} < \epsilon, \quad \forall \rho > k_1.$$

De fato, para cada $\rho > 0$, temos

$$\left| a(x)^{N/2} \chi_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} \right| \leq |a|^{N/2s},$$

onde $|a|^{N/2s} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $\rho \to +\infty$, temos

$$a(x)^{N/2s} \chi_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)}(x) \to 0 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{\rho \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} a(x)^{N/2s} dx = \lim_{\rho \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{N/2s} \chi_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} dx = 0$$

e portanto dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 > 0$, tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} a(x)^{N/2s} dx\right)^{2s/N} < \epsilon, \quad \forall \rho > k_1. \tag{1.154}$$

De modo análogo, mostra-se também que dado $\epsilon > 0$, existe $k_2 > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{1/2_s^*} = \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_\rho(0)} |\Phi_{\delta,0}|^{2_s^*} dz\right)^{1/2_s^*} < \epsilon, \quad \forall \rho > k_2. \tag{1.155}$$

Seja $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ e consideremos

$$k_0 < 2\rho < |b| \quad (\rho \ \text{ fixado}). \tag{1.156}$$

Observe que nessas condições, temos

$$B_\rho(0) \cap B_\rho(b) = \emptyset, \tag{1.157}$$

pois, caso contrário, se existisse $x \in B_\rho(0) \cap B_\rho(b)$ teríamos $|x| < \rho, \quad |x - b| < \rho$ e então,

$|b| < 2\rho$, o que contradiz (1.156). Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b))} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx + \int_{(B_\rho(0)\cup B_\rho(b))} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b))} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx + \int_{B_\rho(0)} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\ &+ \int_{B_\rho(b)} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $N/2s$ e $N/(N-2s)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b))} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b))} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N} \\ &+ \left(\int_{B_\rho(0)} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{B_\rho(0)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N} \\ &+ \left(\int_{B_\rho(b)} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{B_\rho(b)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N}.\end{aligned}$$

Observemos que $\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b)) \subset \mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)$, $\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b)) \subset \mathbb{R}^N\setminus B_\rho(b)$, $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^N$ e $B_\rho(b) \subset \mathbb{R}^N$. Além disso, de (1.157) segue que $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(b)$ e $B_\rho(b) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$ e portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2 dx &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b))} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus(B_\rho(0)\cup B_\rho(b))} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N} \\ &+ \left(\int_{B_\rho(0)} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{B_\rho(0)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N} \\ &+ \left(\int_{B_\rho(b)} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{B_\rho(b)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(b)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(b)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N} \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/2s} dx\right)^{2s/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*} dx\right)^{(N-2s)/N}.\end{aligned}$$

Recordando que

$$|\Phi_{\delta,b}|_{2_s^*} = 1,$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2dx \quad &\leq \quad \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/2s}dx\right)^{2s/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(b)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*}dx\right)^{(N-2s)/N}\\
&+ \quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} a^{N/2s}dx\right)^{2s/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(b)} |\Phi_{\delta,b}|^{2_s^*}dx\right)^{(N-2s)/N}\\
&+ \quad \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/2s}dx\right)^{2s/N}
\end{aligned}
$$

e de (1.154) e (1.155), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2dx < \epsilon\epsilon^2 + |a|_{N/2s}\epsilon^2 + \epsilon.$$

Assim,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2dx < \epsilon\epsilon^2 + |a|_{N/2s}\epsilon^2 + \epsilon$$

e passando ao limite de $\epsilon \to 0$, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,b}|^2dx = 0$$

como queríamos demonstrar. ■

Consideremos o seguinte conjunto

$$\Im = \left\{u \in \mathcal{M}; \alpha(u) = \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Antes de irmos ao próximo resultado, notemos que o conjunto $\Im$ definido acima é não-vazio. De fato, inicialmente observemos que $\Phi_{\delta,0} \in \mathcal{M}$ para todo $\delta > 0$. Além do mais, temos também

$$\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx \quad = \quad \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{S}\int_{B_R(0)} \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx.$$

Desde que a função $g_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_i(x) = \frac{x_i}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,0}(x)|^2$$

é uma função ímpar e $B_R(0)$ é simétrico, temos

$$\int_{B_R(0)} \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx = 0, \quad \forall R > 0,$$

e portanto,

$$\beta(\Phi_{\delta,0}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{S}\int_{B_R(0)} \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Além disso, pela definição de γ e ξ, obtemos

$$\gamma(\Phi_{\delta,0}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \xi(x)|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx$$

e do Lema 1.11, segue que

$$\gamma(\Phi_{\delta,0}) \to 0 \ \text{ quando } \ \delta \to 0. \tag{1.158}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta,0}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \xi(x)|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx \\
&= \frac{1}{S}S - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx \\
&= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx,
\end{aligned}$$

que juntamente com [33, Proposição 2.2] nos dá

$$\begin{aligned}
|\gamma(\Phi_{\delta,0}) - 1| &= \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dx \leq C\int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^2dx \\
&\leq C\int_{B_1(0)} \|\Phi_{\delta,0}\|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}dx = C|B_1(0)|\|\Phi_{\delta,0}\|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Aplicando o ítem (i) do Lema 1.10 na desigualdade acima, obtemos

$$\gamma(\Phi_{\delta,0}) \to 1 \ \text{ quando } \ \delta \to +\infty. \tag{1.159}$$

Desde que γ é contínua, usando o Teorema do Valor Intermediário, segue de (1.158) e (1.159) que existe $\delta_1 > 0$, tal que

$$\gamma(\Phi_{\delta_1,0}) = \frac{1}{2}. \tag{1.160}$$

Assim, de (1.158) e (1.160), segue que $\Phi_{\delta_1,0} \in \Im$.

Lema 1.16. *O número real $c_0 = \inf_{u \in \Im} f(u)$ satisfaz a desigualdade $c_0 > S$.*

Demonstração: Desde que $\Im \subset \mathcal{M}$, segue que

$$S \leq c_0.$$

Suponhamos, por contradição, que $S = c_0$. Então, pelo Princípio Variacional de Ekeland (ver Apêndice B, Proposição $B.1$), existe $(u_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_n|_{2_s^*} = 1, \quad \alpha(u_n) \to \left(0, \frac{1}{2}\right) \tag{1.161}$$

e

$$f(u_n) \to S, \quad f'|_{\mathcal{M}}(u_n) \to 0. \tag{1.162}$$

Daí, segue que (u_n) é limitada em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e portanto, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

Definindo $v_n = S^{(N-2s)/4s} u_n$ e $v_0 = S^{(N-2s)/4s} u_0$, temos $v_n \rightharpoonup v_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, de (1.162) e Lema 1.8, obtemos

$$I(v_n) \to \frac{s}{N} S^{N/2s} \;\text{ e }\; I'(v_n) \to 0.$$

Agora, mostraremos que $v_0 \equiv 0$. Para isto, note que

$$u_n \nrightarrow u_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \tag{1.163}$$

pois caso contrário, do fato de que $\mathcal{M}$ é fechado teríamos $u_0 \in \mathcal{M}$ e, portanto, $u_0 \neq 0$.

Assim, da continuidade de f teríamos $f(u_0) = S$ e daí,

$$\begin{aligned}
S &\leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_0|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2_s^*} dx\right)^{2/2_s^*}} = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_0|^2 dx \\
&< \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_0|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) |u_0|^{2_s^*} dx = S,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, $v_n \nrightarrow v_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e, desde que (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I, segue do Teorema 1.2 que

$$I(v_n) \to I(v_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j)$$

e da unicidade do limite

$$I(v_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) = \frac{s}{N} S^{N/2s}.$$

Desde que z_0^j é solução não-trivial do problema (P_∞), temos

$$I(v_0) = 0, \tag{1.164}$$

$$k = 1 \tag{1.165}$$

e

$$z_0^1 > 0. \tag{1.166}$$

Do fato de que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, temos que v_0 é solução fraca do problema (P) e por cálculos feitos na demonstração do Corolário 1.1, temos que

$$I(v_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2_s^*}\right) |v_0|_{2_s^*}^{2_s^*} = \frac{s}{N} |v_0|_{2_s^*}^{2_s^*}$$

e de (1.164) concluimos que $v_0 \equiv 0$. Assim, (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I tal que $v_n \rightharpoonup 0$ e $v_n \nrightarrow 0$.

Argumentando da mesma forma que fizemos no início da demonstração do Teorema 1.2, usando o Lema de Brezis-Lieb, mostra-se que $\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^2 dx = o_n(1)$, e assim,

$$\frac{s}{N}S^{N/2s} + o_n(1) = I(v_n) = I_\infty(v_n) + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^2 dx = I_\infty(v_n) + o_n(1). \tag{1.167}$$

Além disso, para todo $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
|I'_\infty(v_n)\varphi| &= \left| I'(v_n)\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)v_n\varphi dx \right| \\
&\leq |I'(v_n)\varphi| + \left| \int_{\mathbb{R}^N} a(x)v_n\varphi dx \right| \\
&= |I'(v_n)\varphi| + \left| \int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{1/2}v_n a(x)^{1/2}\varphi dx \right| \\
&\leq |I'(v_n)\varphi| + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{1/2}|v_n| a(x)^{1/2}|\varphi| dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, vem que

$$|I'_\infty(v_n)\varphi| \leq |I'(v_n)\varphi| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\varphi|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder com expoentes $N/2s$ e $N/(N-2s)$ na última integral da desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
|I'_\infty(v_n)\varphi| &\leq |I'(v_n)\varphi| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{N/2s} dx \right)^{\frac{2s}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{N-2s}{N}} \right\}^{1/2} \\
&= |I'(v_n)\varphi| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{N/2s} dx \right)^{\frac{s}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{2_s^*} dx \right)^{\frac{1}{2_s^*}} \\
&\leq |I'(v_n)\varphi| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |a|_{N/2s}^{1/2} |\varphi|_{2_s^*} \\
&\leq \|I'(v_n)\|_{D'}\|\varphi\| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} |a|_{N/2s}^{1/2} C\|\varphi\| \leq \|I'(v_n)\|_{D'} + o_n(1)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|I'_\infty(v_n)\|_{D'} \leq \|I'(v_n)\|_{D'} + o_n(1). \tag{1.168}$$

De (1.167) e (1.168) concluimos que (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞ e do Lema 1.7, segue que existem sequências $(R_n) \subset \mathbb{R}$, $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, uma solução não-trivial z_0^1 do problema (P_∞) e uma sequência (w_n) o qual é $(PS)_c$ para I_∞ tais que

$$w_n(x) = v_n(x) - R_n^{(N-2s)/2} z_0^1(R_n(x - x_n)) + o_n(1),$$

e assim,

$$v_n(x) = w_n(w) + R_n^{(N-2s)/2} z_0^1(R_n(x - x_n)) + o_n(1). \qquad (1.169)$$

Agora notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$z_n(x) = R_n^{(N-2s)/2} z_0^1(R_n(x - x_n))$$

é solução positiva de (P_∞). De fato, para todo $\varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$, definindo a sequência

$$\varphi_n(x) = R_n^{(2s-N)/2} \varphi\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)$$

e analogamente ao que fizemos na demonstração do Lema 1.7, mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} z_n (-\Delta)^{s/2} \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2} z_0 (-\Delta)^{s/2} \varphi_n dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{2_s^*-2} z_n \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |z_0^1|^{2_s^*-2} z_0^1 \varphi_n dx,$$

e portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$I'_\infty(z_n)\varphi = I'_\infty(z_0^1)\varphi_n = 0, \quad \forall \varphi \in D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, z_n é solução de (P_∞) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, da definição de z_n e de (1.166), temos $z_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, z_n é da forma

$$z_n(x) = c\left(\frac{\delta_n}{\delta_n^2 + |x - b_n|^2}\right)^{(N-2s)/2}.$$

De (1.169), segue que

$$\frac{v_n(x)}{S^{(N-2s)/4s}} = \frac{w_n(x)}{S^{(N-2s)/4s}} + \frac{1}{S^{(N-2s)/4s}} c\left(\frac{\delta_n}{\delta_n^2 + |x-b_n|^2}\right)^{(N-2s)/2} + o_n(1),$$

e lembrando que

$$v_n(x) = S^{(N-2s)/4s} u_n \quad \text{e} \quad \Phi_{\delta,b}(x) = \bar{c}\left(\frac{\delta}{\delta^2 + |x-b_n|^2}\right)^{(N-2s)/2},$$

obtemos

$$u_n(x) = \tilde{w}_n(x) + \Phi_{\delta_n,b_n}(x) + o_n(1),$$

onde

$$\tilde{w}_n(x) = \frac{1}{S^{(N-2s)/4s}} w_n(x).$$

Podemos supor que $w_n \to 0$, pois caso contrário existiria $k \geq 2$, tal que

$$I(v_n) \to \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j)$$

e isso contradiz (1.165). Portanto, $\tilde{w}_n \to 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Temos então de (1.161) que

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) + o_n(1) = \alpha(u_n) = \alpha(\tilde{w}_n + \Phi_{\delta_n,b_n} + o_n(1)) = \alpha(\Phi_{\delta_n,b_n})$$

e, portanto,

$$(i) \quad \beta(\Phi_{\delta_n,b_n}) \to 0$$

e

$$(ii) \quad \gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) \to \frac{1}{2}.$$

Passando a uma subsequência se necessário, um desses casos podem ocorrer:

(a) $\delta_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$;

(b) $\delta_n \to \tilde{\delta} \neq 0$ quando $n \to +\infty$;

(c) $\delta_n \to 0$ e $b_n \to \tilde{b}$ quando $n \to +\infty$ com $|\tilde{b}| < \frac{1}{2}$;

(d) $\delta_n \to 0$ quando $n \to +\infty$ e $|b_n| \geq \dfrac{1}{2}$ para n suficientemente grande.

Para concluir a demonstração do lema, provaremos que supondo válidas as possibilidades listadas acima, chegamos a uma contradição, e portanto, dessa contradição deduzimos o nosso resutado.

Suponhamos que (a) ocorre. Temos então

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \xi(x)|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx \\
&= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx,
\end{aligned}$$

que juntamente com [33, Proposição 2.2] nos dá

$$\begin{aligned}
|\gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) - 1| &= \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx \leq C\frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx \\
&\leq C\frac{1}{S}\int_{B_1(0)} \|\Phi_{\delta_n,b_n}\|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} dx = \frac{C}{S}|B_1(0)|\|\Phi_{\delta_n,b_n}\|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Desde que $\delta_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, segue do ítem (i) do Lema 1.10 que $\|\Phi_{\delta_n,b_n}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \to 0$ quando $n \to +\infty$ e, consequentemente,

$$\gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) \to 1, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

contradizendo (ii).

Suponha que (b) ocorre. Neste caso, podemos supor que $|b_n| \to +\infty$, porque caso contrário, se $b_n \to \tilde{b}$, segue que para cada $i = 1, 2, ..., N$,

$$\frac{c\left(\dfrac{\delta_n}{[\delta_n^2 + |x-b_n|^2]}\right)^{\frac{N-2s}{2}} - c\left(\dfrac{\delta_n}{[\delta_n^2 + |y-b_n|^2]}\right)^{\frac{N-2s}{2}}}{|x-y|^{N+2s}} \to$$

$$\frac{c\left(\dfrac{\tilde{\delta}}{[\tilde{\delta}^2 + |x-\tilde{b}|^2]}\right)^{\frac{N-2s}{2}} - c\left(\dfrac{\tilde{\delta}}{[\tilde{\delta}^2 + |y-\tilde{b}|^2]}\right)^{\frac{N-2s}{2}}}{|x-y|^{N+2s}} \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$\frac{|(\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y))-(\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(y))|^2}{|x-y|^{N+2s}}\to 0 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N.$$

Além disso, temos também

$$\begin{aligned}
&\frac{|(\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y))-(\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(y))|^2}{|x-y|^{N+2s}}\\
&\leq \frac{\Big(|\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y)|+|\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(y)|\Big)^2}{|x-y|^{N+2s}}\\
&\leq 4\bigg\{\frac{|\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}+\frac{|\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\bigg\}.
\end{aligned} \tag{1.170}$$

Agora, observando que

$$\begin{aligned}
\frac{|\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} &= \frac{\left|\dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta_n^2+|x-b_n|^2]^{\frac{N-2s}{2}}}-\dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta_n^2+|y-b_n|^2]^{\frac{N-2s}{2}}}\right|^2}{|x-y|^{N+2s}}\\
&= \delta_n^{2s-N}\frac{\left|\dfrac{c}{\left[1+\left|\dfrac{x-b_n}{\delta_n}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}}-\dfrac{c}{\left[1+\left|\dfrac{y-b_n}{\delta_n}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}}\right|^2}{|x-y|^{N+2s}}
\end{aligned}$$

e fazendo $z=\dfrac{x-b_n}{\delta_n}$ e $w=\dfrac{y-b_n}{\delta_n}$, obtemos

$$\frac{|\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}=\delta_n^{-2N}\frac{\left|\dfrac{c}{[1+|z|^2]^{\frac{N-2s}{2}}}-\dfrac{c}{[1+|w|^2]^{\frac{N-2s}{2}}}\right|^2}{|z-w|^{N+2s}}.$$

Desde que $\delta_n\to\tilde{\delta}\neq 0$, segue que $\delta_n^{-2N}\leq K$ para todo $n\in\mathbb{N}$, e portanto,

$$\frac{|\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\leq K\frac{|\Phi_{1,0}(z)-\Phi_{1,0}(w)|^2}{|z-w|^{N+2s}},\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

onde

$$K\frac{|\Phi_{1,0}(z)-\Phi_{1,0}(w)|^2}{|z-w|^{N+2s}}\in L^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N).$$

Assim, de (1.170) temos

$$\begin{aligned}&\frac{|(\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\delta_n,b_n}(y))-(\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(y))|^2}{|x-y|^{N+2s}}\\ &\leq 4\left\{K\frac{|\Phi_{1,0}(z)-\Phi_{1,b}(w)|^2}{|z-w|^{N+2s}}+\frac{|\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\right\}\in L^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\|\Phi_{\delta_n,b_n}-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}\|^2=\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}(\Phi_{\delta_n,b_n}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}(x))|^2dx\to 0,$$

e portanto,

$$\Phi_{\delta_n,b_n}\to\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{b}}\ \text{ em }\ D^{s,2}(\mathbb{R}^N).$$

Daí, desde que $\tilde{w}_n\to 0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n=\tilde{w}_n+\Phi_{\delta_n,b_n}+o_n(1)$, segue que (u_n) é convergente em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e isso contradiz (1.163). Assim,

$$\begin{aligned}\gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}\xi(x)|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2dx=\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2dx\\ &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2dx-\frac{1}{S}\int_{B_1(0)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2dx\\ &= 1-\frac{1}{S}\int_{B_1(-b_n)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2dx. \end{aligned}\tag{1.171}$$

Temos também

$$|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}(x)|^2\chi_{B_1(-b_n)}(x)\to 0\quad\text{q.t.p}\ \text{ em }\ \mathbb{R}^N$$

e

$$||(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}(x)|^2\chi_{B_1(-b_n)}(x)|\leq|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}(x)|^2\leq K|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}(x)|^2\in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{B_1(-b_n)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2dx\to 0$$

e de (1.171), encontramos

$$\gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

contradizendo (ii).

Suponha que (c) ocorre. Temos então

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \xi(x)|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,b_n}|^2 dx - \frac{1}{S}\int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz \\
&= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz. \qquad (1.172)
\end{aligned}$$

Agora, nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz = S, \qquad (1.173)$$

porque supondo que (1.173) ocorre, teremos de (1.172) que

$$\gamma(\Phi_{\delta_n,b_n}) \to 0,$$

contradizendo (ii). Para nosso propósito, observemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz = \int_{[B_1(-b_n)]^2} \frac{|\Phi_{\delta_n,0}(z) - \Phi_{\delta_n,0}(w)|^2}{|z-w|^{N+2s}} dzdw \\
&= \int_{[B_1(-b_n)]^2} \frac{\left| \dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta_n^2 + |z|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta_n^2 + |w|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|z-w|^{N+2s}} dzdw \\
&= \int_{[B_1(-b_n)]^2} \frac{\left| \dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta_n^{N-2s}\left[1 + \left|\dfrac{z}{\delta_n}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta_n^{N-2s}\left[1 + \left|\dfrac{w}{\delta_n}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|z-w|^{N+2s}} dzdw.
\end{aligned}$$

Fazendo $v = \dfrac{z}{\delta_n}$ e $t = \dfrac{w}{\delta_n}$, segue que

$$\begin{cases} z = \delta_n v \Rightarrow dz = \delta_n^N dv, \\ w = \delta_n t \Rightarrow dw = \delta_n^N dt. \end{cases}$$

Além disso, notemos também que $\delta_n v = z = z - (-b_n) - b_n$, e daí

$$v = \frac{z - (-b_n)}{\delta_n} - \frac{b_n}{\delta_n} \Rightarrow v - \left(\frac{-b_n}{\delta_n}\right) = \frac{z - (-b_n)}{\delta_n} \Rightarrow \left|v - \left(\frac{-b_n}{\delta_n}\right)\right| = \frac{|z - (-b_n)|}{\delta_n}$$

e desde que $z \in B_1(-b_n)$, obtemos

$$\left|v - \left(\frac{-b_n}{\delta_n}\right)\right| = \frac{|z - (-b_n)|}{\delta_n} < \frac{1}{\delta_n},$$

portanto, $v \in B_{\frac{1}{\delta_n}}\left(\frac{-b_n}{\delta_n}\right)$. De modo análogo, mostra-se também que $t \in B_{\frac{1}{\delta_n}}\left(\frac{b_n}{\delta_n}\right)$. Temos então

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz \\
&= \int_{[B_1(-b_n)]^2} \frac{\left| \dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta_n^{N-2s}\left[1 + \left|\dfrac{z}{\delta_n}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c\delta_n^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta_n^{N-2s}\left[1 + \left|\dfrac{w}{\delta_n}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|z - w|^{N+2s}} dzdw \\
&= \int_{[B_{\frac{1}{\delta_n}}(-\frac{b_n}{\delta_n})]^2} \frac{\left| \dfrac{c}{[1 + |v|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c}{[1 + |t|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|v - t|^{N+2s}} dvdt \\
&= \int_{[B_{\frac{1}{\delta_n}}(-\frac{b_n}{\delta_n})]^2} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv.
\end{aligned}$$

Agora, para cada n suficientemente grande, vale

$$B_{\frac{1}{2\delta_n}}(0) \subset B_{\frac{1}{\delta_n}}\left(\frac{-b_n}{\delta_n}\right). \tag{1.174}$$

De fato, desde que $b_n \to \tilde{b}$ e $|\tilde{b}| < \dfrac{1}{2}$, temos $|b_n| < \dfrac{1}{2}$ para n suficientemente grande e daí, se $\sigma \in B_{\frac{1}{2\delta_n}}(0)$, então

$$\left|\sigma - \left(\frac{-b_n}{\delta_n}\right)\right| \leq |\sigma| + \frac{|b_n|}{\delta_n} < \frac{1}{2\delta_n} + \frac{1}{2\delta_n} = \frac{1}{\delta_n},$$

logo $\sigma \in B_{\frac{1}{\delta_n}}\left(\frac{-b_n}{\delta_n}\right)$. Segue então de (1.174) que

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{2\delta_n}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv &\leq \int_{B_{\frac{1}{\delta_n}}(\frac{-b_n}{\delta_n})} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv \\ &= \int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz = S. \end{aligned} \tag{1.175}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$||(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 \chi_{B_{\frac{1}{2\delta_n}}(0)}| \leq |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2,$$

onde $|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $n \to +\infty$, então

$$|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}(w)|^2 \chi_{B_{\frac{1}{2\delta_n}}(0)}(w) \to |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}(w)|^2 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{B_{\frac{1}{2\delta_n}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 \chi_{B_{\frac{1}{2\delta_n}}(0)} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv = S, \end{aligned}$$

e usando o Teorema do Sanduíche em (1.175), concluimos que existe o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz,$$

e que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_1(-b_n)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta_n,0}|^2 dz = S,$$

mostrando que (1.173) de fato ocorre.

Suponhamos que (d) ocorre. Desde que $|b_n| \geq \dfrac{1}{2}$ para n grande, então $b_n \nrightarrow 0$ em $\mathbb{R}^N$. Do Lema 1.14, temos que

$$\beta(\Phi_{\delta_n,b_n}) = \frac{b_n}{|b_n|} + o_n(1)$$

logo,

$$\beta(\Phi_{\delta_n,b_n}) \nrightarrow 0,$$

contradizendo (i). Portanto, destas contradições, concluimos que $S < c_0$, como queríamos mostrar. ∎

Lema 1.17. *Existe $\delta_1 \in (0, 1/2)$ tal que*

(a) $f(\Phi_{\delta_1,b}) < \dfrac{S + c_0}{2}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N$;

(b) $\gamma(\Phi_{\delta_1,b}) < \dfrac{1}{2}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N$ *tal que* $|b| < \dfrac{1}{2}$;

(c) $\left|\beta(\Phi_{\delta_1,b}) - \dfrac{b}{|b|}\right| < \dfrac{1}{4}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N$ *tal que* $|b| \geq \dfrac{1}{2}$.

Demonstração: Do Lema 1.12 temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\underline{\delta} = \underline{\delta}(\epsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{b \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,b}) < S + \epsilon, \quad \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Daí, tomando $\epsilon = \dfrac{c_0 - S}{2} > 0$ e escolhendo $\delta_2 < \min\{\underline{\delta}, 1/2\}$ temos

$$f(\Phi_{\delta_2,b}) \leq \sup_{b \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,b}) < S + \frac{c_0 - S}{2} = \frac{S + c_0}{2}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N. \tag{1.176}$$

Recordando que

$$\gamma(\Phi_{\delta,b}) = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} \xi(x) |(-\Delta)^{s/2} \Phi_{\delta,b}|^2 dx,$$

segue da definição de ξ que

$$\gamma(\Phi_{\delta,b}) = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} \xi(x) |(-\Delta)^{s/2} \Phi_{\delta,b}|^2 dx = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2} \Phi_{\delta,b}|^2 dx,$$

e desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx - \int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta,b}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&= \frac{1}{S}S - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2 dz.
\end{aligned}$$

Para alcançar nosso objetivo, precisamos mostrar que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2 dz = S.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2}\phi_{\delta,0}|^2 dz \\
&= \int_{[B_1(-b)]^2} \frac{|\Phi_{\delta,0}(z) - \Phi_{\delta,0}(w)|^2}{|z-w|^{n+2s}} dzdw \\
&= \int_{[B_1(-b)]^2} \frac{\left| \dfrac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2+|z|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2+|w|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|z-w|^{N+2s}} dzdw \\
&= \int_{[B_1(-b)]^2} \frac{\left| \dfrac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta^{N-2s}\left[1+\left|\dfrac{z}{\delta}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta^{N-2s}\left[1+\left|\dfrac{w}{\delta}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|z-w|^{N+2s}} dzdw.
\end{aligned}$$

Fazendo $v = \dfrac{z}{\delta}$, $t = \dfrac{w}{\delta}$, segue que

$$\begin{cases} z = \delta v \Rightarrow dz = \delta^N dv, \\ w = \delta t \Rightarrow dw = \delta^N dt. \end{cases}$$

Além disso, notemos que

$$\delta v = z = z - (-b) - b$$

e daí,

$$v = \frac{z-(-b)}{\delta} - \frac{b}{\delta} \;\Rightarrow\; v - \left(-\frac{b}{\delta}\right) = \frac{z-(-b)}{\delta}$$
$$\Rightarrow\; \left|v - \left(-\frac{b}{\delta}\right)\right| = \left|\frac{z-(-b)}{\delta}\right| = \frac{|z-(-b)|}{\delta}$$

e desde que $z \in B_1(-b)$, obtemos

$$\left|v - \left(-\frac{b}{\delta}\right)\right| = \frac{|z-(-b)|}{\delta} < \frac{1}{\delta}$$

e portanto,

$$v \in B_{\frac{1}{\delta}}\left(-\frac{b}{\delta}\right).$$

De modo análogo, mostra-se que

$$t \in B_{\frac{1}{\delta}}\left(-\frac{b}{\delta}\right).$$

Temos então

$$\begin{aligned}
&\int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2}\phi_{\delta,0}|^2 dz \\
&= \int_{[B_1(-b)]^2} \frac{\left|\dfrac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta^{N-2s}\left[1+\left|\dfrac{z}{\delta}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{\delta^{N-2s}\left[1+\left|\dfrac{w}{\delta}\right|^2\right]^{\frac{N-2s}{2}}}\right|^2}{|z-w|^{N+2s}} dzdw \\
&= \int_{[B_{\frac{1}{\delta}}(-\frac{b}{\delta})]^2} \frac{\left|\dfrac{c}{[1+|v|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} - \dfrac{c}{[1+|t|^2]^{\frac{N-2s}{2}}}\right|^2}{|v-t|^{N+2s}} dvdt \\
&= \int_{[B_{\frac{1}{\delta}}(-\frac{b}{\delta})]^2} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv.
\end{aligned}$$

Notemos agora que

$$B_{\frac{1}{2\delta}}(0) \subset B_{\frac{1}{\delta}}\Big(-\frac{b}{\delta}\Big). \tag{1.177}$$

De fato, se $\sigma \in B_{\frac{1}{2\delta}}(0)$, então

$$\left|\sigma - \Big(-\frac{b}{\delta}\Big)\right| \leq |\sigma| + \left|\frac{b}{\delta}\right| < \frac{1}{2\delta} + \frac{|b|}{\delta}.$$

Por hipótese, temos que $|b| < \dfrac{1}{2}$, logo

$$\left|\sigma - \Big(-\frac{b}{\delta}\Big)\right| < \frac{1}{2\delta} + \frac{|b|}{\delta} < \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{2\delta} = \frac{1}{\delta}$$

e daí, $\sigma \in B_{\frac{1}{\delta}}\Big(-\dfrac{b}{\delta}\Big)$.

