UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Tese de Doutorado

Estudo de uma Classe Generalizada de Equações de Schrödinger

Andrelino Vasconcelos Santos

Junho de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Andrelino Vasconcelos Santos

Estudo de uma Classe Generalizada de Equações de Schrödinger

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA - UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior

Junho de 2019

V331e Vasconcelos Santos, Andrelino
Estudo de uma Classe Generalizada de Equações de Schrödinger / Andrelino Vasconcelos Santos. — 2019.
106 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Equações diferenciais parciais elípticas. I. Título.

CDD 510

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Andrelino Vasconcelos Santos

Estudo de uma Classe Generalizada de Equações de Schrödinger

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM, como pré-requisito para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 13 de Junho de 2019.

Resultado: APROVADO

Banca Examinadora

João Rodrigues dos S. Júnior

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior (Orientador)
PPGME/PDM/UFPA

Prof. Dr. Antonio Suárez Fernández
PDM/Universidad de Sevilla

Diego Araujo de Souza

Prof. Dr. Diego Araujo de Souza
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Damião Júnio G. Araújo

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

À Deus que, sem dúvida, está presente em todos os momentos da minha vida.

À minha família e amigos que sempre estiveram presentes no decorrer desta jornada.

Ao meu orientador Prof^{o}. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior pela paciência, dedicação e excelente orientação. Serei sempre grato por tudo.

Aos professores Antonio S. Fernández, Diego A. de Souza, Damião J. G. Araújo e Francisco J. S. de Araujo Corrêa, por terem aceito o convite para participar da banca examinadora e pelas contribuições dadas.

Aos professores do Programa de Doutorado em Matemática-PDM por minha formação profissional.

À SEDUC pelo auxílio financeiro.

Aos colegas de curso pela parceria desde o curso de verão.

Finalmente, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, investigaremos condições gerais sobre a função ϑ para as quais a seguinte classe de problemas

$$(P) \qquad \begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \mathcal{P}(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução não trivial, onde Ω denota um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, com fronteira suave, $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1 satisfazendo algumas hipóteses adequadas aos nossos propósitos e $\mathcal{P}$ é uma função do tipo potência ou uma classe de funções mais geral que uma soma de potências dos tipos côncava e convexa.

Palavras chaves: Equações generalizadas de Schrödinger; Método Variacional; Mudança de variável.

Abstract

In this work, we will investigate general conditions on the function ϑ for which the following class of problems

$$(P) \qquad \begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \mathcal{P}(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

has a non-trivial solution, where Ω denotes a limited domain of the $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, with boundary smooth, $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ is a pair function of class C^1 satisfying some hypotheses suited to our purposes and $\mathcal{P}$ is a function of the power type or a class of functions more general than a sum of powers of the concave and convex types.

Keywords: Generalized Schrödinger equations; Variational Method; Change of variable.

Conteúdo

Notações

C, C_0, C_1, C_2 denotam constantes positivas cujo valor exato não é relevante aos nossos propósitos.

$|A|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$.

$\displaystyle\int_A f$ denota a integral de Lebesgue de uma função f sobre o conjunto mensurável A.

$\square$ fim da demonstração de um teorema, proposição ou lema.

$|u|_s$ significa a norma de u em $L^s(\Omega)$.

$\|u\|$ é a norma de u em $H_0^1(\Omega)$.

$\|u\|_\infty$ denota a norma de u em $L^\infty(\Omega)$.

λ_k denota o k-ésimo autovalor do operador Laplaciano com condição de fronteira homogênea de Dirichlet.

$[1 < u]$ denota o conjunto $\{x \in \Omega : 1 < u(x)\}$.

e_k denota uma autofunção normalizada em $L^\infty(\Omega)$ associada a λ_k.

Introdução

Neste trabalho, investigaremos condições gerais sobre a função ϑ para a qual a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda|u|^{q-2}u + \mu|u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui solução não trivial, onde λ e μ são números reais, p e q são expoentes positivos a serem detalhados posteriormente, Ω denota um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, com fronteira suave e $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1 satisfazendo algumas hipóteses adequadas que serão apresentadas ao longo do texto.

Quando $\vartheta(s) = 1 + (l(s^2)')^2/2$, para alguma função l de classe C^2, o problema (P) torna-se

$$\begin{cases} -\Delta u - \Delta(l(u^2))l'(u)^2 u = \lambda|u|^{q-2}u + \mu|u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{P'}$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, (P') está relacionado com a existência de soluções de ondas estacionárias para equações parabólicas de Schrödinger quaselineares da forma

$$i\partial_t z = -\Delta z + V(x)z - \rho(|z|^2)z - \Delta(l(|z|^2))l'(|z|^2)z, \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

onde $z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto C$, $V : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ é um potencial dado e l, ρ são funções reais.

Equações quaselineares do tipo (1) aparece naturalmente na Física-Matemática e tem modelado alguns fenômenos físicos, dependendo do tipo de função l considerada. Por exemplo, quando $l(s) = s$, (1) foi usada para modelar uma equação de membrana de superfluido na física de plasmas, ver [28]. Quando $l(s) = (1 + s)^{1/2}$, a equação (1) modela a auto-canalização de um laser de alta potência ultra curto na matéria, ver [8, 11, 12, 29]. Além disso, (1) também aparece em mecânica de fluidos [31], na mecânica quântica dissipativa [26], na teoria do ferromagnetismo e magnons de Heisenberg [36] e na teoria da matéria condensada [33].

Nos últimos anos, muitos autores estudaram problemas estacionários de Schrödinger como (P'), quando $l(s) = s$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$. Ao menos em nosso conhecimento, o primeiro resultado é devido a [35] que, usando um argumento de minimização com vínculo, provou a existência de soluções não-negativas para $\lambda > 0$ suficientemente grande e $q \in (1, (N+2)/(N-2))$. Posteriormente, um resultado de existência geral foi obtido em [30]. De um modo mais detalhado, em [30], os autores consideram uma mudança de variável e reduzem o problema quasilinear a um semilinear, com o auxílio da teoria dos espaços de Orlicz, os autores são capazes de provar a existência de uma solução positiva através do teorema do passo da montanha. O mesmo método de mudança de variável também foi utilizado em [15] por Jeanjean e Colin, mas uma estrutura variacional envolvendo espaços usuais de Sobolev foi considerada para tratar o problema. Em [15] os autores mostraram vários resultados de existência de solução usando métodos variacionais. Referências mais recentes podem ser encontradas em [19, 20, 43, 48].

No caso em que $l(s) = (1+s)^{1/2}$ menos resultados são conhecidos, encaminhamos o leitor a [16, 41, 42]. Em [16], os autores usaram método variacional e estabeleceram existência e unicidade de solução global para um problema de Cauchy associado a uma equação de Schrödinger não linear. Em [41], eles provaram a existência de uma solução esfericamente simétrica do clássico resultado fornecido por Berestycki e Lions, ver [7]. Finalmente, em [42], os autores usaram uma mudança de variável apropriada e o Teorema do passo da montanha.

Com respeito a problemas de Schrödinger do tipo (P) em domínios limitados, existem bem poucos resultados disponíveis na literatura. Por exemplo, um resultado bem recente é devido a Figueiredo, Santos Júnior e Suárez em [23]. Neste artigo os autores estudaram a existência, unicidade e multiplicidade de soluções para uma equação não linear de Schrödinger da forma

$$\begin{cases} -\Delta u - au\Delta(u^2) = \lambda u^q & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$ é um domínio limitado e regular, $q > 0$, $a > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizaram principalmente o método de sub-supersolução, bifurcação e argumentos variacionais para obter os resultados. Essa referencia foi bastante inspiradora na realização desta tese, que tem como parte de seus objetivos (ver capítulos 2 e 3) apresentar resultados análogos para uma classe de operadores mais gerais. Tais resultados, em alguns casos, são novos inclusive quando se considera o operador estudado em [23].

De agora em diante, nos concentraremos nos problemas que estudamos neste trabalho. Com relação a não-linearidade, consideraremos dois tipos de problemas:

(A) Problemas com não-linearidades do tipo potência.

(B) Problemas com não-linearidades do tipo "concavo-convexa".

Neste trabalho, nosso principal objetivo foi encontrar soluções não triviais para o problema (P) com não linearidades dos tipos (A) e (B), e tivemos a seguinte conclusão:

(I) Em problemas do tipo (A), mas precisamente, problemas de Schrödinger generalizados do tipo

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{\lambda,q})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, λ é um parâmetro real, $q > 1$ e $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1, provamos, quando $q \in (1, 2.2^*)$ e variando o parâmetro λ, existência de soluções positivas, existência de soluções quaisquer e estudamos o comportamento assintótico das soluções com respeito a λ. Além disso, mostramos não existência de solução não trivial quando $q \in [2.2^*, +\infty)$ e Ω é um domínio estrelado.

(II) Nos problemas do tipo (B), obtivemos, quando varia os parâmetros λ e μ, $1 < q < 4$ e $\max\{2, q\} < p < 2.2^*$, existência de múltiplas soluções e também resultados de não existência de solução não trivial.

A seguir enumeramos alguns problemas em aberto relacionado ao operador estudado neste trabalho:

1) O problema (P) associado a uma não linearidade mais geral, isto é

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

onde Ω é limitado e f é uma função de Caratheodory com uma condição de crescimento apropriada.

2) O problema (P) com $\Omega = \mathbb{R}^N$. Neste caso, as técnicas utilizadas para obter os resultados não podem ser aplicadas, pelo menos de uma forma direta.

3) (P) com uma não linearidade do tipo $\lambda(1+u)^q$.

4) O caso crítico e supercrítico($(q/2) \geqslant 2^*$).

No presente trabalho, as hipóteses satisfeitas pela função ϑ são as seguintes:

(ϑ_1) $s \mapsto \vartheta(s)$ é crescente em $(0, +\infty)$;

(ϑ_2) $s \mapsto \vartheta(s)/s^2$ é não crescente em $(0, +\infty)$;

(ϑ_3) $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty} \vartheta(s)/s^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, para alguma constante $\alpha > 0$.

Alguns exemplos de funções satisfazendo (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3) são:

1) $\theta_1(s) = 1 + s^2$;

2) $\theta_2(s) = (1 + |s|^p)^{1/p} + s^2$, com $p \in [1, 2]$;

3) $\theta_3(s) = 1 + \ln(1 + e^{s^2})$;

4) $\theta_4(s) = 1 + \ln(e^{s \arctan s} + e^{s^2 + s \arctan s})$;

5) $\theta_5(s) = 1 + \ln((1 + |s|)^{|s|}(1 + e^{s^2}))$.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, os quais comentaremos a seguir.

No capítulo 1, nosso principal objetivo é mostrar que é possível mudar a tarefa de procurar soluções do problema geral

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \mathcal{P}(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

pela a tarefa de encontrar soluções de

$$\begin{cases} -\Delta v = f'(v)\mathcal{P}(f(v)) & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ é solução da equação diferencial ordinária

$$f'(s) = \frac{1}{\vartheta(f(s))^{1/2}}, \ \forall \ s \in (0, +\infty),$$

$f(0) = 0$ e $f(s) = -f(-s)$ para $s \in (-\infty, 0)$.

A importância de se considerar referida mudança de variável se dá pelo fato de não podermos aplicar diretamente métodos variacionais ao problema (P), uma vez que o funcional energia associado ao mesmo não fica bem definido em espaços de Sobolev usuais. Essa dificuldade foi superada com a mudança de variável f mais geral que, por exemplo, aquela considerada em [23]. Dessa forma, obtivemos um problema, mais tratável, no sentido de que podemos associar um funcional energia bem definido e portanto aplicar métodos variacionais.

Neste capítulo, provamos a Proposição 1.2.1, que estabelece uma relação entre os problemas (PD) e (P), de modo que encontrar solução para (P) se reduz a mostrar existência de solução para (PD). Além disso, a Proposição 1.2.2, que fornece algumas propriedades da função f, as quais tem um papel importante nas demonstrações de nossos principais teoremas de existência de solução.

No capítulo 2, estudamos o problema generalizado estacionário de Schrödinger

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,q}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave, λ é um parâmetro real, $q > 1$ e $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1 satisfazendo as condições (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3) definidas anteriormente.

Na busca de soluções positivas, fizemos um estudo detalhado de modo a dar um panorama completo do conjunto de soluções do problema quando q assume diferentes valores. Comentaremos cada um dos casos a seguir.

1) Caso $1 < q < 2$.

   Neste caso, usamos o método de sub e supersolução para mostrar existência de solução positiva u_λ, com $\lambda > 0$. Provamos também que se a aplicação $s \mapsto g(s)/s$ é decrescente, então existe uma única solução positiva. Além disso, estudamos seus comportamentos assintóticos quando λ tende a zero ou infinito.

2) Caso $q = 2$.

   Novamente, usamos sub e supersolução. Argumentando de modo análogo ao caso anterior, provamos existência e unicidade de solução positiva u_λ, neste caso, para $\lambda > \vartheta(0)\lambda_1$. Além disso, estudamos seus comportamentos assintóticos quando λ tende a $\vartheta(0)\lambda_1$ ou infinito.

3) Caso $2 < q < 4$.

   Utilizamos o método de sub e supersolução. Mostramos a existência de um número $\lambda_* > 0$, tal que o problema não possui solução positiva, se $\lambda \in (0, \lambda_*)$, possui pelo menos uma solução positiva se $\lambda = \lambda_*$ e pelo menos duas soluções ordenadas $w_\lambda < v_\lambda$, se $\lambda \in (\lambda_*, +\infty)$.

4) Caso $q = 4$.

   Utilizamos o método de bifurcação. Inspirados nas ideias de [32], mostramos que a partir de $\lambda = (\alpha^2/4)\lambda_1$ bifurca do infinito um contínuo ilimitado $\mathcal{C}$ de soluções positivas, além disso $\lambda = (\alpha^2/4)\lambda_1$ é o único ponto com essa propriedade.

5) Caso $4 < q < 2.2^*$.

   Novamente, usamos o método de bifurcação. Utilizando um problema auxiliar, e argumentando como em [32], obtemos que a partir de $\mu = \lambda_1$ emana de $w = 0$, um contínuo ilimitado $\mathcal{C}$ de soluções do problema auxiliar. Por regularidade elíptica, concluímos que $Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = (-\infty, \lambda_1)$. Consequentemente se $\mu = 0$, existe uma solução positiva u_λ para todo $\lambda > 0$.

6) Caso $q \geqslant 2.2^*$.

Mostramos um resultado de não existência de solução não trivial, quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio estrelado. Usamos a identidade de Pohozaev, as condições (ϑ_1), (ϑ_2) e as propriedades da f para obtermos o resultado.

A seguir comentamos algumas dificuldades que surgiram neste capítulo.

1) No caso $1 < q < 2$, em se buscar existência de solução positiva para o problema $(D_{\lambda,q})$, mais precisamente

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda g(v) & \text{em} \quad \Omega \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Uma vez que estamos trabalhando com uma mudança de variável f mais geral, uma dificuldade surgiu na demonstração do item (g) do Lema 2.1.1, ou seja, que a aplicação $s \mapsto g(s)/s$ é decrescente com respeito a $|s|$, pois, tal propriedade é necessária para provar a unicidade de solução positiva. Para contornar essa dificuldade, assumimos as hipóteses (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3), com respeito a função ϑ. A mesma dificuldade ocorreu no caso $q = 2$.

2) No caso $q = 4$, onde usamos o método de bifurcação, nos deparamos com a necessidade de termos

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{g(s)}{s} = C > 0,$$

que é uma das condições necessárias para usar o método. Novamente, as hipóteses assumidas (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3) foram cruciais nesta questão. A mesma dificuldade ocorreu no caso $4 < q < 2.2^*$.

Os principais resultados deste capítulo são:

Teorema 0.0.1 *Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ e $q \in (1, 2)$. Então $(P_{\lambda,q})$ possui uma única solução positiva u_λ se, e somente se $\lambda > 0$. Além disso,*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda\|_\infty = 0, \quad e \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\|_\infty = +\infty.$$

Teorema 0.0.2 *Suponha que (ϑ_1) e (ϑ_3) ocorrem e $q = 2$. Então o problema $(P_{\lambda,q})$ possui uma única solução positiva u_λ se, e somente se, $\lambda > \vartheta(0)\lambda_1$. Além disso,*

$$\lim_{\lambda \to \vartheta(0)\lambda_1} \|u_\lambda\|_\infty = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\|_\infty = +\infty.$$

Teorema 0.0.3 *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (2,4)$. *Então, existe* $\lambda_* > 0$ *tal que:*

(i) $(P_{\lambda,q})$ *não possui uma solução positiva se* $\lambda \in (0, \lambda_*)$*;*

(ii) $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos uma solução positiva se* $\lambda = \lambda_*$*;*

(iii) $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos duas soluções positivas ordenadas* $w_\lambda < v_\lambda$*, se* $\lambda \in (\lambda_*, \infty)$. *Além disso, a aplicação* $\lambda \mapsto v_\lambda$ *é crescente e*

$$\lim_{\lambda\to\infty} |v_\lambda|_\infty = \infty.$$

Teorema 0.0.4 *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q = 4$. *Então o problema* $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos uma solução positiva se, somente se,* $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_1$. *Além disso,*

$$\lim_{\lambda\to(\alpha^2/4)\lambda_1} \|u_\lambda\|_\infty = \infty.$$

Teorema 0.0.5 *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (4, 22^*)$*, onde* $2^* = 2N/(N-2)$. *Então,* $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos uma solução positiva se, e somente se,* $\lambda > 0$. *Além disso,*

$$\lim_{\lambda\to 0} |u_\lambda|_\infty = \infty.$$

Teorema 0.0.6 *Suponha que as hipóteses* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorrem,* $q \in [22^*, \infty)$ *e* Ω *é um domínio estrelado. Então, o problema* $(P_{\lambda,q})$ *não possui solução positiva.*

O capítulo 2 deu origem a um artigo intitulado “Study of a class of generalized Schrödinger equations”, em colaboração com Antonio Suárez, que ainda está submetido e se encontra sob avaliação, ver [39].

No capítulo 3, estudamos o mesmo problema do capítulo anterior, entretanto, agora, focamos nosso estudo na existência de múltiplas soluções(não necessariamente positivas) para o problema

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{\lambda,q})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, λ é um parâmetro real, $q > 1$ e $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1 satisfazendo as condições (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3) vistas anteriormente.

Para tal propósito, usamos a teoria do gênero de Krasnoselskii associada ao método da variedade de Nehari (quando necessário). Considerando valores diferentes em λ e $q > 1$, obtemos resultados de multiplicidade de soluções. Ao menos em nosso conhecimento esses resultados são novos neste contexto e alguns deles estendem aqueles obtidos em [23] para diferentes classes gerais de problemas de Schrödinger.

Assim como no capítulo 2, dividimos esse capítulo em cinco casos, os quais comentamos a seguir.

1) Caso $1 < q < 2$.

   Inspirados em [27], aplicamos o Teorema 1.0.10 para obter uma sequência de soluções (u_k) que mudam de sinal. Além disso,

$$\lim_{k \to +\infty} \|u_k\| = 0.$$

2) Caso $q = 2$.

   O Teorema referente a este caso melhora o Teorema 0.0.2. De fato, uma vez que neste caso particular provamos que a função g é assintoticamente linear em zero e no infinito, respectivamente. Usamos o Teorema 9.1 em [37] para mostrar a existência de pelo menos $1 + \sum_{i=2}^{m} dim V_{\lambda_i}$ pares de soluções não triviais u_i onde $I(f^{-1}(u_i)) > 0$.

3) Caso $2 < q < 4$.

   O Teorema referente a este caso, melhora o resultado de não existência do Teorema 0.0.3, bem como nos diz que quanto maior o tamanho de λ mais soluções possui o problema. Usando o Teorema clássico de Clark em [13], estabelecemos a existência de pelo menos k pares de soluções não triviais com energia negativa, qualquer que seja $\lambda > \lambda_*$.

4) Caso $q = 4$.

   Este caso melhorou o resultado no Teorema 0.0.4. De fato, uma vez que neste caso particular provamos que g é assintoticamente linear em zero e no infinito, respectivamente. Usando a teoria do gênero combinada com argumentos envolvendo a variedade de Nehari, mostramos que o número de soluções aumenta com λ. Para ser mais preciso, se $dimV_{\lambda_i}$ denota a dimensão do auto espaço V_{λ_i} associado ao i-ésimo autovalor λ_i do operador Laplaciano com condição de fronteira homogênea de Dirichlet, provamos que o problema $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos $1+\sum_{i=2}^{m} dimV_{\lambda_i}$ pares de soluções não triviais u_i onde $I(f^{-1}(u_i)) > 0$.

5) Caso $4 < q < 2.2^*$.
   Usamos a simetria do Passo da Montanha. Argumentando como em [37], obtemos existência de infinitas soluções com energia positiva, para $\lambda > 0$.

Agora, mencionamos algumas dificuldades que surgiram neste capítulo.

1) No caso $q = 2$, para usarmos uma versão do Teorema clássico de Clark, precisamente, o Teorema 9.1 em [37], provamos no Lema 3.3.1 que, a aplicação $s \mapsto g(s)/s$ é assintoticamente linear no zero e $s \mapsto |g(s)|$ no infinito, o que supriu a dificuldade em provar que o funcional I é limitado inferiormente e
$$\sup_{w \in s_* \mathcal{S}_{d(m)}} I(w) < 0.$$

2) No caso $2 < q < 4$, ao usarmos o Teorema clássico de Clark, a dificuldade em mostrar a seguinte inclusão
$$\mathcal{S}_{\alpha_k} \cap X_k = (\alpha_k \mathcal{S}_1) \cap X_k \subset \mathcal{A}_k := \{v \in X_k : |[|v| > 1]| \geq \beta_k\},$$
foi superada usando o Lema 3.4.2. Consequentemente, mostramos que
$$\sup_{w \in \mathcal{S}_{\alpha_k} \cap X_k} I(w) < 0,$$
sempre que $\lambda > \lambda_* := qs_k^2/2f(1)^{q/2}\beta_k$.

3) No caso $4 < q < 2.2^*$, a dificuldade em mostrarmos que para cada subespaço E_k de dimensão k de $H_0^1(\Omega)$, $k > 1$, existem $\gamma_k > 0$ e $r_k > 0$ tais que $I(v) \leqslant 0$, para todo $v \in E_k \setminus B_{r_k}(0)$, foi contornada pelo Lema 3.4.2.

Os principais resultados deste capítulo são descritos a seguir:

Teorema 0.0.7 *Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ e $q \in (1,2)$. Se $\lambda > 0$, então $(P_{\lambda,q})$ possui uma sequência $\{u_k\}$ de soluções que mudam de sinal tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\| = 0.$$

Teorema 0.0.8 *Suponha que $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ ocorrem e $q \in (2,4)$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_k > 0$ tal que $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos k pares de soluções não triviais com energia negativa, qualquer que seja $\lambda > \lambda_k$.*

Teorema 0.0.9 *Suponha que $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ ocorrem e $q \in (4, 22^*)$, onde $2^* = 2N/(N-2)$. Então, para cada $\lambda > 0$, $(P_{\lambda,q})$ possui infinitas soluções com energia positiva.*

Teorema 0.0.10 *Suponha que $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ sejam satisfeitas. Então, Se $q = 2$ e $\lambda > \vartheta(0)\lambda_m$,o problema $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos $1+\sum_{i=2}^{m} dimV_{\lambda_i}$ pares de soluções não triviais u_i onde $I(f^{-1}(u_i)) > 0$.*

Teorema 0.0.11 *Suponha que $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ sejam satisfeitas. Então, se $q = 4$ e $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_m$, o problema $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos $1+\sum_{i=2}^{m} dimV_{\lambda_i}$ pares de soluções nã triviais u_i onde $I(f^{-1}(u_i)) > 0$.*

Esse capítulo deu origem a um artigo intitulado “On some classes of generalized Schrödinger equations” em colaboração com Amanda S. S. Correa Leão e Joelma Morbach, que ainda está submetido e se encontra sob avaliação, ver [14].

No capítulo 4, trataremos as seguintes classes de problemas generalizados estacionários de Schrödinger

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda|u|^{q-2}u + \mu|u|^{p-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{\lambda,\mu,q,p})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave, $1 < q < 4$, $\max\{2,q\} < p < 22^*$, λ e μ são parâmetros reais e $\vartheta : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ é uma função par de C^1 satisfazendo as condições (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3).

Nosso propósito neste capítulo é fornecer um esboço razoável sobre a existência de múltiplas soluções para o problema $(P_{\lambda,\mu,q,p})$, quando os parâmetros envolvidos assumem valores diferentes.

