UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA-UFAM

Tese de Doutorado

Existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos com pesos indefinidos em $\mathbb{R}^N$

Claudionei Pereira de Oliveira

Belém-PA
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA-UFAM

Claudionei Pereira de Oliveira

Existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos com pesos indefinidos em $\mathbb{R}^N$

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva

Bélem-PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P436e Pereira de Oliveira, Claudionei
Existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos com pesos indefinidos em R^N / Claudionei Pereira de Oliveira. — 2019.
99 f.

Orientador(a): Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. sistema elíptico. 2. crescimento crítico. 3. método variacional. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA/UFAM

Claudionei Pereira de Oliveira

Existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos com pesos indefinidos em $\mathbb{R}^N$

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 28 de Junho de 2019

Conceito: aprovado

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva(Orientador)
PPGME/PDM - UFPA

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro
Universidade de Brasília - UNB

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande- UFCG

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
PPGME/PDM - UFPA

Prof. Dr. Júlio Roberto Soares da Silva

Campus Universitário do Tocantins/Cametá - UFPA

Dedicatória

Aos meus queridos pais Maria e Damião.
Aos meus irmãos Claudemi, Marcos e Claudiana.
A minha esposa Tatiele e ao meu filho Bernardo.
Amo vocês eternamente.

Epígrafe

Muitos odeiam a matemática, outros ridicularizam-na, mas há aqueles como eu,que através dela buscam a cada dia no segredo da vida uma equação melhor para ser feliz.

Claudionei Oliveira*.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas inúmeras benções derramadas em minha vida e por em todos os momentos ter me guiado até aqui com ânimo e disposição. Obrigado senhor por ser minha fortaleza, a ti toda honra e glória.

Aos meus pais, Maria da Conceição Pereira de Oliveira e Damião Gomes de Oliveira que não mediram esforços para que eu pudesse estudar e me tornar a pessoa digna que sou hoje. Obrigado por todos os ensinamentos e por sempre acreditarem que eu poderia alcançar meus objetivos, eu amo vocês.

Aos meus irmãos, Claudemi, Marcos Vinicius e Claudiana pelo amor e confiança que sempre tiveram comigo. Em especial ao meu irmão Claudemi por apostar em meus estudos quando não tinha condição de arcá-los, vou ser eternamente grato mano.

Ao meu orientador e amigo Prof.Dr. João Pablo Pinheiro da Silva pelas orientações e paciência que me foram concedidas e pelos ensinamentos que obtive com este profissional dedicado e competente.

Aos professores Ricardo Ruviaro, Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa, Rúbia Gonçalves Nascimento e Júlio Roberto Soares da Silva por terem aceito gentilmente participar da banca examinadora e pelas sugestões que enriqueceram o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus queridos amigos de Doutorado: Andréia Pinheiro, Gelson Conceição, Ítalo Bruno, Jeziel Corrêa, João Fortes, Júlio Roberto e William Cintra, pelos momentos de estudos que compartilhamos, vou levá-los comigo por toda a vida.

Aos meus amigos Júlio Roberto, Bráulio, Juninho e Ítalo Bruno por me proporcionarem calorosa estadia em seus lares nos momentos que estive em Belém.

Ao meu amigo e colega de trabalho Prof.Dr. Narciso das Neves Soares que desde que entrei para o corpo docente da FAMAT-UNIFESSPA não mediu esforços para que eu pudesse cumprir minha missão de terminar o Doutorado, meus sinceros agradecimentos meu amigo.

A minha querida esposa Tatiele Miranda pela paciência, zelo, amor e carinho que sempre teve por mim durante todo o Doutorado. Obrigado por me presentear com o nosso amado filho, Bernardo.

Resumo

Neste trabalho, estudamos existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de sistemas elípticos

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta v = \mu h(x)v + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde $N \geqslant 4$, $2^* := \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, H_u e H_v são derivadas parciais da função homogênea $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, com $\mathbb{R}^2_+ = [0,\infty) \times [0,\infty)$, $g^+ \not\equiv 0, h^+ \not\equiv 0, f^+ \not\equiv 0$ e $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros reais, onde $\phi^+(x) = \max\{\phi(x), 0\}$ indica a parte positiva da função ϕ. A fim de mostrar a existência de soluções usaremos o Teorema do Passo da Montanha e para multiplicidade utilizaremos minimização sobre subconjuntos da variedade de Nehari.

Estudamos também, multiplicidade de m pares de soluções para a equação crítica

$$-\Delta u = \lambda g(x)u + h(x)|u|^{q-2}u + \mu f(x)|u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N$$

onde $\lambda, \mu > 0$, $0 < f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N), g^+ \not\equiv 0, h^+ \not\equiv 0, 2 < q < 2^*$ e os pesos satisfazendo outras condições adicionais. Aqui fazemos uso de uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria assumindo o parâmetro μ suficientemente pequeno e $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ onde λ_1^+ é o autovalor principal do problema (1.6).

Palavras-chave: sistema elíptico; crescimento crítico; método variacional.

Abstract

In this work, we study existence and multiplicity of positive weak solutions for the following class of elliptical systems

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu})\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta v = \mu h(x)v + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

where $N \geqslant 4$, $2^* := \dfrac{2N}{N-2}$ is the critical Sobolev exponent, H_u and H_v are partial derivatives of the homogeneous function $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, with $\mathbb{R}^2_+ = [0,\infty) \times [0,\infty)$, $g^+ \not\equiv 0, h^+ \not\equiv 0, f^+ \not\equiv 0$ and $\lambda, \mu > 0$ are real parameters, where $\phi^+(x) = \max\{\phi(x), 0\}$ indicates the positive part of the function ϕ. In order to show the existence of solutions we use Mountain Pass Theorem and for multplicity we will use minimization on subsets of the Nehari manifold.

We stud also, multiplicity of m pairs of solutions for the critical equation

$$-\Delta u = \lambda g(x)u + h(x)|u|^{q-2}u + \mu f(x)|u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N$$

where $\lambda, \mu,\ 0 < f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N), g^+ \not\equiv 0, h^+ \not\equiv 0, 2 < q < 2^*$ and weights satisfying others additional conditions. Here we make use of a version of the Mountain Pass Theorem with symmetry assuming the parameter μ small enough and $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ where λ_1^+ be the principal eigenvalue of the problem (1.6).

Key-words: elliptic system; critical growth ; variational method.

Conteúdo

Introdução **i**

1 Existência de solução positiva para um sistema elíptico crítico com peso indefinido em $\mathbb{R}^N$ **11**

1.1 Introdução 11

1.2 A estrutura variacional 14

1.3 Existência de um par de soluções positivas 18

1.4 Prova do Teorema 1.1 38

2 Multiplicidade de soluções positivas para um sistema elíptico crítico com peso em $\mathbb{R}^N$ **40**

2.1 Introdução 40

2.2 Minimização sobre subconjuntos da variedade de Nehari 42

2.3 Demonstração do Teorema 2.1 56

3 Multiplicidade de soluções para uma equação elíptica com expoente crítico de Sobolev em $\mathbb{R}^N$ **57**

3.1 Introdução 57

3.2 A geometria do Teorema do Passo da Montanha com simetria 58

3.3 A condição de Palais-Smale para $J_{\lambda\mu}$ 59

3.4 Demonstração do Teorema 3.1 69

A Regularidade dos Funcionais $I_{\lambda\mu}$ e $J_{\lambda\mu}$ **74**

1.1 Funcionais Diferenciáveis 74

B Resultados Auxiliares **81**

Notações

- Ω é um domínio aberto e suave do $\mathbb{R}^N$, podendo ser o próprio $\mathbb{R}^N$;
- $|\cdot|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$;
- $\mathcal{C}(\Omega) = \{g : \Omega \to \mathbb{R};\ \ g\ \text{é contínua}\}$;
- $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) = \{g \in C(\mathbb{R}^N);\ g \text{ tem suporte compacto}\}$;
- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das medidas de Radon finitas com sinal em $\mathbb{R}^N$;
- $L^p(\mathbb{R}^N) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx < +\infty \right\}$ é o espaço de Lebesgue;
- $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$;
- $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ é a norma em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$;
- $Y_\varphi := \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\|_\varphi^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \omega_\varphi(x) u^2) dx < +\infty \right\}$;
- $X_\varphi := \left\{ u \in \mathcal{H}_\varphi : \exists (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \|\phi_n - u\|_\varphi = o_n(1) \right\}$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ é produto interno em Y_φ;
- X é o espaço de Hilbert $X_g \times X_h$;
- $g = o_n(1)$ quando $n \to +\infty$ significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} g = 0$;
- $g = O(1)$ quando $\varepsilon \to 0$ tem-se $|g(\varepsilon)| \leqslant C$ para todo ε suficientemente próximo de 0 e para algum $C > 0$;
- $g = O(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \to 0$ tem-se $|g(\varepsilon)| \leqslant C|\varepsilon|$ para todo ε suficientemente próximo de 0 e para algum $C > 0$;
- $g = o(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \to 0$ tem-se $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{g(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$;
- $\to$ convergência forte;
- $\rightharpoonup$ convergência fraca;

Introdução

Embora o cálculo das variações seja o estudo de minimização de funcionais, o mesmo pode ser visto como um desdobramento do cálculo diferencial em espaços euclidianos. No caso unidimensional, o problema central do cálculo das variações é, justamente, determinar uma função $y(\cdot)$, com valores fixos em x_1 e x_2, que faça o funcional

$$J[y] := \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx.$$

atingir um valor máximo ou mínimo.

O desenvolvimento do Cálculo Variacional começou em junho de 1696, quando o matemático súiço Jean Bernoulli(1667-1748) publicou no jornal científico Acta Eruditorum um problema que chamou a atenção dos maiores matemáticos e físicos da época. O problema consistia em encontrar a forma que deveria ter uma trajetória sobre a qual uma partícula deslizaria, partindo do repouso e sob ação apenas da gravidade, levando o menor tempo possível para atingir um outro ponto mais abaixo nessa trajetória(consulte [38, 39]).

Este famoso problema é conhecido como o problema da Braquistócrona. Os matemáticos Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz e Jackob Bernoulli apresentaram relevantes soluções para o problema(veja [14]). É de conhecimento da comunidade Matemática que a resposta esse problema vem a ser uma ciclóide, mas a sua dedução não é uma tarefa tão simples (veja e.g. Troutman [42]).

A abordagem de tais questões iniciou-se em 1750 por Leonhard Euler(para mais detalhes [39]), ao descobrir, que em diversas situações, para que uma função fosse um mínimo para um funcional, era necessário que a mesma satisfizesse uma certa equação diferencial ordinária: a dita "equação de Euler".

Em meados do século XIX, notou-se que se substituir um problema de minimização em dimensão infinita por uma equação diferencial, algo em geral mais bem compreendido, era um caminho viável e a recíproca também era possível e significativa. Um exemplo concreto disso foi o chamado "método de Dirichlet[1]"(c.f [23]) em homenagem a Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

[1]Este método foi usado por Bernhand Riemann em seus importantes trabalhos sobre funções holomorfas, superfícies de Riemann e integrais abelianas. A ele se deve a nomenclatura ”Príncipio de Dirichlet”.

O método consistia em resolver o problema de fronteira para a equação de Laplace

$$(\mathcal{GPLD})\begin{cases} -\Delta u(x) = 0 \text{ se } x \in \Omega, \\ u(x) = \varphi(x) \text{ se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

minimizando o funcional energia

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

no conjunto das funções reais $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e que são iguais a φ sobre $\partial\Omega$, onde Ω é um dominio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é o operador de Laplace e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é contínua.

Se u fosse solução deste problema de minimização, teríamos

$$\Phi(u) \leqslant \Phi(u + t\psi)$$

para $t > 0$ e qualquer função $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ e com suporte compacto. Assim, usando integração por partes e o Teorema da Divergência tem-se

$$\Phi(u) \leqslant \Phi(u) + t^2\Phi(\psi) - t\int_{\Omega} \psi(x)\Delta u(x)dx.$$

Subtraindo $\Phi(u)$ a ambos os lados da última desigualdade, dividindo-a por t e passando o limite quando $t \to 0$ segue

$$\int_{\Omega} \psi(x)\Delta u(x)dx \leqslant 0.$$

Se trocarmos ψ por $-\psi$ a desigualdade acima inverte, o que nos dá

$$\int_{\Omega} \psi(x)\Delta u(x)dx = 0.$$

Portanto, como ψ é arbitrária, um argumento clássico de densidade acarreta que $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, o que mostra que u é a solução de $(\mathcal{GPLD})$ (a unicidade segue do princípio do máximo(veja [12]). Na nomenclatura tradicional do Cálculo de Variações, diz-se que $\Delta u(x) = 0$ é a "equação de Euler" de Φ.

Gauss, Green e Dirichlet justificavam que o minimizador u sempre existia, uma vez que tal equação modela (dentre outros fenômenos) o potencial eletrostático em uma região e, por argumentos metafísicos (como o "princípio da mínima ação de Maupertuis"), a natureza sempre minimizaria o funcional energia Φ.

Karl Weierstrass(1815-1897) esteve entre os primeiros matemáticos a levantar dúvidas sobre a validade do método de Dirichlet, que notou que problemas matemáticos de minimização, mesmo limitados inferiormente, podiam ser insolúveis, e de J. Hadamard, que exibiu em $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ uma g contínua para a qual a solução u de $(\mathcal{GPLD})$ tinha $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = +\infty$ (ou seja, estava fora do domínio de Φ), fizeram com que o método de Dirichlet, nas palavras de Carl Neumann, "afundasse e saísse de vista", para maiores detalhes, consulte Figueiredo [23].

No entanto, na virada do século XX o método variacional "ressuscitou", através do trabalho seminal de David Hilbert. O seu procedimento consistia de duas etapas: primeiro, se estendia a noção de solução para um contexto em que o método variacional se aplicava de modo simples, mas rigoroso; e, por fim, se deduzia que tal solução generalizada, sob ligeiras condições de regularidade, era também uma solução clássica (isto é, no sentido usual). Apesar de tal argumento não produzir resultados ótimos para a equação de Laplace, podia ser facilmente generalizado e usado para estudar problemas de natureza não-linear.

Nesta tese, estudamos usando método variacional, mais especificamente: Teorema do Passo da Montanha, minimização sobre subconjuntos da variedade de Nehari e uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria, existência e multiplicidade de soluções fracas positivas, bem como multiplicidade de m pares de soluções para os seguinte problemas elípticos com pesos indefinidos, estudamos o problema

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + \dfrac{1}{2^*} f(x) H_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta v = \mu h(x)v + \dfrac{1}{2^*} f(x) H_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ \hfill u, v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

e

$$-\Delta u = \lambda g(x)u + h(x)|u|^{q-2}u + f(x)|u|^{2^*-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

respectivamente.

No Capítulo 1, estamos interessados em estudar existência de soluções fracas positivas para o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ onde $N \geqslant 4$, $2^* := \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, H_u e H_v são derivadas parciais da função homogênea $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{R}^2_+ = [0,\infty) \times [0,\infty)$, $f^+ \not\equiv 0, g^+ \not\equiv 0, h^+ \not\equiv 0$ e $\lambda, \mu > 0$, estamos denotando por $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ e $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$ as partes positiva e negativa da função u, respectivamente.

Nosso interesse é no caso em que H tem crescimento crítico. Mas especificamente, as hipóteses sobre a função $H = H(\cdot,\cdot)$ são as seguintes:
(H_0) H é 2^*- homogênea, ou seja

$$H(\theta s,\theta t)=\theta^{2^*}H(s,t),\ \text{ para cada }\ \theta>0,\ \ \forall\,(s,t)\in\mathbb{R}^2_+;$$

(H_1) $H_s(0,1)=H_t(0,1)=0, H_t(1,0)=H_s(1,0)=0;$
(H_2) $H(s,t)>0$ para cada $s,t>0$;
(H_3) $H_s(s,t)\geqslant 0,\ H_t(s,t)\geqslant 0$ para cada $(s,t)\in\mathbb{R}^2_+$;
(H_4) a função $1-$homogênea $\Psi(s,t)=H(s^{1/2^*},t^{1/2^*})$ é côncava[2] em $\mathbb{R}^2_+$.
Para referências futuras, da 2^*- homogeneidade de H temos a identidade de Euller, a saber

$$(u,v)\cdot\nabla H(u,v)=2^*H(u,v).$$

onde ∇H denota o gradiente da função H, ou seja, o vetor dado por $\nabla H := \left(\dfrac{\partial H}{\partial u},\dfrac{\partial H}{\partial v}\right)$.

Seja S a melhor constante de Sobolev para a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$S:=\inf_{u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}}.$$

Como em Morais Filho e Souto [17], definimos

$$S_H:=\inf_{u,v\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+|\nabla v|^2 : \int_{\mathbb{R}^N}H(u^+,v^+)dx=1\right\}$$

e de (H_0) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx\geqslant S_H\int_{\mathbb{R}^N}H(u^+,v^+)dx,\ \ u,v\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

De acordo com o Lema 1 em [17] existem constantes $A,B>0$ tal que

$$S_H=\frac{A^2+B^2}{H(A,B)^{2/2^*}}S.$$

[2]Uma função real ϕ definida num subconjunto convexo U de $\mathbb{R}^N$ é côncava, se para quaisquer $x,y\in U$ e para todo $t\in[0,1]$ tem-se $\phi(tx+(1-t)y)\geqslant t\phi(x)+(1-t)\phi(y)$.

Os pesos f, g e h satisfazem

(P_0) $f, g, h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \not\equiv f^+, 0 \not\equiv g^+, 0 \not\equiv h^+$ e $g^+, h^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$;

(P_1) Para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $f(x_0) = |f|_\infty$ e existe $r > 0$ tal que

$$\alpha_0 := \inf\{f(x) : x \in B_r(x_0)\} > 0;$$

(P_2) Assuma que $f(x_0) - f(x) = o(|x - x_0|^2)$;

(P_3) $\inf\limits_{x \in B_r(x_0)} [\min\{\lambda A g(x) + \mu B h(x)\}] = m_0 > 0.$

Sejam λ_1^+ e μ_1^+ os autovalores principais de

$$(\mathcal{P}_\phi) \begin{cases} -\Delta u = \lambda \phi(x) u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) u^2 > 0 \end{cases}$$

quando $\phi(x) \equiv g(x)$ e $\phi(x) \equiv h(x)$ respectivamente, e denotaremos por u_1^+ e v_1^+ suas respectivas autofunções, para mais detalhes veja [1, 21]. Nosso primeiro resultado é

Teorema 0.1 *Suponha que $0 < \lambda < \lambda_1^+$ e $0 < \mu < \mu_1^+$, H satisfaz $(H_0) - (H_4)$ e $(P_0) - (P_3)$ verdadeira, então o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ tem ao menos um par de soluções (u, v), tais que $u > 0$ e $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$.*

Este resultado é uma versão do problema estudado em [2](veja também [17]), para domínios ilimitados, com potenciais mudando de sinal e $H(u, v)$ sendo uma não-linearidade com crescimento crítico mais geral(veja [17, 25]). Na prova deste teorema, usamos métodos variacionais e uma técnica introduzida por Brezis e Nirenberg [9], que consiste em localizar o nível crítico para o qual temos a condição de Palais-Smale(PS) satisfeita, e usando funções de corte apropriadas, mostra-se que o nível minimáx do Teorema do Passo da Montanha está abaixo do nível crítico. Além disso, devido a presença de potenciais mudando de sinal em um domínio ilimitado e pelo fato dos potenciais não pertencerem ao espaço $L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, é necessário a escolha de um espaço adequado para o funcional energia, tais espaços foram introduzidos por Drabek e Huang [18, 19]. Neste trabalho, este espaço satisfaz $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \subset X \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. A estrutura variacional do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ é diferente de [17], e além dos problemas como falta de compacidade devido o crescimento crítico, algumas complicações acontecem, como por exemplo, o fato da norma não aparecer no funcional $I_{\lambda\mu}$ e a falta de compacidade uma vez que o pontencial $g^-(x)$ não pertence necessariamente a $L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$.

No Capítulo 2, voltamos a estudar o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ mas agora nosso interesse é em multiplicidade de soluções. Nós investigamos como o número de soluções positivas é influenciado pelo número de pontos críticos isolados de f. Para ser mais específico, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 0.2 *Suponha que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < \lambda < \lambda_1^+$ e $0 < \mu < \mu_1^+$, H satisfaz $(H_0)-(H_4)$ e $(P_0)-(P_3)$ ocorre, suponha que existem pontos $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}^N$, tal que*
(f_1) $f(a_j) = |f|_\infty,\ 1 \leqslant j \leqslant k$;
(f_2) a_j é ponto de máximo local estrito para $1 \leqslant j \leqslant k$;
(f_3)

$$f(a_j) - f(x) = \begin{cases} o(|x-a_j|^2) \text{ se } N \geqslant 5, \\ O(|x-a_j|^2) \text{ se } N = 4 \end{cases}$$

então existem $\lambda^* \in (0, \lambda_1^+)$ e $\mu^* \in (0, \mu_1^+)$ tal que o problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ tem k pares (u, v) de soluções positivas para todo $0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 < \mu < \mu^*$.

O Teorema 0.2 estende o Teorema 1.1 em [15] para sistemas em domínio ilimitado e potenciais mudando de sinal. A técnica empregrada no presente trabalho é a mesma usada por estes autores, mas a estrutura do espaço X gera dificuldades e algumas adaptações necéssarias. A técnica consiste em considerar o ínfimo do funcional energia sobre k subconjuntos disjuntos da variedade de Nehari e então mostra-se que esses ínfimos estão abaixo do nível crítico para o qual a condição de Palais-Smale é válida. Quando os parâmetros λ e μ estão próximos de zero essas sequências podem ser consideradas como sequências de Palais-Smale de modo que obtemos k pontos críticos.

Em um trabalho pioneiro, Brezis e Nirenberg [9], estudaram existência de soluções positivas para o problema

$$(BN) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u \ \text{ em } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado. Desde então tem havido grande interesse em problemas com expoente crítico, a lista de trabalhos tratando de tais problemas é extensa de modo que vamos referenciar somente aqueles relacionados com o presente trabalho.

Cao e Noussair em [15] consideraram o seguinte problema, com um peso acoplado no termo com crescimento crítico em (BN), a saber

$$(CN)\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + Q(x)|u|^{2^*-2}u \ \text{ em } \Omega \\ \hfill u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $0 \leqslant Q(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, os autores mostraram um resultado de multiplicidade de soluções positivas baseado no número de pontos críticos isolados de Q.

