UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Alberto Leandro Correia Costa

Sobre atratores *pullback* e aleatório para alguns modelos de equações diferenciais parciais não autônomas

BELÉM-PA
Junho/2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Alberto Leandro Correia Costa

Sobre atratores *pullback* e aleatório para alguns modelos de equações diferenciais parciais não autônomas

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo - Universidade Federal do Pará
Co-orientador: Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas - Universidade Federal do Pará

BELÉM-PA
Junho/2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837s Costa, Alberto Leandro Correia
Sobre atratores pullback e aleatório para alguns modelos de equações diferenciais parciais não autônomas / Alberto Leandro Correia Costa. — 2019.
96 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Coorientador(a): Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. sistemas dinâmicos não autônomos. 2. atratores pullback. 3. equações diferenciais parciais. I. Título.

CDD 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Alberto Leandro Correia Costa

Sobre atratores pullback e aleatório para alguns modelos de equações diferenciais parciais não autônomas

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 07 de junho de 2019.

Resultado: APROVADO

Mirelson Martins Freitas

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo (Orientador)
PDM - UFPA

Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas (Coorientador)
PDM - UFPA

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (Membro Externo)
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Prof. Dr. Anderson de Jesus Araújo Ramos
PDM - UFPA

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me dado oportunidade de chegar a este patamar da vida pessoal e acadêmica.

À minha família, em especial a minha mãe Nail, pelo enconrajamento e pelo apoio incondicional.

À minha companheira Katiane, pelo companheirismo e dedicação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo, pela orientação, especialmente pelo interesse, dedicação, apoio e valiosas sugestões em todas as fases de preparação deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Mirelson Martin Freitas, pela orientação, pelo incentivo e pelas valiosas sugestões na elaboração do trabalho e pelo coleguismo durante a pesquisa.

Aos amigos, pelo companheirismo nos bons e maus momentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, pelo apoio financeiro e ao Programa de Doutorado em Matemática-PDM.

A todo o corpo docente e técnicos do Programa de Doutorado em Matemática da UFPA/UFAM pelo suporte dado durante o curso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico de soluções das equações de fluido Oldroyd e de uma equação unidimensional de mistura de sólidos com damping não linear usando teoria de sistemas dinâmicos não autônomos e estocásticos em espaços de dimensão infinita. Mais precisamente, mostramos a existência de um atrator *pullback* (com universo de atração não autônomo) para uma equação não autônoma de fluido Oldroyd e apresentamos uma estimativa para a dimensão fractal do atrator. Consideramos também a equação de fluido Oldroyd estocástica onde a função força externa é perturbada por ruído aleatório branco aditivo. Mostramos a existência de um atrator $\mathcal{D}$-*pullback* aleatório para o sistema correspondente. Para a equação de mistura de sólidos, mostramos a existência de atrator $\mathcal{D}$-*pullback* e apresentamos também um resultado de semicontinuidade do atrator *pullback* quando consideramos as forças externas como perturbações não autônomas.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos não autônomos, atratores *pullback*, equações diferenciais parciais.

Abstract

In this work we study the asymptotic behavior of solutions of Oldroyd fluid equations and a one-dimensional solids mixture equation with nonlinear damping using non-autonomous and stochastic dynamic systems theory in infinite dimensional spaces. More precisely, we show the existence of a *pullback* attractor (with non-autonomous attraction universe) for a non-autonomous Oldroyd fluid equation and we present an estimate for the fractal dimension of the attractor. We also consider the Oldroyd stochastic fluid equation where the external force function is perturbed by additive white random noise. We show the existence of an $\mathcal{D}$-random *pullback* attractor to the corresponding system. For the solids mixture equation, we show the existence of $\mathcal{D}$-*pullback* attractor and we also present a semicontinuous result of the *pullback* attractor when we consider the external forces as non-autonomous perturbations.

Key-words: non-autonomous dynamical systems, *pullback* attractors, partial Differential Equations.

Conteúdo

Introdução

Nos mais variados ramos das ciências aplicadas, muitos fenômenos que evoluem com o tempo são modelados na forma de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) de evolução cuja questão central é, na grande maioria dos casos, obter informações qualitativas sobre o problema, por exemplo, existência de soluções, unicidade, dependência contínua e comportamento assintótico de tais soluções. Nos últimos cinquenta anos, as técnicas de sistemas dinâmicos em espaços de dimensão infinita vêm sendo amplamente utilizadas para entender o comportamento assintóticos de soluções de EDP's. Nessa abordagem, a noção fundamental gira em torno do conceito de atrator. A abordagem envolvendo semigrupos e os conceitos de atratores tais como conhecemos e que hoje são vastamente utilizados, surgiram nos trabalhos pioneiros de Oliva no início de 1970 (veja [45]), onde introduziu-se o conceito de *atrator global compacto* e de Ladyzenskaya [54, 55] onde se mostrou a existência de atrator global para o semigrupo gerado pela equação de Navier-Stokes em duas dimensões, e que marcaram o começo de uma vasta área de pesquisa no estudo do comportamento de longo prazo de soluções de EDP's.

A teoria de semigrupo e atratores globais (veja [68, 74, 56, 28] e suas referências) lida com problemas ditos autônomos (as EDP's em questão são autônomas), isto é, podem ser escritas como

$$u' = F(u), \quad u(0) = u_0$$

em um espaço de fase adequado de dimensão infinita. A noção de dissipatividade (isto é, as trajetórias das soluções com condição inicial u_0 em um conjunto limitado D se tornam uniformemente limitadas a partir de um certo tempo t_D), desempenha um papel fundamental na teoria. No entanto, a grande maioria dos fenômenos são mais fidedignamente modelados por EDP's não autônomas

$$u' = F(u,t), \quad u(\tau) = u_\tau.$$

Na grande maioria, as EDP's não autônomas (mesmo algumas autônomas) não possuem essa propriedade de dissipatividade. Fez-se necessário então, desenvolver uma teoria de atratores que ajudasse a entender o comportamento das soluções para essa classe mais vasta de EDP's.

Nas últimas duas décadas e meia, a teoria de atratores para sistemas dinâmicos não autônomos vem sendo vastamente desenvolvida. A primeira tentativa de se estender a noção de atrator global para o caso não autônomo é a noção de *atrator uniforme* [23]. Os atratores uniformes apresentam uma estrutura rica, isto é, possuem uma família de conjuntos dependentes do tempo, compactos e de dimensão finita chamados de "kernel sections"(veja [23], VIII. 4.4). Uma das desvantagens em se trabalhar com o conceito de atrator uniforme, é que apesar de ainda se manter algumas características boas da teoria de atrator global, perde-se a invariância do atrator. Outra noção de atrator é o conceito de *atrator pullback*, que mostrou-se uma excelente ferramenta para tais propósitos. O atrator *pullback* é definido como sendo uma família de conjuntos dependentes do tempo cuja noção de invariância é definida de maneira natural como uma extensão da noção de invariância exigida para o atrator global. Conceitos centrais na teoria de atratores globais como o de *continuidade* de tais atratores sob perturbações determinísticas atuando sobre o modelo, que auxilia no estudo da estabilidade desses atratores com relação essas perturbações, e o de *dimensionlidade finita* que auxilia na compreensão da estrutura do atrator em termos de um número finito de parâmetros, são satisfatoriamente estendidos para o caso *pullback*. Uma apresentação completa da teoria de atratores *pullback* para sistemas dinâmicos não autônomos pode ser encontrada em [50, 22].

Ocorre ainda que tais problemas apresentados acima podem sofrer perturbações aleatórias, sendo as EDP's não autônomas associadas, equações apresentando termos aleatórios, para as quais a teoria de atratores para sistema dinâmicos determinísitcos não se aplica. Em paralelo à teoria de sistemas dinâmicos determinísticos, a partir dos primeiros trabalhos de Brzeźniak [14], de Crauel e Flandoli [31], a teoria de sistemas dinâmicos aleatórios e seus atratores, também vem sendo amplamente difundida nas duas últimas décadas com o objetivo de se entender o comportamento dessas equações estocásticas, a noção de conjunto aleatório desempenha um papel central nessa abordagem (veja [30, 29, 17, 13, 7, 16, 8, 75, 15]). Em seu trabalho recente [76], Wang estabeleceu o conceito de *sistema dinâmico aleatório não autônomo* (SDAN) como generalização das noções de sistema dinâmico determinístico não autônomo (SDN) e sistema dinâmico aleatório (SDA), onde a noção de atração *pullback* desempenha papel fundamental. O conceito de atrator *pullback* aleatório se mostra como um generalização natural para estes casos estocástico não autônomos. Mais recentemente Cui et al. [32] estudam atratores cociclo aleatórios para os quais os universos de atração são autônomos. Em [33], Cui et al. generalizam o conceito de propriedade squeezing para sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos.

A noção de universo de atração é uma questão importante na teoria não autônoma, enquanto na teoria de atratores globais considerou-se primordialmente a noção de atração de conjuntos limitados, a idéia de atração $\mathcal{D}$-*pullback* lida com atração de conjuntos que evoluem com o tempo (em geral com uma certa condição de crescimento), o que influencia de maneira significativa a estrutura dos atratores.

Neste presente texto, estudamos o comportamento assintótico de soluções de algumas equações determinísticas e estocásticas via sistemas dinâmicos não autônomos (SDN) e sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos (SDAN), respectivamente.

O presente texto está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos básicos e resultados envolvendo a teoria de atratores para sistemas dinâmicos não autônomos (processos de evolução) e sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos (cociclos aleatórios), e seus atratores com universos de atração não autônomos, que serão úteis para descrever os resultados obtidos ao longo deste trabalho.

No Capítulo 2, estudamos o comportamento assintótico de soluções de uma equação de fluido do tipo Oldroyd no espaço de fase H definido mais adiante. Mais precisamente, investigamos a existência de um $\mathcal{D}$-atrator *pullback* para um sistema bidimensional associado ao problema em questão. Primeiramente consideramos um problema equivalente no espaço de fase $H \times V$ cujas soluções geram um processo de evolução, e mostramos a existência de $\mathcal{D}$-atrator *pullback* para esse processo usando o conceito de compacidade assintótica. Estabelecemos uma estimativa para a dimensão fractal do $\mathcal{D}$-atrator *pullback*.

No Capítulo 3, estudamos a equação bidimensional não autônoma de fluido Oldroyd perturbada por um ruído aditivo branco. Provamos a existência de $\mathcal{D}$-atrator *pullback* aleatório para o SDAN gerado pelo sistema dinâmico aleatório não autônomo associado.

No Capítulo 4, estudamos uma equação unidimensional de mistura de sólidos com forças externas não autônomas e damping não linear. Provamos a existência de um $\mathcal{D}$-atrator *pullback* minimal para o qual o universo de atração é formado por conjuntos temperados. Provamos também a semicontinuidade superior da família de atratores quando as perturbações não autônomas tendem a zero. É importante ressaltar que os resultados obtidos nesse capítulo deram origem a um artigo intitulado "*Pullback* dynamics of a non-autonomous mixture problem in one dimensional solids with nonlinear damping" feito em colaboração por Mirelson M. Freitas, Alberto L. C. Costa e Geraldo M. Araújo, o qual foi aceito para publicação na revista "Communications on Pure and Applied Analysis" (veja [38]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos básicos e resultados que serão utilizados ao longo dos capítulos seguintes.

1.1 Atratores para sistemas dinâmicos não autônomos

Nesta seção apresentamos algums conceitos básicos sobre sistemas dinâmicos não autônomos e seus atratores, para uma leitura detalhada recomendamos [21–23, 40, 50, 61].

Seja X um espaço métrico munido com uma métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$.

Definição 1.1. *Um **processo de evolução** (ou simplesmente um **processo**) em X é uma família de aplicações $\{S(t,\tau) : X \to X : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo*

(a) $S(t,t) = I$, *(aplicação identidade),*

(b) $S(t,\tau) = S(t,s)S(s,\tau)$, *para todo* $t \geqslant s \geqslant \tau$.

Um processo $S(\cdot,\cdot)$ é dito **fechado** se para toda sequência $x_n \to x$ em X e $S(t,\tau)x_n \to y$ em X, então $S(t,\tau)x = y$. Além disso, $S(\cdot,\cdot)$ é dito **contínuo** se o operador $S(t,\tau) : X \to X$ é contínuo para cada $t \geqslant \tau$ fixado.

Observação 1.1. É claro que todo processo contínuo é fechado.

Um processo de evolução $\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ em X para o qual $S(t,\tau) = S(t-\tau,0)$ para todo $t \geqslant \tau$ é chamado **autônomo**. Se escrevemos $T(t) := S(t,0)$ para $t \geqslant 0$ então a família $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ define um semigrupo em X. Reciprocamente, se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo em X e definimos $S(t,\tau) = T(t-\tau)$ para todo $t \geqslant \tau$, então $\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ é um processo de evolução em X.

Definição 1.2. *Uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \to X$ é chamada uma* ***solução global*** *para o processo $\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ se $S(t,\tau)\phi(\tau) = \phi(t)$ para todo $t \geqslant \tau$.*

Chamamos de conjunto não autônomo a uma família parametrizada de subconjuntos não-vazios $\widehat{D} = \{D(t); t \in \mathbb{R}\} \subset 2^X$, onde 2^X denota a família de todos os subconjuntos de X. Considere a semi-distância de Hausdorff: para $A, B \subset X$, $\operatorname{dist}(A,B) = \sup_{a\in A} \operatorname{dist}_X(a,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b)$. A seguir introduzimos a noção de atração no sentido *pullback* e invariância de famílias.

Definição 1.3. *Sejam $\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ um processo de evolução e $\widehat{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\widehat{A}$* ***atrai pullback*** *um conjunto não autônomo $\widehat{D} = \{D(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ sob $\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ se*

$$\lim_{\tau\to-\infty} \operatorname{dist}(S(t,\tau)D(\tau), A(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.4. *Um universo em X é uma classe $\mathcal{D}$ de elementos $\widehat{D} = \{D(t) : t \in \mathbb{R}\}$ tal que cada seção $D(t)$ é não um subconjunto não-vazio de X para todo $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que o universo $\mathcal{D}$ é inclusão fechada se dado $\widehat{D} \in \mathcal{D}$ e $\widehat{C}$ tais que $C(t) \subset D(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\widehat{C} \in \mathcal{D}$.*

Nesse sentido, dizemos que $\mathcal{D}$ é um universo de atração para $S(\cdot,\cdot)$.

Definição 1.5. *Uma família $\widehat{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de X é dita* ***invariante*** *sob $\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ se*

$$S(t,\tau)A(\tau) = A(t), \quad \forall t \geqslant \tau \in \mathbb{R}.$$

Agora introduzimos o conceito de $\mathcal{D}$-atrator *pullback* para um processo de evolução.

Definição 1.6. *Uma família $\widehat{A} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de X é chamada um* ***$\mathcal{D}$-atrator pullback*** *para o processo $\{S(t,\tau) : t \geqslant \tau \in \mathbb{R}\}$ se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $A(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $\widehat{A}$ atrai pullback cada $\widehat{D} \in \mathcal{D}$;

(iii) $\widehat{A}$ é invariante.

Observe que a definição acima não garante unicidade do atrator $\mathcal{D}$-*pullback* (veja [19] para esta discussão). Para garantir a unicidade do atrator, precisamos de condições adicionais, como a de que o atrator pertença ao domínio de atração $\mathcal{D}$, ou uma condição de minimalidade: um $\mathcal{D}$-atrator *pullback* $\widehat{A}$ é dito ser minimal se dada uma família $\widehat{B} = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos fechados de X satisfazendo (ii), então $A(t) \subset B(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Notemos que se $S(t,\tau) = T(t-\tau)$ é o processo de evolução associado a um semigrupo $T(t)$, então o conceito de atrator *pullback* coincide com o clássico de atrator global (para mais detalhes sobre essa discussão indicamos o livro de Carvalho, Langa e Robinson [22]).

Definição 1.7. *Dizemos que $\widehat{B}_0$ é uma família pullback $\mathcal{D}$-absorvente para o processo $S(\cdot,\cdot)$ se para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $\widehat{D} \in \mathcal{D}$, existe um tempo $\tau_0(t,\widehat{D}) \leqslant t$ tal que*

$$S(t,\tau)D(\tau) \subset B(t) \quad \textit{para todo} \quad \tau \leqslant \tau_0(t,\widehat{D}).$$

Observe que a família $\widehat{B}_0$ não necessariamente pertence à classe $\mathcal{D}$.

Definição 1.8. *O processo $S(\cdot,\cdot)$ é dito ser pullback $\widehat{D}$-assintoticamente compacto se para todo $t \in \mathbb{R}$, toda sequência $\tau_n \to -\infty$, e toda sequência $x_n \in D(\tau_n)$, o conjunto $\{S(t,\tau_n)x_n\}$ é precompacto em X. Se $S(\cdot,\cdot)$ é $\widehat{D}$-assintoticamente compacto para todo $\widehat{D} \in \mathcal{D}$, dizemos que $S(\cdot,\cdot)$ é pullback $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto.*

Agora, relembremos um critério, que é muito útil para verificar a $\mathcal{D}$-compacidade assintótica de processos de evolução gerados por equações não autônomas do tipo hiperbólica (veja [26, 27] para sistemas autônomos e [72, 78, 58, 60] para sistemas não autônomos) que será usado no Capítulo 4.

Definição 1.9. *Seja X um espaço métrico e B um subcontjunto limitado de X. Uma função $\Psi : X \times X \to \mathbb{R}$ é dita ser contrativa em B se para toda sequência $\{x_n\} \subset B$ existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\Psi(x_{n_k},x_{n_l}) = 0.$$

A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrada em [58, Theorem 3.2] e [60, Teorema 3.2].