Devido à natureza do operador generalizado de Schrödinger, alguns fenômenos interessantes podem ser observados quando se compara o prolema $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ ao problema côncavo-convexo clássico envolvendo o operador laplaciano. Para ser mais preciso, no caso do operador laplaciano, os resultados de existência de múltiplas soluções com alta energia, são observados quando $1 < q < 2 < p$ e $\mu > 0$, ver [6]. Por outro lado, a existência de múltiplas soluções com energia negativa, ocorre quando $1 < q < 2 < p$ e $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, ver [3]. No caso do operador generalizado de Schrödinger estudado neste capítulo, um resultado análogo de múltiplas soluções com alta energia para $\mu > 0$ ocorre apenas para $1 < q < 4 < p$. Além disso, os resultados de múltiplas soluções com energia negativa para $\lambda > 0$, requer $1 < q < 2$ e $p \neq 4$. O que se nota no Teorema 0.0.13 é a existência de uma "zona cinzenta", isto é, $2 \leq q < p \leq 4$, onde o conjunto de soluções tem um comportamento intermediário, apresentando simultaneamente influência em ambas as potências, bem como do comprimento de λ e μ. Nessa zona, pode-se obter um número de soluções tão grande quanto se queira, contanto que λ e μ sejam suficientemente grandes.

Por uma análise direta do funcional energia associado ao problema dual obtido pela mudança de variável e pelas propriedades da função f mostramos resultados de não existência de soluções não triviais, sob certas condições impostas a q, p, λ e μ. Na busca de existência de múltiplas soluções, usamos o Teorema da Fonte e da Fonte dual.

Agora, discutimos algumas dificuldades que surgiram ao longo deste capítulo.

1) Para mostrar resultados de não existência de soluções não triviais usamos as propriedades da mudança de variável f, para ser mais preciso, a Proposição 1.2.2, da qual surgiram dificuldades na demonstração dos itens (v) e (vi), por ser a mudança de variável que usamos mais geral. Para contorna essas dificuldades, assumimos as hipóteses (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3).

2) Na busca de múltiplas soluções, na demonstração da Proposição 4.3.1(que

trata da condição $(PS)_c^*$), para mostrar que a sequência é limitada em $H_0^1(\Omega)$, no caso $2 < q < 4$ não foi possível usarmos o item (iv) da Proposição 1.2.2 da mesma forma que no caso $1 < q \leqslant 2$, pelo fato que $|u|^q$ pode não ser integrável. Para superar essa dificuldade, notamos que pelos itens (v) e (vi) da proposição 1.2.2

$$|f(s)| \leqslant (8/\alpha^2)^{1/4}|s|^{1/2}, \ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

3) Uma outra dificuldade ocorreu na prova da Proposição 4.3.2, para ser mas preciso, em estimar por baixo o seguinte termo

$$\int_{[1\leqslant \rho u]} |\rho u|^{p/2},$$

que foi obtida pelo Lema 4.1.2, onde mostramos que existem constantes positivas $\beta_k(r)$ e α_k tais que para cada $r \in [1, 2^*]$,

$$\beta_k(r) \leqslant \int_{[1\leqslant |su|]} |u|^r,$$

para todo $u \in \mathcal{S}_k$ e $s > \alpha_k$.

4) Na prova da Proposição 4.3.3, a dificuldade no item (ii) foi estimarmos o termo

$$\int_\Omega |u|^q,$$

a qual foi solucionada pelo Lema 4.1.1.

Neste capítulo, nosso resultado melhora alguns resultados em [40], no sentido de que estamos considerando uma classe mais geral de operadores.

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 0.0.12 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *Se $\lambda, \mu \leq 0$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ não tem solução não trivial;*

(ii) *Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1) - (\vartheta_2)$, $1 < q \leq 2$ e $p \geq 4$. Se $\lambda < 0$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ não possui solução u satisfazendo $J(f^{-1}(u)) \leq 0$. Analogamente, se $\mu < 0$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ não possui solução u satisfazendo $J(f^{-1}(u)) \geq 0$;*

(*iii*) *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$. *Se* $\max\{2, q\} < p \leq 4$ *e* $\lambda < 0$, *então existe* $\mu_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução não trivial, seja qual for* $\mu \in (0, \mu_*)$. *Além disso, se* $1 < q < 2 < p \leq 4$ *e* $\lambda > 0$, *então existe* $s_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução* u *satisfazendo* $J(f^{-1}(u)) \geq 0$, *qualquer que seja* $\mu \in (-s_*, s_*)$.

(*iv*) *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$. *Se* $2 \leq q < 4$ *e* $\mu < 0$, *então existe* $\lambda_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução não trivial, seja qual for* $\lambda \in (0, \lambda_*)$. *Além disso, se* $2 \leq q < p \leq 4$ *e* $\mu > 0$, *então existe* $t_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução* u *satisfazendo* $J(f^{-1}(u)) \leq 0$, *qualquer que seja* $\lambda \in (-t_*, t_*)$.

(*v*) *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$. *Se* $2 \leq q < p \leq 4$, *então existe* $r_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução não trivial, seja qual for* $\lambda, \mu \in (-r_*, r_*)$.

Teorema 0.0.13 *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(*i*) *Seja* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ *e* $1 < q < 4$. *Se* $4 < p < 22^*$, *então* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *possui uma sequência de soluções* $\{u_n\}$ *com* $J(f^{-1}(u_n)) \to \infty$. *Além disso, se* $\max\{q, 2\} < p < 4$, *então para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $\mu_k > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *possui pelo menos* k *pares de soluções não triviais* u_k *com* $J(f^{-1}(u_k)) > 0$, *desde que* $\mu \in (\mu_k, \infty)$;

(*ii*) *Seja* $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ *e* $p \neq 4$. *Se* $1 < q < 2$, *então* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *possui uma sequência de soluções* $\{u_n\}$ *com* $J(f^{-1}(u_n)) < 0$ *e* $J(f^{-1}(u_n)) \to 0$. *Além disso, se* $2 \leq q < 4$, *então para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $\lambda_k > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *possui pelo menos* k *pares de soluções não triviais* u_k *com* $J(f^{-1}(u_k)) < 0$, *desde que* $\lambda \in (\lambda_k, \infty)$.

(*iii*) *Seja* $\lambda > 0$, $\mu < \lambda_1\alpha^2/4$ *e* $p = 4$. *Então, para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $\lambda_k > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *possui pelo menos* k *pares de soluções não triviais* u_k *com* $J(f^{-1}(u_k)) < 0$, *desde que* $\lambda \in (\lambda_k, \infty)$, *onde* α *é definido em* (ϑ_3).

O capítulo 4 deu origem a um artigo intitulado "Multiple solutions for a generalized Schrödinger problem with "concave-convex" nonlinearities" que foi aceito para publicação na revista Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, ver [38].

Após o capítulo 4, apresentamos uma conclusão deste trabalho e para finalizar, no Apêndice A, enunciamos alguns resultados importantes utilizados ao longo deste trabalho e indicamos as referências para as consultas das demonstrações. Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os resultados principais.

Capítulo 1

Problemas de Schrödinger Generalizados

Neste capítulo apresentaremos a classe de problemas que trataremos nesta tese, consideraremos sua formulação dual e estudaremos as principais propriedades da mudança de variável associada.

1.1 Apresentação do problema

O objetivo deste trabalho é investigar condições gerais sobre as funções ϑ e $\mathcal{P}$ para as quais a classe de problemas

$$(P) \qquad \begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \mathcal{P}(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução não trivial, onde Ω denota um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, com fronteira suave e $\mathcal{P}$ é uma função contínua com crescimento apropriado. Além disso, ao longo de toda a tese, assumiremos que $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1 satisfazendo as seguintes condições:

(ϑ_1) $s \mapsto \vartheta(s)$ é crescente em $(0, +\infty)$;

(ϑ_2) $s \mapsto \vartheta(s)/s^2$ é não crescente em $(0, +\infty)$;

(ϑ_3) $\lim_{|s|\to\infty} \vartheta(s)/s^2 = \alpha^2/2$, para algum $\alpha > 0$.

1.2 A formulação dual

Nesta seção, nosso principal objetivo é mostrar que é possível substituir o árduo trabalho de buscar soluções do problema (P) por outro, mais tratável, de encontrar soluções do problema

$$(PD) \qquad \begin{cases} -\Delta v = f'(v)\mathcal{P}(f(v)) & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ é a mudança de variável, dada como solução da equação diferencial ordinária

$$f'(s) = \frac{1}{\vartheta(f(s))^{1/2}}, \ \forall\, s \in (0, +\infty), \tag{1.1}$$

$f(0) = 0$ e $f(s) = -f(-s)$ para $s \in (-\infty, 0)$.

A Proposição seguinte estabelece uma relação entre os problemas (PD) e (P), de modo que encontrar solução para (P) se reduz a mostrar existência de solução para (PD). Vale ressaltar que a mudança de variável f tem um papel fundamental nessa relação.

Proposição 1.2.1 *Uma função $v \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca do problema dual (PD) se, e somente se, $u = f(v) \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca de (P).*

Demonstração. Seja $v \in C^1(\overline{\Omega})$ uma solução fraca de (PD). Claramente temos $u = f(v) \in C^1(\overline{\Omega})$. Além disso,

$$\nabla u = f'(v)\nabla v$$

e

$$\nabla v = \frac{1}{f'(v)}\nabla u = (f^{-1})'(u)\nabla u. \tag{1.2}$$

Desde que v é solução fraca de (PD) e $u = f(v)$, obtemos por (1.2)

$$\int_\Omega (f^{-1})'(u)\nabla u \nabla w = \int_\Omega \frac{p(u)}{(f^{-1})'(u)} w, \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

Sendo $u \in C^1(\overline{\Omega})$, para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, podemos escolher

$$w = (f^{-1})'(u)\varphi = \vartheta(u)^{1/2}\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Além disso, por (1.3)

$$\int_\Omega (f^{-1})'(u)(f^{-1})''(u)|\nabla u|^2\varphi + \int_\Omega [(f^{-1})'(u)]^2\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega p(u)\varphi.$$

De (1.1),

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \vartheta'(u)|\nabla u|^2\varphi + \int_\Omega \vartheta(u)\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega p(u)\varphi.$$

Integrando por partes, concluímos que

$$\int_\Omega [-div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2]\varphi = \int_\Omega p(u)\varphi, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Mostrando que u é solução fraca de (P). A outra parte da demonstração é análoga. □

Tendo em vista a Proposição 1.2.1, ao longo deste trabalho estamos interessados em estudar o problema (PD), que é conhecido como o problema dual associado a (P).

A próxima proposição fornece algumas propriedades da função f.

Proposição 1.2.2 *Seja $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ e f uma solução do problema* (1.1). *As seguintes afirmações são válidas:*

(*i*) *f é unicamente definida e é um difeomorfismo crescente de classe C^2, com $f''(s) = -\vartheta'(f(s))/2\vartheta(f(s))^2$;*

(*ii*) *$0 < f'(s) \leqslant 1$, para todo $s \in \mathbb{R}$;*

(*iii*) *$\lim\limits_{s\to 0} f(s)/s = 1/\vartheta(0)^{1/2}$;*

(*iv*) *$|f(s)| \leqslant |s|$ para todo $s \in \mathbb{R}$;*

(*v*) *Suponha que (ϑ_1) e (ϑ_2) ocorrem. Então*

$$|f(s)|/2 \leqslant f'(s)\,|s| \leqslant |f(s)|\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R},$$

e a aplicação $s \mapsto |f(s)|/\sqrt{|s|}$ é não crescente em $(-\infty, 0)$ e não decrescente em $(0, +\infty)$;

(vi) *Suponha que* (ϑ_1), (ϑ_2) *e* (ϑ_3) *ocorrem. Então*

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{\sqrt{|s|}} = \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4} \quad e \quad \lim_{|s|\to+\infty} f(s)/s = 0.$$

Além disso, existe $C > 0$ *tal que* $|f'(s)f(s)| \leqslant C$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$.

(vii) *Suponha que* (ϑ_1), (ϑ_2) *e* (ϑ_3) *ocorrem. Então*

$$|f(s)| \leqslant \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4} |s|^{1/2}, \ \forall \ s \in \mathbb{R}.$$

(viii) *Suponha que* (ϑ_1), (ϑ_2) *e* (ϑ_3) *ocorrem. Então existem constantes positivas* C *e* A *tais que*

$$|f(s)| > C|s|^{\frac{1}{2}}, \ \forall \ |s| > A.$$

Demonstração. *(i)* A existência, unicidade, regularidade e monotonicidade seguem do fato de f ser solução de (1.1). De fato, observemos que definindo

$$f(s) = \left(\Upsilon^{-1}\right)(s),$$

onde

$$\Upsilon(t) = \int_0^t \vartheta(r)^{1/2} dr,$$

obtemos

$$f'(s) = \frac{1}{\Upsilon'(t)} = \frac{1}{\vartheta(t)^{1/2}} = \frac{1}{\vartheta(f(s))^{1/2}} > 0.$$

Sendo ϑ par, temos

$$\Upsilon(-t) = \int_0^{-t} \vartheta(r)^{1/2} dr = -\int_0^t \vartheta(-z)^{1/2} dz = -\int_0^t \vartheta(z)^{1/2} dz = -\Upsilon(t).$$

Portanto Υ^{-1} é ímpar. É claro que essa é a única solução de (1.1), $f \in C^2$ e $f' > 0$ em $\mathbb{R}$.

Para ver que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, note que sendo $\vartheta \geqslant 1$, $|\Upsilon(t)| \geqslant |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$\lim_{|t|\to+\infty} |\Upsilon(t)| = +\infty.$$

Sendo assim,

$$\lim_{|s|\to+\infty} |f(s)| = +\infty. \tag{1.5}$$

(ii) Decorre diretamente da definição de f e do fato de f ser ímpar. *(iii)* Pela regra de L'Hôspital temos

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}=\lim_{s\to 0}f'(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\vartheta(f(s))^{1/2}}=\frac{1}{\vartheta(0)^{1/2}}.$$

(iv) De fato, se $s>0$, segue de (ii) que

$$\int_0^s f'(t)dt\leqslant\int_0^s dt.$$

Da desigualdade anterior e por (i), temos

$$0<f(s)\leqslant s.$$

Logo

$$|f(s)|\leqslant|s|.$$

Por outro lado, se $s<0$ e sendo f ímpar, segue que

$$|f(s)|=|-f(-s)|=|f(-s)|\leqslant|-s|=|s|\,.$$

(v) Novamente, sendo f ímpar, é suficiente provarmos para $s>0$. Seja $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por:

$$F(s)=f(s)\vartheta(f(s))^{1/2}-s.$$

Note que $F(0)=0$ e, por (i) e (ϑ_1), temos

$$\begin{aligned}F'(s)&=f'(s)\vartheta(f(s))^{1/2}+\frac{1}{2}\vartheta(f(s))^{-1/2}\vartheta'(f(s))f'(s)f(s)-1\\&=\frac{\vartheta'(f(s))f(s)}{2\vartheta(f(s))}>0,\end{aligned}$$

o que mostra a segunda desigualdade em (v).

Para mostrar a primeira desigualdade de (v), seja $G:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por:

$$G(s)=2s-f(s)\vartheta(f(s))^{1/2}.$$

Observe que, $G(0)=0$, e por (i) e (ϑ_2), resulta que

$$\begin{aligned}G'(s)&=2-\left[f(s)\vartheta(f(s))^{1/2}\right]'\\&=1-\frac{\vartheta'(f(s))f(s)}{2\vartheta(f(s))}\geqslant 0,\end{aligned}$$

o que mostra a primeira desigualdade em (v). Agora, observe que para $s > 0$,

$$\left(\frac{f(s)}{\sqrt{s}}\right)' = \frac{2f'(s)s - f(s)}{2s\sqrt{s}} \geqslant 0.$$

Desde que $|f(s)|/\sqrt{|s|}$ é par, concluímos que ela é monótona não-decrescente em $(0, +\infty)$ e monótona não-crescente em $(-\infty, 0)$.

(vi) Observe que de (v),

$$\lim_{|s|\to+\infty} |f(s)| / \sqrt{|s|} = l \in (0, +\infty].$$

Como ϑ é par(e consequentemente f é ímpar), é suficiente considerar o caso $s \to +\infty$. Suponhamos que

$$\lim_{s\to+\infty} f(s)/\sqrt{s} = +\infty. \tag{1.6}$$

Neste caso, por (1.5), obtemos $f(s) \to +\infty$ sempre que $s \to +\infty$. Pela Regra de L'Hôspital e por (ϑ_3), concluímos de (1.6) que

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{\sqrt{s}} &= \lim_{s\to+\infty} 2f'(s)\sqrt{s} \\
&= 2 \lim_{s\to+\infty} \sqrt{\frac{s}{\vartheta(f(s))}} \\
&= 2\sqrt{\frac{\lim\limits_{s\to+\infty} \left(\sqrt{s}/f(s)\right)^2}{\lim\limits_{s\to+\infty} \vartheta(f(s))/(f(s))^2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{0}{\alpha^2/2}} = 0,
\end{aligned}$$

o que contradiz (1.6). Portanto, $0 < \lim\limits_{s\to+\infty} f(s)/\sqrt{s} = l < \infty$. Então, novamente da Regra de L'Hôspital, temos

$$\begin{aligned}
l &= 2\sqrt{\frac{\lim\limits_{s\to+\infty} \left(\sqrt{s}/f(s)\right)^2}{\lim\limits_{s\to+\infty} \vartheta(f(s))/(f(s))^2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{1/l^2}{\alpha^2/2}}.
\end{aligned}$$

Mostrando que,

$$l^2 = \frac{8}{l^2\alpha^2}.$$

Consequentemente,

$$l = \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4}.$$

O segundo limite é uma consequência do primeiro. De fato,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = \lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{\sqrt{s}}\frac{1}{\sqrt{s}} = \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4}.0 = 0.$$

Agora, sendo

$$\lim_{s\to+\infty} f'(s)f(s) = \lim_{s\to+\infty} f'(s)\sqrt{s}.\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{2}}{l\alpha}.l = \frac{\sqrt{2}}{\alpha},$$

concluímos que existe $C > 0$ tal que $|f'(s)f(s)| < C$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

(vii) Note que de (iii) temos

$$\lim_{s\to0^+} \frac{f(s)}{\sqrt{s}} = \lim_{s\to0^+} \frac{f(s)}{s}\sqrt{s} = \frac{1}{\vartheta(0)^{1/2}}.0 = 0,$$

e de (v) sabemos que $s \mapsto f(s)/\sqrt{s}$ é não-decrescente em $(0, +\infty)$. Assim, (vi) concluímos que

$$\frac{f(s)}{\sqrt{s}} \leqslant \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4},\ \forall\ s > 0.$$

Desde que f é ímpar, fica provado (vii).

$(viii)$ Observe que de (vi), dado $\epsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que

$$\left|\frac{|f(s)|}{\sqrt{|s|}} - \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4}\right| < \epsilon, \forall\ |s| > A,$$

o que implica

$$\frac{|f(s)|}{\sqrt{|s|}} > \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4} - \epsilon,\ \forall\ |s| > A.$$

Escolhendo $0 < \overline{\epsilon} < (8/\alpha^2)^{1/4}$, obtemos

$$|f(s)| > C|s|^{1/2},\ \forall\ |s| > A,$$

onde $C = (8/\alpha^2)^{1/4} - \epsilon > 0$ e $A = A(\overline{\epsilon})$. $\square$

Observação 1.2.1 *É uma consequência do item* (i) *da proposição anterior que* f *é positiva em* $(0, +\infty)$ *e negativa em* $(-\infty, 0)$. *Além disso, a inversa* f^{-1} *de* f *é também de Classe* C^2.

Capítulo 2

Não-linearidades do tipo potência: Soluções positivas

2.1 Introdução

Neste capítulo investigamos as condições gerais para as quais o problema generalizado estacionário de Schrödinger

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda|u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,q}$}$$

possui solução não trivial, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, λ é um parâmetro real, $q > 1$ e $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1 satisfazendo (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3) mencionadas no primeiro capítulo.

No que segue, fixaremos algumas notações que serão usadas no decorrer deste capítulo: λ_k denota o k-ésimo autovalor do operador laplaciano com a condição de fronteira de Dirichlet, φ_k denotará uma autofunção normalizada em $H_0^1(\Omega)$ associada a λ_k. Uma autofunção associada a λ_k e normalizada em $L^\infty(\Omega)$ será denotada por e_k. Denotaremos por e a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v = 1 & \text{em } D, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial D, \end{cases} \tag{2.1}$$

para algum domínio limitado e suave $D \supset \overline{\Omega}$. Além disso, $e_L := \min_{x\in\overline{\Omega}} e(x)$ e $e_M := \max_{x\in\overline{\Omega}} e(x)$.

Obteremos agora alguns resultados que serão usados posteriormente. Primeiramente, observe que considerando a mudança de variável f do capítulo anterior, transformamos o problema $(P_{\lambda,q})$ em

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda g(v) & \text{em} \quad \Omega \\ v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$D_{\lambda,q}$}$$

onde

$$g(s) = f'(s)\,|f(s)|^{q-2}\,f(s) \quad \text{em} \quad \Omega$$

e f é a solução da equação (1.1).

Definição 2.1.1 *Uma solução fraca para o problema $(D_{\lambda,q})$ é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \lambda \int_\Omega f'(u)\,|f(u)|^{q-2}\,f(u)v, \tag{2.2}$$

ou seja, u é um ponto crítico do funcional $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ associado ao problema $(D_{\lambda,q})$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega G(u), \tag{2.3}$$

onde $G(s) = \int_0^s g(t)dt = [1/q]|f(s)|^q$ e

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega f'(u)\,|f(u)|^{q-2}\,f(u)v. \tag{2.4}$$

O Lema seguinte fornece algumas propriedades da função g que desempenham um papel importante na prova de nossos principais resultados.

Lema 2.1.1 *A função g tem as seguintes propriedades:*

(a) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = +\infty$ *se* $q \in (1, 2)$*;*

(b) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = 1/\vartheta(0)$ *se* $q = 2$*;*

(c) $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = 0$ *se* $q \in (2, +\infty)$*;*

(d) Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ ocorram. Então $\displaystyle\lim_{|s|\to +\infty} \frac{g(s)}{s} = 0$ *se* $q \in (1, 4)$*;*

(*e*) *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorram. Então,* $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty}\frac{g(s)}{s}=4/\alpha^2$, *se* $q=4$;

(*f*) *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_2)$ *ocorram. Então,* $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty} g(s)/s=+\infty$, *se* $q\in(4,+\infty)$;

(*g*) *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorram. Então, a aplicação* $s\mapsto g(s)/s$ *é decrescente com relação a* $|s|$, *para* $q\in(1,2]$;

(*h*) *Suponha que* (ϑ_2) *ocorre. Então, a aplicação* $s\mapsto g(s)/s$ *é crescente com relação a* $|s|$ *para* $q\in[4,+\infty)$.