Por outro lado, Drábek e Huang [19] estudaram a equação crítica em $\mathbb{R}^N$

$$(DH) \quad -\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{p^*-2}u$$

onde $-\Delta_p$ é o operador $p-$laplaciano, os autores impuseram para os pesos f e g as mesmas hipóteses que (P_0) e (P_1), e obtiveram dentre outros resultados a existência de solução positiva quando $0 < \lambda < \lambda_1^+$ onde λ_1^+ é o primeiro autovalor principal do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \hfill \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p dx > 0. \end{cases}$$

De Morais Filho, Souto e Alves [2, 17] considerarem a versão para sistemas da equação de (BN). Mas especificamente, estudaram a existência de soluções positivas do problema

$$(AMS)\begin{cases} -\Delta_p u = Q_u(u,v) + H_u(u,v) \ \text{ em } \Omega, \\ -\Delta_p v = Q_v(u,v) + H_v(u,v) \ \text{ em } \Omega, \\ \hfill u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, Q_u, H_u e Q_v, H_v são as derivadas parciais das funções de duas variáveis homogêneas Q, H de classe $\mathcal{C}^1$ com respeito a u e v, respectivamente.

No presente trabalho, consideramos a versão para sistemas do problema (DH), embora o caso $1 < p < N$ possa ser tratado da mesma maneira, consideraremos somente o caso $p = 2$ e desde que as funções g^- e h^- não pertencem necessariamente ao espaço $L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, o funcional energia $I_{\lambda\mu}$ cujos pontos críticos são soluções fracas do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ não pode ser definido em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, seguimos as ideias de [19]. A fim de definir corretamente a estrutura variacional para lidar com o problema precisamos trabalhar em outro espaço, o espaço natural está relacionado ao que foi usado no trabalho de Drabek e Huang [19], a saber, o espaço $X_g \times X_h$ que está definido no inicio da Seção 2. Comumente, para superar a falta de compacidade devido o crescimento crítico de $H(\cdot,\cdot)$, o qual está relacionado ao fato da imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ não ser compacta,adaptamos as ideias presente no Lema 1.2 de [9](consulte também Lema 1.44 em [43]). Desde que $g^-(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então se $u_n \rightharpoonup u$ em X_g, o conjunto $\{g^-(x)u_n^2\}$ não é necessariamente pré-compacto[3] em $L^1(\mathbb{R}^N)$(o mesmo acontece se trocarmos g por h), isto e a estrutura de $X_g \times X_h$, fazem várias estimativas relacionadas a compacidade, presentes nos trabalhos [2, 15], diferente no presente trabalho. Gostaríamos de mencionar que a hipótese (P_2) é mais fraca do que a hipótese (f_3) de [19], por exemplo se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, $c_0 = f(0) = \|f\|_\infty$ e $f(x) = c_0 - |x|^{2+\delta}$ numa vizinhança da origem, o resultado de existência de Drábek e Huang [19] não se aplica, visto que f não satisfaz a condição requerida, entretanto o Teorema 0.1 ainda é válido. Quanto a multiplicidade, o peso Q acoplado a parte crítica de (CN) não pode mudar de sinal, enquanto que no presente trabalho o Teorema 2.1 ainda é válido quando f muda de sinal.

No Capítulo 3, investigamos multiplicidade de soluções via Teorema do Passo da Montanha com simetria. Estudamos a seguinte equação com expoente crítico e com um termo subcrítico:

$$-\Delta u = \lambda g(x)u + h(x)|u|^{q-2}u + \mu f(x)|u|^{2^*-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N \tag{1}$$

com $N \geqslant 4$, $g^+ \not\equiv 0$, $h^+ \not\equiv 0$, $\lambda, \mu > 0$ e $2 < q < 2^*$.
As funções pesos f, g e h satisfazem
(M_0) $f, g, h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N), h^+ \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ onde $q_0 = 2^*/(2^* - q)$;
(M_1) f é contínua e não negativa.
(M_2) Assuma $\inf\limits_{x \in B_r(0)} [\min\{f(x), g(x)\}] = \alpha > 0$, para $B_r(0) \subset \Omega_{h^+} = \{x \in B_r(0) : h(x) \geqslant 0\}$;
(M_3) Para algum R_0, $0 < d_{R_0} = \inf\limits_{|x\| \geqslant R_0} \left\{ \dfrac{g^-(x)}{h^-(x)} : h^-(x) > 0 \right\}$.

A equação (1) foi estudada por Binding, Drábek e Huang [7] para o operador $-\Delta_p u =$div$(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ com $\mu = 1$ e o termo subcrítico do tipo $\alpha h(x)|u|^{q-2}u$ com $\alpha > 0$ pequeno. Quando $p = 2$ os pesos satisfazem as seguintes condições:
(DH_1) $g^+ \not\equiv 0, h^+ \not\equiv 0$;
(DH_2) $f^\pm \not\equiv 0$ e $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$;
(DH_3) $g \geqslant 0$, $g^+ \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$;
(DH_4) $h \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, onde $q_0 = 2^*/(2^* - q)$.
Os autores estudaram existência de ao menos uma solução positiva para tal equação e assumindo a hipótese $h(x) \geqslant 0$ em algum conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e com f necessariamente

[3]Dizemos que $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{F})$ é pré-compacto se toda sequência em $\mathcal{G}$ tem subsequência convergente. E $\mathcal{C}(K, \mathbb{F})$ é o espaço de todas as funções contínuas de K em $\mathbb{F}$.

trocando de sinal, eles mostraram a existência de um minimizador local não nulo do funcional associado.

As soluções fracas do problema (1) são pontos críticos do funcional energia associado

$$J_{\lambda\mu}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 dx - \lambda g(x)u^2)dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^q dx - \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^{2^*}dx.$$

Como o funcional $J_{\lambda\mu}$ é par podemos esperar que sua simetria nos garanta multiplicidade de pontos críticos. Provaremos que isso é verdadeiro, desde que o parâmetro μ seja suficientemente pequeno. Assim nosso principal resultado do Capítulo 3 é o teorema a seguir.

Teorema 0.3 *Suponha que $(M_0)-(M_3)$ ocorre e $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$. Então, dado $m \in \mathbb{N}$, existe $\mu^* = \mu^*(\lambda, m) > 0$ tal que (3.1) possui ao menos m pares de soluções não triviais para todo $\mu \in (0, \mu^*)$.*

A inspiração para este estudo vem do trabalho de Silva e Xavier em [35], que estudaram o problema

$$(SX)\begin{cases} -\Delta_p u = \mu|u|^{p^*-2}u + a(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

os autores usaram método variacional e teoria dos pontos críticos minimax para obter existência de múltiplas soluções quando o termo subcrítico $a(\cdot,\cdot)$ é impar na segunda entrada.

Nosso problema é uma versão de (SX) em domínios ilimitados quando $p = 2$ e $a(x,u)$ tem um termo linear e subcrítico com pesos indefinidos. Tal qual nos problemas anteriores o problema requer um espaço adequado, conforme já citado para os problemas envolvendo sistemas.

Umas das motivações para o estudo de (1) é também o seguinte problema

$$(P_\beta)\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. O problema (P_β) com $\lambda = 0$ foi estudado por Garcia Azorero e Peral Alonso em [5]. No trabalho, os autores provaram a existência de infinitas soluções para (P_β) quando $\lambda = 0$, $1 < q < p$ e $\beta > 0$ é suficientemente pequeno. Ainda estabeleceram a existência de uma solução não-trivial quando $\lambda = 0$, $p < q < p^*$ e $\beta > 0$ é suficientemente grande.

Ainda nessa direção, em [35] os autores também estudaram uma versão de (P_β) para um termo mais geral que $|u|^{q-2}u$. Sendo mais específico, estudaram o problema

$$(P_\lambda)\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{p-2}u + \beta g(x,u) \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Caratheodory e satisfaz algumas hipóteses adicionais.

Swanson e Yu em [37] estudaram (1) para o operador $p-$laplaciano com $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ e $p < q < p^*$, e mostraram que se $0 \leqslant g(x) \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N), f(x) \geqslant 0$ e $h(x) \geqslant h_0 > 0$ em $\mathbb{R}^N$, então (1) tem uma solução positiva.

Nossa contribuição é mostrar multiplicidade de soluções sob a luz das hipóteses $(M_0) - (M_4)$ abordando o problema em um domínio não-limitado com a presença de pesos indefinidos, uma das dificuldades presentes é a falta de compacidade gerada pela parte negativa dos termos linear e subcrítico. Ressaltamos que o fato de somente a parte positiva de $h(x)$ pertencer a $L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ não conseguimos garantir que o funcional energia está bem definido, para isso usamos (M_3).

Esta tese está assim dividida: no Capítulo 1, definimos o espaço adequado para o funcional energia associado ao nosso problema e provamos o teorema de existência de soluções via Teorema do Passo da Montanha. No Capítulo 2, estudamos multiplicidade de solução do sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ e provamos o Teorema 0.2. Por fim, no Capítulo 3, nos ocupamos em mostrar um resultado de multiplicidade de soluções para a equação elíptica (1) usando uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria. Apresentamos ainda o Apêndice *A* no qual mostramos a regularidade dos funcionais $I_{\lambda\mu}$ e $J_{\lambda\mu}$, bem como o Apêndice *B* onde enunciamos os resultados usados neste trabalho.

Capítulo 1

Existência de solução positiva para um sistema elíptico crítico com peso indefinido em $\mathbb{R}^N$

1.1 Introdução

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a existência soluções positivas para o seguinte sistema elíptico

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu})\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta v = \mu h(x)v + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ u,v > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1.1}$$

com $N \geqslant 4$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev, H_u e H_v são as derivadas parciais de uma função homogênea $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{R}^2_+ = [0,\infty)\times[0,\infty)$, $f^+ \not\equiv 0$, $g^+ \not\equiv 0$, $h^+ \not\equiv 0$ e $\lambda, \mu > 0$. Nosso interesse é no caso em que H tem crescimento crítico. Mais especificamente, as hipótese sobre H são as seguintes:
(H_0) H é 2^*-homogênea, que é

$$H(\theta s, \theta t) = \theta^{2^*}H(s,t) \text{ para cada } \theta > 0 \text{ e } \forall\,(s,t) \in \mathbb{R}^2_+;$$

(H_1) $H_s(0,1) = 0, H_t(1,0) = 0$;

(H_2) $H(s,t) > 0$ para cada $s, t > 0$;

(H_3) $H_s(s,t) \geqslant 0, H_t(s,t) \geqslant 0$ para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$;

(H_4) a função $1-$homogênea $\Psi(s,t) = H(s^{1/2^*}, t^{1/2^*})$ é côncava em $\mathbb{R}^2_+$.

Como um exemplo de uma função que satisfaz as hipóteses $(H_0) - (H_4)$ temos a função

$$H(u,v) = a|u|^{2^*} + \sum_{\alpha_i+\beta_i=2^*} b_i|u|^{\alpha_i}|v|^{\beta_i} + c|v|^{2^*},$$

onde $a, b_i, c \in \mathbb{R}$, $\alpha_i + \beta_i = 2^*, \alpha_i, \beta_i \geqslant 1$, $i \in \mathcal{I}$, com $\mathcal{I}$ um subconjunto finito de $\mathbb{N}$.
Desde que a função H é 2^*-homogênea e de classe $\mathcal{C}^1$(Apêndice B, Teorema B.1), temos a relação de Euler

$$sH_s(s,t) + tH_t(s,t) = 2^*H(s,t). \tag{1.2}$$

Seja S a melhor constante de Sobolev para a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, a saber

$$S := \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}.$$

onde $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}$ equipado com a norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Como em [17], definimos

$$S_H := \inf_{u,v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx : \int_{\mathbb{R}^N} H(u^+, v^+) dx = 1\right\} \tag{1.3}$$

e de (H_0) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx \geqslant S_H \int_{\mathbb{R}^N} H(u^+, v^+) dx, \ \forall u, v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{1.4}$$

Podemos relacionar as constantes S e S_H. Para tanto, para cada $\varepsilon > 0$ definimos a seguinte família de funções

$$U_\varepsilon(x) := \frac{c_N \varepsilon^{\frac{N-2}{4}}}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

onde $c_N := [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}$.

Segue de Aubin e Tallenti [4, 41] que $\|\nabla U_\varepsilon\|_2^2 = \|U_\varepsilon\|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}}$. Do Lema 1 em [17] e usando a homogeneidade de H, existem constantes $A, B > 0$ tal que

$$\begin{aligned} S_H &= \frac{\|(AU_\varepsilon, BU_\varepsilon)\|^2}{(\int_{\mathbb{R}^N} H(AU_\varepsilon, BU_\varepsilon))^{2/2^*}} \\ &= \frac{(A^2+B^2)}{H(A,B)^{2/2^*}} \frac{S^{\frac{N}{2}}}{\|U_\varepsilon\|_{2^*}^2} \end{aligned}$$

de onde segue que

$$S_H = \frac{A^2+B^2}{H(A,B)^{2/2^*}} S. \tag{1.5}$$

Os potenciais f, g e h satisfazem

(P_0) $f, g, h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \not\equiv f^+, 0 \not\equiv g^+, 0 \not\equiv h^+$ e $g^+, h^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$;

(P_1) Para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $f(x_0) = |f|_\infty$ e existe $r > 0$ tal que

$$\alpha_0 := \inf\{f(x) : x \in B_r(x_0)\} > 0;$$

onde $|f|_\infty := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|$.

(P_2) Assuma que $f(x_0) - f(x) = o(|x - x_0|^2)$;

(P_3) $\inf\limits_{x \in B_r(x_0)} \min\{\lambda A g(x) + \mu B h(x)\} = m_0 > 0$ onde A e B são constantes positivas em (1.5).

Nosso problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ está relacionado com o seguinte problema de autovalor

$$(\mathcal{P}_\phi) \begin{cases} -\Delta u = \lambda \phi(x) u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) u^2 dx > 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

onde $\phi(x) = g(x)$ e $\phi(x) = h(x)$, respectivamente.

Definição 1.1 *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do problema $(\mathcal{P}_\phi)$ se existe $u \in X_\phi$, $u \neq 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) u \varphi dx$$

para todo $\varphi \in X_\phi$, onde o espaço X_ϕ é definido na Seção 1.2. Então u é chamada uma *autofunção correspondente ao autovalor λ. Dizemos que λ é um autovalor principal de (1.6), se existe uma autofunção associada a λ que é estritamente positiva em $\mathbb{R}^N$ e λ é um autovalor simples se o autoespaço associado a λ tem dimensão* 1.

Sejam λ_1^+ e μ_1^+ os autovalores principais de $(\mathcal{P}_\phi)$, quando $\phi(x) \equiv g(x)$ e $\phi(x) \equiv h(x)$ respectivamente, denotamos por u_1^+ e v_1^+ suas respectivas autofunções, para mais detalhes consulte Allegreto e Huang em [1] e Edelson [21].

Nosso principal resultado neste capítulo é

Teorema 1.1 *Suponha que $0 < \lambda < \lambda_1^+$ e $0 < \mu < \mu_1^+$, H satisfaz $(H_0) - (H_4)$ e $(P_0) - (P_3)$ ocorrem, então o sistema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ tem ao menos um par (u, v) de solução, tal que $u > 0$ e $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$.*

1.2 A estrutura variacional

Conforme citamos na introdução, as funções g^- e h^- não pertencem necessariamente ao espaço $L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e com isso o funcional energia $I_{\lambda\mu}$ associado a $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ não pode ser definido em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Diante disso, somos levados a trabalhar em um espaço adequado a procurar as soluções fracas para $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$, para isso utilizaremos os espaços introduzidos em Drábek e Huang [19].

Seja $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$, $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$ e $\omega_\varphi(x) = \max\{\varphi^-(x), (1+|x|)^{-2}\}$. Definamos o espaço

$$Y_\varphi := \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \|u\|_\varphi^2 := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \omega_\varphi(x) u^2) dx < +\infty \right\}$$

e

$$X_\varphi := \left\{ u \in X_\varphi : \exists (\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N), \|\phi_n - u\|_\varphi = o_n(1) \right\}$$

então $(X_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$ é um espaço vetorial normado e $X_\varphi = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_\varphi}$ munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_\varphi := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + \omega_\varphi(x) uv) dx$$

é um espaço é um espaço de Hilbert. Observamos ainda que pela definição do espaço X_φ temos a imersão $X_\varphi \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

A proposição a seguir nos garante que o problema $(\mathcal{P}_\phi)$ tem um autovalor $\lambda_1^+ > 0$ com autofunção postiva associada u_1^+ satisfazendo algumas condições. Para mais detalhes consulte Drábek, Kufner e Nicolosi [20] e o Lema 2.3 em [18].

Proposição 1.1 *Suponha que* $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $0 \not\equiv \phi^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$, *então existe um único autovalor simples e isolado* $\delta_1^+ > 0$, *tal que* $(\mathcal{P}_\phi)$ *tem uma autofunção positiva* $\phi_1^+ \in X_\phi$ *associada com* δ_1^+. *Além disso, para qualquer* $\delta \in (0, \delta_1^+]$, *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 - \delta\phi(x)u^2)dx \geqslant 0, \ \forall u \in X_\phi.$$

A igualdade ocorre somente se, ou $u \equiv 0$, *ou* $\delta = \delta_1^+$ *e* $u = \mu\phi_1^+$ *para algum* $\mu \in \mathbb{R}$.

Para referências futuras, temos a Desigualdade de Hardy (veja [10, 20]), a saber

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^p}{(1+|x|)^p}dx \leqslant C_{N,p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

onde $C_{N,p} = (p/(N-p))^p$. Nosso interesse em tal desigualdade é quando $p = 2$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{(1+|x|)^2}dx \leqslant C_{N,2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

onde $C_{N,2} = 4/(N-2)^2$.

Observação 1.1 *Observe que, em vista da Desigualdade de Hardy (caso* $p = 2$*), para todo* $c_1 > 0$ *tem-se*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + c_1\phi^-(x)u_n^2)dx = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_\phi^2 = 0, \quad \forall u_n \in X_\phi. \tag{1.7}$$

De fato, suponhamos que $\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + c_1\phi^-(x)u_n^2)dx \to 0$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + c_1\phi^-(x)u_n^2)dx \to 0$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \to 0. \tag{1.8}$$

Pela Desigualdade de Hardy, temos

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_n^2}{(1+|x|)^2}dx \to 0.$$

Assim,

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left(\phi^-(x) + \frac{1}{(1+|x|)^2} \right) u_n^2 dx \to 0.$$

Daí, tem-se

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \max \left\{ \phi^-(x), \frac{1}{(1+|x|)^2} \right\} u_n^2 dx \leqslant c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left(\phi^-(x) + \frac{1}{(1+|x|)^2} \right) u_n^2 dx \to 0$$

isto é,

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \max \left\{ \phi^-(x), \frac{1}{(1+|x|)^2} \right\} u_n^2 dx \to 0. \tag{1.9}$$

De (1.8) e (1.9) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^2 + \max \left\{ \phi^-(x), \frac{1}{(1+|x|)^2} \right\} u_n^2 \right) dx \to 0.$$

o que nos dará

$$\|u_n\|_\phi^2 \to 0.$$

Agora, suponhamos que $\|u_n\|_\phi^2 \to 0$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \to 0 \tag{1.10}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \max \left\{ \phi^-(x), \frac{1}{(1+|x|)^2} \right\} u^2 dx \to 0. \tag{1.11}$$

Por (1.11) segue

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \phi^-(x) u_n^2 dx \leqslant c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \max \left\{ \phi^-(x), \frac{1}{(1+|x|)^2} \right\} u^2 dx \to 0$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} c_1 \phi^-(x) u_n^2 dx \to 0. \tag{1.12}$$

De (1.10) e (1.12) vem

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + c_1\phi^-(x)u_n^2)dx \to 0.$$

provando assim (1.7).

Neste trabalho, consideramos o espaço de Hilbert $X := X_g \times X_h$ munido do produto interno

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2)\rangle := \langle u_1, u_2\rangle_g + \langle v_1, v_2\rangle_h$$

e cuja a norma induzida é dada por $\|(u,v)\|^2 = \langle u, u\rangle_g + \langle v, v\rangle_h$.

Definição 1.2 *Dizemos que o par $(u, v) \in X$ é uma solução fraca do problema $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ quando*

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + \nabla v\nabla\psi - \lambda g(x)u\varphi - \mu h(x)v\psi)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_u(u,v)\varphi + H_v(u,v)\psi] = 0$$

para todo $(\varphi, \psi) \in X$.

Assim, as soluções fracas de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ são os pontos críticos do funcional energia $I_{\lambda\mu} : X \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_{\lambda\mu}(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda g(x)u^2 + \mu h(x)v^2)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u^+, v^+)dx$$

e em vista de $(P_0) - (P_3)$, $I_{\lambda\mu}$ está bem definido e $I_{\lambda\mu} \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$(veja Lema 2.1 em [18] e Apêndice *A*).

Observação 1.2 *Seja F uma função $q-$ homogênea de classe $\mathcal{C}^1$ com $q \geqslant 1$, então*
(F_1) $|F(s,t)| \leqslant M_F(|s|^q + |t|^q)$ onde $M_F := \max\{|F(s,t)| : |s|^q + |t|^q = 1\}$;
(F_2) $F_s(s,t)$ e $F_t(s,t)$ são $(q-1)-$homogêneas.

Com efeito, desde que F é $q-$homogênea, temos

$$\frac{1}{|s|^q + |t|^q}|F(s,t)| = \left|F\left(\frac{s}{(|s|^q + |t|^q)^{1/q}}, \frac{t}{(|s|^q + |t|^q)^{1/q}}\right)\right| \leqslant M_F,$$

pois

$$\begin{aligned}\left[\frac{s}{(|s|^q + |t|^q)^{1/q}}\right]^q + \left[\frac{t}{(|s|^q + |t|^q)^{1/q}}\right]^q &= \frac{s^q}{|s|^q + |t|^q} + \frac{t^q}{|s|^q + |t|^q}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Logo,

$$|F(s,t)| \leqslant M_F(|s|^q + |t|^q).$$

Por outro lado, como F é $q-$homogênea, então

$$F(\theta s, \theta t) = \theta^q F(s,t).$$

Derivando ambos os lados da última igualdade com relação a s e usando a regra da cadeia, tem-se

$$\theta \cdot F_s(\theta s, \theta t) = \theta^q F_s(s,t). \tag{1.13}$$

Portanto,

$$F_s(\theta s, \theta t) = \theta^{q-1} F_s(s,t).$$

Em outras palavras, F_s é $(q-1)-$homogênea. De maneira análoga, mostra-se que F_t é também $(q-1)-$homogênea.

1.3 Existência de um par de soluções positivas

Nesta secção, demonstraremos o resultado de existência no Teorema 1.1. Usamos o Teorema do Passo da Montanha para obter um ponto crítico não trivial para $I_{\lambda\mu}$. Primeiramente, demonstramos uma desigualdade contida no Lema 1.2, que desempenha um papel importante em várias estimativas ao longo do trabalho, visto que a norma do espaço não aparece diretamente no funcional energia $I_{\lambda\mu}$.

Apresentamos a geometria do Teorema do Passo da Montanha contida na Proposição 1.2, enquanto na Proposição 1.3 nós estimamos o nível crítico, abaixo do qual temos que a condição$(PS)_c$ é válida. Por fim, na Proposição 1.4, mostraremos que o nível do passo da montanha é menor do que o nível crítico, e por fim, mostramos a positividade do par de soluções.

Antes de demonstrar o Lema 1.2, vamos mostrar um resultado de compacidade dado pelo Lema 1.1 a seguir, cuja a demonstração está contida em Huang [18], a qual será incluída no presente trabalho para facilitar sua leitura.