Teorema 1.2. *Seja $S(\cdot,\cdot)$ um processo de evolução em um espaço de Banach X. Suponha que $S(\cdot,\cdot)$ possui uma família pullback $\mathcal{D}$-absorvente $\widehat{B}_0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ existe $\tau_\epsilon \leqslant t$ e uma função contrativa $\Psi_\epsilon : B_0(\tau_\epsilon) \times B_0(\tau_\epsilon) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\|S(t,\tau_\epsilon)z_1 - S(t,\tau_\epsilon)z_2\| \leqslant \epsilon + \Psi_\epsilon(z_1,z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in B_0(\tau_\epsilon).$$

Então o processo $S(\cdot,\cdot)$ é pullback $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto.

O seguinte resultado garante a existência de um atrator *pullback* minimal (veja [41, Theorem 3.11]).

Teorema 1.3. *Seja $S(\cdot,\cdot)$ um processo de evolução fechado em um espaço métrico X. Considere um universo $\mathcal{D}$ em X e suponha que $S(\cdot,\cdot)$ possui uma família pullback $\mathcal{D}$-absorvente $\widehat{B}_0$ e que $S(\cdot,\cdot)$ é pullback $\widehat{B}_0$-assintoticamente compacto. Então, a família $\widehat{A}_{\mathcal{D}} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ definida por*

$$A(t) = \overline{\bigcup_{\widehat{D}\in\mathcal{D}} \Lambda(\widehat{D}, t)},$$

onde denota-se o omega-limite pullback

$$\Lambda(\widehat{D}, t) = \bigcap_{s\leqslant t} \overline{\bigcup_{\tau\leqslant s} S(t,\tau)D(\tau)},$$

é o $\mathcal{D}$-atrator pullback minimal para o processo $S(\cdot,\cdot)$. Se $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$, então

$$A(t) = \Lambda(\widehat{B}_0, t) \subset \overline{B_0(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $B_0(t)$ é fechado para todo $t \in \mathbb{R}$ e o universo $\mathcal{D}$ é inclusão fechada, então o atrator pullback $\widehat{A}_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$.

1.2 Semicontinuidade superior

Um dos conceitos relacionados à estabilidade dos atratores sob perturbações, é o conceito de semicontinuidade superior (veja [44, 20, 19]).

Definição 1.10. *Seja $\{A_\epsilon : \epsilon \in [0,1]\}$ uma família de subconjuntos X dizemos que $\{A_\epsilon : \epsilon \in [0,1]\}$ é **semicontínua superiormente** em $\epsilon = 0$ se*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \operatorname{dist}(A_\epsilon, A_0) = 0.$$

A Definição 1.10 pode ser estendida naturalmente a conjuntos não autônomos, ou seja, a família $\{A_\epsilon(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\epsilon \in [0,1]$ de conjuntos não autônomos de X é semicontínua superiormente em $\epsilon = 0$ se for semicontínua superiormente para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo.

Usaremos o seguinte resultado sobre a semicontinuidade superior de atratores *pullback* (Veja [22, Proposição 1.20]).

Teorema 1.4. *Suponha que para $\eta \in [0,1)$, $S_\eta(\cdot,\cdot)$ é uma família de processos tais que*

(i) $S_\eta(\cdot,\cdot)$ possui um atrator pullback A_η para cada $\eta \in [0,1)$,

(ii) Para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $T \geqslant 0$ e todo conjunto limitados $D \subset X$

$$\sup_{s\in[0,T],u_0\in D} d(S_\eta(t+s,t)u_0, S_0(t+s,t)u_0) \xrightarrow{\eta\to 0} 0$$

e

(iii) Existe um $\delta > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bigcup_{\eta\in(0,\delta)} \bigcup_{t\leqslant t_0} A_\eta(t) \tag{1.1}$$

é limitado em X.

Então a família de atratores pullback é semicontínua superiormente quando $\eta \to 0$, i.e., para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\eta\to 0} \operatorname{dist}(A_\eta(t), A(t)) = 0.$$

1.3 Dimensão fractal

Introduzimos agora o conceito de dimensão fractal para o atrator. Para isso, seguiremos os passos em [57, 22].

Considere H um espaço de Hilbert separável. Dados um compacto $K \subset X$ e $\varepsilon > 0$, denote $N_\varepsilon(K)$ o menor número de bolas abertas em X de raio ε, que são necessárias para cobrir K.

Definição 1.11 ([57]). *Seja $K \subset H$ um conjunto compacto. Definimos a dimensão fractal d_F de K por*

$$d_F(K) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N_\varepsilon(K)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

Seja V um espaço de Hilbert separável, densamente e continuamente imerso em H.

Seja $F : V \times \mathbb{R} \to V'$ um família de operadores não lineares tais que, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e todo $u_0 \in H$, existe uma única função $u(t,\tau,u_0)$ satisfazendo

$$\begin{cases} u \in L^2(\tau,T,V) \cap C([\tau,T];H) \quad F(u(t),t) \in L^1(\tau,T,V'), \quad \forall T > \tau \\ \dfrac{du}{dt} = F(u(t),t), \quad t > \tau, \\ u(\tau) = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Definimos $S(t,\tau)u_0 = u(t,\tau,u_0)$ para $t > \tau$, $u_0 \in H$.

Seja T^* fixado. Assumiremos que existe uma família de subconjuntos compactos de H, $\{K(t) : t \leqslant T^*\}$ satisfazendo a propriedade de invariância

$$S(t,\tau)K(\tau) \subset K(t), \quad \forall \tau \leqslant t \leqslant T^*, \tag{1.3}$$

e tal que, para todo $\tau \leqslant t \leqslant T^*$ e toda $u_0 \in K(\tau)$, existe um operador linear contínuo $L(t,\tau,u_0) \in \mathcal{L}(H)$ tal que

$$|S(t,\tau)\overline{u}_0 - S(t,\tau)u_0 - L(t,\tau,u_0)(\overline{u}_0 - u_0)| \leqslant g(t-\tau, |\overline{u}_0 - u_0|)|\overline{u}_0 - u_0|, \qquad (1.4)$$

para toda $\overline{u}_0 \in K(\tau)$, onde $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é uma função tal que $g(s,\cdot)$ é uma função não decrescente para todo $s \geqslant 0$ e

$$\lim_{r\to 0} g(s,r) = 0, \quad \forall s \geqslant 0. \qquad (1.5)$$

Assumiremos que, para todo $T \leqslant T^*$, a aplicação $F(\cdot,t)$ é diferenciável em V no sentido de Gateaux, isto é, para cada $u \in V$, existe um operador linear contínuo $F'(u,t) \in \mathcal{L}(V,V')$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}(F(u+\varepsilon v,t) - F(u,t) - \varepsilon F'(u,t)v) = 0 \quad \text{em} \quad V'.$$

Além disso, suporemos que a aplicação $F : (u,t) \in V \times (-\infty, T^*) \mapsto F'(u,t) \in \mathcal{L}(V;V')$ é contínuo (assim, em particular, para cada $t \leqslant T^*$, a aplicação $F(\cdot,t)$ é continuamente diferenciável em V no sentido de Frechet).

Então, para todo $\tau \leqslant T^*$, todo $u_0, v_0 \in H$, existe uma única $v(t,\tau,u_0,v_0)$ que é solução de

$$\begin{cases} v \in L^2(\tau,T,V) \cap C([\tau,T];H) \quad \forall \tau \leqslant T \leqslant T^* \\ \dfrac{dv}{dt} = F'(S(t,\tau)u_0,t), \quad \tau \leqslant t \leqslant T^*, \\ v(\tau) = v_0 \end{cases} \qquad (1.6)$$

Faremos a hipótese de que

$$v(t;\tau,u_0,v_0) = L(t,\tau,u_0)v_0, \quad \text{para todo } \tau \leqslant t \leqslant T^* \text{ e todo } u_0, v_0 \in K(\tau). \qquad (1.7)$$

Denotando, para $j = 1, 2, \ldots,$

$$q_j = \limsup_{T\to+\infty} \sup_{\tau \leqslant T^*} \sup_{u_0 \in K(\tau - T)} \left(\frac{1}{T} \int_{\tau-T}^{\tau} \mathrm{Tr}_j(F'(S(s,\tau-T)u_0,s))ds \right), \qquad (1.8)$$

onde

$$\mathrm{Tr}_j(F'(S(s,\tau-T)u_0,s)) = \sup_{v_0 \in H, |v_0| \leqslant 1 \ i \leqslant j} \left(\sum_{i=1}^{j} \langle F'(S(s,\tau)u_0,s)e_i, e_j \rangle \right),$$

sendo $e_1, \ldots, e_j$ uma base ortonormal do subespaço gerado por $v(s,\tau,u_0,v_0^1), \ldots, v(s,\tau,u_0,v_0^j)$.

Usaremos o seguinte teorema apresentado em [57] o qual é uma adaptação para o caso não autônomo de teorema correspondente em [23] (veja também [22, lemma 2.40]).

Teorema 1.5. *Suponha que as hipóteses acima sejam válidas, em particular,* (1.3)-(1.5) *e* (1.7)*, suponha que*

$$\bigcup_{\tau \leqslant T^*} K(\tau) \quad \textit{é relativamente compacto em} \;\; H,$$

e que existe q_j, $j = 1, 2, \ldots$, tais que

$$\begin{aligned} &\widetilde{q}_j \leqslant q_j, \quad \textit{para todo} \quad j \geqslant 1, \\ &q_{n_0} \geqslant 0, \quad q_{n_0+1} < 0, \end{aligned}$$

para algum $n_0 \geqslant 1$, e

$$q_j \leqslant q_{n_0} + (q_{n_0} - q_{n_0+1})(n_0 - j), \quad \textit{para todo} \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Então,

$$d_F K(\tau) \leqslant d_0 := n_0 + \frac{q_{n_0}}{q_{n_0} - q_{n_0+1}}, \quad \tau \leqslant T^*.$$

1.4 Atratores para sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos

Nesta seção, introduzimos alguns conceitos básicos da teoria de atratores *pullback* aleatórios que serão usados no Capítulo 3. Para mais detalhes veja [76, 32, 77] e suas referências.

Sejam Σ um espaço topológico e $\{\theta\}_{t\in\mathbb{R}}$ um grupo de operadores agindo em Σ satisfazendo

- $\theta_0 =$ operador identidade em Σ;
- $\theta\Sigma = \Sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$;
- $\sigma \mapsto \theta_t \sigma$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado.

Para um espaço métrico M, denotemos por $\mathcal{B}(M)$ a sigma-álgebra de Borel em M.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade não necessariamente $\mathbb{P}$-completo, com um grupo $\{\vartheta\}_{t\in\mathbb{R}}$ satisfazendo

- ϑ_0 = operador identidade sobre Ω;
- $\vartheta_t \Omega = \Omega; \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- $\vartheta_s \circ \vartheta_t = \vartheta_{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$;

- $(t, \omega) \mapsto \vartheta_t \omega$ is $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}, \mathcal{F})$-mensurável;

- $\mathbb{P}(\vartheta_t F) = \mathbb{P}(F), \quad \forall t \leqslant 0, F \in \mathcal{F}.$

Os dois grupos acima são chamados de *fluxos de base*.

Definição 1.12. *Um sistema dinâmico aleatório não-autônomo (SDAN) em X com fluxos de base $\{\theta\}_{t\in\mathbb{R}}$ e $\{\vartheta\}_{t\in\mathbb{R}}$ é uma aplicação $\phi(t, \sigma, \omega, x) : \mathbb{R}_+ \times \Sigma \times \Omega \times X \to X$ satisfazendo as seguintes propriedades*

(i) ϕ *é* $(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{B}(\Sigma) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X))$*-mensurável;*

(ii) $\phi(0, \sigma, \omega, \cdot)$ *é o operador identidade em X para cada ω e σ fixados;*

(iii) ϕ *satisfaz a propriedade do cociclo, isto é,*

$$\phi(t + s, \sigma, \omega, x) = \phi(t, \theta_s \sigma, \vartheta_s \omega, x), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \ \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Além disso, um SDAN ϕ é dito *contínuo* se a aplicação $\phi(t, \sigma, \omega, \cdot)$ é contínua para cada t, σ, ω fixados.

Em seguida, introduzimos o conceito de conjunto aleatório, que desempenha um papel central no estudo de sistemas dinâmicos aleatórios.

Definição 1.13. *Uma aplicação D: $\Sigma \times \Omega \mapsto 2^X \setminus \emptyset$, $(\sigma, \omega) \mapsto D_\sigma(\omega)$ é chamada um* ***conjunto aleatório não autônomo*** *de X se é mensurável no sentido de que a aplicação $\omega \to \operatorname{dist}(x, D_\sigma(\omega))$ é $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável para cada $\sigma \in \Sigma$ e $x \in X$. Se cada $D_\sigma(\omega)$ é um conjunto fechado (ou limitado, compacto, etc.) em X, então D é chamado um conjunto aleatório não autônomo fechado (limitado, compacto, etc.) em X.*

Dado dois conjuntos aleatórios não autônomos D^1, D^2 de X, escrevemos $D^1 \subset D^2$ se, e somente se, $D^1_\sigma(\omega) \subset D^2_\sigma(\omega)$ para todo $\sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega$. Neste caso dizemos que D^1 é **menor** que D^2.

Dado um conjunto aleatório não autônomo B de X, denotamos por $\mathcal{N}_\epsilon(B)$ o conjunto aleatório não autônomo de X definido pela ϵ-vizinhança fechada de B, isto é,

$$\mathcal{N}_\epsilon(B_\sigma(\omega)) = \big\{x \in X : \operatorname{dist}(x, B_\sigma(\omega)) \leqslant \epsilon\big\}.$$

No que se segue denotamos por $\mathcal{D}$ uma classe de conjuntos aleatórios não autônomos em X satisfazendo as seguintes condições

- $\mathcal{D}$ é vizinhança fechada, isto é, para cada $D \in \mathcal{D}$ existe um $\epsilon > 0$ tal que a ϵ-vizinhança fechada $\mathcal{N}_\epsilon(D)$ pertence a $\mathcal{D}$;

- $\mathcal{D}$ é inclusão fechada, isto é, se $D \in \mathcal{D}$ então cada conjunto aleatório não autônomo menor que D pertence a $\mathcal{D}$.

Definição 1.14. *Um conjunto aleatório não autônomo $B = \{B_\sigma(\omega) : \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega\}$ é dito ser um conjunto $\mathcal{D}$-pullback atraente sob o SDAN ϕ se para cada $D \in \mathcal{D}$*

$$\lim_{t\to+\infty} dist\left(\phi(t, \theta_{-t}\sigma, \vartheta_{-t}\omega, D_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)), B_\sigma(\omega)\right) = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

O conjunto aleatório não-autônomo B é dito ser um conjunto $\mathcal{D}$-pullback absorvente se para cada $D \in \mathcal{D}$, $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T_D(\sigma, \omega) > 0$ tal que

$$\phi(t, \theta_{-t}\sigma, \vartheta_{-t}\omega, D_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega) \subset B_\sigma(\omega), \quad \forall t \geqslant T_D(\sigma, \omega).$$

Definição 1.15. *Um conjunto aleatório $A = \{A_\sigma(\omega) : \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega\}$ é um $\mathcal{D}$-atrator pullback para o SDAN ϕ se*

(i) A é compacto;

(ii) A é $\mathcal{D}$-pullback atraente;

(iii) A é invariante sobre ϕ, isto é,

$$\phi(t, \sigma, \omega, A_\sigma(\omega)) = A_{\theta_t\sigma}(\vartheta_t\omega), \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+, \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

(iv) A é o minimal entre todos os conjuntos aleatórios não-autônomos fechados que satisfazem (ii).

Definição 1.16. *Um SDAN em um espaço de Banach X é dito $\mathcal{D}$-pullback assintoticamente compacto se para cada $\sigma \in \Sigma$, $\omega \in \Omega$, $D \in \mathcal{D}$, cada sequência $t_n \to +\infty$, e cada sequência $x_n \in D_{\theta_{-t_n}\sigma}(\vartheta_{-t_n}\omega)$, a sequência $\{\phi(t_n, \theta_{-t_n}\sigma, \vartheta_{-t_n}\omega, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui um subsequência convergente em X.*

Teorema 1.6. *[76] Seja ϕ um SDAN contínuo em X. Então ϕ possui um $\mathcal{D}$-atrator pullback $A = \{A_\sigma(\omega) : \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega\} \in \mathcal{D}$ se, e somente se, ϕ é $\mathcal{D}$-pullback assintoticamente compacto em X e ϕ possui um conjunto $\mathcal{D}$-pullback absorvente fechado e mensurável (com respeito ao $\mathbb{P}$-completamento de $\mathcal{F}$) $B = \{B_\sigma(\omega) : \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega\} \in \mathcal{D}$. Além disso, o atrator A é único e para cada $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$ temos*

$$A_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, B) = \bigcap_{\tau\geqslant 0} \overline{\bigcup_{t\geqslant\tau} \phi(t, \theta_{-t}\sigma, \vartheta_{-t}\omega, B_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))}.$$

Capítulo 2

Atrator *pullback* para a equação de fluido Oldroyd não autônoma

2.1 Equação de fluido Oldroyd

É sabido que o escaomento de um fluido incompressível é modelado pela seguintes de equações

$$u' + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \nabla \cdot \sigma + f, \qquad \nabla \cdot u = 0, \tag{2.1}$$

onde $u = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ é a velocidade do fluido, p é a pressão no fluido, f é a densidade de forças externas e σ é o tensor de stress.