Demonstração. Para os itens (a), (b) e (c), segue dos itens (ii) e (iii) da Proposição 1.2.2 que

$$\lim_{s\to 0}\frac{g(s)}{s}=\lim_{s\to 0}f'(s)\left(\frac{|f(s)|}{|s|}\right)^{q-2}\frac{f(s)}{s}|s|^{q-2}=\begin{cases}+\infty & \text{se } q\in(1,2),\\ 1/\vartheta(0) & \text{se } \quad q=2,\\ 0 & \text{se } q\in(2,+\infty).\end{cases}$$

Para verificar o item (d), desde que f é ímpar, é suficiente considerar o caso em que s é positivo. Observe que dos itens (v) e (vi) da Proposição 1.2.2, temos

$$0<\frac{g(s)}{s}=\frac{f'(s)f(s)^{q-1}}{s}\leqslant\frac{f(s)^q}{s^2}\leqslant\left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{q/4}\frac{1}{s^{(4-q)/2}}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{g(s)}{s}=0 \ \ se \ \ q\in(1,4).$$

(e) Desde que g é ímpar, é suficiente considerar o caso em que $s>0$. Logo, do item (v) da Proposição 1.2.2 e de (ϑ_3)

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{g(s)}{s}=\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{f(s)}{\sqrt{s}}\right)^2.\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{\vartheta(f(s))^{1/2}}=\left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/2}.\frac{\sqrt{2}}{\alpha}=\frac{4}{\alpha^2}.$$

Para mostrar (f), novamente basta considerar o caso $s>0$. De fato, do item (v) da Proposição 1.2.2, temos

$$\frac{g(s)}{s}=\frac{f'(s)f(s)^{q-1}}{s}\geqslant\frac{f(s)^q}{2s^2}\geqslant\frac{f(1)^q}{2}s^{(q-4)/2},\ \ \forall s>1,$$

o que implica

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{g(s)}{s}=+\infty \quad se \ \ q\in(4,+\infty).$$

Para mostrar (g), sendo g ímpar, basta considerar o caso em que $s > 0$. Com efeito, observe que sendo $q \in (1,2]$, por (ϑ_1) e pelo item (v) da Proposição 1.2.2

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g(s)}{s}\right)' &= \frac{f''(s)f(s)^{q-1}s + (q-1)f(s)^{q-2}(f'(s))^2 s - f'(s)f(s)^{q-1}}{s^2} \\
&< \frac{(q-1)f(s)^{q-2}(f'(s))^2 s - f'(s)f(s)^{q-1}}{s^2} \\
&= \frac{f'(s)f(s)^{q-2}}{s^2}\left((q-1)f'(s)s - f(s)\right) < 0.
\end{aligned}$$

Para (h), basta considerar, novamente, o caso $s > 0$. Notemos que,

$$\left(\frac{g(s)}{s}\right)' =$$

$$\frac{(q-1)f(s)^{q-2}f'(s)s\vartheta(f(s))^{1/2} - f(s)^{q-1}\vartheta(f(s))^{1/2} - \dfrac{s\vartheta'(f(s))f'(s)f(s)^{q-1}}{2\vartheta(f(s))^{1/2}}}{s^2\vartheta(f(s))} =$$

$$\left((q-1)f(s)^{q-2}f'(s)s - f(s)^{q-1} - \frac{s\vartheta'(f(s))f(s)^{q-1}}{2\vartheta(f(s))^{3/2}}\right)\frac{1}{s^2\vartheta(f(s))^{1/2}}.$$

Por outro lado, por (ϑ_2) e do item (v) da Proposição 1.2.2, para cada $q \in [4,\infty)$, temos

$$\begin{aligned}
&(q-1)f(s)^{q-2}f'(s)s - f(s)^{q-1} - \frac{s\vartheta'(f(s))f(s)^{q-1}}{2\vartheta(f(s))^{3/2}} \geqslant \\
&(q-1)f(s)^{q-2}f'(s)s - f(s)^{q-1} - f(s)^{q-2}f'(s)s = \\
&f(s)^{q-2}((q-2)f'(s)s - f(s)) \geqslant \\
&f(s)^{q-2}(2f'(s)s - f(s)) > 0,
\end{aligned}$$

para todo $s \in (0,+\infty)$. Portanto, $s \mapsto g(s)/s$ é crescente em $(0,+\infty)$ para todo $q \in [4,+\infty)$. □

Lema 2.1.2 *Se $\lambda \leqslant 0$, então a única solução de $(P_{\lambda,q})$ é a solução trivial.*

Demonstração. De fato, seja u uma solução de $(P_{\lambda,q})$ com $\lambda \leqslant 0$. Então, pela Proposição 1.2.1, $v = f^{-1}(u)$ é uma solução de $(D_{\lambda,q})$. Sendo f crescente com $f(0) = 0$, temos que

$$0 \leqslant \int_\Omega |\nabla v|^2 = \lambda \int_\Omega g(v)v = \lambda \int_\Omega f'(v)\,|f(v)|^{q-2}\,f(v)v \leqslant 0,$$

mostrando que $v = 0$. Consequentemente, $u = 0$. $\square$

A partir de agora, vamos considerar apenas os casos em que λ é positivo.

Para finalizar esta subseção, fixaremos algumas notações. Dado $m \in L^\infty$, denotamos por $\lambda_1(-\Delta + m)$ o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + m(x)u = \lambda u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Lembrando que $\lambda_1(-\Delta + m)$ é crescente com respeito a m(ver Teorema 1.0.3).

Além disso, dado $0 < r < 1$, denotamos por $w_{[\mu,r]}$ a única solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w^r & \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

Sabemos que $w_{[\mu,r]}$ existe se, e somente se, $\mu > 0$. De fato, se $\mu \leqslant 0$, claramente, a única solução é a trivial. Logo, se $w_{[\mu,r]}$ é solução positiva, necessariamente temos $\mu > 0$. Por outro lado se $\mu > 0$, dos limites

$$\lim_{s\to 0} s^r/s = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{s\to +\infty} s^r/s = 0,$$

obtemos uma solução positiva usando o método de sub-supersolução. Além disso, temos

$$w_{[\mu,r]} = \mu^{1/(1-r)} w_{[1,r]}. \tag{2.7}$$

No que segue, usaremos o seguinte resultado:

Lema 2.1.3 *Assumindo que $\underline{w}$(resp. $\overline{w}$) é uma subsolução(resp. supersolução) positiva de (2.6). Então*

$$\underline{w} \leqslant w_{[\mu,r]} (\textit{resp. } w_{[\mu,r]} \leqslant \overline{w}).$$

Demonstração. Ver [22].

2.2 Caso $1 < q < 2$.

Nesta seção obteremos um resultado de existência de solução positiva do problema $(P_{\lambda,q})$ quando $q \in (1,2)$. Além disso, estudaremos seus comportamentos assintóticos quando λ tende a zero ou infinito.

Teorema 2.2.1 *Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ e $q \in (1,2)$. Então, $(P_{\lambda,q})$ possui uma única solução positiva u_λ se, e somente se $\lambda > 0$. Além disso,*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda\|_\infty = 0, \quad e \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\|_\infty = +\infty.$$

Demonstração. De fato, se u_λ é a única solução positiva de $(P_{\lambda,q})$, então necessariamente devemos ter $\lambda > 0$, pois, do Lema 2.1.2, se $\lambda \leqslant 0$, a única solução de $(P_{\lambda,q})$ é a trivial. Por outro lado, dado $\lambda > 0$, segue do item (a) do Lema 2.1.1, que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} \leqslant \frac{g(\epsilon e_1)}{\epsilon e_1}, \tag{2.8}$$

onde e_1 é a única autofunção positiva associada a λ_1 tal que $\|e_1\|_\infty = 1$, mostrando que $\underline{v} = \epsilon e_1$ é uma subsolução de $(D_{\lambda,q})$, pois,

$$-\Delta \underline{v} = -\Delta(\epsilon e_1) = \epsilon \lambda_1 e_1 < \lambda g(\epsilon e_1) = \lambda g(\underline{v}) \text{ em } \Omega. \tag{2.9}$$

Por outro lado, seja e a única solução positiva de (2.1). Então $\overline{v} = Ke$ é supersolução de $(D_{\lambda,q})$ se

$$K \geqslant \lambda g(Ke), \text{ em } \Omega. \tag{2.10}$$

Observe que para mostrar (2.10), é suficiente mostrar que

$$e_M \frac{g(Ke_L)}{Ke_L} \leqslant \frac{1}{\lambda}, \tag{2.11}$$

onde

$$e_M = \max_{x \in \overline{\Omega}} e(x) > 0 \quad \text{e} \quad e_L = \min_{x \in \overline{\Omega}} e(x) > 0.$$

De fato, do item (g) do Lema 2.1.1 e assumindo que (2.11) ocorre,

$$\lambda g(Ke) \leqslant \lambda \frac{g(Ke_L)}{Ke_L} Ke \leqslant \frac{\lambda Ke}{\lambda e_M} \leqslant K, \text{ em } \Omega.$$

Agora, provaremos (2.11): De fato, pelo item (d) do Lema 2.1.1, para $K > 0$ suficientemente grande,

$$\frac{g(Ke_L)}{Ke_L} < \frac{1}{e_M\lambda}. \tag{2.12}$$

Portanto, $\overline{v} = Ke$ é uma supersolução de $(D_{\lambda,q})$, pois,

$$-\Delta\overline{v} = -\Delta(Ke) = K(-\Delta e) = K \geqslant \lambda g(Ke) = \lambda g(\overline{v}) \text{ em } \Omega.$$

Consequentemente, podemos escolher $\epsilon > 0$ e $K > 0$ tais que $\underline{v} \leqslant \overline{v}$. Portanto, existe uma solução positiva v_λ de $(D_{\lambda,q})$ tal que

$$\underline{v} \leqslant v_\lambda \leqslant \overline{v}. \tag{2.13}$$

Pela Proposição 1.2.1, concluímos que $u_\lambda = f(v_\lambda)$ é uma solução positiva do problema $(P_{\lambda,q})$.

Para prova a unicidade, sejam v_λ e w_λ soluções positivas de $(D_{\lambda,q})$, consequentemente $u_\lambda = f(v_\lambda)$ e $z_\lambda = f(w_\lambda)$ são soluções positivas de $(P_{\lambda,q})$. Então

$$-\frac{\Delta v_\lambda}{v_\lambda} + \frac{\Delta w_\lambda}{w_\lambda} = \lambda\frac{g(v_\lambda)}{v_\lambda} - \lambda\frac{g(w_\lambda)}{w_\lambda}. \tag{2.14}$$

Multiplicando (2.14) por $(v_\lambda^2 - w_\lambda^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda\frac{g(v_\lambda)}{v_\lambda} - \lambda\frac{g(w_\lambda)}{w_\lambda}\right)(v_\lambda^2 - w_\lambda^2) = \left(-\frac{\Delta v_\lambda}{v_\lambda} + \frac{\Delta w_\lambda}{w_\lambda}\right)(v_\lambda^2 - w_\lambda^2)\\
&= |\nabla v_\lambda|^2 - \int_\Omega \nabla v_\lambda \nabla\left(\frac{w_\lambda^2}{v_\lambda}\right) - \int_\Omega \nabla w_\lambda \nabla\left(\frac{v_\lambda^2}{w_\lambda}\right) + \int_\Omega |\nabla w_\lambda|^2\\
&= \left(\left|\nabla v_\lambda - \frac{v_\lambda}{w_\lambda}\nabla w_\lambda\right|^2 + \left|\nabla w_\lambda - \frac{w_\lambda}{v_\lambda}\nabla v_\lambda\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\int_\Omega \left(\lambda\frac{g(v_\lambda)}{v_\lambda} - \lambda\frac{g(w_\lambda)}{w_\lambda}\right)(v_\lambda^2 - w_\lambda^2) = \int_\Omega \left(\left|\nabla v_\lambda - \frac{v_\lambda}{w_\lambda}\nabla w_\lambda\right|^2 + \left|\nabla w_\lambda - \frac{w_\lambda}{v_\lambda}\nabla v_\lambda\right|^2\right) \geqslant 0.$$

Logo, da desigualdade anterior e do item (g) do Lema 2.1.1, concluímos que $v_\lambda = w_\lambda$, e portanto $u_\lambda = f(v_\lambda) = f(w_\lambda) = z_\lambda$.

Agora, observe que se $\lambda \to 0$, podemos escolher $K(\lambda)$ em (2.12) tal que $K(\lambda) \to 0$, e temos

$$\lim_{\lambda\to 0} \|v_\lambda\|_\infty = 0. \tag{2.15}$$

De (2.15) e do item (iv) da Proposição 1.2.2, obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda\|_\infty = 0.$$

Por outro lado, para $\lambda \to +\infty$, podemos escolher $\epsilon(\lambda)$ em (2.8) tal que $\epsilon(\lambda) \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} v_\lambda(x) = +\infty.$$

Desde que f é um difeomorfismo crescente em $\mathbb{R}$, concluímos que

$$u_\lambda(x) = f(v_\lambda) \to +\infty \text{ quando } \lambda \to +\infty,$$

consequentemente

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\|_\infty = +\infty.$$

$\square$

2.3 Caso $q = 2$.

Nesta seção estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$ com $q = 2$. Novamente, usamos o método de sub-supersolução para estabelecer existência de solução e comportamento assintótico.

Teorema 2.3.1 *Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ e $q = 2$. Então o problema $(P_{\lambda,q})$ possui uma única solução positiva u_λ se, e somente se, $\lambda > \vartheta(0)\lambda_1$. Além disso,*

$$\lim_{\lambda \to \vartheta(0)\lambda_1} \|u_\lambda\|_\infty = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\|_\infty = +\infty.$$

Demonstração. De fato, se u_λ é uma solução positiva de $(P_{\lambda,q})$ então pela Proposição 1.2.1, $v_\lambda = f^{-1}(u_\lambda)$ é uma solução positiva de $(D_{\lambda,q})$, logo

$$-\Delta v_\lambda - \lambda \frac{g(v_\lambda)}{v_\lambda} v_\lambda = 0 v_\lambda.$$

Assim, sendo $v_\lambda > 0$, então

$$0 = \mu_1 \left(-\Delta - \lambda \frac{g(v_\lambda)}{v_\lambda} \right),$$

onde $\mu_1 \left(-\Delta - \lambda g(v_\lambda)/v_\lambda \right)$ é o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta v - \lambda m(x) = \mu v & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelos itens (b) e (g) do Lema 2.1.1, obtemos $(g(s)/s) < 1/\vartheta(0)$ para todo $s > 0$. Pelo Teorema 1.0.3, concluímos que

$$0 = \mu_1 \left(-\Delta - \lambda \frac{g(v_\lambda)}{v_\lambda} \right) > \mu_1 \left(-\Delta - \frac{\lambda}{\vartheta(0)} \right) = \lambda_1 - \frac{\lambda}{\vartheta(0)}.$$

Portanto, se existe solução positiva de $(P_{\lambda,q})$, então $\lambda > \vartheta(0)\lambda_1$. Por outro lado, se tivermos $\lambda > \vartheta(0)\lambda_1$, mostraremos primeiro que $\underline{v} = \epsilon e_1$ é subsolução de $(D_{\lambda,q})$, onde e_1 é a única autofunção positiva associada a λ_1 tal que $\|e_1\|_\infty = 1$. De fato, observe que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, pelo item (b) do Lema 2.1.1

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} < \frac{g(\epsilon)}{\epsilon}, \tag{2.16}$$

pois, $\lambda > \lambda_1\vartheta(0)$. Desde que $\epsilon \geqslant \epsilon e_1$, pelo item (g) do Lema 2.1.1

$$\frac{g(\epsilon)}{\epsilon} \leqslant \frac{g(\epsilon e_1)}{\epsilon e_1}. \tag{2.17}$$

Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue de (2.16) e (2.17) que

$$\lambda_1 \epsilon e_1 < \lambda g(\epsilon e_1), \tag{2.18}$$

mostrando que $\underline{v}$ é subsolução de $(D_{\lambda,q})$, pois,

$$-\Delta \underline{v} = -\Delta(\epsilon e_1) = \epsilon(-\Delta e_1) = \lambda_1 \epsilon e_1 < \lambda g(\underline{v}).$$

Agora, novamente pelo item (d) do Lema 2.1.1, $\overline{v} = Ke$ com e dado por (2.1) e K suficientemente grande é uma supersolução de $(D_{\lambda,q})$. Assim, podemos escolher ϵ e K tais que $\underline{v} \leqslant \overline{v}$ e portanto, existe uma solução positiva v_λ tal que

$$\underline{v} \leqslant v_\lambda \leqslant \overline{v} \text{ em } \Omega. \tag{2.19}$$

Logo, pela Proposição 1.2.1, $u_\lambda = f(v_\lambda)$ é uma solução positiva do problema $(P_{\lambda,q})$. A prova da unicidade da solução é exatamente como no caso $q \in (1,2)$. Agora, observe que se $\lambda \to +\infty$, podemos escolher $\epsilon(\lambda)$ em (2.16) tal que $\epsilon(\lambda) \to +\infty$, e assim

$$v_\lambda(x) \geqslant \epsilon(\lambda)\varphi_1(x) \to +\infty.$$

Desde que f é um difeomorfismo crescente em $\mathbb{R}$, concluímos que

$$u_\lambda(x) = f(v_\lambda(x)) \to +\infty,$$

consequentemente

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|u_\lambda\|_\infty = +\infty.$$

Agora, para $\lambda \to \lambda_1\vartheta(0)$, temos de (2.19) que v_λ é limitada em $L^\infty(\Omega)$. Então por argumentos de regularidade elíptica, concluímos que v_λ é limitada em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Logo, do Teorema 1.0.11, $v_\lambda \to v_0 \geqslant 0$ em $C^2(\overline{\Omega})$ quando $\lambda \to \vartheta(0)\lambda_1$. Desde que a única solução para $\lambda = \vartheta(0)\lambda_1$ é a função nula, segue que $v_0 \equiv 0$ em Ω. Do item (iv) da Proposição 1.2.2 temos que

$$0 \leqslant \|u_\lambda\|_\infty \leqslant \|v_\lambda\|_\infty \to 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{\lambda \to \vartheta(0)\lambda_1} \|u_\lambda\|_\infty = 0.$$

$\square$

2.4 Caso $2 < q < 4$.

Nesta seção, estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$ com $q \in (2,4)$. Mostraremos um resultado de não existência, para $\lambda \in (0, \lambda_*)$. Veremos que quando $\lambda = \lambda_*$, $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos uma solução positiva e quando $\lambda \in (\lambda_*, +\infty)$, existem pelo menos duas soluções positivas ordenadas.

Os próximos lemas serão utilizados na prova dos nossos principais resultados.

Lema 2.4.1 *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (2,4)$. *Se existir uma solução positiva* v_λ *de* $(D_{\lambda,q})$, *então*

$$v_\lambda \leq C\psi, \tag{2.20}$$

onde

$$C = \lambda^{2/(4-q)} \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{q/(2(4-q))}.$$

e ψ *é a única solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta w = w^{(q-2)/2} & \text{em } \Omega, \\ w > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Demonstração. Em primeiro lugar, desde que $2 < q < 4$, então $0 < (q-2)/2 < 1$ e, portanto (2.21) possui uma única solução positiva.

Pelos itens (v) e (vi) da Proposição 1.2.2, temos

$$|f(s)| \leqslant \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/4} \sqrt{|s|}, \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Consequentemente, do item (v) da Proposição 1.2.2 e de (2.22), se v_λ é uma solução positiva de $(D_{\lambda,q})$, então

$$-\Delta v_\lambda = \lambda f'(v_\lambda) f(v_\lambda)^{q-1} \leqslant \lambda \frac{f(v_\lambda)^q}{v_\lambda} \leqslant \lambda \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{q/4} v_\lambda^{(q-2)/2}.$$

Assim, v_λ é uma sub-solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda (8/\alpha^2)^{q/4} w^{(q-2)/2} & \text{in } \Omega, \\ w > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

o qual tem como única solução a função

$$\overline{w} = \lambda^{2/(4-q)}(8/\alpha^2)^{q/2(4-q)}\psi.$$

Portanto, do Lema 2.1.3, concluímos que

$$v_\lambda \leq C\psi,$$

onde

$$C = \lambda^{2/(4-q)}(8/\alpha^2)^{q/2(4-q)}.$$

$\square$

Lema 2.4.2 *Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ ocorrem e $q \in (2,4)$. Então, existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que $(P_{\lambda,q})$ possui uma solução positiva, para todo $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$.*

Demonstração. Seja $\underline{v} = \varphi_1^r$, $r > 1$. Desde que $\partial\varphi_1/\partial\nu < 0$ sobre $\partial\Omega$, onde ν é um vetor normal unitário sobre $\partial\Omega$, existe uma vizinhança Ω_r de $\partial\Omega$ para algum $r > 0$, tal que

$$(1-r)\varphi_1^{-2}\left|\nabla\varphi_1\right|^2 + \lambda_1 \leqslant 0 \ \text{ em } \ \Omega_r. \tag{2.24}$$

Em $\Omega\backslash\overline{\Omega_r}$ temos que φ_1^r é limitado inferiormente. Consequentemente, existe $\overline{\lambda}$ tal que

$$r\frac{\varphi_1^r}{g(\varphi_1^r)}((1-r)\varphi_1^{-2}\left|\nabla\varphi_1\right|^2 + \lambda_1) \leqslant \lambda, \tag{2.25}$$

para todo $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$. Mostrando que

$$-\Delta(\varphi_1^r) = r\varphi_1^r\left(\lambda_1 + (1-r)\varphi_1^{-2}|\nabla\varphi_1|^2\right) \leq \lambda g(\varphi_1^r) \text{ em } \Omega.$$

Portanto, $\underline{v}$ é subsolução de $(D_{\lambda,q})$.

Por outro lado, fixando λ, segue do item (d) do Lema 2.1.1 que existe $K > 0$ suficientemente grande, tal que

$$\frac{g(Ke_L)}{Ke_L} < \frac{1}{e_M\lambda},$$

onde e é a única solução positiva do problema (2.1) e

$$e_M = \max_{x\in\overline{\Omega}} e(x) \ , \ e_L = \min_{x\in\overline{\Omega}} e(x) > 0.$$

Consequentemente,

$$K \geqslant \lambda g(Ke) \text{ em } \Omega,$$

mostrando que $\overline{v} = Ke$ é supersolução de $(D_{\lambda,q})$. Além disso, podemos escolher K de maneira tal que $\underline{v} \leqslant \overline{v}$. Portanto, para todo $\lambda \geqslant \overline{\lambda}$ existe uma solução positiva v_λ de $(D_{\lambda,q})$ com $\underline{v} \leqslant v_\lambda \leqslant \overline{v}$. Segue da Proposição 1.2.1, que $u_\lambda = f(v_\lambda)$ é solução positiva para $(P_{\lambda,q})$. □

Lema 2.4.3 *Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ ocorrem e $q \in (2,4)$. Então existe $\lambda_* > 0$ tal que $(P_{\lambda,q})$ possui uma solução positiva se, e somente se $\lambda \geqslant \lambda_*$. Além disso, existe uma solução maximal U_λ, para $\lambda \geqslant \lambda_*$ tal que se $\lambda > \mu \geqslant \lambda_*$, temos $U_{\lambda_*} \leqslant U_\mu < U_\lambda$.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \{\lambda > 0 : (D_{\lambda,q}) \text{ possui uma solução positiva}\}$. Pelo Lema 2.4.2, temos $\Lambda \neq \emptyset$ e $\Lambda \subset (0,\infty)$. Com isso, garantimos a existência de $\lambda_* := \inf \Lambda$. Agora, mostraremos a existência de solução positiva para todo $\lambda > \lambda_*$. Na verdade, tomando $\lambda > \lambda_*$, então existe $\mu \in [\lambda_*, \lambda)$ tal que $(D_{\lambda,q})$ para $\lambda = \mu$ possui pelo menos uma solução positiva, que indicamos por v_μ. Observe que $\underline{v} = v_\mu$ e $\overline{v} = Ke$ para K suficientemente grande são subsolução e supersolução, respectivamente, para $(D_{\lambda,q})$. Consequentemente $(P_{\lambda,q})$ possui uma solução positiva.

Agora, vejamos o caso em que $\lambda = \lambda_*$. De fato, seja $\{\lambda_n\}$ uma sequência minimizante, onde $\lambda_n > \lambda_*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \to \lambda_*$ e v_n é solução positiva de $(D_{\lambda,q})$ para $\lambda = \lambda_n$. Pelo Lema 2.4.1, a sequência $\{v_n\}$ é limitada em $L^\infty(\Omega)$, e por regularidade elíptica, concluímos que $v_n \to v_*$ em $C^2(\overline{\Omega})$ e v_* é solução de $(D_{\lambda,q})$ para $\lambda = \lambda_*$. Afirmamos que $v_* \neq 0$. De fato, caso contrário, teríamos $v_n \to 0$ em $C^2(\overline{\Omega})$. Como $q \in (2,4)$, pelo item (c) do Lema 2.1.1, obtemos

$$0 = \lambda_1 \left(-\Delta - \lambda_n \frac{g(v_n)}{v_n} \right) \to \lambda_1,$$

o que é uma contradição.

Vejamos agora que existe uma solução maximal para $(D_{\lambda,q})$, a qual denotaremos por U_λ. De fato, pelo Lema 2.4.1, se v é uma solução positiva de $(D_{\lambda,q})$, então

$$v \leq C\psi,$$

onde

$$C = \lambda^{2/(4-q)} \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{q/2(4-q)}$$

e ψ é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta w = w^{(q-2)/2} & \text{em } \Omega, \\ w > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.26}$$

Agora, notemos que existe $K > 0$ tal que a função $\xi(s) := \lambda g(s) + Ks$ é crescente em $[0, C\|\psi\|_\infty]$. Com isso, usando iteração monotônica

$$-\Delta v_{n+1} + Kv_{n+1} = \xi(v_n),\ v_0 = \psi,\ v_{n+1} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

e temos uma solução maximal em $[0, C\|\psi\|_\infty]$. Desde que toda solução positiva w de $(D_{\lambda,q})$ satisfaz $w < C\psi$, segue a existência da solução maximal.