Lema 1.1 *O operador $G^+ : X_\phi \to X'_\phi$ dado por $\langle G^+(u), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)u\varphi$ é compacto*[1].

Demonstração: Vamos iniciar, afirmando que, para todo $\varepsilon > 0$ e $u \in X_\phi$, existe $R > 0$ tal que

$$\sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1} \int_{|x|>R} g^+(x)|u||\varphi|dx \leqslant \varepsilon\|u\|_{X_\phi}. \tag{1.14}$$

De fato, usando duas vezes a desigualdade de Hölder temos

$$\int_{|x|>R} g^+(x)|u||\varphi|dx \leqslant \left(\int_{|x|>R} g^+(x)|u|^2\right)^{1/2}\left(\int_{|x|>R} g^+(x)|\varphi|^2\right)^{1/2}$$

então

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>R} g^+(x)|u||\varphi|dx &\leqslant \left(\int_{|x|>R} |g^+|^{\frac{N}{2}}dx\right)^{\frac{1}{N}}\left(\int_{|x|>R} |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\\
&\cdot \left(\int_{|x|>R} |g^+|^{\frac{N}{2}}dx\right)^{\frac{1}{N}}\left(\int_{|x|>R} |\varphi|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\\
&\leqslant c\left(\int_{|x|>R} |g^+|^{\frac{N}{2}}dx\right)^{\frac{2}{N}}\left(\int_{|x|>R} |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\|\varphi\|_{X_\phi}
\end{aligned}$$

desde que $g^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1} \int_{|x|>R} g^+(x)|u||\varphi|dx &\leqslant c\left(\int_{|x|>R} |g^+|^{\frac{N}{2}}dx\right)^{\frac{2}{N}}\left(\int_{|x|>R} |u|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\\
&\leqslant \varepsilon\|u\|_{X_\phi}.
\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que $u_n \rightharpoonup u_0$ em X_ϕ. Estimando

$$\begin{aligned}
\|G^+(u_n) - G^+(u_0)\|_{X_\phi} &= \sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1} \left|\langle G^+(u_n) - G^+(u_0), \varphi\rangle\right|\\
&= \sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1} \left|\int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)(u_n - u_0)\varphi dx\right|\\
&\leqslant \sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1} \left|\int_{|x|\leqslant R} g^+(x)(u_n - u_0)\varphi\right| + \sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1} \left|\int_{|x|>R} g^+(x)(u_n - u_0)\varphi\right|.
\end{aligned}$$

[1]Sejam E e F espaços normados. Dizemos que um operdor linear $T : E \to F$ é compacto se para toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E, a sequência $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente em F.

Observe que, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $R > 0$ de modo que

$$\sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1}\left|\int_{|x|>R} g^+(x)(u_n - u_0)\varphi dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

enquanto fixando $R > 0$, da convergência $u_n \to u_0$ em $L^2(B_R(0))$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{\|\varphi\|_{X_\phi}\leqslant 1}\left|\int_{|x|\leqslant R} g^+(x)(u_n - u_0)\varphi dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

Portanto,

$$\|G^+(u_n) - G^+(u_0)\|_{X_\phi} < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant n_0$$

ou ainda,

$$G^+(u_n) \longrightarrow G^+(u_0), \quad \text{em} \quad X'_\phi.$$

o que prova que o operador G^+ é compacto.

Lema 1.2 *Suponha que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \varphi^+ \not\equiv 0, \delta \in [0, \delta_1^+)$ então existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 - \delta\varphi(x)u^2)dx \geqslant \varepsilon\|u\|_\varphi^2, \, \forall \, \varphi \in X_\varphi. \tag{1.15}$$

Demonstração: Suponhamos, por contradição, então existe $u_n \in X_\varphi$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)u_n^2 dx < \frac{1}{n}\|u_n\|_\varphi^2.$$

Seja $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_\varphi}$ e da Proposição 1.1 temos

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)v_n^2 dx < \frac{1}{n}. \tag{1.16}$$

Desde que X_φ é reflexivo(visto ser Hilbert), a menos de subsequência existe $v_0 \in X_\varphi$ tal que $v_n \rightharpoonup v_0$ em X_φ. Pelo Lema 1.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^+(x)v_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^+(x)v_0^2 dx. \tag{1.17}$$

De (1.16), (1.17) e do Lema de Fatou(Apêndice B, Teorema B.3) segue

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^2 dx - \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) v_0^2 dx \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) v_n^2 dx \right\} = 0.$$

Agora, novamente da Proposição 1.1 tem-se $v_0 \equiv 0$ e então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^+(x) v_n^2 dx \to 0.$$

Por (1.16), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^+(x) v_n^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^-(x) v_n^2 dx \to 0.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^-(x) v_n^2 dx \to 0$$

e tendo em vista as desigualdades

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^-(x) v_n^2 dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^-(x) v_n^2 dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \delta \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^-(x) v_n^2 dx$$

tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^-(x) v_n^2 dx \to 0.$$

Usando a desigualdade de Hardy, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{v_n^2}{(1+|x|)^2} dx \to 0.$$

Logo,

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^-(x) v_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{v_n^2}{(1+|x|)^2} \right\} \geqslant \|v_n\|_\varphi^2 = 1$$

onde usamos o fato de $\varphi^-(x) + (1+|x|)^{-2} \geqslant \omega_\varphi(x)$, o que é uma contradição. ■

Proposição 1.2 *Suponha que* $(\lambda,\mu) \in (0,\lambda_1^+) \times (0,\mu_1^+)$, $(H_0)-(H_1)$, (P_0) *e* (P_3) *ocorre, então existe* $r,\rho > 0$ *tal que*

$$\inf_{\|(u,v)\|=r} I_{\lambda\mu}(u,v) \geqslant \rho > 0. \tag{1.18}$$

Além disso, se (P_1) *ocorre e* $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(B_r(x_0))$ *é tal que* $\varphi^+ \not\equiv 0$, *então*

$$\lim_{t\to+\infty} I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi) = -\infty. \tag{1.19}$$

Demonstração: De (1.15) e da definição de S_H, temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu}(u,v) &\geqslant \frac{\varepsilon}{2}(\|u\|_g^2 + \|v\|_h^2) - \frac{|f|_\infty}{2^*} S_H^{-2^*/2}\left[\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx\right]^{2^*/2} \\ &\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\|(u,v)\|^2 - \frac{|f|_\infty}{2^*} S_H^{-2^*/2}\|(u,v)\|^{2^*}. \end{aligned}$$

Considerando $\|(u,v)\| = r$, com r a ser escolhido posteriormente, segue que

$$I_{\lambda\mu}(u,v) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}r^2 - \frac{|f|_\infty}{2} S_H^{-\frac{2^*}{2}} r^{2^*}.$$

Para $r < \left(\dfrac{\varepsilon S_H^{\frac{2^*}{2}}}{2|f|_\infty}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$, teremos

$$\frac{\varepsilon}{2}r^2 - \frac{|f|_\infty}{2} S_H^{-\frac{2^*}{2}} r^{2^*} > \frac{\varepsilon}{4}r^2.$$

Para tal escolha de r, segue

$$I_{\lambda\mu}(u,v) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}r^2.$$

Agora, escolhendo $\rho = \dfrac{\varepsilon}{4}r^2 > 0$, obtemos

$$\inf_{\|(u,v)\|=r} I_{\lambda\mu}(u,v) \geqslant \rho > 0.$$

De $(H_0)-(H_2)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi^+,\varphi^+)dx > 0.$$

De fato, se

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi^+, \varphi^+)dx = H(1,1)\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^+)^{2^*} dx$$

teríamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^+)^{2^*} dx = 0 \Longrightarrow (\varphi^+)^{2^*} = 0$$

o que é um absurdo.
Por (P_1) teremos

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2 - \lambda g(x)\varphi^2 - \mu h(x)\varphi^2)dx - \frac{t^{2^*}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(\varphi^+, \varphi^+)dx \\ &\leqslant \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2 + \lambda g^-(x)\varphi^2 + \mu h^-(x)\varphi^2)dx - \frac{c_0 t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi^+, \varphi^+)dx \end{aligned}$$

isto é,

$$I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi) \leqslant \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2 + \lambda g^-(x)\varphi^2 + \mu h^-(x)\varphi^2)dx - \frac{c_0 t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi^+, \varphi^+)dx. \tag{1.20}$$

Da definição da norma tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^-(x)\varphi^2 dx \leqslant \|\varphi\|_g^2 \tag{1.21}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^-(x)\varphi^2 dx \leqslant \|\varphi\|_h^2. \tag{1.22}$$

Por (1.20), (1.21) e (1.22) segue

$$I_{\lambda,\mu}(t\varphi, t\varphi) \leqslant \frac{t^2}{2}\left(\|\varphi\|_g^2 + \|\varphi\|_h^2 + \lambda\|\varphi\|_g^2 + \mu\|\varphi\|_h^2\right) - \frac{c_0 t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi^+, \varphi^+)dx.$$

Logo,

$$\lim_{t\to+\infty} I_{\lambda\mu}(t\varphi, t\varphi) \leqslant \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^2 c_0}{2}\|(\varphi,\varphi)\|^2 - \frac{\alpha_0 t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} H(\varphi^+, \varphi^+)dx\right] = -\infty,$$

onde $c_0 = \max\{1, \lambda, \mu\}$. ■

A seguir, demonstraremos que sequências de Palais-Smale são limitadas. Usaremos esse fato para mostrar que o funcional $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a condição de Palais-Smale local abaixo de um certo nível crítico. Ressaltamos ainda que a demonstração da limitação da sequência segue uma abordagem diferente de Drábek e Huang [19].
Agora, vamos definir Sequência de Palais-Smale e Condição de Palais-Smale para $J_{\lambda\mu}$.

Definição 1.3 (Sequência de Palais-Smale) *Dizemos que uma sequência (u_n, v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $I_{\lambda\mu}$ se $I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to c$ em $\mathbb{R}$ e $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$ em X', quando $n \to +\infty$.*

Definição 1.4 (Condição de Palais-Smale) *Dizemos que o funcional $I_{\lambda\mu}$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, se toda sequência $(u_n, v_n) \subset X$ tal que $I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to c$ e $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$ admite uma subsequência convergente.*

Lema 1.3 *Suponha que $0 < \lambda < \lambda_1^+$ e $0 < \mu < \mu_1^+$. Se $I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) = c + o_n(1)$ e $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) = o_n(1)$ em X^{-1} então $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que $\|(u_n, v_n)\| \to +\infty$ para n suficientemente grande. Como $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) = o_n(1)$ então, dado $0 < \epsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)\|_{X'} < 1, \quad \forall\, n \geqslant n_0,$$

isto é,

$$|I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \leqslant \|(u_n, v_n)\|, \quad \forall\, n \geqslant n_0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) - \frac{1}{2^*} I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n, v_n) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - \lambda g u_n^2 - \mu h v_n^2) dx \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - \lambda g(x) u_n^2 - \mu h(x) v_n^2) dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2 existe uma constante $\gamma > 0$ de modo que

$$I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) - \frac{1}{2^*} I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n, v_n) \geqslant \frac{\gamma}{N} \|(u_n, v_n)\|^2. \tag{1.23}$$

Agora, desde que $I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) = c + o_n(1)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) - \frac{1}{2^*} I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n, v_n) \leqslant c + \frac{1}{2^*} \|(u_n, v_n)\|, \quad \forall\, n \geqslant n_0. \tag{1.24}$$

Por (1.23) e (1.24) obtemos

$$c + \frac{1}{2^*}\|(u_n, v_n)\| \geqslant \frac{\gamma}{N}\|(u_n, v_n)\|^2.$$

Dividindo a última desigualdade por $\|(u_n, v_n)\|^2$, obtemos

$$\frac{c}{\|(u_n, v_n)\|^2} + \frac{1}{2^*\|(u_n, v_n)\|} \geqslant \frac{\gamma}{N}.$$

Passando o limite na última desigualdade quando $n \to +\infty$ chegamos a uma contradição. Logo, a sequência $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X. ■

O Lema 1.5 que segue é uma versão do Lema de Brezis-Lieb (Apêndice B, Teorema $B.6$) e nos será útil na prova da Proposição 1.3 . Antes de prová-lo, precisamos do seguinte lema.

Lema 1.4 *Dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|H(s+a, t+b) - H(s,t)| \leqslant \varepsilon(|s|^{2^*} + |t|^{2^*}) + C_\varepsilon(|a|^{2^*} + |b|^{2^*}).$$

Demonstração: Pelo Teorema do Valor Médio segue

$$|H(s+a, t+b) - H(s,t)| = |\nabla H(s+\theta a, t+\theta b)(a,b)| \tag{1.25}$$

para algum $\theta \in (0,1)$.

Usando a Observação 1.2 e a desigualdade padrão

$$|u+\theta v|^{2^*-1} \leqslant C_{2^*-1}(|u|^{2^*-1} + |v|^{2^*-1}), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

temos

$$\begin{aligned}
|H(s+a, t+b) - H(s,t)| &= |aH_s(s+\theta a, t+\theta b) + bH_t(s+\theta a, t+\theta b)| \\
&\leqslant |a||H_s(s+\theta a, t+\theta b)| + |b||H_t(s+\theta a, t+\theta b)| \\
&\leqslant M_H(|a||s+\theta a|^{2^*-1} + |a||t+\theta b|^{2^*-1}) \\
&+ M_H(|b||s+\theta a|^{2^*-1} + |b||t+\theta b|^{2^*-1}) \\
&\leqslant M_H C_{2^*-1}[|a||s|^{2^*-1} + |a||\theta a|^{2^*-1} + |a||t|^{2^*-1} + |a||\theta b|^{2^*-1}] \\
&+ M_H C_{2^*-1}[|b||s|^{2^*-1} + |b||\theta a|^{2^*-1} + |b||t|^{2^*-1} + |b||\theta b|^{2^*-1}] \\
&\leqslant C(|s|^{2^*-1}|a| + |s|^{2^*-1}|b| + |t|^{2^*-1}|a| + |t|^{2^*-1}|b| + |a|^{2^*} + |b|^{2^*} \\
&+ |a|^{2^*-1}|b| + |b|^{2^*-1}|a|).
\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young(Apêndice B, Teorema $B.4$) para os expoentes conjugados $2^*/(2^*-1)$ e 2^* o lema está provado. ∎

O próximo Lema está provado em [17] para o caso $f(x) \equiv 1$. Aqui provamos o mesmo seguindo as ideias de [17] com a f mais geral.

Lema 1.5 *Suponhamos que ν é uma medida sobre $D \subset \mathbb{R}^N$ (não necessariamente limitado) um domínio suave. Se $u_n(x) \to u(x), v_n(x) \to v(x)$ q.t.p sobre D e as sequências $(u_n), (v_n)$ são limitadas em $L^{2^*}(D, d\nu)$, então*

$$\int_D f(x)H(u_n, v_n)d\nu - \int_D f(x)H(u_n - u, v_n - v)d\nu = \int_D f(x)H(u, v)d\nu + o_n(1).$$

Demonstração: Fixemos algum $\varepsilon > 0$ e seja $C_\varepsilon > 0$ dado no Lema 1.4. Defina a função

$$\Phi_n(x) = |f(x)H(u_n, v_n) - f(x)H(u_n - u, v_n - v) - f(x)H(u, v)|.$$

Observe que

$$\Phi_n \leqslant |f(x)H(u_n, v_n) - f(x)H(u_n - u, v_n - v)| + f(x)|H(u, v)|.$$

Usando o Lema 1.4 para $s = u_n - u$, $t = v_n - v$, $a = u$ e $b = v$ temos

$$\begin{aligned} \Phi_n &\leqslant |f(x)H(u_n, v_n) - f(x)H(u_n - u, v_n - v)| + f(x)|H(u, v)| \\ &\leqslant f(x)\varepsilon(|u_n - u|^{2^*} + |v_n - v|^{2^*}) + f(x)C_\varepsilon(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) + f(x)|H(u, v)|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Phi_n - f(x)\varepsilon(|u_n - u|^{2^*} + |v_n - v|^{2^*}) \leqslant f(x)|H(u, v)| + f(x)C_\varepsilon(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}).$$

Chamando $W_{n,\varepsilon}(x) = \Phi_n(x) - f(x)\varepsilon(|u_n - u|^{2^*} + |v_n - v|^{2^*})$ e usando a Observação 1.2 (Condição F_1), tem-se

$$\begin{aligned} W_{n,\varepsilon}(x) &\leqslant f(x)M_H(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) + f(x)C_\varepsilon(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) \\ &= f(x)(M_H + C_\varepsilon)(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}) \in L^1(D, d\nu). \end{aligned}$$

Desde que $u_n(x) \to u(x)$ e $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p em D, segue que $W_{n,\varepsilon}(x) \to 0$ q.t.p em D quando $n \to +\infty$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_D W_{n,\varepsilon}(x)d\nu = 0. \tag{1.26}$$

Além disso, desde que

$$\Phi_n(x) = W_{n,\varepsilon}(x) + f(x)\varepsilon(|u_n - u|^{2^*} + |v_n - v|^{2^*}),$$

a limitação das sequências (u_n) e (v_n) implicam em

$$\limsup_{n\to\infty}\int_D \Phi_n(x)d\nu \leqslant \varepsilon\limsup_{n\to\infty}\int_D f(x)(|u_n - u|^{2^*} + |v_n - v|^{2^*})d\nu + \limsup_{n\to\infty}\int_D W_{n,\varepsilon}(x)d\nu.$$

Por (1.26) teremos

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_D \Phi_n(x)d\nu &\leqslant \varepsilon\limsup_{n\to\infty}\int_D f(x)(|u_n - u|^{2^*} + |v_n - v|^{2^*})d\nu \\ &\leqslant C\varepsilon.\end{aligned}$$

Como ε é arbritário, segue o lema. ■

Proposição 1.3 *Suponha que* $0 < \lambda < \lambda_1^+$ *e* $0 < \mu < \mu_1^+$, $I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to c \in (0, c^*)$ *e* $I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n) \to 0$ *onde* $c^* = \dfrac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}$, *então existem* $0 \not\equiv u_0 \in X_g$ *e* $0 \not\equiv v_0 \in X_h$ *tal que, a menos de subsequência* $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ *em* X *e* $I'_{\lambda\mu}(u_0, v_0) \equiv 0$.

Demonstração: Pelo Lema 1.3 a sequência (u_n, v_n) é limitada em X. Desde que X é um espaço reflexivo, a menos de subsequência, existe $(u_0, v_0) \in X$ tal que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0) \text{ em } X.$$

Fazendo $w_n = u_n - u_0$ e $z_n = v_n - v_0$, da convergência fraca e do Lema de Brezis-Lieb (veja [8] e Lema 5 em [17]), temos

$$I_{\lambda\mu}(w_n, z_n) - I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) + I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) \to 0 \tag{1.27}$$

e

$$I'_{\lambda\mu}(w_n, z_n)(w_n, z_n) - I'_{\lambda\mu}(u_n, v_n)(u_n, v_n) + I'_{\lambda\mu}(u_0, v_0)(u_0, v_0) \to 0. \tag{1.28}$$

Provaremos (1.27) e (1.28). De fato, vamos denotar $\Upsilon_f(u,v) := \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx$ e $\Psi_{\lambda\mu}(u,v) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \lambda g(x)u^2 - \mu h(x)v^2)dx$.
Observe que

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu}(w_n,z_n) - I_{\lambda\mu}(u_n,v_n) + I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) &= \Psi_{\lambda\mu}(w_n,z_n) - \Upsilon_f(w_n,z_n) - \Psi_{\lambda\mu}(u_n,v_n) \\ &+ \Upsilon_{\lambda\mu}(u_n,v_n) + \Psi_{\lambda\mu}(u_0,v_0) - \Upsilon_{\lambda\mu}(u_0,v_0). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu}(w_n,z_n) - I_{\lambda\mu}(u_n,v_n) + I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - \lambda g(x)u_n^2 - \mu h(x)v_n^2)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n \nabla u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n \nabla v_0 dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2 - \lambda g(x)u_0^2 - \mu h(x)v_0^2)dx \\ &+ \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u_n u_0 dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} h(x)v_n v_0 dx \\ &- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - \lambda g(x)u_n^2 - \mu h(x)v_n^2)dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0|^2 + |\nabla v_0|^2 - \lambda g(x)u_0^2 - \mu h(x)v_0^2)dx \\ &- \Upsilon_f(u_n-u_0,v_n-v_0) + \Upsilon_f(u_n,v_n) - \Upsilon_f(u_0,v_0) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu}(w_n,z_n) - I_{\lambda\mu}(u_n,v_n) + I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) &= \frac{1}{2}\Psi_{\lambda\mu}(u_n,v_n) + \frac{1}{2}\Psi_{\lambda\mu}(u_0,v_0) - \frac{1}{2}\Psi_{\lambda\mu}(u_n,v_n) \\ &+ \frac{1}{2}\Psi_{\lambda\mu}(u_0,v_0) - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n \nabla u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n \nabla v_0 dx \\ &+ \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u_n u_0 dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} h(x)v_n v_0 dx \\ &- \Upsilon_f(u_n-u_0,v_n-v_0) + \Upsilon_f(u_n,v_n) - \Upsilon_f(u_0,v_0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_{\lambda\mu}(w_n,z_n) - I_{\lambda\mu}(u_n,v_n) + I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) &= \Psi_{\lambda\mu}(u_0,v_0) - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n \nabla u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_n \nabla v_0 dx \\ &+ \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u_n u_0 dx + \mu\int_{\mathbb{R}^N} h(x)v_n v_0 dx \\ &- \Upsilon_f(u_n-u_0,v_n-v_0) + \Upsilon_f(u_n,v_n) - \Upsilon_f(u_0,v_0). \end{aligned}$$

Usando as convergências abaixo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u_0 dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla u_0 dx \\
\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla v_0 dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla v_0 dx \\
\int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_n u_0 dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_0^2 dx \\
\int_{\mathbb{R}^N} h(x) v_n v_0 dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} h(x) v_0^2 dx
\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
I_{\lambda\mu}(w_n, z_n) - I_{\lambda\mu}(u_n, v_n) + I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) &= \Psi_{\lambda\mu}(u_0, v_0) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^2 dx \\
&+ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_0^2 dx + \mu \int_{\mathbb{R}^N} h(x) v_0^2 dx \\
&- \Psi_f(u_n - u_0, v_n - v_0) + \Psi_f(u_n, v_n) - \Psi_f(u_0, v_0) \\
&+ o_n(1) \\
&= \Psi_{\lambda\mu}(u_0, v_0) - \Psi_{\lambda\mu}(u_0, v_0) - \Psi_f(u_n - u_0, v_n - v_0) \\
&+ \Psi_f(u_n, v_n) - \Psi_f(u_0, v_0) + o_n(1) \\
&= -\Psi_f(u_n - u_0, v_n - v_0) + \Psi_f(u_n, v_n) - \Psi_f(u_0, v_0) \\
&+ o_n(1). \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\Psi_f(u_n, v_n) - \Psi_f(w_n, z_n) - \Psi_f(u_0, v_0) &= -\int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(w_n, z_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(u_n, v_n) dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(u_0, v_0) dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Daí e do Lema 1.5, temos

$$\begin{aligned}
\Psi_f(u_n, v_n) - \Psi_f(w_n, z_n) - \Psi_f(u_0, v_0) &= -\int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(u_n, v_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(u_0, v_0) dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(u_n, v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(u_0, v_0) dx \\
&+ o_n(1) \\
&= o_n(1).
\end{aligned}$$

Da última igualdade e de (1.29) segue a convergência (1.27). Seguindo passos análogos ao mostrado anteriormente tem-se a convergência (1.28).