A relação entre o tensor de deformação $\mathcal{E}$, e o tensor de stress σ determina as propriedades físicas do fluido. Tal relação é chamada *equação reológica* ou *equação de estado* do fluido. No caso 2D, $\mathcal{E}$ é a matriz 2×2 de entradas $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$.

O modelo de escoamento viscoelástico bidimensional de um fluido Oldroyd considerado neste trabalho resulta da equação reológica proposta por Oldroyd [64, 63]

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma = 2\nu \left(1 + k\nu^{-1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{E}. \tag{2.2}$$

onde λ, ν, k são constantes positivas, com $\nu - \dfrac{k}{\lambda} > 0$. A constante λ é chamada de tempo de relaxamento, κ é o tempo de retardamento e ν a viscosidade cinemática.

Essas equações *diferenciais* de estado foram introduzidas (nesta notação) por Oldroyd em seu trabalho [64] baseadas no trabalho de Frohlich $\&$ Sack [39], no qual os autores obtiveram estas equações baseados no estudo de uma suspensão coloidal, no qual partículas esféricas elásticas Hookeanas estavam suspensas e distribuídas em um fluido newtoniano viscoso. O material é essencialmente um líquido, e o modelo físico é tal que $\lambda > \kappa$ e tal que, quando λ e κ

tendem a ser iguais, o material deve se tornar cada vez mais um fluido líquido newtoniano com viscosidade ν. Analisando o trabalho original, observa-se que a equação (2.2) foi modelada considerando o que deve ser considerado como um único elemento macroscópico estacionário do material, e que foi feita uma suposição que efetivamente restringe a tensão e taxas de deformação a serem pequenas.

Em um trabalho posterior [63], Oldroyd diz que obteve o mesmo modelo para uma emulsão diluída, onde as partículas suspensas são gotículas de líquido; a tensão interfacial fornece a força de restauração que faz com que as gotículas individuais resistam a mudanças na sua forma, dando aos sistema a propriedade de que a energia elástica energia de tensão é armazenada durante o escoamento. Nestes dois trabalhos, o autor observa que a equação (2.2) é apropriada, e que baseado em evidências experimentais, alguns líquidos (soluções poliméricas diluídas) se comportam aproximadamente de acordo com esta equação. Portanto, a equação (2.2) pode ser usada para definir um protótipo de fluido viscoelástico para um estudo teórico detalhado. A vantagem desta equação é a sua simplicidade.

No entanto, como observado pelo próprio autor, a equação (2.2) não se aplica no estudo geral de fluidos viscoelásticos, e o problema imediato é generalizar a equação de modo que possa ser aplicada de forma geral, nos quais as taxas de deformação não sejam necessariamente pequenas. No intuito de generalizar este tipo de modelo para um classe maior de fluidos viscoelásticos, o autor introduziu o seguinte modelo mais geral

$$\left(1+\lambda\frac{d}{dt}\right)\sigma=\nu\left(1+\kappa\frac{d}{dt}\right)\mathcal{E}, \tag{2.3}$$

onde $d\sigma/dt$ deve ser entendido como uma derivada acompanhando o escoamento do material. Não existe um modo único de derivação para esse fim, mas para muitos casos existe uma diferença muito pequena na escolha de um ou outro. Resumindo, existem várias possibilidades de generalização para (2.2), nenhuma delas simples; a diferença entre elas desaparece quando estamos lidando com pequenas taxas de deformação. (Tudo isto parece desnecessariamente complicado, mas apesar da equação (2.2) ser mais "tratável", mas é importante perceber que as equações matematicamente simples podem ser fisicamente insignificantes: se as derivadas temporais na equação de estado forem inadmissíveis ao modelo físico, como a derivada parcial usual $\partial/\partial t$, essas equações estão, de fato, descrevendo diferentes propriedades físicas em diferentes partes do material). Mesmo a derivada total mais simples em (2.3) requer a consideração de componentes de vorticidade e a equação que modela o fluxo requer outra função variável descrevendo as trajetórias das partículas do movimento do fluido. Não vamos abordar essas generalizações neste trabalho.

Da equação reológica (2.2) com condições iniciais de Cauchy $\sigma(\tau) = \mathcal{E}(\tau) = 0$ encontramos

$$\sigma(x,t) = 2\kappa\lambda^{-1}\mathcal{E}(x,t) + 2\lambda^{-1}(\nu - \kappa\lambda^{-1}) \int_{\tau}^{t} e^{(t-s)/\lambda}\mathcal{E}(x,s)ds. \tag{2.4}$$

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio no qual vale a desigualdade de Poincaré. De (2.4) e (2.1), segue o seguinte problema de valor inicial e fronteira (veja [65]):

$$\begin{cases} u' - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u - \displaystyle\int_{\tau}^{t} \beta(t-s)\Delta u(s)ds + \nabla p = f(t) \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u = 0 \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad [\tau,+\infty)\times\partial\Omega, \\ u(\tau) = u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Aqui, $\mu = k\lambda^{-1} > 0$ e $\beta(t) = \gamma e^{-\delta t}$, onde $\gamma = \lambda^{-1}\left(\nu - k\lambda^{-1}\right)$ com $\delta = \lambda^{-1}$. Para mais detalhes e modelagem físicas, indicamos ao leitor os trabalhos [10, 48, 63–65].

Muitos trabalhos foram dedicados ao estudo do problema (2.5). A existência, unicidade e dependência contínua nos dados iniciais foram estudados em [1, 18, 66, 49, 52, 65]. Em [35] os autores investigaram a desigualdade variational associada ao problema (2.5). Um estudo de atratores globais para o caso autônomo com $f(t,x) = f(x)$ foi feito em [49, 51], mas infelizmente existem lá algumas estimativas que não estão bem claras (como observado em [43]), além disso não está claro que o conjunto de soluções do sistema geram de fato um semigrupo.

A dificuldade em se analisar diretamente o problema (2.5) de modo análogo ao caso Navier-Stokes se deve à presença do termo integral chamado na literatura de termo de memória, devido a esse fato, o (2.5) não gera um processo de evolução em H. Muitos autores lidam com o termo de memória fazendo uma mudança de variáveis e utilizando os espaços chamados espaços de memória seguindo a abordagem de [34]. Para estudarmos o problema (2.5), consideremos um problema equivalente no espaço de fase $H \times V$, cujas soluções são casos particulares das soluções de um problema que gera um processo de evolução nesse espaço. Investigaremos a existência de atratores *pullback* (com universo de atração não autônomo formado por conjuntos temperados) para tal problema sob a hipótese usual de que

$$f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; V') \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|f(s)\|^2_{V'}ds < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

onde $\alpha = \min\{\mu\lambda_1, 2\delta\}$ e, como é usual, λ_1 denota o primeiro autovalor do operador de Stokes. Fazemos também a hipótese técnica de que $2 - \kappa\lambda_1 > 0$.

Para estimarmos a dimensão fractal do atrator suporemos que

$$f \in L^\infty(-\infty, T^*, V') \quad \text{para algum} \quad T^* \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

2.2 Espaços de funções e algumas estimativas

Nesta seção relembramos algumas definições e notações sobre espaços de Sobolev.

Usaremos a notação usual $L^2(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$ e $C^p(\Omega)$ para funções definidas em Ω tomando valores em $\mathbb{R}$, e a notação $\mathbb{L}^2(\Omega)$, $\mathbb{L}^p(\Omega)$, $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega)$ e $\mathbb{C}^p(\Omega)$ para funções tomando valores em $\mathbb{R}^n$. Além disso, consideraremos os espaços $L^p(s,T;H^m(\Omega))$ ou $L^p(s,T;H^m(\Omega))^n$.

Também consideraremos os seguintes espaços

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^n; \quad \text{div}\,\varphi = 0\},$$

$V = V(\Omega)$ que é o fecho de $\mathcal{V}$ em $H_0^1(\Omega)^n$ com produto interno e norma definidos respectivamente por

$$((u,z)) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(x)\,dx, \quad \|u\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx,$$

$H = H(\Omega)$ que é o fecho de $\mathcal{V}$ em $L^2(\Omega)^n$ com produto interno e norma definidos respectivamente por

$$(u,v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx, \quad |u|^2 = \sum_{i=1}^n \int_\Omega |u_i(x)|^2\,dx.$$

Os espaços V e H são espaços de Hilbert, $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ com imersão densa e contínua.

Consideremos a seguinte forma trilinear

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx.$$

Em particular, mostra-se que b é contínua em $V \times V \times V$ e vale as seguintes estimativas:

$$|b(u,v,w)| \leqslant \sqrt{2}|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\||w|^{1/2}\|w\|^{1/2}, \tag{2.8}$$

e

$$b(u,v,v) = 0, \qquad \forall u,v \in V. \tag{2.9}$$

Consideremos o operador bilinear $B : V \times V \to V'$ por

$$\langle B(u,u), v\rangle = b(u,u,v), \qquad \forall u,v \in V.$$

Temos a seguinte estimativa

$$\|B(u,u)\|_{V'} \leqslant k|u|\|u\|, \qquad \forall u \in V. \tag{2.10}$$

Para mais detalhes veja [73, 68, 74].

Usando a história relativa de u, definida por $v(t) = \int_\tau^t \beta(t-s)u(s)ds$ introduzida por Dafermos [34], o problema (2.5) pode ser reescrito no seguinte problema equivalente

$$\begin{cases} u' - \mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u - \Delta v + \nabla p = f(t) \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ v' + \delta v = \gamma u \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ (\nabla\cdot u, \nabla\cdot v) = (0,0) \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ (u,v) = (0,0) \quad \text{sobre} \quad [\tau,+\infty)\times\partial\Omega, \\ u(\tau) = u_0,\ v(\tau) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Se em vez de $v(\tau) = 0$, consideramos a condição inicial $v(\tau) = v_0 \in V$. O sistema (2.11) gera um processo de evolução, para o qual estudaremos a existência de atrator. Tal atrator nos permitirá estudar o comportamento assintótico do sistema original.

Para descrever nossos resultados, introduzimos a seguir, o sentido de solução fraca para o problema (2.11).

Definição 2.1. *Seja $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R};V')$, $u_0 \in H$ e $v_0 \in V$. Um par de funções (u,v) é dito uma solução fraca para o problema (2.11) se $(u,v) \in L^\infty(\tau,T;H)\cap L^2(\tau,T;V)\times L^2(\tau,T,V)$ para todo $T > \tau$ e*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u,\varphi) + \mu((u,\varphi)) + b(u,u,\varphi) + ((v,\varphi)) = \langle f(t),\varphi\rangle \quad \forall\varphi \in V, t\in[\tau,T], \\ &\frac{d}{dt}((v,\varphi)) + \delta((v,\varphi)) = \gamma((u,\varphi)) \quad \forall v \in V, t \in [\tau,T], \\ &u(\tau) = u_0, \quad v(\tau) = v_0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $\frac{d}{dt}$ é tomado no sentido de $\mathcal{D}'(\tau,T)$.

A existência de solução fraca para o problema (2.11) para todo $t > \tau$ é mostrada aplicando-se o método de Galerkin, fazendo-se uso das seguintes estimativas:

$$|u(t)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2 \leqslant e^{-\alpha(t-\tau)}(|u_0|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v_0\|^2) + \frac{1}{\mu\lambda_1}\int_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}\|f(s)\|^2_{V'}ds. \tag{2.13}$$

$$|u(t)|^2 + \mu\int_\tau^t \|u(s)\|^2 ds \leqslant |u_0|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v_0\|^2 + \frac{1}{\mu}\int_\tau^t \|f(s)\|^2_{V'}ds, \tag{2.14}$$

e o fato de que , $u' \in L^2(\tau, T, H)$ (isto segue das estimativas acima, do fato de A ser um operador limitado e B satisfazer a estimativa 2.8)). Além disso, $u \in C([\tau, +\infty); H)$, e $v \in C([\tau, +\infty); V)$ (veja (2.13), (2.36) e [68, Proposition 7.1]).

Unicidade e a propriedade de ser Lipschitz contínua em (u_0, v_0) seguem de

$$|w(t)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|z(t)\|^2 \leqslant \left(|w(\tau)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|z(\tau)\|^2\right) \exp\left(\alpha \int_\tau^t \|u_1(s)\|^2 ds\right), \tag{2.15}$$

onde $(w, z) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ com (u_1, v_1) e (u_2, v_2) duas soluções fracas do sistema (2.11).

Consideremos o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H \times V$ munido com a norma

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 = |u|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2$$

que é equivalente à norma usual de $\mathcal{H}$. Graças às observações acima, podemos considerar o processo de evolução contínuo definido pelo operador solução do problema (2.11) no espaço de fase $\mathcal{H}$, isto é, o operador $S(t, \tau) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por

$$\begin{aligned} S(t, \tau)(u_0, v_0) &= (S_1(t, \tau)(u_0, v_0), S_2(t, \tau)(u_0, v_0)) \\ &:= (u(t; \tau, (u_0, v_0)), v(t; \tau, (u_0, v_0))), \quad t \geqslant \tau, \end{aligned}$$

onde o par $(u(t; \tau, (u_0, v_0)), v(t; \tau, (u_0, v_0))$ é a única solução fraca de (2.11) com condição inicial $(u_0, v_0) \in \mathcal{H}$.

Consideremos a classe $\mathcal{D}$ de todas as famílias temperadas $\widehat{D} = \{D(t); t \in \mathbb{R}\}$ em $\mathcal{H}$ dadas por

$$\lim_{\tau \to -\infty} e^{\alpha\tau} \left(\sup_{(u,v) \in D(\tau)} \|(u, v)\|_{\mathcal{H}}^2 \right) = 0.$$

Observemos que $\mathcal{D}$ é inclusão fechada.

O seguinte teorema é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1. *Suponha que a hipótese* (2.6) *seja satisfeita.*

(i) Então o processo de evolução gerado pelas soluções fracas do problema (2.11) possui um $\mathcal{D}$-atrator pullback minimal $\widehat{A}_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$;

(ii) Se ainda $f \in L^\infty(-\infty, T^*; V')$ para algum $T^* \in \mathbb{R}$, então a dimensão fractal do atrator é finita

$$d_F(K(\tau)) \leqslant \max\left(1, \max\left(\frac{1}{\mu^4\lambda_1}, \frac{\gamma}{\mu^3}\right) \widetilde{\kappa} \|f\|_{L^\infty(-\infty, T^*; V')}\right), \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

onde $\widetilde{\kappa}$ é a constante da desigualdade de Lieb-Thirring.

A prova será apresentada nas seções seguintes deste capítulo. Primeiro, na Seção 2.3 verificamos as hipóteses do Teorema 1.3 e provamos (i). Em seguida, na Seção 2.4 provamos (ii) usando o Teorema 1.5.

2.3 Existência de atratores *pullback*

Esta seção é dedicada a prova da existência de atratores *pullback* para o processo de evolução gerado pelo problema (2.11). Mais precisamente, provaremos o Teorema 2.1 (i).

No que se segue vamos verificar as hipóteses do Teorema 1.3.

Lema 2.1. *Suponha que a hipótese (2.6) seja satisfeita, então a família $\widehat{B}_0 = \{B_0(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de bolas fechadas $B_0(t) = \overline{B_{\mathcal{H}}(0, \rho_0(t))}$ em $\mathcal{H}$ onde*

$$\rho_0^2(t) = 1 + \frac{1}{\mu\lambda_1}\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|f(s)\|_{V'}^2 ds. \tag{2.16}$$

é pullback $\mathcal{D}$-absorvente. Além disso, $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$.

Demonstração. Primeiro observe que a hipótese (2.6) implica que $\rho_0(t)$ é bem definido. Dados $\widehat{D} \in \mathcal{D}$ e $t \in \mathbb{R}$, segue de (2.13) que

$$\|S(t,\tau)(u_0,v_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant e^{-\alpha(t-\tau)}\|(u_0,v_0)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{\mu\lambda_1}\int_{\tau}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|f(s)\|_{V'}^2 ds. \tag{2.17}$$

para todo $(u_0, v_0) \in D(\tau)$ e $\tau \leqslant t$. Como $\widehat{D} \in \mathcal{D}$, existe $\tau_0(\widehat{D}, t) < t$ tal que

$$e^{-\alpha(t-\tau)}\|(u_0,v_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant 1, \quad \forall \tau \leqslant \tau_0(\widehat{D},t),\ (u_0,v_0) \in D(\tau). \tag{2.18}$$

Combinando as estimativas (2.17) e (2.18), obtemos

$$\|S(t,\tau)(u_0,v_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \rho_0^2(t), \quad \forall \tau \leqslant \tau_0(\widehat{D},t),\ (u_0,v_0) \in D(\tau),$$

ou seja,

$$S(t,\tau)D(\tau) \subset B_0(t), \quad \forall \tau \leqslant \tau_0(\widehat{D},t).$$

Isso mostra que $\widehat{B}_0$ é uma família *pullback* $\mathcal{D}$-absorvente. Falta mostrar que $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$, isto é,

$$\lim_{\tau\to-\infty} e^{\alpha\tau}\rho_0^2(\tau) = 0. \tag{2.19}$$

Notemos que

$$e^{\alpha\tau}\rho_0^2(\tau) = e^{\alpha\tau} + \frac{e^{\alpha\tau}}{\mu\lambda_1}\left(\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\alpha(\tau-s)}\|f(s)\|_{V'}^2 ds\right).$$

Usando a última igualdade e a hipótese (2.6) vemos que (2.19) é satisfeito, e portanto $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$. A prova está completa. □

O seguinte lema será útil para verificar a compacidade assintótica do processo $S(\cdot,\cdot)$. Sua prova segue as idéias de [69].