Segue então de (1.177) que

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{1}{2\delta}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv &\leq \int_{B_{\frac{1}{\delta}}(-\frac{b}{\delta})} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv = \int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2 dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2 dz = S. \end{aligned} \tag{1.178}$$

Por outro lado, para cada $\delta > 0$ temos

$$\Big| |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 \chi_{B_{\frac{1}{2\delta}}(0)} \Big| \leq |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2,$$

onde $|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $\delta \to 0$ então

$$|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}(v)|^2 \chi_{B_{\frac{1}{2\delta}}}(v) \to |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}(v)|^2 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\int_{B_{\frac{1}{2\delta}}(0)} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 \chi_{B_{\frac{1}{2\delta}}(0)} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}\Phi_{1,0}|^2 dv = S.\end{aligned}$$

Tento em conta essa última convergência, podemos aplicar o Teorema do Sanduiche em (1.178) para concluir que existe o limite

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B_1(-b)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dz,$$

e que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B_1(-b)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dz = S.$$

Assim,

$$\gamma(\Phi_{\delta,b}) = 1-\frac{1}{S}\int_{B_1(-b)}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,0}|^2dz \to 0 \ \text{ quando } \ \delta\to 0$$

e portanto, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que $\gamma(\Phi_{\delta,b}) < \dfrac{1}{2}$ para todo $\delta \in (0,\hat{\delta})$. Escolhendo $\delta_3 < \min\{\hat{\delta}, 1/2\}$ temos que

$$\gamma(\Phi_{\delta_3,b}) < \frac{1}{2}, \quad \forall b\in\mathbb{R}^N; \ |b| < \frac{1}{2}. \tag{1.179}$$

Agora, pelo Lema 1.14, temos

$$\beta(\Phi_{\delta,b}) = \frac{b}{|b|} + o_\delta(1) \ \text{ quando } \ \delta\to 0, \quad \forall b\in\mathbb{R}^N; \ |b| \geq \frac{1}{2}.$$

Assim, existe $\tilde{\delta} > 0$, tal que

$$\left|\beta(\Phi_{\delta,b}) - \frac{b}{|b|}\right| < \frac{1}{4}, \quad \forall \delta\in(0,\hat{\delta}) \ \text{ e } \ \forall b\in\mathbb{R}^N; \ |b|\geq\frac{1}{2}.$$

Escolhendo $\delta_4 < \min\{\tilde{\delta}, 1/2\}$, temos

$$\left|\beta(\Phi_{\delta_4,b}) - \frac{b}{|b|}\right| < \frac{1}{4}, \quad \forall b\in\mathbb{R}^N; \ |b|\geq\frac{1}{2}. \tag{1.180}$$

Para finalizar a demonstração do lema, basta escolher $\delta_1 = \min\{\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$ que o resultado segue de (1.176), (1.179) e (1.180). ■

Lema 1.18. *Existe* $\delta_2 > \dfrac{1}{2}$ *tal que*

(a) $f(\Phi_{\delta_2,b}) < \dfrac{S+c_0}{2}, \quad \forall b\in\mathbb{R}^N,$

(b) $\gamma(\Phi_{\delta_2,b}) > \dfrac{1}{2}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N.$

Demonstração: Do Lema 1.12, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\epsilon) > 0$, tal que

$$\sup_{b \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,b}) < S + \epsilon, \quad \forall \delta \in [\bar{\delta}, +\infty).$$

Daí, tomando $\epsilon = \dfrac{c_0 - S}{2} > 0$ e escolhendo $\delta_3 > \max\{\bar{\delta}, 1/2\}$, temos

$$f(\Phi_{\delta_3,b}) \leq \sup_{b \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta_3,b}) < S + \frac{c_0 - S}{2} = \frac{S + c_0}{2}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N. \tag{1.181}$$

Além disso, na demonstração do Lema 1.16, argumentamos que

$$\gamma(\Phi_{\delta,b}) = 1 - \frac{1}{S} \int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2} \Phi_{\delta,0}|^2 dz. \tag{1.182}$$

Dessa forma, para todo $b \in \mathbb{R}^N$, aplicando a Proposição 2.2 de [33], encontramos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2} \Phi_{\delta,0}|^2 dz &\leq C \int_{B_1(-b)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^2 dz \\ &\leq C \int_{B_1(-b)} \|\Phi_{\delta,0}\|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} dx = C|B_1(-b)| \|\Phi_{\delta,0}\|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Do ítem (i) do Lema 1.10, temos

$$\|\Phi_{\delta,0}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to +\infty,$$

e portanto, para todo $b \in \mathbb{R}^N$ temos

$$\int_{B_1(-b)} |(-\Delta)^{s/2} \Phi_{\delta,0}|^2 dz \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to +\infty.$$

Dessa última convergência juntamente com (1.182), resulta que para cada $b \in \mathbb{R}^N$, $\gamma(\Phi_{\delta,b}) \to 1$ quando $\delta \to +\infty$. Logo, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$\gamma(\Phi_{\delta,b}) > \frac{1}{2}, \quad \forall \delta \in (\hat{\delta}, +\infty).$$

Escolhendo $\delta_4 > \max\{\hat{\delta}, 1/2\}$ temos

$$\gamma(\Phi_{\delta_4,b}) > \frac{1}{2}, \quad \forall b \in \mathbb{R}^N. \tag{1.183}$$

Agora, escolhendo $\delta_2 = \max\{\delta_3, \delta_4\}$ o resultado segue de (1.181) e (1.183). ■

Lema 1.19. *Existe $R > 0$ tal que*

(a) $f(\Phi_{\delta,b}) < \dfrac{S + c_0}{2}, \quad \forall b; \;\; |b| \geq R$ *e* $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$,

(b) $(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} > 0 \;\; \forall b; \;\; |b| \geq R$ *e* $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$.

Demonstração: Segue do Lema 1.15, que dado $\epsilon = \dfrac{c_0 - S}{2} > 0$, existe $R_1 > 0$ tal que

$$f(\Phi_{\delta,b}) < S + \frac{c_0 - S}{2} = \frac{S + c_0}{2}, \quad \forall \delta \in [\delta_1, \delta_2] \;\text{ e }\; \forall b \in \mathbb{R}^N; \;\; |b| > R_1. \tag{1.184}$$

Agora, para cada $b \in \mathbb{R}^N$, consideremos os conjuntos $(\mathbb{R}^N)_b^+ = \{x \in \mathbb{R}^N; (x|b)_{\mathbb{R}^N} > 0\}$, $(\mathbb{R}^N)_b^- = \mathbb{R}^N \setminus (\mathbb{R}^N)_b^+$ e também $\tilde{b} \in \mathbb{R}^N$ tal que $|b - \tilde{b}| = 1/2$ e $r \in (0, 1/4)$.

Afirmamos que existe $\hat{R}_2 > 0$ tal que, para todo $b \in \mathbb{R}^N$ com $|b| > \hat{R}_2$ temos $B_r(\tilde{b}) \subset (\mathbb{R}^N)_b^+$. De fato, note que

$$|x - b|^2 = |x|^2 - 2(x|b)_{\mathbb{R}^N} + |b|^2,$$

ou seja,

$$(x|b)_{\mathbb{R}^N} = \frac{|x|^2}{2} - \frac{|x - b|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2} \geq -\frac{|x - b|^2}{2} + \frac{|b|^2}{2}.$$

Se $x \in B_r(\tilde{b})$, então

$$|x - b| = |x - \tilde{b} + \tilde{b} - b| \leq |x - \tilde{b}| + |b - \tilde{b}| < r + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \tag{1.185}$$

e portanto,

$$(x|b)_{\mathbb{R}^N} > -\frac{9}{32} + \frac{|b|^2}{2}.$$

Daí, tomando $\hat{R}_2 > 3/4$, segue que se $b \in \mathbb{R}^N$ é tal que $|b| > \hat{R}_2$, então

$$(x|b)_{\mathbb{R}^N} > -\frac{9}{32} + \frac{\hat{R}_2^2}{2} > 0,$$

e portanto, $x \in (\mathbb{R}^N)_b^+$. Além disso, observe que se $b \in \mathbb{R}^N$ é tal que $|b| > \hat{R}_2$, então

$$\begin{aligned}\frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|b|} &= \frac{|x|^2}{2|b|} - \frac{|x-b|^2}{2|b|} + \frac{|b|}{2} \geq -\frac{|x-b|^2}{2|b|} + \frac{|b|}{2} \\ &> -\frac{9}{32|b|} + \frac{|b|}{2} > -\frac{9}{32\hat{R}_2} + \frac{\hat{R}_2}{2} > 0, \quad \forall x \in B_r(\tilde{b}). \end{aligned} \tag{1.186}$$

Mostraremos agora que existe uma constante $H_1 > 0$, tal que

$$\frac{|\Phi_{\delta,b}(x) - \Phi_{\delta,b}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} > H_1, \quad \forall x, y \in B_r(\tilde{b}). \tag{1.187}$$

De fato, temos que

$$\frac{|\phi_{\delta,b}(x) - \Phi_{\delta,b}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} = \frac{\left| \frac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2 + |x-b|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} - \frac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2 + |y-b|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|x-y|^{N+2s}},$$

assim, se $x \in B_r(\tilde{b})$, então por (1.185) temos $|x-b| < 3/4$ e, além disso,

$$|x-b| \geq |b-\tilde{b}| - |x-\tilde{b}| > \frac{1}{2} - r > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Da mesma forma, mostra-se que se $y \in B_r(\tilde{b})$, então

$$|y-b| \geq |b-\tilde{b}| - |y-\tilde{b}| > \frac{1}{2} - r > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{|\phi_{\delta,b}(x) - \Phi_{\delta,b}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} &= \frac{\left| \frac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2 + |x-b|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} - \frac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2 + |y-b|^2]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{|x-y|^{N+2s}} \\ &\geq \frac{\left| \frac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2 + (\frac{3}{4})^2]^{\frac{N-2s}{2}}} - \frac{c\delta^{\frac{N-2s}{2}}}{[\delta^2 + (\frac{1}{4})^2]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2}{(2r)^{N+2s}} \\ &= \frac{c^2\delta^{N-2s}}{(2r)^{N+2s}} \left| \frac{1}{[\delta^2 + \frac{9}{16}]^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{1}{[\delta^2 + \frac{1}{16}]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2 \\ &\geq \frac{c^2\delta_1^{N-2s}}{(2r)^{N+2s}} \left| \frac{1}{[\delta_2^2 + \frac{9}{16}]^{\frac{N-2}{2}}} - \frac{1}{[\delta_1^2 + \frac{1}{16}]^{\frac{N-2s}{2}}} \right|^2 = H_1 > 0. \end{aligned}$$

Afirmamos que existe uma constante $H_2 > 0$ tal que

$$\frac{|\Phi_{\delta,b}(x) - \Phi_{\delta,b}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \leq \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}}, \quad \forall x \in (\mathbb{R}^N)_b^-. \tag{1.188}$$

De fato, temos

$$\frac{|\Phi_{\delta,b}(x) - \Phi_{\delta,b}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \leq \frac{|\Phi_{\delta,b}(x)|^2}{d_0^{N+2s}} \leq \frac{c^2\delta^{N-2s}}{d_0^{N+2s}} \frac{1}{|x-b|^{2N-2s}} \leq \frac{c^2\delta_2^{N-2s}}{d_0^{N+2s}} \frac{1}{|x-b|^{2N-2s}},$$

onde $d_0 = \min\{|x-b|, 1\}$. Daí, basta tomar $H_2 = \dfrac{c^2\delta_2^{N-2s}}{d_0^{N+2s}}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} &= \left(\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}(x)|^2 dx \middle| b\right)_{\mathbb{R}^N} \\
&= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^+} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx + \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx
\end{aligned}$$

e de (1.187), segue que

$$(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{b})} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} H_1 dx + \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx$$

para todo $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y| > \hat{R}_2$ e para todo $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$.

Pela desigualdade de Schwarz, temos

$$-(x|b)_{\mathbb{R}^N} \leq |(x|b)_{\mathbb{R}^N}| \leq |x||b| \Rightarrow \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} \geq -|b|.$$

Daí,

$$(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{b})} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} H_1 dx + \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} -|b||(-\Delta)^{s/2}\Phi_{\delta,b}|^2 dx,$$

e de (1.188) obtemos

$$\begin{aligned}
(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} &\geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{b})} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} H_1 dx - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} |b| \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}} dx \\
&= \frac{|b|}{S}\int_{B_r(\tilde{b})} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x||b|} H_1 dx - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} |b| \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $C = -\dfrac{9}{32\hat{R}_2} + \dfrac{\hat{R}_2}{2} > 0$, segue de (1.186) que

$$\frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{b})} \frac{(x|b)_{\mathbb{R}^N}}{|x||b|} H_1 dx \geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{b})} \frac{C}{|x|} H_1 dx = H_3 > 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} &\geq |b|H_3 - |b|\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}} dx \\ &= |b|\left\{H_3 - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}} dx\right\}\end{aligned}$$

para todo $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $|b| > \hat{R}_2$ e para todo $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$.

Agora, nosso objetivo é mostrar que existe $\tilde{R}_2 > 0$, tal que, para todo $b \in \mathbb{R}^N$ com $|b| > \tilde{R}_2$, temos

$$\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}} dx < H_3.$$

De fato, fazendo $z = x - b$, segue que $dx = dz$. Além disso, se $x \in (\mathbb{R}^N)_b^-$, então

$$|z|^2 = |x-b|^2 = |x|^2 - 2(x|b)_{\mathbb{R}^N} + |b|^2 \geq |b|^2,$$

e portanto, $z \in B^c_{|b|}(0)$. Assim,

$$\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}} dx \leq \frac{1}{S}\int_{B^c_{|b|}(0)} \frac{H_2}{|z|^{2N-2s}} dz,$$

e mudando para coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}} dx &\leq \frac{1}{S}\int_{|b|}^{+\infty} \frac{H_2}{\rho^{2N-2s}} \rho^{N-1} d\rho \\ &\leq \frac{1}{S}\lim_{l\to+\infty}\int_{|b|}^{l} H_2 \rho^{2s-N-1} d\rho \\ &= \frac{H_2}{S}\lim_{l\to+\infty}\left[\frac{1}{2s-N}\rho^{2s-N}\right]_{|b|}^{l} \\ &= \frac{H_2}{S}\frac{1}{N-2s}|b|^{2s-N}.\end{aligned}$$

Sendo assim, tomando

$$\tilde{R}_2 = \left(\frac{H_2}{H_3}\frac{1}{S}\frac{1}{N-2s}\right)^{\frac{1}{N-2s}} > 0,$$

segue que para todo $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $|b| > \tilde{R}_2$, encontramos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}}dx &\leq \frac{H_2}{S}\frac{1}{N-2s}|b|^{2s-N} \\
&< \frac{H_2}{S}\frac{1}{N-2s}\left[\left(\frac{H_2}{H_3}\frac{1}{S}\frac{1}{N-2s}\right)^{\frac{1}{N-2s}}\right]^{2s-N} \\
&= \frac{H_2}{S}\frac{1}{N-2s}\left(\frac{H_2}{H_3}\frac{1}{S}\frac{1}{N-2s}\right)^{-1} = H_3.
\end{aligned}$$

Fazendo $R_2 = \max\{\hat{R}_2, \tilde{R}_2\}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} &\geq |b|\left\{H_3 - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}}dx\right\} \\
&> R_2\left\{H_3 - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_b^-} \frac{H_2}{|x-b|^{2N-2s}}dx\right\} > 0 \qquad (1.189)
\end{aligned}$$

para todo $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $|b| > R_2$ e para todo $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$. Agora, escolhendo $R > \max\{R_1, R_2\}$, o resultado segue de (1.184) e (1.189). ∎

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{V} = \left\{(b,\delta) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times (0,\infty); |b| < R \ \text{ e } \ \delta \in (\delta_1, \delta_2)\right\},$$

onde δ_1, δ_2 e R são dados pelo Lemas 1.17, 1.18 e 1.19, respectivamente.

Seja $Q : \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \to D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$Q(b,\delta) = \Phi_{\delta,b}.$$

Notemos que Q é contínua.

Consideremos ainda os seguintes conjuntos:

$$\Theta = \left\{Q(b,\delta); (b,\delta) \in \overline{\mathcal{V}}\right\},$$

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in C(\Sigma \cap \mathcal{M}, \Sigma \cap \mathcal{M}); h(u) = u, \forall u \in (\Sigma \cap \mathcal{M}); f(u) < \frac{S + c_0}{2} \right\}$$

e

$$\Gamma = \left\{ \mathcal{A} \subset (\Sigma \cap \mathcal{M}); \mathcal{A} = h(\Theta), h \in \mathcal{H} \right\}.$$

Notemos que $\Theta \subset (\Sigma \cap \mathcal{M})$. Além disso, $\Theta = Q(\overline{\mathcal{V}})$ é compacta, pois Q é contínua e $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathbb{R}^N$ é compacto.

Temos também que $\mathcal{H} \neq \emptyset$, pois denotando por i a função identidade temos que $i \in \mathcal{H}$.

Finalmente, para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$ temos que $\mathcal{A}$ é compacto, pois para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$ temos $\mathcal{A} = h(\Theta)$, onde $h \in \mathcal{H}$ é uma função contínua.

Lema 1.20. *Seja $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{V}} \to \mathbb{R}^{N+1}$ dada por*

$$\mathcal{F}(b, \delta) = (\alpha \circ Q)(b, \delta) = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{x}{|x|}, \xi(x) \right) |(-\Delta)^{s/2} \Phi_{\delta,b}|^2 dx.$$

Então,

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, (0, 1/2)) = 1,$$

onde $d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, (0, 1/2))$ denota o grau topológico de Brower da aplicação $\mathcal{F}$ em relação a $\mathcal{V}$ no ponto $(0, 1/2)$.

Demonstração: Desde que Q e α são funções contínuas, segue que $\mathcal{F} = \alpha \circ Q$ é contínua. Notemos também que $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Consideremos a homotopia

$$\mathcal{Z} : [0, 1] \times \overline{\mathcal{V}} \to \mathbb{R}^{N+1}$$

dada por

$$\mathcal{Z}(t, (b, \delta)) = t\mathcal{F}(b, \delta) + (1 - t) i_{\overline{\mathcal{V}}}(b, \delta),$$

onde $i_{\overline{\mathcal{V}}}$ é a projeção de $\overline{\mathcal{V}}$ em $\mathbb{R}^{N+1}$.

Provaremos primeiramente que $(0, 1/2) \notin \mathcal{Z}([0, 1] \times (\partial \mathcal{V}))$, ou seja, que para todo

$t \in [0,1]$ e para todo $(b,\delta) \in \partial\mathcal{V}$ temos

$$\begin{aligned} t(\alpha \circ Q)(b,\delta) + (1-t)(b,\delta) &= t\alpha(Q(b,\delta)) + (1-t)(b,\delta) \\ &= t\alpha(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)(b,\delta) \neq \left(0, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

ou ainda, que

$$t\beta(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)b \neq 0, \quad \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (b,\delta) \in \partial\mathcal{V} \tag{1.190}$$

ou

$$t\gamma(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)\delta \neq \frac{1}{2}, \quad \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (b,\delta) \in \partial\mathcal{V}. \tag{1.191}$$

Notemos que $\partial\mathcal{V} = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4$, onde

$$\Lambda_1 = \{(b,\delta_1); |b| < 1/2\},$$

$$\Lambda_2 = \{(b,\delta_1); 1/2 \leq |b| \leq R\},$$

$$\Lambda_3 = \{(b,\delta); |b| \leq R\}$$

e

$$\Lambda_4 = \{(b,\delta); |b| = R \text{ e } \delta \in [\delta_1, \delta_2]\}.$$

Se $(b,\delta) \in \Lambda_1$, então $(b,\delta) = (b,\delta_1)$. Além disso, do Lema 1.17, temos que $\delta_1 < \dfrac{1}{2}$ e do ítem (b) do Lema 1.17 segue que $\gamma(\Phi_{\delta,b}) < \dfrac{1}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned} t\gamma(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)\delta &= t\gamma(\Phi_{\delta_1,b}) + (1-t)\delta_1 \\ &< t\frac{1}{2} + (1-t)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (b,\delta) \in \Lambda_1. \end{aligned}$$

Logo, (1.191) ocorre e portanto $(0,1/2) \notin \mathcal{Z}([0,1] \times \Lambda_1)$.

Se $(b,\delta) \in \Lambda_2$, então $(b,\delta) = (b,\delta_1)$ e $|b| \geq \dfrac{1}{2}$. Assim,

$$|t\beta(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)b| = |t\beta(\Phi_{\delta_1,b}) + (1-t)b|. \tag{1.192}$$

Usando desigualdade triangular, vem que

$$
\begin{aligned}
|t\beta(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)b| &\geq \left|(1-t)b + \frac{tb}{|b|}\right| - \left|\frac{tb}{|b|} - t\beta(\Phi_{\delta_1,b})\right| \\
&= \frac{|(1-t)|b| + t|}{|b|}|b| - t\left|\frac{b}{|b|} - \beta(\Phi_{\delta_1,b})\right| \\
&= (1-t)|b| + t - t\left|\frac{b}{|b|} - \beta(\Phi_{\delta_1,b})\right|. \qquad (1.193)
\end{aligned}
$$

Além disso, do ítem (c) do Lema 1.17, temos também

$$
\left|\beta(\Phi_{\delta_1,b}) - \frac{b}{|b|}\right| < \frac{1}{4}. \qquad (1.194)
$$

Combinando (1.192), (1.193) e (1.194), obtemos

$$
\begin{aligned}
|t\beta(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)b| &\geq (1-t)|b| + t - t\left|\frac{b}{|b|} - \beta(\Phi_{\delta_1,b})\right| \\
&> (1-t)|b| + t - \frac{t}{4} \geq \frac{1}{2} + \frac{t}{4} > 0, \quad \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (b,\delta) \in \Lambda_2.
\end{aligned}
$$

Logo, (1.190) ocorre e portanto $(0, 1/2) \notin \mathcal{Z}([0,1] \times \Lambda_2)$.

Se $(b,\delta) \in \Lambda_3$, então $(b,\delta) = (b,\delta_2)$. Além disso, do Lema 1.18, temos $\delta_2 > \dfrac{1}{2}$ e do ítem (b) do Lema 1.18 segue que $\gamma(\Phi_{\delta_2,b}) > \dfrac{1}{2}$. Daí,

$$
t\gamma(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)\delta = t\gamma(\Phi_{\delta_2,b}) + (1-t)\delta_2 > t\frac{1}{2} + (1-t)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (b,\delta) \in \Lambda_3.
$$

Logo, (1.191) ocorre e, portanto, $(0, 1/2) \notin \mathcal{Z}([0,1] \times \Lambda_3)$.

Se $(b,\delta) \in \Lambda_4$, então $|b| = R$. Além disso, do ítem (b) do Lema 1.19 temos $(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} > 0$. Daí,

$$
(t\beta(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)b|b)_{\mathbb{R}^N} = t(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} + (1-t)(b|b)_{\mathbb{R}^N}.
$$

Se $t = 0$, então

$$
(t\beta(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)b|b)_{\mathbb{R}^N} = t(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} + (1-t)(b|b)_{\mathbb{R}^N} = (b|b)_{\mathbb{R}^N} = |b|^2 = R^2 > 0,
$$

enquanto que, se $t \in (0,1]$, vem que

$$\begin{aligned}(t\beta(\Phi_{\delta,b}) + (1-t)b|b)_{\mathbb{R}^N} &= t(\beta(\Phi_{\delta,b})|b)_{\mathbb{R}^N} + (1-t)(b|b)_{\mathbb{R}^N} \\ &> (1-t)(b|b)_{\mathbb{R}^N} = (1-t)|b|^2 = (1-t)R^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Assim, temos que (1.190) ocorre e portanto $(0,1/2) \notin \mathcal{Z}([0,1] \times \Lambda_4)$.

Concluimos então que $(0,1/2) \notin \mathcal{Z}([0,1] \times \partial\mathcal{V})$ e daí, $d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, (0,1/2))$, $d(i_{\overline{\mathcal{V}}}, \mathcal{V}, (0,1/2))$ e $d(\mathcal{Z}(t,\cdot), \mathcal{V}, (0,1/2))$ estão bem definidos. Da invariância do grau por homotopia temos

$$d(\mathcal{Z}(0,\cdot), \mathcal{V}, (0,1/2)) = d(\mathcal{Z}(1,0), \mathcal{V}, (0,1/2)),$$

ou seja,

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, (0,1/2)) = d(i_{\overline{\mathcal{V}}}, \mathcal{V}, (0,1/2)).$$

Desde que $(0,1/2) \in \mathcal{V}$, concluimos que

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, (0,1/2)) = d(i_{\overline{\mathcal{V}}}, \mathcal{V}, (0,1/2)) = 1.$$

$\blacksquare$

Lema 1.21. *Se $\mathcal{A} \in \Gamma$, então $\mathcal{A} \cap \Im \neq \emptyset$.*

Demonstração: Primeiramente recordemos que

$$\Im = \left\{ u \in \mathcal{M}; \alpha(u) = (0,1/2) \right\}.$$

Se $\mathcal{A} \in \Gamma$, então $\mathcal{A} \subset (\Sigma \cap \mathcal{M})$ e daí basta provar que para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$, existe $u \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha(u) = (0,1/2)$. Desde que, para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$ temos $\mathcal{A} = h(\Theta)$ com $h \in \mathcal{H}$ e $\Theta = Q(\overline{\mathcal{V}})$, é suficiente provar que para todo $h \in \mathcal{H}$, existe $(b_0, \delta_0) \in \overline{\mathcal{V}}$ tal que

$$(\alpha \circ \mathcal{H} \circ Q)(b_0, \delta_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Dada arbitrariamente $h \in \mathcal{H}$, consideremos a função $\mathcal{F}_h : \overline{\mathcal{V}} \to \mathbb{R}^{N+1}$ dada por

$$\mathcal{F}_h(b,\delta) = (\alpha \circ h \circ Q)(b,\delta).$$

Desde que α, h e Q são contínuas, segue que $\mathcal{F}_h$ também é contínua.