Agora, dados $\lambda_* \leqslant \lambda < \mu$, então U_λ é uma subsolução de $(D_{\lambda,q})$ para $\lambda = \mu$. Desde que $Ke > 0$ para K suficientemente grande é uma supersolução de $(D_{\lambda,q})$ para $\lambda = \mu$, concluímos que $(D_{\lambda,q})$ possui uma solução positiva v satisfazendo $U_\lambda < v \leqslant Ke$. Uma vez que U_μ é uma solução maximal de $(D_{\lambda,q})$ para $\lambda = \mu$, obtemos

$$U_\lambda < v \leqslant U_\mu,$$

o que conclui a demonstração. □

Os próximos lemas nos fornecem algumas informações sobre o funcional energia associado ao problema $(D_{\lambda,q})$.

Lema 2.4.4 *Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ ocorrem e $q \in (2,4)$. Então o funcional I associado a $(D_{\lambda,q})$ está bem definido, é coercivo e limitado inferiormente.*

Demonstração. De fato, pelos itens (iv) e (vi) da Proposição 1.2.2, temos

$$|G(s)| \leq C_1|s| + C_2|s|^{q/2},\ \forall\ s \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

Como $q \in (2,4)$, então $q/2 \in (1,2)$. Logo, I está bem definido. Agora, de (2.27), concluímos que

$$I(v) \geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \lambda C\|v\| - \lambda C\|v\|^{q/2},$$

o que implica I coercivo e limitado inferiormente. □

Lema 2.4.5 *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (2,4)$. *Então, se* $\{v_n\}$ *é uma sequência em* $H_0^1(\Omega)$ *com* $\{I(v_n)\}$ *limitada, existe uma subsequência que ainda denotamos por* $\{v_n\}$ *tal que* $v_n \rightharpoonup v_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$ *e* $I(v_0) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf I(v_n)$.

Demonstração. De fato, como $\{I(v_n)\}$ é limitada e sendo I coercivo, segue que $\{v_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Desde que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e pela imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^s(\Omega)$, $v_n \to v_0$ em $L^s(\Omega)$, para $s \in [1, 2^*)$.

Agora, notemos que

$$I(v_0) - I(v_n) = \frac{1}{2}\left(\|v_0\|^2 - \|v_n\|^2\right) + \lambda \int_\Omega [G(v_n) - G(v_0)]$$

e

$$G(v_n) - G(v_0) = g(\epsilon_n)(v_n - v_0), \text{ com } \epsilon_n \text{ entre } v_n \text{ e } v_0,$$

implica

$$\int_\Omega [G(v_n) - G(v_0)] \to 0,$$

consequentemente,

$$I(v_0) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf I(v_n).$$

□

Lema 2.4.6 *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (2,4)$. *Então, a solução trivial* $v \equiv 0$ *é um mínimo local do funcional* I *em* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. De fato, pelos itens (v) e (vi) da Proposição 1.2.2 e o item (c) do Lema 2.1.1, dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que $|g(s)| \leqslant \epsilon\,|s| + C_\epsilon\,|s|^\rho$, para algum $\rho \in (2, 2^*)$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, obtemos $G(s) \leqslant \epsilon(s^2/2) + C_\epsilon\,|s|^{\rho+1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \lambda \int_\Omega G(v) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon\lambda}{\lambda_1}\right)\|v\|^2 - \lambda C_\epsilon \|v\|^{\rho+1}, \end{aligned}$$

isso mostra que $v \equiv 0$ é um mínimo local para I em $H_0^1(\Omega)$. □

Agora, provaremos o principal resultado de existência de soluções positivas no caso $q \in (2,4)$.

Teorema 2.4.1 *Suponha que* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (2,4)$. *Então, existe* $\lambda_* > 0$ *tal que:*

(i) $(P_{\lambda,q})$ *não possui uma solução positiva se* $\lambda \in (0, \lambda_*)$*;*

(ii) $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos uma solução positiva se* $\lambda = \lambda_*$*;*

(iii) $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos duas soluções positivas ordenadas* $w_\lambda < v_\lambda$*, se* $\lambda \in (\lambda_*, \infty)$*. Além disso, a aplicação* $\lambda \mapsto v_\lambda$ *é crescente e*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|v_\lambda\|_\infty = +\infty.$$

Demonstração. Para mostrar (i), seja λ_* como no Lema 2.4.3. Claramente, não há solução positiva para $\lambda \in (0, \lambda_*)$. Agora, para (ii), sabemos do Lema 2.4.3, que para $\lambda = \lambda_*$, existe uma solução positiva maximal $\xi_* := \xi_{\lambda_*}$ de $(D_{\lambda,q})$. Finalmente, para provar (iii) segue dos Lemas 2.4.4 e 2.4.5, que para cada $\lambda > \lambda_*$, existe $v_\lambda \geq \xi_*$ tal que

$$I(v_\lambda) = \min_{v \in \mathfrak{M}} I(v),$$

onde

$$\mathfrak{M} = \{I(v) : v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } v \geq \xi_*\}.$$

Como ξ_* é uma subsolução de $(D_{\lambda,q})$ com $\lambda > \lambda_*$, segue do princípio do máximo forte que $v_\lambda - \xi_* \in int\mathfrak{N}$, onde $\mathfrak{N} = \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) : v \geq 0 \text{ em } \Omega\}$. Assim sendo, v_λ é uma solução de $(D_{\lambda,q})$. Consequentemente, para $\lambda > \lambda_*$, I admite dois mínimos diferentes, ou seja, v_λ e 0.

Vamos provar que existe um terceiro mínimo $0 < w_\lambda < v_\lambda$ para I. Para isso, considere o conjunto fechado e convexo

$$\mathfrak{V} = \{v \in H_0^1(\Omega) : 0 \leq v \leq v_\lambda\}.$$

Queremos dizer por um ponto crítico de I em $\mathfrak{V}$ para qualquer $v \in \mathfrak{V}$ satisfazendo

$$l(v) = \sup\{I'(v)(w - v), w \in \mathfrak{V} \text{ e } \|w - v\| \leq 1\} = 0.$$

Como $0 \in \mathfrak{V}$, segue que $l(v) = 0$ implica $I'(v) = 0$. Note que I satisfaz a condição $(PS)_c$ em $\mathfrak{V}$, para qualquer $c \in \mathbb{R}$. De fato, seja $\{v_n\} \subset \mathfrak{V}$ com $I(v_n) \to c$ e $l'(v_n) \to 0$. Desde que $\{I(v_n)\}$ é limitada e I é coercivo, segue o resultado. $\square$

2.5 Caso $q = 4$

Nesta seção estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$, onde $q = 4$. Usamos o Teorema 7.1.3 em [32] para mostrar a existência de solução positiva.

Teorema 2.5.1 *Suponha que* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q = 4$. *Então o problema* $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos uma solução positiva* u_λ *se, e somente se,* $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_1$. *Além disso,*

$$\lim_{\lambda \to (\alpha^2/4)\lambda_1} \|u_\lambda\|_\infty = \infty.$$

Demonstração. De fato, sendo $q = 4$, sabemos do item (h) do Lema 2.1.1 que a aplicação $s \mapsto g(s)/s$ é crescente, e do item (e) do Lema 2.1.1,

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s} = \frac{4}{\alpha^2}, \tag{2.28}$$

o que implica,

$$\frac{g(s)}{s} < \frac{4}{\alpha^2}. \tag{2.29}$$

Agora, se v_λ é uma solução positiva de $(D_{\lambda,q})$, então de (2.29), temos

$$0 = \lambda_1 \left(-\Delta - \lambda \frac{g(v_\lambda)}{v_\lambda} \right) > \lambda_1 \left(-\Delta - \frac{4\lambda}{\alpha^2} \right) = \lambda_1 - \frac{4\lambda}{\alpha^2},$$

ou seja,

$$\lambda > \frac{\alpha^2}{4}\lambda_1.$$

Consequentemente, se $u_\lambda = f(v_\lambda)$ é uma solução positiva de $(P_{\lambda,q})$, então $\lambda > (\alpha^2/4)\,\lambda_1$. Neste Teorema e no próximo aplicaremos agora o método de bifurcação. Para isso, seja e a única solução positiva de (2.1) em Ω e seja E um espaço de Banach composto por todas as funções $u \in C(\overline{\Omega})$ para as quais existe $\gamma = \gamma(u) > 0$ tal que $-\gamma e < u < \gamma e$, munido da norma

$$\|u\|_E := \inf\{\gamma > 0; -\gamma e < u < \gamma e\}.$$

Então, E é um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo, o qual denotaremos por P, é normal e tem interior não vazio. Além disso, E está imerso continuamente em $C(\overline{\Omega})$(ver [4]).

Por outro lado, pelo item (e) do Lema 2.1.1 temos que

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{g(s)}{s} = 4/\alpha^2.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 7.1.3 em [32], e concluir que a partir de $\lambda = (\alpha^2/4)\lambda_1$ bifurca do infinito um contínuo ilimitado $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times E$ de soluções positivas, além disso, $\lambda = (\alpha^2/4)\lambda_1$ é o único ponto com essa propriedade. Para isso, mostraremos que $\overline{\mathcal{C}} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$. De fato, do contrário, seja $\{v_n, \lambda_n\}$ uma sequência de soluções positivas de $(D_{\lambda,q})$ tal que $\lambda_n \to \lambda_* \in (0, \infty)$ e $\|v_n\|_\infty \to 0$. Pelo item (c) do Lema 2.1.1, para todo $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$, temos

$$\frac{g(v_n)}{v_n} < \delta.$$

Como v_n é solução positiva de $(D_{\lambda,q})$ para $\lambda = \lambda_n$, obtemos

$$0 = \lambda_1 \left(-\Delta - \lambda_n \frac{g(v_n)}{v_n} \right) > \lambda_1 - \lambda_n \delta.$$

Consequentemente, $\lambda_* \delta \geqslant \lambda_1$ para qualquer $\delta > 0$, o que é uma contradição. Portanto $Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = ((\alpha^2/4)\lambda_1, +\infty)$, onde $Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ denota a projeção de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}$. $\square$

2.6 Caso $4 < q < 22^*$

Nesta seção estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$, onde $q \in (4, 22^*)$. Usamos novamente o Teorema 7.1.3 em [32] para mostrar a existência de solução positiva.

Teorema 2.6.1 *Suponha que* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (4, 2.2^*)$, *onde* $2^* = 2N/(N-2)$. *Então,* $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos uma solução positiva* u_λ *se, e somente se,* $\lambda > 0$. *Além disso,*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|u_\lambda\|_\infty = \infty.$$

Demonstração. Fixando $\lambda > 0$. Considere o problema:

$$\begin{cases} -\Delta w = \mu w + \lambda g(w) & \text{in } \Omega, \\ w > 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.30}$$

Mostraremos que (2.30) possui solução positiva se, e somente se, $\mu \in (-\infty, \lambda_1)$. De fato, se v é uma solução positiva do problema (2.30), então

$$\mu = \lambda_1 \left(-\Delta - \lambda \frac{g(v)}{v} \right) < \lambda_1.$$

Pelo item (c) do Lema 2.1.1,

$$\lim_{s \to 0} \frac{\lambda g(s)}{s} = 0, \tag{2.31}$$

e do Teorema 7.1.3 em [32] concluímos que a partir de $\mu = \lambda_1$ emana de $w = 0$, um contínuo ilimitado $\mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times E$ de soluções de (2.30). Além disso, desde que $q \in (4, 22^*)$, então

$$1 < \frac{q-2}{2} < \frac{N+2}{N-2}. \tag{2.32}$$

Por outro lado, pelo item (vi) do Lema 1.2.2, temos

$$\begin{aligned} \lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^{(q-2)/2}} &= \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{f(s)}{\sqrt{s}} \right)^{q-2} . \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\vartheta(f(s))/f(s)^2}} \\ &= \left(\frac{8}{\alpha^2} \right)^{(q-2)/4} . \frac{\sqrt{2}}{\alpha} > 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^{(q-2)/2}} = C > 0, \tag{2.33}$$

onde $C = (8/\alpha^2)^{(q-2)/4}.(\sqrt{2})/\alpha$. Assim, por [24], para $\mu \in K$, com K um compacto de $\mathbb{R}$, $\{\|v_\mu\|_\infty\}$ é limitada, e por regularidade elíptica $\{v_\mu\}$ é limitada em E. Então, $Proj_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}) = (-\infty, \lambda_1)$. Isso mostra a primeira parte do Teorema. Consequentemente, se $\mu = 0$, existe uma solução positiva de $(P_{\lambda,q})$ para todos $\lambda > 0$ e o resultado segue. Agora, nós provamos que $\lim_{\lambda\to 0} \|u_\lambda\|_\infty = \infty$. Suponha que $\|u_{\lambda_n}\|_\infty \leqslant C$. Então, por regularidade elíptica, concluímos que $u_{\lambda_n} \to u_0 \geqslant 0$ em $C^2(\overline{\Omega})$ com u_0 solução não negativa de $(P_{\lambda,q})$ para $\lambda = 0$ Se u_0 é não trivial, chegamos a uma contradição. Se $u = 0$, então podemos considerar

$$v_{\lambda_n} = \frac{u_{\lambda_n}}{\|u_{\lambda_n}\|_\infty}.$$

Assim, $\|u_{\lambda_n}\|_\infty = 1$, e por um argumento semelhante ao anterior, concluímos que $v_{\lambda_n} \to v_0 > 0$ em $C^2(\overline{\Omega})$ e v_0 solução de $(P_{\lambda,q})$ para $\lambda = 0$, uma contradição. $\square$

2.7 Caso $q \geqslant 22^*$

Nesta seção estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$, onde $q \in [22^*, +\infty)$. Usamos a Identidade de Pohozaev para estabelecer um resultado de não existência de solução para $(P_{\lambda,q})$, onde Ω é um domínio estrelado.

Teorema 2.7.1 *Suponha que as hipóteses $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ ocorrem, $q \in [2.2^*, \infty)$ e Ω é um domínio estrelado. Então, o problema $(P_{\lambda,q})$ não possui solução positiva.*

Demonstração. De fato, defina a função $z : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$z(t) := \frac{N-2}{2} g(t)t - NG(t).$$

Observe que $z(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{N-2}{2}[g'(t)t + g(t)] - Ng(t) \\ &= \frac{N-2}{2} g'(t)t - \frac{N+2}{2} g(t). \end{aligned}$$

Daí,

$$z'(t) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{g(t)}{g'(t)t} \leqslant \frac{N-2}{N+2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \frac{g(s)}{g'(s)s} &= \frac{f'(s)f(s)^{q-1}}{\left(f''(s)f(s)^{q-1} + (q-1)(f'(s))^2 f(s)^{q-2}\right)s} \\ &= \frac{f'(s)f(s)}{\left(f''(s)f(s) + (q-1)(f'(s))^2\right)s}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{g(s)}{g'(s)s} &= \frac{\dfrac{f(s)}{(\vartheta(f(s)))^{1/2}}}{\left(\dfrac{q-1}{\vartheta(f(s))} - \dfrac{\vartheta'(f(s))f(s)}{2(\vartheta(f(s)))^2}\right)s} \\ &= \frac{2f(s)(\vartheta(f(s)))^{3/2}}{\left(2(q-1)(\vartheta(f(s))) - \vartheta'(f(s))f(s)\right)s}. \end{aligned}$$

Desde que por (ϑ_1) e (ϑ_2), $0 < \vartheta'(s)s < 2\vartheta(s)$ para todo $s > 0$, obtemos

$$\frac{g(s)}{g'(s)s} < \frac{2f(s)(\vartheta(f(s)))^{1/2}}{2(q-2)s} = \frac{f(s)}{(q-2)f'(s)s}.$$

Como $q \geqslant 22^*$, e do item (v) da Proposição 1.2.2, concluímos que

$$\frac{g(s)}{g'(s)s} < \frac{2}{q-2} \leqslant \frac{N-2}{N+2},$$

mostrando que $z'(s) > 0$. Por outro lado, se existir uma solução positiva u de $(P_{\lambda,q})$, pela Identidade de Pohozaev

$$\int_\Omega \left(\frac{N-2}{2} g(u)u - NG(u) \right) < 0,$$

o que é uma contradição. $\square$

Capítulo 3

Não-linearidades do tipo potência: Soluções quaisquer

3.1 Introdução

Neste capítulo seguiremos interessados no problema do capítulo anterior, entretanto, agora, focaremos nosso estudo na existência de múltiplas soluções(não necessariamente positivas) para o problema

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda|u|^{q-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{\lambda,q}$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado, λ é um parâmetro real, $q > 1$ e $\vartheta : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty)$ é uma função par de classe C^1 satisfazendo as condições (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3) vistas anteriormente.

Para tal propósito, usaremos a a teoria do gênero de Krasnoselskii associada ao método da variedade de Nehari (quando necessário). Novamente e pelo mesmo motivo do capítulo anterior, consideraremos apenas valores positivos para λ.

3.2 Caso $1 < q < 2$.

Nesta seção estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$ com $q \in (1, 2)$. Aplicaremos o Teorema 1.0.10 para obter uma sequência de soluções que mudam de sinal.

Teorema 3.2.1 *Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ e $q \in (1,2)$. Então, se $\lambda > 0$, $(P_{\lambda,q})$ possui uma sequência $\{u_k\}$ de soluções que mudam de sinal tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\| = 0.$$

Demonstração. De fato, note que o funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ associado a $(D_{\lambda,q})$ definido em (2.3) é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(v)w = \int_\Omega \nabla v \nabla w dx - \lambda \int_\Omega g(v) w dx, \ \forall \ v, w \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, observe que $I(0) = 0$. Desde que f é ímpar, concluímos que I é par. Além disso, I é coercivo e limitado inferiormente. De fato, do item (iv) da Proposição 1.2.2 e das Imersões contínuas de Sobolev,

$$\begin{aligned} I(v) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 - \lambda \int_\Omega G(v) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |v|^q \\ &\geqslant \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\lambda C}{q}\|v\|^q \\ &= \left(\frac{1}{2}\|v\|^{2-q} - \frac{\lambda C}{q}\right)\|v\|^q. \end{aligned}$$

Além disso, I satisfaz a condição Palais-Smale em qualquer nível $c \in \mathbb{R}$. De fato, se $I(v_n) \to c$ e $I'(v_n) \to 0$ no dual de $H_0^1(\Omega)$, então pela coercividade de I segue que a sequência (v_n) é limitado em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach Reflexivo, existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ in } H_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

Pela Imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^s(\Omega)$,

$$v_n \to v_0 \text{ in } L^s(\Omega), \ \forall \ s \in [1, 2^*). \tag{3.2}$$

Pelo Teorema de Vainberg, existe $w \in L^s(\Omega)$, $s \in [1, 2^*)$ tal que

$$v_n(x) \to v_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|v_n(x)| \leqslant w(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Da continuidade da g,

$$g(v_n(x))v_n(x) \to g(v_0(x))v_0(x), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|g(v_n(x))v_n(x)| \leqslant |v_n(x)|^{q-1}w(x) \leqslant w(x)^q \in L^1(\Omega), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega g(v_n)v_n \to \int_\Omega g(v_0)v_0. \tag{3.3}$$

De (3.3), concluímos que

$$o_n(1) = I'(v_n)v_n = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \lambda \int_\Omega g(v_0)v_0 dx + o_n(1).$$

Provando que

$$\|v_n\|^2 = 2\lambda \int_\Omega g(v_0)v_0 dx + o_n(1). \tag{3.4}$$

De modo análogo,

$$o_n(1) = I'(v_n)v_0 = \frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \lambda \int_\Omega g(v_0)v_0 dx + o_n(1).$$

Mostrando que

$$\|v_0\|^2 = 2\lambda \int_\Omega g(v_0)v_0 dx. \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5), concluímos que

$$\|v_n\|^2 \to \|v_0\|^2,$$

consequentemente, $v_n \to v_0$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, I satisfaz a condição Palais-Smale. Finalmente, pelo item (iii) da Proposição 1.2.2, existe uma constante positiva C tal que

$$|f(s)| \geq C|s|, \ \forall\ |s| \leq 1.$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $X_k = Span\{f_1, \ldots, f_k\}$ um subespaço k-dimensional de $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\{f_1, \ldots, f_k\}$ é um conjunto ortogonal em $H_0^1(\Omega)$ e $|f_i|_\infty \leq 1$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Claramente, escolhendo $0 < \rho_k < \min_{1 \leq i \leq k} \|f_i\|/k^{1/2}$, segue que se $v \in X_k$ e $\|v\| = 1$, então $|\rho_k v|_\infty \leq 1$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|\rho_k v| = \left|\sum_{i=1}^{k} \rho_k v_i f_i\right| &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} v_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} \rho_k^2 f_i^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{\min_{1\leqslant i\leqslant k} \|f_i\|}\rho_k \left(\sum_{i=1}^{k} |f_i|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{\rho_k}{\min_{1\leqslant i\leqslant k} \|f_i\|} k^{1/2} < 1.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
I(\rho_k v) &= \frac{\rho_k^2}{2} - \lambda \int_\Omega G(\rho_k v)dx \\
&\leq \frac{\rho_k^2}{2} - \frac{\lambda C_1 \rho_k^q}{q} \int_\Omega |v|^q dx.
\end{aligned}
$$

Desde que, existe $C_k > 0$ tal que

$$
C_k \|v\|^q \leq \int_\Omega |v|^q dx, \ \forall \ v \in X_k,
$$

obtemos

$$
I(\rho_k v) \leq \frac{1}{2}\rho_k^2 - \frac{\lambda C_1 C_k}{q} \rho_k^q. \tag{3.6}
$$

Como $q \in (1, 2)$, podemos escolher $\rho_k > 0$ ainda menor em (3.6) para concluir que

$$
\sup_{v \in S_{\rho_k} \cap X_k} I(v) < 0,
$$

onde $S_{\rho_k} = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\| = \rho_k\}$. O resultado segue agora pelo Teorema 1.0.10. $\square$

3.3 Caso $q = 2$.

Nesta seção faremos uso do Teorema 9.1 em [37] para mostrar existência de soluções não triviais para o problema $(P_{\lambda,q})$.

Agora, seja $\{e_j\}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ composta de autofunções do operador Laplaciano com condição de fronteira homogênea de Dirichlet, V_{λ_j} é o auto espaço associado a λ_j e $d(m)$ é a dimensão da esfera unitária de $W_m := \oplus_{j=1}^m V_{\lambda_j}$.

Lema 3.3.1 *Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ são satisfeitas. Então, A aplicação $s \mapsto |g(s)|$ é decrescente em $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, \infty)$, $\lim_{s\to 0} g(s)/s = 1/\vartheta(0)$ e $\lim_{|s|\to\infty} |g(s)| = \sqrt{2}/\alpha$, se $q = 2$.*

Demonstração. A monotonicidade é uma consequência direta da Proposição 1.2.2(ii) e (ϑ_2). Por outro lado, da Proposição 1.2.2(iii)

$$\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{\vartheta(f(s))^{1/2}} \times \frac{f(s)}{s} = \frac{1}{\vartheta(0)}.$$

Além disso, por (ϑ_3)

$$\lim_{|s|\to\infty} |g(s)| = \lim_{|s|\to\infty} \frac{1}{(\vartheta(f(s))/f(s)^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}.$$

□

Teorema 3.3.1 *Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ sejam satisfeitas. Se $q = 2$ e $\lambda > \vartheta(0)\lambda_m$, então o problema $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos $1 + \sum_{i=2}^m dim V_{\lambda_i}$ pares de soluções não triviais u_i onde $I(f^{-1}(u_i)) > 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3.1 e das Imersões de Sobolev

$$I(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\sqrt{2}\lambda}{\alpha}\int_\Omega |v| \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\sqrt{2}C\lambda}{\alpha}\|v\|.$$

Portanto, I é coercivo. Desde que I é fracamente semicontínuo inferiormente, I é limitado inferiormente. Por outro lado, desde que

$$\frac{I(sv)}{s^2} = \frac{1}{2} - \lambda \int_{[v\neq 0]} \left[\frac{G(sv)}{(sv)^2}\right] v^2,$$

para todo $v \in \mathcal{S}_{d(m)}$. Concluímos do Lema 3.3.1, regra de L'Hospital e do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\lim_{s\to 0} \frac{I(sv)}{s^2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\vartheta(0)} \int_\Omega v^2,$$

para todo $v \in \mathcal{S}_{d(m)}$. Desde que $v = \sum_{j=1}^{d(m)} v_{\lambda_j} e_j$, onde $d(m) := 1 + \sum_{i=2}^{m} dim V_{\lambda_i}$, obtemos

$$\lim_{s\to 0} \frac{I(sv)}{s^2} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\vartheta(0)} \left(\sum_{j=1}^{d(m)} v_j^2 \int_\Omega e_j^2 + \sum_{j\neq i} v_j v_i \int_\Omega e_j e_i \right) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2\vartheta(0)} \sum_{j=1}^{d(m)} \left(\frac{v_j^2}{\lambda_j} \right).$$

Como $v \in \mathcal{S}_{d(m)}$,

$$\lim_{s\to 0} \frac{I(sv)}{s^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d(m)} \left[1 - \frac{\lambda}{\vartheta(0)\lambda_j} \right] v_j^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\vartheta(0)\lambda_m} \right) < 0,$$

para todo $v \in \mathcal{S}_{d(m)}$, pois $\lambda > \vartheta(0)\lambda_m$. Portanto, existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$I(sv) = (I(sv)/s^2)s^2 \leq -\varepsilon s^2,$$

para todo $0 < s < \delta$ e $v \in \mathcal{S}_{d(m)}$. Fixando $0 < s_* < \delta$, obtemos

$$\sup_{w \in s_* \mathcal{S}_{d(m)}} I(w) < 0.$$

Desde que I é coercivo, é fácil ver que I satisfaz a condição $(PS)_c$. Por fim, como I é par e de classe C^1, segue do Teorema 9.1 em [37] (veja também [13]) que I possui pelo menos $d(m)$ pares de pontos críticos. $\square$

3.4 Caso $2 < q < 4$.

Nesta seção estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$, onde $q \in (2,4)$. Usamos o teorema clássico de Clark(ver [13]) para estabelecer a existência de pelo menos k pares de soluções não triviais com energia negativa.