Lema 2.2. *Seja (u_{0n}, v_{0n}) uma sequência convergindo fracamente para (u_0, v_0) em $\mathcal{H}$. Então temos que*

$$S_1(t,\tau)(u_{0n}, v_{0n}) \rightharpoonup S_1(t,\tau)(u_0, v_0) \quad \textit{fraco em} \quad H, \quad \forall t \geqslant \tau, \tag{2.20}$$

$$S_2(t,\tau)(u_{0n}, v_{0n}) \rightharpoonup S_2(t,\tau)(u_0, v_0) \quad \textit{fraco em} \quad V, \quad \forall t \geqslant \tau, \tag{2.21}$$

$$S_1(\cdot,\tau)(u_{0n}, v_{0n}) \rightharpoonup S_1(\cdot,\tau)(u_0, v_0) \quad \textit{fraco em} \quad L^2(\tau,T;V), \quad \forall T \geqslant \tau, \tag{2.22}$$

$$S_2(\cdot,\tau)(u_{0n}, v_{0n}) \rightharpoonup S_2(\cdot,\tau)(u_0, v_0) \quad \textit{fraco em} \quad L^2(\tau,T;V), \quad \forall T \geqslant \tau. \tag{2.23}$$

Em particular, temos

$$S(t,\tau)(u_{0n}, v_{0n}) \rightharpoonup S(t,\tau)(u_0, v_0) \quad \textit{fraco em} \quad \mathcal{H}, \quad \forall t \geqslant \tau, \tag{2.24}$$

e

$$S(t,\tau)(u_{0n}, v_{0n}) \rightharpoonup S(t,\tau)(u_0, v_0) \quad \textit{fraco em} \quad L^2(\tau,T;V\times V), \quad \forall T \geqslant \tau. \tag{2.25}$$

Demonstração. Seja $u_n(t) = S_1(t,\tau)(u_{0n}, v_{0n})$ e $u(t) = S_1(t,\tau)(u_0, v_0)$ para $t \geqslant \tau$. Da estimativa (2.13) temos que

$$(u_n) \text{ é limitada em } L^\infty(\tau,T;H) \cap L^2(\tau,T;V) \quad \forall T > \tau. \tag{2.26}$$

Assim, como

$$u_n' = f(t) - \mu A u_n - B(u_n, u_n) - v_n,$$

e como A é um operador limitado de V em V' e B satisfaz (2.10), segue que

$$(u_n') \text{ é limitada em } L^2(\tau,T;V') \quad \forall T > \tau. \tag{2.27}$$

Logo, para todo $\varphi \in V$ e $\tau \leqslant t \leqslant t + a \leqslant T$ temos que

$$\begin{aligned}
(u_n(t+a) - u_n(t), \varphi) &= \int_t^{t+a} \langle u_n'(s), \varphi \rangle ds \\
&\leqslant \int_t^{t+a} \|u_n'(s)\|_{V'} \|\varphi\| ds \\
&\leqslant \|\varphi\| a^{1/2} \|u_n'\|_{L^2(\tau,T;V')} \\
&\leqslant C(\tau,T) \|\varphi\| a^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Em particular, para $\varphi = u_n(t+a) - u_n(t)$ que pertence a V para quase todo $t \in [\tau, T]$, encontramos

$$|u_n(t+a) - u_n(t)|^2 \leqslant C(\tau,T) a^{1/2} \|u_n(t+a) - u_n(t)\|.$$

Logo, integrando de τ a T e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}\int_\tau^{T-a} |u_n(t+a) - u_n(t)|^2 dt &\leqslant C(\tau,T)a^{1/2} \int_\tau^{T-a} \|u_n(t+a) - u_n(t)\| dt \\ &\leqslant C(\tau,T)a^{1/2}(T-a-\tau)^{1/2}\|u_n\|_{L^2(\tau,T;V)}.\end{aligned}$$

De (2.26) encontramos

$$\int_\tau^{T-a} |u_n(t+a) - u_n(t)|^2 dt \leqslant \widetilde{C}(\tau,T)a^{1/2}.$$

Logo

$$\lim_{a\to 0} \sup_n \int_\tau^{T-a} \|u_n(t+a) - u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} dt = 0, \tag{2.29}$$

para todo $\rho > 0$, onde $\Omega_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < \rho\}$. Considere a função de truncamento $\theta \in C^1[\tau,+\infty)$ tal que $\theta(s) = 1$ para $s \in [\tau, \tau+1]$, $\theta(s) = 0$ para $s \in [\tau+2,+\infty)$ e $|\theta(s)| \leqslant 1$ para todo $s \in [\tau,+\infty)$. Definamos

$$u_{n\rho}(x,t) = \theta(|x|^2/\rho^2)u_n(x,t), \quad \forall x \in \Omega_{2\rho}.$$

Segue de (2.29) que

$$\lim_{a\to 0} \sup_n \int_\tau^{T-a} \|u_{n\rho}(t+a) - u_{n\rho}(t)\|^2_{L^2(\Omega_{2\rho})} dt = 0. \tag{2.30}$$

De (2.26), temos

$$u_{n\rho} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(\tau,T;H_0^1(\Omega_{2\rho})) \cap L^\infty(\tau,T;L^2(\Omega_{2\rho})). \tag{2.31}$$

Combinando (2.30), (2.31) e o teorema de compacidade, [73, Theorem 13.3], para $X = L^2(\Omega_{2\rho})$, $Y = H_0^1(\Omega_{2\rho})$ e $p = 2$, temos que

$$\{u_{n\rho}\} \text{ é relativamente compacto em } L^2(\tau,T;L^2(\Omega_{2\rho})) \quad \forall T > \tau. \tag{2.32}$$

Portanto

$$\{u_n|_{\Omega_\rho}\} \quad \text{é relativamente compacto em } L^2(\tau,T;L^2(\Omega_\rho)).$$

Da estimativa (2.26) e de (2.32), encontramos uma subsequência $u_{n'}$ e uma função $\widetilde{u} \in L^\infty(\tau,T;H) \cap L^2(\tau,T;V)$ tal que

$$u_{n'} \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u} \quad \text{fraco-estrela em} \quad L^\infty(\tau,+\infty;H), \tag{2.33}$$

$$u_{n'} \rightharpoonup \widetilde{u} \quad \text{fraco em} \quad L^2_{\text{loc}}(\tau,+\infty;V), \tag{2.34}$$

$$u_{n'} \to \widetilde{u} \quad \text{forte em} \quad L^2_{\text{loc}}(\tau,+\infty;L^2(\Omega_\rho)). \tag{2.35}$$

Agora, seja $v_n(t) = S_2(t,\tau)(u_{0n}, v_{0n})$ $v(t) = S_2(t,\tau)v_0$. Tomando o produto interno em V na segunda equação do sistema (2.11) com v' obtemos

$$\delta \frac{d}{dt}\|v_n\|^2 + \|v_n'\|^2 \leqslant \gamma^2 \|u_n\|^2.$$

Integrando de τ a t, encontramos

$$\delta\|v_n(t)\|^2 + \int_\tau^t \|v_n'(s)\|^2 ds \leqslant \gamma^2 \int_\tau^t \|u_n(s)\|^2 ds + \|v_n(\tau)\|^2, \tag{2.36}$$

para todo $\tau \leqslant t \leqslant T$.

De (2.13) e (2.36) temos $v_n \in W^{1,2}(\tau, T, V)$. Então

$$v_n(t) = v_n(a) + \int_a^t \frac{dv_n}{dt}(s) ds \quad \text{para todo} \quad \tau \leqslant a \leqslant t \leqslant T, \tag{2.37}$$

e $v \in C^0([\tau, T]; V)$ (veja [68, Proposition 7.1]).

Portanto, para cada $\varphi \in V$, $\tau \leqslant t \leqslant t + a \leqslant T$, tomando o produto interno em V da equação (2.37) com φ, encontramos

$$\begin{aligned} ((v_n(t+a) - v_n(t), \varphi)) &= \left(\left(\int_t^{t+a} \frac{dv_n}{ds}(s) ds, \varphi\right)\right) \\ &= \int_t^{t+a} \left(\left(\frac{dv_n}{ds}(s), \varphi\right)\right) ds \\ &= \int_t^{t+a} \gamma((u_n(s), \varphi)) - \delta((v_n(s), \varphi)) ds, \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde usamos [53, Corollary 2.19.11] na segunda linha.

Pelas estimativas (2.13)–(2.14), encontramos

$$u_n \quad \text{é limitada em} \quad L^2(\tau, T; V), \tag{2.39}$$

$$v_n \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(\tau, T; V). \tag{2.40}$$

Então

$$\begin{aligned} ((v_n(t+a) - v_n(t), \varphi)) &= \int_t^{t+a} \gamma((u_n(s), \varphi)) - \delta((v_n(s), \varphi)) ds \\ &\leqslant C \int_t^{t+a} (\|u_n(s)\| + \|v_n(s)\|) \|\varphi\| ds \\ &\leqslant C \|\varphi\| a^{1/2} \left(\|u_n\|_{L^2(\tau,T,V)} + \|v_n\|_{L^2(\tau,T;V)}\right) \\ &\leqslant C(\tau, T) a^{1/2} \|\varphi\|. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Aplicando o mesmo argumento usado para u, encontramos que

$$v_{n'} \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{v} \quad \text{fraco-estrela em} \quad L^\infty(\tau, T; V), \tag{2.42}$$

$$v_{n'} \rightharpoonup \widetilde{v} \quad \text{fraco em} \quad L^2(\tau, T; V), \tag{2.43}$$

$$v_{n'} \to \widetilde{v} \quad \text{forte em} \quad L^2(\tau, T; H). \tag{2.44}$$

Com as convergências (2.33)-(2.35) e (2.42)-(2.44), podemos passar ao limite na equação e encontrar que $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ é solução do problema (2.5) com $(\widetilde{u}(\tau),\widetilde{v}(\tau))=(u_0,v_0)$. Pela unicidade de solução, temos $(\widetilde{u},\widetilde{v})=(u,v)$. Por um argumento de contradição, mostra-se que a sequência inteira (u_n,v_n) converge para (u,v) no sentido de (2.33)-(2.44). Isto mostra (2.22) e (2.23).

Agora, da convergência (2.35), segue que $u_n(t)\to u(t)$ em $\mathbb{L}^2(\Omega_\rho)$ para quase todo $t\geqslant\tau$. Logo, para todo $\varphi\in\mathcal{V}$ temos que

$$(u_n(t),\varphi)\to(u(t),\varphi)\quad \text{para quase todo}\quad t\geqslant\tau.$$

Além disso, de (2.26) e (2.28), a sequência $\{(u_n(t),\varphi)\}_n$ é equilimitada e equicontínua em $[\tau,T]$, para todo $T>\tau$. Portanto,

$$(u_n(t),\varphi)\to(u(t),\varphi)\quad \forall t\geqslant\tau,\quad \forall\varphi\in\mathcal{V}. \tag{2.45}$$

Usando (2.26), (2.45) e o fato de $\mathcal{V}$ ser denso em H obtemos (2.20).

Para provarmos (2.21) observemos que, de (2.13), segue que v_n é limitada em $L^\infty([\tau,\infty);V)$. Logo, para quase todo $t\geqslant\tau$, a sequência $v_n(t)$ é limitada em V, e então, existe uma subsequência $v_{n'}(t)$ tal que

$$v_{n'}(t)\rightharpoonup z(t)\quad \text{fraco em}\quad V,\quad \text{para quase todo}\quad t\geqslant\tau.$$

Como V é continuamente imerso em H, encontramos que

$$v_{n'}(t)\rightharpoonup z(t)\quad \text{fraco em}\quad H\quad \text{para quase todo}\quad t\geqslant\tau.$$

Pela convergência (2.44) juntamente com a unicidade do limite, temos que $z(t)=v(t)$. Usando um argumento de contradição, mostra-se que a sequência inteira $v_n(t)\rightharpoonup v(t)$. De fato, suponha o contrário, então existe uma subsequência $v_{n'}(t)$ e uma vizinhança $\mathcal{O}$ de $v(t)$ na topologia fraca de V tal que $v_{n'}(t)\notin\mathcal{O}$ para todo n'. Como $v_{n'}$ é limitada em V, $v_{n'}$ possui uma subsequência $v_{n''}$ que converge em V para um certo $\widetilde{w}$ em V. Logo, $v_{n''}$ converge para $\widetilde{w}$ em H. Novamente, de (2.44) e da unicidade do limite fraco $\widetilde{w}=v(t)$ em H, o que é uma contradição.

Portanto, temos que

$$((v_n(t),\varphi))\to((v(t),\varphi))\quad \forall\varphi\in\mathcal{V},\quad \text{para quase todo}\quad t\geqslant\tau.$$

De (2.40) e (2.41), temos que a sequência $((v_n(t),\varphi))$ é equilimitada e equicontínua. Logo

$$((v_n(t),\varphi))\to((v(t),\varphi))\quad \forall\varphi\in\mathcal{V},\quad \forall t\geqslant\tau. \tag{2.46}$$

De (2.46), de (2.40) e da densidade de $\mathcal{V}$ em V, podemos estender o resultado acima para todo $\varphi \in V$ e concluir que

$$v_n(t) \rightharpoonup v(t) \quad \text{fraco em} \quad V, \quad \forall t \geqslant \tau.$$

A prova está completa. $\square$

Lema 2.3. *O processo $S(\cdot,\cdot)$ é pullback $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto.*

Demonstração. Consideremos a equação de energia

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2\right) + 2\mu\|u\|^2 + \frac{2\delta}{\gamma}\|v\|^2 = 2\langle f, u\rangle. \tag{2.47}$$

Somando e subtraindo $\mu\lambda_1(|u|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2\right) + \mu\lambda_1\left(|u|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2\right) + 2\mu\|u\|^2 - \mu\lambda_1|u|^2 + \left(\frac{2\delta - \mu\lambda_1}{\gamma}\right)\|v\|^2 = 2\langle f, u\rangle.$$

Suponha que $\frac{2\delta-\mu\lambda_1}{2\gamma} > 0$, isto é, $2 - \kappa\lambda_1 > 0$[1].

Seja (u_1, v_1) e $(u_2, v_2) \in V \times V$, definimos o produto interno em $V \times V$ por

$$\langle\langle(u_1, v_1), (u_2, v_2)\rangle\rangle = \mu((u_1, u_2)) - \frac{\mu\lambda_1}{2}(u_1, u_2) + \frac{2\delta - \mu\lambda_1}{2\gamma}((v_1, v_2)). \tag{2.48}$$

Temos que

$$[[(u, v)]]^2 = \mu\|u\|^2 - \frac{\mu\lambda_1}{2}|u|^2 + \left(\frac{2\delta - \mu\lambda_1}{2\gamma}\right)\|v\|^2, \tag{2.49}$$

define uma norma em $V \times V$.

Observe que

$$\mu\|u\|^2 \geqslant \mu\|u\|^2 - \frac{\mu\lambda_1}{2}|u|^2 \geqslant \mu\|u\|^2 - \frac{\mu}{2}\|u\|^2 = \frac{\mu}{2}\|u\|^2,$$

logo

$$\min\left\{\tfrac{\mu}{2}, \tfrac{2\delta-\mu\lambda_1}{2\gamma}\right\}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \leqslant [[(u, v)]]^2 \leqslant \max\left\{\mu, \tfrac{2\delta-\mu\lambda_1}{2\gamma}\right\}(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Isto mostra que $[[\cdot]]$ é uma norma equivalente à norma usual no produto cartesiano $V \times V$.

Com esta notação, a equação de energia se torna

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|S(t,\tau)(u_0, v_0)\|^2_{\mathcal{H}} &+ \mu\lambda_1\|S(t,\tau)(u_0, v_0)\|^2_{\mathcal{H}} \\ &= 2\left\{\langle f(t), S_1(t,\tau)(u_0, v_0)\rangle - [[S(t,\tau)(u_0, v_0)]]^2\right\}.\end{aligned} \tag{2.50}$$

[1] Esta é uma hipótese técnica para garantir que as expressões (2.48) e (2.49) de fato, definem respectivamente um produto interno e uma norma em $V \times V$.

De (2.50) e da fórmula de variação de constantes, encontramos

$$\begin{aligned}\|S(t,\tau)(u_0,v_0)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(u_0,v_0)\|_{\mathcal{H}}^2 e^{-\mu\lambda_1(t-\tau)} + 2\int_\tau^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}\langle f(s), S_1(s,\tau)(u_0,v_0)\rangle \\ - 2\int_\tau^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,\tau)(u_0,v_0)]]^2 ds.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Observe que de (2.16), temos que $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$.

Considere $\widehat{D} \in \mathcal{D}$ temperado, $t \in \mathbb{R}$, a sequência $\tau_n \to -\infty$ e $(u_{\tau_n}, v_{\tau_n}) \in D(\tau_n)$. Como existe uma família $\mathcal{D}$-*pullback* absorvente $\widehat{B}_0$ em $\mathcal{H}$, para $\tau_n < \tau(t,\widehat{D})$, temos que $\{S(t,\tau_n)(u_{\tau_n}, v_{\tau_n})\} \subset \widehat{B}_0(t)$. Assim, $\{S(t,\tau_n)(u_{\tau_n}, v_{\tau_n})\}$ é fracamente precompacto em $\mathcal{H}$, isto é

$$S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}}) \rightharpoonup (w,z) \quad \text{fraco em} \quad \mathcal{H}. \tag{2.52}$$

para alguma subsequência $(\tau_{n'})$ e $(w,z) \in B(t)$ (já que $B(t)$ é fechado e convexo). Analogamente, novamente pela estimativa (2.13) para cada $k < t$ temos também que

$$S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}}) \in B(k) \qquad \forall \tau_{n'} \leqslant \tau(k,\widehat{D}),$$

assim $\{S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}})\}$ é precompacto em $\mathcal{H}$.