Afirmamos que $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}$ em $\partial\mathcal{V}$. De fato, temos

$$\partial\mathcal{V} = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3, \tag{1.195}$$

onde

$$\Pi_1 = \{(b,\delta_1); |b| \leq R\},$$

$$\Pi_2 = \{(b,\delta_2); |b| \leq R\}$$

e

$$\Pi_3 = \{(b,\delta); |b| = R \ \text{ e } \ \delta \in [\delta_1,\delta_2]\}.$$

Se $(b,\delta) \in \Pi_1$, então $(b,\delta) = (b,\delta_1)$ e do ítem (a) do Lema 1.17, segue que

$$f(Q(b,\delta)) = f(Q(b,\delta_1)) = f(\Phi_{\delta_1,b}) < \frac{S+c_0}{2}, \quad \forall (b,\delta) \in \Pi_1. \tag{1.196}$$

Se $(b,\delta) \in \Pi_2$, então $(b,\delta) = (b,\delta_2)$ e do ítem (a) do Lema 1.18, segue que

$$f(Q(b,\delta)) = f(Q(b,\delta_2)) = f(\Phi_{\delta_2,b}) < \frac{S+c_0}{2}, \quad \forall (b,\delta) \in \Pi_2. \tag{1.197}$$

Se $(b,\delta) \in \Pi_3$, então $|b| = R$ e $\delta \in [\delta_1,\delta_2]$ e aplicando o ítem (a) do Lema 1.19, segue que

$$f(Q(b,\delta)) = f(\Phi_{\delta,b}) < \frac{S+c_0}{2}, \quad \forall (b,\delta) \in \Pi_3. \tag{1.198}$$

Segue então de (1.195), (1.196), (1.197) e (1.198) que

$$f(Q(b,\delta)) < \frac{S+c_0}{2}, \quad \forall (b,\delta) \in \partial\mathcal{V}$$

e portanto, da definição de $\mathcal{H}$, temos para todo $h \in \mathcal{H}$,

$$h(Q(b,\delta)) = Q(b,\delta), \quad \forall (b,\delta) \in \partial\mathcal{V}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_h(b,\delta) &= (\alpha \circ h \circ Q)(b,\delta) = (\alpha \circ h)Q(b,\delta) \\
&= \alpha(h(Q(b,\delta))) = \alpha(Q(b,\delta)) \\
&= (\alpha \circ Q)(b,\delta) = \mathcal{F}(b,\delta), \quad \forall (b,\delta) \in \partial\mathcal{V}.
\end{aligned}$$

Agora, desde que $\mathcal{F}_h, \mathcal{F} \in C(\overline{\mathcal{V}}, \mathbb{R}^{N+1})$ e $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}$ em $\partial\mathcal{V}$, segue da propriedade de dependência da fronteira da Teoria do Grau que para todo $e \notin \mathcal{F}(\partial\mathcal{V})$ tem-se

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, e) = d(\mathcal{F}_h, \mathcal{V}, e)$$

e desde que $(0, 1/2) \notin \mathcal{F}(\partial\mathcal{V})$, concluimos que

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, (0,1/2)) = d(\mathcal{F}_h, \mathcal{V}, (0,1/2)).$$

Do Lema 1.20, segue que

$$d(\mathcal{F}_h, \mathcal{V}, (0,1/2)) = d(\mathcal{F}, \mathcal{V}, (0,1/2)) = 1,$$

e portanto, existe $(b_0, \delta_0) \in \mathcal{V}$, tal que

$$\mathcal{F}_h(b_0,\delta_0) = (\alpha \circ h \circ Q)(b_0,\delta_0) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

e o Lema está provado. ∎

1.3.2 Prova do Teorema 1.1

Primeiramente, consideremos

$$c = \inf_{\mathcal{A}\in\Gamma} \max_{u\in\mathcal{A}} f(u) \tag{1.199}$$

e para cada $q \in \mathbb{R}$,

$$f^q = \{u \in (\Sigma \cap \mathcal{M}); f(u) \leq q\}.$$

Observemos que c definido em (1.199) de fato existe, pois para cada $\mathcal{A} \in \Gamma$ temos que $\mathcal{A}$ é compacto, por ser imagem de compacto por uma função contínua, e desde que $f \in C^1(D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, segue que existe $\max_{u\in\mathcal{A}} f(u)$ para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$. Agora, desde que f é uma função não-negativa, segue que para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$ temos $\max\limits_{u\in\mathcal{A}} f(u) \geq 0$ e portanto, existe $\inf\limits_{\mathcal{A}\in\Gamma} \max\limits_{u\in\mathcal{A}} f(u)$.

Verificaremos agora que c definido em (1.199) satisfaz

$$S < c < 2^{2s/N} S. \tag{1.200}$$

De fato, temos que

$$\max_{u\in\Theta} f(u) = \sup_{u\in\Theta} f(u) = \sup_{(b,\delta)\in\overline{V}} (f \circ Q)(b, \delta) = \sup_{(b,\delta)\in\overline{V}} f(\Phi_{\delta,b}),$$

onde na primeira igualdade usamos o fato de Θ ser um fechado, na segunda igualdade usamos a definição de Θ e na terceira usamos a definição de Q.

Desde que $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$, obtemos

$$\max_{u\in\Theta} f(u) = \sup_{(b,\delta)\in\overline{\mathcal{V}}} f(\Phi_{\delta,b}) \leq \sup_{\substack{b\in\mathbb{R}^N \\ \delta\in(0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,b})$$

e do Lema 1.13, segue que

$$\max_{u\in\Theta} f(u) \leq \sup_{\substack{b\in\mathbb{R}^N \\ \delta\in(0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,b}) < 2^{2s/N} S.$$

Temos também que $\Theta \in \Gamma$, pois $i \in \mathcal{H}$, $\Theta \subset (\Sigma \cap \mathcal{M})$ e $\Theta = i(\Theta)$. Assim,

$$c = \inf_{\mathcal{A} \in \Gamma} \max_{u \in \mathcal{A}} f(u) \leq \max_{u \in \Theta} f(u) \leq \sup_{\substack{b \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0, +\infty)}} f(\Phi_{\delta,b}) < 2^{2s/N} S.$$

Por outro lado, do Lema 1.21, temos que $\mathcal{A} \cap \Im \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{A} \subset \Gamma$ e, portanto, para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$, existe $\bar{u} \in \mathcal{A} \cap \Im$. Daí,

$$c_0 = \inf_{u \in \Im} f(u) \leq f(\bar{u}) \leq \max_{u \in \mathcal{A}} f(u), \quad \forall \mathcal{A} \in \Gamma,$$

e com isso, obtemos

$$c_0 \leq c = \inf_{\mathcal{A} \in \Gamma} \max_{u \in \mathcal{A}} f(u) < 2^{2s/N} S. \tag{1.201}$$

Do Lema 1.16 temos que $S < c_0$ e de (1.201) concluimos que (1.200) de fato ocorre.

Da definição de c, segue que existe uma sequência $\mathcal{A}_n \subset \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in \mathcal{A}_n} f(u) \to c.$$

Da definição de máximo, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in \mathcal{A}_n \subset (\Sigma \cap \mathcal{M})$ tal que

$$f(u_n) = \max_{u \in \mathcal{A}_n} f(u).$$

Portanto, existe uma sequência $(u_n) \subset (\Sigma \cap \mathcal{M})$ tal que

$$f(u_n) \to c. \tag{1.202}$$

Agora, mostraremos que a sequência (u_n) dada em (1.202) satisfaz

$$f'|_{\mathcal{M}}(u_n) \to 0.$$

Suponhamos, por contradição, que

$$f'|_{\mathcal{M}}(u_n) \nrightarrow 0.$$

Então, existe $(u_{nj}) \subset (u_n)$ tal que

$$\|f'|_{\mathcal{M}}(u_{nj})\|_* \geq K > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Usando o Lema de Deformação (ver apêndice B, Lema B.2), segue que existe uma aplicação $\eta : [0,1] \times (\Sigma \cap \mathcal{M}) \to (\Sigma \cap \mathcal{M})$ contínua e $\epsilon_0 > 0$ tais que:

(1) $\eta(0,u) = u$;

(2) $\eta(t,u) = u$, $\forall u \in f^{c-\epsilon_0} \cup \{(\Sigma \cap \mathcal{M}) \setminus f^{c+\epsilon_0}\}$, $\forall t \in [0,1]$;

(3) $\eta(1, f^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}) \subset f^{c-\frac{\epsilon_0}{2}}$.

De (1.199), segue que existe $\tilde{\mathcal{A}} \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{u \in \tilde{\mathcal{A}}} f(u) < c + \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Afirmamos que o conjunto $\tilde{\mathcal{A}}$ encontrado acima satisfaz

$$\tilde{\mathcal{A}} \subset f^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}. \tag{1.203}$$

De fato, note que

$$u \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow f(u) \leq \max_{u \in \tilde{\mathcal{A}}} f(u) < c + \frac{\epsilon_0}{2} \Rightarrow u \in f^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}.$$

Desde que $\tilde{\mathcal{A}} \in \Gamma$, temos que $\tilde{\mathcal{A}} \subset (\Sigma \cap \mathcal{M})$ e existe $\bar{h} \in \mathcal{H}$ tal que

$$\bar{h}(\Theta) = \tilde{\mathcal{A}}. \tag{1.204}$$

Da definição de η, segue que

$$\eta(1, \tilde{\mathcal{A}}) \subset (\Sigma \cap \mathcal{M}). \tag{1.205}$$

Agora, consideremos $\hat{h} : (\Sigma \cap \mathcal{M}) \to (\Sigma \cap \mathcal{M})$ dada por $\hat{h}(u) = \eta(1, \bar{h}(u))$. Uma vez que $\bar{h} \in C(\Sigma \cap \mathcal{M}, \Sigma \cap \mathcal{M})$, temos que $\hat{h} \in C(\Sigma \cap \mathcal{M}, \Sigma \cap \mathcal{M})$. Mostraremos que

$$f^{c+\epsilon_0} \setminus f^{c-\epsilon_0} \subset f^{2^{2s/N}S} \setminus f^{(S+c_0)/2}. \tag{1.206}$$

De fato, para todo $u \in f^{c+\epsilon_0} \setminus f^{c-\epsilon_0}$, temos que

$$c - \epsilon_0 < f(u) \leq c + \epsilon_0$$

e de (1.200) segue que

$$c - \epsilon_0 < f(u) \leq c + \epsilon_0 < 2^{2s/N}S \tag{1.207}$$

para ϵ_0 suficientemente pequeno. Além disso, sabemos do Lema 1.16 que $S < c_0$. Daí,

$$S < \frac{S + c_0}{2} < c_0$$

e de (1.201) segue que

$$\frac{S + c_0}{2} < c_0 - \epsilon_0 < c - \epsilon_0 < 2^{2s/N}S$$

para ϵ_0 suficientemente pequeno. Sendo assim, lembrando que $u \in f^{c+\epsilon_0} \setminus f^{c-\epsilon_0}$, segue que

$$\frac{S + c_0}{2} < c_0 - \epsilon_0 \leq c - \epsilon_0 < f(u). \tag{1.208}$$

De (1.207) e (1.208), obtemos

$$u \in f^{2^{2s/N}S} \setminus f^{(S+c_0)/2}$$

mostrando que (1.206) de fato ocorre.

Consideremos $u \in (\Sigma \cap \mathcal{M})$ tal que

$$f(u) < \frac{S + c_0}{2}. \tag{1.209}$$

Lembrando que $\bar{h} \in \mathcal{H}$, segue que

$$\bar{h}(u) = u.$$

Além disso, de (1.209) temos que $u \notin f^{2^{2s/N}S} \setminus f^{(S+c_0)/2}$ e portanto, de (1.206), vem que

$$u \notin f^{c+\epsilon_0} \setminus f^{c-\epsilon_0}.$$

Consequentemente,

$$u \in f^{c-\epsilon_0} \cup \{(\Sigma \cap \mathcal{M}) \setminus f^{c+\epsilon_0}\}$$

e do Lema de Deformação, obtemos

$$\eta(1, u) = u.$$

Logo,

$$\hat{h}(u) = \eta(1, \bar{h}(u)) = \eta(1, u) = u$$

de onde concluimos que $\hat{h} \in \mathcal{H}$.

Temos então que

$$\hat{h}(\Theta) = \eta(1, \bar{h}(\Theta))$$

e de (1.204),

$$\hat{h}(\Theta) = \eta(1, \bar{h}(\Theta)) = \eta(1, \tilde{\mathcal{A}}). \tag{1.210}$$

De (1.205) e (1.210), obtemos $\eta(1, \tilde{A}) \in \Gamma$ e de (1.199) segue que

$$c = \inf_{\mathcal{A} \in \Gamma} \max_{u \in \mathcal{A}} f(u) \leq \max_{u \in \eta(1, \tilde{\mathcal{A}})} f(u). \tag{1.211}$$

Do Lema de Deformação, temos

$$\eta(1, f^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}) \subset f^{c-\frac{\epsilon_0}{2}}$$

e de (1.203)

$$\eta(1, \tilde{\mathcal{A}}) \subset \eta(1, f^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}) \subset f^{c-\frac{\epsilon_0}{2}}.$$

Segue então que

$$f(u) \leq c - \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \forall u \in \eta(1, \tilde{\mathcal{A}}).$$

Portanto,

$$\max_{u \in \eta(1,\tilde{\mathcal{A}})} f(u) \leq c - \frac{\epsilon_0}{2}$$

e de (1.211) concluimos que

$$c \leq \max_{u \in \eta(1,\tilde{\mathcal{A}})} f(u) \leq c - \frac{\epsilon_0}{2}$$

o que é um absurdo.

Concluimos entaõ que existem $(u_n) \subset (\Sigma \cap \mathcal{M})$ e $c \in (S, 2^{2s/N}S)$ tais que

$$f(u_n) \to c \;\text{ e }\; f'|_{\mathcal{N}}(u_n) \to 0$$

e sob estas condições, segue do Lema 1.9 que, a menos de subsequência, $u_n \to \tilde{u}_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $(\Sigma \cap \mathcal{M})$ é fechado, temos que $\tilde{u}_0 \in (\Sigma \cap \mathcal{M})$ e, portanto, $\tilde{u}_0$ é uma função não negativa. Aplicando Princípio de Máximo (veja [67, Proposição 2.17]) segue que $\tilde{u}_0 > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Do fato de $f \in C^1(D^{s,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e da unicidade do limite

$$f(\tilde{u}_0) = c \;\text{ e }\; f'|_{\mathcal{M}}(\tilde{u}_0) = 0$$

e de (1.200)

$$S < f(\tilde{u}_0) < 2^{2s/N}S$$

e o Teorema está provado. ∎

Capítulo 2

Solução positiva para um problema não local em domínio exterior

Neste capítulo, estamos interessados em provar resultados de existência de solução positiva para o seguinte problema elíptico fracionário:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = |u|^{p-2}u \text{ em } \Omega, \\ u \in H_0^s(\Omega), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio não limitado, $\partial\Omega \neq \emptyset$ é limitada, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $N > 2s$ e $2 < p < 2_s^* = \dfrac{2N}{N-2s}$.

Destacamos que este problema não havia sido estudado até então no caso do laplaciano fracionário. V. Benci e G. Cerami [11], estudaram um problema análogo considerando o operador laplaciano usual em vez do laplaciano fracionário. Motivado por [11], provamos resultados semelhantes aos obtido no mesmo considerando aqui o problema (2.1). Mais precisamente, este cápitulo é uma versão de [11] para o Laplaciano fracionário. Ressaltamos ainda que, as idéias ultilizadas por Benci e Cerami [11] não são imediatamente aplicáveis ao nosso problema devido ao fato de que o operador Laplaciano fracionário é não-local. Algumas estimativas refinadas foram necessárias. Por exemplo, veja Proposição 2.1, Teorema 2.3. Além disso, como feito no Capítulo 1, aqui também provamos uma variante do resultado de Compacidade Global de Struwe [69], que também pode ser útil em outro contexto diferente.

Com o objetivo de usar argumentos semelhantes aos utilizados por V. Benci e G. Cerami em [11], para obtenção dos resultados lá contidos, aqui precisaremos de alguns resultados referentes ao problema limite

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = |u|^{p-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $N > 2s$ e $2 < p < 2_s^*$. Destacamos aqui, os trabalhos de FranK e Lenzmann [42] e Frank, Lenzmann e Silvestre [43], onde os autores provaram resultados de unicidade (a menos de simetrias) de solução ground state positiva para o problema (2.2).

Para obtenção dos resultados desejados para o problema (2.1), em alguns momentos faremos uso de propriedades da solução do problema limite dado em (2.2).

Os dois teoremas a seguir contém os principais resultados deste capítulo.

Teorema 2.1. *Assuma $N > 2s$, $2 < p < 2_s^*$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Então, para todo λ existe um $\sigma = \sigma(\lambda)$ tal que se*

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_\sigma(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - x_0| \leq \sigma\},$$

o problema (2.1) *possui pelo menos uma solução positiva.*

Teorema 2.2. *Assuma $N > 2s$, $2 < p < 2_s^*$. Então, existe $\lambda_* = \lambda_*(\Omega)$ tal que para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_*)$ o problema* (2.1) *possui pelo menos uma solução positiva.*

2.1 Observações preliminares e um resultado de não existência

Apresentaremos a seguir os espaços onde buscaremos por soluções para nosso problema. Começamos relembrando que, para toda função $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a seminorma de Gagliardo é dada por

$$[u] := \left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{N+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}},$$

que por sua vez, em vista de [33, Proposição 3.4 e Proposição 3.6] pode ser identificada como

$$[u] = |(-\Delta)^{s/2}u|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u|^2 dx.$$

Dessa forma, podemos definir o espaço de Sobolev fracionário $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ por

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N); (-\Delta)^{s/2}u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

proveniente do produto interno

$$< u, v >_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{s/2}u(-\Delta)^{s/2}v dx + \int_{\mathbb{R}^N} uv dx.$$

No decorrer do texto, usaremos a notação

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^N) := H^s(\mathbb{R}^N).$$

Uma vez que nosso problema envolve um domínio ilimitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, vamos introduzir o espaço de Sobolev fracionário $H_0^s(\Omega)$ dado por

$$H_0^s(\Omega) := \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N); u = 0 \ \text{ q.t.p } \ \text{em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Omega \right\}.$$

Este espaço é Hilbert equipado com a norma

$$\|u\|_{s,2} := \left(\int_{\Omega} |(-\Delta)^{s/2}u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

proveniente do produto interno

$$< u, v >_{s,2} := \int_{\Omega} (-\Delta)^{s/2}u(-\Delta)^{s/2}v dx + \int_{\Omega} uv dx.$$

Para o nosso propósito, trabalharemos nos espaços de Sobolev fracionário $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $H_0^s(\Omega)$, munido com as respectivas normas:

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2} u|^2 + \lambda |u|^2] dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|u\|_{H_0^s(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} [|(-\Delta)^{s/2} u|^2 + \lambda |u|^2] dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

que são equivalentes as normas $\|\cdot\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)}$ e $\|\cdot\|_{s,2}$, respectivamente. Para o leitor interessado em um estudo mais detalhado a respeito dos espaços definidos acima, indicamos a referência [33].

Ao longo deste capítulo, denotaremos por

$$|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

e

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

a norma em $L^p(\Omega)$ e $L^p(\mathbb{R}^N)$, respectivamente. Consideremos também M_λ e μ_λ as constantes definidas por

$$M_\lambda = \inf \left\{ \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}; u \in H^s(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\} \tag{2.5}$$

e

$$\mu_\lambda = \inf \left\{ \|u\|^2_{H_0^s(\Omega)}; u \in H_0^s(\Omega); \int_{\Omega} |u|^p dx = 1 \right\}. \tag{2.6}$$

Observação 2.1. *Uma vez que* $\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \geq 0$ *para toda função* $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *com* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1$*, temos que o conjunto*

$$\left\{ \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}; u \in H^s(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = 1 \right\}$$

é limitado inferiormente. Portanto, a constante M_λ *fica bem definida. Argumentando de* *maneira análoga, concluimos também que μ_λ está bem definido.*

Observe que a constante M_λ definida em 2.5 é positiva. De fato, uma vez que $H^s(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq p \leq 2_s^*$, existe $C > 0$ tal que

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, para $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$, obtemos

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \geq \frac{1}{C} > 0,$$

de onde concluimos que $M_\lambda > 0$.

A proposição que apresentaremos a seguir é de fundamental importância no decorrer deste trabalho. Os resultados nela contidos serão ultilizados como ferramenta na demonstração de outros resultados que virão. Ressaltamos que na prova da proposição abaixo, argumentamos como Alves, Figueiredo e Siciliano em [4] (veja também [34]).

Proposição 2.1. *O ínfimo em* (2.5) *é atingido e para qualquer u tal que $\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = M_\lambda$ e $|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1$ corresponde uma solução positiva regular de* (2.2)*. Além disso, qualquer solução positiva regular de* (2.2) *é radialmente simétrica sobre algum ponto em $\mathbb{R}^N$, $u_r < 0$ para $r > 0$, r sendo a coordenada radial sobre esse ponto.*

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência minimizante para (2.5). Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pelo Teorema $B.13$ (veja Apêndice B),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Por outro lado, consideremos $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a função dada por

$$G(t) = \lambda t^2, \quad \lambda > 0.$$

Por cálculos diretos vemos que a função G é crescente. E, dessa forma, pelo Teorema

$B.12$ (veja Apêndice B) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u_n^*)dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u_n)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^*)^2 dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

onde u_n^* denota a simetrização de Schwarz (veja definição e propriedades em [53, Seção 3] ou [50]) de u_n.

Combinando (2.7) e (2.8), encontramos

$$\|u_n^*\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2} u_n^*|^2 + \lambda (u_n^*)^2] dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 + \lambda u_n^2] dx = \|u_n\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Argumentando de modo análogo ao que fizemos pra mostrar (2.8), mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^*|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx, \quad \text{para} \quad p \geq 1 \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$ vale

$$|u_n^*|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |u_n|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1.$$

Além do mais, temos também

$$M_\lambda \leq \|u_n^*\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_n\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Assim, passando ao limite de $n \to +\infty$ na última desigualdade e tendo em conta que $\|u_n\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to M_\lambda$, obtemos

$$\|u_n^*\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to M_\lambda.$$

Portanto, a sequência (u_n^*) também é minimizante para (2.5). Estas observações implicam que podemos escolher a sequência (u_n) de tal forma, que para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n é não-negativa, radialmente simétrica e decrescente em $r = |x|$.

Desde que que $u_n \in L^2(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência de funções não-negativas, radial decrescente, podemos aplicar [6, Lema 1] para obter

$$|u_n(x)| \leq \left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{2}} |x|^{-\frac{N}{2}} |u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Observe que por imersão contínua (u_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$; então $|u_n(x)| \leq C|x|^{-\frac{N}{2}}$, com C independente de n. Isto implica que

$$u_n(x) \to 0 \ \text{ quando } \ |x| \to +\infty$$

uniformemente em relação a n. Agora, já que u_n é limitada em $H^s(\mathbb{R}^N)$, podemos extrair uma subsequência de u_n, a qual ainda denotaremos por u_n, de modo que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^s(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N.$$

Uma vez que a imersão

$$H^s_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$$

é compacta para $2 < p < \dfrac{2N}{N-2s}$ (veja [56, Teorema III.3]), obtemos

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^p(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, temos

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_n \|u_n\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

E, passando ao limite de $n \to +\infty$ na última desigualdade, encontramos

$$|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 1 \ \text{ e } \ \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq M_\lambda,$$

mostrando que u é uma solução do problema de minimização (2.5). Além disso, por contrução, $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ é não-negativa, radialmente simétrica e decrescente com relação ao raio r.

A fim de mostrar existência de solução para o problema (2.2), denotamos por S, T :

$H^s(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ os funcionais definidos por

$$S(v) = \int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2}v|^2 + \lambda v]dx, \quad v \in H^s(\mathbb{R}^N),$$

$$T(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx, \quad v \in H^s(\mathbb{R}^N),$$

e por V a variedade

$$V = \Big\{ v \in H^s(\mathbb{R}^N); T(v) = 1 \Big\}.$$

Mostraremos que, para todo $v \in V$, $T'(v) \neq 0$. De fato, para toda $v \in V$,

$$T'(v)v = p \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx = p \neq 0,$$

assim,

$$T'(v) \neq 0, \quad \forall v \in V.$$

Além disso, pela primeira parte da demonstração, tem-se que

$$M_\lambda = S(u) = \inf_{v \in V} S(v).$$

Sendo assim, existe um Multiplicador de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ (veja Apêndice B, Teorema $B.14$), tal que $S'(u) = \delta T'(u)$. Portanto,

$$S'(u)\varphi = \delta T'(u)\varphi, \quad \forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N),$$

o qual é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2}u(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u\varphi]dx = \frac{\delta p}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}u\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

Considerando u como função teste na última desigualdade, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \lambda u^2]dx = \frac{\delta p}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,$$

ou seja,

$$S(u) = \frac{\delta p}{2} T(u).$$

Tendo em conta que $S(u) = M_\lambda$ e $T(u) = 1$, obtemos $\dfrac{\delta p}{2} = M_\lambda$. E, consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2} u (-\Delta)^{s/2} \varphi + \lambda u \varphi] dx = M_\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N).$$

Uma vez que u é o limite de uma sequência não negativa em $H^s(\mathbb{R}^N)$, temos $u \geq 0$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Portanto, u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = M_\lambda u^{p-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Vamos agora construir a solução de (2.2). Para isto, consideremos $v = \alpha u$, com α a ser escolhido posteriormente. Por cálculos diretos, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2} v (-\Delta)^{s/2} \varphi + \lambda v \varphi] dx = \frac{M_\lambda}{\alpha^{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-2} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N).$$

Escolhendo α, tal que, $\dfrac{M_\lambda}{\alpha^{p-2}} = 1$, obtemos $\alpha = M_\lambda^{\frac{1}{p-2}} > 0$. Portanto, $v = M_\lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ é solução do problema (2.2). Pelo Princípio do Máximo (veja [67, Proposição 2.17]) temos $u > 0$ e, consequentemente, v também é positiva. ■

Antes de seguirmos para o próximo resultado, recordemos a seguinte definição:

Definição 2.1. *Dizemos que uma função u é solução ground state de um problema elíptico, quando esta solução é de menor energia dentre todas as soluções não triviais do problema.*

Tendo em conta a definição acima, temos a seguinte observação:

Observação 2.2. *Se v é uma solução ground state de (2.2), isto é, $v = M_\lambda^{1/(p-2)} u$ onde u é uma solução do problema de minimização (2.5), então v é a solução com menor energia dentre todas as soluções do problema.*

De fato,

$$\begin{aligned}
f(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}v|^2+\lambda|v|^2]dx-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^p dx\\
&= \frac{M_\lambda^{2/(p-2)}}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}u|^2+\lambda|u|^2]dx-\frac{M_\lambda^{p/(p-2)}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 dx\\
&= \frac{M_\lambda^{2/(p-2)}}{2}M_\lambda-\frac{M_\lambda^{p/(p-2)}}{p}\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)M_\lambda^{p/(p-2)}.
\end{aligned}$$

Seja $\bar{v}$ outra solução de (2.2). Então

$$\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}\bar{v}|^2+\lambda|\bar{v}|^2]dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{v}|^p dx. \tag{2.9}$$

Por outro lado, por definição de M_λ

$$\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}\bar{v}|^2+\lambda|\bar{v}|^2]dx\geq M_\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{v}|^p dx\right)^{2/p}. \tag{2.10}$$

Assim, combinando (2.9) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}\bar{v}|^2+\lambda|\bar{v}|^2]dx &\geq M_\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}\bar{v}|^2+\lambda|\bar{v}|^2]dx\right)^{2/(p-2)}\\
&= M_\lambda M_\lambda^{2/(p-2)}=M_\lambda^{p/(p-2)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f(\bar{v}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}\bar{v}|^2+\lambda|\bar{v}|^2]dx-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{v}|^p dx\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}\bar{v}|^2+\lambda|\bar{v}|^2]dx\\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)M_\lambda^{p/(p-2)}=f(v).
\end{aligned}$$

Observação 2.3. *Pelo Teorema 4 de [43], a solução obtida pela Proposição 2.1 é única.*

Para finalizar esta seção estabelecemos um resultado de não existência. Mostraremos que o problema (2.1) não possui solução ground state, isto é, mostraremos que μ_λ definido em (2.6) não é atingido.