O próximo Teorema melhora o resultado da não-existência obtida no Teorema 2.4.1, bem como nos diz que quanto maior o tamanho de λ mais soluções tem o problema $(P_{\lambda,q})$. Antes, no entanto, precisamos provar dois lemas técnicos.

Lema 3.4.1 *Seja $\{u_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Então,*

$$\chi_{\left[1<\liminf\limits_{n\to\infty} u_n\right]}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \chi_{[1<u_n]}(x) \ \textit{em } \Omega.$$

Demonstração. Definindo $u := \liminf\limits_{n\to\infty} u_n$ e $g : \Omega \to \{0,1\}$ por

$$g(x) = \liminf_{n\to\infty} \chi_{[1<u_n]}(x).$$

se $g \equiv 1$, não há nada a ser provado. Caso contrário, é suficiente provar que se $g(x) = 0$, então $\chi_{[1<u]}(x) = 0$. De fato, observe que se $g(x) = 0$ então existe uma subsequência u_{n_k} onde $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ depende de x, tal que

$$\chi_{[1<u_{n_k}]}(x) = 0, \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Equivalentemente,

$$u_{n_k}(x) \leq 1, \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Passando ao limite inferior quando $k \to +\infty$, obtemos

$$u(x) = \liminf_{n\to\infty} u_n(x) \leq \liminf_{k\to\infty} u_{n_k}(x) \leq 1,$$

ou ainda,

$$\chi_{[1<u]}(x) = 0.$$

$\square$

Lema 3.4.2 *Seja X_k um subespaço k-dimensional de $H_0^1(\Omega)$, então existem constantes positivas β_k e α_k tais que:*

$$\beta_k \leq |[1 < |su|]|, \tag{3.7}$$

para todo $u \in \mathcal{S}_1 \cap X_k$ e $s \geq \alpha_k$.

Demonstração. De fato, suponha que existem $\{s_n\} \subset (0, \infty)$ e $\{u_n\} \subset \mathcal{S}_1 \cap X_k$ com $s_n \to \infty$ e

$$|[1 < |s_n u_n|]| \to 0 \text{ as } n \to \infty. \tag{3.8}$$

Desde que X_k possui dimensão finita, existe

$$u \in \mathcal{S}_1 \cap X_k \tag{3.9}$$

tal que, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Portanto,

$$|s_n u_n| \to \infty \text{ em } [u \neq 0]. \tag{3.10}$$

Segue de (3.9), (3.10), Lema 3.4.1, Lema de Fatou e (3.8) que

$$\begin{aligned}
0 < |[u \neq 0]| &\leq |[1 < \liminf_{n\to\infty} |s_n u_n|]| \\
&= \int_\Omega \chi_{[1 < \liminf_{n\to\infty} |s_n u_n|]}(x) \\
&\leq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \chi_{[1<|s_n u_n|]}(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_{[1<|s_n u_n|]}(x) \\
&= \liminf_{n\to\infty} |[1 < |s_n u_n|]| = 0.
\end{aligned}$$

Que é uma contradição. Portanto (3.7) está provado. □

Teorema 3.4.1 *Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ ocorrem e $q \in (2, 4)$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_* = \lambda_*(k) > 0$ tal que $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos k pares de soluções não triviais com energia negativa, qualquer que seja $\lambda > \lambda_*$.*

Demonstração. De fato, é claro que $I(0) = 0$, I é par e C^1. Além disso, pelo Lema 2.4.4 sabemos que I é coercivo e limitado inferiormente. Por outro lado, argumentando como no caso $q \in (1, 2)$ podemos garantir que I satisfaz a condição Palais-Smale.

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, X_k um subespaço k-dimensional de $H_0^1(\Omega)$. Seja também $\mathcal{S}_1 := \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\| = 1\}$. Como $\mathcal{S}_1 \cap X_k$ é compacto, pelo Lema 3.4.2, existem $\alpha_k > 0$ e $\beta_k > 0$ tais que

$$\mathcal{S}_{\alpha_k} \cap X_k = (\alpha_k \mathcal{S}_1) \cap X_k \subset \mathcal{A}_k := \{v \in X_k : |[|v| > 1]| \geq \beta_k\}.$$

Finalmente, pelo item (v) da Proposição 1.2.2, temos

$$|f(s)| \geq f(1)\sqrt{|s|}, \ \forall \ |s| > 1. \tag{3.11}$$

Portanto, por (3.11)

$$\begin{aligned} I(\alpha_k v) &\leq \frac{1}{2}\alpha_k^2 - \frac{\lambda f(1)^{q/2}}{q}\int_{[|\alpha_k v|>1]} |\alpha_k v|^{q/2} \\ &\leq \frac{1}{2}s_k^2 - \frac{\lambda f(1)^{q/2}}{q}|[|\alpha_k v| > 1]| \\ &\leq \frac{1}{2}\alpha_k^2 - \frac{\lambda f(1)^{q/2}}{q}\beta_k, \ \forall \ v \in \mathcal{S}_1 \cap X_k. \end{aligned}$$

Mostrando que

$$\sup_{w\in\mathcal{S}_{\alpha_k}\cap X_k} I(w) < 0,$$

sempre que $\lambda > \lambda_* := qs_k^2/2f(1)^{q/2}\beta_k$. Pelo Teorema clássico de Clark em [13], segue que $(D_{\lambda,q})$ possui pelo menos k pares de soluções não triviais com energia negativa. $\square$

3.5 caso $q = 4$.

Esta seção tem como principal objetivo melhorar os resultados obtidos no segundo capítulo quando se considera o caso $q = 4$ no problema $(P_{\lambda,q})$. De fato, uma vez que neste caso particular provamos que(veja Lema 3.5.1) g é assintoticamente linear em zero e no infinito, respectivamente. Usando a teoria do gênero combinada com argumentos envolvendo a variedade de Nehari, mostramos que o número de soluções aumenta com λ. Para ser mais preciso, se $dimV_{\lambda_i}$ denota a dimensão do auto espaço V_{λ_i} associado ao i-ésimo autovalor λ_i do operador Laplaciano com condição de fronteira homogênea de Dirichlet, provamos que o problema $(P_{\lambda,q})$ possui pelo menos $1+\sum_{i=2}^{m} dimV_{\lambda_i}$ pares de soluções não triviais u_i onde $I(f^{-1}(u_i)) > 0$.

Lema 3.5.1 *Suponha que $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ são satisfeitas. Então:*

(i) A aplicação $s \mapsto g(s)/s$ é decrescente em $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, \infty)$, $\lim_{s\to 0} g(s)/s = 0$ e $\lim_{|s|\to\infty} g(s)/s = 4/\alpha^2$;

(ii) A aplicação $s \mapsto (1/2)g(s)s - G(s)$ é decrescente em $(-\infty, 0)$, crescente em $(0, \infty)$ e $\lim_{|s|\to\infty} [(1/2)g(s)s - G(s)] = +\infty$.

Demonstração. (i) Desde que f é ímpar(pois ϑ é par), é suficiente considerar o caso $s > 0$. Observe que

$$\frac{g(s)}{s} = \frac{f(s)^3}{s\vartheta(f(s))^{1/2}} = \frac{t^2}{\Upsilon(t)} \times \frac{t}{\vartheta(t)^{1/2}},$$

onde $t := f(s)$ e $\Upsilon(t) := \int_0^t \vartheta(r)^{1/2}dr$. Segue de (ϑ_2) que $t/\vartheta(t)^{1/2}$ (e consequentemente $t^2/\Upsilon(t)$) é crescente em $(0, \infty)$. Isso prova que $g(s)/s$ é crescente em $(0, \infty)$. Além disso, pelos itens (iii) e (vi) da Proposição 1.2.2, obtemos

$$\lim_{s\to 0} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(s)^2}{\vartheta(f(s))^{1/2}} \times \frac{f(s)}{s} = 0$$

e

$$\lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s} = \lim_{s\to\infty} \left(\frac{f(s)}{s^{1/2}}\right)^2 \times \frac{f(s)}{\vartheta(f(s))^{1/2}} = \left(\frac{8}{\alpha^2}\right)^{1/2} \times \frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \frac{4}{\alpha^2}.$$

(ii) A monotonicidade segue imediatamente de (i). Para provar a segunda parte, note que

$$\frac{1}{2}g(s)s - G(s) = \frac{t^3}{4\vartheta(t)^{1/2}}\left(2\Upsilon(t) - t\vartheta(t)^{1/2}\right).$$

Por (ϑ_3) sabe-se que $t^3/4\vartheta(t)^{1/2}$ vai para o infinito quando t tender ao infinito. Por outro lado, por (ϑ_2), $2\Upsilon(t) - t\vartheta(t)^{1/2}$ é não negativa e crescente em $(0, \infty)$. De fato, ao definir $h(t) := 2\Upsilon(t) - t\vartheta(t)^{1/2}$, temos $h(0) = 0$ e

$$h'(t) = \frac{2\vartheta(t) - t\vartheta'(t)}{2\vartheta(t)^{1/2}} > 0, \ \forall\, t > 0.$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Antes de provarmos o principal resultado desta seção, faremos um estudo cuidadoso sobre alguns aspectos topológicos e geométricos envolvendo a Variedade de Nehari. Seja

$$\mathcal{N} = \left\{v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : \|v\|^2 = \lambda \int_\Omega g(v)v\right\}$$

a Variedade de Nehari associada ao funcional I, $\mathcal{S}$ a esfera unitária em $H_0^1(\Omega)$ e

$$\mathcal{F} := \left\{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|^2 < \frac{4\lambda}{\alpha^2}\int_\Omega v^2\right\}.$$

Lema 3.5.2 *Se ϑ satisfaz $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ e $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_1$, as afirmações seguintes são verdadeiras:*

(i) *O conjunto $\mathcal{F}$ é aberto e não-vazio;*

(ii) $\partial\mathcal{F} = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|^2 = (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2\}$;

(iii) $\mathcal{F}^c = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|^2 \geq (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2\}$;

(iv) $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}$;

(v) $\mathcal{S} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Demonstração. (i) Como $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_1$, qualquer autofunção associada a λ_1 pertence a $\mathcal{F}$. Além disso, $\mathcal{F} = \Phi^{-1}(-\infty, 0)$ onde $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é um funcional contínuo definido por $\Phi(v) = \|v\|^2 - (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2$. Os itens (ii) e (iii) são imediatos.

(iv) Se $v \in \mathcal{N}$ então pelo Lema 3.3.1(ii), temos

$$\|v\|^2 = \lambda \int_{[v\neq 0]} \left[\frac{g(v)}{v}\right] v^2 < \frac{4\lambda}{\alpha^2}\int_\Omega v^2.$$

(v) É suficiente escolher uma autofunção normalizada (em $H_0^1(\Omega)$) associada a λ_1. □

Pelo Lema anterior, o conjunto $\mathcal{S}_\mathcal{F} := \mathcal{S} \cap \mathcal{F}$ é aberto em $\mathcal{S}$. Além disso, $\partial\mathcal{S}_\mathcal{F} = \{v \in \mathcal{S} : 1 = (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2\}$ e $\mathcal{S}_\mathcal{F}^c = \{v \in \mathcal{S} : 1 \geq (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2\}$ sao não-vazios, pois, qualquer autofunção normalizada associada a λ_j tal que $\lambda \leq (\alpha^2/4)\lambda_j$, pertence a $\mathcal{S}_\mathcal{F}^c$. Assim, $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ é uma subvariedade incompleta de classe C^1 de $H_0^1(\Omega)$.

Lema 3.5.3 *Suponha que ϑ verifica $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ e seja $h_v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h_v(s) = I(sv)$. Então:*

(i) *Para cada $v \in \mathcal{F}$, existe um único $s_v > 0$ tal que $h_v'(s) > 0$ em $(0, s_v)$, $h_v'(s_v) = 0$ e $h_v'(s) < 0$ em (s_v, ∞). Além disso, $sv \in \mathcal{N}$ se, e somente se, $s = s_v$;*

(ii) *Para cada $v \in \mathcal{F}^c\backslash\{0\}$, $h_v'(s) > 0$ para todo $s \in (0,\infty)$.*

Demonstração. (i) Observe que $h_v(0) = 0$. Além disso, para cada $v \in \mathcal{F}$, temos

$$\frac{h_v(s)}{s^2} = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \lambda\int_{[v\neq 0]}\left[\frac{G(sv)}{(sv)^2}\right]v^2. \tag{3.12}$$

Assim, pelo Lema 3.3.1(ii), regra de L'Hôspital e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{s\to\infty}\frac{h_v(s)}{s^2} = \frac{1}{2}\left[\|v\|^2 - (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2\right] < 0.$$

Mostrando que $\lim_{s\to\infty} h_v(s) = -\infty$. Além disso, $h_v(s)$ é positiva para todo s suficientemente pequeno. De fato, raciocinando como no limite anterior, temos

$$\frac{h_v(s)}{s^2} = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \lambda \int_{[v\neq 0]} \left[\frac{G(sv)}{(sv)^2}\right] v^2 = \frac{1}{2}\|v\|^2 > 0.$$

Daí, existe um ponto de máximo global $s_v > 0$ de h_v que, pelo Lema 3.3.1(ii), é o único ponto crítico de h_v.

(ii) Se $v \in \mathcal{F}^c\backslash\{0\}$, então $\|v\|^2 \geq (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2$. Assim, pelo Lema 3.3.1(ii), segue que

$$\frac{h_v'(s)}{s} = \|v\|^2 - \lambda \int_{[v\neq 0]} \frac{g(sv)}{sv} v^2 \geq \lambda \int_{[v\neq 0]} \left[\frac{4}{\alpha^2} - \frac{g(sv)}{sv}\right] v^2 > 0, \ \forall\ s > 0.$$

Consequentemente, $h_v'(s) > 0$ para todo $s \in (0, \infty)$. □

Lema 3.5.4 *Se ϑ verifica $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$, as afirmações seguintes são verdadeiras:*

(A_1) *Existe $\tau > 0$ tal que $s_v \geq \tau$, para todo $v \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$;*

(A_2) *Para cada conjunto compacto $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}_\mathcal{F}$ existe $C_\mathcal{W} > 0$ tal que $s_v \leq C_\mathcal{W}$, para todo $v \in \mathcal{W}$;*

(A_3) *A aplicação $\widehat{m} : \mathcal{F} \to \mathcal{N}$ dada por $\widehat{m}(v) = s_v v$ é contínua e $m := \widehat{m}_{|\mathcal{S}_\mathcal{F}}$ é um homeomorfismo entre $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ e $\mathcal{N}$. Além disso, $m^{-1}(v) = v/\|v\|$.*

Demonstração. (A_1) Suponha que existe $\{v_n\} \subset \mathcal{S}_\mathcal{F}$ com $s_n := s_{v_n} \to 0$. Nesse caso, temos $v \in H_0^1(\Omega)$ com $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue do Lema 3.5.1(i) que

$$1 = \lambda \int_\Omega g(s_n v_n) v_n \leq (4/\alpha^2)\lambda s_n \int_\Omega v_n^2. \tag{3.13}$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$ na desigualdade anterior, obtemos uma contradição.

(A_2) Seja $\{v_n\} \subset \mathcal{W}$ uma sequência tal que $s_n := s_{v_n} \to \infty$. Como $\mathcal{W}$ é compacto, a menos de subsequência, obtemos $v \in \mathcal{W}$ tal que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, passando ao limite inferior quando $n \to \infty$ em

$$1 = \|v_n\|^2 \geq \lambda \int_{[v\neq 0]} \frac{g(s_n v_n)}{s_n v_n} v_n^2 \chi_{[v_n \neq 0]},$$

segue do do Lema 3.5.1(i) que

$$\|v\|^2 = 1 \geq (4\lambda/\alpha^2) \int_\Omega v^2,$$

mostrando que $v \in \mathcal{F}^c$. Desde que $v \in \mathcal{W} \subset \mathcal{F}$, obtemos uma contradição.

(A_3) Vamos provar que $\widehat{m}$ é contínua. Seja $\{v_n\} \subset \mathcal{F}$ e $v \in \mathcal{F}$ tal que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $\widehat{m}(sw) = \widehat{m}(w)$ para todo $w \in \mathcal{F}$ e $s > 0$, podemos assumir que $\{v_n\} \subset S_{\mathcal{F}}$. Consequentemente,

$$s_n = s_n\|v_n\|^2 = \lambda \int_\Omega g(s_n v_n)v_n, \tag{3.14}$$

onde $s_n := s_{v_n}$. Por (A_1) e (A_2), segue que, passando a uma subsequência, $s_n \to s > 0$. Daí, passando ao limite quando $n \to \infty$ em (3.14), resulta

$$s = s\|v\|^2 = \lambda \int_\Omega g(sv)v,$$

mostrando que

$$\widehat{m}(v_n) = s_n v_n \to sv = \widehat{m}(v).$$

A segunda parte de (A_3) é imediato. □

Lema 3.5.5 *Suponha que ϑ satisfaz (ϑ_1)–(ϑ_3). Então I é limitado inferiormente em $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.5.1(ii), tem-se

$$I(v) = \lambda \int_\Omega \left[\frac{1}{2}g(v)v - G(v)\right] \geq 0, \ \forall\ v \in \mathcal{N}. \tag{3.15}$$

□

Agora, definimos as aplicações: $\widehat{\Psi} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ e $\Psi : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$, por

$$\widehat{\Psi}(u) = I(\widehat{m}(u)) \text{ e } \Psi := (\widehat{\Psi})|_{\mathcal{S}_{\mathcal{F}}}.$$

As funções anteriores têm propriedades importantes que serão exibidas no próximo lema. A prova é uma consequência direta dos Lemas 3.5.3 e 3.5.4.

Lema 3.5.6 *Suponha que ϑ verifica $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$. Então:*

(i) $\widehat{\Psi} \in C^1(\mathcal{F}, \mathbb{R})$ *e*

$$\widehat{\Psi}'(u)v = \frac{\|\widehat{m}(u)\|}{\|u\|} I'(\widehat{m}(u))v, \ \forall u \in \mathcal{F} \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(ii) $\Psi \in C^1(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \mathbb{R})$ *e*

$$\Psi'(u)v = \|m(u)\| I'(m(u))v, \ \forall v \in T_u\mathcal{S}_{\mathcal{F}}.$$

(iii) Se $\{u_n\}$ *é uma sequência* $(PS)_c$ *para* Ψ *então* $\{m(u_n)\}$ *é uma sequência* $(PS)_c$ *para* I. *Se* $\{u_n\} \subset \mathcal{N}$ *é uma sequência* $(PS)_c$ *limitada para* I *então* $\{m^{-1}(u_n)\}$ *é uma sequência* $(PS)_c$ *para* Ψ.

(iv) u *é um ponto crítico de* Ψ *se, e somente se,* $m(u)$ *é um ponto crítico não-trivial de* I. *Além disso, os valores críticos correspondentes coincidem e*

$$\inf_{\mathcal{S}_{\mathcal{F}}} \Psi = \inf_{\mathcal{N}} I.$$

Proposição 3.5.1 *Suponha que* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *se verifiquem. Se* $\{v_n\} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ *é tal que* $dist(v_n, \partial\mathcal{S}_{\mathcal{F}}) \to 0$, *então existe* $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ *tal que* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $H_0^1(\Omega)$, $s_{v_n} \to \infty$ *e*

$$\Psi(v_n) \to \infty. \tag{3.16}$$

Demonstração. Como $\{v_n\} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ é limitada, a menos de subsequência, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ com $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Sabendo que $dist(v_n, \partial\mathcal{S}_{\mathcal{F}}) \to 0$, existe $\{w_n\} \subset \partial\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ tal que $\|v_n - w_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|(4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v_n^2 - 1\right| &= \left|(4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega (v_n^2 - w_n^2)\right| \\
&\leq (4\lambda/\alpha^2)|v_n + w_n|_2|v_n - w_n|_2 \\
&\leq (8\lambda/\alpha^2\lambda_1)\|v_n - w_n\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v_n^2 \to 1.$$

Pela Imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, segue que

$$1 = (4\lambda/\alpha^2)\int_\Omega v^2. \tag{3.17}$$

Assim $v \neq 0$. Suponha por contradição que, para alguma subsequência, $\{s_{v_n}\}$ é limitada. Nesse caso, passando novamente a uma subsequência, existe $s_0 > 0$ (veja Lema 3.5.4(A_1)) tal que

$$s_{v_n} \to s_0. \tag{3.18}$$

Segue de (3.18) e

$$s_{v_n} = \lambda \int_\Omega g(s_{v_n} v_n) v_n,$$

que

$$s_0 = \lambda \int_\Omega g(s_0 v) v.$$

Combinando a última igualdade e o Lema 3.5.1(i), obtemos

$$1 < (4\lambda/\alpha^2) \int_\Omega v^2.$$

Mas isso contradiz (3.17). Mostrando que $s_{v_n} \to \infty$. Por fim, de $s_{v_n} \to \infty$, Lema 3.5.1(ii) e do Lema de Fatou, obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \Psi(v_n) = \lambda \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left[\frac{1}{2} g(s_{v_n} v_n) s_{v_n} v_n - G(s_{v_n} v_n) \right] \geq \infty.$$

□

Proposição 3.5.2 *Suponha que* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *sejam verificadas e* $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_1$. *Então* $\Psi_{\lambda,4}$ *satisfaz a condição* $(PS)_c$.

Demonstração. Dos Lemas 3.5.4(A_3) e 3.5.6(iii), é suficiente mostrarmos que I satisfaz a condição $(PS)_c$. Para isso, seja $\{w_n\} \subset \mathcal{N}$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Mostraremos que $\{w_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, caso contrário, a menos de subsequência, teríamos $\|w_n\| \to \infty$. Definindo $v_n := w_n/\|w_n\| = m^{-1}(w_n) \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Dessa forma, $\{v_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e

$$\Psi(v_n) \to c. \tag{3.19}$$

Consequentemente, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega). \tag{3.20}$$

Suponha por contradição que $v = 0$. Como $\{\Psi(v_n)\}$ é limitada, existe $C > 0$ tal que

$$C > \Psi(v_n) = I(s_{v_n} v_n) \geq I(sv_n) = \left[\frac{1}{2} - \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \frac{G(sv_n)}{(sv_n)^2} v_n^2\right] s^2, \ \forall \ s > 0. \quad (3.21)$$

Pelo Lema 3.5.1(i), regra de L'Hôspital e Imersão compacta de Sobolev, passando ao limite quando $n \to \infty$ em (3.21), tem-se

$$C \geq (1/2)s^2, \ \forall \ s > 0,$$

que é uma contradição. Portanto, $v \neq 0$. Desde que $\{w_n\} \subset \mathcal{N}$ é $(PS)_c$ para I, obtemos

$$o_n(1) + \int_\Omega \nabla w_n \nabla w = \lambda \int_\Omega g(w_n) w, \ \forall \ w \in H_0^1(\Omega).$$

Dividindo a última igualdade por $\|w_n\|$, resulta

$$o_n(1) + \int_\Omega \nabla v_n \nabla w = \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \left[\frac{g(\|w_n\| v_n)}{\|w_n\| v_n}\right] v_n w.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$, do Lema 3.5.1(i),

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w = (4\lambda/\alpha^2) \int_\Omega vw, \ \forall \ w \in H_0^1(\Omega). \quad (3.22)$$

Agora, consideramos dois casos:

(i) Se $(4\lambda/\alpha^2) \neq \lambda_j$, qualquer que seja $j > 1$, de (3.22) temos $v = 0$. Mas isso é uma contradição. Portanto $\{w_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

(ii) Se $(4\lambda/\alpha^2) = \lambda_j$, para algum $j > 1$, então (3.22) implica que v é uma autofunção associada a λ_j. De (3.22), segue que

$$\|v\|^2 = (4\lambda/\alpha^2) \int_\Omega v^2,$$

isto é, $v \in \partial\mathcal{F}$. Por outro lado,

$$(4\lambda/\alpha^2) \int_\Omega v^2 = \|v\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = 1.$$

Suponha que

$$\|v\|^2 = (4\lambda/\alpha^2) \int_\Omega v^2 < 1. \quad (3.23)$$

Nesse caso, desde que

$$\|w_n\| = \|s_{v_n} v_n\| = s_{v_n}, \tag{3.24}$$

passando ao limite quando $n \to \infty$ em

$$\Psi(v_n) = \|w_n\|^2 \left\{ \frac{1}{2} - \lambda \int_\Omega \left[\frac{G(\|w_n\| v_n)}{(\|w_n\| v_n)^2} \right] v_n^2 \right\}$$

e usando o Lema 3.5.1(i), a regra de L'Hôspital e (3.23), concluímos que $\Psi(v_n) \to \infty$, uma contradição com (3.19). Consequentemente,

$$\|v\|^2 = (4\lambda/\alpha^2) \int_\Omega v^2 = 1, \tag{3.25}$$

mostrando que $v = e_j$ e

$$\|v_n\| \to \|v\|. \tag{3.26}$$

Usando (3.20) e (3.26), deduzimos que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$ com $v \in \partial \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ (veja (3.25)). Pela Proposição 3.5.1, concluímos que

$$\Psi(v_n) \to \infty, \tag{3.27}$$

levando-nos a uma contradição. Portanto $\{v_n\}$ é limitada.