Pelo Lema 1.1, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)u_0^2 dx \tag{1.30}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)v_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)v_0^2 dx. \tag{1.31}$$

Segue de (1.27), (1.28), (1.30) e (1.31) que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}A_n - \frac{1}{2^*}B_n\right) = c - I_{\lambda\mu}(u_0,v_0) \tag{1.32}$$

bem como

$$\lim_{n\to+\infty}(A_n - B_n) = -I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0)(u_0,v_0)$$

onde

$$A_n := \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_n|^2 + |\nabla z_n|^2 + \lambda g^-(x)w_n^2 + \mu h^-(x)z_n^2)dx$$

e

$$B_n := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(w_n,z_n)dx.$$

Afirmamos que

$$I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0) = 0. \tag{1.33}$$

donde segue

$$\lim_{n\to+\infty}(A_n - B_n) = 0. \tag{1.34}$$

Como (u_n,v_n) é limitada em X, então A_n e B_n são limitadas, e a menos de subsequência, podemos escrever

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} B_n = \ell \geqslant 0,$$

e (1.32) nos fornece

$$\frac{1}{N}\ell = c - I_{\lambda\mu}(u_0,v_0). \tag{1.35}$$

Por (1.4) obtemos

$$A_n \geqslant S_H |f|_\infty^{\frac{2-N}{N}} B_n^{\frac{N-2}{N}}$$

e assim

$$\ell \geqslant S_H |f|_\infty^{\frac{2-N}{N}} \ell^{2/2^*}.$$

Nosso próximo objetivo é provar que $\ell = 0$. Com efeito, se $\ell > 0$ a última desigualdade implica que

$$\ell \geqslant |f|_\infty^{\frac{2-N}{N}} S_H^{\frac{N}{2}} = Nc^*. \tag{1.36}$$

De (1.35) e (1.36) tem-se

$$c^* \leqslant c - I_{\lambda\mu}(u_0, v_0),$$

e por (1.2), (3.30) e (1.33) concluímos que

$$I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) = I_{\lambda\mu}(u_0, v_0) - \frac{1}{2^*} I'_{\lambda\mu}(u_0, v_0)(u_0, v_0) \geqslant 0.$$

Combinando as duas últimas desigualdades temos $c^* \leqslant c$, o que contradiz nossa hipótese, logo $\ell = 0$ e então $A_n \to 0$, e de (1.7) temos $\|(w_n, z_n)\| \to 0$, ou seja, $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ em X. Além disso, desde que $c \neq 0$ segue, por continuidade, que $(u_0, v_0) \not\equiv (0, 0)$. Agora, provaremos (1.33) e que $u_0 \not\equiv 0$ e $v_0 \not\equiv 0$. Com efeito, seja $(\varphi, \phi) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, e como $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0)$ em X então

$$((u_n, v_n), (\varphi, \phi)) \to ((u_0, v_0), (\varphi, \phi)).$$

Seja

$$J_f(u, v) := \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) H(u, v) dx.$$

Da Observação 1.2 existe $c_1 > 0$ tal que

$$\max\{|H_u(u_n, v_n)|, |H_v(u_n, v_n)|\} \leqslant c_1(|u_n|^{2^*-1} + |v_n|^{2^*-1}),$$

assim pela imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*-1}(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado com $\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \neq 0\} \subset \Omega$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x) H_u(u_n, v_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x) H_u(u_0, v_0) dx, \tag{1.37}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\phi(x)H_v(u_n,v_n)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\phi(x)H_v(u_0,v_0)dx. \tag{1.38}$$

Usando novamente as imersões de Sobolev em domínios limitados temos

$$\lim_{n\to\infty}[(I_{\lambda\mu}+J_f)'(u_n,v_n)](\varphi,\phi) = [(I_{\lambda\mu}+J_f)'(u_0,v_0)](\varphi,\phi) \tag{1.39}$$

e segue de (1.37) e (1.38) que

$$\lim_{n\to+\infty} J_f'(u_n,v_n)(\varphi,\phi) = J_f'(u_0,v_0)(\varphi,\phi). \tag{1.40}$$

Desde que $I_{\lambda\mu}'(u_n,v_n)\to 0$, de (1.39) e (1.40) tem-se

$$I_{\lambda\mu}'(u_0,v_0)(\varphi,\phi)=0,\ \forall(\varphi,\phi)\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e como o funcional $I_{\lambda\mu}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e $X=\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_g}\times\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_h}$ então $I_{\lambda\mu}'(u_0,v_0)\equiv 0$. Agora, provaremos que ambas as funções satisfazem $u_0\not\equiv 0$ e $v_0\not\equiv 0$. De fato, sendo $(u_0,v_0)\not\equiv(0,0)$, então $u_0\not\equiv 0$ ou $v_0\not\equiv 0$, suponhamos que $u_0\not\equiv 0$ e $v_0\equiv 0$, por (H_1) temos que $H_u(u_0,0)\equiv 0$, então calculamos

$$0=I_{\lambda\mu}'(u_0,0)(u_0,0)=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0|^2-\lambda g(x)u_0^2)dx$$

desde que $0<\lambda<\lambda_1^+$, invocando a Proposição 1.1 segue que $u_0\equiv 0$, o que é uma contradição. Por outro lado, suponha $u_0\equiv 0$ e $v_0\not\equiv 0$, de (H_1) segue que $H_v(0,v_0)\equiv 0$ e então

$$0=I_{\lambda\mu}'(0,v_0)(0,v_0)=\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_0|^2-\mu h(x)v_0^2)dx$$

e mais uma vez usando a Proposição 1.1, visto que $0<\mu<\mu_1^+$ obtemos que $v_0\equiv 0$, gerando uma contradição. Sendo assim, $u_0\not\equiv 0$ e $v_0\not\equiv 0$. ■

A fim de estimarmos o nível crítico do Teorema do Passo da Montanha vamos introduzir as seguintes funções de corte.
Seja $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N,[0,1])$ tal que

$$\phi(x):=\begin{cases}1 & \text{se } |x|\leqslant\rho,\\ 0 & \text{se } |x|\geqslant 2\rho.\end{cases}$$

Definamos

$$u_{\varepsilon,a}(x) := \frac{C_N \varepsilon^{\frac{N-2}{2}} \phi(x-a)}{(\varepsilon^2 + |x-a|^2)^{\frac{N-2}{2}}}$$

onde $C_N = [N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}$, de [9](veja também Lema 1.46 em [43]) temos

$$\int_{B_{2\rho}(a)} |u_{\varepsilon,a}|^{2^*} dx \;=\; S^{N/2} + O(\varepsilon^N), \;\; N \geqslant 2, \tag{1.41}$$

e

$$\int_{B_{2\rho}(a)} |\nabla u_{\varepsilon,a}|^2 dx \;=\; S^{N/2} + O(\varepsilon^{N-2}), \;\; N \geqslant 2, \tag{1.42}$$

e para todo $\delta > 0$ segue

$$Q_\delta(u_{\varepsilon,a}) \leqslant \begin{cases} S - \delta d\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + O(\varepsilon^2) & \text{se } N = 4, \\ S - \delta d\varepsilon^2 + O(\varepsilon^{N-2}) & \text{se } N \geqslant 5 \end{cases} \tag{1.43}$$

onde

$$Q_\delta(u_{\varepsilon,a}) := \frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)} (|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2 - \delta |u_{\varepsilon,a}|^2) dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)} |u_{\varepsilon,a}|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}}.$$

Proposição 1.4 *Sejam $A, B > 0$ constantes dadas em (1.5), então para $\varepsilon > 0$ pequeno temos*

$$\max_{t \geqslant 0} I_{\lambda\mu}(tAu_{\varepsilon,a}, tBu_{\varepsilon,a}) < \frac{1}{N} |f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}.$$

Além disso, existe $t_\varepsilon > 0$ tal que

$$(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a}) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu} := \{(u,v) \in X \backslash \{(0,0)\} : I'_{\lambda\mu}(u,v)(u,v) = 0\}$$

onde $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ é a variedade de Nehari.

Demonstração: Seja $u_{\varepsilon,a}$ definida como antes, defina $\sigma_\varepsilon(t) := I_{\lambda\mu}(tAu_{\varepsilon,a}, tBu_{\varepsilon,a})$. Então,

$$\sigma_\varepsilon(t) = \frac{c_1}{2} t^2 - \frac{c_2}{2^*} t^{2^*}$$

onde
$$c_1 = A^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2 - \lambda g(x) u_{\varepsilon,a}^2) dx + B^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2 - \mu h(x) u_{\varepsilon,a}^2) dx$$
e
$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^N} H(A,B) f(x) u_{\varepsilon,a}^{2^*} dx.$$
Como $\sigma_\varepsilon(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \sigma_\varepsilon(t) = -\infty$ e σ_ε é contínua, temo que σ_ε admite um ponto de máximo. De fato, veja que

$$\sigma_\varepsilon'(t) = 0 \Longleftrightarrow t_\varepsilon = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{N-2}{4}}$$

ou seja, t_ε é um ponto crítico de σ_ε, sendo assim candidato a ponto de máximo. Como

$$\begin{aligned}
\sigma_\varepsilon''(t_\varepsilon) &= c_1 - (2^* - 1) c_2 t_\varepsilon^{2^*-2} \\
&= c_1 - (2^* - 1) c_2 \left[\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{N-2}{4}}\right]^{\frac{4}{N-2}} \\
&= c_1 - (2^* - 1) c_2 \cdot \frac{c_1}{c_2} \\
&= c_1 - (2^* - 1) c_1 \\
&= c_1 (2 - 2^*) < 0
\end{aligned}$$

uma vez que $2 < 2^*$ e como $(\lambda, \mu) \in (0, \lambda_1^+) \times (0, \mu_1^+)$ pela Proposição 1.1 tem-se que $c_1 > 0$. Seja $\sigma_\varepsilon(t_\varepsilon) = \max\limits_{t>0} \sigma_\varepsilon(t)$ então

$$\begin{aligned}
\sigma_\varepsilon(t_\varepsilon) &= \frac{c_1}{2}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{N-2}{2}} - \frac{c_2}{2^*}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{N}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) c_2 \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{c_1}{c_2^{2/2^*}}\right)^{\frac{N}{2}}
\end{aligned}$$

e fazendo $\delta = m_0(A^2+B^2)^{-1}$, de (P_3) teremos

$$\begin{aligned}\sigma_\varepsilon(t_\varepsilon) &= \frac{1}{N}\left[\frac{1}{H(A,B)^{2/2^*}}\frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}[(A^2+B^2)|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-(\lambda A^2 g(x)+\mu B^2 h(x))u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}\\ &\leqslant \frac{1}{N}\left[\frac{A^2+B^2}{H(A,B)^{2/2^*}}\frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}[|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}\end{aligned}$$

então

$$\sigma_\varepsilon(t_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{N}\left[\frac{A^2+B^2}{H(A,B)^{2/2^*}}\frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}[|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}\right]^{\frac{N}{2}}. \tag{1.44}$$

Levando em conta que

$$\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx = |f|_\infty\int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx - \int_{B_{2\rho}(a)}(|f|_\infty - f(x))u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx$$

e usando (P_2), tem-se

$$\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx = |f|_\infty\int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx + \alpha(\varepsilon) \tag{1.45}$$

onde $\alpha(\varepsilon)$ não é uma função que tem sido fixada, $\alpha(\varepsilon)$ é uma das duas seguintes expressões, a qual depende da dimensão considerada

$$\alpha(\varepsilon) := \begin{cases} O(\varepsilon^2) & \text{se } N=4,\\ o(\varepsilon^2) & \text{se } N\geqslant 5.\end{cases}$$

De (1.45) tem-se

$$\left(\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{-2/2^*} = \left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx + \alpha(\varepsilon)\right)^{-2/2^*}. \tag{1.46}$$

Definamos a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(t) = t^{-\frac{2}{2^*}}$. Observe que Φ é contínua e derivável no intervalo de extremos t_ε e s_ε onde $t_\varepsilon = |f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx$ e $s_\varepsilon = |f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx + \alpha(\varepsilon)$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio(Apêndice B, Teorema B.7) existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\Phi\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*} + \alpha(\varepsilon)\right) - \Phi\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}\right) = \Phi'\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*} + \theta\alpha(\varepsilon)\right)\alpha(\varepsilon)$$

assim

$$\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*} + \alpha(\varepsilon)\right)^{-2/2^*} - \left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}\right)^{-2/2^*} = -\frac{2}{2^*}\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*} + \theta\alpha(\varepsilon)\right)^{-\frac{2-2^*}{2^*}}\alpha(\varepsilon).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*} + \alpha(\varepsilon)\right)^{-2/2^*} &= \left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}\right)^{-2/2^*} - \frac{2}{2^*}\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*} + \theta\alpha(\varepsilon)\right)^{-\frac{2-2^*}{2^*}}\alpha(\varepsilon) \\ &= \left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}\right)^{\frac{2-N}{N}} + \frac{2-N}{N}\left(|f|_\infty \int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*} + \theta\alpha(\varepsilon)\right)^{2/N}\alpha(\varepsilon).\end{aligned}$$

Da última igualdade e (1.46) obtém-se

$$\left(\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{-2/2^*} = |f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}\left(\int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{-2/2^*} + \alpha(\varepsilon).$$

Portanto,

$$\frac{\int_{B_{2\rho}(a)}[|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2 - \delta u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\int_{B_{2\rho}(a)} f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{2/2^*}} = \left(|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}}\left(\int_{B_{2\rho}(a)} u_{\varepsilon,a}^{2^*}\right)^{-\frac{2}{2^*}} + \alpha(\varepsilon)\right)\left(\int_{B_{2\rho}(a)} |\nabla u_{\varepsilon,a}|^2 - \delta|u_{\varepsilon,a}|^2\right)$$

ou ainda,

$$\frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}[|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{2/2^*}}=|f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}Q_\delta(u_{\varepsilon,a})+\alpha(\varepsilon)\left[\int_{B_{2\rho}(a)}(|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2)dx\right]$$

e em vista de (1.42) e das imersões de Sobolev obtemos

$$\int_{B_{2\rho}(a)}(|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2)dx=O(1).$$

Então

$$\frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}[|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{2/2^*}}\leqslant|f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}Q_\delta(u_{\varepsilon,a})+\alpha(\varepsilon).$$

Assim por (1.43) para $d_1=d|f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}$ temos

$$\frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}[|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{2/2^*}}\leqslant\begin{cases}|f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}S-\delta d_1\varepsilon^2|\ln\varepsilon|+O(\varepsilon^2) & \text{se } N=4,\\ |f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}S-\delta d_1\varepsilon^2+O(\varepsilon^{N-2})+o(\varepsilon^2) & \text{se } N\geqslant 5\end{cases}$$

pela última desigualdade acima para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno segue

$$\frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}[|\nabla u_{\varepsilon,a}|^2-\delta u_{\varepsilon,a}^2]dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)}f(x)u_{\varepsilon,a}^{2^*}dx\right)^{2/2^*}}\leqslant|f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}S,\quad N\geqslant 4. \tag{1.47}$$

De (1.44) e (1.47), temos

$$\sigma_\varepsilon(t_\varepsilon)=\max_{t>0}I_{\lambda\mu}(tAu_{\varepsilon,a},tBu_{\varepsilon,a})<\frac{1}{N}\left(|f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}\frac{A^2+B^2}{H(A,B)^{2/2^*}}S\right)^{N/2}$$

e por (1.5), obtemos

$$\max_{t>0}I_{\lambda\mu}(tAu_{\varepsilon,a},tBu_{\varepsilon,a})<\frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{N}}S_H^{\frac{N}{2}}.$$

Observe que $\sigma_\varepsilon'(t_\varepsilon)=0$, então $(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a})\in\mathcal{N}_{\lambda\mu}$. Com efeito,

$$I'_{\lambda\mu}(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a})(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a}) = c_1 t_\varepsilon^2 - c_2 t_\varepsilon^{2^*} = 0$$

onde substituímos $t_\varepsilon = (c_1/c_2)^{(N-2)/4}$ na última igualdade. ■

1.4 Prova do Teorema 1.1

Demonstração: Pelo Teorema do Passo da Montanha(veja [43]) existe uma sequência (u_n, v_n) tal que $I_{\lambda\mu}(u_n,v_n)\to c$ e $I'_{\lambda\mu}(u_n,v_n)\to 0$ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda\mu}(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma := \{\gamma\in\mathcal{C}([0,1],H) : \gamma(0)=0, \gamma(1)=t_0(Au_\varepsilon, Bu_\varepsilon)\}$$

para algum t_0 de modo que $I_{\lambda\mu}(t_0Au_\varepsilon, t_0Bu_\varepsilon)<0$. Pela Proposição 1.4, segue para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno que

$$c\leqslant \max_{t>0}(tAu_\varepsilon, tBu_\varepsilon) < \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}.$$

Desse modo, usando a Proposição 1.3 obtemos $(u_0,v_0)\in X$ com $u_0\not\equiv 0$ e $v_0\not\equiv 0$ tal que $I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0)=0$. Da condição (H_0), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0^-|^2 - \lambda g(x)|u_0^-|^2)dx = I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0)(u_0,0)=0 \tag{1.48}$$

e desde que $\lambda\in(0,\lambda_1^+)$, da Proposição 1.1 temos $u_0^-\equiv 0$. Do mesmo modo, segue que $v_0^-\equiv 0$ e assim $u_0,v_0\geqslant 0$ em $\mathbb{R}^N$. Como

$$I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0)(0,\varphi) = I'_{\lambda\mu}(u_0,v_0)(\phi,0)=0, \quad \forall\phi,\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

então u_0 e v_0 são soluções fracas de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$. Por teoria padrão de regularidade elíptica, a solução fraca $(u_0,v_0)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)\times\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$, esta regularidade nos permite escrever u_0 como uma solução fraca do problema

$$\mathrm{div}A(x,u,\nabla u) = \mathcal{B}(x,u,\nabla u) = d(x,\Omega)u,\ \ x\in\Omega$$

onde $A(x,u,\nabla u) = \nabla u$, Ω é um dominio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ e $\mathcal{B}$ é o operador dado em Serrin [36], este problema satisfaz todas as condições do Teorema $B.16$ (veja também [36]), e então obtemos $C > 0$ tal que

$$\max_{x \in B_R} u_0(x) \leqslant C \left(\min_{x \in B_R} u_0(x) + k \right)$$

com $k = 0$, onde $B_R = B_R(x_0)$ é qualquer bola aberta tal que $B_{3R} = B_{3R}(x_0) \subset \Omega$, logo $u_0 > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Analogamente, tem-se $v_0 > 0$ em $\mathbb{R}^N$. ■

Capítulo 2

Multiplicidade de soluções positivas para um sistema elíptico crítico com peso em $\mathbb{R}^N$

Este capítulo é dedicado a prova do Teorema 2.1, consideraremos o ínfimo de $I_{\lambda\mu}$ sobre certos subconjuntos disjuntos da variedade de Nehari. Veremos que o nível crítico c^* na Proposição 1.3 é um limite superior para este ínfimo e sob algumas condições obtemos sequências minimizantes, as quais satisfazem a condição de Palais-Smale e usando a Proposição 1.3 o mínimo é atingido nos pontos críticos de $I_{\lambda\mu}$.

2.1 Introdução

Neste capítulo, nosso interesse é estudar multiplicidade soluções positivas para o sistema elíptico

$$(\mathcal{P}_{\lambda\mu}) \begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_u(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ -\Delta v = \mu h(x)v + \dfrac{1}{2^*}f(x)H_v(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \\ u, v > 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $N \geqslant 4$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, H_u e H_v são as derivadas parciais da função homogênea $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2_+, \mathbb{R})$, onde $\mathbb{R}^2_+ = [0,\infty) \times [0,\infty)$, $f^+ \not\equiv 0$, $g^+ \not\equiv 0$, $h^+ \not\equiv 0$ e $\lambda, \mu > 0$. Aqui

ainda estamos interessados no caso em que H tem crescimento crítico. As hipóteses sobre H são as seguintes:
(H_0) H é 2^*-homogênea, que é

$$H(\theta s, \theta t) = \theta^{2^*} H(s,t) \text{ para cada } \theta > 0 \text{ e } \forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2_+;$$

(H_1) $H_s(0,1) = 0, H_t(1,0) = 0$;
(H_2) $H(s,t) > 0$ para cada $s, t > 0$;
(H_3) $H_s(s,t) \geqslant 0, H_t(s,t) \geqslant 0$ para cada $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$;
(H_4) a função $1-$homogênea $\Psi(s,t) = H(s^{1/2^*}, t^{1/2^*})$ é côncava em $\mathbb{R}^2_+$.

Os potenciais f, g e h satisfazem
(P_0) $f, g, h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $f^+ \not\equiv 0, g^+ \not\equiv 0, h^+ \not\equiv 0$ e $g^+, h^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$;
(P_1) Para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $f(x_0) = |f|_\infty$ e existe $r > 0$ tal que

$$\alpha_0 := \inf\{f(x) : x \in B_r(x_0)\} > 0;$$

(P_2) Assuma que $f(x_0) - f(x) = o(|x - x_0|^2)$;
(P_3) $\inf\limits_{x \in B_r(x_0)} \min\{\lambda A g(x) + \mu B h(x)\} = m_0 > 0.$
Nosso principal resultado nesse capítulo é

Teorema 2.1 *Suponha que* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, $0 < \lambda < \lambda_1^+$ *e* $0 < \mu < \mu_1^+$, H *satisfaz* $(H_0)-(H_4)$ *e* $(P_0) - (P_3)$ *ocorrem, suponha que existem pontos* $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}^N$, *tal que*
(f_1) $f(a_j) = |f|_\infty,\ 1 \leqslant j \leqslant k$;
(f_2) a_j *é ponto de máximo local estrito para* $1 \leqslant j \leqslant k$;
(f_3)

$$f(a_j) - f(x) = \begin{cases} o(|x - a_j|^2) \text{ se } N \geqslant 5, \\ O(|x - a_j|^2) \text{ se } N = 4. \end{cases}$$

Então existem $\lambda^* \in (0, \lambda_1^+)$ *e* $\mu^* \in (0, \mu_1^+)$ *tal que o problema* $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$ *tem* k *pares* (u,v) *de soluções positivas para todo* $0 < \lambda < \lambda^*$ *e* $0 < \mu < \mu^*$.