Teorema 2.3. *Assuma que $N > 2s$. Então, o problema* (2.1) *não possui solução ground state.*

Demonstração: Começamos mostrando que

$$\mu_\lambda = M_\lambda. \tag{2.11}$$

Observemos que, qualquer $u \in H_0^s(\Omega)$ pode ser estendido por zero fora de Ω. Logo, podemos considerar $H_0^s(\Omega)$ como um subespaço de $H^s(\mathbb{R}^N)$, assim

$$\mu_\lambda \geq M_\lambda. \tag{2.12}$$

Agora, consideremos a sequência $\phi_n \in H_0^s(\Omega)$ definida por

$$\phi_n(x) = c_n \zeta(x) \bar{u}(x - y_n),$$

onde $(y_n) \subset \Omega$ é uma sequência de pontos tal que $|y_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, $\bar{u}$ é uma minimizante para (2.5) radialmente simétrica em torno da origem (tal escolha é possível pela Proposição 2.1), $\zeta : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ é uma função C^∞ definida por

$$\zeta(x) = \tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right),$$

σ o menor número positiva tal que

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_\sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| < \sigma\right\}$$

e $\tilde{\zeta} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to [0,1]$ é uma função C^∞ não negativa decrescente tal que

$$\tilde{\zeta}(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \leq 1, \\ 1, & \forall t \geq 2, \end{cases}$$

c_n é uma constante de normalização, dada por

$$c_n = \left(|\zeta(x)\bar{u}(x - y_n)|_{L^p(\Omega)} \right)^{-1}.$$

Inicialmente mostraremos que $\|\phi_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} \to M_\lambda$ quando $n \to +\infty$.

Fazendo a mudança de variável $z = x - y_n$, obtemos

$$\begin{aligned} |\zeta(x)\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(x)\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(z+y_n)\bar{u}(z) - \bar{u}(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Seja $g_n(z) = |(\zeta(z + y_n) - 1)\bar{u}(z)|^p$. Como $|y_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$ e $|z + y_n| \geq |y_n| - |z|$, para cada $z \in \mathbb{R}^N$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z + y_n| \geq 2\sigma$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, da definição de ζ, temos que $\zeta(z + y_n) = 1$ para todo $n \geq n_0$, logo

$$g_n(z) \to 0 \;\; \text{q.t.p em} \;\; \mathbb{R}^N.$$

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned} |g_n(z)| &= |(\zeta(z+y_n) - 1)\bar{u}(z)|^p = |\zeta(z+y_n) - 1|^p |\bar{u}(z)|^p \\ &\leq (|\zeta(z+y_n) + 1)^p |\bar{u}(z)|^p \leq 2^p |\bar{u}(z)|^p, \end{aligned}$$

onde $2^p|\bar{u}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_n(z)| dz \to 0,$$

ou seja,

$$\zeta(\cdot + y_n)\bar{u} \to \bar{u} \;\; \text{em} \;\; L^p(\mathbb{R}^N).$$

Notemos que por definição, $\zeta(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e pela convergência mostrada acima, deduzimos

$$\begin{aligned}|\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(z+y_n)\bar{u}(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} + o_n(1).\end{aligned}$$

Desde que $\bar{u}$ é uma minimizante de (2.5), então

$$|\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)|_{L^p(\Omega)} = 1 + o_n(1)$$

e assim,

$$c_n \to 1, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\|(\zeta(x)-1)\bar{u}(x-y_n)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2}((\zeta(x)-1)\bar{u}(x-y_n))|^2 + \lambda|(\zeta(x)-1)\bar{u}(x-y_n)|^2] dx.\end{aligned} \tag{2.13}$$

De maneira inteiramente análoga ao que fizmos na primeira parte da demonstração, mostra-se também que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\zeta(x)\bar{u}(x-y_n) - \bar{u}(x-y_n)|^2 dx = o_n(1). \tag{2.14}$$

Portanto, falta mostrar apenas que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}(\zeta(x)\bar{u}(x-y_n) - \bar{u}(x-y_n))|^2 dx = o_n(1).$$

Fazendo a mudança de variável $z = x - y_n$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}(\zeta(x)\bar{u}(x-y_n) - \bar{u}(x-y_n))|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}(\zeta(z+y_n)\bar{u}(z) - \bar{u}(z))|^2 dz = \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}((\zeta(z+y_n)-1)\bar{u}(z))|^2 dz.\end{aligned}$$

Agora, consideremos a sequência

$$\hat{g}_n(z) = |(-\Delta)^{s/2}((\zeta(z+y_n)-1)\bar{u}(z))|^2.$$

Argumentando de forma análoga ao que fizemos anteriormente, temos para n suficientemente grande que

$$\hat{g}_n(z) \to 0 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N.$$

Além disso, somando e subtraindo $\zeta(z+y_n)\bar{u}(w)$ na expressão de $\hat{g}_n$ e pela definição de ζ, encontramos

$$|\hat{g}_n(z)| \leq C_1|(-\Delta)^{s/2}\bar{u}|^2 + C_2|\bar{u}|^2,$$

onde $C_1|(-\Delta)^{s/2}\bar{u}|^2 + C_2|\bar{u}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{g}_n(z)| dz \to 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2}(\zeta(x)\bar{u}(x-y_n) - \bar{u}(x-y_n))|^2 dx = o_n(1). \tag{2.15}$$

De (2.13), (2.14) e (2.15), concluimos que

$$\begin{aligned} \|\zeta(x)\bar{u}(x-y_n) - \bar{u}(x-y_n)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \|\bar{u}(x-y_n)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_n(1) \\ &= \|\bar{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_n(1) = M_\lambda + o_n(1). \end{aligned}$$

Desde que $\zeta(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, vem que

$$\|\phi_n\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|c_n\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|c_n\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)\|^2_{H^s_0(\Omega)} = \|\phi_n\|^2_{H^s_0(\Omega)}.$$

Além disso, como $c_n = 1 + o_n(1)$, deduzimos que

$$\|\phi_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} = c_n^2\|\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)\|^2_{H^s_0(\Omega)} = M_\lambda + o_n(1).$$

Recordando que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$|\phi_n|_{L^p(\Omega)} = |c_n\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)|_{L^p(\Omega)} = c_n|\zeta(x)\bar{u}(x-y_n)|_{L^p(\Omega)} = 1,$$

segue da definição de μ_λ que

$$\mu_\lambda \leq \|\phi_n\|^2_{H^s_0(\Omega)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, passando ao limite de $n \to +\infty$, concluimos que

$$\mu_\lambda \leq M_\lambda. \tag{2.16}$$

De (2.12) e (2.16), obtemos que (2.11) de fato ocorre.

Agora, vamos supor que existe $v_0 \in H^s_0(\Omega)$ com $v_0 \geq 0$ tal que

$$\|v_0\|^2_{H^s_0(\Omega)} = M_\lambda \ \text{ e } \ |v_0|_p = 1.$$

Colocando $v_0 = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, vemos que ele pode ser considerado como um elemento de $H^s(\mathbb{R}^N)$; então v_0 seria uma minimizante para (2.5) e uma solução da equação

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u + \lambda u = M_\lambda u^{p-1} \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo (veja [67, Proposição 2.17]) temos que v_0 é estritamente positiva em $\mathbb{R}^N$, contradizendo o fato de $v_0 = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Dessa contradição, concluimos que o problema (2.1) não possui solução ground state. ∎

2.2 Resultado de Compacidade

Nesta seção, estabelecemos um resultado de compacidade que será fundamentel para garantirmos existência de solução para o problema (2.1). O Lema 2.2 que daremos mais adiante, analisa o comportamento de uma sequência que satisfaz a condição Palais-Smale, e afirma que tal sequência converge fortemente para o limite fraco ou difere-se dele por uma ou mais sequências que após uma translação adequada converge para uma solução de (2.2). Assim, as únicas obstruções à compacidaade global no sentido usual são as soluções de (2.1).

Sejam I e I_* os funcionais definidos em $H_0^s(\Omega)$ e $H^s(\mathbb{R}^N)$, respectivamente, por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}[|(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \lambda u^2]dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega}|u|^p dx,$$

e

$$I_*(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}[|(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \lambda |u|^2]dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx,$$

onde $\lambda > 0$. Observe que os funcionais I e I_* são os funcionais energia associados as equações (2.1) e (2.2), respectivamente.

Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.1. *Seja $(u_m) \subset H_0^s(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale para o funcional I. Se (u_m) é limitada em $H_0^s(\Omega)$, então existe $u^0 \in H_0^s(\Omega)$ tal que $I'(u^0) = 0$.*

Demonstração: Por hipótese temos (u_m) limitada em $H_0^s(\Omega)$. Sendo assim, existe $u^0 \in H_0^s(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_m \rightharpoonup u^0 \ \text{ em } \ H_0^s(\Omega),$$

$$u_m(x) \to u^0(x) \ \text{ q.t.p } \ \Omega.$$

Além disso, pela imersão contínua $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ para $2 < p < 2_s^*$, existe $C > 0$ tal que

$$|u_m|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u_m\|_{H_0^s(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

de onde concluimos que (u_m) também é limitada em $L^p(\Omega)$. Assim, pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Lema $B.2$), obtemos

$$u_m \rightharpoonup u^0 \ \text{ em } \ L^p(\Omega).$$

Queremos mostrar que $I'(u^0) = 0$, isto é, que u^0 é solução fraca de (2.1). De fato,

temos

$$I'(u_m)\varphi = \int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u_m(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u_m\varphi]dx - \int_\Omega |u_m|^{p-2}u_m\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^s(\Omega).$$

Para cada $\varphi \in H_0^s(\Omega)$, considere o funcional F_φ em $H_0^s(\Omega)$, dado por

$$F_\varphi(u) = \int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u\varphi]dx.$$

Note que F_φ é um funcional linear e contínuo para cada $\varphi \in H_0^s(\Omega)$, então

$$F_\varphi(u_m) \to F_\varphi(u^0), \quad \forall\varphi \in H_0^s(\Omega),$$

ou seja, para toda $\varphi \in H_0^s(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u_m(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u_m\varphi]dx \to \int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u^0(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u^0\varphi]dx. \qquad (2.17)$$

Resta mostrar que

$$\int_\Omega |u_m|^{p-2}u_m\varphi dx \to \int_\Omega |u^0|^{p-2}u^0\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^s(\Omega).$$

Uma vez que $(u_m) \subset L^p(\Omega)$, então

$$\int_\Omega ||u_m|^{p-2}u_m|^{\frac{p}{p-1}}dx = \int_\Omega |u_m|^p dx < \infty,$$

de onde decorre que $(|u_m|^{p-2}u_m) \subset L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Desde que

$$u_m(x) \to u^0(x) \ \ q.t.p \ \ \text{em} \ \ \Omega,$$

então

$$||u_m|^{p-2}u_m|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} = \left(\int_\Omega ||u_m|^{p-2}u_m|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} = |u_m|^{p-1}_{L^p(\Omega)},$$

e sendo $|u_m|_{L^p(\Omega)}$ limitada, temos $||u_m|^{p-2}u_m|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}$ limitada. Logo, pelo Lema de Brezis-

Lieb (ver Apêndice B, Lema $B.2$), temos

$$|u_m|^{p-2}u_m \rightharpoonup |u^0|^{p-2}u^0 \quad \text{em} \quad L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega |u_m|^{p-2}u_m\varphi dx \to \int_\Omega |u^0|^{p-2}u^0\varphi dx, \quad \forall\varphi \in L^p(\Omega).$$

Em particular, vale que

$$\int_\Omega |u_m|^{p-2}u_m\varphi dx \to \int_\Omega |u^0|^{p-2}u^0\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^s(\Omega). \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18), obtemos

$$I'(u_m)\varphi \to \int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u^0(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u^0\varphi]dx - \int_\Omega |u^0|^{p-2}u^0\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^s(\Omega).$$

Lembrando que (u_m) é uma sequência (PS) para I, da unicidade do limite resulta que

$$\int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u^0(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u^0\varphi]dx - \int_\Omega |u^0|^{p-2}u^0\varphi dx = 0, \quad \forall\varphi \in H_0^s(\Omega).$$

Portanto, u^0 é solução de (2.1). ■

Por falta de imersão compacta, não é possível afirmar que a solução u^0 encontrada no Lema 2.1 é não-trivial. Por isso, precisamos continuar nosso estudo. O próximo resultado vai nos auxiliar a contornar essa dificuldade.

Lema 2.2. *Seja $(u_m) \subset H_0^s(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale para o funcional I. Assuma que $u_m \not\to u^0$ em $H_0^s(\Omega)$. Então, existe um número $k \in \mathbb{N}$, k sequências de pontos $(y_m^j)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $|y_m^j| \to +\infty$ quando $m \to +\infty$ para $1 \le j \le k$, $k+1$ sequências de funções $(u_m^j)_{m\in\mathbb{N}} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ com $0 \le j \le k$ tal que para alguma subsequência de (u_m), que ainda denotaremos por (u_m), tem-se*

(i) $u_m(x) = u_m^0(x) + \sum_{j=1}^{k} u_m^j(x - y_m^j)$,

(ii) $u_m^0(x) \to u^0(x)$ *quando* $m \to +\infty$ *em* $H_0^s(\Omega)$,

(iii) $u_m^j(x) \to u^j(x)$ *quando* $m \to +\infty$ *em* $H^s(\mathbb{R}^N)$,

onde u^0 é uma solução de (2.1) e u^j, $1 \leq j \leq k$, são soluções de (2.2). Além disso, quando $m \to +\infty$

$$\|u_m\|^2_{H^s_0(\Omega)} \to \|u^0\|^2_{H^s_0(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.19}$$

e

$$I(u_m) \to I(u^0) + \sum_{j=1}^{k} I_*(u^j). \tag{2.20}$$

Demonstração: Seja $(u_m) \subset H^s_0(\Omega)$ satisfazendo as hipóteses do enunciado. Temos então que

$$I(u_m) \to c \ \text{ e } \ I'(u_m) \to 0, \ \text{ quando } \ m \to +\infty.$$

Daí, deduzimos que existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{p} I'(u_m) u_m &\leq |I(u_m) - \frac{1}{p} I'(u_m) u_m| \leq |I(u_m)| + \frac{1}{p} \|I'(u_m)\|_{(H^s_0(\Omega))'} \|u_m\|_{H^s_0(\Omega)} \\ &\leq C_1 + \frac{1}{p} C_2 \|u_m\|_{H^s_0(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por outro lado,

$$I(u_m) - \frac{1}{p} I'(u_m) u_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_m\|^2_{H^s_0(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Portanto, de (2.21) e (2.22), segue-se que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_m\|^2_{H^s_0(\Omega)} \leq C_1 + \frac{1}{p} C_2 \|u_m\|_{H^s_0(\Omega)}.$$

Daí, concluimos que (u_m) é limitada em $H^s_0(\Omega)$.

Agora, consideremos a seguinte função

$$\Psi^1_m(x) = \begin{cases} (u_m - u^0)(x), & \text{se } \ x \in \Omega, \\ 0, & \text{se } \ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Desde que

$$u_m \rightharpoonup u^0 \ \text{ em } \ H_0^s(\Omega) \ \text{ e } \ L^p(\Omega),$$

segue-se que $\Psi_m^1 \rightharpoonup 0$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Afirmamos que

$$I_*(\Psi_m^1) = I(u_m) - I(u^0) + o_m(1).$$

De fato, observemos que

$$\|\Psi_m^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\Psi_m^1\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \|u_m - u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - 2 < u_m, u^0 > + \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|\Psi_m^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\Psi_m^1\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + o_m(1). \tag{2.23}$$

Desde que (u_m) é limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_m \rightharpoonup u^0$ q.t.p em Ω, pelo Teorema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Teorema $B.8$), temos

$$|u_m|^p_{L^p(\Omega)} = |u^0|^p_{L^p(\Omega)} + |u_m - u^0|^p_{L^p(\Omega)} + o_m(1),$$

portanto,

$$\begin{aligned} |u_m|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = |u_m|^p_{L^p(\Omega)} &= |u^0 + \Psi_m^1|^p_{L^p(\Omega)} = |u^0|^p_{L^p(\Omega)} + |\Psi_m^1|^p_{L^p(\Omega)} + o(1) \\ &= |u^0|^p_{L^p(\Omega)} + |\Psi_m^1|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o(1). \end{aligned} \tag{2.24}$$

De (2.23) e (2.24), temos

$$\begin{aligned} I_*(\Psi_m^1) &= \frac{1}{2}\|\Psi_m^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{p}|\Psi_m^1|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &= \frac{1}{2}\|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{1}{p}|u_m|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{p}|u^0|^p_{L^p(\Omega)} + o_m(1) \\ &= I(u_m) - I(u^0) + o_m(1). \end{aligned}$$

Com isto provamos nossa afirmação.

Agora, mostraremos que

$$I'_*(\Psi^1_m) = I'(\Psi^1_m) + o_m(1) = I'(u_m) - I'(u^0) + o_m(1).$$

Para isto, para cada $\varphi \in H^s_0(\Omega)$ com $\|\varphi\|_{H^s_0(\Omega)} \leq 1$, temos pela definição de Ψ^1_m que

$$\begin{aligned} I'_*(\Psi^1_m)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N}[(-\Delta)^{s/2}\Psi^1_m(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda\Psi^1_m\varphi]dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m\varphi dx \\ &= \int_{\Omega}[(-\Delta)^{s/2}\Psi^1_m(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda\Psi^1_m\varphi]dx - \int_{\Omega}|\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m\varphi dx \end{aligned}$$

assim,

$$I'_*(\Psi^1_m) = I'(\Psi^1_m) + o_m(1).$$

Resta mostrar que

$$I'(\Psi^1_m) = I'(u_m) - I'(u^0) + o_m(1).$$

Para isto, observemos que

$$\begin{aligned} &|[I'(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u^0)]\varphi| \\ &= \Big| \int_{\Omega}[(-\Delta)^{s/2}\Psi^1_m(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda\Psi^1_m\varphi]dx - \int_{\Omega}|\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m\varphi dx \\ &- \int_{\Omega}[(-\Delta)^{s/2}u_m(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u_m\varphi]dx + \int_{\Omega}|u_m|^{p-2}u_m\varphi dx \\ &+ \int_{\Omega}[(-\Delta)^{s/2}u^0(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u^0\varphi]dx - \int_{\Omega}|u^0|^{p-2}u^0\varphi dx\Big|. \end{aligned}$$

Desde que $\Psi^1_m = u_m - u^0 \in \Omega$, podemos escrever

$$|[I'(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u^0)]\varphi| = \left| \int_{\Omega}[|u_m|^{p-2}u_m - |u^0|^{p-2}u^0 - |\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m]\varphi dx \right|$$

e fazendo uso da desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e p, obtemos

$$|[I'(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u^0)]\varphi| \leq \left(\int_{\Omega} ||u_m|^{p-2}u_m - |u^0|^{p-2}u^0 - |\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m|^{\frac{p}{p-1}}dx \right)^{\frac{p-1}{p}} |\varphi|_{L^p(\Omega)}.$$

Recordando que $\varphi \in H^s_0(\Omega)$ e $\|\varphi\|_{H^s_0(\Omega)} \leq 1$, usando imersão contínua de Sobolev, resulta que

$$|[I'(\Psi_m^1) - I'(u_m) + I'(u^0)]\varphi| \leq C\bigg(\int_\Omega ||u_m|^{p-2}u_m - |u^0|^{p-2}u^0 - |\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1|^{\frac{p}{p-1}}dx\bigg)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Daí, aplicando [1, Lema 3], tem-se

$$\bigg(\int_\Omega ||u_m|^{p-2}u_m - |u^0|^{p-2}u^0 - |\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1|^{\frac{p}{p-1}}dx\bigg)^{\frac{p-1}{p}} = o_m(1),$$

mostrando que de fato

$$I'(\Psi_m^1) = I'(u_m) - I'(u^0) + o_m(1).$$

Além disso, observemos que por hipótese $I'(u_m) \to 0$ quando $m \to +\infty$ e como pelo Lema 2.1, u^0 solução da equação (2.1), temos também $I'(u^0) = 0$. Consequentemente,

$$I'_*(\Psi_m^1) = I'(\Psi_m^1) + o_m(1) = I'(u_m) - I'(u^0) + o_m(1) = o_m(1).$$

Suponha agora que a sequência $\Psi_m^1 \nrightarrow 0$ em $H_0^s(\Omega)$ (caso contrário, o teorema estaria provado). Queremos mostrar que existe uma sequência $(y_m^1) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|y_m^1| \to +\infty$ e $\Psi_m^1(x + y_m^1) \rightharpoonup u^1$ em $H_0^s(\mathbb{R}^N)$.

Inicialmente, observemos que

$$I_*(\Psi_m^1) \geq \alpha > 0. \tag{2.25}$$

De fato, desde que

$$\begin{cases} I_*(\Psi_m^1) = \dfrac{1}{2}\|\Psi_m^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \dfrac{1}{p}|\Psi_m^1|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \\ \Psi_m^1 \quad \text{limitada em} \quad H^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \\ I'_*(\Psi_m^1) = o_m(1), \end{cases}$$

temos

$$I'_*(\Psi_m^1)\Psi_m^1 = \|\Psi_m^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - |\Psi_m^1|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = o_m(1),$$

ou seja,

$$|\Psi_m^1|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 + o_m(1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_*(\Psi_m^1) &= \frac{1}{2}\|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{1}{p}|\Psi_m^1|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \\ &= \frac{1}{2}\|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{1}{p}\|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 + o_m(1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 + o_m(1). \end{aligned}$$

Uma vez que $\Psi_m^1 \nrightarrow 0$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$, então existe $C > 0$ tal que para m suficientemente grande

$$\|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 \geq C.$$

Dessa forma,

$$I_*'(\Psi_m^1) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)C + o_m(1),$$

mostrando que para m suficientemente grande (2.25) de fato ocorre.

Agora, vamos decompor o $\mathbb{R}^N$ em hipercubos unitários N-dimensionais Q_i com vértices tendo coordenadas inteiras e considere

$$d_m = \max_i |\Psi_m^1|_{L^p(Q_i)}.$$

Mostraremos que existe $\gamma > 0$ tal que

$$d_m \geq \gamma > 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

De fato, desde que $I_*'(\Psi_m^1) \to 0$, temos

$$\|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}^2 = |\Psi_m^1|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + o_m(1)$$

e, portanto,

$$I_*(\Psi_m^1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_m^1|^p dx + o_m(1);$$

sendo assim, fazendo $K = \dfrac{2p}{(p-2)}$, usando a decomposição mencionada anteriormente e imersão contínua de Sobolev, obtemos

$$
\begin{aligned}
KI_*(\Psi_m^1) + o_m(1) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_m^1|^p dx = \sum_i |\Psi_m^1|^p_{L^p(Q_i)} \\
&\leq \left(\max_i |\Psi_m^1|^{p-2}_{L^p(Q_i)}\right)\left(\sum_i |\Psi_m^1|^2_{L^p(Q_i)}\right) \\
&\leq d_m^{p-2} C \sum_i \int_{Q_i} [|(-\Delta)^{s/2}\Psi_m^1|^2 + \lambda|\Psi_m^1|^2] dx,
\end{aligned}
$$

onde $C > 0$ independe de i. Assim,

$$
KI_*(\Psi_m^1) + o(1) \leq d_m^{p-2} C \|\Psi_m^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = d_m^{p-2} CKI_*(\Psi_m^1).
$$

Da última desigualdade e de (2.25) deduzimos (2.26).

Agora, denotemos y_m^1 o centro de um hipercubo Q_i em que $|\Psi_m^1|_{L^p(Q_i)} = d_m$. Queremos mostrar que a sequência (y_m^1) é ilimitada. Para isto, suponhamos por contradição, que $(y_m^1)_m$ é limitada. Assim, existe $R > 0$ tal que

$$
\int_{B_R(0)} |\Psi_m^1|^p dx \geq \int_{Q_i(y_m^1)} |\Psi_m^1|^p dx = d_m^p > \gamma^p > 0. \tag{2.27}
$$

Por outro lado,

$$
\Psi_m^1 \rightharpoonup 0 \ \text{ em } \ H^s(\mathbb{R}^N)
$$

e daí, usando imersão compacta, obtemos

$$
\Psi_m^1 \to 0 \ \text{ em } \ L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),
$$

ou seja,

$$
\int_{B_R(0)} |\Psi_m^1|^p dx \to 0 \ \text{ quando } \ m \to +\infty
$$

o que é uma contradição por (2.27). Portanto, $(y_m^1)_m$ não é limitada.

Consideremos a sequência $(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))$. Note que para cada m, usando mudança de variável temos

$$\|\Psi_m^1(\cdot + y_m^1)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\Psi_m^1\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Dessa forma, a sequência $(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))$ é limitada em $H^s(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe $u^1 \in H^s(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\Psi_m^1(\cdot + y_m^1) \rightharpoonup u^1 \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\Psi_m^1(\cdot + y_m^1) \to u^1 \quad \text{em} \quad L^p_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Afirmamos que u^1 é uma solução não trivial de (2.2). Comecemos mostrando que $u^1 \neq 0$. Para isto, consideremos $\tilde{Q}$ um hipercubo unitário centrado na origem, novamente fazendo mudança de variável, temos

$$\int_{\tilde{Q}} |\Psi_m^1(y + y_m^1)|^p dy = \int_{Q_i(y_m^1)} |\Psi_m^1|^p dx.$$

Por outro lado,

$$\int_{Q_i(y_m^1)} |\Psi_m^1|^p dx \geq d_m^p \geq \gamma^p > 0.$$

Supondo que $u^1 = 0$, então

$$\int_{\tilde{Q}} |\Psi_m^1(y + y_m^1)|^p dy \to 0$$

implicando em $\gamma = 0$, o que é absurdo. Portanto, $u^1 \neq 0$. Agora, iremos mostrar que u^1 é solução da equação (2.2). Notemos que, sendo $\Psi_m^1 \in H_0^s(\Omega)$ então $\psi_m^1(\cdot + y_m^1) \in H_0^s(\Omega_m)$, onde

$$\Omega_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N ; x + y_m^1 \in \Omega \right\}.$$

Consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq 1$, e portanto, desde que $|y_m^1| \to +\infty$, temos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que o suporte de φ está contido em Ω_m para todo $m \geq m_0$.