Usando um argumento de diagonal encontramos uma subsequência

$$S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}}) \rightharpoonup (w_k,z_k) \quad \text{fraco em} \quad \mathcal{H}, \tag{2.53}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}_-$, $k < t$, com $(w_k, z_k) \in B(k)$.

Pela continuidade fraca de $S(t,k)$, dada no Lema 2.2 (convergência (2.24)), denotando $\lim_\omega$ o limite relativo à topologia fraca em $\mathcal{H}$, temos que

$$\begin{aligned}(w,z) = \lim_\omega S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}}) &= \lim_\omega S(t,k)S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}}) \\ &= S(t,k)\lim_\omega S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}}) \\ &= S(t,k)(w_k,z_k),\end{aligned}$$

isto é,

$$(w,z) = S(t,k)(w_k,z_k).$$

Agora, de (2.52), encontramos

$$\|(w,z)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \liminf_{n'\to+\infty} \|S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}})\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.54}$$

Iremos então mostrar que

$$\limsup_{n'\to+\infty} \|S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}}, v_{\tau_{n'}})\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|(w,z)\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{2.55}$$

De fato, para $t > k > \tau_n$, temos

$$
\begin{aligned}
\|S(t,\tau_n)(u_{\tau_n},v_{\tau_n})\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|S(t,k)S(k,\tau_n)(u_{\tau_n},v_{\tau_n})\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|S(k,\tau_n)(u_{\tau_n},v_{\tau_n})\|_{\mathcal{H}}^2 e^{-\mu\lambda_1(t-k)} \\
&\quad + 2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}(f(s), S_1(s,k)S_1(k,\tau_n)u_{\tau_n})ds \\
&\quad - 2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)S(k,\tau_n)(u_{\tau_n},v_{\tau_n})]]^2 ds.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Como $\widehat{B}_0$ é uma família *pullback*$\mathcal{D}$-absorvente, temos

$$
\limsup_{n'\to+\infty} e^{-\mu\lambda_1(t-k)}\|S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}})\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \rho(k)e^{-\mu\lambda_1(t-k)}. \tag{2.57}
$$

De (2.53) e da continuidade fraca (2.22), encontramos também que

$$
S_1(\cdot,k)S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}}) \rightharpoonup S_1(\cdot,k)(w_k,z_k) \quad \text{fraco em} \quad L^2(k,t;V). \tag{2.58}
$$

Levando em conta que $s \mapsto e^{\mu\lambda_1(T-s)}f \in L^2(k,t;V')$, encontramos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n'\to+\infty} &\int_k^t e^{\mu\lambda_1(T-s)}\langle f(s), S_1(s,k)S(k,\tau_{n'})(u_{\tau'_n},v_{\tau_{n'}})\rangle ds \\
&= \int_k^t e^{-\mu\lambda_1(T-s)}\langle f(s), S_1(s,k)(w_k,z_k)\rangle ds.
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Como a norma $[[\cdot]]$ é equivalente à norma usual do produto cartesiano $V \times V$ e $0 < e^{-\mu\lambda_1 t} \leqslant e^{-\mu\lambda_1(t-s)} \leqslant 1$, para todo $s \in [k,t]$, encontramos que

$$
\left(\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[\cdot]]^2 ds\right)^{1/2},
$$

é uma norma equivalente à norma usual de $L^2(k,t;V\times V)$. Logo, de (2.53) e (2.25) no Lema 2.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_k^t & e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)(w_k,z_k)]]^2 ds \\
&\leqslant \liminf_{n'\to+\infty}\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)S(k,\tau_n)(u_{\tau_n},v_{\tau_n})]]^2 ds,
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n'\to+\infty} -2&\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}})]]^2 ds \\
&= -\liminf_{n'\to+\infty} 2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)S(k,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}})]]^2 ds \\
&\leqslant -2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)(w_k,z_k)]]^2 ds.
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

De (2.57), (2.59) e (2.60), obtemos

$$\begin{aligned}\limsup_{n'\to+\infty}\|S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}})\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \rho(t)e^{-\mu\lambda_1(t-k)}&\\ +2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}\langle f(s),S_1(s,k)(w_k,z_k)\rangle ds&\\ -2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)(w_k,z_k)]]^2 ds.&\end{aligned} \tag{2.61}$$

Por outro lado, aplicando (2.51) a $(w,z)=S(t,k)(w_k,z_k)$ temos que

$$\begin{aligned}\|(w,z)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|S(t,k)(w_k,z_k)\|_{\mathcal{H}}^2\\ &= e^{-\mu\lambda_1(t-k)}\|(w_k,z_k)\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}\langle f(s),S_1(s,k)(w_k,z_k)\rangle ds\\ &\quad -2\int_k^t e^{-\mu\lambda_1(t-s)}[[S(s,k)(w_k,z_k)]]^2 ds.\end{aligned}$$

Combinando esta última equação e (2.61), encontramos

$$\begin{aligned}\limsup_{n'\to+\infty}\|S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}})\|_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant \|(w,z)\|_{\mathcal{H}}^2 + (\rho(t)-\|(w_k,z_k)\|_{\mathcal{H}}^2)e^{-\mu\lambda_1(t-k)}\\ &\leqslant \|(w,z)\|_{\mathcal{H}}^2 + \rho(t)e^{-\mu\lambda_1(t-k)},\end{aligned} \tag{2.62}$$

para todo $k\in\mathbb{Z}_-$, $k<t$.

Fazendo $k\to-\infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\limsup_{n'\to+\infty}\|S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}})\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|(w,z)\|_{\mathcal{H}}^2, \tag{2.63}$$

como queríamos mostrar. Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, de (2.54) e (2.63) concluímos que

$$S(t,\tau_{n'})(u_{\tau_{n'}},v_{\tau_{n'}}) \to (w,z) \quad \text{forte em} \quad \mathcal{H}. \tag{2.64}$$

Isto mostra que $\{S(t,k_n)u_n\}$ é precompacto a então, o processo $\{S(t,\tau);t\geqslant\tau\}$ é *pullback* $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto em $\mathcal{H}$. □

Demonstração do Teorema 2.1 (i). Como $S(\cdot,\cdot)$ admite uma família *pullback* $\mathcal{D}$-absorvente $\widehat{B}_0\in\mathcal{D}$ e é *pullback* $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto, podemos usar o Teorema 1.3 para concluir a existência de um atrator *pullback* minimal $\widehat{A}_{\mathcal{D}}\in\mathcal{D}$. A prova está completa.

Observação 2.1. *Observando que o domínio de atração $\mathcal{D}$ contém todas as famílias autônomas $\widehat{D}=\{D(t)=D:t\in\mathbb{R}\}$, se consideramos o domínio de atração sendo autônomo, isto é, o universo de atração consistindo apenas de famílias autônomas, com o mesmo argumento exposto acima, encontramos um atrator pullback $A(\cdot)$ para o processo (note que neste caso o atrator em geral não pertence ao universo de atração, pois este não é inclusão fechada). De (2.16) temos que $\bigcup_{s\leqslant t}B_0(s)$ é limitado para todo t. Logo $A(\cdot)=\widehat{A}(\cdot)$ (para mais detalhes veja [61], [22, Lemma 2.51]).*

2.4 Dimensão fractal do atrator *pullback*

Para estimarmos a dimensão fractal do atrator, usaremos o resultado do Teorema 1.5.

O sistema (2.11) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, t\right), \qquad \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \tag{2.65}$$

onde

$$F = \begin{pmatrix} -\mu A(\cdot) - B(\cdot,\cdot) & -A \\ \gamma I & -\delta I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.66}$$

Consideremos o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = H \times V$ com norma definida na seção anterior, fazendo $w = (u, v)$, e supondo que $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; V')$, dos resultados apresentados nas seções anteriores, temos que o problema (2.65) está nas condições de (1.2) da Seção 1.3 do Capítulo 1 e gera um processo de evolução

$$S(t,\tau)w_0 = w(t,\tau,w_0) = (u(t,\tau,(u_0,v_0)), v(t,\tau,(u_0,v_0))). \tag{2.67}$$

Consideremos o problema linearizado

$$\begin{cases} \widetilde{w}'(t) = F'(S(t,\tau)w_0, t)\widetilde{w}(t), \\ \widetilde{w}(\tau) = \xi \in \mathcal{H}, \end{cases} \tag{2.68}$$

onde

$$F'(u,t)\cdot = \begin{pmatrix} -\mu A(\cdot) - B(u,\cdot) - B(\cdot,u) & -A \\ \gamma I & -\delta I \end{pmatrix}.$$

De agora em diante, suporemos que

$$f \in L^\infty(-\infty, T^*; V') \quad \text{para algum} \quad T^* \in \mathbb{R}. \tag{2.69}$$

Para o problema (2.68), mostra-se que: dado $\tau \in \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{H}$, existe uma única solução

$$\widetilde{w}(t,\tau,\xi) \in L^\infty(\tau,T;H) \cap L^2(\tau,T;V) \times L^\infty(\tau,T;V) \quad \forall T > \tau.$$

além disso, $\widetilde{w} \in C([\tau,T];\mathcal{H})$ para todo $T > \tau$ e $\widetilde{w}(t)$ depende continuamente da condição inicial ξ para todo $t \geqslant \tau$.

Então, podemos definir um operador linear limitado $L(t,\tau,\xi) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $L(t,\tau,w_\tau)\xi = \widetilde{w}(t,\tau,w_\tau,\xi)$, que satisfaz a propriedade de diferenciabilidade uniforme de $S(\cdot,\cdot)$ em $A(\cdot)$:

Proposição 2.1. *Suponha que* $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; V')$ *e satisfaz* (2.69). *Seja* $\{K(\tau); \tau \leqslant T^*\}$ *uma família de conjuntos não-vazios de* $\mathcal{H}$ *tais que*

$$\bigcup_{\tau \leqslant T^*} K(\tau) \quad \textit{é limitado em } \mathcal{H}. \tag{2.70}$$

Então, para qualquer $w_0 \in K(\tau)$, *o processo* $S(\cdot,\cdot)$ *definido em* (2.67) *satisfaz*

$$\|S(t,\tau)\overline{w}_0 - S(t,\tau)w_0 - L(t,\tau,w_\tau)(\overline{w}_0 - w_0)\|_{\mathcal{H}} \leqslant g(t-\tau, \|\overline{w}_0 - w_0\|_{\mathcal{H}})\|\overline{w}_0 - w_0\|_{\mathcal{H}},$$

para todo $\tau \leqslant t \leqslant T^*$ *e todo* $\overline{w}_0 \in K(\tau)$. *Onde* $L(t,\tau;w_0)\xi = \widetilde{w}(t)$ *é a solução de* (2.68), *e* $g(s,\cdot)$ *é uma função não-decrescente para todo* $s \geqslant 0$ *e* $\lim_{r\to 0} g(s,r) = 0$.

Demonstração. Seja $\tau \leqslant T^*$ fixado, denotemos $S(t,\tau)w_0 = w(t)$, $S(t,\tau)\overline{w}_0 = \overline{w}(t)$ e $L(t,\tau,w_0)(\overline{w}_0 - w_0) = \widetilde{w}(t)$. Seja $z(t)$ definido por

$$z(t) = \overline{w}(t) - w(t) - \widetilde{w}(t), \quad \text{for} \quad t \geqslant \tau.$$

Denotando $\overline{w} = (\overline{u},\overline{v})$, $w = (u,v)$ e $\widetilde{w} = (\widetilde{u},\widetilde{v})$. Então, temos que $z(t) = (z_1(t), z_2(t)) \in L^2(\tau,T;V) \times L^\infty(\tau,T;V) \cap C([\tau,T];\mathcal{H})$ para todo $\tau \leqslant T$ e é solução fraca de

$$\begin{cases} z_1'(t) + \mu A z_1(t) + B(\overline{u}(t),\overline{u}(t)) - B(u(t),u(t)) - B(u(t),\widetilde{u}(t)), \\ -B(\widetilde{u}(t),u(t)) + Az_2(t) = 0, \\ z_2'(t) = \gamma z_1(t) - \delta z_2, \\ (z_1(\tau), z_2(\tau)) = (0,0). \end{cases} \tag{2.71}$$

Denotemos $\widetilde{z}(t) = (\widetilde{z}_1(t), \widetilde{z}_2(t)) = (\overline{u}(t) - u(t), \overline{v}(t) - v(t))$, depois de alguns cálculos, encontramos

$$z_1' + \mu A z_1 + B(u,z_1) + B(z_1,u) + B(\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_1) + Av = 0. \tag{2.72}$$

Tomando o produto interno em H da equação (2.72) com z_1 e o produto interno em V da segunda equação em (2.71) com z_2, e usando a estimativa (2.8), encontramos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|z_1|^2 + \frac{1}{\gamma}\|z_2\|^2\right) + \mu\|z_1\|^2 + \frac{\delta}{\gamma}\|z_2\|^2 \leqslant \sqrt{2}|z_1|\|z_1\|\|u\| + \sqrt{2}|\widetilde{z}_1|\|\widetilde{z}_1\|\|z_1\|.$$

Usando a desigualdade de Young, desprezando o termo $\frac{\delta}{\gamma}\|z_2\|^2$ e somando $\frac{2}{\mu\gamma}\|u\|^2\|z_2\|^2$ ao segundo membro, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|z_1|^2 + \frac{1}{\gamma}\|z_2\|^2\right) \leqslant \frac{2}{\mu}\|u\|^2\left(|z_1|^2 + \frac{1}{\gamma}\|z_2\|^2\right) + \frac{2}{\mu}|\widetilde{z}_1|^2\|\widetilde{z}_1\|^2.$$

Como $z_1(\tau) = 0$ e $z_2(\tau) = 0$, pelo lema de Gronwall, temos que

$$
\begin{aligned}
|z_1(t)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|z_2(t)\|^2 &\leqslant \int_\tau^t \exp\left(\int_s^t \frac{C_1}{\mu}\|u(\xi)\|^2 d\xi\right)|w(s)|^2\|w(s)\|^2 ds \\
&\leqslant \int_\tau^t \exp\left(\int_\tau^t \frac{C_1}{\mu}\|u(\xi)\|^2 d\xi\right)|w(s)|^2\|w(s)\|^2 ds. \qquad (2.73)
\end{aligned}
$$

De (2.69) e (2.70), temos que existe uma constante $C > 1$ tal que

$$
\|f\|^2_{L^\infty(-\infty,T^*;V')} \leqslant C\mu^3, \quad \text{e} \quad \|w_0\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant C\mu^2, \quad \forall w_0 \in \bigcup_{\tau \leqslant T^*} K(\tau). \tag{2.74}
$$

Assim, por (2.14) e (2.74) segue que

$$
\int_\tau^t \|u(s)\|^2 ds \leqslant C\mu(1 + t - \tau) \quad \forall \tau \leqslant t \leqslant T^*. \tag{2.75}
$$

É imediato que $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2)$ satisfaz

$$
\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{z}_1|^2 + \frac{1}{\gamma}\|\widetilde{z}_2\|^2\right) + \mu\|\widetilde{z}_1\|^2 + \frac{\delta}{\gamma}\|\widetilde{z}_2\|^2 \leqslant \frac{2}{\mu}|\widetilde{z}_1|^2\|\widetilde{z}_1\|^2. \tag{2.76}
$$

Descartando o termo $\mu\|\widetilde{z}_1\|^2 + \frac{\delta}{\gamma}\|\widetilde{z}_2\|^2$, somando $\frac{1}{\gamma\mu}\|w_\beta\|^2\|u\|^2$ no lado direito, e usando a desigualdade de Gronwall, encontramos

$$
|\widetilde{z}_1(t)|^2 \leqslant |\widetilde{z}_1(\tau)|^2 \exp\left(\frac{2}{\mu}\int_\tau^t \|u(s)\|^2 ds\right),
$$

agora, de (2.75), segue que

$$
|\widetilde{z}_1(t)|^2 \leqslant |\widetilde{z}_1(\tau)|^2 \exp(2C(1 + t - \tau)). \tag{2.77}
$$

Temos também que de (2.76), encontramos

$$
\begin{aligned}
\mu\int_\tau^t \|\widetilde{z}_1(\tau)\|^2 &\leqslant |\widetilde{z}_1(\tau)|^2 + \frac{1}{\mu}\int_\tau^t |\widetilde{z}_1(s)|^2\|\widetilde{z}_1(s)\|^2 ds \\
&\leqslant |\widetilde{z}_1(\tau)|^2[1 + C(1 + t - \tau)\exp(\alpha\mu C(1 + t - \tau))], \qquad (2.78)
\end{aligned}
$$

para todo $\tau \leqslant t \leqslant T^*$. Como $C > 1$, por (2.73), (2.75), (2.77) e (2.78), temos que

$$
|z_1(t)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|z_2\|^2 \leqslant \frac{6C}{\mu^2}|w(\tau)|^4 \exp(6C(1 + t - \tau)), \quad \forall \tau \leqslant t \leqslant T* .
$$

Relembrando a definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{H}$, acabamos de mostrar que

$$
\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{3C}{\mu}\|\widetilde{z}(\tau)\|^2_{\mathcal{H}} \exp(6C(1 + t - \tau)).
$$

Verifica-se facilmente que

$$
g(s, r) = \frac{r\sqrt{6C}}{\mu} \exp(2C(1 + s))
$$

satisfaz as condição desejadas. A demonstração está completa. $\square$

Teorema 2.2. *Suponha que $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$ e satisfaz (2.69). Seja $\{K(\tau); \tau \leqslant T^*\}$ uma família de subconjuntos compactos não-vazios de $\mathcal{H}$ tal que*

$$\bigcup_{\tau \leqslant T^*} K(\tau) \quad \textit{é relativamente compacto em } \mathcal{H}, \tag{2.79}$$

e

$$S(t, \tau)K(\tau) = K(t) \quad \forall \tau \leqslant t \leqslant T^* \tag{2.80}$$

onde $S(t, \tau)$ é o processo definido por (2.67). Então,

$$d_F(K(\tau)) \leqslant \max\left(1, \max\left(\frac{1}{\mu^4 \lambda_1}, \frac{\gamma}{\mu^3}\right) \widetilde{\kappa} \|f\|_{L^\infty(-\infty, T^*; V')}\right), \quad \forall \tau \leqslant T^*,$$

onde $\widetilde{\kappa}$ é a constante da desigualdade de Lieb-Thirring.