2.2 Minimização sobre subconjuntos da variedade de Nehari

Vamos inciar considerando a função baricentro $\mathcal{B} : X \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$\mathcal{B}(u,v) := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} xH(u,v)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} H(u,v)dx}.$$

Das hipóteses (f_1) e (f_2), podemos escolher $r > 0$, que satisfaz $\overline{B_r(a_i)} \cap \overline{B_r(a_j)} = \emptyset$ e $0 < f(x) < |f|_\infty$ para todo $x \in B_r(a_j) \backslash \{a_j\}$ com $1 \leqslant i, j \leqslant k$.
Agora, para $\lambda, \mu > 0$ definiremos a variedade de Nehari e provaremos alguns resultados a partir do funcional $I_{\lambda\mu}$ restrito a subconjuntos de $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$.

Para obtermos resultado de multiplicidade neste caso, definimos a variedade de Nehari

$$\mathcal{N}_{\lambda\mu} := \{(u,v) \in X : (u,v) \not\equiv (0,0), \langle I'_{\lambda\mu}(u,v), (u,v)\rangle = 0\}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o par de dualidade usual entre X e X^*, em que X^* é o espaço dual ao espaço X correspondente.

Apesar de na literatura $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ ser chamada de variedade, em alguns casos este conjunto pode não ser uma variedade de fato, e pode ser consultado em [28]. Aqui $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ é de fato uma variedade[1], e mostraremos isso, provando que $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ é a imagem inversa do zero por uma aplicação $\varphi \in \mathcal{C}^1$ e que zero é um valor regular para φ.

Lembre-se que 0 é um valor regular para uma aplicação diferenciável $\varphi : U \subset X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $u \in U$ tal que $\varphi(u) = 0$ tem-se que $\varphi'(u)$ é uma aplicação linear sobrejetora, ou ainda que, $\varphi'(u) \neq 0$. Quando tal condição é satisfeita, obtemos que $\varphi^{-1}(0)$ é uma variedade em X. Além disso, se $\varphi \in \mathcal{C}^k$ então a variedade $\varphi^{-1}(0)$ é de classe $\mathcal{C}^k$.
Definamos também os seguintes subconjuntos da variedade de Nehari, a saber

$$\mathcal{O}^j_{\lambda\mu} := \{(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu} : \mathcal{B}(u,v) \in B_r(a_j)\}$$

e

$$U^j_{\lambda\mu} := \{(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu} : \mathcal{B}(u,v) \in \partial B_r(a_j)\}.$$

[1] Uma variedade diferenciável, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado $(M, \mathcal{A})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathcal{A}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^k sobre M.

A próxima proposição nos mostra que a variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ é não vazia.

Proposição 2.1 *A variedade de Nehari $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ é não vazia e é uma subvariedade de X.*

Demonstração: Definamos a aplicação $\varphi : X\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(u,v) = \langle I'_{\lambda\mu}(u,v),(u,v)\rangle.$$

Assim,

$$\varphi(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N}(\lambda g(x)u^2+\mu h(x)v^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx.$$

Temos que φ é de classe $\mathcal{C}^1$ e além disso

$$\varphi'(u,v)(z,w) = 2\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla z+\nabla v\nabla w)-2\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda g(x)uz+\mu h(x)vw)-\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_u(u,v)z+H_v(u,v)w].$$

Seja $(z,w)\in X\backslash\{(0,0)\}$, e considere a função $\chi(t)=\varphi(tz,tw), t\in\mathbb{R}$ e $t>0$. Logo,

$$\chi(t) = t^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla z|^2+\nabla w|^2-\lambda g(x)z^2-\mu h(x)w^2)dx\right) - t^{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(z,w)dx. \quad (2.2)$$

Afirmação: $\mathcal{N}_{\lambda\mu}\neq\emptyset$.

Com efeito, temos de (2.2) que

$$\lim_{t\to+\infty}\chi(t) = -\infty$$

e colocando t^2 em evidência em (2.2) temos

$$\chi(t) = t^2\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla z|^2+\nabla w|^2-\lambda g(x)z^2-\mu h(x)w^2)dx - t^{2^*-2}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(z,w)dx\right) \quad (2.3)$$

de onde concluímos que

$$\lim_{t\to 0^+}\chi(t) = 0.$$

Assim, para algum $\bar{t}>0$ a função $\chi(\bar{t})$ é igual a zero. Então,

$$\bar{t} = \left(\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla z|^2+\nabla w|^2-\lambda g(x)z^2-\mu h(x)w^2)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(z,w)dx}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Desse modo, $(\bar{t}z, \bar{t}w) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu}$. Com isso mostramos que $\mathcal{N}_{\lambda\mu} \neq \emptyset$, e concluímos nossa afirmação.

Mostraremos agora que zero é um valor regular de φ, o que é equivalente a provar que φ não possui ponto crítico em $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$. Note que

$$\varphi'(u,v)(u,v) = 2\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \lambda g(x)u^2 - \mu h(x)v^2)dx - 2^*\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx. \quad (2.4)$$

Para todo $(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \lambda g(x)u^2 + \mu h(x)v^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx = 0$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \lambda g(x)u^2 + \mu h(x)v^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx. \quad (2.5)$$

Usando (2.5) em (2.4), obtemos

$$\varphi'(u,v)(u,v) = (2-2^*)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \lambda g(x)u^2 + \mu h(x)v^2)dx < 0. \quad (2.6)$$

Daí, obtemos que $\varphi'(u,v)(u,v) \neq 0$ para toda $(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu}$. Considere $M := X\backslash\{(0,0)\}$. De (2.6) vemos que $(0,0)$ é o único ponto crítico de $\varphi^{-1}(0,0)$ e $(0,0) \notin \mathcal{N}_{\lambda\mu}$. Assim, $(0,0)$ é valor regular de φ restrito a M. Pelo Teorema $B.15$, segue que $\varphi^{-1}(0,0)$ é uma subvariedade de M. Portanto, $\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ é uma subvariedade de classe $\mathcal{C}^1$ de X.
No Lema 2.1 a seguir, estimamos o ínfimo de $I_{\lambda\mu}$ sobre o subconjunto $\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}$ e temos como limitante superior o número $\frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}$.

Lema 2.1 *Para todos $\lambda, \mu > 0$ tem-se*

$$m^j_{\lambda\mu} := \inf_{(u,v)\in\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}} I_{\lambda\mu}(u,v) < \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}. \quad (2.7)$$

Demonstração: Pela Proposição 1.4 com $a = a_j$ e $2\rho < r$, temos

$$(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a}) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu} \ \text{ e } \ I_{\lambda\mu}(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a}) < \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}.$$

Desde que

$$|\mathcal{B}(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a}) - a| = \left| \frac{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)} (x-a)H(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a})dx}{\displaystyle\int_{B_{2\rho}(a)} H(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a})dx} \right| \leqslant 2\rho < r,$$

assim $(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a}) \in \mathcal{O}^j_{\lambda\mu}$ e então

$$m^j_{\lambda\mu} \leqslant I_{\lambda\mu}(At_\varepsilon u_{\varepsilon,a}, Bt_\varepsilon u_{\varepsilon,a}) < \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}.$$

■

O próximo lema é uma ferramenta crucial na prova do Lema 2.3, é uma versão de um resultado conhecido devido a Lions [31].

Lema 2.2 *Suponha que as sequências* $(u_n), (v_n) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *satisfazem*

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(u_n, v_n)dx = 1 \ \ e \ \ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2)dx \longrightarrow S_H \tag{2.8}$$

então existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)H(u_n, v_n)dx = \psi(x_0) \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Pelo Teorema de Banach Alaoglu(Apêndice B, Teorema B.9), existem duas medidas $\sigma, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$H(u_n, v_n) \rightharpoonup \sigma \ \text{ em } \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 \rightharpoonup \nu \ \text{ em } \ \mathcal{M}(\mathbb{R}^N),$$

e por (2.8) temos $\|\sigma\| = 1$ e $\|\nu\| = S_H$, assim $\|\nu\|^{2/2^*} = S_H^{-1}\|\nu\|$, do Lema 1.2 e da Observação 3.2 em [26] concluímos que σ é a medida delta de Dirac, desse modo existe x_0 tal que $\sigma = \delta_{x_0}$.
■

No que segue, definimos

$$\Phi_{\lambda\mu}(u, v) := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - \lambda g(x)u^2 - \mu h(x)v^2)dx$$

e $\Phi_0(u,v)$ quando $\lambda=\mu=0$, também definiremos

$$J_f(u,v) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx \quad \text{e} \quad J(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} H(u,v)dx.$$

O lema a seguir, serve para mostrar que o ínfimo de $I_{\lambda\mu}$ sobre $\overline{\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}}$ é o mesmo sobre $\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}$ quando λ e μ estão suficientemente próximos de 0. Este é o motivo pelo qual não conseguimos estender o resultado para todo parâmetro entre 0 e λ_1^+.

Lema 2.3 *Suponha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e $(f_1)-(f_3)$ ocorre, então existe $\varepsilon > 0$ e $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\overline{m}^j_{\lambda\mu} := \inf_{(u,v)\in U^j_{\lambda\mu}} I_{\lambda\mu}(u,v) > \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}} + \varepsilon \tag{2.9}$$

para todo $1 \leqslant j \leqslant k$, $0 < \lambda < \lambda_\varepsilon$ e $0 < \mu < \mu_\varepsilon$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que (2.9) não ocorre. Assim, para algum $j \in [1,k]$, existem sequências $\lambda_n \to 0$ e $\mu_n \to 0$ tal que

$$c := \lim_{n\to+\infty} \overline{m}^j_{\lambda_n\mu_n} < \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}.$$

Segue da definição de ínfimo que existe $(u_n,v_n) \in U^j_{\lambda_n\mu_n}$ satisfazendo

$$I_{\lambda_n\mu_n}(u_n,v_n) \to c \;\; \text{e} \;\; \Phi_{\lambda_n\mu_n}(u_n,v_n) = J_f(u_n,v_n), \tag{2.10}$$

e como na prova da Proposição 1.4, concluímos que (u_n,v_n) é limitada. Tomando

$$\alpha_n = \min\left\{\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_1^+}\right), \left(1-\frac{\mu_n}{\mu_1^+}\right)\right\}$$

temos que

$$\alpha_n\Phi_0(u_n,v_n) \leqslant \Phi_{\lambda_n\mu_n}(u_n,v_n) = J_f(u_n,v_n)$$

pois

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2dx - \lambda_n\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u_n^2dx &\geqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2dx - \frac{\lambda_n}{\lambda_1^+}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2dx \\ &= \left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_1^+}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2dx \end{aligned} \tag{2.11}$$

e analogamente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx - \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} h(x) v_n^2 dx \geqslant \left(1 - \frac{\mu_n}{\mu_1^+}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) segue

$$\begin{aligned}
\alpha_n \Phi_0(u_n, v_n) &= \alpha_n \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \alpha_n \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \\
&\leqslant \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1^+}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \left(1 - \frac{\mu_n}{\mu_1^+}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - \lambda g(x) u_n^2 - \mu h(x) v_n^2) dx \\
&= \Phi_{\lambda_n \mu_n}(u_n, v_n).
\end{aligned}$$

Usando a definição de S_H, vemos que

$$\begin{aligned}
J_f(u_n, v_n) &\leqslant |f|_\infty J(u_n, v_n) \\
&\leqslant |f|_\infty S_H^{-2^*/2} [\Phi_0(u_n, v_n)]^{2^*/2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha_n \Phi_0(u_n, v_n) \leqslant \Phi_{\lambda_n \mu_n}(u_n, v_n) = J_f(u_n, v_n) \leqslant |f|_\infty S_H^{-2^*/2} [\Phi_0(u_n, v_n)]^{2^*/2}.$$

Desde que $\alpha_n \to 1$ da última desigualdade, podemos supor que $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \Phi_0(u_n, v_n) > 0$, assim existe $\gamma > 0$ tal que

$$|f|_\infty J(u_n, v_n) \geqslant J_f(u_n, v_n) = \Phi_{\lambda_n \mu_n}(u_n, v_n) \geqslant \gamma. \tag{2.13}$$

Agora, seja

$$t_n := \left[\frac{\Phi_{\lambda_n \mu_n}(u_n, v_n)}{|f|_\infty J(u_n, v_n)}\right]^{\frac{N-2}{4}}.$$

Note que

$$\Phi_{\lambda_n \mu_n}(u_n, v_n) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2 - \lambda_n g(x) u_n^2 - \mu_n h(x) v_n^2) dx$$

e uma vez que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \leqslant \|u_n\|_g^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \leqslant \|v_n\|_h^2$$

temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{\lambda_n\mu_n}(u_n, v_n) &\leqslant \|u_n\|_g^2 + \|v_n\|_h^2 - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)u_n^2 dx + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} g^-(x)u_n^2 dx \\
&- \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)v_n^2 dx + \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} h^-(x)v_n^2 dx \\
&\leqslant \|u_n\|_g^2 + \|v_n\|_h^2 + \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} g^-(x)u_n^2 dx + \mu_n \int_{\mathbb{R}^N} h^-(x)v_n^2 dx.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^-(x)u_n^2 dx \leqslant \|u_n\|_g^2 \leqslant \|(u_n, v_n)\|^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^-(x)v_n^2 dx \leqslant \|v_n\|_h^2 \leqslant \|(u_n, v_n)\|^2$$

segue

$$\begin{aligned}
\Phi_{\lambda_n\mu_n}(u_n, v_n) &\leqslant \|(u_n, v_n)\|^2 + \lambda_n\|(u_n, v_n)\|^2 + \mu_n\|(u_n, v_n)\|^2 \\
&= (1 + \lambda_n + \mu_n)\|(u_n, v_n)\|^2
\end{aligned}$$

isto é,

$$0 < \gamma \leqslant \Phi_{\lambda_n\mu_n}(u_n, v_n) \leqslant (1 + \lambda_n + \mu_n)\|(u_n, v_n)\|^2$$

e (u_n, v_n) é limitada. De (2.13) e da última desigualdade acima, obtemos

$$t_n \leqslant \left[\frac{(1 + \lambda_n + \mu_n)\|(u_n, v_n)\|^2}{\gamma}\right]^{\frac{N-2}{4}} \leqslant \left(\frac{c_1}{\gamma}\right)^{(N-2)/4}$$

ou seja, a sequência t_n é limitada, e a menos de subsequência $t_n \to t_0 > 0$, ainda de (2.13) segue $t_0 \leqslant 1$. Provaremos que $t_0 = 1$, a fim de fazer isto, vamos definir $(z_n, w_n) = (t_n u_n, t_n v_n)$, e fazendo alguns cálculos tem-se

$$\Phi_0(z_n, w_n) = |f|_\infty J(z_n, w_n). \tag{2.14}$$

Usando a definição de S_H temos

$$S_H \leqslant \frac{\Phi_0(z_n, w_n)}{[J(z_n, w_n)]^{2/2^*}},$$

então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}} &\leqslant \frac{1}{N}\Phi_0(z_n,w_n)\\
&= \frac{t_n^2}{N}\Phi_0(u_n,v_n)\\
&= \frac{t_n^2}{N}\Phi_{\lambda_n\mu_n}(u_n,v_n)+o_n(1)\\
&= t_n^2 I_{\lambda_n\mu_n}(u_n,v_n)+o_n(1)\\
&= t_0 c+o_n(1)\\
&\leqslant t_0\left(\frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}\right)+o_n(1).
\end{aligned}$$

Assim, da última desigualdade temos $t_0 \geqslant 1$ e consequentemente $t_0 = 1$. Além disso, outras duas consequências da última desigualdade são

$$c = \frac{1}{N}|f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\Phi_0(z_n,w_n) = |f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}. \tag{2.15}$$

Tomando $(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n) = [J(z_n,w_n)]^{-1/2^*}(z_n,w_n)$, desde que $\Phi_0(z_n,w_n) = |f|_\infty J(z_n,w_n)$ e de (2.15), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\Phi_0(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n) &= \lim_{n\to+\infty}[J(z_n,w_n)]^{-2/2^*}\Phi_0(z_n,w_n)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[|f|_\infty^{-2/2^*}\Phi_0(z_n,w_n)^{2/N}\right].
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\Phi_0(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n) &= |f|_\infty^{-2/2^*}\left[\lim_{n\to+\infty}\Phi_0(z_n,w_n)\right]^{\frac{2}{N}}\\
&= S_H
\end{aligned} \tag{2.16}$$

e

$$\begin{aligned}
J(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} H\left([J(z_n,w_n)]^{-1/2^*}z_n,[J(z_n,w_n)]^{-1/2^*}w_n\right)dx\\
&= [J(z_n,w_n)]^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} H(z_n,w_n)dx\\
&= 1.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Utilizando o Lema 2.2, (2.16) e (2.17) fornecem x_0 tal que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\Psi(x)H(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n)dx=\Psi(x_0),\ \ \forall\Psi\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}) \tag{2.18}$$

e desde que $\mathcal{B}(u_n,v_n)\in\partial B_r(a_j)$ passando a uma subsequência, se necessário, existe $\widehat{x}_0$ tal que

$$\mathcal{B}(u_n,v_n)=\int_{\mathbb{R}^N}xH(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n)dx=\widehat{x}_0+o_n(1).$$

Por (2.18), concluímos que, existe R_0 satisfazendo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|\leqslant R}xH(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n)dx=x_0,\quad\forall R\geqslant R_0$$

e fazendo $R\to+\infty$ juntamente com um argumento diagonal(como na prova do Lema 3.2 no Capítulo 3) segue que $\widehat{x}_0=x_0$.

Desde que $(u_n,v_n)\in U^j_{\lambda_n\mu_n}$ então $\mathcal{B}(u_n,v_n)\in\partial B_r(a_j)$, e de (f_1) e (f_2) teremos $f(x_0)<|f|_\infty$. Uma vez que $t_n\to 1$ segue

$$\begin{aligned} c+o_n(1) &= I_{\lambda_n\mu_n}(u_n,v_n)\\ &= \frac{1}{N}J_f(u_n,v_n)\\ &= \frac{t_n^{-2^*}}{N}J_f(z_n,w_n)\\ &= \frac{1}{N}J_f(z_n,w_n)+o_n(1)\end{aligned}$$

e assim

$$c=\frac{1}{N}J_f(z_n,w_n)+o_n(1). \tag{2.19}$$

De (2.18) temos para algum R_0 que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{|x|\leqslant R}f(x)H(\widehat{z}_n,\widehat{w}_n)dx=f(x_0),\ \ \forall R\geqslant R_0$$

e como antes, fazendo $R\to+\infty$ e mais uma vez usando argunto diagonal tem-se

$$\lim_{n\to+\infty}J_f(z_n,w_n)=f(x_0)\lim_{n\to+\infty}J(z_n,w_n). \tag{2.20}$$

Por (2.14), (2.15), (2.19) e (2.20) implica em

$$c = \frac{f(x_0)}{|f|_\infty} \frac{1}{N} |f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}}$$

e usando que $f(x_0) < |f|_\infty$, obtemos

$$c < \frac{1}{N} |f|_\infty^{\frac{2-N}{2}} S_H^{\frac{N}{2}},$$

o que contradiz (2.15) e assim o lema está provado. ■

O lema a seguir nos ajudará a estimar a norma da derivada de sequências minimizantes relacionadas com $m^j_{\lambda\mu}$, a prova é baseada no Lema 2.4 de [40] com devidas modificações. Vale observar que o argumento só é possível porque a_j é um ponto de máximo local estrito.

Lema 2.4 *Suponha que*
(i) $(u, v) \in \mathcal{O}^j_{\lambda\mu}$;
(ii) $0 < a \leqslant \|(u, v)\| \leqslant b$, *onde* $a = a(\lambda, \mu)$ *e* $b = b(\lambda, \mu)$;
(iii) Para todo $(z, w) \in \overline{O^j_{\lambda\mu}}$, *temos*

$$I_{\lambda\mu}(z, w) \geqslant I_{\lambda\mu}(u, v) - \varepsilon \|(z - u, w - v)\|.$$

Então existe uma constante positiva $C = C(\lambda, \mu)$ *tal que*

$$\|I'_{\lambda\mu}(u, v)\| \leqslant C\varepsilon. \tag{2.21}$$

Demonstração: Vamos escrever $I = I_{\lambda\mu}$, $\Phi = \Phi_{\lambda\mu}$, $J = J_f$ e tomando $(u_0, v_0) = \dfrac{I'(u, v)}{\|I'(u, v)\|}$, definimos $t(\delta)$ de modo que

$$t(\delta)(u - \delta u_0, v - \delta v_0) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu} \tag{2.22}$$

e podemos explicitar $t(\delta)$ por

$$t^{2^*-2}(\delta) := \frac{\Phi(u - \delta u_0, v - \delta v_0)}{J(u - \delta u_0, v - \delta v_0)}.$$

Obtem-se

$$t'(0) = -\frac{\Phi'(u, v)(u_0, v_0) + J'(u, v)(u_0, v_0)}{(2^* - 2)J(u, v)}. \tag{2.23}$$

Afim de estimar $\|I'_{\lambda\mu}\|$ primeiro precisamos estimar $|t'(0)|$, começando com $|\Phi'(u,v)(u_0,v_0)|$ observamos que

$$\begin{aligned}
|\Phi'(u,v)(u_0,v_0)| &\leqslant 2\max\{1,\lambda,\mu\}(\|(u,v)\|^2+\|(u_0,v_0)\|^2)\\
&\leqslant 2\max\{1,\lambda,\mu\}(b^2+1)
\end{aligned}$$

então,

$$|\Phi'(u,v)(u_0,v_0)| \leqslant 2\max\{1,\lambda,\mu\}(b^2+1). \tag{2.24}$$

Da Observação 1.2, existe constante $c_1 = c_1(H(\cdot,\cdot))$ tal que

$$\begin{aligned}
|J'(u,v)(u_0,v_0)| &= |u_0 J_u(u,v) + v_0 J_v(u,v)|\\
&\leqslant c_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|(|u|^{2^*-1}+|v|^{2^*-1}) + |v_0|(|u|^{2^*-1}+|v|^{2^*-1})\right)\\
&\leqslant c_1[2(|u_0|_{2^*}^{2^*}+|v_0|_{2^*}^{2^*}+|u|_{2^*}^{2^*}+|v|_{2^*}^{2^*})]\\
&\leqslant 4c_1 S^{-2^*/2}(\|(u,v)\|^{2^*}+\|(u_0,v_0)\|^{2^*})\\
&\leqslant 4c_1 S^{-\frac{2^*}{2}}(b^{2^*}+1)
\end{aligned}$$

assim

$$|J'(u,v)(u_0,v_0)| \leqslant 4c_1 S^{-\frac{2^*}{2}}(b^{2^*}+1). \tag{2.25}$$

Por outro lado, desde que $(u,v)\in\mathcal{N}_{\lambda\mu}$ temos $J(u,v)=\Phi(u,v)$, de (1.15) existe $c_{\lambda\mu}>0$ tal que

$$\Phi(u,v) \geqslant c_{\lambda\mu}\|(u,v)\|^2$$

então,

$$J(u,v) \geqslant a^2 c_{\lambda\mu} > 0, \tag{2.26}$$

e finalmente, podemos estimar $|t'(0)|$, usando (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26), temos

$$|t'(0)| \leqslant \frac{2\max\{1,\lambda,\mu\}(b^2+1)+4c_1 S^{-\frac{2^*}{2}}(b^{2^*}+1)}{(2^*-2)a^2 c_{\lambda\mu}}. \tag{2.27}$$

Agora, usaremos (2.27) para estimar $\|I'_{\lambda\mu}(u,v)\|$. A fim de fazer isso, definimos

$$(z_\delta, w_\delta) := t(\delta)(u - \delta u_0, v - \delta v_0) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu}$$

como $\lim\limits_{\delta \to 0^+} t(\delta) = 1$ então $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \mathcal{B}(z_\delta, w_\delta) = \mathcal{B}(u,v) \in B_r(a^j)$, portanto, para δ pequeno temos $(z_\delta, w_\delta) \in \mathcal{O}^j_{\lambda\mu}$, assim de (iii) e pelo Teorema do Valor Médio segue

$$\begin{aligned} \varepsilon\|(z_\delta - u, w_\delta - v)\| &\geqslant I(u,v) - I(z_\delta, w_\delta) \\ &= (1 - t(\delta))I'(z_\delta, w_\delta)(u,v) + \delta t(\delta) I'(z_\delta, w_\delta)(u_0, v_0) + o(\delta). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Além disso,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\|(z_\delta, w_\delta) - (u,v)\|}{\delta} = \|t'(0)(u,v) - (u_0, v_0)\|. \tag{2.29}$$

Dividindo (2.28) por δ, usando (2.29) e passando o limite de $\delta \to 0$ obteremos

$$\begin{aligned} \varepsilon(|t'(0)|\|(u,v)\| + 1) &\geqslant \varepsilon\|t'(0)(u,v) - (u_0, v_0)\| \\ &\geqslant -t'(0)I'(u,v)(u,v) + \|I'(u,v)\| \\ &= \|I'(u,v)\| \end{aligned}$$

então

$$\varepsilon(|t'(0)|\|(u,v)\| + 1) \geqslant \|I'(u,v)\|.$$

Por (2.27) basta considerarmos

$$C(\lambda, \mu) = \frac{b\left[2\max\{1, \lambda, \mu\}(b^2 + 1) + 4c_1 S^{-\frac{2^*}{2}}(b^{2^*} + 1)\right]}{(2^* - 2)ac_{\lambda\mu}} + 1$$

isso prova o lema. ■

A proposição seguinte nos assegura que, sob certas condições, as sequências minimizantes para $m_{\lambda\mu}$ podem ser trocado por sequência de Palais-Smale.