Observemos também que

$$I_*(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1)) = \frac{1}{2}\|\Psi_m^1(\cdot + y_m^1)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{p}|\Psi_m^1|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

e

$$\begin{aligned}
I'_*(\Psi^1_m(\cdot + y^1_m))\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2}\Psi^1_m(\cdot + y^1_m)(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda\Psi^1_m(\cdot + y^1_m)\varphi]dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi^1_m(\cdot + y^1_m)|^{p-2}\psi^1_m(\cdot + y^1_m)\varphi dx.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo a mudança de variável $z = x + y^1_m$, temos

$$\begin{aligned}
I'_*(\Psi^1_m(\cdot + y^1_m))\varphi &= \int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2}\Psi^1_m(z)(-\Delta)^{s/2}\varphi(z - y^1_m) + \lambda\Psi^1_m(z)\varphi(z - y^1_m)]dz \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi^1_m(z)|^{p-2}\psi^1_m(z)\varphi(z - y^1_m)dz,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I'_*(\Psi^1_m(\cdot + y^1_m))\varphi = I'_*(\Psi^1_m)\tilde{\varphi}_m, \text{ onde } \tilde{\varphi}_m = \varphi(\cdot - y^1_m).$$

Observemos que, para m suficientemente grande, o suporte de $\tilde{\varphi}_m$ está contido em Ω, ou seja, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\varphi}_m \in H^s_0(\Omega)$ para todo $m \geq m_0$. Logo, para cada $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ com $\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq 1$, tem-se

$$\|\tilde{\varphi}_m\| = \|\varphi(\cdot - y^1_m)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq 1.$$

Assim, desde que $I'_*(\Psi^1_m) = o_m(1)$, concluimos que

$$I'_*(\Psi^1_m(\cdot + y^1_m))\varphi \to 0, \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, pela convergência fraca e pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice B, Lema $B.2$), temos que para todo $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2}\Psi(\cdot + y^1_m)(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda\Psi^1_m(\cdot + y^1_m)\varphi]dx \to \int_{\mathbb{R}^N} [(-\Delta)^{s/2}u^1(-\Delta)^{s/2} + \lambda u^1\varphi]dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi^1_m(\cdot + y^1_m)|^{p-2}\Psi^1_m(\cdot + y^1_m)\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u^1|^{p-2}u^1\varphi dx.$$

Pela unicidade do limite, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}[(-\Delta)^{s/2}u^1(-\Delta)^{s/2}\varphi+\lambda u^1\varphi]dx-\int_{\mathbb{R}^N}|u^1|^{p-2}u^1\varphi dx=0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e por densidade, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}[(-\Delta)^{s/2}u^1(-\Delta)^{s/2}\varphi+\lambda u^1\varphi]dx-\int_{\mathbb{R}^N}|u^1|^{p-2}u^1\varphi dx,\quad \forall\varphi\in H^s(\mathbb{R}^N),$$

mostrando que u^1 é solução da equação (2.2).

Vemos então que repetindo este procedimento, encontramos sequências da forma:

$$\Psi_m^j(x)=\Psi_m^{j-1}(x+y_m^{j-1})-u^{j-1}(x),\quad j\geq 2$$

e sequências de pontos (y_m^j) tais que $|y_m^j|\to+\infty$ quando $m\to+\infty$ e

$$\Psi_m^{j-1}(x+y_m^{j-1})\rightharpoonup u^{j-1}(x)\ \text{ em }\ H^s(\mathbb{R}^N), \tag{2.28}$$

onde cada u^j é solução da equação (2.2).

Agora, nosso objetivo será mostrar que

$$\begin{aligned}\|\Psi_m^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \|\Psi_m^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}-\|u_m^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}+o_m(1)\\ &= \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)}-\|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)}-\sum_{i-1}^{j-1}\|u^i\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}+o_m(1).\end{aligned} \tag{2.29}$$

e

$$\begin{aligned}I_*(\Psi_m^j) &= I_*(\Psi_m^{j-1})-I_*(u^{j-1})+o_m(1)\\ &= I(u_m)-I(u^0)-\sum_{i=1}^{j-1}I_*(u^i)+o_m(1).\end{aligned} \tag{2.30}$$

Para isto, usaremos indução matemática. Inicialmente observemos que para cada $j\geq 2$,

temos

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_m^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \|\Psi_m^{j-1}(\cdot + y_m^1) - u^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \\
&= \|\Psi_m^{j-1}(\cdot + y_m^1)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - 2 < \Psi_m^{j-1}(\cdot + y_m^{j-1}), u^{j-1} > + \|u^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Além disso, temos também que

$$
\|\Psi_m^j(\cdot + y_m^1)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\Psi_m^j\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}
$$

e de (2.28), obtemos

$$
\|\Psi_m^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\Psi_m^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \|u^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_m(1).
$$

Disso, decorre que

$$
\begin{aligned}
I_*(\Psi_m^j) &= \frac{1}{2}\|\Psi_m^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{p}|\Psi_m^j|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{2}\|\Psi_m^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{2}\|u^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{p}|\Psi_m^{j-1}(\cdot + y_m^{j-1}) - u^{j-1}|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_m(1),
\end{aligned}
$$

e aplicando Brezis-Lieb, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_*(\Psi_m^j) &= \frac{1}{2}\|\Psi_m^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{2}\|u^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{p}|\Psi_m^{j-1}(\cdot + y_m^{j-1})|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \frac{1}{p}|\Psi_m^{j-1}|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} + o_m(1) \\
&= I_*(\Psi_m^{j-1}) - I_*(u^{j-1}) + o_m(1).
\end{aligned}
$$

Para o caso em que $j = 1$, já vimos anteriormente que

$$
\|\Psi_m^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + o_m(1)
$$

e

$$
I_*(\Psi_m^1) = I(u_m) - I(u^0) + o_m(1).
$$

Supondo que vale para $j-1$, então

$$\begin{aligned}
\|\Psi_m^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \|\Psi_m^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \|u^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_m(1) \\
&= \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \sum_{i=1}^{j-2} \|u^i\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \|u^{j-1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_m(1) \\
&= \|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \sum_{i=1}^{j-1} \|u^i\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_m(1).
\end{aligned}$$

Da mesma forma, tem-se

$$\begin{aligned}
I_*(\Psi_m^j) &= I_*(\Psi_m^{j-1}) - I_*(u^{j-1}) \\
&= I(u_m) - I(u^0) - \sum_{i=1}^{j-2} I_*(u^i) - I_*(u^{j-1}) + o_m(1) \\
&= I(u_m) - I(u^0) - \sum_{i=1}^{j-1} I_*(u^i) + o_m(1).
\end{aligned}$$

Portanto, por indução fica provado que (2.29) e (2.30) de fato ocorre.

Para concluir a demonstração do lema, resta-nos apenas mostrar que existe um número finito de procedimentos. Caminhando nesse sentido, observemos que para cada j, u^j é solução da equação (2.2). Logo, $\|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = |u^j|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} =: b_j$, e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u^j}{b_j^{\frac{1}{p}}} \right|^p dx = 1.$$

Sendo assim, segue da definição de M_λ que

$$\left\| \frac{u^j}{b_j^{\frac{1}{p}}} \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \geq M_\lambda$$

de onde deduzimos que

$$\|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \geq M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}. \tag{2.31}$$

De (2.29) e (2.31), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi_m^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \sum_{i=1}^{j-1} \|u^i\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_m(1) \\
&\leq \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \sum_{i=1}^{j-1} M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1) \\
&= \|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} - (j-1) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1). \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Desde que (u_m) é limitada em $H_0^s(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que

$$\|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + o_m(1) \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim, de (2.32), obtemos

$$0 \leq \|\Psi_m^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq C - (j-1) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}, \quad \forall m \in \mathbb{R}^N.$$

Uma vez que existe que $j \in \mathbb{N}$, tal que

$$C - (j-1) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} \leq 0,$$

segue que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\limsup_{m \to +\infty} \|\Psi_m^{k+1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

mostrando que

$$\|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} \to \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \sum_{i=1}^{k} \|u^i\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \quad \text{quando} \quad m \to +\infty.$$

Desde que $\|\Psi_m^{k+1}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = o_m(1)$, segue que $I_*(\Psi_m^{k+1}) = o_m(1)$, e assim

$$I(u_m) \to I(u^0) + \sum_{i=1}^{k} I_*(u^i) \quad \text{quando} \quad m \to +\infty.$$

Com isto finalizamos a demonstração do lema. ■

A conclusão do Lema 2.2 nos permite dar algumas estimativas do nível de energia onde a condição Palais-smale pode falhar. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.1. *Assuma que* (u_m) *é uma sequência que satisfaz as mesmas condições do Lema 2.2 e que* $c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{p/(p-2)}$. *Então,* (u_m) *possui uma subsequência que converge forte.*

Demonstração: Desde que a sequência (u_m) satisfaz as mesmas condições do Lema 2.2, então

$$I(u_m) \to c \ \text{ e } \ I'(u_m) \to 0.$$

Na demonstração do Lema 2.2, vimos que sob essas condições (u_m) é limitada em $H_0^s(\Omega)$ e portanto, a menos de subsequência, existe $u^0 \in H_0^s(\Omega)$, tal que

$$u_m \rightharpoonup u^0 \ \text{ em } \ H_0^s(\Omega).$$

Suponhamos, por contradição, que $u_m \not\to u^0$ em $H_0^s(\Omega)$. Segue do Lema 2.2 que existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_m(1)$$

e

$$I(u_m) = I(u^0) + \sum_{j=1}^{k} I_*(u^j) + o_m(1).$$

Vimos também, na demonstração do Lema 2.2 que

$$\|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \geq M_\lambda^{\frac{p}{p-2}},$$

e desde que para cada j, u^j é solução da equação (2.2), segue da desigualdade anterior que

$$I_*(u^j) = \frac{1}{2}\|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{p}|u^j|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}. \quad (2.33)$$

Além disso, desde que u^0 é solução de (2.1), temos também

$$I(u^0) = \frac{1}{2}\|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} - \frac{1}{p}|u^0|^p_{L^p(\Omega)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} \geq 0. \quad (2.34)$$

Logo, da unicidade do limite, (2.33) e (2.34), obtemos

$$c = I(u^0) + \sum_{j=1}^{k} I_*(u^j) \geq \sum_{j=1}^{k} I_*(u^j) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}},$$

contradizendo o fato de que $c < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}$. Portanto, $u_m \to u^0$ em $H_0^s(\Omega)$ e isso conclui a demostração do corolário. ∎

Corolário 2.2. *Seja $\mathcal{P}$ o cone de funções não negativas em $H_0^s(\Omega)$ e $(u_m) \subset \mathcal{P}$ satisfazendo as hipóteses do Lema 2.2. Então se*

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{p/(p-2)} < c < 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{p/(p-2)},$$

(u_m) possui uma subsequência que converge forte.

Demonstração: Desde que (u_m) satisfaz as condições do Lema 2.2, então (u_m) é limitada em $H_0^s(\Omega)$ e portanto, existe $u^0 \in H_0^s(\Omega)$ tal que

$$u_m \rightharpoonup u^0 \text{ em } H_0^s(\Omega).$$

Suponhamos por contradição que $u_m \not\to u^0$ em $H_0^s(\Omega)$. Então, segue do Lema 2.2 que existe $k \geq 1$ tal que

$$\|u_m\|^2_{H_0^s(\Omega)} = \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} + o_m(1)$$

e

$$I(u_m) = I(u^0) + \sum_{j=1}^{k} I_*(u^j) + o_m(1).$$

De forma análoga ao que fizemos na demonstração do Corolário 2.1, mostra-se que

$$I(u_m) = I(u^0) + \sum_{j=1}^{k} I_*(u^j) + o_m(1) \geq k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1).$$

Logo, para $k \geq 2$, temos

$$I(u_m) \to c \geq k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}},$$

contadizendo a hipótese sobre o nível c. Portanto, k não pode ser maior do que 1.

Por outro lado, combinando a Proposição 2.1, Observação 2.2 e Observação 2.3, a solução de energia mínima de (2.2) é da forma $u^1 = M_\lambda^{1/(p-2)}\tilde{u}$, onde $\tilde{u}$ é um minimizador de (2.5). Disso decorre que

$$I_*(u^1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Assim,

$$I(u_m) = I(u^0) + I_*(u^1) + o_m(1) = I(u^0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1).$$

Se $u^0 = 0$, então

$$I(u_m) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1),$$

contradizendo a hipótese sobre o nível c. Portanto, $u^0 \neq 0$ e assim, devemos ter

$$I(u^0) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I(u_m) &= I(u^0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_m(1), \end{aligned}$$

contradizendo novamente a hipótese sobre o nível c e portanto, não podemos ter $k = 1$. Assim, podemos concluir que $u_m \to u^0$ em $H_0^s(\Omega)$. Além disso, veja que pela escolha do nível c, tem-se que $u^0 \neq 0$. ■

Daqui em diante, consideraremos o funcional $\hat{f} : H_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\hat{f}(u) = \int_\Omega [|(-\Delta)^{s/2} u|^2 + \lambda u^2] dx$$

ou equivalentemente,

$$\hat{f}(u) = \|u\|^2_{H_0^s(\Omega)}.$$

Consideremos também a variedade $\mathcal{V} \subset H_0^s(\Omega)$, dada por

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in H_0^s(\Omega); \int_\Omega |u|^p dx = 1 \right\}.$$

Lema 2.3. *Seja $(u_n) \subset \mathcal{V}$ uma sequência satisfazendo*

$$\hat{f}(u_n) \to c \quad e \quad \hat{f}'|_{\mathcal{V}}(u_n) \to 0.$$

Então, a sequência $(v_n) \subset H_0^s(\Omega)$, onde $v_n = c^{\frac{1}{p-2}} u_n$, verifica os seguintes limites:

$$I(v_n) \to \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) c^{\frac{p}{p-2}} \quad e \quad I'(v_n) \to 0.$$

Demonstração: Pela definição do funcional I, temos

$$I(v_n) = \frac{1}{2} \int_\Omega [|(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 + \lambda v_n^2] dx - \frac{1}{p} \int_\Omega |v_n|^p dx$$

que juntamente com a definição de v_n, nos dá

$$\begin{aligned}
I(v_n) &= \frac{1}{2} c^{\frac{2}{p-2}} \int_\Omega [|(-\Delta)^{s/2} u_n|^2 dx + \lambda u_n^2] dx - \frac{1}{p} c^{\frac{p}{p-2}} \int_\Omega |u_n|^p dx \\
&= \frac{1}{2} c^{\frac{2}{p-2}} \hat{f}(u_n) - \frac{1}{p} c^{\frac{p}{p-2}} \\
&= \frac{1}{2} c^{\frac{p}{p-2}} - \frac{1}{p} c^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) c^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Daí, concluimos que

$$I(v_n) \to \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) c^{\frac{p}{p-2}}.$$

Além disso, temos também

$$\|\hat{f}'(u)\|_* = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \|\hat{f}'(u) - \lambda J'(u)\|_{(H_0^s(\Omega))'},$$

onde $\|\cdot\|_*$ é a norma da derivada da restrição de $\hat{f}$ a $\mathcal{V}$ em u e

$$J(u) = \int_\Omega |u|^p dx.$$

O funcional J é de classe C^1 e

$$J'(u)\varphi = \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx.$$

Agora, para cada $n\in\mathbb{N}$, consideremos $\lambda_n\in\mathbb{R}$, tal que

$$\|\hat{f}'(u_n)\|_* = \|\hat{f}'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'}.$$

Para todo $\varphi\in H_0^s(\Omega)$ com $\|\varphi\|_{H_0^s(\Omega)} \le 1$, temos

$$\begin{aligned}
|I'(v_n)\varphi| &= \left| \int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}v_n(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda v_n\varphi]dx - \int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n\varphi dx\right| \\
&= \left| c^{\frac{1}{p-2}} \int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u_n(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u_n\varphi]dx - c^{\frac{p-1}{p-2}} \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n\varphi dx\right| \\
&= \left| c^{\frac{1}{p-2}} \frac{1}{2}\left(2\int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u_n(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u_n\varphi]dx\right) - c^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{1}{p}\left(p\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n\varphi dx\right)\right|.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\hat{f}'(u_n)\varphi = 2\int_\Omega [(-\Delta)^{s/2}u_n(-\Delta)^{s/2}\varphi + \lambda u_n\varphi]dx$$

e

$$J'(u_n)\varphi = p\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n\varphi dx,$$

segue que

$$\begin{aligned}
|I'(v_n)\varphi| &= \left| c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\hat{f}'(u_n)\varphi - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}J'(u_n)\varphi\right| \\
&= \left| c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\hat{f}'(u_n)\varphi - c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n J'(u_n)\varphi + c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n J'(u_n)\varphi - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}J'(u_n)\varphi\right|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, segue-se que

$$
\begin{aligned}
&|I'(v_n)\varphi| \\
&\leq c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\left|\hat{f}'(u_n)\varphi - \lambda_n J'(u_n)\varphi\right| + \left|c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}\right||J'(u_n)\varphi| \\
&\leq c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\|\hat{f}'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'}\|\varphi\|_{H_0^s(\Omega)} + \left|c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}\right|\|J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'}\|\varphi\|_{H_0^s(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Como $\|\varphi\|_{H_0^s(\Omega)} \leq 1$ e $\|\hat{f}'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} = \|\hat{f}'(u_n)\|_*$, segue que

$$
\begin{aligned}
|I'(v_n)\varphi| &\leq c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\|\hat{f}'(u_n)\|_* + \left|c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}\right|\|J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} \\
&= o_n(1) + \left|c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}\right|\|J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'}
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\|I'(v_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} \leq o_n(1) + \left|c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}\right|\|J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'}. \tag{2.35}
$$

Para concluir a demonstração, basta mostrarmos que

$$
\|J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} \leq pC, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.36}
$$

e

$$
\left|c^{\frac{1}{p-2}}\frac{1}{2}\lambda_n - c^{\frac{p-1}{p-2}}\frac{1}{p}\right| \to 0. \tag{2.37}
$$

Temos que (2.36) de fato ocorre, pois para cada $\varphi \in H_0^s(\Omega)$ com $\|\varphi\|_{H_0^s(\Omega)} \leq 1$, obtemos

$$
|J'(u_n)\varphi| = \left|p\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n\varphi dx\right| \leq p\int_\Omega |u_n|^{p-2}|u_n||\varphi|dx = p\int_\Omega |u_n|^{p-1}|\varphi|dx.
$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e p, obtemos

$$
|J'(u_n)\varphi| \leq p\bigg(\int_\Omega |u_n|^p dx\bigg)^{\frac{p-1}{p}}\bigg(\int_\Omega |\varphi|^p dx\bigg)^{\frac{1}{p}}.
$$

Recordando que $(u_n) \subset \mathcal{V}$, segue que

$$|J'(u_n)\varphi| \leq 2_s^* \left(\int_\Omega |u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\varphi|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq p|\varphi|_p \leq C\|\varphi\|_{H_0^s(\Omega)} \leq pC$$

e, portanto,

$$\|J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} \leq pC, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notemos agora que

$$\|\hat{f}'(u_n)\|_* \to 0 \Longleftrightarrow \|\hat{f}'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} \to 0.$$

Desde que (u_n) é limitada em $H_0^s(\Omega)$ e que

$$|\hat{f}'(u_n)u_n - \lambda_n J'(u_n)u_n| \leq \|\hat{f}'(u_n) - \lambda_n J'(u_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} \|u_n\|_{H_0^s(\Omega)}$$

resulta que

$$|\hat{f}'(u_n)u_n - \lambda_n J'(u_n)u_n| \to 0$$

e daí, decorre que

$$\left| 2\int_\Omega [|(-\Delta)^{s/2}u_n|^2 dx + \lambda u_n^2] dx - \lambda_n p \int_\Omega |u_n|^p dx \right| \to 0.$$

Assim,

$$|2\hat{f}(u_n) - \lambda_n p| \to 0 \Rightarrow 2\hat{f}(u_n) - \lambda_n p = o_n(1) \Rightarrow \lambda_n = \frac{2}{p}\hat{f}(u_n) + o_n(1),$$

de onde concluimos que

$$\lambda_n = \frac{2}{p}c + o_n(1).$$

Portanto,

$$\left| c^{\frac{1}{p-2}} \frac{1}{2}\lambda_n - c^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{1}{p} \right| = \left| c^{\frac{1}{p-2}} \frac{1}{2} \frac{2}{p} c - c^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{1}{p} + o_n(1) \right| = \left| c^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{1}{p} - c^{\frac{p-1}{p-2}} \frac{1}{p} + o_n(1) \right| = o_n(1),$$

mostrando que (2.37) de fato ocorre. De (2.35), (2.36) e (2.37) segue que

$$\|I'(v_n)\|_{(H_0^s(\Omega))'} \to 0,$$

e isto conclui a prova do lema. ∎

Corolário 2.3. *Suponha que existe* $(u_n) \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{P}$ *e* $c \in (M_\lambda, 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda)$ *tais que*

$$\hat{f}(u_n) \to c \ \text{ e } \ \hat{f}'|_{\mathcal{V}}(u_n) \to 0.$$

Então, a menos de subsequência, $u_n \to u$ *em* $H_0^s(\Omega)$.

Demonstração: Vimos no Lema 2.3 que a sequência $(u_n) \subset H_0^s(\Omega)$, dada por $v_n = c^{\frac{1}{p-2}} u_n$ é Palais-Smale de nível $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right) c^{\frac{p}{p-2}}$ para o funcional I.

Uma vez que $c \in (M_\lambda, 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda)$, temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) c^{\frac{p}{p-2}} \in \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}, 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}\right)$$

e do Corolário 2.2 segue que, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $H_0^s(\Omega)$. Assim, fazendo $u = c^{\frac{1}{p-2}} v$, temos

$$c^{\frac{1}{p-2}} \|u_n - u\|_{H_0^s(\Omega)} = \|c^{\frac{1}{p-2}} u_n - c^{\frac{1}{p-2}} u\|_{H_0^s(\Omega)} = \|v_n - v\|_{H_0^s(\Omega)} \to 0.$$

Portanto, $u_n \to u$ em $H_0^s(\Omega)$. ∎

Consideremos o operador $\Phi_\sigma : \mathbb{R}^N \to H^s(\mathbb{R}^N)$ definido por

$$\Phi_\sigma(y) = w_y^\sigma(x) = \frac{v_y^\sigma(x)}{|v_y^\sigma|_{L^p(\mathbb{R}^N)}},$$

onde

$$v_y^\sigma(x) = \zeta(x)\bar{u}(x-y) = \tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)\bar{u}(x-y)$$

ζ, $\tilde{\zeta}$ e $\bar{u}$ sendo escolhidos como na prova do Teorema 2.3.

Observação 2.4. *Uma vez que* Φ_σ *e* v_y^σ *se anulam fora de* Ω*, podemos olhar para estas* *funções como elementos de* $H_0^s(\Omega)$ *e* $L^p(\Omega)$*. Além disso, temos também que*

$\|\Phi_\sigma\|_{H_0^s(\Omega)} = \|\Phi_\sigma\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$, $|\Phi_\sigma|_{L^p(\Omega)} = |\Phi_\sigma|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$, $\|v_y^\sigma\|_{H_0^s(\Omega)} = \|v_y^\sigma\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ e $|v_y^\sigma|_{L^p(\Omega)} = |v_y^\sigma|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

Lema 2.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\Phi_\sigma(y)$ *é contínuo em* y *para qualquer* σ*;*

(ii) $\Phi_\sigma(y) \to \bar{u}(\cdot - y)$ *em* $H_0^s(\mathbb{R}^N)$ *uniformemente em* y*, quando* $\sigma \to 0$*;*

(iii) $\|\Phi_\sigma(y)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to M_\lambda$ *quando* $|y| \to +\infty$ *uniformemente, para qualquer* σ*.*

Demonstração: (i) É imediato, pois $\Phi_\sigma(\cdot)$ é composição de funções contínuas.

Para provarmos (i) e (ii), antes devemos mostrar que:

$$|v_y^\sigma|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 1 \ \text{ uniformemente em } y \text{ quando } \ \sigma \to 0 \tag{2.38}$$

e

$$\|v_y^\sigma\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to \|\bar{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = M_\lambda \ \text{ uniformemente em } y \text{ quando } \ \sigma \to 0. \tag{2.39}$$

Iniciaremos provando (2.38). Pela definição de ζ, temos

$$|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-y)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, além disso, pela definição de $\tilde{\zeta}$

$$\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right) = 1 \ \text{ para } \ |x| \geq 2\sigma$$

logo,

$$|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{B_{2\sigma}(0)} \left| \left(\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma} - 1\right)\bar{u}(x-y)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Agora, usando o fato que $\tilde{\zeta}$ é limitada, deduzimos

$$|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq K_1 \bigg(\int_{B_{2\sigma}(0)} |\bar{u}(x-y)|^p dx \bigg)^{\frac{1}{p}},$$

e desde que $\bar{u}$ radialmente simétrica com relação a origem e decresce com o aumento do raio, resulta que

$$|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq K_1 \bigg(\int_{B_{2\sigma}(0)} |\bar{u}(0)|^p dx \bigg)^{\frac{1}{p}} = K_1 \bar{u}(0)^p |B_{2\sigma}(0)|^{\frac{1}{p}}. \tag{2.40}$$

Passando ao limite de $\sigma \to 0$ em (2.40), obtemos

$$|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ \text{ uniformemente em } \ y,$$

mostrando que (2.38) de fato ocorre.