Demonstração. Sejam $w_0 = (u_0, v_0)$ e $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1), \ldots, \xi^m = (\xi_1^m, \xi_2^m)$, e $\tau \leqslant T^*$ fixado. Seja $X_m \subset \mathcal{H}$ o subespaço gerado por $\widetilde{w}_1(s) = (\widetilde{u}_1(s, \tau, w_0, \xi^1), \widetilde{v}_1(s, \tau, w_0, \xi^1)), \ldots,$ $\widetilde{w}_m(s) = (\widetilde{u}_m(s, \tau, w_0, \xi^m), \widetilde{v}_m(s, \tau, w_0, \xi^m))$ soluções do problema (2.68). Tomando as projeções $P_1(u, v) = u$ de $\mathcal{H}$ em H, e $P_2(u, v) = v$ de $\mathcal{H}$ em V, obtemos dois subespaços para os quais encontramos (usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt) bases ortonormais em H e em V, que denotaremos respectivamente por $\{e_j(s)\}_{j=1}^q$ e $\{f_j(s)\}_{j=1}^p$, $p + q = m$. Temos então que $\varphi_1(s) = (e_1(s), 0), \ldots,$ $\varphi_p(s) = (e_p(s), 0)$, $\varphi_{p+1}(s) =$ $(0, \frac{1}{\gamma} f_1(s)), \ldots, \varphi_m(s) = (0, \frac{1}{\gamma} f_q(s))$ é uma base para o subespaço X_m, ortonormal em $\mathcal{H}$. Como $\widetilde{w}_i(s) \in V \times V$ para quase todo $s \geqslant \tau$, temos que $\varphi_j(s)$ pertence a $V \times V$ para quase todo $s \geqslant \tau$. Temos então, para $F(u, t)$ definido em (2.66), que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \langle F'(S(s, \tau)w_\tau, s)\varphi_j, \varphi_j\rangle = \sum_{j=1}^p \left[-\mu\|e_j(s)\|^2 - b(e_j(s), u(s, \tau, w_\tau), e_j(s))\right] \\ - \sum_{j=1}^q \frac{1}{\gamma}\|f_j(s)\|^2,\end{aligned}$$

para quase todo $t > \tau$. Usando a desigualdade de Lieb-Thirring (veja [42] e suas referências), obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}|b(e_j(s), u(s, \tau, w_\tau), e_j(s))| &\leqslant \|u(s)\| \left(\widetilde{\kappa} \sum_{j=1}^p \|\varphi_j\|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{\widetilde{\kappa}}{2\mu}\|u(s)\|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^p \|e_j(s)\|^2.\end{aligned}$$

Assim, tomando $\alpha = \min\{\frac{\mu\lambda_1}{2}, \frac{1}{\gamma}\}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_m(F'(S(t,\tau)u_0,t)) &\leqslant \sum_{j+1}^{p} -\frac{\mu\lambda_1}{2}|e_j|^2 + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\mu}\|u(s,\tau,w_\tau)\|^2 - \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{\gamma}\|f_j\|^2 \\
&\leqslant -\left(\frac{\mu\lambda_1}{2}p + \frac{1}{\gamma}q\right) + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\mu}\|u(s)\|^2 \\
&\leqslant -\alpha m + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\mu}\|u(s)\|^2. \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

Da estimativa (2.14) temos

$$\int_\tau^t \|u(s)|^2 \leqslant \frac{1}{\mu}\left(|u(\tau)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(\tau)\|^2\right) + \frac{1}{\mu^2}\int \|f(s)\|^2_{V'}ds. \qquad (2.82)$$

Denotemos $M = \|f\|_{L^\infty(-\infty,T^*;V')}$. De (2.81) e (2.82) e de (2.79), temos, a seguinte estimativa para $\widetilde{q}_m$ definido em (1.8),

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}_m &\leqslant -\alpha m + \frac{\widetilde{\kappa}}{2\mu^3}\limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{\tau-T}^{\tau}\|f(s)\|^2_{V'} \qquad (2.83)\\
&\leqslant -\alpha m + \frac{\widetilde{\kappa}M}{2\mu^3}. \qquad (2.84)
\end{aligned}$$

Existem duas possibilidades:
Se $\widetilde{\kappa}M < \alpha 2\mu^3$, observe que de (2.69), temos que existe uma constante $C > 1$ tal que

$$\|f\|_{L^\infty(-\infty,T^*;H)} \leqslant C\frac{2\mu^3}{\widetilde{\kappa}},$$

tomando

$$q_m = -\alpha(m-1), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$n_0 = 1$, podemos aplicar o Teorema 1.5, para obter

$$d_F K(\tau) \leqslant 1, \quad \text{para todo } \tau \leqslant T^*.$$

Se, $\widetilde{\kappa}M \geqslant \alpha 2\mu^3$, tomamos

$$q_m = \alpha m + \frac{\widetilde{\kappa}M}{2\mu^3}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

e $n_0 = 1 + \left[\frac{\widetilde{\kappa}M}{\alpha 2\mu^3} - 1\right]$, onde $[r]$ denota a parte inteira do número real r. Aplicando o Teorema 1.5, encontramos

$$d_F K(\tau) \leqslant \frac{\widetilde{k}M}{\alpha 2\mu^3},$$

o que completa a demonstração do Teorema. □

Tomando como hipótese (2.6), o atrator *pullback* obtido na seção acima nos dá uma família de subconjuntos compactos não-vazios $\{K(\tau) = A(\tau)\}$ de $\mathcal{H}$ satisfazendo (2.80). Assim, resta mostrar (2.79).

Definição 2.2. *Dizemos que um processo $S(t,\tau) : X \to X$ é (uniformemente no passado) pullback assintoticamente compacto se existe um T^* tal que, para qualquer sequência $\{t_n, \tau_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}^2$ satisfazendo*

$$\tau_n \leqslant t_n \leqslant T^*, \qquad \lim_{n\to+\infty}(t_n - \tau_n) = +\infty, \tag{2.85}$$

e qualquer sequência limitada $\{x_{0n}\}_{n\geqslant 1} \subset X$, a sequência

$$S(t_n, \tau_n)x_{0n}$$

possui uma subsequência convergente em X.

Proposição 2.2. *Suponha que $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; V')$ e satisfaz (2.69). Então $S(t,\tau)$ é (uniformemente no passado) pullback assintoticamente compacto em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Para cada $n \geqslant 1$ definimos

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t+\tau_n) & \text{if } t < T^* - \tau_n, \\ 0 & \text{if } t > T^* - \tau_n. \end{cases}$$

Então, temos $f_n \in L^\infty(\mathbb{R}; V')$ e

$$\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R};V')} \leqslant \|f\|_{L^\infty(-\infty,T^*;V')}, \qquad \forall n \geqslant 1. \tag{2.86}$$

Considere $S_{f_n}(t,0)w_{0n}$, $t \geqslant 0$, onde $w_{0n} = (u_{0n}, v_{0n})$, a única solução do problema

$$\begin{cases} w = (u,v) \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \times L^2(0,T;V) \quad \forall T > 0, \\ u'(s) = -\mu Au(s) - B(u(s),u(s)) - Av(s) + f_n(s). \\ v'(s) = \gamma u(s) - \delta v(s), \\ (u_n(0), v_n(0)) = (u_{0n}, v_{0n}) \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.87}$$

Observemos que

$$S(s+\tau_n, \tau_n)w_{0n} = S_{f_n}(s,0)w_{0n}, \quad \text{para} \quad s \in [0, T^* - \tau_n].$$

De fato, denotando $\overline{w}(s) = S(s+\tau_n,\tau_n)w_{0n}$ a única solução de

$$\begin{cases} w \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H) \times L^2(0,T;V) \quad \forall T > 0, \\ \overline{u}'(s) = -\mu A\overline{u}(s) - B(\overline{u}(s),\overline{u}(s)) - A\overline{v}(s) + f(s+\tau_n), \\ \overline{v}'(s) = \gamma\overline{u}(s) - \delta\overline{v}(s), \\ (u_n(0), v_n(0)) = (u_{0n}, v_{0n}) \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{2.88}$$

e observando que $f_n(s) = f(s + \tau_n)$ para todo $s \in (0, T^* - \tau_n)$, concluímos que $w(s) = \overline{w}(s)$ para todo $s \in [0, T^* - \tau_n]$.

Então, tomando $s = t_n - \tau_n$, temos

$$S(t + s_n, s_n)u_{0n} = S_n(t, 0)u_{0n}, \quad \forall n \geqslant 1. \tag{2.89}$$

De (2.86) e (2.89) e um resultado análogo obtido para a equação Navier-Stokes em [46, Lemma 3.3], concluímos a prova. □

Daqui em diante, a demonstração do item *(iii)* do Teorema 2.1 é essencialmente o que foi feito em [57]. Repetiremos para fim de completude.

Teorema 2.3. *Suponha que* $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; V')$ *satisfaz* (2.69). *Então o atrator pullback* $A(\cdot)$ *obtido na seção anterior satisfaz*

$$\bigcup_{\tau \leqslant T^*} A(\tau) \quad \textit{é relativamente compacto em } \mathcal{H} \tag{2.90}$$

e

$$d_F A(\tau) \leqslant \max\left(1, \max\left(\frac{1}{\mu^4\lambda_1}, \frac{\gamma}{\mu^3}\right)\widetilde{\kappa}\|f\|_{L^\infty(-\infty,T^*;V')}\right), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Denotemos $M = \|f\|_{L^\infty(-\infty,T^*;V')}$. Assim, para $\rho_0(t)$ definido em (2.16), temos

$$\rho_0^2(t) \leqslant 1 + \frac{1}{\mu\lambda_1}\int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)}ds = 1 + \frac{M}{\mu\lambda_1\alpha}.$$

para todo $t \leqslant T^*$. Assim, para $\widehat{B}_0(t) = \{(u, v) \in \mathcal{H}; \|(u, v)\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \rho_0(t)\}$, temos que

$$B^* = \bigcup_{\tau \leqslant T^*} B_0(\tau) \quad \text{é limitado em } \mathcal{H}.$$

Denotemos por $\mathcal{M}$ o conjunto de todos os $y \in \mathcal{H}$ para os quais existe uma sequência $\{(t_n, \tau_n)\}_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{R}^2$ satisfazendo (2.85), e uma sequência $\{w_{0n}\} \subset B^*$, tais que $\lim_{n\to\infty} \|S(t, \tau_n)w_{0n} - y\|_{\mathcal{H}} = 0$. Observe primeiramente que

$$A(t) \subset \mathcal{M}, \quad \forall e \leqslant T^*. \tag{2.91}$$

De fato, pode definição de $A(\cdot)$, se $t \leqslant T^*$ e $y \in A(t)$, existe uma sequência $\tau_n \leqslant t$ e uma sequência $w_{0n} \in B(\tau_n) \subset B^*$, tais que $\lim_{n\to\infty} \|S(t, \tau_n)w_{0n} - y\|_{\mathcal{H}} = 0$. Consequentemente, tomando $t_n = t$ para todo $n \geqslant 1$, obtemos que $y \in \mathcal{M}$. Por outro lado, $\mathcal{M}$ é um subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}$. De fato, se $\{y_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{M}$ é uma dada sequência, para cada $k \geqslant 1$ podemos tomar um par $(t_k, \tau_k) \in \mathbb{R}^2$ e um elemento $w_{0k} \in B^*$ tal que $t_\leqslant T^*, t_k - \tau_k \geqslant$

e $\|S(t_k,\tau_k)w_{0k} - y_k\|_{\mathcal{H}} \leqslant 1/k$. Então, pela Proposição 2.2, posemos extrair um subsequência que converge em $\mathcal{H}$.

Como $\mathcal{M}$ é um subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}$, levando em conta (2.91), concluímos que $\cup_{\tau\leqslant T^*} A(\tau)$ é relativamente compacto.

Agora, do Teorema 2.2 desta seção, do item *(i)* do Teorema 2.1 Seção 2.2 e do fato de $S(t,\tau)$ ser Lipschitz em $A(\tau)$, segue ([68, Proposition 13.9]) o item *(ii)* do Teorema 2.1. $\square$

Capítulo 3

Atrator *pullback* aleatório para a equação estocástica de fluido Oldroyd não autônoma

Neste capítulo, estudamos atratores *pullback* aleatórios para o sistema dinâmico gerado pela equação de fluido Odroyd com termos estocásticos e não autônomos. Esta nova equação é estuda pela recente teoria de sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos (SDAN) que foi introduzida por Wang [76, 77].

3.1 Equação estocástica de fluido Oldroyd

Seja $\mathcal{O}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$ onde vale a desigualdade de Poincaré. Considere equação estocástica de fluido Oldroyd

$$\begin{cases} du + \left(-\mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u - \displaystyle\int_\tau^t \beta(t-s)\Delta u(s)ds\right)dt = f(t)dt + \psi d\omega(t), \\ \nabla\cdot u(x,t) = 0, \\ u(x,t)\mid_{\partial\mathcal{O}} = 0, \\ u(\tau,x) = u_\tau(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde f é uma força externa não autônoma $f\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R};V')$. Assumiremos que

$$\psi\in W^{1,\infty}(\mathcal{O}\cap D(A)).$$

O termo $\omega(t)$ é um movimento Browniano em um espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F};\mathbb{P})$, onde

$$\Omega = \{w\in C(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \omega(0)=0\},$$

a σ-álgebra $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra de Borel induzida pela topologia compacto-aberta de Ω, e seja $\mathbb{P}$ a medida de Wiener correspondente em $(\Omega, \mathcal{F})$. Definamos um grupo $\{\vartheta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ agindo em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ por

$$\vartheta_t \omega = \omega(\cdot + t) - \omega(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \;\; \omega \in \Omega. \tag{3.2}$$

Dado $\omega \in \Omega$, seja

$$z(\omega) = -\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau} dW(\tau) d\tau, \quad \forall w \in \Omega,$$

uma solução estacionária da equação unidimensional de Ornstein-Uhlenbeck

$$dz + \alpha z dt = d\omega.$$

Em outras palavras, temos

$$dz(\vartheta_t \omega) + \alpha z(\vartheta_t \omega) dt = d\omega(t). \tag{3.3}$$

Além disso, existe um subconjunto ϑ-invariante $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de medida completa tal que $z(\vartheta_t \omega)$ é contínua em t para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$ e a variável aleatória $|z(\cdot)|$ é temperada (veja [4, 24, 36]), isto é, para cada $\varepsilon > 0$ tem-se que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\varepsilon t} |z(\vartheta_{-t}\omega)| = 0, \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{3.4}$$

Além disso, temos

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{|z(\vartheta_t \omega)|}{|t|} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \int_0^t z(\vartheta_s \omega) ds = 0. \tag{3.5}$$

Daqui em diante, não faremos distinção entre $\tilde{\Omega}$ e Ω.

Analogamente ao que foi feito no capítulo anterior, consideremos o problema equivalente a (3.1):

$$\begin{cases} du - (\mu \Delta u + (u \cdot \nabla) u - A v)\, dt = f(t) dt + \psi d\omega(t), \\ dv = (\gamma u - \delta v) dt, \\ (\nabla \cdot u(x,t), \nabla \cdot v(x,t)) = (0,0), \\ (u(x,t), v(x,t)) \mid_{\partial\mathcal{O}} = 0, \\ (u(\tau,x), v(\tau,x)) = (u_0(x), v_0(x)). \end{cases} \tag{3.6}$$

Para estudar o comportamento dinâmico do problema (3.6), precisamos transformar o sistema estocástico em um determinístico com parâmetros aleatórios. Para este fim, introduzimos a variável $u(t) = \widetilde{u}(t) - z(\vartheta_t\omega)\psi$ e substituindo em (3.6) obtemos

$$\begin{cases} \widetilde{u}' + \mu A\widetilde{u} + B(\widetilde{u} + z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u} + z(\vartheta_t\omega)\psi) + Av = f(t) + \alpha z(\vartheta_t\omega)\psi - \mu z(\vartheta_t\omega)A\psi, \\ v' = \gamma\left(\widetilde{u} - z(\vartheta_t\omega)\psi\right) - \delta v, \\ (\widetilde{u}(\tau), v(\tau)) = (\widetilde{u}_0, v_0). \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $\widetilde{u}_0 = u_0 + z(\omega)$.

Levando em conta (3.3) temos que $(u, \overline{u})$ é uma solução formal para o problema (3.1).

Vejamos a definição de solução fraca para o problema (3.7).