Proposição 2.2 *Suponha que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, H satisfaz $(H_0)-(H_4)$, $(P_0)-(P_3)$ e $(f_1)-(f_3)$ ocorrem, então existem $\lambda^*, \mu^* > 0$, tal que para todo $0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 < \mu < \mu^*$ existe $(u^j_n, v^j_n) \in \mathcal{O}^j_{\lambda\mu}$, $1 \leqslant j \leqslant k$ tal que $u^j_n, v^j_n \geqslant 0$ e*

$$I_{\lambda\mu}(u^j_n, v^j_n) \to m^j_{\lambda\mu}, \;\; I'_{\lambda\mu}(u^j_n, v^j_n) \to 0.$$

Demonstração: Não é difícil ver que

$$\overline{\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}} = \mathcal{O}^j_{\lambda\mu} \cup U^j_{\lambda\mu} \quad \text{e} \quad \partial\mathcal{O}^j_{\lambda\mu} = U^j_{\lambda\mu}. \tag{2.30}$$

Agora, vamos verificar que para $\lambda_\varepsilon > 0$ e $\mu_\varepsilon > 0$ obtidos no Lema 2.3, temos

$$m^j_{\lambda\mu} = \inf_{\overline{\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}}} I_{\lambda\mu}(u,v) < \overline{m}^j_{\lambda\mu} = \inf_{\partial\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}} I_{\lambda\mu}(u,v), \ \text{ se } 0 < \lambda < \lambda^*, \ 0 < \mu < \mu^*. \tag{2.31}$$

Com efeito, sob as condições do Lema 2.3, por (2.7) e (2.9) segue $m^j_{\lambda\mu} < \overline{m}_{\lambda\mu}$. Usando a definição de $m^j_{\lambda\mu}$ e (2.30) teremos (2.31).
Seja $(z^j_n, w^j_n) \in \overline{\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}}$ uma sequência minimizante, ou seja, $I_{\lambda\mu}(z^j_n, w^j_n) \to m^j_{\lambda\mu}$, por simplicidade vamos escrever $(z_n, w_n) = (z^j_n, w^j_n)$, $m_{\lambda\mu} = m^j_{\lambda\mu}$ e $I(z_n, w_n) = I_{\lambda,\mu}(z^j_n, w^j_n)$.
Aplicando o Principio Variacional de Ekeland em [22], podemos construir uma nova sequência $(u_n, v_n) \in \overline{\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}}$ tal que
(a) $m_{\lambda\mu} \leqslant I(u_n, v_n) \leqslant I(z_n, w_n) \leqslant m_{\lambda\mu} + \dfrac{1}{n}$;
(b) $\|(u_n - z_n, v_n - w_n)\| \leqslant \dfrac{1}{n}$;
(c) Para todo $(z, w) \in \overline{\mathcal{O}^j_{\lambda\mu}}$ temos

$$I(z,w) \geqslant I(u_n, w_n) - \frac{1}{n}\|(z - u_n, w - v_n)\|.$$

Observe que (u_n, v_n) é uma sequência minimizante para $m_{\lambda\mu}$, e em virtude de (2.31) podemos supor que

$$(u_n, v_n) \in \mathcal{O}^j_{\lambda\mu}. \tag{2.32}$$

Afirmamos que existem $a_{\lambda\mu} > 0$ e $b_{\lambda\mu} > 0$ tal que

$$0 < a_{\lambda\mu} \leqslant \|(u_n, v_n)\| \leqslant b_{\lambda\mu}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Perceba que o item (c), (2.32) e (2.33), nos fornecem todas as condições do Lema 2.4, desse modo existe constante positiva $C_{\lambda\mu}$ tal que

$$\|I'(u_n, v_n)\| \leqslant \frac{C_{\lambda\mu}}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.34}$$

e assim, por (a) e (2.34) segue que $I(u_n, v_n) \to m_{\lambda\mu}$ e $I'(u_n, v_n) \to 0$.

Justificaremos agora a afirmação feita antes, invocando o Lema 1.2 obtemos constante positiva $c_{\lambda\mu} > 0$ de modo que

$$c_{\lambda\mu}\|(u_n, v_n)\|^2 \leqslant \Phi(u_n, v_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Uma vez que $(u_n, v_n) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu}$ então

$$\begin{aligned} c_{\lambda\mu}\|(u_n, v_n)\|^2 &\leqslant \Phi(u_n, v_n) = J(u_n, v_n) && (2.35)\\ &\leqslant S_H^{-\frac{2^*}{2}}\|(u_n, v_n)\|^{2^*}. && (2.36) \end{aligned}$$

Logo,

$$\|(u_n, v_n)\| \geqslant \left(c_{\lambda\mu} S_H^{\frac{2^*}{2}}\right)^{\frac{N-2}{4}}. \tag{2.37}$$

Por outro lado, como $(u_n, v_n) \in \mathcal{N}_{\lambda\mu}$ e de (a) temos

$$\begin{aligned} c_{\lambda\mu}\|(u_n, v_n)\|^2 &\leqslant \Phi(u_n, v_n)\\ &= NI(u_n, v_n)\\ &\leqslant N(1 + m_{\lambda\mu}) \end{aligned}$$

ou seja

$$\|(u_n, v_n)\| \leqslant \left(\frac{N(1 + m_{\lambda\mu})}{c_{\lambda\mu}}\right)^{1/2} \tag{2.38}$$

e a afirmação segue de (2.37) e (2.38) tomando

$$a_{\lambda\mu} := \left(c_{\lambda\mu} S_H^{\frac{2^*}{2}}\right)^{\frac{N-2}{4}}$$

e

$$b_{\lambda\mu} := \left(\frac{N(1 + m_{\lambda\mu})}{c_{\lambda\mu}}\right)^{1/2}.$$

■

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

Demonstração: Seja $\lambda^* > 0$ e $\mu^* > 0$ obtidos na Proposição 2.2, para $0 < \lambda < \lambda^*$ e $0 < \mu < \mu^*$ tem-se

$$I_{\lambda\mu}(u_n^j, v_n^j) \to m_{\lambda\mu}^j \ \text{ e } \ I'_{\lambda\mu}(u_n^j, v_n^j) \to 0$$

para $1 \leqslant j \leqslant k$. Segue da Proposição 1.3 e do Lema 2.1 que existem $0 \leqslant u^j \not\equiv 0$ e $0 \leqslant v^j \not\equiv 0$, tal que $I'_{\lambda\mu}(u^j, v^j) = 0$. Como na prova do Teorema 1.1 temos que (u^j, v^j) é uma solução fraca de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$. Além disso, temos $\mathcal{B}(u^j, v^j) \in B_r(a^j)$ e desde que $B_r(a_i) \cap B_r(a_j) = \emptyset$ para $i \neq j$ segue $(u^j, v^j) \neq (u^i, v^i)$ para $i \neq j$. Portanto, temos k pares de soluções fracas de $(\mathcal{P}_{\lambda\mu})$. ■

Capítulo 3

Multiplicidade de soluções para uma equação elíptica com expoente crítico de Sobolev em $\mathbb{R}^N$

Nosso objetivo neste capítulo é estudar multiplicidade de soluções para uma equação elíptica em $\mathbb{R}^N$ envolvendo o expoente crítico de Sobolev e pesos indefinidos. Para isso, usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria.

3.1 Introdução

Nosso interesse neste capítulo é o de obter multiplicidade de soluções para a seguinte equação elíptica, a saber

$$(\mathcal{M}_{\lambda\mu}) \quad -\Delta u = \lambda g(x)u + h(x)|u|^{q-2}u + \mu f(x)|u|^{2^*-2}u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

onde $N \geqslant 3$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev e λ, μ são parâmetros reais positivos. Os pesos f, g e h satisfazem as seguintes hipóteses:

(M_0) $f, g, h \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g^+ \not\equiv 0$, $h^+ \not\equiv 0$, $g^+ \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $h^+ \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ onde $q_0 = 2^*/(2^* - q)$;

(M_1) f é contínua e não-negativa;

(M_2) Assuma $\inf\limits_{x \in B_r(0)} [\min\{f(x), g(x)\}] = \alpha > 0$, para $B_r(0) \subset \Omega_{h^+} = \{x \in B_r(0) : h(x) \geqslant 0\}$;

(M_3) Para algum $R_0 > 0$, $0 < d_{R_0} := \inf\limits_{\|x\| \geqslant R_0} \left\{ \dfrac{g^-(x)}{h^-(x)} : h^-(x) > 0 \right\}$.

O probelma $(\mathcal{M}_{\lambda\mu})$ está relacionado com o seguinte problema de autovalor

$$(\mathcal{P}_g)\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x)u \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u^2dx > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Conforme a Proposição 1.1 da Seção 1.2 o problema de autovalor $(\mathcal{P}_g)$ admite um autovalor principal λ_1^+ cuja autofunção associada u_1^+ tem sinal definido.
O nosso principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema

Teorema 3.1 *Suponha que* $(M_0)-(M_3)$ *ocorrem e* $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ *e* $\mu > 0$. *Então, dado* $m \in \mathbb{N}$, *existe* $\mu^* = \mu^*(\lambda, m) > 0$ *tal que* (3.1) *possui ao menos* m *pares de soluções não triviais para todo* $\mu \in (0, \mu^*)$.

3.2 A geometria do Teorema do Passo da Montanha com simetria

Vamos usar para provar o Teorema 3.1 a seguinte versão abstrata do Teorema do Passo da Montanha com simetria no caso em que $V = \{0\}$.

Teorema 3.2 *Seja* $E = V \oplus X$, *onde* E *é um espaço de Banach real e* $dimV < +\infty$. *Suponha que* $J \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ *é um funcional par satisfazendo* $J(0) = 0$ *e*
(J_1) *Existe uma constante* $\rho > 0$ *tal que* $J|_{\partial B_\rho(0)\cap X} \geqslant 0$;
(J_2) *Existe um subsepaço* W *de* E *com dim* $V <$ *dim* $W < \infty$ *e* $M > 0$ *tal que*

$$\max_{u\in W} J(u) < M;$$

(J_3) *Considere* $M > 0$ *dado em* (J_2), J *satisfaz* $(PS)_c$ *para* $0 < c < M$.
Então J *possui ao menos dim* $W-$*dim* V *pares de pontos críticos não trivial.*

A desigualdade (3.3) que segue nos ajudará a concluir que o funcional energia associado a $(\mathcal{M}_{\lambda\mu})$ está bem definido e também a garantir a geometria do Teorema do Passo da Montanha com simetria.

De (M_0) e usando a Desigualdade de Hölder, obtem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|u|^q dx &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h^+(x)|^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^q)^{\frac{2^*}{q}} dx\right)^{\frac{q}{2^*}} \\ &\leqslant |h^+|_{q_0} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx\right)^{\frac{q}{2^*}} \\ &\leqslant |h^+|_{q_0} |u|_{2^*}^q\end{aligned}$$

e usando a imersão $X_\varphi \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|u|^q dx \leqslant c_1 \|u\|^q \tag{3.3}$$

onde $c_1 = c|h^+|_{q_0}$ e X_φ é o espaço introduzido na Seção 1.2 do Capítulo 1.

Associado ao problema $(\mathcal{M}_{\lambda\mu})$ temos o funcional energia $J_{\lambda\mu} : X_\varphi \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_{\lambda\mu}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 dx - \lambda g(x)u^2)dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^q dx - \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^{2^*} dx$$

e de $(M_0) - (M_3)$ e (3.3), $J_{\lambda\mu}$ está bem definido e $J_{\lambda\mu} \in \mathcal{C}^1(X_\varphi, \mathbb{R})$(consulte Apêndice A), e é sabido que pontos críticos de $J_{\lambda\mu}$ são soluções fracas do problema (3.1).

Definição 3.1 (Solução Fraca) *Dizemos que uma função $u \in X_\varphi$ é dita uma solução fraca de (3.1) quando satisfaz a identidade integral*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi - \lambda g(x) u\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{q-2}u\varphi dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^{2^*-2}u\varphi dx = 0$$

para todo $\varphi \in X_\varphi$.

3.3 A condição de Palais-Smale para $J_{\lambda\mu}$

Começaremos esta seção mostrando que se $(u_n) \subset X_\varphi$ é uma sequência de Palais-Smale então ela é limitada, e em seguida mostramos a condição Palais-Smale para um determinado nível c satisfazendo a desigualdade $0 < c < M$ para μ suficientemente pequeno. Agora, vamos definir Sequência de Palais-Smale e Condição de Palais-Smale para $J_{\lambda\mu}$.

Definição 3.2 (Sequência de Palais-Smale) *Dizemos que uma sequência (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para o funcional $J_{\lambda\mu}$ se $J_{\lambda\mu}(u_n) \to c$ em $\mathbb{R}$ e $J'_{\lambda\mu}(u_n) \to 0$ em Y'_φ, quando $n \to +\infty$.*

Definição 3.3 (Condição de Palais-Smale) *Dizemos que o funcional $J_{\lambda\mu}$ satsifaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$, se toda sequência $(u_n) \subset X_\varphi$ tal que $J_{\lambda\mu}(u_n) \to c$ e $J'_{\lambda\mu}(u_n) \to 0$ admite uma subsequência convergente.*

Lema 3.1 *Seja $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ e $\mu > 0$, e assuma $(M_0) - (M_2)$ verdadeiro. Se $(u_n) \subset X_\varphi$ é tal que $J_{\lambda\mu}(u_n) \to c$ em $\mathbb{R}$ e $J'_{\lambda\mu}(u_n) \to 0$ em X'_φ, então (u_n) é limitada em X_φ.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $\|u_n\| \to +\infty$. Observe que $J'_{\lambda\mu}(u_n) \to 0$ implica que, dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|J'_{\lambda\mu}(u_n)\|_{Y'_\varphi} < 1, \quad \forall\, n \geqslant n_0,$$

isto é,

$$|J'_{\lambda\mu}(u_n)u_n| \leqslant \|u_n\|, \quad \forall\, n \geqslant n_0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J_{\lambda\mu}(u_n) - \frac{1}{q}J'_{\lambda\mu}(u_n)u_n \;&=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 - \lambda g(x)u_n^2)dx - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q dx - \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)u_n^{2^*} \\ &-\; \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 - \lambda g(x)u_n^2)dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q dx + \frac{\mu}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)u_n^{2^*} \end{aligned}$$

de onde tem-se

$$J_{\lambda\mu}(u_n) - \frac{1}{q}J'_{\lambda\mu}(u_n)u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^2 - \lambda g(x)u_n^2)dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)\mu\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u_n|^{2^*}dx.$$

Pelo Lema 1.2 existe uma constante $\delta > 0$ e da hipótese (M_1) segue

$$J_{\lambda\mu}(u_n) - \frac{1}{q}J'_{\lambda\mu}(u_n)u_n \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\delta\|u_n\|^2. \tag{3.4}$$

Usando que $J_{\lambda\mu}(u_n) \longrightarrow c$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$J_{\lambda\mu}(u_n) - \frac{1}{q}J'_{\lambda\mu}(u_n)u_n \leqslant d + \frac{1}{q}\|u_n\|, \quad \forall\, n \geqslant n_0. \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5) segue

$$d + \frac{1}{q}\|u_n\| \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\delta\|u_n\|^2, \quad \forall\, n \geqslant n_0. \tag{3.6}$$

Fixando $c_1 = \dfrac{1}{q} > 0, c_2 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q}\right)\delta > 0$ e dividindo a última desigualdade por $\|u_n\|^2$ teremos

$$\frac{d}{\|u_n\|^2} + \frac{c_1}{\|u_n\|} \geqslant c_2, \quad \forall\, n \geqslant n_0.$$

e passando o limite de $n \to +\infty$ na última desigualdade chegamos a um absurdo. Logo, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X_φ. ■

Lema 3.2 *Seja* $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ *e assuma* $(M_0) - (M_2)$ *verdadeiro. Então, dado* $M > 0$*, existe* $\mu_1^* = \mu_1^*(q, N, M, S, |f|_\infty) > 0$ *tal que* $J_{\lambda\mu}$ *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *para todo nível* $c < M$*, desde que* $0 < \mu < \mu_1^*$.

Demonstração: Vamos provar a existência de uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge forte em X_φ. Pelo Lema 3.1 a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e sendo X_φ um espaço Banach reflexivo (visto ser Hilbert), a menos de subsequência existe $u_0 \in X_\varphi$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \ \text{ em } \ X_\varphi.$$

Considere a função $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leqslant R, \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 2R. \end{cases}$$

Defina $\varphi_R(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{R}\right)$ e observe que $\varphi_R u_n \in H_0^1(B_{2R}(0))$, pois $u_n \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Note que

$$\varphi_R(x) u_n(x) \rightharpoonup \varphi_R(x) u_0(x) \ \text{ em } \ X_\varphi.$$

De fato, como $u_n \rightharpoonup u_0$ então para todo funcional linear e contínuo T tem-se $T(u_n) \longrightarrow T(u_0)$.

Defina o funcional $T_\phi : X_\varphi \to \mathbb{R}$ por $T_\phi(u) = T(\phi u)$. Claramente, T_ϕ é linear e contínuo. De fato, sejam $w_1, w_2 \in X_\varphi$ e $\beta \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} T_\phi(w_1 + w_2) &= T(\phi(w_1 + w_2)) \\ &= T(\phi w_1 + \phi w_2) \\ &= T(\phi w_1) + T(\phi w_2) \\ &= T_\phi(w_1) + T_\phi(w_2). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} T_\phi(\beta w_1) &= T(\beta\phi w_1) \\ &= \beta T(\phi w_1) \\ &= \beta T_\phi(w_1). \end{aligned}$$

A continuidade de T_ϕ segue da continuidade de T.
Por outro lado, uma vez $u_n \rightharpoonup u_0$ segue

$$T_\phi(u_n) \longrightarrow T_\phi(u_0). \tag{3.7}$$

Pela definição de T_ϕ e por (3.7) vem

$$T(\phi u_n) = T_\varphi(u_n) \longrightarrow T_\phi(u_0) = T(\phi u_0) \tag{3.8}$$

e tomando $\phi = \varphi_R(x)$ em (3.8) teremos

$$T(\varphi_R(x)u_n(x)) \longrightarrow T(\varphi_R(x)u_0(x)).$$

Vamos mostrar usando argumento diagonal que a sequência $(u_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ converge q.t.p para u_0 em $\mathbb{R}^N$.
Além disso,

$$\begin{aligned} \|\varphi_R u_n\|^2_{H^1_0} &= \int_{|x|\leqslant 2R} |\nabla(\varphi_R u_n)|^2 dx \\ &= \int_{|x|\leqslant 2R} |u_n \nabla\varphi_R + \varphi_R \nabla u_n|^2 dx \\ &\leqslant 2\int_{|x|\leqslant 2R} u_n^2 |\nabla\varphi_R|^2 dx + 2\int_{|x|\leqslant 2R} |\varphi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \\ &\leqslant \frac{2}{R^2}|\nabla\varphi_R|^2_\infty \int_{|x|\leqslant 2R} u_n^2 dx + 2\int_{|x|\leqslant 2R} |\nabla u_n|^2 dx \\ &\leqslant \frac{2C_1}{R^2}|\nabla\varphi|^2_\infty |u_n|^2_{2^*} + 2\int_{|x|\leqslant 2R} |\nabla u_n|^2 dx \\ &\leqslant 2\left(\frac{C_1}{R^2}|\nabla\varphi|^2_\infty |u_n|^2_{2^*} + 1\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\ &= C_{2,R,\varphi}\|u_n\|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, a sequência $(\varphi_R u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1_0(B_{2R}(0))$. Então, a menos de subsequência tem-se

$$\varphi_R u_n \rightharpoonup \varphi_R u_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(B_{2R}(0)).$$

Da imersão $H_0^1(B_{2R}(0)) \hookrightarrow L^2(B_{2R}(0))$, como (u_n) converge forte em $L^2(B_{2R}(0))$ então

$$u_n(x) \to u_0(x) \; \text{ q.t.p em } \; B_{2R}(0).$$

A fim de simplificar os cálculos, vamos considerar a convergência pontual, em vez de q.t.p. Seja $(u_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ a subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente em $B_1(0)$, ou seja,

$$(u_{1k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_{11}, u_{12}, u_{13}, \ldots) \longrightarrow u_0 \; \text{ para } \; |x| \leqslant 1.$$

Seja $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ a subsequência de $(u_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente em $B_2(0)$, ou seja,

$$(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_{21}, u_{22}, u_{23}, \ldots) \longrightarrow u_0 \; \text{ para } \; |x| \leqslant 2.$$

Seja $(u_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ a subsequência de $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge pontualmente em $B_3(0)$, ou seja,

$$(u_{3k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_{31}, u_{32}, u_{33}, \ldots) \longrightarrow u_0 \; \text{ para } \; |x| \leqslant 3.$$

De modo indutivo, definimos a sequência

$$(u_{mk})_{k\in\mathbb{N}} = (u_{m1}, u_{m2}, u_{m3}, \ldots) \longrightarrow u_0 \; \text{ para } \; |x| \leqslant m.$$

Usando argumento diagonal, a sequência $(u_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $x \in \mathbb{R}^N$ então existe $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $|x| \leqslant m$. Como $(u_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(u_{mk})_{k\in\mathbb{N}}$ tem os mesmos limites, pois a partir de $k \geqslant m$ os elementos $(u_{kk})_{k\in\mathbb{N}}$ estão em $(u_{mk})_{k\in\mathbb{N}}$, e como o limite de (u_{mk}) é $u_0(x)$ então $u_{kk}(x) \to u_0(x)$ pontualmente em $\mathbb{R}^N$.