Agora, nosso objetivo é mostrar (2.39). Para isto, observemos que

$$\begin{aligned}
\|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2}(\zeta(x)\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-y))|^2 \\
&+ \lambda|\zeta(x)\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-y)|^2]dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \bigg[\bigg| (-\Delta)^{s/2} \bigg(\bigg(\tilde{\zeta}\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) - 1 \bigg) \bar{u}(x-y) \bigg) \bigg|^2 \\
&+ \lambda \bigg| \bigg(\tilde{\zeta}\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) - 1 \bigg) \bar{u}(x-y) \bigg|^2 \bigg] dx.
\end{aligned}$$

De modo inteiramente análogo ao que fizemos para mostrar (2.38), mostra-se que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \bigg| \bigg(\tilde{\zeta}\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) - 1 \bigg) \bar{u}(x-y) \bigg|^2 dx \leq \lambda K_1^2 \bar{u}(0)^2 |B_{2\sigma}(0)| = K_2 \sigma^N. \tag{2.41}$$

Sendo assim, para concluir a prova de (2.39), resta-nos mostrar que a convergência abaixo é verdadeira:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bigg| (-\Delta)^{s/2} \bigg(\bigg(\tilde{\zeta}\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) - 1 \bigg) \bar{u}(x-y) \bigg) \bigg|^2 dx = o_\sigma(1). \tag{2.42}$$

Para tanto, seguiremos as ideias encontradas em [59, Lema 2.12]. Consideremos a função

$K:\mathbb{R}^N\setminus\{0\}\to(0,+\infty)$, dada por

$$K(x)=\frac{1}{|x|^{N+2s}}$$

satisfazendo a propriedade que

$$mK\in L^1(\mathbb{R}^N),\quad \text{onde}\quad m(x)=\min\{|x|^2,1\}. \tag{2.43}$$

Além disso, aqui usaremos a seguinte notação:

$$\zeta_\sigma(x)=\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right);$$

dessa forma, pela definição de $\tilde{\zeta}$, teremos

$$0\leq\zeta_\sigma(x)\leq 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}^N, \tag{2.44}$$

$$\zeta_\sigma(x)=0,\quad \forall x\in B_\sigma(0) \tag{2.45}$$

e

$$\zeta_\sigma(x)=1,\quad \forall x\in B^c_{2\sigma}(0). \tag{2.46}$$

Observemos que para mostrar (2.42) é suficiente provar que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}}|\zeta_\sigma(x)\bar{u}(x-y)-\bar{u}(x-y)-\zeta_\sigma(z)\bar{u}(z-y)+\bar{u}(z-y)|^2K(x-z)dxdz.$$

No entanto, temos

$$\begin{aligned}&|\zeta_\sigma(x)\bar{u}(x-y)-\bar{u}(x-y)-\zeta_\sigma(z)\bar{u}(z-y)+\bar{u}(z-y)|^2\\&=|(\zeta_\sigma(x)-1)(\bar{u}(x-y)-\bar{u}(z-y))-(\zeta_\sigma(z)-\zeta_\sigma(x))\bar{u}(z-y)|^2;\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\zeta_\sigma(x)\bar{u}(x-y) - \bar{u}(x-y) - \zeta_\sigma(z)\bar{u}(z-y) + \bar{u}(z-y)|^2 K(x-z)dxdz \\
&\leq 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\zeta_\sigma(x)-1|^2|\bar{u}(x-y)-\bar{u}(z-y)|^2K(x-z)dxdz \qquad (2.47)\\
&+ 4\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\zeta_\sigma(x)-\zeta_\sigma(z)|^2|\bar{u}(z-y)|^2K(x-z)dxdz.
\end{aligned}$$

Desde que $\bar{u} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e (2.44) vale, então

$$|\zeta_\sigma(x)-1|^2|\bar{u}(x-y)-\bar{u}(z-y)|^2K(x-z) \leq 4|\bar{u}(x-y)-\bar{u}(z-y)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N)$$

enquanto, pela definição de ζ_σ, deduzimos

$$|\zeta_\sigma(x)-1|^2|\bar{u}(x-y)-\bar{u}(z-y)|^2K(x-z) \to 0 \;\text{ q.t.p em }\; \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$$

quando $\sigma \to 0$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\zeta_\sigma(x)-1|^2|\bar{u}(x-y)-\bar{u}(z-y)|^2K(x-z)dxdz \to 0, \;\text{ quando }\; \sigma\to 0. \quad (2.48)$$

Por outro lado, pela definição de $\tilde{\zeta}$ e por (2.44), encontramos

$$\begin{aligned}
|\zeta_\sigma(x)-\zeta_\sigma(z)|^2|\bar{u}(z-y)|^2K(x-z) &\leq 4|\zeta_\sigma|_\infty^2\min\{|x-z|^2,1\}|\bar{u}(z-y)|^2K(x-z)\\
&\leq 4(C+1)m(x-z)|\bar{u}(z-y)|^2K(x-z), \quad (2.49)
\end{aligned}$$

onde m é a função definida em (2.43). Assim, por mudança de variável, por (2.43) e pelo fato de $\bar{u}\in H^s(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} m(x-z)K(x-z)|\bar{u}(z-y)|^2dxdz \leq \int_{\mathbb{R}^N} m(w)K(w)dw\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}(z-y)|^2dz < \infty$$

uma vez que a aplicação

$$\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \ni (x,z) \longmapsto m(x-z)K(x-z)|\bar{u}(z-y)|^2 \qquad (2.50)$$

pertence a $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Logo, disso, (2.49) e o fato que

$$|\zeta_\sigma(x) - \zeta_\sigma(z)|^2 |\bar{u}(z-y)|^2 K(x-z) \to 0 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

quando $\sigma \to 0$ e novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |\zeta_\sigma(x) - \zeta_\sigma(z)|^2 |\bar{u}(z-y)|^2 K(x-z) dxdz \to 0 \tag{2.51}$$

quando $\sigma \to 0$. Por (2.47), (2.48) e (2.51), concluimos que (2.42) de fato ocorre.

Portanto, passando ao limite de $\sigma \to 0$ em (2.41) e (2.42), segue que independentemente de y

$$\|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to 0,$$

ou seja, quando $\sigma \to 0$

$$\|v_y^\sigma\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to \|\bar{u}(x-y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\bar{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = M_\lambda$$

uniformemente em y, mostrando que (2.39) de fato ocorre.

Agora, observe que de (2.38) e (2.39), extraimos que

$$\Phi_\sigma(y) = \frac{v_y^\sigma}{|v_y^\sigma|_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \to \bar{u}(\cdot - y) \ \text{ em } \ H^s(\mathbb{R}^N)$$

uniformemente em y, quando $\sigma \to 0$. Com isto, fica provado o ítem (ii).

Para mostrarmos (iii), observemos que para cada σ fixado, considerando uma sequência arbitrária $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|y_n| \to +\infty$, e argumentando da mesma forma que fizemos na demonstração do Teorema 2.3, mostra-se que

$$|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y_n)|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ \text{ e } \ \|v_y^\sigma - \bar{u}(x-y_n)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to 0$$

quando $|y_n| \to +\infty$. Desde que (y_n) é uma sequência arbitrária, para cada σ temos

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left\| \frac{v_y^\sigma}{|v_y^\sigma|_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to \frac{\|\bar{u}(x-y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}}{|\bar{u}(x-y)|_{L^p(\mathbb{R}^N)}} = \frac{\|\bar{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}}{|\bar{u}|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} = M_\lambda$$

quando $|y| \to +\infty$. Com isto, mostramos (iii) e finalizamos a prova do lema. ∎

Corolário 2.4. *Existe $\bar{\sigma} \equiv \bar{\sigma}(\lambda)$ tal que, para todo $\sigma \leq \bar{\sigma}$*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} < 2^{(p-2)/p} M_\lambda.$$

Demonstração: Inicialmente, observemos que sendo $p > 2$ então $2^{\frac{p-2}{p}} > 1$, de onde deduzimos que

$$M_\lambda < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda.$$

Pelo ítem (ii) do Lema 2.4, temos

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \to M_\lambda \ \text{ uniformemente em } \ y, \ \text{ quando } \ \sigma \to 0.$$

Pela definição de limite, dado $0 < \epsilon < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda - M_\lambda$, existe $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\lambda)$, tal que

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq M_\lambda + \epsilon, \ \ \forall \sigma \leq \bar{\sigma} \ \text{ e } \ y \in \mathbb{R}^N.$$

Portanto,

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} < M_\lambda + \epsilon < M_\lambda + 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda - M_\lambda < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda$$

como queríamos provar. ∎

2.3 Lemas técnicos

Nesta seção, estabeleceremos alguns lemas técnicos. Tais lemas serão de suma importância na demonstração do Teorema 2.1 que faremos na próxima seção.

No que segue, fixamos Ω de tal maneira que $\sigma < \bar{\sigma}$, onde σ é o menor número positivo tal que

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_\sigma(0).$$

Definamos a função $\beta : H^s(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ da seguinte forma

$$\beta(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 \chi(|x|) x dx,$$

onde $\chi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ é uma função não crescente tal que

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ 0 < t \leq R, \\ \dfrac{R}{t}, & \text{se } \ t > R, \end{cases}$$

onde $R \in \mathbb{R}^+$ satisfaz $\mathbb{R}^N \setminus \Omega \subset B_R(0)$. Cosideremos também o subespaço de $H_0^s(\Omega)$ dado por

$$\beta_0 \equiv \{u \in \mathcal{V}; \beta(u) = 0\}.$$

Lema 2.5. *Seja* $c_0 = \inf\limits_{u \in \beta_0} \|u\|^2_{H_0^s(\Omega)}$. *Então*

$$c_0 > M_\lambda. \tag{2.52}$$

Demonstração: Desde que $c_0 = \inf\limits_{u \in \beta_0} \|u\|^2_{H_0^s(\Omega)}$, $\mu_\lambda = \inf\limits_{u \in \mathcal{V}} \|u\|^2_{H_0^s(\Omega)}$ e por definição $\beta_0 \subset \mathcal{V}$, então claramente

$$\mu_\lambda \leq c_0.$$

Entretanto, no início da demonstração do Teorema 2.3, vimos que $M_\lambda \leq \mu_\lambda$. Disso, resulta que

$$M_\lambda \leq c_0. \tag{2.53}$$

Nosso objetivo é mostrar que a igualdade em (2.53) não pode ocorrer. Porquê supondo provado isto, necessariamente teremos $c_0 > M_\lambda$ e o lema estará provado. Caminhando nesse sentido, suponhamos por contradição, que $c_0 = M_\lambda$. Então, existe uma $v_n \subset \mathcal{V}$, tal que

$$|v_n|_{L^p(\Omega)} = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \beta(v_n) = 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\|v_n\|^2_{H^s_0(\Omega)} \to M_\lambda \text{ quando } n \to +\infty.$$

Assim, usando o Princípio Variacional de Ekeland (veja Apêndice B, Proposição $B.1$), existe uma sequência $(\tilde{v}_n)$, tal que

$$M_\lambda \leq G(\tilde{v}_n) \leq G(v_n) + \frac{1}{n}; \tag{2.54}$$

$$\|\tilde{v}_n - v_n\|_{H^s_0(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}; \tag{2.55}$$

$$G(\tilde{v}_n) \leq G(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}\|\tilde{v}_n - u\|_{H^s_0(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \tag{2.56}$$

onde G é um funcional em $H^s_0(\Omega)$ definido por $G(u) = \|u\|^2_{H^s_0(\Omega)}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\alpha_n(t) = \tilde{v}_n + tw$ um caminho diferenciável em $\mathcal{V}$. Assim, de (2.56), vem que

$$G(\tilde{v}_n) \leq G(\alpha_n(t)) + \frac{1}{\sqrt{n}}\|\tilde{v}_n - \alpha_n(t)\|_{H^s_0(\Omega)} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}}\|\tilde{v}_n - \alpha_n(t)\|_{H^s_0(\Omega)} \leq G(\alpha_n(t)) - G(\tilde{v}_n).$$

Uma vez que $\alpha_n(t) = \tilde{v}_n + tw$, segue que

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\|w\|_{H^s_0(\Omega)} \leq \frac{G(\tilde{v}_n + tw) - G(\tilde{v}_n)}{t}$$

e passando ao limite de $t \to 0$, obtemos

$$-\frac{1}{\sqrt{n}}\|w\|_{H^s_0(\Omega)} \leq G'(\tilde{v}_n)w.$$

Note que na desigualdade acima podemos trocar w por $-w$. Dessa forma, encontramos

$$G'(\tilde{v}_n)w \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\|w\|_{H^s_0(\Omega)}$$

o que implica em

$$|G'(\tilde{v}_n)w| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Considerando a norma do espaço $(H_0^s(\Omega))'$ definida na demonstração do Lema 2.3, temos

$$\|G'(\tilde{v}_n)\|_* \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2.57}$$

Sendo assim, de (2.54) e (2.57), resulta que

$$G(\tilde{v}_n) \to M_\lambda \ \text{ e } \ \|G'(\tilde{v}_n)\|_* \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty.$$

Seja $f : H_0^s(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \lambda|u|^2]dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx$$

e consideremos a sequência $\tilde{u}_n = M_\lambda^{\frac{1}{p-2}}\tilde{v}_n$. Usando os mesmos argumentos utilizados na prova do Lema 2.3, mostra-se que

$$f'(\tilde{u}_n) = o_n(1) \ \text{ em } \ (H_0^s(\Omega))'.$$

Além disso, usando a definição de $\tilde{u}_n$ e a convergência anterior, temos também

$$f(\tilde{u}_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|(-\Delta)^{s/2}\tilde{u}_n|^2 + \lambda|\tilde{u}_n|^2]dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |\tilde{u}_n|^p dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1). \tag{2.58}$$

Denotando por (u_n) a sequência $(\tilde{u}_n)$, segue do Lema 2.2 que

$$\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} \to \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} + \sum_{j=1}^k \|u^j\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

e

$$f(u_n) \to f(u^0) + \sum_{j=1}^k f_*(u^j),$$

onde $f_* : H^s(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é o funcional definido por

$$f_*(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} [|(-\Delta)^{s/2}u|^2 + \lambda|u|^2]dx - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Consequentemente,

$$f(u_n) \to f(u^0) + \sum_{j=1}^{k} f_*(u^j) \geq f(u^0) + k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Desde que $f(u^0) \geq 0$, então k não pode ser maior do que 1, pois se fosse esse o caso, teriamos

$$f(u_n) \to f(u^0) + f_*(u^1) \geq f(u^0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}$$

e então,

$$f(u_n) \neq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1),$$

contradizendo (2.58). Logo, devemos ter $k = 0$ ou $k = 1$. Se $k = 0$, então

$$\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} \to \|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)}.$$

Além disso, uma vez que $u_n \rightharpoonup u^0$ em $H_0^s(\Omega)$, resulta que

$$u_n \to u^0 \text{ em } H_0^s(\Omega).$$

Porém isto contradiz o fato de que M_λ não é atingido na variedade $\mathcal{V}$, pois teríamos

$$\|u^0\|^2_{H_0^s(\Omega)} = M_\lambda^{\frac{p}{p-2}}.$$

Logo, $k \neq 0$. Para $k = 1$, devemos fazer $u^0 = 0$, pois caso contrário, não teríamos

$$f(u_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}} + o_n(1),$$

o que novamente contraria (2.58). Portanto, temos

$$\|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} \to \|u^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} \text{ e } f_*(u^1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)M_\lambda^{\frac{p}{p-2}},$$

onde na última igualdade usamos o fato de que u^1 deve ser solução ground state para o problema (2.2) juntamente com a unicidade.

Desde que $u_n \rightharpoonup u^0 = 0$, fazendo $\Psi_n^1(x + y_n^1) = u_n(x + y_n^1)$ onde (y_n^1) é uma sequência tal que $|y_n^1| \to +\infty$, obtemos

$$\Psi_n^1(x + y_n^1) = u_n(x + y_n^1) \rightharpoonup u^1(x).$$

Além do mais, usando mudança de variável, mostra-se que

$$\|\Psi_n^1(x + y_n^1)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u_n(x + y_n^1)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u_n\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u_n\|^2_{H_0^s(\Omega)} \to \|u^1\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

de onde concluimos que

$$u_n(x + y_n^1) \to u^1 \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^N).$$

Denotando $u^1 = u$, $y_n^1 = y_n$ e $w_n(x + y_n^1) = u_n(x + y_n^1) - u^1(x)$, obtemos

$$w_n(x) = u_n(x) - u(x - y_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Observando que

$$\|w_n\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|w_n(x + y_n)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|u_n(x + y_n) - u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)},$$

da convergência forte de $u_n(x + y_n)$, deduzimos que

$$w_n \to 0 \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^N).$$

Agora, consideremos os seguintes conjuntos:

$$(\mathbb{R}^N)_n^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^N; < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} > 0\right\} \quad \text{e} \quad (\mathbb{R}^N)_n^- = \mathbb{R}^N \setminus (\mathbb{R}^N)_n^+.$$

Desde que $|y_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, queremos mostrar que para n suficientemente grande, existe uma bola $B_{\tilde{r}}(y_n) = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x - y_n| < \tilde{r}\right\} \subset (\mathbb{R}^N)_n^+$, tal que

$$u(x - y_n) \geq \frac{1}{2}u(0) > 0, \quad \forall x \in B_{\tilde{r}}(y_n)$$

e

$$u(x - y_n) \leq \frac{K|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x - y_n|^{\frac{N}{p}}}, \quad \forall x \in (\mathbb{R}^N)_n^-,$$

onde K é uma constante positiva.

Inicialmente, observemos que $u(0)$ é o máximo valor de u no $\mathbb{R}^N$ e que $\frac{1}{2}u(0) > 0$. Além disso, uma vez que u é radialmente simétrica e $u(z)$ decresce com o crescimento de $|z|$ (veja Proposição 2.1) de tal modo que

$$u(z) \to 0 \ \text{ quando } \ |z| \to +\infty$$

então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\tilde{r} > 0$ tal que

$$u(z) = \frac{1}{2}u(0) > 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^N, \ \text{ com } \ |z| = \tilde{r}.$$

Fazendo $z = x - y_n$, vem que

$$u(x - y_n) \geq \frac{1}{2}u(0) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \ \text{ com } \ |x - y_n| = \tilde{r},$$

consequêntemente,

$$u(x - y_n) \geq \frac{1}{2}u(0) > 0, \quad \forall x \in B_{\tilde{r}}(y_n).$$

Desde que

$$|x - y_n|^2 = |x|^2 - 2 < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} + |y_n|^2.$$

Fixando $\tilde{r}$, temos

$$< x, y_n >_{\mathbb{R}^N} = \frac{|x|^2 - |x - y_n|^2 + |y_n|^2}{2} > \frac{|x|^2 - \tilde{r}^2 + |y_n|^2}{2} \geq \frac{|y_n| - \tilde{r}^2}{2},$$

e sendo (y_n) uma sequência tal que $|y_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_n|^2 > \tilde{r}^2, \quad \forall n \geq n_0,$$

de onde segue que

$$< x, y_n >_{\mathbb{R}^N} > 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Com isto, mostramos que para n suficientemente grande $B_{\tilde{r}}(y_n) \subset (\mathbb{R}^N)^+_n$. Agora, devido a um resultado de V. Ambrosio em [6, Lema 1], temos

$$u(x) \leq \left(\frac{N}{\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{p}} |x|^{-\frac{N}{p}} |u|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Em particular, vale

$$u(x - y_n) \leq \frac{K|u|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x - y_n|^{\frac{N}{p}}}, \quad \forall x \in (\mathbb{R}^N)^-_n, \tag{2.59}$$

onde $K = \left(\frac{N}{\omega_{N-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$ e ω_{N-1} é a medida de Lebesgue da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} &\langle \beta(u(x - y_n)), y_n \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x - y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} dx \\ &= \int_{(\mathbb{R}^N)^+_n} |u(x - y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} dx + \int_{(\mathbb{R}^N)^-_n} |u(x - y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} dx. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Desde que

$$|u(x - y_n)|^2, \ \ \chi(|x|), \ \ < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} > 0, \quad \forall x \in (\mathbb{R}^N)^+_n$$

e

$$B_{\tilde{r}}(y_n) \subset (\mathbb{R}^N)^+_n,$$

obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}^N)^+_n} |u(x - y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n > dx \geq \int_{B_{\tilde{r}}(y_n)} |u(x - y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n > dx. \tag{2.61}$$

Como

$$u(x - y_n) \geq \frac{u(0)}{2}, \quad \forall x \in B_{\tilde{r}}(y_n)$$

e

$$< x, y_n >_{\mathbb{R}^N} = |x||y_n| \cos\theta,$$

onde θ é o angulo entre x e y_n, segue que

$$\int_{B_{\tilde{r}}(y_n)} |u(x - y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} dx \geq \int_{B_{\tilde{r}}(y_n)} \frac{|u(0)|^2}{4} \chi(|x|)|x||y_n| \cos\theta dx. \quad (2.62)$$

Observando que para todo $x \in B_{\tilde{r}}(y_n)$, vale

$$|y_n| = |y_n - x + x| \leq |y_n - x| + |x| \leq \tilde{r} + |x|$$

então

$$|x| > R, \quad \text{quando} \quad |y_n| \to +\infty.$$

Dessa forma, usando a definição de χ, temos para n suficientemente grande que

$$\chi(|x|)|x| = \frac{R}{|x|}|x| = R,$$

consequentemente

$$\int_{B_{\tilde{r}}(y_n)} \frac{|u(0)|^2}{4} \chi(|x|)|x||y_n| \cos\theta dx \geq \int_{B_{\tilde{r}}(y_n)} \frac{|u(0)|^2}{4} R|y_n| \cos\theta dx. \quad (2.63)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que o maior ângulo entre x e y_n é dado pela seguinte relação

$$\theta_{max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{r}}{|y_n|}\right). \quad (2.64)$$

De fato, desde que θ_{max} é o maior ângulo entre x e y_n, sendo que y_n é fixo, pois é o centro da bola, então para obter o θ_{max} o vetor x que varia na bola tem que ser tangente a bola de raio $\tilde{r}$. Logo,

$$\operatorname{tg}(\theta_{max}) = \frac{\tilde{r}}{|y_n|} \Leftrightarrow \theta_{max} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{r}}{|y_n|}\right),$$

comprovando a relação dada em (2.64). Portanto, de (2.64) deduzimos que

$$\theta_{max} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty,$$

ou seja, para n suficientemente grande temos $\cos\theta \geq \dfrac{1}{2}$, logo

$$\int_{B_{\tilde{r}}(y_n)} \frac{|u(0)|^2}{4} R|y_n| \cos\theta dx \geq R\frac{|u(0)|^2}{8} \int_{B_{\tilde{r}}(y_n)} |y_n| dx = R\frac{|u(0)|^2}{8} |B_{\tilde{r}}(y_n)||y_n|. \quad (2.65)$$

De (2.61), (2.62), (2.63) e (2.65), obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^+} |u(x-y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} dx \geq R\frac{|u(0)|^2}{8} |B_{\tilde{r}}(y_n)||y_n|. \quad (2.66)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$- < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} \leq | < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} | \leq |x||y_n| \Rightarrow < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} \geq -|x||y_n|$$

logo,

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} |u(x-y_n)|^2 \chi(|x|) < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -|u(x-y_n)|^2 \chi(|x|)|x||y_n| dx \quad (2.67)$$

e de (2.59), obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -|u(x-y_n)|^2 \chi(|x|)|x||y_n| dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -\frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y_n|^{\frac{2N}{p}}} \chi(|x|)|x||y_n| dx. \quad (2.68)$$

Pela definição de χ, extraimos que:

$$\chi(|x|)|x| \leq R, \ \text{ se } \ |x| \leq R$$

e

$$\chi(|x|)|x| = \frac{R}{|x|}|x| = R, \ \ |x| > R,$$

de onde segue que

$$\chi(|x|)|x| \leq R.$$

Portanto,

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -\frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y_n|^{\frac{2N}{p}}}\chi(|x|)|x||y_n|dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -\frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y_n|^{\frac{2N}{p}}}R|y_n|dx. \tag{2.69}$$

Combinando (2.67), (2.68) e (2.69), obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} |u(x-y_n)|^2\chi(|x|) < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-} -\frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y_n|^{\frac{2N}{p}}}R|y_n|dx. \tag{2.70}$$

Dessa forma, combinando (2.60), (2.66) e (2.70), encontramos

$$\left\langle \beta(u(x-y_n)), \frac{y_n}{|y_n|}\right\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq R\frac{|u(0)|^2}{8}|B_{\tilde{r}}(y_n)| - \tilde{K}R|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-}\frac{1}{|x-y_n|^{\frac{2N}{p}}}dx.$$

Considerando a sequência de funções integráveis

$$\Psi_n^1(x) = \frac{1}{|x-y_n|^{\frac{2N}{p}}}$$

e observando que por definição

$$< x, y_n >_{\mathbb{R}^N} \leq 0, \quad \forall x \in (\mathbb{R}^N)_n^-,$$

vem que,

$$|x-y_n|^2 = |x|^2 - 2 < x, y_n >_{\mathbb{R}^N} + |y_n|^2 \geq |y_n|^2,$$

de onde deduzimos que para cada $x \in (\mathbb{R}^N)_n^-$, $|x-y_n| \geq |y_n|$ e, sendo a sequência (y_n) tal que $|y_n| \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, obtemos

$$\Psi_n^1(x) \to 0 \text{ q.t.p em } (\mathbb{R}^N)_n^-.$$

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}^N)_n^-}\Psi_n^1(x)dx = \int_{(\mathbb{R}^N)_n^-}\frac{1}{|x-y_n|^{\frac{2N}{p}}}dx = o_n(1).$$

Portanto,

$$\left\langle \beta(u(x-y_n)), \frac{y_n}{|y_n|} \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \geq R\frac{|u(0)|^2}{8}|B_{\tilde{r}}(y_n)| - o_n(1) > 0.$$

Desde que $w_n \to 0$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$ e $\beta(u_n) = 0$, deduzimos que

$$\beta(u(x-y_n)) = o_n(1),$$

o que é uma contradição. Portanto, a suposição de que $c_0 = M_\lambda$ não pode ocorrer e assim $c_0 > M_\lambda$, como queríamos provar. ■

Lema 2.6. *Existe $R_0 > \sigma$ tal que*

(a) se $|y| \geq R_0$, então $\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} \in \left(M_\lambda, \frac{c_0 + M_\lambda}{2}\right)$;

(b) se $|y| = R_0$, então $\langle \beta \circ \Phi_\sigma(y), y \rangle_{\mathbb{R}^N} > 0$.

Demonstração: Comecemos provando o ítem (a). Desde que $\Phi_\sigma(y) \in H^s_0(\Omega)$ e $|\Phi_\sigma(y)|_{L^p(\Omega)} = 1$, segue do Teorema 2.3 que não existe solução ground state para (2.1), ou seja,

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} \neq M_\lambda.$$

Assim,

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} > M_\lambda, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Pelo ítem (iii) do Lema 2.4, para cada σ fixado,

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} \to M_\lambda, \quad \text{quando} \quad |y| \to +\infty.$$

Como Ω foi fixado anteriormente, temos também que σ está fixado. Agora, usando a definição do limite acima, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $R_0 > 0$ tal que, se

$$|y| \geq R_0 \Rightarrow |\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} - M_\lambda| < \epsilon.$$

Uma vez que $c_0 > M_\lambda$ (pelo Lema 2.5), considerando $\epsilon < \dfrac{c_0 - M_\lambda}{2}$, existe $R_0 > 0$ tal que, se

$$|y| \geq R_0 \Rightarrow |\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} - M_\lambda| < \epsilon,$$

e portanto,

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} < \epsilon + M_\lambda < \frac{c_0 - M_\lambda}{2} + M_\lambda = \frac{c_0 + M_\lambda}{2},$$

ou seja,

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} \in \left(M_\lambda, \frac{c_0 + M_\lambda}{2}\right), \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \ \text{ tal que } \ |y| \geq R_0.$$

Com isto concluimos a prova do ítem (a).