Consequentemente, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Desde que $v_n \rightharpoonup v$, para finalizar a prova, devemos provar que $\|v_n\| \to \|v\|$. Para isso, é suficiente notar que desde que $\{v_n\}$ é $(PS)_c$, temos

$$o_n(1) + \int_\Omega \nabla v_n \nabla v = \lambda \int_\Omega g(v_n) v.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$ na igualdade anterior, obtemos

$$\|v\|^2 = \lambda \int_\Omega g(v) v. \tag{3.28}$$

Então (3.28) e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue implica

$$\|v_n\|^2 = \lambda \int_\Omega g(v_n) v_n = \lambda \int_\Omega g(v) v + o_n(1) = \|v\|^2 + o_n(1).$$

□

Lembre-se que denotamos por $d(m)$ a soma das dimensões de todos os auto espaços V_{λ_j} associado ao autovalor λ_j, onde $1 \leq j \leq m$.

Lema 3.5.7 *Suponha* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *e* $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_m$. *Então,*

(i) $\gamma_{d(m)} \neq \emptyset$;

(ii) $\gamma_1 \supset \gamma_2 \supset \ldots \supset \gamma_{d(m)}$;

(iii) *Se* $\varphi \in C(\mathcal{S}_{\mathcal{F}}, \mathcal{S}_{\mathcal{F}})$ *é ímpar, então* $\varphi(\gamma_j) \subset \gamma_j$, *para todo* $1 \leq j \leq d(m)$;

(iv) *Se* $B \in \gamma_j$ *e* $C \in \mathcal{E}$ *com* $\gamma(C) \leq s < j \leq d(m)$, *então* $\overline{B \backslash C} \in \gamma_{j-s}$.

Demonstração. (i) Seja $\mathcal{S}_{d(m)}$ a esfera unitária de $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$. Como $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_m$, concluímos que $S_{d(m)} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$. Além disso, do Lema 1.0.2(iii), temos $\gamma(S_{d(m)}) = d(m)$. Mostrando que $S_{d(m)} \in \gamma_{d(m)}$. (ii) é imediato. (iii) Segue diretamente do Lema 1.0.2(ii). (iv) é uma consequência do Lema 1.0.2(v). $\square$

Agora, para cada $1 \leq j \leq d(m)$, definimos os seguintes níveis minimax:

$$c_j = \inf_{B \in \gamma_j} \sup_{u \in B} \Psi(u). \tag{3.29}$$

Lema 3.5.8 *Suponha* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$. *Então,*

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{d(m)} < \infty.$$

Demonstração. A primeira desigualdade segue do Lema 3.5.5. Por outro lado, a monotonicidade dos níveis c_j é uma consequência do Lema 3.5.7(ii). $\square$

A próxima proposição é crucial para garantir a existência de múltiplas soluções.

Proposição 3.5.3 *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *e* $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_m$. *Se* $c_j = \ldots = c_{j+p} \equiv c$, $j + p \leq d(m)$, *então* $\gamma(K_c) \geq p + 1$, *onde* $K_c := \{v \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}} : \Psi(v) = c \ \text{ e } \Psi'(v) = 0\}$.

Demonstração. Suponha que $\gamma(K_c) \leq p$. Pela Proposição 3.5.2 e o Lema 3.5.8, K_c é um compacto. Assim, do Lema 1.0.2(iv), existe uma vizinhança compacta K (em $H_0^1(\Omega)$) de K_c tal que $\gamma(K) \leq p$. Definindo $M := K \cap \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, obtemos pelo Lema 1.0.2(ii) que $\gamma(M) \leq p$. Apesar da falta de completude de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ podemos usar o Teorema 3.11 em [44] (veja também observação 3.12 em [44]) para garantir a existência de uma família de homeomorfismos ímpares $\eta(.,t)$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ tal que, para cada $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, a aplicação

$$t \mapsto \Psi(\eta(u,t)) \text{ é não crescente.} \tag{3.30}$$

Observe que, Apesar de $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ ser incompleto, da Proposição 3.5.1 e (3.30), para todo $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, a aplicação $t \mapsto \eta(u,t)$ está bem definida em $t \in [0,\infty)$. Consequentemente, faz sentido a terceira revindicação do Teorema 3.11 em [44], ou seja,

$$\eta((\Psi)_{c+\varepsilon}\backslash M, 1) \subset (\Psi)_{c-\varepsilon}. \tag{3.31}$$

Escolhendo $B \in \gamma_{j+p}$ tal que $\sup_B \Psi \leq c+\varepsilon$. Pelo Lema 3.5.7$(iv)$, $\overline{B\backslash M} \in \gamma_j$. Segue novamente do Lema 3.5.7(iii) que $\eta(\overline{B\backslash M}, 1) \in \gamma_j$. Portanto, de (3.31) e da definição de c, temos

$$c \leq \sup_{\eta(\overline{B\backslash M},1)} \Psi \leq c-\varepsilon,$$

que é uma contradição. Então $\gamma(K_c) \geq p+1$. □

Agora estamos prontos para provar o seguinte Teorema.

Teorema 3.5.1 *Suponha que* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$ *sejam satisfeitas. Se* $q=4$ *e* $\lambda > (\alpha^2/4)\lambda_m$, *então o problema* $(P_{\lambda,q})$ *possui pelo menos* $1+\sum_{i=2}^{m} dimV_{\lambda_i}$ *pares de soluções nã triviais* u_i *onde* $I(f^{-1}(u_i))>0$.

Demonstração. De fato, note que $0 \leq c_j < \infty$ são níveis críticos de Ψ. Com efeito, suponha por contradição que c_j seja regular para algum j. Pelo Teorema 3.11 em [44], com $\beta = c_j$, $\bar{\varepsilon}=1$, $N=\emptyset$, existe $\varepsilon>0$ e uma família de homeomorfismos ímpares $\eta(.,t)$ satisfazendo as propriedades do referente teorema. Escolhendo $B \in \gamma_j$ tal que $\sup_B \psi < c_j+\varepsilon$ e argumentando como na prova da Proposição 3.5.3 obtemos uma contradição.

Por fim, se os níveis c_j, $1 \leq j \leq d(m)$, são diferentes entre si, pela Proposição 3.5.6(iv), segue o resultado. Por outro lado, se $c_j = c_{j+1} \equiv c$ para algum $1 \leq j \leq d(m)$, segue da Proposição 3.5.3 que $\gamma(K_c) \geq 2$. Combinando a última desigualdade com o Lema 1.0.2(vi) e a Proposição 3.5.6(iv), concluímos que $(P_{\lambda,q})$ possui infinitos pares de soluções não triviais. □

3.6 Caso $4 < q < 22^*$

Nesta seção estudaremos o problema $(P_{\lambda,q})$, onde $q \in (4, 22^*)$. Por meio da simetria do Passo da Montanha do lema em [37], mostramos a existência de infinitas soluções com energia positiva.

Teorema 3.6.1 *Suponha que* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *ocorrem e* $q \in (4, 22^*)$, *onde* $2^* = 2N/(N-2)$. *Então,* $(P_{\lambda,q})$ *possui infinitas soluções com energia positiva, para cada* $\lambda > 0$.

Demonstração. Para algum $e \in H_0^1(\Omega)$, com $\|e\| = 1$, podemos dividir $H_0^1(\Omega)$ da seguinte maneira $H_0^1(\Omega) = X \oplus Span\{e\}$, onde X é o complemento ortogonal de e. Segue do item (iv) da Proposição 1.2.2 e das Imersões de Sobolev, que

$$I(sv) = \frac{1}{2}s^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |f(sv)|^q \geq \frac{1}{2}s^2 - \lambda C|s|^q,$$

para todo $v \in X$ com $\|v\| = 1$ e alguma constante positiva C. Desde que $q \in (4, 22^*)$, existem constantes positivas ρ e α tais que

$$I(\rho v) \geq \alpha, \ \forall \ v \in X \text{ with } \|v\| = 1.$$

Agora, vamos provar que para cada subespaço k-dimensional E_k de $H_0^1(\Omega)$, com $k > 1$, existem $\gamma_k > 0$ e $r_k > 0$ tais que

$$I(v) \leq 0, \ \forall \ v \in E_k \backslash B_{r_k}(0). \tag{3.32}$$

Para isso, basta observar que, pelo Lema 3.4.2, existem $\beta_k > 0$ e $r_k > 0$ tais que

$$E_k \backslash B_{r_k}(0) \subset \ \mathcal{A}_k := \mathcal{A}_{\beta_k}.$$

Assim, por (3.11)

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_{[v>1]} |f(v)|^q \leq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\lambda f(1)^q}{q}\int_{[v>1]} |v|^{(q)/2},$$

para todo $v \in E_k \backslash B_{r_k}(0)$. Logo,

$$\begin{aligned} I(v) \ &\leq \ \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{\lambda f(1)^q}{q}\int_\Omega |v|^{q/2} + \frac{\lambda f(1)^q}{q}|\Omega| \\ &\leq \ \frac{1}{2}\|v\|^2 - \lambda C_k\|v\|^{q/2} + \lambda C, \end{aligned}$$

para todo $v \in E_k \backslash B_{r_k}(0)$. Como $q \in (4, 22^*)$, podemos escolher r_k grande o suficiente para garantir que

$$I(v) \leq 0, \ \forall \ v \in E_k \backslash B_{r_k}(0).$$

Finalmente, para mostrar que I satisfaz a condição $(PS)_c$, seja $\{v_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I(v_n) \to c \text{ and } \|I'(v_n)\| \to 0.$$

Escolhendo $\varphi_n = |f(v_n)|/f'(v_n)$, concluímos do item (v) da Proposição 1.2.2 que

$$|\varphi_n| \leq 2|v_n| \text{ and } |\nabla \varphi_n| = \left(1 + \frac{\vartheta'(f(v_n))f(v_n)}{2\vartheta(f(v_n))}\right)|\nabla v_n|.$$

Consequentemente, por (ϑ_2),

$$|\varphi_n|_2 \leq 2|v_n|_2 \text{ and } \|\varphi_n\| \leq 2\|v_n\|, \tag{3.33}$$

mostrando que $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$. Agora, vamos verificar que $\{v_n\}$ é limitada. De fato, por (3.33)

$$C_1 + C_2\|v_n\| \geq I(v_n) - \frac{1}{q}I'(v_n)\varphi_n = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\left(1 + \frac{\vartheta'(f(v_n))f(v_n)}{2\vartheta(f(v_n))}\right)\right]\|v_n\|^2.$$

Usando (ϑ_2) mais uma vez, temos

$$C_1 + C_2\|v_n\| \geq \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{q}\right]\|v_n\|^2 = \frac{(q-4)}{2q}\|v_n\|^2, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Assim sendo $\{\|v_n\|\}$ é limitada. Para provar que $\{u_n\}$ possui uma subsequencia convergente em $H_0^1(\Omega)$, é suficiente argumentar como na prova do Teorema 2.3.1. O resultado segue agora a partir da simetria do Passo da Montanha do Lema em [37]. $\square$

Capítulo 4

Problemas do tipo "côncavo-convexo".

4.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a seguinte equação não linear elíptica

$$\begin{cases} -div(\vartheta(u)\nabla u) + \frac{1}{2}\vartheta'(u)|\nabla u|^2 = \lambda |u|^{q-2}u + \mu |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{\lambda,\mu,q,p})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio limitado com fronteira suave, $1 < q < 4$, $\max\{2, q\} < p < 22^*$, λ e μ são parâmetros reais e $\vartheta : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ é uma função par de classe C^1, satisfazendo as condições (ϑ_1), (ϑ_2) e (ϑ_3) mencionadas no capítulo 1.

Mostrar existência de solução para $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ é equivalente a mostrar existência de solução para

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda f'(v)|f(v)|^{q-2}f(v) + \mu f'(v)|f(v)|^{p-2}f(v) & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (D_{\lambda,\mu,q,p})$$

onde $f \in C^2(\mathbb{R})$ é a mudança de variável definida em (1.1).

Definição 4.1.1 *Uma solução fraca para o problema* $(D_{\lambda,\mu,q,p})$ *é uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$ *tal que para qualquer* $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \lambda \int_\Omega f'(u)\,|f(u)|^{q-2}\,f(u)v + \mu \int_\Omega f'(u)\,|f(u)|^{p-2}\,f(u)v, \qquad (4.1)$$

ou seja, u é um ponto crítico do funcional $J : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ *associado ao problema* $(D_{\lambda,\mu,q,p})$ *definido por*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q}\int |f(u)|^q - \frac{\mu}{p}\int |f(u)|^p . \tag{4.2}$$

A Proposição 1.2.2 assegura que a noção anterior de solução fraca faz sentido, assim como garante que J está bem definido e é de classe C^1. Antes de finalizar esta seção, vamos introduzir dois lemas técnicos que serão muito úteis mais adiante.

A partir de agora, denotamos neste capítulo $\{e_j\}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ composta por funções em $L^\infty(\Omega)$ (por exemplo, a base composta por autofunções do operador Laplaciano com condição de fronteira de Dirichlet),

$$X_j := Span\{e_j\}, Y_k := \oplus_{j=0}^k X_j \text{ and } Z_k := \overline{\oplus_{j=k}^\infty X_j}.$$

Como $|f(s)|$ se comporta como $|s|$ perto da origem e como $|s|^{1/2}$ no infinito, o próximo lema será muito útil para obtermos algumas estimativas importantes para os resultados de existência.

Lema 4.1.1 *Seja* $\mathcal{S}_k$ *a esfera unitária de* Y_k*. Existe uma constante positiva* τ_k *tal que:*

$$[|su| < 1] = \Omega, \tag{4.3}$$

para todo $u \in \mathcal{S}_k$ *e* $0 < s < \tau_k$*.*

Demonstração. De fato, observe que se $u \in \mathcal{S}_k$ então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|u(x)| = \left|\sum_{j=0}^k y_j e_j(x)\right| \le \left(\sum_{j=0}^k y_j^2\right)\left(\sum_{j=0}^k e_j(x)^2\right) \le (k+1)M^2, \tag{4.4}$$

onde $M := \max_{j=0}^k |e_j|_\infty$. Consequentemente, escolhendo $\tau_k := 1/(k+1)M^2$ segue o resultado. $\square$

Lema 4.1.2 *Seja $\mathcal{S}_k$ a esfera unitária de Y_k. Existem constantes positivas $\beta_k(r)$ e α_k tais que para cada $r \in [1, 2^*]$,*

$$\beta_k(r) \leq \int_{[1<|su|]} |u|^r, \tag{4.5}$$

para todo $u \in \mathcal{S}_k$ e $s > \alpha_k$.

Demonstração. De fato, pelo Lema de Fatou, Lema 3.4.1 e como Y_k possui dimensão finita,

$$\begin{aligned}
\liminf_{s\to\infty} \int_{[1<|su|]} |u|^r dx &= \liminf_{s\to\infty} \int_\Omega |u|^r \chi_{[1<|su|]} \\
&\geq \int_\Omega |u|^r \liminf_{s\to\infty} \chi_{[1<|su|]} \\
&\geq \int_\Omega |u|^r \chi_{[u\neq 0]} \\
&= \int_\Omega |u|^r dx \geq \zeta_k(r),
\end{aligned}$$

para todo $u \in \mathcal{S}_k$ e algum $\zeta_k(r) > 0$. Escolhendo $0 < \beta_k(r) < \zeta_k(r)$, segue resultado. □

4.2 Resultados de não-existência

Nesta seção, mostraremos resultados de não-existência para o problema $(P_{\lambda,\mu,q,p})$, mais especificamente, demonstraremos o seguinte Teorema:

Teorema 4.2.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $\lambda, \mu \leq 0$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ não tem solução não trivial;

(ii) Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1) - (\vartheta_2)$, $1 < q \leq 2$ e $p \geq 4$. Se $\lambda < 0$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ não possui solução u satisfazendo $J(f^{-1}(u)) \leq 0$. Analogamente, se $\mu < 0$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ não possui solução u satisfazendo $J(f^{-1}(u)) \geq 0$;

(iii) Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$. Se $\max\{2, q\} < p \leq 4$ e $\lambda < 0$, então existe $\mu_* > 0$ tal que $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ não possui solução não trivial, seja qual for $\mu \in (0, \mu_*)$. Além disso, se $1 < q < 2 < p \leq 4$ e $\lambda > 0$, então existe $s_* > 0$

tal que $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução* u *satisfazendo* $J(f^{-1}(u)) \geq 0$*, qualquer que seja* $\mu \in (-s_*, s_*)$*.*

(iv) *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$*. Se* $2 \leq q < 4$ *e* $\mu < 0$*, então existe* $\lambda_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução não trivial, seja qual for* $\lambda \in (0, \lambda_*)$*. Além disso, se* $2 \leq q < p \leq 4$ *e* $\mu > 0$*, então existe* $t_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução* u *satisfazendo* $J(f^{-1}(u)) \leq 0$*, qualquer que seja* $\lambda \in (-t_*, t_*)$*.*

(v) *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$*. Se* $2 \leq q < p \leq 4$*, então existe* $r_* > 0$ *tal que* $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ *não possui solução não trivial, seja qual for* $\lambda, \mu \in (-r_*, r_*)$*.*

Demonstração. (i) De fato, por $f(0) = 0$ e da Proposição 1.2.2(ii) obtemos $f(s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, se u é uma solução, então

$$\|u\|^2 = \lambda \int_\Omega f'(u) \, |f(u)|^{q-2} \, f(u) u dx + \mu \int_\Omega f'(u) \, |f(u)|^{p-2} \, f(u) u \leq 0.$$

Portanto $u = 0$.

(ii) Suponha $\lambda < 0$ e u solução fraca não trivial de $(D_{\lambda,\mu,q,p})$. Pelo item anterior, temos $\mu > 0$. Pela Proposição 1.2.2(v),

$$\lambda \int_\Omega |f(u)|^q + \frac{\mu}{2} \int_\Omega |f(u)|^p < \|u\|^2. \tag{4.6}$$

Se $J(u) \leq 0$, então

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |f(u)|^q - \frac{\mu}{p} \int_\Omega |f(u)|^p \leq 0.$$

Assim,

$$\|u\|^2 \leq \frac{2\lambda}{q} \int_\Omega |f(u)|^q + \frac{2\mu}{p} \int_\Omega |f(u)|^p \, . \tag{4.7}$$

Comparando (4.6) e (4.7), obtemos

$$0 \leq \lambda \left(1 - \frac{2}{q}\right) \int_\Omega |f(u)|^q + \mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p}\right) \int_\Omega |f(u)|^p < 0,$$

sempre que $1 < q \leq 2$ e $p \geq 4$. O que é uma contradição.

Agora, seja $\mu < 0$ e u solução fraca de $(D_{\lambda,\mu,q,p})$. Novamente, pelo item (i), temos $\lambda > 0$. Pela Proposição 1.2.2(v),

$$\|u\|^2 < \lambda \int_\Omega |f(u)|^q + \frac{\mu}{2} \int_\Omega |f(u)|^p \,. \tag{4.8}$$

Se $J(u) \geq 0$, então

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |f(u)|^q - \frac{\mu}{p} \int_\Omega |f(u)|^p \geq 0.$$

Assim,

$$\frac{2\lambda}{q} \int_\Omega |f(u)|^q + \frac{2\mu}{p} \int_\Omega |f(u)|^p \leq \|u\|^2. \tag{4.9}$$

Comparando (4.8) e (4.9), obtemos

$$0 < \lambda \left(1 - \frac{2}{q}\right) \int_\Omega |f(u)|^q + \mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p}\right) \int_\Omega |f(u)|^p \leq 0.$$

para todo $1 < q \leq 2$ e $p \geq 4$. Portanto, fica provado (ii).

(iii) Se $\max\{2, q\} < p \leq 4$, $\lambda < 0$ e u é uma solução fraca não trivial de $(D_{\lambda,\mu,q,p})$, então, por $f(0) = 0$ e pela Proposição 1.2.2(ii), $f(s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, pelo item (i), temos $\mu > 0$. Daí,

$$\|u\|^2 \leq \mu \int_\Omega f'(u)\, |f(u)|^{p-1}\, |u|.$$

Pela Proposição 1.2.2(v),

$$\|u\|^2 \leq \mu \int_\Omega |f(u)|^p \,. \tag{4.10}$$

Segue dos itens (v) e (vi) da Proposição 1.2.2 que

$$|f(s)| \leq (8/\alpha^2)^{1/4} |s|^{1/2},$$

para todo $|s| > 1$. Assim, da Proposição 1.2.2(iv) e desde que $2 \leq p \leq 4$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(u)|^p &\leq \int_{[|u| \leq 1]} |u|^p + (8/\alpha^2)^{p/4} \int_{[|u|>1]} |u|^{p/2} \\ &\leq \int_{[|u| \leq 1]} |u|^2 dx + (8/\alpha^2)^{p/4} \int_{[|u|>1]} |u|^2 \\ &\leq [1 + (8/\alpha^2)^{p/4}] \int_\Omega |u|^2 \,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Por (4.10), (4.11) e das Imersões de Sobolev,

$$\|u\|^2 \leq \mu[1+(8/\alpha^2)^{p/4}]|u|_2^2 \leq \mu[1+(8/\alpha^2)^{p/4}]C_1\|u\|^2. \tag{4.12}$$

Desde que u é solução não trivial, obtemos

$$0 < \frac{1}{[1+(8/\alpha^2)^{p/4}]C_1} =: \mu_* \leq \mu. \tag{4.13}$$

Para provar a segunda parte, suponha $\lambda > 0$ e u solução não trivial, com $J(u) \geq 0$. Segue da Proposição 1.2.2(v),

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &\leq \lambda \int_\Omega |f(u)|^q + |\mu| \int_\Omega |f(u)|^p \\ &\leq \frac{q}{2}\|u\|^2 + |\mu| \left(1+\frac{q}{p}\right) |f(u)|^p .\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)\|u\|^2 \leq |\mu| \left(1+\frac{q}{p}\right) |f(u)|^p .$$

Como $2 \leq p \leq 4$, por (4.11),

$$\left(1-\frac{q}{2}\right)\|u\|^2 \leq |\mu| \left(1+\frac{q}{p}\right) [1+(8/\alpha^2)^{p/4}]C_1\|u\|^2.$$

Desde que $1 < q < 2$, concluímos que

$$0 < \frac{\left(1-\frac{q}{2}\right)}{\left(1+\frac{q}{p}\right)[1+(8/\alpha^2)^{p/4}]C_1} \leq |\mu|.$$

Isso conclui a prova do item (iii).