Tomando $v_n = u_n - u_0$, da convergência fraca e Lema de Brezis-Lieb(consulte Apêndice B, Teorema $B.6$), tem-se

$$J_{\lambda\mu}(v_n) - J_{\lambda\mu}(u_n) + J_{\lambda\mu}(u_0) \to 0 \tag{3.9}$$

e

$$J'_{\lambda\mu}(v_n)v_n - J'_{\lambda\mu}(u_n)u_n + J'_{\lambda\mu}(u_0)u_0 \to 0. \tag{3.10}$$

De fato, por um cálculo simples

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx + o_n(1) \tag{3.11}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} g(x) u_0^2 dx + o_n(1) \tag{3.12}$$

e novamente usando Brezis-Lieb tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) v_n^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_0^q dx + o_n(1) \tag{3.13}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) |v_n|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_n|^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) |u_0|^{2^*} dx + o_n(1). \tag{3.14}$$

Por (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) implica

$$\begin{aligned}
c - J_{\lambda\mu}(u_0) &= c - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_0|^2 - \lambda g(x) u_0^2) dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_0^q dx + \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u_0|^{2^*} dx \\
&= c + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 - \lambda g(x) v_n^2) dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 - \lambda g(x) u_n^2) dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q dx \\
&- \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x) v_n^q dx + \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u_n|^{2^*} dx - \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|v_n|^{2^*} dx + o_n(1) \\
&= c + J_{\lambda\mu}(v_n) - J_{\lambda\mu}(u_n) + o_n(1),
\end{aligned}$$

donde segue (3.9). Além disso, de (3.9), obtemos

$$J_{\lambda\mu}(v_n) = c - J_{\lambda\mu}(u_0) + o_n(1). \tag{3.15}$$

Por outro lado, note que

$$J'_{\lambda\mu}(v_n)v_n = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 - \lambda g(x) v_n^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) v_n^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) v_n^{2^*} dx \tag{3.16}$$

De (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) segue

$$\begin{aligned}
J'_{\lambda\mu}(v_n)v_n &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 - \lambda g(x) u_n^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u_n^{2^*} dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_0|^2 - \lambda g(x) u_0^2) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_0^q dx - \mu \int_{\mathbb{R}^N} f(x) u_0^{2^*} dx + o_n(1)
\end{aligned}$$

então,

$$J'_{\lambda\mu}(v_n)v_n = J'_{\lambda\mu}(u_n)u_n - J'_{\lambda\mu}(u_0)u_0 + o_n(1)$$

o que mostra que a convergência (3.10) ocorre.

Usando o Lema 1.1 implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)v_n^2dx \to \int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)v_0^2dx. \tag{3.17}$$

Do Lema 1.2 tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} g^+(x)v_n^2dx \to 0. \tag{3.18}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|v_n|^q dx \to 0. \tag{3.19}$$

Com efeito, vamos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|v_n|^q dx = \int_{|x|>R} h^+(x)|v_n|^q dx + \int_{|x|\leqslant R} h^+(x)|v_n|^q dx$$

desde que $h^+ \in L^{q_0}(\mathbb{R}^N)$ e usando Hölder, temos

$$\int_{|x|>R} h^+(x)|v_n|^q dx \quad \leqslant \quad \left(\int_{|x|>R} |h^+(x)|^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_{|x|>R} |v_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{q}{2^*}}.$$

Uma vez que

$$\int_{|x|>R} |v_n|^{2^*} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \leqslant \widehat{c} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \leqslant \overline{c}\|v_n\|^2$$

então

$$\int_{|x|>R} h^+(x)|v_n|^q dx \leqslant \widehat{c}\|v_n\|^{2q} \left(\int_{|x|>R} |h^+(x)|^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

ou ainda

$$\int_{|x|>R} h^+(x)|v_n|^q dx \leqslant C \left(\int_{|x|>R} |h^+(x)|^{q_0} dx\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

onde $C = \widehat{c}\|v_n\|^{2q}$.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher R grande tal que

$$\int_{|x|>R} |h^+(x)|^{q_0} dx < \left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)^{q_0}$$

donde temos

$$\int_{|x|>R} h^+(x)|v_n|^q dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.20}$$

Vamos mostrar agora que

$$\int_{|x|\leqslant R} h^+(x)|v_n|^q dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com efeito, desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, note que

$$\|u_n\|^2_{H^1(B_R)} = |u_n|^2_{L^2(B_R)} + \int_{B_R} |\nabla u_n|^2 dx \tag{3.21}$$

como $L^{2^*}(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$ e $H^1(B_R) \hookrightarrow L^q(B_R)$, temos

$$|u_n|_{L^2(B_R)} \leqslant C_1 |u_n|_{L^{2^*}(B_R)}. \tag{3.22}$$

Por (3.21) e (3.22) segue

$$\|u_n\|^2_{H^1(B_R)} \leqslant C_3 + \widetilde{C_1}|u_n|^2_{L^{2^*}(B_R)}$$

e usando a desigualdade de Sobolev

$$|u_n|^2_{L^{2^*}(B_R)} \leqslant S^{-1} \int_{B_R} |\nabla u_n|^2 dx$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2_{H^1(B_R)} &\leqslant C_3 + \widetilde{C_1} S^{-1} \int_{B_R} |\nabla u_n|^2 dx \\
&\leqslant C_3 + \widetilde{C_1} S^{-1} C_3 \\
&= \widetilde{C}
\end{aligned}$$

de onde concluímos que (u_n) é limitada em $H^1(B_R)$, desse modo a menos de subsequência vem

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(B_R).$$

Usando a imersão compacta $H^1(B_R) \hookrightarrow L^q(B_R)$ segue

$$u_n \to u_0 \ \text{ em } \ L^q(B_R).$$

Assim, fixado $R > 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_{|x|\leqslant R} h^+(x)|v_n|^q dx \leqslant |h^+|_\infty \|u_n - u_0\|^q_{L^q(B_R)} < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \forall n \geqslant n_0. \tag{3.23}$$

Por (3.20) e (3.23) segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|v_n|^q dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \ \forall n \geqslant n_0.$$

De (3.15), (3.18) e (3.19) segue

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_n|^2 + \lambda g^-(x)v_n^2)dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h^-(x)v_n^q dx - \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)v_n^{2^*}dx \to c - J_{\lambda\mu}(u_0) \tag{3.24}$$

e subtraindo $t_n := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_n|^2 + \lambda g^-(x)v_n^2)dx$ em ambos os lados de (3.24) tem-se

$$\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_n|^2 + \lambda g^-(x)v_n^2 + h^-(x)v_n^q)dx - \frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)v_n^{2^*}dx \to c - J_{\lambda\mu}(u_0) - t_n. \tag{3.25}$$

Usando argumentos análogos, como na prova da Proposição 1.3 podemos concluir que $J'_{\lambda\mu}(u_0) = 0$. Assim

$$J_{\lambda\mu}(u_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_0|^2 - \lambda g(x)u_0^2)dx + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)\mu\int_{\mathbb{R}^N} f(x)u_0^{2^*}dx$$

visto que $J_{\lambda\mu}(u_0) = J_{\lambda\mu}(u_0) - q^{-1}J'_{\lambda\mu}(u_0)u_0$.
Do Lema 1.2 e da condição (M_1), segue

$$J_{\lambda\mu}(u_0) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\varepsilon\|u_0\|^2 \geqslant 0. \tag{3.26}$$

De (3.25), (3.26), (3.19) e (3.10) obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{q}A_n - \frac{\mu}{2^*}B_n\right) = c - J_{\lambda\mu}(u_0) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\lim_{n\to+\infty} t_n \tag{3.27}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}(A_n - \mu B_n) = -J'_{\lambda\mu}(u_0)u_0 \tag{3.28}$$

onde

$$A_n = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (|\nabla v_n|^2 + \lambda g^-(x)v_n^2 + h^-(x)v_n^q)dx$$

e

$$B_n = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} f(x)v_n^{2^*}dx.$$

Usando novamente que $J'_{\lambda\mu}(u_0) = 0$ em (3.28) implica em

$$\lim_{n\to+\infty}(A_n - \mu B_n) = 0 \tag{3.29}$$

desde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, a menos de subsequência

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \mu B_n = \ell \geqslant 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{\ell}{\mu}.$$

De (3.27) tem-se

$$\frac{\ell}{q} - \frac{\mu}{2^*}\frac{\ell}{\mu} \leqslant c - J_{\lambda\mu}(u_0) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\ell_1 \implies \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)\ell \leqslant c$$

ou seja

$$\ell \leqslant \frac{c}{\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)}. \tag{3.30}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + \lambda g^-(x)v_n^2 + h^-(x)v_n^q)dx &\geqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx \\ &\geqslant S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*} \\ &= \frac{S}{|f|_\infty^{2/2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|v_n|^{2^*}dx\right)^{2/2^*}.\end{aligned}$$

Assim, passando o limite de $n \to +\infty$ na última desigualdade acima, vem

$$\ell \geqslant \frac{S}{(\mu|f|_\infty)^{2/2^*}}\ell^{2/2^*}.$$

Daí, tem-se $\ell = 0$. De fato, assumindo que $\ell > 0$ e por (3.30), teremos

$$\frac{c}{\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2^*}\right)} \geqslant \ell \geqslant \frac{S^{N/2}}{(\mu|f|_\infty)^{\frac{N-2}{2}}}$$

asim

$$\mu \geqslant \frac{1}{|f|_\infty}\left[\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*}\right)\frac{S^{\frac{N}{2}}}{M}\right]^{\frac{2}{N-2}} = \mu_1^* \tag{3.31}$$

o que contradiz nossa hipótese, visto que $0 < \mu < \mu_1^*$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla v_n|^2 + \lambda g^-(x)v_n^2)dx \to 0. \tag{3.32}$$

De (1.7) e (3.32) tem-se

$$\|u_n - u_0\| \to 0 \quad \text{em} \quad X_\varphi.$$

■

3.4 Demonstração do Teorema 3.1

Definamos $W = [\varphi_1, ..., \varphi_m]$, onde φ_j são funções tais que $supp\, \varphi_j \subset B_r(0) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $sup\, \varphi_i \cap supp\, \varphi_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Afirmamos que $dim\, W = m$. Com efeito, vamos mostrar que as funções φ_j são linearmente independente. Para isso, devemos provar que existem $\gamma_1, ..., \gamma_m$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \varphi_j(x) = 0, \quad \forall\, x \in B_r(0) \tag{3.33}$$

com $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$.
Seja $x \in supp\varphi_1$, então $\varphi_j(x) = 0$ para $j \neq 1$, assim

$$\gamma_1\varphi_1(x) = 0 \;\; \forall\, x \in supp\, \varphi_1(x)$$

e como $\varphi_1(x) \neq 0$ para todo $x \in supp\,\varphi_1(x)$ então $\gamma_1 = 0$.
Seja $x \in supp\varphi_2$, então $\varphi_j(x) = 0$ para $j \neq 2$, assim

$$\gamma_2\varphi_2(x) = 0, \quad \forall\, x \in supp\,\varphi_2(x)$$

e como $\varphi_2(x) \neq 0$ para todo $x \in supp\,\varphi_2(x)$ então $\gamma_2 = 0$.
Seguindo esse raciocínio, temos $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$. Logo, o conjunto $\beta = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$ é LI e pela definição de W toda $\psi(x) \in W$ pode ser escrito por

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j\varphi_j(x).$$

Assim, tem-se que $\beta = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$ é uma base para W, ou seja, $dim\,W = m$.
O próximo lema garante que o funcional $J_{\lambda\mu}$ saftisfaz o item (J_1) do Teorema do Passo da Montanha com Simetria.

Lema 3.3 *Suponha que $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$ e $(M_0) - (M_2)$ verdadeiro. Então, existe $\widetilde{\mu} > 0$ e $\rho, \beta > 0$ tal que*

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_{\lambda\mu}(u) \geqslant \beta, \quad \forall \mu \in (0, \widetilde{\mu}).$$

Demonstração: Do Lema 1.2, (3.3) e pela desigualdade de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\mu}(u) &\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^q dx - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\|u\|^{2^*} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|u|^q dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h^-(x)|u|^q dx - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\|u\|^{2^*} \\
&\geqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h^+(x)|u|^q dx - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\|u\|^{2^*} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{c_1}{q}\|u\|^q - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\|u\|^{2^*}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$J_{\lambda\mu}(u) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{c_1}{q}\|u\|^q - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\|u\|^{2^*}.$$

Assumindo que $\|u\| = \rho$, para algum $\rho > 0$ a ser escolhido posteriormente, tem-se

$$J_{\lambda\mu}(u) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\rho^2 - \frac{c_1}{q}\rho^q - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\rho^{2^*}.$$

Agora, escolhemos $\rho > 0$ de modo que

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho^2 - \frac{c_1}{q}\rho^q \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\rho^2,$$

ou seja,

$$\rho \leqslant \left(\frac{q\varepsilon}{4c_1}\right)^{\frac{1}{q-2}}.$$

Assim,

$$J_{\lambda\mu}(u) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\rho^2 - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\rho^{2^*}.$$

Além disso, definindo $\beta = \frac{\varepsilon}{4}\rho^2 - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\rho^{2^*}$ e escolhendo $\widetilde{\mu} > 0$ tal que $\beta > 0$ para todo $\mu < \widetilde{\mu}$. Logo, escolhendo

$$\widetilde{\mu} = \frac{\varepsilon 2^*}{8|f|_\infty^{-2^*/2}}\rho^{2-2^*}$$

temos

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{\varepsilon}{4}\rho^2 - \frac{\mu}{2^*}|f|_\infty^{-2^*/2}\rho^{2^*}\\
&> \frac{\varepsilon}{4}\rho^2 - \frac{\widetilde{\mu}}{2^*}|f|_\infty^{-2/2^*}\rho^{2^*}\\
&= \frac{\varepsilon}{4}\rho^2 - \frac{\varepsilon}{8}\rho^2\\
&= \frac{\varepsilon}{8}\rho^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_{\lambda\mu}(u) \geqslant \beta, \quad \forall \mu \in (0, \widetilde{\mu}).$$

■

Lema 3.4 *Suponha que $(M_0) - (M_2)$ ocorre e $\lambda \in (0, \lambda_1^+)$. Então, dado $\ell \in \mathbb{N}$, existe um subespaço $W \subset X_\varphi$ e uma constante $M > 0$ tal que $\dim W = m$ e $\max_{u \in W} J_{\lambda\mu}(u) \leqslant M$.*

Demonstração: Seja $W = span\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ um espaço de funções tais que $supp\, \varphi_j \subset B_r(0)$ e $supp\, \varphi_i \cap supp\, \varphi_j = \emptyset$. Pela condição (M_2), existem constantes a_0, a_1 e a_2 tais que

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\mu}(u) &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx - \frac{a_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx - \frac{a_1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^qdx - \frac{\mu a_2}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx\\
&= \frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{D}}^2 - \frac{a_0}{2}|u|_2^2 - \frac{a_1}{q}|u|_q^q - \frac{\mu a_2}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}
\end{aligned}$$

Desde que W tem dimensão finita m, existe $a_j = a_j(W) > 0$ tal que

$$|u|_t \geqslant a_j \|u\|, \quad \forall u \in W \tag{3.34}$$

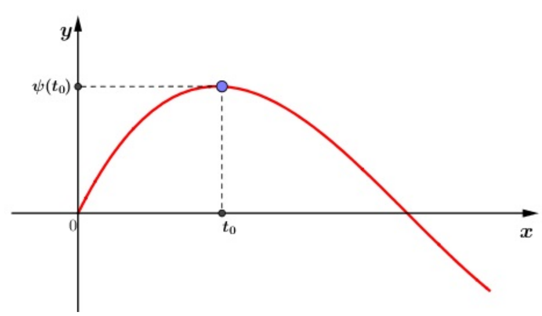
onde $|u|_t$ é a norma no espaço de Lebesgue $L^t(\mathbb{R}^N)$.
Usando o fato da imersão $X_\varphi \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ser contínua e de (3.34) para $t = 2, q, 2^*$ e $j = \widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \widehat{a}_3$ teremos

$$\begin{aligned} J_{\lambda\mu}(u) &\leqslant \widehat{c}_1\|u\|^2 - \widehat{c}_2\|u\|^2 - \widehat{c}_3\|u\|^q - \mu\widehat{c}_4\|u\|^{2^*} \\ &\leqslant (\widehat{c}_1 - \widehat{c}_2)\|u\|^2 - \widehat{c}_3\|u\|^q \end{aligned}$$

onde $\widehat{c}_1 = 1/2, \widehat{c}_2 = \dfrac{a_0\widehat{a}_1}{2}, \widehat{c}_3 = \dfrac{a_1\widehat{a}_2}{q}$ e $\widehat{c}_4 = \mu a_2\widehat{a}_3$.
Defina a função $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(t) = \widehat{c}_1 t^2 - \widehat{c}_3 t^q.$$

Observe que $\psi(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = -\infty$, e sendo ψ contínua segue que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) \leqslant \psi(t_0)$, ou seja, t_0 é um ponto de máximo local.



De fato, note que $\psi'(t) = 2\widehat{c}_1 t - q\widehat{c}_3 t^{q-1}$ assim

$$\begin{aligned} \psi'(t) = 0 &\iff 2\widehat{c}_1 t - q\widehat{c}_3 t^{q-1} = 0 \\ &\iff 2\widehat{c}_1 t = q\widehat{c}_3 t^{q-1} \\ &\iff t = \left(\frac{2\widehat{c}_1}{q\widehat{c}_3}\right)^{\frac{1}{q-2}}. \end{aligned}$$

O ponto $t_0 = \left(\dfrac{2\widehat{c}_1}{q\widehat{c}_3}\right)^{\frac{1}{q-2}}$ é um ponto de máximo local para ψ. Logo, $\psi(t) \leqslant \psi(t_0)$ o que nos leva a

$$\begin{aligned}
\psi(t) &\leqslant \widehat{c}\left[\left(\frac{2\widehat{c}}{q\widehat{a}_2}\right)^{\frac{1}{q-2}}\right]^2 - \widehat{a}_2\left[\left(\frac{2\widehat{c}}{q\widehat{a}_2}\right)^{\frac{1}{q-2}}\right]^q \\
&= \left(\frac{2\widehat{c}_1}{q\widehat{c}_3}\right)^{\frac{2}{q-2}}\left[\widehat{c}_1 - \frac{2\widehat{c}_1}{q}\right] \\
&= \frac{\widehat{c}_1}{q}\left(\frac{2\widehat{c}_1}{q\widehat{c}_3}\right)^{\frac{2}{q-2}}(q-2)
\end{aligned}$$

então

$$J_{\lambda\mu}(u) \leqslant \psi(\|u\|) \leqslant M$$

onde

$$M = \frac{\widehat{c}_1}{q}\left(\frac{2\widehat{c}_1}{q\widehat{c}_3}\right)^{\frac{2}{q-2}}(q-2) > 0.$$

■

Demonstração do Teorema 3.1: Pelo Lema 3.3, encontramos $\widetilde{\mu}$ tal que $J_{\lambda\mu}$ satisfaz (J_1) para todo $0 < \mu < \widetilde{\mu}$. Agora, pelo Lema 3.4 obtemos $W \subset X$ com $dim\, W = m$ satisfazendo (J_2). Pelo Lema 3.2, tomando μ_1^* pequeno se necessário, temos que $J_{\lambda\mu}$ satisfaz (J_3) para $0 < \mu < \mu_1^*$. Desde que $J_{\lambda\mu}(0) = 0$ e $J_{\lambda\mu}$ é par, podemos definir $\mu^* = \min\{\mu_1^*, \widetilde{\mu}\}$ e usar o Teorema 3.2 para concluímos que $J_{\lambda\mu}$ admite m pares de soluções não triviais para μ suficientemente pequeno. ■

Apêndice A

Regularidade dos Funcionais $I_{\lambda\mu}$ e $J_{\lambda\mu}$

O objetivo deste apêndice é unicamente mostrar que os funcionais $I_{\lambda\mu}$ e $J_{\lambda\mu}$ são de classe $\mathcal{C}^1$, tendo em vista que usamos tal condição no decorrer do trabalho.

1.1 Funcionais Diferenciáveis

Seja E um espaço de Banach. Dizemos que o funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ é Frechet diferenciável em $u \in E$ se existe uma função $L \in E'$ satisfazendo: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$ tal que

$$|\Phi(u+w) - \Phi(u) - Lw| \leqslant \varepsilon \|w\|_E, \quad \text{para todo } \|w\|_E \leqslant \delta.$$

Diante disso, a função L é dita a derivada de Fréchet de Φ em u, e é denotada por $\Phi'(u)$.
Dizemos que Φ é de classe $\mathcal{C}^1$ quando Φ é Fréchet diferenciável em cada ponto $u \in E$ e $\Phi' : E \to E'$ é contínua.
Dizemos que o funcional Φ é Gâteaux diferenciável em $u \in E$ se, se para todo $h \in E$ existe uma aplicação $T \in E'$ tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u+th) - \Phi(u) - tTh}{t} = 0.$$

Tal aplicação T é chamada derivada de Gâteaux em u, e é denotada por $D\Phi(u)$. Daí, notamos que

$$D\Phi(u)h = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u+th) - \Phi(u)}{t}.$$

Além disso, todo funcional Fréchet diferenciável é Gâteaux diferenciável, mas a recíproca não é verdadeira. Então vale o seguinte resultado

Proposição A.1 *Se $\Phi : E \to \mathbb{R}$ tem derivada de Gâteaux $D\Phi : E \to E'$ contínua então $\Phi' = D\Phi$ e Φ é de classe $\mathcal{C}^1$.*

Proposição A.2 *O funcional $I_1 : X \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I_1(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx$$

é de classe $\mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ com

$$I_1'(u,v)(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + \nabla v\nabla\psi)dx, \ \ \forall\,(\varphi,\psi)\in X.$$

Demonstração: Calculando a derivada de Gâteaux de I_1, temos

$$\begin{aligned}
I_1'(u,v)(\varphi,\psi) &= \lim_{t\to 0}\frac{I_1(u+t\varphi, v+t\psi) - I_1(u,v)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla(u+t\varphi)|^2 + |\nabla(v+t\psi)|^2)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2)dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + \nabla v\nabla\psi)dx + t\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\varphi|^2 + |\nabla\psi|^2)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\nabla\varphi + \nabla v\nabla\psi)dx.
\end{aligned}$$

Observe que $I_1'(u,v) : X \to \mathbb{R}$ é linear. Além disso, é contínua, pois usando a desigualdade de Hölder tem-se

$$|I_1'(u,v)(\varphi,\psi)| \leqslant \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)} + \|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|\psi\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que $X_\varphi \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ segue

$$\begin{aligned}
|I_1'(u,v)(\varphi,\psi)| &\leqslant c_1\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_H + c_3\|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|\psi\|_H\\
&\leqslant c_1\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_H^2 + c_3\|v\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}\|\psi\|_H^2\\
&= c(\|u\|_{1,2} + \|v\|_{1,2})\|(\varphi,\psi)\|^2
\end{aligned}$$

onde $c = \max\{c_1, c_2\}$.