Provaremos agora o ítem (b). Temos

$$\langle \beta(\Phi_\sigma(y)), y\rangle_{\mathbb{R}^N} = \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_\sigma(y)|^2 \chi(|x|) < x, y > dx.$$

Pela definição de $\Phi_\sigma(y)$, obtemos

$$\langle \beta(\Phi_\sigma(y)), y\rangle_{\mathbb{R}^N} = \frac{1}{|v^\sigma_y|^2{}_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right) u(x-y)\right|^2 \chi(|x|) < x, y > dx,$$

assim,

$$\begin{aligned}
\langle \beta(\Phi_\sigma(y)), y\rangle_{\mathbb{R}^N} &= \frac{1}{|v^\sigma_y|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \int_{(\mathbb{R}^N)^+} \left|\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right) u(x-y)\right|^2 \chi(|x|) < x, y > dx \\
&+ \frac{1}{|v^\sigma_y|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \int_{(\mathbb{R}^N)^-} \left|\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right) u(x-y)\right|^2 \chi(|x|) < x, y > dx.
\end{aligned}$$

Argumentando de maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 2.5, concluimos que para $|y|$ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned}
\langle \beta(\Phi_\sigma(y)), y\rangle_{\mathbb{R}^N} &\geq \frac{1}{|v^\sigma_y|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \int_{B_{\tilde{r}}(y)} \left|\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)\right|^2 \frac{|u(0)|^2}{4} \chi(|x|)|x||y|\cos\theta dx \\
&+ \frac{1}{|v^\sigma_y|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \int_{(\mathbb{R}^N)^-} -\left|\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)\right|^2 \frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y|^{\frac{2N}{p}}} \chi(|x|)|x||y|dx. \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Além disso, para todo $x \in B_{\tilde{r}}(y)$, temos $|y| \leq \tilde{r} + |x|$ e dessa forma, podemos escolher $|y| = R_0$ de modo que

$$|x| > 2\sigma \quad \text{e} \quad \cos\theta \geq \frac{1}{2}. \quad (2.72)$$

Entretanto, se $|x| > 2\sigma$, pela definição de $\tilde{\zeta}$ e χ, temos

$$\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right) = 1 \ \text{ e } \ \chi(|x|) = \frac{R}{|x|} \tag{2.73}$$

assim, de (2.72) e (2.73), encontramos

$$\begin{aligned} \int_{B_{\tilde{r}}(y)} \left|\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)\right|^2 \frac{|u(0)|^2}{4} \chi(|x|)|x||y| \cos\theta dx \ &\geq \ \int_{B_{\tilde{r}}(y)} \frac{|u(0)|^2}{4} R R_0 \frac{1}{2} dx \\ &\geq \ R R_0 \frac{|u(0)|^2}{8} |B_{\tilde{r}}(y)| > 0 \end{aligned}$$

e

$$\int_{(\mathbb{R}^N)^-} -\left|\tilde{\zeta}\left(\frac{|x|}{\sigma}\right)\right|^2 \frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y|^{\frac{2N}{p}}} \chi(|x|)|x||y| dx \geq \int_{(\mathbb{R}^N)^-} -\frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y|^{\frac{2N}{p}}} R R_0 dx.$$

Note que pela escolha de R_0 é possível obter

$$\int_{(\mathbb{R}^N)^-} \frac{\tilde{K}|u|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{|x-y|^{\frac{2N}{p}}} dx < \frac{|u(0)|^2}{16} |B_{\tilde{r}}(y)|.$$

Portanto, existe R_0 tal que se $|y| = R_0$, segue de (2.71) e da desigualdaade acima que

$$\langle \beta(\Phi_\sigma(y)), y \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{R R_0}{|v_y^\sigma|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)}} \frac{|u(0)|^2}{16} |B_{\tilde{r}}(y)| > 0.$$

Com isto provamos o ítem (b) e, consequentemente finalizamos a demonstração do lema.
■

Agora, vamos considerar o conjunto $\Sigma \subset H_0^s(\Omega)$ definido por

$$\Sigma = \{\Phi_\sigma(y); |y| \leq R_0\},$$

e observemos que $\Sigma \subset \mathcal{P}$ (o conjunto das funções não-negativas de $H_0^s(\Omega)$).

Definamos também os seguintes conjuntos

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in C(\mathcal{P} \cap \mathcal{V}, \mathcal{P} \cap \mathcal{V}); h(u) = u, \forall u \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}; \|u\|^2_{H_0^s(\Omega)} < \frac{c_0 + M_\lambda}{2} \right\}$$

e

$$\Gamma = \{A \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{V}; A = h(\Sigma), h \in \mathcal{H}\}.$$

Lema 2.7. *Seja* $g : \bar{B}_{R_0}(0) \to \mathbb{R}^N$ *dada por*

$$g(y) = (\beta \circ \Phi_\sigma)(y) = \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_\sigma(y)|^2 \chi(|y|) y dy.$$

Então

$$d(g, \bar{B}_{R_0}(0), 0) = 1,$$

onde $d(g, \bar{B}_{R_0}(0), 0)$ *denota o grau topológico de Brower da aplicação* g *em relação a* $\bar{B}_{R_0}(0)$ *em* 0.

Demonstração: Desde que β e Φ_σ são funções contínuas, segue que a composição $g = \beta \circ \Phi_\sigma$ também é contínua.

Consideremos a homotopia

$$Z : [0,1] \times \bar{B}_{R_0}(0) \to \mathbb{R}^N$$

dada por

$$Z(t, y) = tg(y) + (1-t) i_{\bar{B}_{R_0}}(y),$$

onde $i_{\bar{B}_{R_0}}$ denota a projeção de $\bar{B}_{R_0}$ em $\mathbb{R}^N$.

Provaremos que $0 \notin Z([0,1] \times \partial B_{R_0})$, ou seja, que para todo $t \in [0,1]$ e para todo $y \in \partial B_{R_0}$ tem-se

$$tg(y) + (1-t)y \neq 0, \quad \forall t \in [0,1] \ \text{ e } \ y \in \partial B_{R_0}. \tag{2.74}$$

Para isto, suponha que $y \in \partial B_{R_0}$. Então $|y| = R_0$ e do ítem (b) do Lema 2.6, temos $\langle \beta \circ \Phi_\sigma(y) | y \rangle_{\mathbb{R}^N} > 0$ e assim

$$\begin{aligned} \langle tg(y) + (1-t)y | y \rangle_{\mathbb{R}^N} &= \langle t\beta(\Phi_\sigma(y)) + (1-t)y | y \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= t \langle \beta(\Phi_\sigma(y)) | y \rangle_{\mathbb{R}^N} + (1-t) < y | y >_{\mathbb{R}^N} . \end{aligned}$$

Se $t = 0$, então

$$\langle tg(y) + (1-t)y|y\rangle_{\mathbb{R}^N} > \langle y|y\rangle_{\mathbb{R}^N} = |y|^2 = R_0^2 > 0,$$

enquanto que se $t \in (0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle tg(y) + (1-t)y|y\rangle_{\mathbb{R}^N} &= t\,\langle \beta(\Phi_\sigma(y))|y\rangle_{\mathbb{R}^N} + (1-t) < y|y >_{\mathbb{R}^N} \\ &> (1-t) < y|y >_{\mathbb{R}^N} = (1-t)|y|^2 = (1-t)R_0^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Assim, temos que (2.74) ocorre e, portanto, $0 \notin Z([0,1] \times \partial B_{R_0})$. Concluimos então que $d(i_{\bar{B}_{R_0}}, B_{R_0}, 0)$ e $d(Z(t,\cdot), B_{R_0}, 0)$ estão bem definidos. Além disso, da invariância do grau por homotopia (veja Apêndice C, Teorema$C.2$) temos

$$d(Z(0,\cdot), B_{R_0}, 0) = d(Z(1,\cdot), B_{R_0}, 0),$$

ou seja,

$$d(g, B_{R_0}, 0) = d(i_{\bar{B}_{R_0}}, B_{R_0}, 0).$$

Desde que $0 \in B_{R_0}$, segue do Teorema $C.5$ (veja Apêndice C) que

$$d(g, B_{R_0}, 0) = d(i_{\bar{B}_{R_0}}, B_{R_0}, 0) = 1.$$

■

Lema 2.8. *Se $\mathcal{A} \in \Gamma$, então $\mathcal{A} \cap \beta_0 \neq \emptyset$.*

Demonstração: Se $A \in \Gamma$, então $A \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{V}$. Daí, basta provar que para todo $\mathcal{A} \in \Gamma$, existe $u \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} = h(\Sigma)$ com $h \in \mathcal{H}$ e $\Sigma = \Phi_\sigma(y)$ para algum $\Phi_\sigma(y)$ com $|y| \leq R_0$. Portanto, é suficiente provar que para todo $h \in \mathcal{H}$, existe $\tilde{y}$ com $|\tilde{y}| \leq R_0$ tal que

$$(\beta \circ h \circ \Phi_\sigma)(\tilde{y}) = 0. \tag{2.75}$$

Dado arbitrariamente $h \in \mathcal{H}$, consideremos $g_h(y) = (\beta \circ h \circ \Phi_\sigma)(y)$. Desde que β, h, e Φ_σ são contínuas, segue que g_h também é contínua.

Observemos também que $g_h = g$ em ∂B_{R_0}, pois sendo

$$\partial B_{R_0} = \{y \in \mathbb{R}^N; |y| = R_0\},$$

então do ítem (a) do Lema 2.6, obtemos

$$\|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H^s_0(\Omega)} < \frac{c_0 + M_\lambda}{2}, \quad \forall y \in \partial B_{R_0}.$$

Assim, da definição de $\mathcal{H}$, temos para todo $h \in \mathcal{H}$,

$$h(\Phi_\sigma(y)) = \Phi_\sigma(y), \quad \forall y \in \partial B_{R_0}$$

e daí,

$$\begin{aligned} g_h(y) &= (\beta \circ h \circ \Phi_\sigma)(y) = \beta(h(\Phi_\sigma(y))) \\ &= \beta(\Phi_\sigma(y)) = (\beta \circ \Phi_\sigma(y)) = g(y), \quad \forall y \in \partial B_{R_0}. \end{aligned}$$

Desde que $g_h, g \in C(B_{R_0}, \mathbb{R}^N)$ e $g_h = g$ em ∂B_{R_0}, segue da propriedade de dependência da fronteira da teoria do grau (veja Apêndice C, Teorema $C.7$), que para todo $b \notin g(\partial B_{R_0})$, tem-se

$$d(g, B_{R_0}, b) = d(g_h, B_{R_0}, b)$$

e sabendo que $0 \notin g(\partial B_{R_0})$, concluimos que

$$d(g, B_{R_0}, 0) = d(g_h, B_{R_0}, 0).$$

Do Lema 2.7, segue que

$$d(g_h, B_{R_0}, b) = d(g, B_{R_0}, b) = 1,$$

e portanto, usando o Teorema $C.6$ (veja Apêndice C), existe $\tilde{y} \in B_{R_0}$ tal que

$$g_h(\tilde{y}) = (\beta \circ h \circ \Phi_\sigma) = 0$$

e o lema está provado. ■

2.4 Prova dos Teoremas

Nesta seção mostraremos os principais resultados deste capítulo.

Aqui, consideraremos

$$c = \inf_{A\in\Gamma} \sup_{u\in A} \|u\|^2_{H^s_0(\Omega)} \tag{2.76}$$

e

$$\mathcal{H}_c = \left\{ u \in \mathcal{V}\cap\mathcal{P}; \hat{f}(u) = \|u\|^2_{H^s_0(\Omega)} = c \ \text{ e } \ \hat{f}'|_{\mathcal{V}}(u) = 0 \right\}.$$

Além disso, para $\gamma \in \mathbb{R}$, definimos o conjunto $\mathcal{L}^\gamma$ por

$$\mathcal{L}^\gamma = \left\{ u \in \mathcal{V}; \widehat{f}(u) \leq \gamma \right\}.$$

Note que o número c dado por (2.76) está bem definido. De fato, para cada $A \in \Gamma$ temos que A é compacto, por ser imagem de compacto por uma função contínua, e desde que $\hat{f}$ é uma função contínua, existe $\max\limits_{u\in A} \hat{f}$ para todo $A \in \Gamma$. Como $\hat{f}(u) \geq 0$, segue que $\max\limits_{u\in A} \hat{f}(u) \geq 0$ para todo $A \in \Gamma$ e, portanto, existe $\inf\limits_{A\in\Gamma} \max\limits_{u\in A} \hat{f}(u)$.

Prova do Teorema 2.1**:** Escolha $\sigma(\lambda) = \sigma$ como encontrado no Corolário 2.4. Iremos provar o teorema mostrando que o nível c definido em (2.76) é um nível crítico, isto é, $\mathcal{H}_c \neq \emptyset$.

Inicialmente, verificaremos que

$$M_\lambda < c < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda. \tag{2.77}$$

De fato, do Lema 2.8, temos $A \cap \beta_0 \neq \emptyset$ para todo $A \subset \Gamma$ e, portanto, qualquer que seja $A \subset \Gamma$, existe $\bar{u} \in A \cap \beta_0$. Disso, decorre que

$$c_0 = \inf_{u\in\beta_0} \hat{f}(u) \leq \hat{f}(\bar{u}) \leq \sup_{u\in A} \hat{f}(u), \quad \forall A \in \Gamma,$$

e juntamente com o Lema 2.5 nos dá

$$M_\lambda < c_0 = \inf_{u\in\beta_0} \hat{f}(u) \leq \sup_{u\in A} \hat{f}(u), \quad \forall A \in \Gamma,$$

donde vemos que

$$M_\lambda < c_0 \leq \inf_{A\in\Gamma} \sup_{u\in A} \hat{f}(u) = c. \tag{2.78}$$

Por outro lado, note que para todo $A \in \Gamma$, $c \leq \sup\limits_{u\in A} \hat{f}(u)$, que pela definição de Γ e Σ é equivalente a dizer que

$$c \leq \sup_{\Phi_\sigma(y)\in\Sigma} \hat{f}(h(\Phi_\sigma(y))), \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

Além do mais, note que $\Sigma \in \Gamma$, pois a identidade $i \in \mathcal{H}$, $\Sigma \in \mathcal{V}\cap\mathcal{P}$ e $\Sigma = i(\Sigma)$. Assim, temos

$$c \leq \sup_{\Phi_\sigma(y)\in\Sigma} \hat{f}(\Phi_\sigma(y)).$$

Portanto,

$$c \leq \sup_{\Phi_\sigma(y)\in\Sigma} \hat{f}(\Phi_\sigma(y)) \leq \sup_{|y|\leq R_0} \hat{f}(\Phi_\sigma(y)) \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \hat{f}(\phi_\sigma(y))$$

que pela escolha de $\sigma(\lambda)$, definição de $\hat{f}$ e Corolário 2.4, nos dá

$$c \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \hat{f}(\Phi_\sigma(y)) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \|\Phi_\sigma(y)\|^2_{H_0^s(\Omega)} < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda. \tag{2.79}$$

Logo, de (2.78) e (2.79), segue que (2.77) de fato ocorre.

Dessa forma, pelo Corolário 2.3, temos a garantia de que o funcinal $\hat{f}$ satisfaz a condição Palais-Smale no nível c para o subconjunto

$$\mathcal{V}\cap\mathcal{P}\cap\left\{u \in H_0^s(\Omega); M_\lambda < \hat{f}(u) < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda\right\}.$$

Suponhamos por contradição, que $\mathcal{H}_c = \emptyset$. Então, pelo Lema de Deformação (veja Apêndice B, Lema $B.3$), encontramos uma aplicação contínua $\eta : [0,1]\times\mathcal{V}\cap\mathcal{P} \to \mathcal{V}\cap\mathcal{P}$ e um número positivo ϵ_0, tal que

$$\hat{f}^{c+\epsilon_0} \setminus \hat{f}^{c-\epsilon_0} \subset \hat{f}^{2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda} \setminus \hat{f}^{\frac{c_0+M_\lambda}{2}},$$

$$\eta(0,u) = u,$$

$$\eta(t,u)=u, \quad \forall u \in \hat{f}^{c-\epsilon_0} \cup \{\mathcal{V}\cap\mathcal{P} \setminus \hat{f}^{c+\epsilon_0}\} \quad \forall t \in [0,1],$$

e

$$\eta(1, \hat{f}^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}) \subset \hat{f}^{c-\frac{\epsilon_0}{2}}.$$

Da definição de c, vemos que existe $\tilde{A} \subset \Gamma$ tal que

$$c \leq \sup_{u\in\tilde{A}} \hat{f}(u) < c + \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Além disso, note que

$$\tilde{A} \subset \hat{f}^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}, \tag{2.80}$$

pois

$$u \in \tilde{A} \Rightarrow \hat{f}(u) \leq \sup_{u\in\tilde{A}} < c + \frac{\epsilon_0}{2} \Rightarrow u \in \hat{f}^{c+\frac{\epsilon_0}{2}}.$$

Desde que $\tilde{A} \in \Gamma$, temos $\tilde{A} \subset \mathcal{V}\cap\mathcal{P}$ e existe $\bar{h} \in \mathcal{H}$, tal que

$$\bar{h}(\Sigma) = \tilde{A}. \tag{2.81}$$

Da definição de η, segue-se que

$$\eta(1, \tilde{A}) \subset \mathcal{V}\cap\mathcal{P}. \tag{2.82}$$

Agora, consideremos $\tilde{h} : (\mathcal{V}\cap\mathcal{P}) \to (\mathcal{V}\cap\mathcal{P})$ definida por $\tilde{h}(u) = \eta(1, \bar{h}(u))$. Uma vez que $\bar{h} \in C(\mathcal{V}\cap\mathcal{P}, \mathcal{V}\cap\mathcal{P})$, resulta que $\tilde{h} \in C(\mathcal{V}\cap\mathcal{P}, \mathcal{V}\cap\mathcal{P})$.

Afirmamos que

$$\hat{f}^{c+\epsilon_0} \setminus \hat{f}^{c-\epsilon_0} \subset \hat{f}^{2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda} \setminus \hat{f}^{\frac{c_0+M_\lambda}{2}}. \tag{2.83}$$

De fato, para todo $u \in \hat{f}^{c+\epsilon_0} \setminus \hat{f}^{c-\epsilon_0}$, tem-se $c - \epsilon_0 < \hat{f} \leq c + \epsilon_0$ e de (2.77), resulta que

$$c - \epsilon_0 < \hat{f}(u) \leq c + \epsilon_0 < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda \tag{2.84}$$

para ϵ_0 suficientemente pequeno. Além disso, sabemos do Lema 2.5 que $M_\lambda < c_0$. Consequentemente,

$$M_\lambda < \frac{c_0 + M_\lambda}{2} < c_0$$

e assim,

$$\frac{c_0 + M_\lambda}{2} < c_0 - \epsilon_0 < c - \epsilon_0 < 2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda$$

para ϵ_0 suficientemente pequeno. Daí, lembrando que $u \in \hat{f}^{c+\epsilon_0} \setminus \hat{f}^{c-\epsilon_0}$, segue que

$$\frac{c_0 + M_\lambda}{2} < c_0 - \epsilon_0 \leq c - \epsilon_0 < \hat{f}(u). \tag{2.85}$$

De (2.84) e (2.85), obtemos

$$u \in \hat{f}^{2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda} \setminus \hat{f}^{\frac{c_0+M_\lambda}{2}}$$

e portanto, (2.83) de fato ocorre.

Consideremos $u \in \mathcal{V} \cap \mathcal{P}$ tal que

$$\hat{f}(u) < \frac{c_0 + M_\lambda}{2}. \tag{2.86}$$

Lembrando que $\bar{h} \in \mathcal{H}$, segue que

$$\bar{h}(u) = u.$$

Além disso, de (2.86) temos

$$u \notin \hat{f}^{2^{\frac{p-2}{p}} M_\lambda} \setminus \hat{f}^{\frac{c_0+M_\lambda}{2}}$$

e portanto, de (2.83), vem que

$$u \notin \hat{f}^{c+\epsilon_0} \setminus \hat{f}^{c-\epsilon_0}.$$

Assim, segue que

$$u \in \hat{f}^{c-\epsilon_0} \cup \{(\mathcal{V} \cap \mathcal{P}) \setminus \hat{f}^{c+\epsilon_0}\}$$

e do Lema de Deformação, temos

$$\eta(1, u) = u.$$

Logo,

$$\tilde{h}(u) = \eta(1, \bar{h}(u)) = \eta(1, u) = u$$

de onde concluimos que $\tilde{h} \in \mathcal{H}$.

Temos então

$$\tilde{h}(\Sigma) = \eta(1, \bar{h}(\Sigma))$$

e de (2.81),

$$\tilde{h}(\Sigma) = \eta(1, \bar{h}(\Sigma)) = \eta(1, \tilde{A}). \tag{2.87}$$

De (2.82) e (2.87), resulta que $\eta(1, \tilde{A}) \in \Gamma$ e da definição de c, obtemos

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \sup_{u \in \tilde{A}} \hat{f}(u) \leq \sup_{u \in \eta(1,\tilde{A})} \hat{f}(u). \tag{2.88}$$

Do Lema de Deformação, temos

$$\eta(1, \hat{f}^{c+\frac{\epsilon}{2}}) \subset \hat{f}^{c-\frac{\epsilon}{2}}$$

e de (2.80),

$$\eta(1, \tilde{A}) \subset \eta(1, \hat{f}^{c+\frac{\epsilon}{2}}) \subset \hat{f}^{c-\frac{\epsilon}{2}}.$$

Segue então que

$$\hat{f}(u) \leq c - \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall u \in \eta(1, \tilde{A}).$$

Portanto,

$$\sup_{u \in \eta(1,\tilde{A})} \hat{f}(u) \leq c - \frac{\epsilon_0}{2}$$

e de (2.88) concluimos que

$$c \leq \sup_{u \in \eta(1,\tilde{A})} \hat{f}(u) \leq c - \frac{\epsilon_0}{2}$$

o que é um absurdo.

Com isto, deduzimos que $\mathcal{H}_c \neq \emptyset$ e que c é um valor crítico do funcional $\hat{f}$ restrito ao conjunto $\mathcal{V} \cap \mathcal{P}$. Portanto, existe pelo menos uma solução não negativa para o problema (2.1). Aplicando o Princípio do Máximos (veja [67, Proposição 2.17]) concluimos que a solução é positiva. Isto finaliza a prova do teorema. ■

Prova do Teorema 2.2: No problema (2.1), façamos a seguinte mudança de variável

$$v(x) = u(\theta x).$$

Dessa forma, obtemos o seguinte:

$$(-\Delta)^s v(x) = \theta^{2s}(-\Delta)^s u(\theta x) = \theta^{2s}(-\lambda u(\theta x) + |u(\theta x)|^{p-2}u(\theta x)),$$

ou seja,

$$(-\Delta)^s v = -\lambda\theta^{2s}v + \theta^{2s}|v|^{p-2}v.$$

Desde que $\theta x \in \Omega$, então

$$x \in \frac{1}{\theta}\Omega.$$

Denotando por Ω_θ o domínio $\dfrac{1}{\theta}\Omega$, vemos que

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v + \lambda\theta^{2s}v = \theta^{2s}|v|^{p-2}v \quad \text{em} \quad \Omega_\theta, \\ v \in H_0^s(\Omega_\theta). \end{cases}$$

Fazendo $\lambda\theta^{2s} = 1$, obtemos

$$\Omega_\theta = \frac{1}{\theta}\Omega = (\sqrt{\lambda})^s\Omega.$$

Agora, denotemos por Ω_λ o domínio $(\sqrt{\lambda})^s\Omega$. Deste modo, temos

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v + v = \dfrac{1}{\lambda}|v|^{p-2}v \quad \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ v \in H_0^s(\Omega_\lambda). \end{cases}$$

Este último problema é equivalente a

$$\begin{cases} (-\Delta)^s(\alpha v) + \alpha v = \dfrac{1}{\lambda\alpha^{p-2}}|\alpha v|^{p-2}\alpha v \quad \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ \alpha v \in H_0^s(\Omega_\lambda), \end{cases}$$

isto é, fazendo a mudança de variável $w = \alpha v$, obtemos

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w + w = \dfrac{1}{\lambda \alpha^{p-2}} |w|^{p-2} w \quad \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ w \in H_0^s(\Omega_\lambda). \end{cases}$$

Considerando $\dfrac{1}{\lambda \alpha^{p-2}} = 1$, vem que

$$\alpha^{p-2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p-2}}} \Rightarrow \alpha v = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p-2}}} v \Rightarrow w = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p-2}}} v$$

e daí, chegamos ao seguinte problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)^s w + w = |w|^{p-2} w \quad \text{em} \quad \Omega_\lambda, \\ w \in H_0^s(\Omega_\lambda). \end{cases} \tag{2.89}$$

Agora, considerando $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda$ e aplicando o Teorema 2.1, existe $\sigma = \sigma(1)$ tal que se

$$\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda \subset B_\sigma(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N ; |x - x_0| \leq \sigma \right\}$$

o problema (2.89) possui pelo menos uma solução positiva.

Seja

$$\lambda_* = \sup \left\{ \lambda > 0; \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda \subset B_\sigma(x_0) \ \text{com} \ x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\lambda \right\}.$$

Então, temos que existe λ_* dependendo de Ω tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_*)$ o problema (2.89) possui pelo menos uma solução positiva. Sendo assim, de acordo com as mudanças de variáveis que foram realizadas, concluimos que existe $\lambda_* = \lambda_*(\Omega)$ de modo que para cada $\lambda \in (0, \lambda_*)$, o problema (2.2) possui pelo menos uma solução positiva. ■

Apêndice A

Continuidade da função concentração de Levy e da função baricentro

Nesta seção mostraremos dois resultados de continuidade. Iniciaremos mostrando que a função concentração de Levy é contínua.

Lema A.1. *A função concentração de Levy, dada por*

$$Q_n(\lambda) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(z)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx$$

é contínua.

Demonstração: Provaremos primeiramente que dado $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ a função

$$Q(\lambda) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(z)} |f| dx$$

é contínua.

Inicialmente consideremos o caso em que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja (λ_n) uma sequência de números positivos tais que $\lambda_n \to \lambda_0$ para algum λ_0 fixado. Consideremos também $(\lambda_{n_j}) \subset (\lambda_n)$ e $(\lambda_{n_k}) \subset (\lambda_n)$ tais que $\lambda_{n_j} < \lambda_0$ e $\lambda_{n_k} \geq \lambda_0$, para todo $n_j \in \mathbb{N}$ e para todo $n_k \in \mathbb{N}$.

Iremos provar que,

$$Q(\lambda_{n_j}) \to Q(\lambda_0), \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $\lambda_{n_j} < \lambda_0$ para todo $n_j \in \mathbb{N}$, temos que $B_{\lambda_{n_j}}(z) \subset B_{\lambda_0}(z)$, para todo $z \in \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx \leq \int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|dx < +\infty, \quad \forall z \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n_j \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx = Q(\lambda_0), \quad \forall z \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n_j \in \mathbb{N}$$

e daí, $Q(\lambda_{n_j}) \leq Q(\lambda_0)$, para todo $n_j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\limsup_{n_j\to\infty} Q(\lambda_{n_j}) \leq Q(\lambda_0). \tag{A.1}$$

Observe que, desde que $B_{\lambda_{n_j}}(z) \subset B_{\lambda_0}(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, podemos considerar $\Omega_{n_j} = B_{\lambda_0}(z) \setminus B_{\lambda_{n_j}}(z)$ e com isso obtemos que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n_j \geq n_1$, tem-se $|\Omega_{n_j}| < \epsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|f|\chi_{B_{\lambda_0}(z)} - |f|\chi_{B_{\lambda_{n_j}}(z)}\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |f|\Big(\chi_{B_{\lambda_0}(z)} - \chi_{B_{\lambda_{n_j}}(z)}\Big)dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f|\chi_{B_{\lambda_0}(z)\setminus B_{\lambda_{n_j}}(z)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |f|\chi_{\Omega_{n_j}}dx \leq K|\Omega_{n_j}| < \epsilon, \quad \forall z \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n_j \geq n_1.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx < \epsilon + \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx, \quad \forall z \in \mathbb{R}^N, \quad \forall n_j \geq n_1,$$

logo,

$$Q(\lambda_0) \leq \epsilon + Q(\lambda_{n_j}), \quad \forall n_j \geq n_1.$$

Obtemos então que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$Q(\lambda_0) - \epsilon \leq Q(\lambda_{n_j}), \quad \forall n_j \geq n_1,$$

e portanto

$$\liminf_{n_j \to \infty} Q(\lambda_{n_j}) \geq Q(\lambda_0). \tag{A.2}$$

Temos então de $(A.1)$ e $(A.2)$ que $(Q(\lambda_{n_j}))$ converge e

$$\lim_{n_j \to \infty} Q(\lambda_{n_j}) = Q(\lambda_0). \tag{A.3}$$

Por um raciocínio análogo, mostra-se que

$$\lim_{n_k \to \infty} Q(\lambda_{n_j}) = Q(\lambda_0). \tag{A.4}$$

De $(A.3)$ e $(A.4)$ obtemos que, dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|Q(\lambda_{n_j}) - Q(\lambda_0)| < \epsilon, \quad \forall n_j \geq n_1$$

e

$$|Q(\lambda_{n_k}) - Q(\lambda_0)| < \epsilon, \quad \forall n_k \geq n_2.$$

Fazendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$|Q(\lambda_n) - Q(\lambda_0)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

o que prova que

$$Q(\lambda) = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(z)} |f| dx$$

é contínua com $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Usnado o fato de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ser denso em $L^1(\mathbb{R}^N)$, provaremos a continuidade de Q com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Tomemos arbitrariamente $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^N)$, segue que dado $\epsilon > 0$, existe $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - \tilde{f}| dx < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j}) &= \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx - \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left(\int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx \right) \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx \right|. \end{aligned}$$

Recordando que $Q(\lambda_{n_j}) \leq Q(\lambda_0)$ para todo $n_j \in \mathbb{N}$, temos

$$|Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j})| = Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j})$$

e daí,

$$\begin{aligned} |Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j})| &\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(z)} |f|dx - \int_{B_{\lambda_0}(z)} |\tilde{f}|dx + \int_{B_{\lambda_0}(z)} |\tilde{f}|dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |\tilde{f}|dx \right. \\ &+ \left. \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |\tilde{f}|dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f|dx \right| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(z)} (|f| - |\tilde{f}|)dx \right| + \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(z)} |\tilde{f}|dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |\tilde{f}|dx \right| \\ &+ \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} (|\tilde{f}| - |f|)dx \right| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_0}(z)} |f - \tilde{f}|dx + \sup_{z\in\mathbb{R}^N} K|\Omega_{n_j}| + \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_{n_j}}(z)} |f - \tilde{f}|dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f - \tilde{f}|dx + K|\Omega_{n_j}| + \int_{\mathbb{R}^N} |f - \tilde{f}|dx < \epsilon, \quad \forall n_j \geq n_1, \end{aligned}$$

de onde concluimos que $Q(\lambda_{n_j}) \to Q(\lambda_0)$ com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

De maneira análoga ao que fizemos para mostrar que $Q(\lambda_{n_j}) \to Q(\lambda_0)$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, mostra-se que $Q(\lambda_{n_k}) \to Q(\lambda_0)$ com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, obtemos que $Q(\lambda_n) \to Q(\lambda_0)$ e com isso concluimos que Q é contínua com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$Q_n(\lambda) = \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(z)} |(-\Delta)^{s/2} v_n|^2 dx$$

é contínua. ■

O próximo resultado nos diz que a função baricentro é contínua.