Definição 3.1. *Sejam $f \in L^2_{\text{loc}}(\tau, +\infty; V')$ e $(\widetilde{u}_0, v_0) \in H \times V$. Um par de funções $(\widetilde{u}, v) \in L^\infty(\tau, \tau + T; H) \cap L^2(\tau, \tau + T; V) \times L^\infty(\tau, \tau + T; V)$ é uma solução fraca para a equação 3.7 se e somente se $(\widetilde{u}(\tau), v(\tau)) = (\widetilde{u}_\tau, v_\tau)$ e*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\widetilde{u}(t), \varphi) + \mu((\widetilde{u}(t), \varphi)) + \langle B(\widetilde{u}(t) + z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u}(t) + z(\vartheta_t\omega)\psi, \varphi\rangle \\ +((v, \varphi)) = \langle f(t) + \alpha z(\vartheta_t\omega)\psi - \mu z(\vartheta_t\omega)A\psi, \varphi\rangle, \\ \frac{d}{dt}((v(t), \varphi)) = \gamma((\widetilde{u}(t), \varphi)) - \gamma((z(\vartheta_t\omega)\psi, \varphi)) - \delta((v, \varphi)), \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in V$, no sentido de $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$.

De modo completamente análogo ao feito em [23, 16], obtemos o seguinte resultado de existência e unicidade.

Lema 3.1. *Suponha $f \in L^2_{\text{loc}}(\tau, +\infty; V')$. Para cada $\omega \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $(\widetilde{u}_0, v_0) \in H \times V$, o problema (3.7) possui uma única solução fraca $(\widetilde{u}(t, \tau, \omega, (\widetilde{u}_0, v_0)), \overline{u}(t, \tau, \omega, (\widetilde{u}_0, v_0)) \in C(\tau, +\infty, H) \cap L^2_{loc}(\tau, +\infty, V) \times C(\tau, +\infty, V)$. Além disso, a aplicação $(\tau, (\widetilde{u}_0, v_0)) \mapsto (\widetilde{u}(t, \cdot, \omega, \cdot), v(t, \cdot, \omega, \cdot)$ é $(\mathbb{R} \times (H \times V))$-contínua.*

Lema 3.2. *Seja o par $(\widetilde{u}(\cdot, (\widetilde{u}_0, v_0)), v(\cdot, (\widetilde{u}_\tau, v_0)))$ a solução fraca do problema (3.7) e seja $(\widetilde{u}_{\tau n}, v_{\tau n})$ uma sequência convergindo fraco em $\mathcal{H}$ para $(\widetilde{u}_0, v_0)$. Então, para todo $T > 0$, tem-se*

$$\widetilde{u}(t, (\widetilde{u}_{\tau n}, v_{\tau n})) \rightharpoonup \widetilde{u}(t, (\widetilde{u}_0, v_0)) \quad \textit{fraco em} \quad H, \quad \forall t \in [\tau, \tau + T] \tag{3.8}$$

$$v(t, (\widetilde{u}_{\tau n}, v_{\tau n})) \rightharpoonup v(t, (\widetilde{u}_0, v_0)) \quad \textit{fraco em} \quad V, \quad \forall t \in [\tau, \tau + T] \tag{3.9}$$

$$\widetilde{u}(\cdot, (\widetilde{u}_{\tau n}, v_{\tau n})) \rightharpoonup v(\cdot, (\widetilde{u}_0, v_0)) \quad \textit{fraco em} \quad L^2(\tau, \tau + T; V) \tag{3.10}$$

$$v(\cdot, (\widetilde{u}_{\tau n}, v_{\tau n})) \rightharpoonup v(\cdot, (\widetilde{u}_0, v_0)) \quad \textit{fraco em} \quad L^2(\tau, \tau + T; V). \tag{3.11}$$

A demonstração deste lema é essencialmente o que foi feito no Lema 2.2 do capítulo anterior.

3.2 Existência de atrator *pullback* aleatório

A seguir, definimos os fluxos de base e o cociclo para o problema (3.6). Definimos $\Sigma = \mathbb{R}$ e $\{\theta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ dado por $\theta_s(\tau) = \tau + s$. O fluxo $\{\vartheta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ em Ω é definido por (3.2) na seção anterior. Para fins de simplicidade, denotemos $\mathcal{H} = H \times V$, com a norma $\|(u,v)\|^2_{\mathcal{H}} := |u|^2_H + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2_V$ para $(u,v) \in \mathcal{H}$. Um SDAN $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ associado ao problema (3.6), é definido por

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t,\tau,\omega,(u_0,v_0)) &= u(t+\tau,\tau,\vartheta_{-\tau}\omega,(u_0,v_0)) \\
&:= \widetilde{u}(t+\tau,\tau,\vartheta_{-\tau}\omega,(u_0 - z(\omega)\psi, v_0)) - z(\vartheta_t\omega)\psi; \qquad (3.12) \\
\varphi_2(t,\tau,\omega,(u_0,v_0)) &:= v(t+\tau,\tau,\vartheta_{-\tau}\omega,(u_0,v_0)). \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

onde $(\widetilde{u}, v)$ é a solução fraca do problema (3.7). Levando em conta (3.3) e que $\psi \in D(A)$, vemos que $u(t)$ é uma solução do problema (3.1). Além disso, ϕ é um SDAN contínuo.

Seja $D = \{D_\tau(\omega); \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ uma família de subconjuntos limitados não vazios de $\mathcal{H}$ satisfazendo, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\kappa_0}{2}t}\|D_{\tau-t}(\vartheta_{-t}\omega)\|^2 = 0, \qquad (3.14)$$

onde $\|B\| = \sup_{\varphi\in B} \|\phi\|_{\mathcal{H}}$.

Denotemos por $\mathcal{D}$ a coleção de todas as famílias de subconjuntos limitados não vazios de $\mathcal{H}$ que satisfazem (3.14). Temos que $\mathcal{D}$ é vizinhança fechada.

Uma variável aleatória R , isto é, uma aplicação $R : \Omega \times \Sigma \to \mathbb{R}$ é dita temperada se para todo $\varepsilon > 0$, tem-se

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\varepsilon t} R(\tau - t, \vartheta_{-t}\omega) = 0.$$

Assumiremos que

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{\kappa_0}{2}(\tau-s)}\|f(s)\|^2_{V'}ds < +\infty \qquad \forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad (3.15)$$

onde $\kappa_0 = \min\{\lambda_1, 2\delta\}$ e que

$$\mu - \delta/\lambda_1 > 0.$$

O resultado principal deste capítulo é:

Teorema 3.1. *O SDAN ϕ definido em (3.12), gerado pela equação estocástica de fluido Oldroyd (3.1) com força externa satisfazendo (3.15), possui um $\mathcal{D}$-atrator pullback aleatório $A = \{A_\tau(\omega) : \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ em $\mathcal{H}$.*

Começamos a demonstração com a obtenção de um conjunto aleatório $\mathcal{D}$-*pullback* absorvente em $\mathcal{H}$ para ϕ.

Lema 3.3. *Suponha que (3.15) é satisfeita. Então para todo $\tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ e $D = \{D_\tau(\omega); \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\} \in \mathcal{D}$ existe $T = T(\tau, \omega, D) > 0$ tal que para todo $t \geqslant T$, a solução $(\widetilde{u}, v)$ da equação (3.7) com ω substituido por $\vartheta_{-\tau}\omega$ satisfaz*

$$|\widetilde{u}(\tau, \tau - t, \vartheta_{-\tau}\omega, x_{\tau-t})|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(\tau, \tau - t, \vartheta_{-\tau}\omega, x_{\tau-t}))\|^2 \leqslant 1 + R(\tau, \omega), \tag{3.16}$$

onde

$$R(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\int_s^0 -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}(c_1|z(\vartheta_s\omega)|^4 + c_2|z(\vartheta_s\omega)|^2)ds + \int_{-\infty}^{\tau} e^{\int_{s-\tau}^0 -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}\|f(s)\|_{V'}^2,$$

para todo $x_{\tau-t} = (\widetilde{u}_{\tau-t}, v_{\tau-t}) \in D_\tau(\omega)$ e $t \geqslant T$.

Demonstração. Tomando o produto interno em H, da primeira equação em (3.7) com $\widetilde{u}(t)$ e da segunda com $Av(t)$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{u}|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2\right) + \mu\|\widetilde{u}\|^2 + \frac{\delta}{\gamma}\|v\|^2 \leqslant |b(\widetilde{u} + z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u} + z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u})| + \|f(t)\|_{V'}\|\widetilde{u}\| + \frac{1}{\gamma}|z(\vartheta_t\omega)|\|\psi\|\|\widetilde{u}\| + \alpha|z(\vartheta_t\omega)||\psi||\widetilde{u}| + \mu|z(\vartheta_t\omega)|\|\psi\|\|\widetilde{u}\|.$$

Levando em conta que $b(\xi, \eta, \eta) = 0$ e $\psi \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$, segue que

$$|b(\widetilde{u}(t) + z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u}(t) + z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u})| = |b(\widetilde{u} + z(\vartheta_t\omega)\psi, z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u})| \leqslant \|\nabla\psi\|_{\mathbb{L}^\infty}|z(\vartheta_t\omega)||\widetilde{u}|^2 + |\psi|\|\nabla\psi\|_{\mathbb{L}^\infty}|z(\vartheta_t\omega)|^2|\widetilde{u}|.$$

Denotando $c_0 = \max(1, |\psi|)\|\nabla\psi\|_{\mathbb{L}^\infty}$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{u}|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2\right) + \mu\|\widetilde{u}\|^2 + \frac{2\delta}{\gamma}\|v\|^2 \leqslant c_0|z(\vartheta_t\omega)||\widetilde{u}|^2 + c_0|z(\vartheta_t\omega)|^2|\widetilde{u}| + \|f(t)\|_{V'}\|\widetilde{u}\| + \frac{1}{\gamma}|z(\vartheta_t\omega)|\|\psi\|\|\widetilde{u}\| + \alpha|z(\vartheta_t\omega)||\psi||\widetilde{u}| + \mu|z(\vartheta_t\omega)|\|\psi\|\|\widetilde{u}\|.$$

Usando as desigualdades de Young e de Poincaré, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{u}|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v\|^2\right) + \mu\lambda_1|\widetilde{u}|^2 + \frac{2\delta}{\gamma}\|\widetilde{u}\|^2 \leqslant 2c_0|z(\vartheta_t\omega)||\widetilde{u}|^2 + c_1|z(\vartheta_t\omega)|^4 + c_2|z(\vartheta_t\omega)|^2 + \frac{4}{\mu}\|f(t)\|_{V'}^2,$$

onde $c_1 = \dfrac{4c_0^2}{\mu\lambda_1}$ e $c_2 = 4\|\psi\|^2\left(\dfrac{1}{\mu\gamma^2} + \dfrac{\alpha^2}{\mu\lambda_1} + \mu\right)$.

Tomando $\kappa_0 = \min\{\mu\lambda_1, 2\delta\}$. Lembrando a definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, da equação acima encontramos

$$\frac{d}{dt}\|(\widetilde{u}(t), v(t))\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant (-\kappa_0 + c_0|z(\vartheta_t\omega)|)\,\|(\widetilde{u}(t), v(t))\|^2_{\mathcal{H}} + c_1|z(\vartheta_t(\omega)|^4 \\ +c_2|z(\vartheta_t\omega)|^2 + \frac{4}{\mu}\|f(t)\|^2_{V'}. \tag{3.17}$$

Denotando $N(\tau, \tau-t, \omega, x_{\tau-t}) = \|(\widetilde{u}(\tau, \tau-t, \omega, x_{\tau-t}), v(\tau, \tau-t, \omega, x_{\tau-t}))\|^2_{\mathcal{H}}$, e aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.17), encontramos

$$N(\tau, \tau-t, \omega, v_{\tau-t}) \leqslant e^{\int_{\tau-t}^{\tau} -\kappa_0 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|dr}\|x_{\tau-t}\|^2_{\mathcal{H}} \\ + \int_{\tau-t}^{\tau} e^{\int_s^{\tau} -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}\left(c_1|z(\vartheta_s\omega)|^4 + c_2|z(\vartheta_s\omega)|^2 + \frac{4}{\mu}\|f(s)\|^2_{V'}\right) ds.$$

Substituindo ω por $\vartheta_{-\tau}\omega$, temos que

$$\begin{aligned} N(\tau, \tau-t, \vartheta_{-\tau}\omega, v_{\tau-t}) &\leqslant e^{\int_{\tau-t}^{\tau} -\kappa_0 + c_0|z_{r-\tau}(\omega)|dr}|x_{\tau-t}|^2_{\mathcal{H}} \\ &\quad +c\int_{\tau-t}^{\tau} e^{\int_s^{\tau} -\kappa_0 + c_0|z_{r-\tau}(\omega)|dr}(c_1|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^4 + c_2|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^2 \\ &\qquad +\frac{4}{\mu}\|f(s)\|^2_{V'})ds \\ &\leqslant e^{\int_{-t}^{0} -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}|x_{\tau-t}|^2 \\ &\quad +c\int_{-\infty}^{0} e^{\int_s^{0} -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}(c_1|z(\vartheta_s\omega)|^4 + c_2|z(\vartheta_s\omega)|^2)ds \\ &\quad +\int_{-\infty}^{\tau} e^{\int_{s-\tau}^{0} -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}\|f(s)\|^2_{V'}ds. \end{aligned}$$

Como o processo $z(\vartheta_t\omega)$ é estacionário e ergódico, pelo Teorema ergódico, temos que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{-t}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|ds = \mathbb{E}(|z(\omega)|),$$

e portanto existe $t_0(\omega) > 0$ tal que

$$\int_{-t}^{0}|z(\vartheta_s\omega)|ds \leqslant (\mathbb{E}(|z(\omega)|) + 1)t \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} + 1\right)t \quad \forall t > t_0(\omega). \tag{3.18}$$

Daqui em diante, fixaremos $\alpha > 0$ de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} + 1 = \frac{\kappa_0}{2c_0}$$

assim, (3.18) implica

$$e^{\int_{-t}^{0} -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr} \leqslant e^{\frac{-\kappa_0}{2}t} \quad \forall t > t_0(\omega). \tag{3.19}$$

Como $x_{\tau-t} \in D(\tau-t, \vartheta_{-t}\omega)$ temos que

$$\limsup_{t\to+\infty} e^{-\kappa_0 t}\|x_{\tau-t}\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant \limsup_{t\to+\infty} \|D(\tau-t, \vartheta_{-t}\omega)\|^2 = 0.$$

Portanto, existe $T = T(\tau, \omega, D) \geqslant 0$ tal que, para todo $t \geqslant T$, $e^{-\frac{\kappa_0}{2}t} \leqslant 1$. Pelo mesmo motivo, temos que

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\int_s^0 -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}(c_1|z(\vartheta_s\omega)|^4 + c_2|z(\vartheta_s\omega)|^2)ds < +\infty,$$

e

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{\int_{s-\tau}^0 -\kappa_0 + c_0|z_r(\omega)|dr}\|f(s)\|^2_{V'}ds < +\infty.$$

Isto completa a demonstração. $\square$

O lema acima fornece uma estimativa para a solução (u, v) definida em (3.12)-(3.13).

Corolário 3.1. *Para cada $D \in \mathcal{D}$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T(D, \omega) > 1$, tal que, para todo $t \geqslant T(D, \omega)$ o sistema dinâmico aleatório não autônomo ϕ gerado pelo problema* (3.6)*, satisfaz*

$$\|\phi(\tau, \tau-t, \vartheta_{-\tau}\omega, (u_{\tau-t}, \overline{u}_{\tau-t}))\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant R(\tau, \omega) + c|z(\omega)|^2$$

onde $c = \|\psi\|^2$ e $R(\tau, \omega)$ dado no Lema 3.3 é uma variável aleatória não-autônoma temperada.

Agora provaremos a compacidade assintótica do cociclo ϕ.