Pela Proposição A.1, a fim de concluir a prova, é suficiente mostrar que I_1' é contínua. Com efeito, ainda usando Hölder, temos

$$\begin{aligned} |I_1'(u_1,v_1)(\varphi,\psi) - I_1'(u_2,v_2)(\varphi,\psi)| &\leqslant c(\|u_1-u_2\|_{1,2} + \|v_1-v_2\|_{1,2})\|(\varphi,\psi)\|^2 \\ &= c\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|\|(\varphi,\psi)\|^2 \end{aligned}$$

para todos $u_1, v_1, u_2, v_2, \varphi, \psi \in Y_\varphi$. Assim,

$$\|I_1'(u_1,v_1) - I_1'(u_2,v_2)\|_{X'} = \sup_{(\varphi,\psi)\in X,\ \|(\varphi,\psi)\|\leqslant 1} |I_1'(u_1,v_1)(\varphi,\psi) - I_1'(u_2,v_2)(\varphi,\psi)| \to 0$$

quando $\|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\| \to 0$.

Proposição A.3 *O funcional $I_2 : X \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I_2(u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda g(x)u^2 + \mu h(x)v^2)dx$$

é de classe $\mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ com

$$I_2'(u,v)(\varphi,\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda g(x)u\varphi + \mu h(x)v\psi)dx,\ \forall\,(\varphi,\psi)\in X.$$

Prova: Calculando a derivada de Gâteaux, teremos

$$\begin{aligned} I_2'(u,v)(\varphi,\psi) &= \lim_{t\to 0} \frac{I_2(u+t\varphi, v+t\psi) - I_2(u,v)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \lambda g(x)(u+t\varphi)^2 + \mu h(x)(v+t\psi)^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda g(x)u^2 + \mu h(x)v^2\right]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left[\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda g(x)u\varphi + \mu h(x)v\psi)dx + t\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda g(x)\varphi^2 + \mu h(x)\psi^2)dx\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}(\lambda g(x)u\varphi + \mu h(x)v\psi)dx. \end{aligned}$$

Note que I_2' é linear, além disso $I_2'(u,v)$ é contínua, pois usando Hölder teremos

$$\begin{aligned} |I_2'(u,v)(\varphi,\psi)| &\leqslant \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u||\varphi| + \mu\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v||\psi| \\ &\leqslant \left(\lambda|g|_\infty|u|_{\frac{2^*}{2^*-1}} + \mu|h|_\infty|v|_{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)\|(\varphi,\psi)\|. \end{aligned}$$

De maneira análoga ao mostrado na $A.2$ concluímos que I_2' é contínua.

Proposição A.4 *O funcional $I_3 : X \to \mathbb{R}$ dado por*

$$I_3(u,v) = \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx$$

é de classe $\mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ com

$$I_3'(u,v)(\varphi,\psi) = \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_u(u,v)\varphi + H_v(u,v)\psi]dx,\ \forall\,(\varphi,\psi)\in X.$$

Prova: A derivada de Gâteaux de I_3 é dada por

$$\begin{aligned}
I_3'(u,v)(\varphi,\psi) &= \lim_{t\to 0}\frac{I_3(u+t\varphi,v+t\psi)-I_3(u,v)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u+t\varphi,v+t\psi)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)H(u,v)dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\left[\frac{H(u+t\varphi,v+t\psi)-H(u,v)}{t}\right]dx.
\end{aligned}$$

Seja $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $h(t)=H(u+t\varphi,v+t\psi)$, onde $u,v,\varphi,\psi\in H$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um $\theta\in(0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{h(t)-h(0)}{t} &= \frac{H(u+t\varphi,v+t\psi)-H(u,v)}{t}\\
&= H_u(u+\theta t\varphi,v+\theta t\psi)\varphi + H_v(u+t\theta\varphi,v+\theta t\psi)\psi.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{h(t)-h(0)}{t}\right| &\leqslant |H_u(u+\theta t\varphi,v+\theta t\psi)||\varphi| + |H_v(u+t\theta\varphi,v+\theta t\psi)||\psi|\\
&\leqslant c_1\left[|u+t\theta\varphi|^{2^*-1}+|v+t\theta\psi|^{2^*-1}\right]\\
&\leqslant c_1(|u|+|\varphi|)^{2^*-1}|\varphi| + c_1(|v|+|\psi|)^{2^*-1}|\psi|.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder segue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}(|u|+|\varphi|)^{2^*-1}|\varphi| &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N}[(|u|+|\varphi|)^{2^*-1}]^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}\\
&= \||u|+|\varphi|\|_{2^*}^{2^*-1}\|\varphi\|_{2^*} < +\infty
\end{aligned}$$

ou seja, $(|u|+|\varphi|)^{2^*-1}|\varphi| \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, teremos

$$\begin{aligned} I_3'(u,v)(\varphi,\psi) &= \frac{1}{2^*}\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_u(u+\theta t\varphi, v+\theta t\psi)\varphi + H_v(u+t\theta\varphi, v+\theta t\psi)\psi]dx \\ &= \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_u(u,v)\varphi + H_v(u,v)\psi]dx. \end{aligned}$$

Para finalizar, provaremos que I_3' é contínuo. Com efeito, seja $z_n = (u_n, v_n) \to z_0 = (u_0, v_0)$ em X. Note que

$$\begin{aligned} |[I_3'(z_n) - I_3'(z_0)](\varphi,\psi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_u(z_n) - H_u(z_0)]\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_v(z_n) - H_v(z_0)]\psi\right| \\ &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_u(z_n) - H_u(z_0)]\varphi\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)[H_v(z_n) - H_v(z_0)]\psi\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f^+||H_u(z_n) - H_u(z_0)||\varphi| + \int_{\mathbb{R}^N} |f^+||H_v(z_n) - H_v(z_0)||\psi| \\ &\leqslant |f^+|_{\frac{N}{2}}\left(|H_u(z_n) - H_u(z_0)|_{2^*}|\varphi|_{2^*} + |H_v(z_n) - H_v(z_0)|_{2^*}|\psi|_{2^*}\right). \end{aligned}$$

Novamente usando o fato de $Y_\phi \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ vem

$$|[I_3'(z_n) - I_3'(z_0)](\varphi,\psi)| \leqslant |f^+|_{\frac{N}{2}}(\|H_u(z_n) - H_u(z_0)\| + |\|H_v(z_n) - H_v(z_0)\|)\|(\varphi,\psi)\|.$$

Logo,

$$\|I_3'(z_n) - I_3'(z_0)\|_{H'} \leqslant |f^+|_{\frac{N}{2}}\left(\|H_u(z_n) - H_u(z_0)\| + \|H_v(z_n) - H_v(z_0)\|\right) \to 0$$

uma vez que H_u e H_v são contínuas. Portanto, I_3' é contínuo.
Diante disso, combinando as Proposições A.2, A.3 e A.4 temos que o funcional $I_{\lambda\mu}$ é de classe $\mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$.

Proposição A.5 *Os funcional $J_1, J_2, J_3 : X_\varphi \to \mathbb{R}$ dados por*

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)u^2dx \\ J_2(u) &= \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^q dx \\ J_3(u) &= \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^{2^*}dx \end{aligned}$$

são de classe $\mathcal{C}^1(X_\varphi, \mathbb{R})$ *com*

$$\begin{aligned} J_1'(u)v &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x)uvdx \\ J_2'(u)v &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{q-2}uvdx \\ J_3'(u)v &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^{2^*-2}uvdx \end{aligned}$$

para todo $v \in X_\varphi$.

Prova: Vamos mostrar que o funcional J_2 é de classe $\mathcal{C}^1$, os outros seguem de modo análogo. Calculemos a derivada de Gâteaux de J_2. Para isso, defina a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = f(x)|s|^q$ e então $h'(s) = qf(x)|s|^{q-2}s$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio, dados $t \in (0,1)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe $\gamma \in (\alpha, \alpha + t\beta)$ tal que

$$h(\alpha + t\beta) - h(\alpha) = h'(\gamma)t\beta.$$

Desde que $\gamma \in (\alpha, \alpha + t\beta)$, implica que $\gamma = \alpha + t\delta\beta$ para algum $\delta \in (0,1)$. Logo,

$$h(\alpha + t\beta) - h(\alpha) = h'(\alpha + t\delta\beta)t\beta$$

isto é,

$$\frac{h(\alpha + t\beta) - h(\alpha)}{t} = qf(x)|\alpha + t\delta\beta|^{q-2}(\alpha + t\delta\beta)\beta.$$

Além disso, sejam $u, v \in X_\varphi$ e fixemos $x \in \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\begin{aligned} \left|\frac{h(u+tv) - h(v)}{t}\right| &= qf(x)|u + t\delta v|^{q-2}|u + t\delta v||v| \\ &\leqslant qf(x)(|u| + |v|)^{q-2}(|u| + |v|)|v|. \end{aligned}$$

Usando Hölder, obtêm-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} q(|u| + |v|)^{q-2}(|u| + |v|)|v| &\leqslant q|f|_\infty \|(|u| + |v|)\|_{2^*}^{q-2} \|(|u| + |v|)\|_{2^*} \|v\|_{2^*} \\ &= q|f|_\infty \|(|u| + |v|)\|_{2^*}^{q-1} \|v\|_{2^*} < +\infty. \end{aligned}$$

Logo, $qf(x)(|u|+|v|)^{q-2}(|u|+|v|)|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\begin{aligned} J_1'(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{J_1(u+tv)-J_1(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u+t\delta v|^{q-2}(u+t\delta v)vdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^{q-2}uvdx. \end{aligned}$$

A contínuidade de J_1' segue usando argumentos análogos ao que fizemos em I_3' acima. Assim, a Proposição $A.5$ garante que $J_\mu \in \mathcal{C}^1(X_\varphi, \mathbb{R})$.

Apêndice B

Resultados Auxiliares

Neste apêndice apresentamos os principais resultados usados nas demonstrações envolvendo os resultados desta tese.

Definição B.1 *Seja* $\varphi : M \to \mathbb{R}$ *uma função, definimos a parte positiva e negativa de* φ *por* $\varphi^+(x) = \max\{\varphi(x), 0\}$ *e* $\varphi^-(x) = \max\{-\varphi(x), 0\}$*, respectivamente. E ainda que* $\varphi(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x)$ *e* $|\varphi(x)| = \varphi^+ + \varphi^-$*. Além disso,* $\varphi^+(x) \geqslant 0$ *e* $\varphi^-(x) \geqslant 0$ *para todo* x*.*

Definição B.2 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*. Dizemos que* f *é homogênea de grau* p *se*

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_N) = \lambda^p f(x_1, x_2, ..., x_N)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Teorema B.1 (Teorema de Euler) *Seja* $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ *uma função homogênea de grau* k *em* $\mathbb{R}^N_+$ *e de classe* C^1*. Então, para qualquer* x *vale*

$$x\nabla f(x) = xf(x).$$

Prova: Ver [13].

Teorema B.2 *Suponha que* E *seja um espaço de Banach reflexivo então toda sequência limitada em* E *possui uma subsequência convergente.*

Prova: Ver [12].

Teorema B.3 (Lema de Fatou) *Seja M um espaço mensurável onde encontra-se definida uma medida μ. Seja (f_n) uma sequência de funções não negativas. Então*

$$\int_M (\liminf_{n\to+\infty} f_n) d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_M f_n d\mu.$$

Prova: Ver [34].

Teorema B.4 (Desigualdade de Young) *Sejam $1 < p, q < \infty$ com $p^{-1} + q^{-1} = 1$ e $\varepsilon > 0$ qualquer. Então,*

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad a, b \geqslant 0$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

Prova: Ver [24].

Teorema B.5 (Desigualdade de Höder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\| \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver [24].

Teorema B.6 (Brezis-Lieb) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < +\infty$. Se (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_n \to u$ q.s em Ω. Então, $u \in L^p(\Omega)$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

Prova: Ver [8].

Teorema B.7 (Valor Médio) *Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em $(a, a+h)$. Então, existe um número $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+h) - f(a) = f'(a + \theta h) h.$$

Prova: Ver [30].

Teorema B.8 *Seja X um espaço métrico completo e $\phi : X \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semicontínuo inferiormente. Suponha que ϕ seja limitado inferiormente e sejam $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ e $u \in X$ dados tais que*

$$\phi(u) \leqslant \inf_{v\in X} \phi(v) + \varepsilon.$$

Então, existe $v_\varepsilon \in X$ tal que
a) $\phi(v_\varepsilon) \leqslant \phi(u)$;
b) $d(u, v_\varepsilon) \leqslant 1/\lambda$*;*
c) Para todo $w \neq v_\varepsilon$*, tem-se* $\phi(v_\varepsilon) < \phi(w) - \lambda\varepsilon d(w, v_\varepsilon)$.

Prova: Ver [22].

Teorema B.9 (Banach Alaouglu) *A bola fechada unitaria $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca estrela.*

Prova: Ver [12].

Teorema B.10 (Milman-Pettis) *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Prova: Ver [12].

Teorema B.11 (Imersões contínuas) *Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N, (N \geqslant 2)$, Ω de classe $\mathcal{C}^m$ e $1 \leqslant p < \infty$, então*
a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leqslant q \leqslant p^* = \dfrac{Np}{N - mp}$ *se* $mp < N$*;*
b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leqslant q < \infty$ *se* $mp = N$*;*
c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ *se* $mp > N$.

Prova: Ver [12].

Teorema B.12 (Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach real e $\Phi \in E$ um funcional de classe $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição Palais-Smale(PS). Suponha que $\Phi(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam satisfeitas:*
(G_1) *Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que* $\Phi(u)\Big|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha > 0$;
(G_2) *Existe um $e \in E \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $\Phi(e) < 0$.*
Então, Φ possui um valor crítico $c \geqslant \alpha$, com

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Prova: Ver [43].

Teorema B.13 (Dominada Lebesgue) *Sejam (φ_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*

a) $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ *q.t.p em* Ω*;*
b) Existe $g(x) \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|\varphi_n(x)| \leqslant g(x)$ *q.t.p em* Ω *para todo* n*.*
Então $\varphi \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \varphi_n(x)dx = \int_\Omega \varphi(x)dx.$$

Prova: Ver [6].

Teorema B.14 *Se a função* H *satisfaz a hipótese* (H_4)*. Então,*

$$S_H = M_F^{-1} S$$

onde M_F *é dado no item* (F_1) *da Observação 1.2. Além disso, se* S *é atingido em* ω_0*, então* S_H *é atigindo em* $(s_0\omega_0, t_0\omega_0)$*,para todo* $(s_0, t_0) \in \mathbb{R}^2_+$ *satisfazendo*

$$H(s_0, t_0)^{2/2^*} = s_0^2 + t_0^2.$$

Prova: Ver [15].

Teorema B.15 *Todo conjunto de nível regular de uma aplicação diferenciável é uma subvariedade fechada imersa cuja condimensão é igual a dimensão do contradomínio.*

Prova: Ver [29].

Teorema B.16 (Desigualdade de Harnack) *Seja* u *uma solução fraca da equação*

$$(\mathcal{AB}) \quad \mathcal{A}(x, u, \nabla u) = \mathcal{B}(x, u, \nabla u)$$

em alguma bola $B_{3R}(0) \subset \Omega$*. Assuma que* $\alpha < n$ *e que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas*

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &\leqslant a|p|^{\alpha-1} + b|u|^{\alpha-1} + e \\ |\mathcal{B}| &\leqslant c|p|^{\alpha-1} + d|u|^{\alpha-1} + f \\ p \cdot \mathcal{A} &\geqslant |p|^\alpha - d|u|^\alpha - g \end{aligned}$$

para $x \in \Omega$ *e todos os valores de* u *e* p*. Aqui* $\alpha > 1$ *é um expoente fixado,* a *é uma constante positiva, e* b *até* g *são funções mensuráveis sobre* Ω*. Assuma ainda que*

$$b, e \in L^{\frac{n}{\alpha-1}}(\Omega), \quad c \in L^{\frac{n}{\alpha-1}}(\Omega) \quad d, f, g \in L^{\frac{n}{\alpha-\varepsilon}}(\Omega)$$

onde ε é algum número positivo menor do que ou igual a 1.
Então

$$\max_{B_R(0)} u \leqslant C(\min_{B_R(0)} u + k),$$

onde C e k são constantes que dependen somente da estrutura de $(\mathcal{AB})$.

Prova: Ver [36].

Bibliografia

[1] Allegretto, Walter., Huang, Yin Xi., Eigenvalues of the indefinite-weight p-Laplacian in weighted spaces. Funkcial. Ekvac. 38 (1995), no. 2, 233–242.

[2] Alves, C. O., de Morais Filho, D. C., Souto, M. A. S., On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents. Nonlinear Anal. 42 (2000), no. 5, Ser. A: Theory Methods, 771–787.

[3] Ambrosetti, Antonio., Rabinowitz, Paul H., Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

[4] Aubin, Th., Problimes isopdrime'triques et espaces de Soboleu, J. Diff. Geom. 11, 1976, pp. 573-598.

[5] Azorero, J. Garcia., Alonso, I. Peral., Multiplicity of solutions for ellptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term. Trans. Amer. Math. Soc.323(2)(1991)877-895.

[6] Bartle, Robert G., The Elements of integration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library Editiom Published, New York, 1995.

[7] Binding, Paul A., Drábek Pavel., Huang, Yin Xi., Positive solutions of critical quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$. Mathematica Bohemica, Vol.124(1999),No.2-3,149-166.

[8] Brézis, Haïm., Lieb, Elliott., A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), no. 3, 486–490.

[9] Brézis, Haïm., Nirenberg, Louis., Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

[10] Brézis, Haïm., Vazquez, Juan Luis., Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. Revista Matemática de la. Vol 10, no. 2(1997)

[11] Brézis, Haïm,. Vazquez, Juan Luiz., Blow-up solutions of some nonlinear ellpitic problems. Revista Matematica de la. Universidad Complutense de Madrid. Vol 10, n.2:1997.

[12] Brézis, Haïm., Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations. Rutgers Universty, 2010.

[13] Border, K.C., Euler's Theorem for Homogeneous Functions. Division of the Humanities and Social Sciences, v. 2017.10.27:16.34.

[14] Bustillos, O. V., Sassine, A., A Magia da Curva Cicloide: Braquistócrona e Tautócrona. São Paulo: Scor Tecci, 2011.

[15] Cao, Daomin., Noussair, Ezzat S., Multiple positive and nodal solutions for semilinear elliptic problems with critical exponents. Indiana Univ. Math. J. 44 (1995), no. 4, 1249–1271.

[16] Costa, David., An invitation to Variational Methods in Differential Equations. Univesrty of Nevada, Las Vegas. Department of Mathematical Sciences,2007.

[17] De Morais Filho, D. C., Souto, M. A. S. Systems of p-laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical Sobolev exponent degrees. Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no. 7-8, 1537–1553

[18] Drábek, Pavel., Huang, Yin Xi., Bifurcation problems for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$. Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 1, 171–188.

[19] Drábek, Pavel., Huang, Yin Xi., Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent. J. Differential Equations 140 (1997), no. 1, 106–132.

[20] Drábek, Pavel., Kufner, Alois., Nicolosi, Francesco., Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities. Walter the Gruyter, New York.1997.

[21] Edelson, Allan L., Rumbos, Adolfo J., Linear and semilinear eigenvalue problems in $\mathbb{R}^N$. Comm. Partial Differential Equations 18 (1993), no. 1-2, 215–240.

[22] Ekeland, Ivar., On the variational principle, J. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[23] Figueiredo, Djairo Guedes., Princípio de Dirichlet. Matemática Universitária 1.1(1985), pp. 63-84.

[24] Folland, Gerald B., Real Analisys: Modern Techniques and Applications, A Wiley-Intersciensce Publication, New York, 1999.

[25] Furtado, M.F., da Silva, J.P.P., Multiplicity of solutions for homogeneous elliptic systems with critical growth. J.Math.Anal.Appl.385(2012),no.2,770-785.

[26] Furtado, M.F., da Silva, J.P.P., Multiplicity of solutions for homogeneous elliptic systems with critical growth. J. Math. Anal. Appl. 385 (2012), no. 2, 770–785.

[27] Gilbarg, David., Trudinger, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Classics Math., Springer-Verlag,Berlin, 2001, reprint of the 1998 edition, MR 1814364 (2001k:35004)

[28] Girão, P.M., Gomes, J.M., Multibump nodal solutions for an indefinite superlinear elliptic problem. J. Differential Equations. 247.4(2009):1001-1012.

[29] Lee, John M., Introduction to Smooth Manifolds. University of Washington. Seattle, WA 98195-4350 USA.

[30] Lima, Elon L., Analise Real, Vol 2, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[31] Lions, P.L., The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), no. 1, 145–201.

[32] Miranda, C., Un'osservazione sul teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital. Ser. II, Ann, II u, 1 XIX (1940) 5–7.

[33] Rabinowitz, Paul H., Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. ISBN: 0-8218-0715-3

[34] Royden, H.L., FitzPatrick, P.M., Real Analysis. Fourth Edition. Pearson Education, 2010.

[35] Silva, Elves A.B., Xavier, Magda S., Multiplicity of solutions quasilinear elliptic problems involving critical soboleb exponents. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (2003), 341-358.

[36] Serrin, James., Local behavior of solutions of quasi-linear equations. Acta Math. 111 1964 247–302.

[37] Swanson, C.A., Yu, L.S., Critical $p-$Laplacian problems in $\mathbb{R}^N$. Ann.Mat. Pura Appl.169(1995), 233-250.

[38] Smith, David Eugene., A Source Book in Mathematics. Vol 2. Dover Publications, Inc. New York, 1993.

[39] Struik, Dirk Jan., A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Princeton University Press. New Jersey, 1986.

[40] Tarantello, Gabriela., On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 9 (1992), no. 3, 281–304.

[41] Talenti, G., Best constants in Soboleu inequality, Annali di Mat. 110, 1976, pp. 353-372.

[42] Troutman, Jonh., Variational Calculus and Optimal Control. 2ª ed. Berlin: Springer Verlag, 1995.

[43] Willem, Michel., Minimax theorems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. x+162 pp. ISBN: 0-8176-3913-6