Lema A.2. *A função* $\alpha : D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^{N+1}$*, dada por*

$$\alpha(v) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{x}{|x|}, \sigma(x)\right)|(-\Delta)^{s/2}v|^2dx = (\beta(v), \gamma(v)),$$

onde

$$\beta(v) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v|^2dx, \quad \gamma(v) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}\sigma(x)|(-\Delta)^{s/2}v|^2dx$$

e

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| < 1, \\ 1, & \text{se} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração: De fato, temos que β é contínua, pois caso contrário, existiria $(v_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \to v_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \tag{A.5}$$

e $(v_{n_j}) \subset (v_n)$ tal que

$$|\beta(v_{n_j}) - \beta(v_0)| \geq K > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{A.6}$$

De $(A.5)$, teríamos que $v_{n_j} \to v_0$ em $D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ e daí $|(-\Delta)^{s/2}v_{n_j}| \to |(-\Delta)^{s/2}v_0|$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Segue então que existiria $(v_{n_{j_k}}) \subset (v_{n_j})$ tal que

$$|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}(x)| \to |(-\Delta)^{s/2}v_0(x)| \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|(-\Delta)v_{n_{j_k}}| \leq h, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

com $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim, para cada $i = 1, 2, ..., N$, teríamos

$$\frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}(x)|^2 \to \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_0(x)|^2 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|\frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}(x)|^2\right| = \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}(x)|^2 \leq |(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}(x)|^2 \leq h^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

onde $h^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}|^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx, \quad \text{para} \quad i = 1, ..., N$$

e portanto,

$$\beta(v_{n_{j_k}}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}|^2 dx \to \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|(-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx = \beta(v_0)$$

e isto contradiz $(A.6)$. Portanto, β é contínua.

Temos também que γ é contínua, pois caso contrário, existiria $(v_n) \subset D^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \to v_0 \quad \text{em} \quad D^{s,2}(\mathbb{R}^N) \tag{A.7}$$

e $(v_{n_j}) \subset (v_n)$ tal que

$$|\gamma(v_{n_j}) - \gamma(v_0)| \geq K > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{A.8}$$

Argumentando de forma análoga ao que fizemos anteriormente, usando $(A.7)$, obteríamos $(v_{n_{j_k}}) \subset (v_{n_j})$ tal que

$$|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}(x)| \to |(-\Delta)^{s/2}v_0(x)| \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}| \leq h, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

com $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\sigma(x)|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}(x)|^2 \to \sigma(x)|(-\Delta)^{s/2}v_0(x)|^2 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|\sigma(x)|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}|^2| \leq |(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}|^2 \leq h^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

onde $h^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\gamma(v_{n_{j_k}}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|(-\Delta)^{s/2}v_{n_{j_k}}|^2 dx \to \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|(-\Delta)^{s/2}v_0|^2 dx = \gamma(v_0)$$

e isso contradiz $(A.8)$. Portanto, γ é contínua.

Desde que $\alpha(v) = (\beta(v), \gamma(v))$, concluimos que α é contínua. ■

Apêndice B

Resultados Gerais

Neste apêndice enunciaremos alguns resultados que foram utilizados no decorrer desse trabalho.

Teorema B.1. *(Regra da Cadeia) Sejam $U \subset \mathbb{R}^M$, $V \subset \mathbb{R}^N$ abertos, $f : U \to V$ uma aplicação cujas funções coordenadas $f_1, ..., f_N$ possuem derivadas parciais no ponto $a \in U$ e $g : V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas parciais no ponto a e vale*

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, ..., m,$$

onde as derivadas parciais relativas aos x_i são calculados no ponto a e as relativas aos y_k são calculadas no ponto $b = f(a)$. Além disso, se f e g são de classe C^1 então $g \circ f$ é de classe C^1.

REFERÊNCIA. Lima [54].

Teorema B.2. *(Regra de Leibniz) Dado $U \in \mathbb{R}^N$ aberto, seja $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que a i_ésima derivada parcial $\partial f / \partial x_i(x, t)$ existe para todo ponto $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\partial f / \partial x_i : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$, assim definida, é contínua. Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

possui a i_ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$$

Em suma: pode-se derivar sobre o sinal da integral desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

REFERÊNCIA. Lima [54].

Teorema B.3. *(Valor Intermediário) Seja M um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f(M)$ é uma intervalo.*

REFERÊNCIA. Lima [55].

Teorema B.4. *(Coordenadas polares) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f dS \right) dr,$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

REFERÊNCIA. Evans [37].

Teorema B.5. *Seja f uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^N$, não negativa ou integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \omega_{N-1} \int_0^{+\infty} g(r) r^{N-1} dr,$$

onde ω_{N-1} denota a medida de Lebesgue da esfera unitária no $\mathbb{R}^N$.

REFERÊNCIA. Folland [41].

Teorema B.6. *(Desigualdade de Holder) Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e vale*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

REFERÊNCIA. Bartle [12].

Lema B.1. *Para qualquer $s > 0$, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.*

REFERÊNCIA. Di Nezza [33].

B.0.1 Resultados de Convergência

Teorema B.7. *(Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ q.s. em Ω,

(b) existe uma função $g \in L^1$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s. em Ω.

Então $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

REFERÊNCIA. Brezis [19].

Lema B.2. *(de Brezis-Lieb) Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ e $f \subset L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω e que exista $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\int_\Omega f_n \phi dx \to \int_\Omega f \phi dx, \quad \forall \phi \in L^q(\Omega),$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

REFERÊNCIA. Kavian [50].

Para apresentar o próximo resultado, antes precisamos definir para cada $1 < p < \infty$ a função monótona $J_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ por

$$J_p(\xi) := |\xi|^{p-2}\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

onde J_p satisfaz:

$$|J_p(\xi) - J_p(\eta)| \leq \begin{cases} |\xi - \eta|^{p-1}, & \text{se} \quad 1 < p \leq 2, \\ C_p(|\xi| + |\eta|)^{p-2}|\xi - \eta|, & \text{se} \quad p > 2. \end{cases}$$

Teorema B.8. *(de Brezis-Lieb) Seja (Ω) um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e seja $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Se*

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(\Omega)$;

(b) $f_n \to f$ q.t.p. em Ω, então

$$\lim_{n\to\infty} \Big(|f_n|_p^p - |f_n - f|_p^p \Big) = |f|_p^p.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |J_p(f_n) - J_p(f_n - f) - J_p(f)|^{p'} dx = 0.$$

REFERÊNCIA. Brezis e Lieb [21].

O resultado anterior implica nas seguintes propriedades.

Teorema B.9. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n \to u$ q.t.p quando $n \to \infty$. Então:*

(i_1) $[u_n]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} - [u_n - u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = [u]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} + o_n(1)$;

(i_2) $J_p(u_n) - J_p(u_n - u) \to J_p(u)$, em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$;

(i_3) também vale que

$$\frac{J_p(u_n(x) - u_n(y))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} - \frac{J_p((u_n(x) - u(x)) - (u_n(y) - u(y)))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \to \frac{J_p(u(x) - u(y))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}},$$

em $L^{p'}(\mathbb{R}^{2N})$.

REFERÊNCIA. Brasco [18].

B.0.2 Resultados de Imersões

Teorema B.10. *Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < N$. Então, existe uma constante positiva $C = C(N,s,p)$ tal que para cada função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, mensurável com suporte compacto, temos que*

$$\|f\|^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \int_{R^{2N}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy,$$

onde p^* é o Expoente Fracionário Crítico de Sobolev.

Em particular, o espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \in [p, p^*]$.

REFERÊNCIA. Di Nezza [33].

Teorema B.11. *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}(\Omega)$. Se $\mathcal{B}$ é um subconjunto limitado do espaço $W^{s,p}(\Omega)$, então para qualquer $q \in [1,p]$, o conjunto $\mathcal{B}$ é pré-compacto em $L^q(\Omega)$. Isto é, $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso em $L^q(\Omega)$.*

REFERÊNCIA. Di Nezza [33].

Como consequência do teorema anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário B.1. *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ tais que $sp < N$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio de extensão limitado para $W^{s,p}(\Omega)$, então para qualquer $q \in [1,p^*)$, temos que $W^{s,p}(\Omega)$ está compactamente imerso no espaço $L^q(\Omega)$.*

REFERÊNCIA. Di Nezza [33].

B.0.3 Resultados sobre Simetrização de Schwarz

Teorema B.12. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Existe uma função $f^* \in L^1(\mathbb{R}^N)$, denominada de simetrização de Schwarz de f, que é radial e não crescente em relação ao raio e satisfaz*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^N; f^*(x) \geq \alpha\right\}\right| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^N; |f(x)| \geq \alpha\right\}\right|, \quad \forall \alpha > 0.$$

Além disso, para todo $G \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f)dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^*)dx.$$

REFERÊNCIA. Kavian [50] (veja também [53, Seção 3]).

Teorema B.13. *Sejam $0 < s < 1$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Então $f^* \in H^s(\mathbb{R}^N)$ e temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} f^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta)^{s/2} f|^2 dx.$$

REFERÊNCIA. J. Y. Park [62].

B.0.4 Multiplicadores de Lagrange

Teorema B.14. *(dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach, $J, F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $x_0 \in X$ um extremo local de J restrito ao conjunto*

$$V = \{x \in X; F(x) = F(x_0)\}.$$

Se $F'(x_0) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(x_0)v = \lambda F'(x_0)v, \quad \forall v \in X.$$

*O número real λ é chamado **Multiplicador de Lagrange**.*

REFERÊNCIA. Kavian [50].

B.0.5 Lema de Deformação

Definição B.1. *Seja X um espaço de Banach, $\varphi \in C^2(X, \mathbb{R})$ e $V = \{v \in X; \varphi(v) = 1\}$ tal que, para todo $v \in V$, tem-se $\varphi'(v) \neq 0$. Então, temos:*

(i) O espaça tangente a V no ponto v é definido por

$$T_v V = \{y \in X; < \varphi'(v), y >= 0\}.$$

(ii) Sejam $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $v \in V$. A norma da derivada da restrição de φ a V em v é dada por

$$\|\varphi'(v)\|_* = \sup_{\substack{y \in T_v V \\ \|y\|=1}} < \varphi'(v), y > .$$

(iii) O ponto v é um ponto crítico de φ restrito a V se

$$\|\varphi'\|_* = 0.$$

(iv) $\varphi^c = \{v \in V; \varphi(v) \leq c\}$ com $c \in \mathbb{R}$.

Lema B.3. *(Lema de Deformação) Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|I'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

para todo $u \in I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$, onde $S_\delta = \{u \in X; dist(u, S) \leq \delta\}$. Então, existe $\eta \in ([0,1] \times X, X)$ satisfazendo

(i) $\eta(0, u) = u$, para todo $u \in X$;

(ii) $\eta(t, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ para todo $t \in [0,1]$;

(iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subset I^{c-\epsilon} \cap S_\delta$;

(iv) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$.

REFERÊNCIA. Willem [74].

B.0.6 Princípio Variacional de Ekeland

Proposição B.1. *(Princípio Variacional de Ekeland) Sejam X um espaço de Banach e $G \in C^2(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $v \in V = \{v \in X; G(u) = 1\}$, tem-se $G'(v) \neq 0$. Sejam $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitado inferiormente em V, $v \in V$ e $\epsilon, \delta > 0$ tais que*

$$F(v) \leq \inf_V F + \epsilon.$$

Então, existe $u_\epsilon \in V$ tal que

(i) $F(u_\epsilon) \leq \inf_V F + 2\epsilon$;

(ii) $\|u_\epsilon - v\| \leq 2\delta$;

(iii) $\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u_\epsilon) - \lambda G'(u_\epsilon)\| \leq \dfrac{8\epsilon}{\delta}$.

REFERÊNCIA. Willem [74].

Proposição B.2. *Seja E um espaço de Hilbert. Dados $f, g \in E'$, então*

$$\sup_{\substack{y \in Kerg \\ \|y\|=1}} < f, g >= \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda g\|.$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada em [74].

Proposição B.3. *Sejam $\psi, \varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $u \in V = \{v \in X; \psi(v) = 1\}$. Então,*

$$\|\varphi'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\|.$$

Demonstração: Com efeito,

$$\|\varphi'(u)\|_* = \sup_{\substack{y \in T_v V \\ \|y\|=1}} < \varphi'(u), y >= \sup_{\substack{y \in Ker\psi'(u) \\ \|y\|=1}} < \varphi'(u), y >= \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\|.$$

■

Nas mesmas condições da proposição acima, temos o seguinte resultado.

Corolário B.2. *u é ponto crítico de $\varphi|_V$ se, e somente se, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi'(u) = \lambda_0 \psi'(u).$$

Demonstração: Se u é ponto crítico de $\varphi|_V$, pelo ítem (iii) da Definição $B.1$, $\|\varphi'(u)\|_* = 0$. Assim, pela Proposição $B.3$

$$\min_{\lambda \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\| = 0,$$

consequentemente

$$\varphi'(u) = \lambda_0 \psi'(u),$$

para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $\varphi'(u) = \lambda_0 \psi'(u)$, para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, então

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)\| = 0,$$

de onde obtemos pela Proposição $B.3$ que

$$\|\varphi'(u)\|_* = 0,$$

isto é, u é ponto crítico de $\varphi|_V$, o que prova o resultado desejado. ∎

Apêndice C

Grau de Brouwer

Nesta seção, definiremos uma função que nos dará informaçõs quanto a existência e unicidade de solução da equação $f(x) = b$, onde $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto e limitado e b é um ponto fixado em $\mathbb{R}^N$. Tal função é denotada por d, que a cada terna (f, Ω, b) associa a um número natural $d(f, \Omega, b)$ que é denominado de grau de f sobre Ω com respeito a b. Para um estudo mais detalhado dos resultados desta seção, indicamos o trabalho de Berestycki em [13] e Deimling em [32].

Definição C.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $b \in \mathbb{R}^N$ é valor regular da restrição $f|_\Omega$, ou seja, se $x \in f^{-1}\{b\}$, então f' é invertível. Pelo Teorema da Aplicação Inversa $f^{-1}\{b\}$ é finito. O grau de f sobre Ω com respeito a b é definido por*

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ f^{-1}\{b\} = \emptyset, \\ \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}\{b\}} sgn(J_f(x)), & \text{se } \ f^{-1}\{b\} \neq \emptyset, \end{cases}$$

onde sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ t > 0, \\ -1, & \text{se } \ t < 0 \end{cases}$$

e J_f representa a matriz jacobiana de f.

Abaixo, listamos algumas propriedades da teoria do grau.

Proposição C.1. *Seja $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(f - b, \Omega, 0).$$

Teorema C.1. *(Continuidade): Sejam $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f na topologia de $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que, para toda $g \in \mathcal{U}$,*

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b).$$

Teorema C.2. *(Invariância do grau por homotopia): Seja $H \in C(\bar{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ tal que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então, $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é independente de t.*

Teorema C.3. *O grau é constante, com relação a b em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.*

Teorema C.4. *(Aditividade): Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com Ω_1, Ω_2 abertos, disjuntos e limitados e seja $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Se $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(\partial\Omega)$, então temos que*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b).$$

Teorema C.5. *(Normalização): Seja I a projeção canônica de $\bar{\Omega}$ em $\mathbb{R}^N$, isto é, $I : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ é dada por $I(x) = x$. Então,*

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; b \in \Omega, \\ 0, & \text{se } \; b \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Teorema C.6. *(Existência de Solução): Sejam $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Se $d(f, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = b$.*

Teorema C.7. *(Dependência na Fronteira): Suponhamos que $f = g$ em $\partial\Omega$ e $f, g \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Então, tem-se que*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b), \quad \forall b \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega).$$

Referências Bibliográficas

[1] C. O. Alves, *Existence of possitive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian*, Nonlinear Anal. **51** (2002), 1187-1206.

[2] C. O. Alves, *Existência de solução positiva de equações elípticas não-lineares variacionais em* $\mathbb{R}^N$, Ph.D. thesis, Universidade de Brasília, Brasília, 1996.

[3] C. O. Alves, A. R. F de Holanda and J. A. Fernandes, *Existence of positive solution for a quasi-linear problem with critical growth in* $\mathbb{R}^N_+$, Glasgow Math. J. **51** (2009), 367-383.

[4] C. O. Alves, G. J. M. Figueiredo, and G. Siciliano, *Existence of solutions of the fractional critical Berestycki Lions problem type*, Communication on Pure and Applied Analysis, (2018).

[5] V. Ambrosio, *Fractional p&q laplacian problems in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, arXiv:1801.10449v1 [math. AP] (2018).

[6] V. Ambrosio, *Zero mass case for a fractional Berestycki-Lions type problem*, Adv. Nonlinear Anal. (in press) DOI: http://doi.org/10.1515/anona-2016-0153.

[7] D. Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*, Cambridge University Press, Cambridge (2009).

[8] D. Applebaum, *Lévy processes from probability to finance and quantum groups*, Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), 1336-1347.

[9] B. Barrios, E. Colorado, R. Servadei and F. Soria, *A critical fractional equation with concave-convex power nonlinearities*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **32** (2015), 875-900.

[10] V. Benci, G. Cerami, *Existence of positive solutions of the equation* $-\Delta u + a(x)u = u^{(N+2)/(N-2)}$ *em* $\mathbb{R}^N$, J. Funct. Anal. **88** (1990), 91-117.

[11] V. Benci and G. Cerammi, *Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems in Exterior domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), 283-300.

[12] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1985.

[13] H. Berestycki, *Methodes topologiques et problemes aux limites non lineaires*, Thése de Docctorat, Universite de Paris VI, 1985.

[14] J. Berton, *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, 121. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[15] A. Ben-Noaum, C. Trostler, M. Willem, *Extrema problems with critical exponents on unbounded domain*, Nonlinear Analysis TMA **25** (1996), 823-833.

[16] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a grund state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82**, no. 4, (1983), 313-345.

[17] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 347-376.

[18] L. Brasco, M. Squassina and Y. Yang, *Global compactness result fo nonlocal problems*, Discrete & Continuous Dynamical Systems - S, 2018, 11 (3) : 391-424. doi: 10.3934/dcdss.2018022

[19] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[20] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 486-490.

[21] H. Brézis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., **88** (1983), 486-490.

[22] L. A. Caffarelli, L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245-1260.

[23] A. Capella, J. Dávila, L. Dupaigne, and Y. Sire, *Regularity of radial extremal solutions for some non-local semilinear equations*, Comm. Partial Differential Equations, **36** (2011), 1353-1384.

[24] G. Cerami, D. Fortunato, M. Struwe, *Bifurcation and multiplicity results for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Inst. Henri Poincaré 1 **5** (1984), 341-350.

[25] X. Chang, *Ground state solutions of asymptotically linear fractional Schrödinger equations*, J. Math. Phy. (2013) 54;061504.

[26] X. Chang, *Ground states of some fractional Schrödinger equations on* $\mathbb{R}^N$, Proc. Edinb. Math. Soc. **58** (2015), 305-321.

[27] X. Chang, and Z. Wang, *Ground state of scalar field equations involving a fractional Laplacian with general nonlinearity*, Nonlinearity, **26** (2013), 479-494.

[28] W. Chen, C. Li and B. Ou, *Classifications of solutions for an integral equation*, Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), no. 3, 330-343.

[29] R. Cont, P. Tankov, *Fractional modelling with jump processes*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Boca Raton, FI, 2004.

[30] A. Cotsiolis and N. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalites for higher order fractional derivative*, J. Math. Anal. Appl. **295** (2004), 225-236.

[31] A. Cotsiolis and N. K. Tavoularis, *Sharp inequalities for Risz, Bessel and Yukawa potential operator*, **52** (2006), 99-118.

[32] K. Deimling, *Nonlinear Funcional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[33] E. Di Nezza, G. Palatucci and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math., 136, no. 5 (2012), 521-573.

[34] S. Dipierro, G. Palatucci, and E. Valdinoci, *Existence and symmetry result for a Schrödinger type problem involving the fractional Laplacian*, Matematiche (Catania) **68** (2013), 201-216.

[35] M. J. Esteban and P. L. Lions, *Existence and non-existence result for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Proc. Royal Edinbourgh Soc. **93** A (1982), 1-14.

[36] G. Évéquoz and M. M. Fall, *Positive solutions to some nonlinear fractional Schrödinger equations via a minimax procedure*, arXiv: 1312.7068v2 (2014).

[37] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.

[38] P. Felmer, A. Quass, and J. Tan, *Positive solutions of the nonlinear equation with the fractional Laplacian*, Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect A. 142 (2012), 1237-1262.

[39] G. M. Figueiredo and G. Siciliano, *A multiplicity result via Ljusternick-Schnirelmann category and Morse Theory for a fractional Schrödinger equation in* $\mathbb{R}^N$, NoDea-Nonlinear Diff. Equat. appl., 23-2 (2016), 1-22.

[40] G. M. Figueiredo and G. Siciliano, *Positive solutions for the fractional Laplacian in the almost critical case in a bounded domain*, to appear in Nonlinear Anal. Real. Word Appl. (2016).

[41] G.B. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, Vol. 361. Wiley New York, 1999.

[42] R. Frank and E. Lenzmann, *Uniqueness of nonlinear ground states for fractional Laplacians in* $\mathbb{R}$, Acta Math. **210**, 2, 261-318 (2013).

[43] R. Frank, E. Lenzmann and L. Silvestre, *Uniqueness of radial solutions for the fractional Laplacian*, Comm. Pure Appl. Math. **69**, 1671-1725 (2016).

[44] R. F. Gabert, and R. S. Rodrigues, *Existence of sign-changing solution for a problem involving the fractional Laplacian with critical growth nonlinearities*, arXiv: 11109v1 (2018).

[45] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian: Nonlinear Eigenvalue*, Comm. PDE 12 (1987), 1389-1430.

[46] J Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent on with a nonsymetric term*, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (2) (1991), 877-895.

[47] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Math. Anal. and Appl. Part A, Advance in Mathematics Supplementary Studies, Vol. 7 A, Academic Press (1981).

[48] M. Gueda, L. Veron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. TMA 13 (1989), 419-431.

[49] H. Hofer, *Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces*, Math. Ann. **261** (1982), 493-514.

[50] O. Kavian, *Introduction á la théorie des points critiques at applications aux problèmes elliptíques*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.

[51] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Phy. Lett. A **268** (2000), 298-305.

[52] N. Laskin, *Fractional Schrödinger equation*, Phy. Rev. E **66** (2002), 056108.

[53] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics 14, American Mathematical Society, Providence, 2001.

[54] E. L. Lima, *Análise Real*, Vol 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[55] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[56] P. L. Lions, *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev*, J. Funct. Anal. 49 (1982), 315-334.

[57] A. Majda, E. Tabak, *A two-dimensional model for quasigeostrophic flow: comparision with the two-dimensional Euler flow*, Nonlinear phenomena in ocean dynamics (Los Almos, NM, 1995). Phys. D 98 (1996), no. 2-4, 515522.

[58] S. Mosconi, K. Perera, M. Squassina, and Y. Yang, *The Brezis-Nirenberg problem for the fractional p-Laplacian*, Calc. Var. (2016), 55:105.

[59] G. Molica Bisci, V. Radulescu and R. Servadei, Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems. With a Foreword by Jean Mawhin, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press* **162**, Cambridge, 2016, ISBN 9781107111943.

[60] G. Palatucci and A. Pisante, *A Global Compactness result for Palais-Smale sequences in fractional Sobolev spaces*, Nonlin. Anal. **17** (2015), 1-7.

[61] G. Palatucci and A. Pisante, *Improved sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration-compactness for fractional Sobolev spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **50** (2014), no. 3-4, 799-829.

[62] Y. J. Park, *Fractional Polya-Szegö inequality*, J. Chungcheong Math. Soc. 24 (2011), no. 2, 267-271.

[63] S. Secchi, *On fractional Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$ *without the Ambrosetti-Rabinowitz condition*, Topol Methods Nonlinear Anal. **47** (2016), 19-41.

[64] S. Secchi, *Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Phy. (2013) 54;031501

[65] S. Secchi, N. Shioji, and M. Squassina, *Coron problem for fractional laplacian*, arXiv: 1401.5967v4 [math.AP] (2014).

[66] R. Servadei and E. Valdinoci, *The Brezis-Nirenberg result for the fractional Laplacian*, Trans. Amer. Math. Soc., **367** (2015), 67-102.

[67] L. Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power to the Laplace operator*, Commun. Pure Appl. Math. 60 (1) (2007), 67-112.

[68] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonliarities*, Math. **Z. 187**, no. 4, (1984), 511-517.

[69] M. Struwe, Variational methods. *Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer, Berli (1996).

[70] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Math. **110** (1976), 353-1976.

[71] E. Valdinoci, *From the long jump rondom walk to the fractional Laplacian.* Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. Se MA, 49 (2009), 3344.

[72] L. Vlahos, H. Isliker, Y. Kominis, K. Hizonidis, *Normal and anamalous Diffusion: a tutorial. In Order and chaos*, 10th volume, T. Bountis (ed), Patras University Press, 2008.

[73] J. Xiao, *A sharp Sobolev trace inequality for the fractional-order derivatives*, Bull. Sci. math. **130** (2006), 87-96.

[74] M. Willem, Minimax theorems, *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, 24, Birkhauser, Boston, 1996.

[75] X. Zhang, B. Zhang and D. Repovs, *Existence and symmetry of solutions for critical fractional Schrödinger equations with bounded potentials*, Nonlinear Anal. **142** (2016), 48-68.