(iv) Seja $2 \leq q < 4$, $\mu < 0$ e u solução fraca não trivial de $(D_{\lambda,\mu,q,p})$, Pela Proposição 1.2.2(v)

$$\|u\|^2 \leq \lambda \int_\Omega |f(u)|^q .$$

Do item (i), (4.11) e das Imersões de Sobolev,

$$\|u\|^2 \leq \lambda[1+(8/\alpha^2)^{q/4}]C_1\|u\|^2. \tag{4.14}$$

Como u é solução não trivial, obtemos

$$0 < \frac{1}{[1+(8/\alpha^2)^{q/4}]C_1} =: \lambda_* \leq \lambda. \tag{4.15}$$

Finalmente, supondo que $\mu > 0$ e u solução não triial, com $J(u) \leq 0$. Segue da Proposição 1.2.2(v) que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\geq -|\lambda| \int_\Omega |f(u)|^q + \frac{\mu}{2} \int_\Omega |f(u)|^p \\ &\geq \frac{p}{4}\|u\|^2 - |\lambda| \left(1 + \frac{p}{2q}\right) \int_\Omega |f(u)|^q . \end{aligned}$$

Como $p < 4$,

$$0 < \left(1 - \frac{p}{4}\right) \|u\|^2 \leq |\lambda| \left(1 + \frac{p}{2q}\right) \int_\Omega |f(u)|^q .$$

Sendo $2 \leq q < 4$, by (4.11)

$$\left(1 - \frac{p}{4}\right) \|u\|^2 \leq |\lambda| \left(1 + \frac{p}{2q}\right) [1 + (8/\alpha^2)^{q/4}] C_1 \|u\|^2.$$

Portanto,

$$0 < \frac{\left(1 - \frac{p}{4}\right)}{\left(1 + \frac{p}{2q}\right) [1 + (8/\alpha^2)^{q/4}] C_1} \leq |\lambda|.$$

(v) Seja $2 \leq q < p \leq 4$ e u solução fraca não trivial de $(D_{\lambda,\mu,q,p})$. Pela Proposição 1.2.2(v) e (4.11),

$$\|u\|^2 \leq |\lambda| \int_\Omega |f(u)|^q + |\mu| \int_\Omega |f(u)|^p \leq \left[|\lambda|[1 + (8/\alpha^2)^{p/4}] C_1 + |\mu|[1 + (8/\alpha^2)^{p/4}] C_2\right] \|u\|^2.$$

Como u é não trivial, segue o resultado. □

4.3 Multiplicidade de soluções

A prova dos resultados de existência será dividida em várias proposições. Antes, precisamos introduzir algumas definições. Dizemos que J satisfaz a condição $(PS)^*_c$, com respeito a $\{Y_n\}$, se qualquer sequência $\{u_n\} \subset H^1_0(\Omega)$, tal que

$$u_n \in Y_n, J_{\lambda,\mu}(u_n) \to c \text{ and } (J_{\lambda,\mu}|_{Y_n})'(u_n) \to 0 \tag{4.16}$$

contém uma subsequencia convergindo para um ponto crítico de J. Qualquer sequência $\{u_n\} \subset H^1_0(\Omega)$ satisfazendo (4.16) é dita $(PS)^*_c$ para J. Sabe-se que a condição $(PS)^*_c$ implica a condição clássica $(PS)_c$, veja [47].

Proposição 4.3.1 *Suponha que* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$ *ocorram. Então:*

(i) *Se* $p = 4$, *então* J *satisfaz a condição* $(PS)^*_c$, *para todo* $1 < q < 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\mu < \lambda_1\alpha^2/4$;

(ii) *Se* $p \neq 4$, *então* J *satisfaz s condição* $(PS)^*_c$, *para todo* $1 < q < \min\{4, p\}$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (i) Seja $p = 4$ e $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)^*_c$ para J, isto é, (4.16) ocorre. Se $\lambda > 0$ e $\mu \leq 0$, segue da Proposição 1.2.2(v) que

$$C+C_0\|u_n\| \geq J(u_n)-\frac{1}{p}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2-\lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q\,,$$

Agora, devemos considerar dois casos: se $1 < q \leq 2$, concluímos da Proposição 1.2.2(iv) e das imersões de Sobolev que

$$C + C_0\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}\right)C_1\|u_n\|^q. \tag{4.17}$$

Antes de considerar o caso $2 < q < 4$, observe que não podemos usar a Proposição 1.2.2(iv) da mesma forma que anteriormente porque $|u|^q$ pode não ser integrável. Para superar essa dificuldade, notamos que pelos itens (v) e (vi) da Proposição 1.2.2,

$$|f(s)| \leq (8/\alpha^2)^{1/4}|s|^{1/2}, \tag{4.18}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 1.2.2(iv), para cada $2 \leq r \leq 22^*$,

$$\int_\Omega |f(u)|^r \leq (8/\alpha^2)^{r/4}\int_\Omega |u|^{r/2}\,. \tag{4.19}$$

Assim, se $2 < q < 4$, segue de (4.19) e das Imersões de Sobolev,

$$C + C_0\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}\right)(8/\alpha^2)^{q/4}C_1\|u_n\|^{q/2}. \tag{4.20}$$

Por (4.17) e (4.20), $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_0(\Omega)$. Se $\lambda, \mu > 0$, da Proposição 1.2.2(v), (4.19) e das Imersões de Sobolev,

$$\begin{aligned} C + C_0\|u_n\| &\geq J(u_n) - \frac{1}{4}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \\ &\geq \left(\frac{1}{4}-\frac{\mu}{\lambda_1\alpha^2}\right)\|u\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{8}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q\,. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, se $\mu < \lambda_1\alpha^2/4$.

Por outro lado, se $\lambda, \mu \leq 0$,

$$C+C_0\|u_n\| \geq J(u_n)-\frac{1}{p}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2-\lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q,$$

mostrando que $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Se $\lambda \leq 0$ e $\mu > 0$,

$$\begin{aligned} C + C_0\|u_n\| &\geq J(u_n) - \frac{1}{4}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \\ &\geq \left[\frac{1}{4} - \frac{\mu}{\lambda_1\alpha^2}\right]\|u\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{4}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q. \end{aligned}$$

Portanto, $\{u_n\}$ é novamente limitada em $H_0^1(\Omega)$, se $\mu < \lambda_1\alpha^2/4$. Daí, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } H_0^1(\Omega), \tag{4.21}$$

$$\int_\Omega f'(u_n)\,|f(u_n)|^{q-2} f(u_n)(u_n-u) \to 0 \tag{4.22}$$

and

$$\int_\Omega f'(u_n)\,|f(u_n)|^{p-2} f(u_n)(u_n-u) \to 0. \tag{4.23}$$

Definindo $v_n := P_{Y_n}u$ como a projeção ortogonal de u em Y_n, obtemos

$$v_n \to u \text{ in } H_0^1(\Omega). \tag{4.24}$$

Como $u_n - v_n \in Y_n$ e $\{u_n - v_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, concluímos que

$$(J|_{Y_n})'(u_n)(u_n - v_n) = o_n(1).$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - v_n) =$$
$$\lambda \int_\Omega f'(u_n)\,|f(u_n)|^{q-2} f(u_n)(u_n-v_n)dx + \mu \int_\Omega f'(u_n)\,|f(u_n)|^{p-2} f(u_n)(u_n-v_n)dx + o_n(1).$$

De (4.21), (4.22), (4.23) and (4.24), concluímos que

$$\|u_n\|^2 = \|v_n\|^2 + o_n(1). \tag{4.25}$$

O resultado segue agora de (4.21) e (4.24).

(ii)Seja $p \neq 4$ e $\{u_n\}$ uma sequência $(PS)^*_c$ para $J_{\lambda,\mu}$. Se $\lambda > 0$ e $\mu \leq 0$ proceder exatamente como no caso $p = 4$. Por outro lado, se $\lambda, \mu > 0$ vamos considerar separadamente dois casos: se $p < 4$, segue da Proposição 1.2.2(v), (4.19) e das Imersões contínuas de Sobolev,

$$
\begin{aligned}
C + C_0\|u_n\| &\geq J(u_n) - \frac{1}{p}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 - \frac{\mu}{2p}(8/\alpha^2)^{p/4}C_1\|u_n\|^{p/2} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2p}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q .
\end{aligned}
$$

Estimando a última parcela como em (4.17) e (4.20) concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_0(\Omega)$. No caso $p > 4$, é suficiente notar que, da Proposição 1.2.2(v)

$$
C+C_0\|u_n\| \geq J(u_n)-\frac{2}{p}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p}\right)\|u_n\|^2-\lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q .
$$

Mais uma vez, alimitação de $\{u_n\}$ em $H^1_0(\Omega)$ decorre de um raciocínio similar a (4.17) e (4.20).

Finalmente, se $\lambda, \mu \leq 0$, argumentamos exatamente como no caso $p = 4$ e, se $\lambda \leq 0$ e $\mu > 0$,

$$
\begin{aligned}
C + C_0\|u_n\| &= J(u_n) - \frac{1}{p}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2 - \frac{\mu}{2p}(8/\alpha^2)^{p/4}C_1\|u_n\|^{p/2} - \lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q ,
\end{aligned}
$$

quando $p < 4$, e

$$
C+C_0\|u_n\| \geq J(u_n)-\frac{2}{p}(J|_{Y_n})'(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{p}\right)\|u_n\|^2-\lambda\left(\frac{1}{q} - \frac{2}{p}\right)\int_\Omega |f(u_n)|^q ,
$$

quando $p > 4$. Em todos os casos podemos concluir que $\{u_n\}$ é limitada em $H^1_0(\Omega)$. Agora o resultado segue exatamente igual ao caso e $p = 4$. $\square$

Proposição 4.3.2 *Suponha* $(\vartheta_1) - (\vartheta_3)$*,* $4 < p < 2.2^*$ *e* $\mu > 0$*. Então existem* $0 < r_k < \rho_k$ *tais que:*

$$
\max_{u \in Y_k, \|u\| = \rho_k} J(u) \leq 0. \tag{4.26}
$$

e

$$
\inf_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} J(u) \to \infty \text{ as } k \to \infty. \tag{4.27}
$$

Demonstração. Para provar (4.26), observe que da Proposição 1.2.2(v)

$$|f(s)| \geq f(1)|s|^{1/2}, \text{ if } |s| > 1.$$

Assim, para cada $u \in S_k$ e $\rho > 0$

$$J(\rho u) \leq \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{|\lambda|}{q}\int_\Omega |f(\rho u)|^q - \frac{\mu}{p}f(1)^p\rho^{p/2}\int_{[1<|\rho u|]}|u|^{p/2}.$$

Pelo Lema 4.1.2(ii), existem constantes positivas $\alpha_k, \beta_k(p/2)$ tais que, para cada $u \in S_k$ e $\rho > \alpha_k$,

$$J(\rho u) \leq \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{|\lambda|}{q}\int_\Omega |f(\rho u)|^q - \frac{\mu}{p}f(1)^p\beta_k(p/2)\rho^{p/2}. \tag{4.28}$$

Agora, vamos considerar dois casos: se $1 < q \leq 2$, segue da Proposição 1.2.2(iv) e das Imersões de Sobolev,

$$J(\rho u) \leq \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{|\lambda|}{q}C_1\rho^q - \frac{\mu}{p}f(1)^p\beta_k(p/2)\rho^{p/2}.$$

Como $p > 4$, escolhendo $\rho_k > \max\{1, [p(1/2 + |\lambda|C_1/q)/\mu f(1)^p\beta_k(p/2)]^{2/(p-4)}\}$, obtemos

$$J(\rho_k u) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{|\lambda|}{q}C_1\right)\rho_k^2 - \frac{\mu}{p}f(1)^p\beta_k(p/2)\rho_k^{p/2} < 0,$$

para todo $u \in S_k$. Por outro lado, se $2 < q < 4$, por (4.28), (4.19) e das Imerrsões de Sobolev,

$$J(\rho u) \leq \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{|\lambda|}{q}(8/\alpha^2)^{q/4}C_1\rho^{q/2} - \frac{\mu}{p}f(1)^p\beta_k(p/2)\rho^{p/2}.$$

Portanto, escolhendo $\rho_k > \max\{1, [p(1/2 + |\lambda|(8/\alpha^2)^{q/4}C_1/q)/\mu f(1)^p\beta_k(p/2)]^{2/(p-4)}\}$, obtemos

$$J(\rho_k u) \leq \left[\frac{1}{2} + \frac{|\lambda|}{q}(8/\alpha^2)^{q/4}C_1\right]\rho_k^2 - \frac{\mu}{p}f(1)^p\beta_k(p/2)\rho_k^{p/2} < 0,$$

para todo $u \in S_k$. Isso prova (4.26).

Para provar (4.27), note que para qualquer $1 \leq r < 2^*$, podemos definir

$$\theta_{r,k} := \sup_{u \in Z_k\setminus\{0\}} \frac{|u|_r}{\|u\|}. \tag{4.29}$$

É uma consequência direta das Imersões Compactas de Sobolev que

$$\theta_{r,k} \to 0 \text{ as } k \to \infty, \tag{4.30}$$

veja Lema 3.8 in [47]. Se $1 < q < 2$, pela Proposição 1.2.2(iv) e (4.19)

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|\lambda|}{q}\int_\Omega |u|^q - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\int_\Omega |u|^{p/2},$$

Das Imersões de Sobolev e (4.29),

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|\lambda|}{q}C_1\|u\|^q - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\theta_{p/2,k}^{p/2}\|u\|^{p/2},$$

para todo $u \in Z_k$. Como $1 < q < 2$, para $\|u\| \geqslant R_*$ com $R_* > 0$ suficientemente grande,

$$\frac{|\lambda|}{q}C_1\|u\|^q < \frac{1}{r}\|u\|^2,$$

para algum $r > 2p/(p-2)$. Assim, para $\|u\| \geqslant R_*$,

$$J(u) \geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)\|u\|^2 - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\theta_{p/2,k}^{p/2}\|u\|^{p/2}. \tag{4.31}$$

Segue de (4.30) que, escolhendo $r_k = 1/[\mu(8/\alpha^2)^{p/4}\theta_{p/2,k}^{p/2}]^{2/(p-4)}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \geqslant R_*$ para todo $k \geqslant k_0$. Portanto,

$$J(u) \geqslant \left(\frac{r-2}{2r} - \frac{1}{p}\right)r_k^2, \tag{4.32}$$

para todo $u \in Z_k$ com $\|u\| = r_k$ e $k \geqslant k_0$. Como $r_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, segue o resultado. Se $2 \leq q < 4$, segue de (4.19) que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|\lambda|}{q}(8/\alpha^2)^{q/4}\int_\Omega |u|^{q/2} - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\int_\Omega |u|^{p/2},$$

Das Imersões de Sobolev e (4.29),

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|\lambda|}{q}(8/\alpha^2)^{q/4}C_1\|u\|^{q/2} - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\theta_{p/2,k}^{p/2}\|u\|^{p/2},$$

Agora, desde que $1 \leq q/2 < 2$, podemos proceder de forma análoga ao caso $1 < q < 2$ para a escolha de r_k. Como podemos escolher ρ_k ainda maior, para termos $\rho_k > r_k$, segue o resultado. $\square$

Proposição 4.3.3 *Suponha que* ϑ *satisfaz* $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$, $1 < q < 2$ *e* $\lambda > 0$. *Então, existem* $0 < r_k < \rho_k$ *tais que*

(i) $\inf_{u\in Z_k,\|u\|=\rho_k} J(u) \geq 0$;

(ii) $\max_{u\in Y_k,\|u\|=r_k} J(u) < 0$;

(iii) $\inf_{u\in Z_k,\|u\|\leq\rho_k} J(u) \to 0$ *as* $k \to \infty$.

Demonstração. (i) Vamos considerar $p \geq 4$. Desde que $1 < q < 2$, pela Proposição 1.2.2(iv), (4.19) e (4.29),

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q - \frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\int_\Omega |u|^{p/2} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}\theta_{q,k}^q\|u\|^q - \frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\theta_{p/2,k}^{p/2}\|u\|^{p/2}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

para todo $u \in Z_k$. Se $p \geq 4$, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\theta_{p/2,k}^{p/2}\|u\|^{p/2} \leqslant \frac{1}{4}\|u\|^2, \tag{4.34}$$

para todo $u \in Z_k$ com $\|u\| \leq \delta$ (e k suficientemente grande se $p = 4$). Assim, escolhendo

$$\rho_k = (4\lambda\theta_{q,k}^q/q)^{1/(2-q)},$$

temos $(1/4)\rho_k^2 = (\lambda/q)\theta_{q,k}^q\rho_k^q$. Consequentemente, $\rho_k \to 0$ quando $k \to \infty$ e, portanto, existe $k_0 > 0$ satisfazendo $\rho_k \leq \delta$ para todo $k \geq k_0$. Finalmente, por (4.34)

$$J(u) \geq \frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}\theta_{q,k}^q\|u\|^q = 0 \tag{4.35}$$

para todo $u \in Z_k$, $k \geqslant k_0$, com $\|u\| = \rho_k$. Por outro lado, se $2 < p < 4$, concluímos de (4.33) que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \left[\frac{\lambda}{q} + \frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\right]\eta_k^\gamma\|u\|^\gamma, \tag{4.36}$$

para todo $u \in Z_k$ com $\|u\| < 1$, $1 < \gamma := \min\{q, p/2\} < 2$, $\eta_k := \max\{\theta_{q,k}, \theta_{p/2,k}\}$ e $k \geq k_0$. Assim, escolhendo

$$\rho_k = \left\{2[\lambda/q + |\mu|(8/\alpha^2)^{p/4}/p]\eta_k^\gamma\right\}^{1/(2-\gamma)},$$

com $k \geq k_0$, segue o resultado.

(ii) Pela Proposição 1.2.2(iii), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(s)| \geq \varepsilon |s|,$$

para todo $|s| \leq 1$. Assim,

$$J(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{q} \varepsilon^q \int_{[|u| \leq 1]} |u|^q + \frac{|\mu|}{p} \int_\Omega |f(u)|^p .$$

Pelo Lema 4.1.1 e Proposição 1.2.2(iv),

$$J(ru) \leq \frac{1}{2} r^2 - \frac{\lambda}{q} \varepsilon^q \int_\Omega |ru|^q + \frac{|\mu|}{p} \int_\Omega |ru|^p ,$$

para todo $u \in S_k$ e $0 < r < \tau_k$. Desde que Y_k tem dimensão finita, existe $\zeta_k(q) > 0$ tal que

$$J(ru) \leq \frac{1}{2} r^2 - \frac{\lambda}{q} \varepsilon^q \zeta_k(q) r^q + \frac{|\mu|}{p} \int_\Omega |ru|^2 ,$$

para todo $u \in S_k$ e $0 < r < \tau_k$, onde na última parcela usamos o fato de que $p > 2$. Pelas Imersões de Sobolev,

$$J(ru) \leq \frac{1}{2} r^2 - \frac{\lambda}{q} \varepsilon^q \zeta_k(q) r^q + \frac{|\mu|}{p} C_1 r^2.$$

Consequentemente,

$$J(ru) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{|\mu|}{p} C_1 \right) r^2 - \frac{\lambda}{q} \varepsilon^q \zeta_k(q) r^q,$$

para todo $0 < r < \min\{1, \rho_k, \tau_k\}$. Sendo $1 < q < 2$, escolhendo

$$0 < r_k < \min\{1, \tau_k, \rho_k, [\lambda \varepsilon^q \zeta_k(q)/q(1/2 + |\mu| C_1/p)]^{1/(2-q)}\},$$

o item (ii) está provado.

(iii) Por (4.35) e (4.36), concluímos que

$$o_k(1) \leq b_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| \leq \rho_k} J_{\lambda,\mu}(u) \leq J_{\lambda,\mu}(0) = 0,$$

onde, $o_k(1) \to 0$ as $k \to \infty$. Consequentemente, $b_k \to 0$ quando $k \to \infty$. $\square$

Teorema 4.3.1 *Suponha que ϑ satisfaz $(\vartheta_1)-(\vartheta_3)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ e $1 < q < 4$. Se $4 < p < 2.2^*$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ possui uma sequência de soluções $\{u_n\}$ com $J(f^{-1}(u_n)) \to \infty$. Além disso, se $\max\{q,2\} < p < 4$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\mu_k > 0$ tal que $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ possui pelo menos k pares de soluções não triviais u_k com $J(f^{-1}(u_k)) > 0$, desde que $\mu \in (\mu_k, \infty)$;

(ii) Seja $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $p \neq 4$. Se $1 < q < 2$, então $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ possui uma sequência de soluções $\{u_n\}$ com $J(f^{-1}(u_n)) < 0$ e $J(f^{-1}(u_n)) \to 0$. Além disso, se $2 \leq q < 4$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\lambda_k > 0$ tal que $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ possui pelo menos k pares de soluções não triviais u_k com $J(f^{-1}(u_k)) < 0$, desde que $\lambda \in (\lambda_k, \infty)$.

(iii) Seja $\lambda > 0$, $\mu < \lambda_1 \alpha^2/4$ e $p = 4$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\lambda_k > 0$ ttal que $(P_{\lambda,\mu,q,p})$ possui pelo menos k pares de soluções não triviais u_k com $J(f^{-1}(u_k)) < 0$, desde que $\lambda \in (\lambda_k, \infty)$, onde α é definido em (ϑ_3).

Demonstração. (i) Desde que J é um funcional par, a primeira parte do Teorema é uma consequência direta do Teorema da Fonte em [47] e das Proposições 4.3.1(ii) e 4.3.2. Para provar a segunda parte, observe que se $1 < q < 2$, segue de $\mu > 0$, Proposição 1.2.2(iv), (4.19) e das Imersões de Sobolev, que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|\lambda|}{q} C_1 \|u\|^q - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} \theta_{p/2,m}^{p/2} \|u\|^{p/2},$$

para todo $u \in Z_m$. Por outro lado, se $2 \leq q < 4$, segue de $\mu > 0$, (4.19) e das Imersões de Sobolev, que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|\lambda|}{q}(8/\alpha^2)^{q/4} C_2 \|u\|^{q/2} - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} \theta_{p/2,m}^{p/2} \|u\|^{p/2},$$

para todo $u \in Z_m$. Consequentemente,

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{|\lambda|}{q} C_3 \|u\|^{\alpha(q)} - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} \theta_{p/2,m}^{p/2} \|u\|^{p/2},$$

onde $\alpha : (1,4) \to [1,2)$ é dada por $\alpha(s) = s$ se $1 < s < 2$ e $\alpha(s) = s/2$ se $2 \leq s < 4$. Daí, existe R_* suficientemente grande, tal que

$$\frac{1}{4}\|u\|^2 \geq \frac{|\lambda|}{q} C_3 \|u\|^{\alpha(q)},$$

para todo $u \in Z_m$ com $\|u\| \geq R_*$. Como $p < 4$,

$$J(u) \geq \left[\frac{1}{4} - \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} \theta_{p/2,m}^{p/2}\right] \|u\|^{p/2},$$

para todo $u \in Z_m$ com $\|u\| \geq \max\{R_*, 1\}$. Observe que existe $m_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{4} > \frac{\mu}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} \theta_{p/2,m}^{p/2},$$

para todo $m \geq m_0$. Escolhendo $r_m = \max\{R_*, m\}$,

$$\inf_{u \in Z_m, \|u\| = r_m} J(u) \to \infty \text{ as } m \to \infty. \tag{4.37}$$

Finalmente, dos itens (iv) e (v) da Proposição 1.2.2 e (4.19), existe $C > 0$ tal que

$$J(\rho u) \leq \frac{\rho^2}{2} + \frac{|\lambda|}{q} C \rho^{\alpha(q)} \int_\Omega |u|^{\alpha(q)} - \frac{\mu}{p} f(1)^p \rho^{p/2} \int_{[|\rho u| > 1]} |u|^{p/2},$$

para todo $u \in S_m$. Segue do Lema 4.1.2(ii) e das Imersões de Sobolev que existe $\alpha_m, \beta_m(p/2) > 0$ tais que

$$J(\rho_m u) \leq \frac{\rho_m^2}{2} + \frac{|\lambda|}{q} C_1 \rho_m^{\alpha(q)} - \frac{\mu}{p} f(1)^p \beta_m(p/2) \rho_m^{p/2},$$

para algum $\rho_m > \max\{\alpha_m, r_m\}$ e para todo $u \in S_m$. Portanto, existe $\mu_m > 0$ tal que

$$\max_{u \in Y_m, \|u\| = \rho_m} J(u) \leq 0, \tag{4.38}$$

para todo $\mu > \mu_m$. Para finalizar a prova, definimos

$$B_m = \{u \in Y_m : \|u\| \leq \rho_m\},$$

$$\Gamma_m = \{\gamma \in C(B_m, H_0^1(\Omega)) : \gamma \text{ is odd and } \gamma_{|\partial B_m} = id\}$$

e

$$c_m = \inf_{\gamma \in \Gamma_m} \max_{u \in B_m} J(\gamma(u)).$$

Pela definição de c_m e Lema 3.4 em [47], temos

$$\infty > c_m \geq \inf_{u \in Z_m, \|u\| = r_m} J(u), \tag{4.39}$$

para todo m. Por outro lado, por (4.37), concluímos que

$$\inf_{u \in Z_m, \|u\| = r_m} J(u) > 0,$$

para todo $m \geq m_0$. É também uma consequência de (4.37) e (4.39) que dado $k \in \mathbb{N}$, existe $m(k) > m_0$ com $k \leq m(k) - m_0$, tal que temos pelo menos k números diferentes c_j qundo $m_0 \leq j \leq m(k)$. Assim, de (4.38) e do Teorema 3.5 em [47], existe $\mu_k := \mu_{m(k)} > 0$ e uma sequência $(PS)_{c_j}$ para J, para cada $m_0 \leq j \leq m(k)$, sempre que $\mu > \mu_k$. Finalmente, pela Proposição 4.3.1(ii), segue que os números c_j são pontos críticos de J quando $\mu > \mu_k$.

(ii) Desde que J é um funcional par, a proa da primeira parte do Teorema 3.4.1(ii) segue do Teorema da Fonte Dual em [47] e das Proposições 4.3.1(ii) e 4.3.3. Para provar a segunda parte, note que sendo $2 \leq q < 4$ e $\lambda > 0$, segue de (4.19) e das Imersões de Sobolev, que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q}(8/\alpha^2)^{q/4}\theta_{q/2,m}^{q/2}\|u\|^{q/2} - \frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4}\theta_{p/2,m}^{p/2}\|u\|^{p/2},$$

para todo $u \in Z_m$. Assim, para m suficientemente grande, temos $0 < \eta_m := \max\{\theta_{q/2,m}, \theta_{p/2,m}\} < 1$ e

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \left(\frac{\lambda}{q} + \frac{|\mu|}{p}\right)(8/\alpha^2)^{q/4}\eta_m^{q/2}\|u\|^{q/2}, \tag{4.40}$$

para todo $u \in Z_m$ com $\|u\| < 1$. Escolhendo

$$\rho_m = \left[2\left(\lambda/q + |\mu|/p\right)(8/\alpha^2)^{q/4}\eta_m^{q/2}\right]^{2/(4-q)}$$

, segue que para $m \geq m_*$, com m_* suficientemente grande

$$\inf_{u \in Z_m, \|u\| = \rho_m} J(u) \geq 0. \tag{4.41}$$

Por outro lado, da Proposição 1.2.2(iii) e (4.19)

$$J(ru) \leq \frac{r^2}{2} - \frac{\lambda}{q}\varepsilon^q \int_{[|ru| \leq 1]} |ru|^q + \frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} r^{p/2} \int_\Omega |u|^{p/2},$$

para todo $u \in S_m$. Segue do Lema 4.1.2(i) que existe $\tau_m > 0$ tal que

$$J(r_m u) \leq \frac{r_m^2}{2} - \frac{\lambda}{q}\varepsilon^q r_m^q \int_\Omega |u|^q + \frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} r_m^{p/2} \int_\Omega |u|^{p/2},$$

para algum $0 < r_m < \min\{\tau_m, \rho_m\}$ fixado e para todo $u \in S_m$. Apesar de q poder ser maior que 2^* quando a dimensão N for suficientemente grande, é uma consequência da definição de Y_m que $Y_m \subset L^\infty(\Omega)$ e, portanto, $|.|_q$ define uma norma em Y_m. Como Y_m tem dimensão finita,

$$J(r_m u) \leq \frac{r_m^2}{2} - \frac{\lambda}{q}\varepsilon^q r_m^q \zeta_m(q) + \frac{|\mu|}{p}(8/\alpha^2)^{p/4} C_1 r_m^{p/2},$$

para algum $\zeta_m(q) > 0$. Portanto, existe $\lambda_m > 0$ tal que

$$b_m := \max_{u \in Y_m, \|u\| = r_m} J(u) < 0, \tag{4.42}$$

para todo $\lambda > \lambda_m$.

Finalmente, de (4.40), concluímos que

$$o_m(1) \leq \inf_{u \in Z_m, \|u\| \leq \rho_m} J(u) \leq J(0) = 0,$$

onde, $o_m(1) \to 0$ quando $m \to \infty$. Mostrando que

$$d_m := \inf_{u \in Z_m, \|u\| \leq \rho_m} J(u) \to 0 \text{ as } m \to \infty. \tag{4.43}$$

Para finalizar a prova, para cada $t \geq m \geq m_*$, vamos aplicar o Teorema 3.5 em [47] para o funcional J em Y_t, definimos:

$$Z_m^t = \oplus_{j=m}^t X_j,$$

$$B_m^t = \{u \in Z_m^t : \|u\| \leq \rho_m\},$$

$$\Gamma_m^t = \{\gamma \in C(B_m^t, Y_m) : \gamma \text{ é ímpar e } \gamma_{|_{\partial B_m^t}} = id\}$$

e

$$c_m^t = \sup_{\gamma \in \Gamma_m^t} \min_{u \in B_m^t} J(\gamma(u)).$$

Pela definição de c_m^t e do Lema 3.4 em [47],

$$d_m < c_m^t \leq b_m, \tag{4.44}$$

para todo $t \geq m \geq m_*$. Portanto, a menos de subsequência, existe

$$c_m \in [d_m, b_m] \tag{4.45}$$

tal que

$$c_m^t \to c_m \text{ quando } t \to \infty. \tag{4.46}$$

De (4.42), (4.43) e (4.45), dado $k \in \mathbb{N}$, existe $m(k)$ com $k < m(k) - m_*$ e $\lambda_k := \lambda_{m(k)} > 0$ de tal forma que tenhamos pelo menos k números diferentes c_m quando $m_* \leq m \leq m(k)$, sempre que $\lambda > \lambda_k$. Assim, do Teorema 3.5 em [47], para cada $m_* \leq m \leq m(k)$, existe $u_t \in Y_t$ tal que

$$c_m^t - 2/t \leq J(u_t) \leq c_m^t + 2/t \text{ and } \|(J|_{Y_t})'(u_t)\| \leq 8/t, \tag{4.47}$$

sempre que $\lambda > \lambda_k$. Consequentemente, de (4.46) e (4.47), a menos de subsequência, $\{u_t\}$ é uma sequência $(PS)^*_{c_m}$. Pela Proposição 4.3.1(ii), c_m é um ponto crítico de J para todo $m_* \leq m \leq m(k)$. Segue o resultado.

(iii) É suficiente argumentar exatamente com na prova da segunda parte do item (ii) e usar a Proposição 4.3.1(i) em vez da Proposição 4.3.1(ii). $\square$

..

..

Conclusão

Este trabalho nos permitiu provar resultados de existência de soluções para uma classe de equações generalizadas de Schrödinger dadas no problema (P). Nossa abordagem incluiu não linearidades do tipo potência e uma classe de funções mais geral que uma soma de potências dos tipos côncava e convexa.

Devido ao estudo feito, conseguimos obter resultados que neste contexto ainda não existiam na literatura, resultados para uma classe de equações de Schrödinger bem geral e que englobam um panorama bem detalhado do conjunto de soluções da equação quando variam os parâmetros envolvidos. Algumas das técnicas utilizadas para obter os referidos resultados não poderiam serem aplicadas, pelo menos de uma forma direta, caso estivéssemos trabalhando no $\mathbb{R}^N$.

Tais resultados são novos e completam os obtidos em [23] inclusive, em alguns casos, quando se considera exatamente o mesmo operador de [23] que é um caso particular do estudado no presente trabalho.

Na abordagem do problema (P) com a não linearidade do tipo côncava-convexa, fornecemos um esboço razoável sobre a existência de múltiplas soluções, quando os parâmetros envolvidos assumem valores diferentes. Além disso, notamos a existência de uma "zona cinzenta", isto é, $2 \leqslant q < p \leqslant 4$, onde o conjunto de soluções, quando comparado com o problema envolvendo o operador Laplaciano com a mesma não linearidade, tem um comportamento intermediário, apresentando simultaneamente influência em ambas as potências, bem como no comprimento de λ e μ. Nesta zona, pode-se obter um número de soluções tão grande quanto se queira, contanto que λ e μ sejam suficientemente grandes.

Apêndice A

Resultados importantes

Neste apêndice, enunciaremos alguns resultados importantes utilizados ao longo de toda esta tese com as respectivas referências que contenham as demonstrações.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e seja L o operador diferencial definido por

$$L = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{A.1}$$

onde

$$a_{ij} = a_{ji} \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

L é uniformemente elíptico se existir $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N} a_{ij}(x)\epsilon_i\epsilon_j \geqslant \alpha|\epsilon|^2,\ \forall\ x \in \Omega \text{ e } \epsilon \in \mathbb{R}^N.$$

Seja L um operador uniformemente elíptico. Dado uma função $m \in L^{\infty}(\Omega)$, considere o problema de autovalor

$$\begin{cases} -Lu = \lambda m u & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{A_0}$$

Teorema 1.0.1 *Se λ não é um autovalor de (A_0), então para cada $h \in L^2(\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} -Lu = \lambda m u + h & \textit{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{A_1}$$

possui uma única solução.

Demonstração. ver [1], página 7, Teorema 0.7. $\square$

Teorema 1.0.2 *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) Se $Lu \geqslant 0$ em Ω, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

(ii) Se $Lu \leqslant 0$ em Ω, então

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Ver [25], página 31, Teorema 3.1. $\square$

Dada uma função $m \in L^\infty$, consideremos o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -Lu = \lambda m u & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{A_3}$$

onde L é o operador definido em (A.1).

Teorema 1.0.3 *Seja $m \in L^\infty(\Omega)$, $m \geqslant 0$ e $m(x) > 0$ em um conjunto de medida positiva. Então:*

(i) O problema (A_3) possui uma sequência

$$0 < \lambda_1(m) < \lambda_2(m) \leqslant ... \leqslant \lambda_k(m) \leqslant ...$$

de autovalores tais que $\lambda_k(m) \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. O primeiro autovalor corresponde a autofunções que não mudam de sinal em Ω.

(ii) (Propriedade de Comparação) Se $m \leqslant M$ em Ω, então $\lambda_k(m) \geqslant \lambda_k(M)$; se $m < M$ em um subconjunto de medida positiva, então $\lambda_k(m) > \lambda_k(M)$. Em particular, se $m < \lambda_k$(resp.$> \lambda_k$), então $\lambda_k(m) > 1$(resp.< 1).

(iii) (Caracterização Variacional):

$$\lambda_k(m) = \max\{\int_\Omega m v^2 : v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \Sigma a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} = 1, \int_\Omega v\varphi_i = 0,\ i = 1, ..., k{-}1\}.$$

(iv) $\lambda_1(m)$ *depende continuamente de* m *na topologia de* $L^{n/2}(\Omega)$.

(v) *Seja* Ω' *um domino limitado, tal que* $\Omega' \subset \Omega$. *Então,* $\lambda_k(\Omega') \leqslant \lambda_k(\Omega)$ *para todo* $k \geqslant 1$.

Demonstração. Ver [1], página 7, Teorema 0.6. □

Teorema 1.0.4 *Seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_p \to 0$. *Então existe uma subsequencia* (f_{n_k}) *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \to f(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega$

(b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x) \quad q.t.p \quad em \quad \Omega.$

Demonstração. Ver [9], página 94, Teorema 4.9 □

Teorema 1.0.5 *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *onde* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *e* $1/p + 1/q = 1$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$|fg|_1 \leqslant |f|_p \, |g|_q \, .$$

Demonstração. Ver [9], página 92, Teorema 4.6. □

Teorema 1.0.6 *Seja* $1 \leqslant p < +\infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado. Então existe uma constante* $C > 0$*(dependente de* Ω *e* p*) tal que*

$$|u|_p \leqslant C \, \|u\| \, ,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver [9], página 290, Corolário 9.19. □

Teorema 1.0.7 *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis que converge q.t.p. para uma função mensurável* f. *Se existir uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leqslant g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então* f *é integrável e*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [5], página 44, Teorema 5.6. □

Definição 1.0.1 *Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. O funcional ϕ satisfaz a condição $(PS)_c^*$(com respeito a X_n) se qualquer sequência $(u_{n_j}) \subset X$ tal que*

$$(u_{n_j}) \in X_{n_j} \ \ quando \ \ n_j \to \infty,$$

$$\phi(u_{n_j}) \to c \ \ e \ \ \phi\,|_{X_{n_j}} (u_{n_j}) \to 0$$

contém uma subsequência convergindo para um ponto crítico de ϕ.

Consideremos a seguinte condição:

($\mathcal{A}_1$) O grupo compacto G age isometricamente no espaço de Banach $X = \overline{\oplus_{j\in\mathbb{N}} X_j}$, os espaços X_j são invariantes e existe um espaço V de dimensão finita tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, $X_j \simeq V$ e a ação de G em V é admissível.

No que segue denotamos:

$$Y_k = \oplus_{j=0}^{k} X_j \ \text{ e } \ Z_k = \overline{\oplus_{j=k}^{\infty} X_j}.$$

Teorema 1.0.8 *Suponha que ($\mathcal{A}_1$). Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional invariante. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $\rho_k > r_k > 0$ tais que*

($\mathcal{A}_2$) $a_k = \max\limits_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\| = \rho_k}} \phi(u) \leqslant 0$;

($\mathcal{A}_3$) $b_k = \inf\limits_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\| = r_k}} \phi(u) \to +\infty,\ k \to +\infty$;

($\mathcal{A}_4$) *O funcional ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c > 0$.*

Então ϕ possui uma sequência não-limitada de valores críticos.

Demonstração. Ver [47], página 58, Teorema 3.6. □

Teorema 1.0.9 *Suponha que ($\mathcal{A}_1$). Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional invariante. Se, para cada $k \geqslant k_0$, existem $\rho_k > r_k > 0$ tais que*

$(\mathcal{B}_2)$ $a_k = \inf\limits_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\| = \rho_k}} \phi(u) \geqslant 0$;

$(\mathcal{B}_3)$ $b_k = \max\limits_{\substack{u \in Y_k \\ \|u\| = r_k}} \phi(u) < 0$;

$(\mathcal{B}_4)$ $d_k = \inf\limits_{\substack{u \in Z_k \\ \|u\| \leqslant \rho_k}} \phi(u) \to 0$ *quando* $k \to +\infty$;

$(\mathcal{B}_5)$ *O funcional* ϕ *satisfaz a condição* $(PS)_c^*$ *para todo* $c \in [d_{k_0}, 0)$.

Então ϕ *possui uma sequência de valores críticos negativos convergindo para zero.*

Demonstração. Ver [47], página 65, Teorema 3.18. □

Lema 1.0.1 *Se* (u_n) *é uma sequência de funções mensuráveis positivas em* X, *então*

$$\int \liminf u_n d\mu \leqslant \liminf \int u_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [5], página 33, Lema 4.8 □

Definição 1.0.2 *Sejam* E *um espaço de Banach e* A *um subconjunto de* E. A *é dito simétrico se* $u \in A$ *implica* $-u \in A$. *Para um conjunto simétrico fechado* A *que não contém a origem, definimos uma classe* $\gamma(A)$ *de* A *pelo menor inteiro* k *tal que existe uma cobertura contínua ímpar de* A *para* $R^k \backslash \{0\}$. *Se não existir tal* k, *definimos* $\gamma(A) = \infty$. *Além disso, definimos* $\gamma(\emptyset) = 0$. *Vamos denotar por* Γ_k *a família de subconjuntos simétricos fechados* A *de* E *tal que* $0 \notin A$ *e* $\gamma(A) \geqslant k$.

No próximo Teorema, usamos a seguinte hipótese:

(B) Sejam E um espaço de Banach de dimensão infinita e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo:

I é par, limitado inferiormente, $I(0) = 0$ e I satisfaz a condição Palais-Smale (PS), isto é, qualquer sequência (u_k) em E tal que $(I(u_k))$ é limitada e $I'(u_k) \to 0$ em E^* quando $k \to +\infty$, possui uma subsequência convergente.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $A_k \in \Gamma_k$ tal que $\sup_{u \in A_k} I(u) < 0$.

Teorema 1.0.10 *Sob a hipótese (B), temos:*

(a) *Existe uma sequência (u_k) tal que $I'(u_k) = 0$, $I(u_k) < 0$ e (u_k) converge para zero.*

(b) *Existem duas sequências (u_k) e (v_k) tais que $I'(u_k) = 0$, $I(u_k) = 0$, $u_k \neq 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$, $I'(v_k) = 0$, $I(v_k) < 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} I(v_k) = 0$, e (v_k) converge para um limite diferente de zero.*

Demonstração. Ver [27], página 356, Teorema 1. $\square$

Observação 1.0.1 *Em qualquer caso, (a) ou (b), temos uma sequência (u_k) de pontos críticos tal que $I(u_k) \leqslant 0$, $u_k \neq 0$ e $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.*

Teorema 1.0.11 *Se $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \nu < \gamma \leqslant 1$, então:*

(1) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;

(2) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;

(3) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω é convexo, então:

(4) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega})$;

(5) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$;

Demonstração. Ver [25].

Agora, apresentamos algumas propriedades fundamentais da Teoria do Gênero que podem ser encontradas em [37].

Lema 1.0.2 *Seja B e C conjuntos em*

$$\mathcal{E} = \{B \subset H_0^1(\Omega)\backslash\{0\} : B \text{ é fechado e } B = -B\}.$$

Então:

(i) *Se* $x \neq 0$, *então* $\gamma(\{x\} \cup \{-x\}) = 1$;

(ii) *Se existir uma aplicação ímpar* $\varphi \in C(B, C)$, *então* $\gamma(B) \leq \gamma(C)$. *Em particular, se* $B \subset C$ *então* $\gamma(B) \leq \gamma(C)$.

(iii) *Se existir um homeomorfismo ímpar* $\varphi : B \to C$, *então* $\gamma(B) = \gamma(C)$. *Em particular, se* B *é homeomorfismo da esfera unitária em* $\mathbb{R}^n$, *entao* $\gamma(B) = n$.

(iv) *Se* B *é um conjunto compacto, então existe uma vizinhança* $K \in \mathcal{E}$ *de* B *tal que* $\gamma(B) = \gamma(K)$.

(v) *Se* $\gamma(C) < \infty$, *então* $\gamma(\overline{B \backslash C}) \geq \gamma(B) - \gamma(C)$.

(vi) *Se* $\gamma(A) \geq 2$, *então* A *possui infinitos pontos.*

Demonstração. Ver [37], página 46, Proposição 7.5 $\square$

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti and G. Prodi A Primer Nonlinear Analysis. *Cambridge university press 1993*.

[2] A. Ambrosetti and P. Hess, Positive solutions of asymptotically linear elliptic eigenvalue problems,*J. Math. Anal.* Appl., 73(1980), 411-422.

[3] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.*, 122, (1994), 519-543.

[4] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM Review, 18, 620-709, 1976*.

[5] R. G. Bartle, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, *Wiley Classics Library* (1995).

[6] T. Bartsch and M. Willem, On an elliptic equation with concave and convex nonlinearitis, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123, (1995), 3555-3561.

[7] H. Berestycki and P.L. Lions, Nonlinear scalar field equations I: existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.* 82 (1983) 313–346.

[8] A. V. Borovskii, A. L. Galkin, Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter, *JETP*, 77, (1993), 562-573.

[9] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. *Springer,* 2010.

[10] H. Brezis and L. Oswald, Remarks on sublinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.,* 10, (1986), 55-64.

[11] H. S. Brandi, C. Manus, G. Mainfray, T. Lehner and G. Bonnaud, Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma, *Phys. Fluids B*, 5, (1993), 3539-3550.

[12] X. L. Chen and R. N. Sudan, Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse, *Phys. Rev. Lett.*, 70, (1993), 2082-2085.

[13] D. C. Clark, A variant of the Lusternick-Schnirelman theory, *Indiana univ. Math. J.* 22, C., (1972), 65-74.

[14] A. S. S. Correa Leão, J. Morbach, A. V. Santos and J. R. Santos júnior, On some classes of generalized Schrödinger equations, preprint and under revision 2018.

[15] M. Colin and L. Jeanjean, Solutions for a quasilinear Schrödinger equations: A dual approach, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, 56, 213-226, (2004).

[16] A. De Bouard, N. Hayashi and J. C. Saut, Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.*, 189, (1997), 73-105.

[17] Y. Deng, S. Peng and S. Yan, Positive soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations with critical growth, *J. Differential Equations*, 258, (2015), 115-147.

[18] J. M. do Ó and U. Severo, Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations in dimension two, *Calc. Var. Partial Differential Equations,* 38, (2010), 275-315.

[19] J. M. do Ó , O. Miyagaki and S. Soares, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: The critical exponential case, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, 67, (2007), 3357-3372.

[20] J. M. do Ó, O. Miyagaki and H. Olimpio, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations with critical growth, *J. Differ. Equations*, 248, (4), (2010), 722-744.

[21] X. D. Fang and A. Szulkin, Multiple solutions for a quasilinear Schrödinger equation, *J. Differential Equations,* 254, (2013), 2015-2032.

[22] D.G. Figueiredo, Positive solutions of semilinear elíptic problems, *Differential equations, Springer*, pp 34-87(1981).

[23] G. M. Figueiredo, J. R. Santos Júnior and A. Suárez, Structure of the set of positive solutions of a nonlinear Schrödinger equation, *Israel J. Math.,* 227(2018),485-505.

[24] B. Gidas and J. Spruck, A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations* 6, (1981), 883-901.

[25] D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. *Springer, Berlin,* 1977.

[26] R. W. Hasse, A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations, *Z. Phys.*, 37, (1980), 83-87.

[27] R. Kajikiya, A critical point theorem related to the symmetric mountain pass lemma and its applications to elliptic equations, *J. Funct. Anal.*, 225, (2005), 352-370.

[28] S. Kurihura, Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films, *J. Phys. Soc. Jpn*, 50, (1981) 3262-3267.

[29] E. W. Laedke, K. H. Spatschek and L. Stenflo, Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions, *J. Math. Phys.* , 24, (1983), 2764-2769.

[30] J. Q. Liu, Y. Q. Wang and Z. Q. Wang, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II, *J. Differ. Equations*, 187, (2003), 473-493.

[31] A. G. Litvak and A. M. Sergeev, One dimensional collapse of plasma waves, *JETP Lett.*, 27, (1978), 517-520.

[32] J. López-Gómez, Spctral Theory and Nonlinear Functional Analysis, *Chapman e Hall/CRC,. Research Notes in Mathematics, 426. Chapman e Hall/CRC, Boca Raton, FL,* 2001.

[33] V. G. Makhankov and V. K. Fedyanin, Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory, *Phys. Rep.*, 104, (1984), 1-86.

[34] J. Necas, Fredholm alternative for nonlinear operators and applications to partial differential equations and integral equations. *Casopis pro Pestování Matematiky,* Vol. 97 (1972), No. 1, 65-71.

[35] M. Poppenberg, K. Schmitt and Z. Q. Wang, On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations, *Calculus Var. Partial Differential Equations*, 14, (3), (2002), 329-344.

[36] G. R. W. Quispel and H. W. Capel, Equation of motion for the Heisenberg spin chain, *Physica A*, 110, (1982), 41-80.

[37] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diferential Equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 65, *American Mathematical Society, Providence, RI,* 1986.

[38] A. V. Santos and J. R. Santos Júnior, Multiple solutions for a generalized Schrodinger problem with "concave-convex" nonlinearities, To appear in ZAMP, 2019.

[39] A. V. Santos, J. R. Santos Júnior and A. Suárez, Study of a class of generalized Schrödinger equations, submitted and under revision, arXiv:1807.10529, 2018.

[40] U. B. Severo, Estudo de uma classe de equações de Schrödinger quase lineares, Tese de Doutorado, Campinas, IMECC-UNICAMP, 2007.

[41] Y. Shen and Y. Wang, Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations, *Nonlinear Anal.*, 80, (2013)194-201.

[42] Y. Shen and Y. Wang, A class of generalized quasilinear Schrödinger equations, *Communicatons on Pure and Applied Analysis*, 15, (3), (2016), 853-870.

[43] E. A. B. Silva and G. F. Vieira, Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth, *Calculus Var. Partial Differential Equations*, 39, (2010), 1-33.

[44] M. Struwe, Variational Methods, *Springer, Berlin, (1990).*

[45] A. Szulkin and T. Weth, Ground state solutions for some indefinite variational problems, *J. Funct. Anal.* 257 (2009) 3802–3822.

[46] A. Szulkin and T. Weth, The method of Nehari manifold, in: D.Y. Gao, D. Motreanu (Eds.), Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, *International Press, Boston,* 2010, pp. 597–632.

[47] M. Willem, Minimax Theorems. *Boston: Birkhuser,* 1996.

[48] J. Yang, Y. Wang and A. A. Abdelgadir, Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations, *Journal of Mathematical Physics*, 54, (2013), 071502.