Proposição 3.1. *O sistema dinâmico aleatório não autônomo ϕ gerado pelo problema* (3.6) *é $\mathcal{D}$-pullback assintoticamente compacto.*

Demonstração. Observe que o Corolário 3.1 implica que o conjunto aleatório $B = \{B_\tau(\omega) : \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ dado por $B_\tau(\omega) = \{y = (u, v) \in \mathcal{H} : \|y\|_{\mathcal{H}} \leqslant R(\tau, \omega) + c|z(\omega)|^2\}$ é $\mathcal{D}$-*pullback* absorvente em $\mathcal{H}$. Assim, para cada $D \in \mathcal{D}$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \Omega$, cada sequência $t_n \to +\infty$, e cada sequência $x_n \in D_{\tau-t_n}(\vartheta_{-t_n}\omega)$ temos que $\phi(t_n, \tau-t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, x_n) \in B_\tau(\omega)$ para n suficientemente grande. Como $B_\tau(\omega)$ é limitado em $\mathcal{H}$, é fracamente precompacto em $\mathcal{H}$. Então existe uma subsequência $\phi(t_{n'}, \tau-t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'})$ e $y_0 \in \mathcal{H}$ tal que

$$\phi(t_{n'}, \tau-t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) \rightharpoonup y_0 \quad \text{fraco em} \quad \mathcal{H}.$$

Provaremos que

$$\phi(t_{n'}, \tau-t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) \to y_0 \quad \text{forte em} \quad \mathcal{H}.$$

Como $z(w)\psi \in H$, então

$$\phi(t_{n'}, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) - (z(w)\psi, 0) \rightharpoonup y_0 - (z(w)\psi, 0) \quad \text{fraco em} \quad \mathcal{H}.$$

Em particular, temos

$$\|y_0 - (z(w)\psi, 0)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \liminf \|\phi(t_{n'}, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) - (z(w)\psi, 0)\|_{\mathcal{H}}.$$

Como $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert, precisamos apenas provar que

$$\limsup \|\phi(t_{n'}, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) - (z(\omega), 0)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|y_0 - (z(w)\psi, 0)\|_{\mathcal{H}} \tag{3.20}$$

para concluir que

$$\phi(t_{n'}, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) - (z(w)\psi, 0) \to y_0 - (z(w)\psi, 0) \quad \text{forte em} \quad \mathcal{H},$$

e então

$$\phi(t_{n'}, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) \to y_0 \quad \text{forte em} \quad \mathcal{H}.$$

Comecemos observando que $B_{\tau-1}(\vartheta_{-1}(\omega))$ absorve $D_{\tau-1}(\vartheta_{-1}(\omega))$, isto é, existe $T_D(\tau-1, \vartheta_{-1}(\omega))$ tal que

$$\phi(t_n - 1, \tau - t_n, \vartheta_{1-t_n}\vartheta_{-1}\omega, D_{\tau-t_n}(\vartheta_{1-t_n}\vartheta_{-1}\omega)) \subset B_{\tau-1}(\vartheta_{-1}\omega) \quad \forall t_n > T_D(\tau-1, \vartheta_{-1}(\omega)).$$

Logo,

$$\{\phi(t_n - 1, \tau - t_n, \vartheta_{1-t_n}\vartheta_{-1}\omega, x_n)\} \in B_{\tau-1}(\vartheta_{-1}(\omega)) \quad \forall t_n > T_D(\tau-1, \vartheta_{-1}(\omega)).$$

Assim, existe uma subsequência (n') e $y_{-1} \in B_{\tau-1}(\vartheta_{-1}(\omega))$ tais que

$$\phi(t_{n'} - 1, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) \rightharpoonup y_{-1} \quad \text{fraco em} \quad \mathcal{H}.$$

Da propriedade de cociclo temos

$$\phi(t_{n'}, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'}) = \phi(1, \tau - 1, \vartheta_{-1}\omega, \phi(-1 + t_{n'}, \tau - t_{n'}, \vartheta_{-t_{n'}}\omega, x_{n'})).$$

Logo, pelo Lema 3.2 temos que

$$\phi(1, \tau - 1, \vartheta_{-1}\omega, y_0) = y_{-1}.$$

Analogamente para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma subsequência $(n^{(k)})$ e $y_{-k} \in B_{\tau-k}(\vartheta_{-k}\omega)$ tais que

$$\phi(t_{n^{(k)}} - k, \tau - t_{n^{(k)}}, \vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega, x_{n^{(k)}}) \rightharpoonup y_{-k}. \tag{3.21}$$

Portanto, da propriedade de colciclo e do Lema 3.2, denotando $\lim_w$ o limite fraco em $\mathcal{H}$, obtemos

$$\begin{aligned} y_0 &= \lim_w \phi(t_{n^{(k)}}, \tau - t_{n^{(k)}}, \vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega, x_{n^{(k)}}) \\ &= \lim_w \phi(k, \tau - k, \vartheta_{-k}\omega, \phi(t_{n^{(k)}} - k, \tau - t_{n^{(k)}}, \vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega, x_{n^{(k)}})) \\ &= \phi(k, \tau - k, \vartheta_{-k}\omega, \lim_w \phi(t_{n^{(k)}} - k, \tau - t_{n^{(k)}}, \vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega, x_{n^{(k)}})) \\ &= \phi(k, \tau - k, \vartheta_{-k}\omega, y_{-k}), \end{aligned}$$

isto é,

$$y_0 = \phi(k, \tau - k, \vartheta_{-k}\omega, y_{-k}). \tag{3.22}$$

Antes de prosseguirmos, é importante observarmos que da equação acima (3.22) e da definição (3.12)-(3.13),

$$y_0 = (u(\tau, \tau - k, \vartheta_{-\tau}\omega, y_k), \overline{u}(\tau, \tau - k, \vartheta_{-\tau}\omega, y_k)).$$

Nesse sentido temos o seguinte lema que fornece estimativas para a solução $(v, \overline{u})$.

Lema 3.4. *Suponha que $(\widetilde{u}, v)$ é uma solução do problema (3.7) no intervalo $[\tau, +\infty)$. Denotando $g(t) = \alpha z(\vartheta_t\omega)\psi - \mu A z(\vartheta_t\omega)\psi - B(z(\vartheta_t\omega)\psi, z(\vartheta_t\omega)\psi)$, $h(t) = -z(\vartheta_t(\omega)A\psi$ e $[u]^2 := \mu\|u\|^2 - \delta|u|^2$. Então temos que, para todo $t \geqslant \tau$*

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}(t)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2 &\leqslant \left(|\widetilde{u}(\tau)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(\tau)\|^2\right) e^{-\kappa_0(t-\tau)+2c_0\int_\tau^t |z(\vartheta_s\omega)|ds} \\ &+ \int_\tau^t e^{-\kappa_0(t-s)+c_0\int_s^t |z(\vartheta_r\omega)|dr} \left[\frac{2}{\mu}\left(\|f(s)\|_{V'}^2 + \|g(s)\|_{V'}^2\right) + \frac{\gamma}{\delta}\|h(s)\|_{V'}^2\right] ds \end{aligned} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}(t)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2 = &\left(|\widetilde{u}(\tau)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(\tau)\|^2\right) e^{-2\delta(t-\tau)} \\ &- 2\int_\tau^t e^{-2\delta(t-s)} b(\widetilde{u}(s), z(\vartheta_s\omega)\psi, \widetilde{u}(s))ds \\ &+ 2\int_\tau^t e^{-2\delta(t-s)}\left(\langle f(s) + g(s), v(s)\rangle - [\widetilde{u}(s)]^2 + \langle h(s), v(s)\rangle\right) ds. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Demonstração. Multiplicando a primeira equação em (3.7) por $\widetilde{u}(t)$ e a segunda por $Av(t)$ e usando a notação acima, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{u}(t)|^2 + \frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2\right) + \mu\|\widetilde{u}(t)\|^2 + \frac{\delta}{\gamma}\|v(t)\|^2 &= -\langle B(\widetilde{u}(t), z(\vartheta_t\omega)\psi), \widetilde{u}(t)\rangle \\ &+\langle f(t), \widetilde{u}(t)\rangle + \langle \alpha z(\vartheta_t\omega)\psi - \mu A z(\vartheta_t\omega)\psi - B(z(\vartheta_t\omega)\psi, z(\vartheta_t\omega)\psi, \widetilde{u}(t)\rangle \\ &-\langle A z(\vartheta_t\omega)\psi, v(t)\rangle \\ &= -\langle B(\widetilde{u}(t), z(\vartheta_t\omega)\psi), \widetilde{u}(t)\rangle + \langle f(t), \widetilde{u}(t)\rangle + \langle g(t), \widetilde{u}(t)\rangle + \langle h(t), v(t)\rangle. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades Cauchy-Schwarz, de Hölder e de Young, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{u}(t)|^2+\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2\right)+\mu\|\widetilde{u}(t)\|^2+\frac{\delta}{\gamma}\|v(t)\|^2$$
$$\leqslant 2c_0|z(\vartheta_t\omega)||\widetilde{u}(t)|^2+\frac{2}{\mu}(\|f(t)\|_{V'}^2+\|g(t)\|_{V'}^2)+\frac{\gamma}{\delta}\|h(t)\|_{V'}^2.$$

Pela desigualdade de Poincaré, e levando em conta que $\kappa_0=\min\{\mu\lambda_1,2\delta\}$, temos

$$\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{u}(t)|^2+\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2\right)\leqslant(-\kappa_0+2c_0|z(\vartheta_t\omega)|)\left(|\widetilde{u}(t)|^2+\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2\right)$$
$$+\frac{2}{\mu}\left((\|f(t)\|_{V'}^2+\|g(t)\|_{V'}^2\right)+\frac{\gamma}{\delta}\|h(t)\|_{V'}^2.$$

Então a desigualdade (3.23) segue da desigualdade de Gronwall.

Suponhamos $\mu-\delta/\lambda_1>0$. Motivados por [69], definimos o produto escalar $[\cdot,\cdot]$ em V por

$$[u,v]:=\mu((u,v))-\delta(u,v).$$

e a norma $[\cdot]:=[\cdot,\cdot]^{1/2}$, que é uma norma equivalente à norma usual $\|\cdot\|$ de V.

Tomando novamente o produto inteno no sistema (3.7), somando e subtraindo $\delta|v(t)|^2$ ao primeiro membro, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left(|\widetilde{u}(t)|^2+\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2\right)+2\delta\left(|\widetilde{u}(t)|^2+\frac{1}{\gamma}\|v(t)\|^2\right)$$
$$=-2b(\widetilde{u}(t),z(\vartheta_t\omega)\psi,\widetilde{u}(t))$$
$$+2\left(\langle f(t)+g(t),\widetilde{u}(t)\rangle-2[\widetilde{u}(t)]^2+\langle h(t),v(t)\rangle\right).$$

Pela fórmula de variação de constantes, encontramos (3.24). □

Considere agora, $k\in\mathbb{N}$ fixo (porém arbitrário), e considere o problema (3.1) com tempo inicial $\tau-k$. Da propriedade de cociclo e da definição de ϕ, temos

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t_{n'},\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\quad=\|\phi(k,\tau-k,\vartheta_{-k}\omega,\phi(t_{n'}-k,\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'}))-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\quad=|v(\tau,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,\phi(t_{n'}-k,\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0))|^2\\
&\qquad+\frac{1}{\gamma}\|\overline{u}(\tau,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,\phi(t_{n'}-k,\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0))\|^2.
\end{aligned}\tag{3.25}$$

Seja $(\widetilde{u}(s),v(s))$ a solução de (3.7) no intervalo $[\tau-k,+\infty)$ com tempo inicial $\tau-k$ e com condição inicial $\phi(t_{n'}-k,\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0)$. Isto é, para $s>\tau-k$, seja

$$\widetilde{u}(s)=\widetilde{u}(s,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,\phi(t_{n'}-k,\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0)),$$
$$v(s)=v(s,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,\phi(t_{n'}-k,\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0)).$$

De (3.25) e (3.24) temos

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t_{n'},\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\quad= e^{-2\delta k}\|\phi(t_{n'}-k,\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\qquad -2\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}b(\widetilde{u}(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi,\widetilde{u}(s))ds\\
&\qquad +\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\left(\langle f(s)+g(s),\widetilde{u}(s)\rangle-[\widetilde{u}(s)]^2+\langle h(s),v(s)\rangle\right)ds.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

Para finalizar a prova é suficiente encontrar uma função $\chi\in L^1(-\infty,0)$ não negativa tal que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n^{(k)}\to\infty}&\|\phi(t_{n^{(k)}},\tau-t_{n^{(k)}},\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega,x_{n^{(k)}})-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\leqslant\int_{-\infty}^{-k}h(s)ds+\|y_0-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}\tag{3.27}$$

De fato, se definirmos um processo diagonal $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ por $m_j=j^j$, $j\in\mathbb{N}$, então para cada k, a sequência $(m_j)_{j=k}^{\infty}$ é uma subsequência da sequência $(n^{(k)})$ e portanto, por (3.27),

$$\limsup_{j}\|\phi(t_{m_j},\tau-t_{m_j},\vartheta_{m_j}\omega,x_{m_j})-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant\int_{-\infty}^{-k}h(s)ds+\|y_0-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

e tomando $k\to\infty$, temos

$$\limsup_{j}\|\phi(t_{m_j},\tau-t_{m_j},\vartheta_{m_j}\omega,x_{m_j})-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant\|y_0-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que prova a afirmação (3.20).

Provemos então a desigualdade (3.27) começando por estimar o primeiro termo da igualdade (3.26). Com efeito, se $-t_{n^{(k)}}<-k$, da definição (3.12)-(3.13) e da estimativa (3.23), temos

$$\begin{aligned}
&e^{-2\delta k}\|\phi(t_{n^{(k)}}-k,\tau-t_{n^{(k)}},\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega,x_{n^{(k)}})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\quad= e^{-2\delta k}\Big(\|\widetilde{u}(\tau-k,\tau-t_{n^{(k)}},\vartheta_{-\tau}\omega,x_{n^{(k)}}-(z(\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega)\psi,0))\|^2\\
&\qquad+\frac{1}{\gamma}\|v(\tau-k,\tau-t_{n^{(k)}},\vartheta_{-\tau}\omega,x_{n^{(k)}}-(z(\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega)\psi,0))\|^2\Big)\\
&\quad\leqslant e^{-2\delta k}\Big\{e^{-\kappa_0(t_{n^{(k)}}-k)+c_0\int_{\tau-t_{n^{(k)}}}^{\tau-k}|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|ds}\|x_{n^{(k)}}-(z(\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\qquad+\int_{\tau-t_{n^{(k)}}}^{\tau-k}e^{\int_s^{\tau-k}-\kappa_0+c_0|z(\vartheta_{r-\tau}\omega)|dr}\left[\frac{2}{\mu}\left(\|f(s)\|_{V'}^2+\|g(s)\|_{V'}^2\right)+\frac{\gamma}{\delta}\|h(s)\|_{V'}^2\right]ds\Big\}\\
&\quad\leqslant I_{n^{(k)}}+II_{n^{(k)}}+\frac{2}{\mu}(III_{n^{(k)}}+IV_{n^{(k)}})+\frac{\gamma}{\delta}V_{n^{(k)}},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_{n^{(k)}} &= |x_{n^{(k)}}|^2_{\mathcal{H}} e^{-\kappa_0 t_{n^{(k)}} + c_0 \int_{\tau - t_{n^{(k)}}}^{\tau-k} |z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|ds} = |x_{n^{(k)}}| e^{-\kappa_0 t_{n^{(k)}} + c_0 \int_{-t_{n^{(k)}}}^{-k} |z(\vartheta_s\omega)|ds}, \\
II_{n^{(k)}} &= |(z(\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega)\psi, 0)|^2_{\mathcal{H}} e^{-\kappa_0 t_{n^{(k)}} + c_0 \int_{-t_{n^{(k)}}}^{-k} |z(\vartheta_s\omega)|ds}, \\
III_{n^{(k)}} &= \int_{\tau - t_{n^{(k)}}}^{\tau-k} \|f(s)\|^2_{V'} e^{-\kappa_0(s-\tau) + \int_{s-\tau}^{-k} c_0|z(\vartheta_r\omega)|dr} ds, \\
IV_{n^{(k)}} &= \int_{\tau - t_{n^{(k)}}}^{\tau-k} \|g(s)\|^2_{V'} e^{-\kappa_0(s-\tau) + \int_{s-\tau}^{-k} c_0|z(\vartheta_r\omega)|dr} ds, \\
V_{n^{(k)}} &= \int_{\tau - t_{n^{(k)}}}^{\tau-k} \|h(s)\|^2_{V'} e^{-\kappa_0(s-\tau) + \int_{s-\tau}^{-k} c_0|z(\vartheta_r\omega)|dr} ds.
\end{aligned}$$

Provemos primeiramente que existe uma função não-negativa $\chi \in L^1(-\infty, 0)$ tal que

$$e^{-2\delta k}\|\phi(t_{n^{(k)}} - k, \tau - t_{n^{(k)}}, \vartheta_{t_{n^{(k)}}}, x_{t_{n^{(k)}}}) - (z(\vartheta_{-k}\omega)\psi, 0)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \int_{-\infty}^{-k} \chi(s)ds. \tag{3.28}$$

Isto será obtido pelos seguintes lemas:

Lema 3.5. $\limsup_{n^{(k)}\to\infty} I_{n^{(k)}} = 0.$

Demonstração. Segue da desigualdade (3.19). □

Lema 3.6. $\limsup_{n^{(k)}\to\infty} II_{n^{(k)}} = 0.$

Demonstração. Segue de (3.19) e de (3.4). □

Lema 3.7.

$$\limsup_{n^{(k)}\to\infty} \int_{\tau - t_{n^{(k)}}}^{\tau} \|f(s)\|^2_{V'} e^{-\kappa_0(\tau-s) + \int_{s-\tau}^{-k} c_0|z(\vartheta_r\omega)|dr} ds < \infty.$$

Demonstração. Segue de (3.15) e (3.19). □

Lema 3.8.

$$\limsup_{n^{(k)}\to\infty} \int_{\tau - t_{n^{(k)}}}^{\tau} \|g(s)\|^2_{V'} e^{\int_s^{\tau-k} -\kappa_0 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|dr} ds < \infty.$$

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned}
\|g(s)\|^2_{V'} &\leqslant 4\alpha^2|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi|^2_{V'} + 4\mu^2\|Az(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi\|^2_{V'} \\
&\quad + 2\|B(z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi, z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi)\|^2_{V'} \\
&\leqslant 4\alpha^2|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^2|\psi|^2 + 4\mu^2|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi|^2\|\psi\|^2 + 2C|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^4\|\psi\|^4.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.4)

$$\int_{\tau-t_{n^{(k)}}}^{\tau} \|g(s)\|_{V'}^2 e^{-\kappa_0(\tau-s)+\int_{s-\tau}^{-k} c_0|z(\vartheta_r\omega)|ds} ds$$

$$\leqslant 4(\alpha^2|\psi|^2+\mu^2\|\psi\|^2)\int_{-\infty}^{\tau}|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^2 e^{-\kappa_0(\tau-s)+\int_{s-\tau}^{-k} c_0|z(\vartheta_r\omega)|ds} ds$$

$$+ 2C\|\psi\|^4\int_{-\infty}^{\tau}|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^4 e^{-\kappa_0(\tau-s)+\int_{s-\tau}^{-k} c_0|z(\vartheta_r\omega)|ds} ds$$

$$< +\infty.$$

□

Lema 3.9.

$$\limsup_{n^{(k)}\to\infty}\int_{\tau-t_{n^{(k)}}}^{\tau}\|h(s)\|_{V'}^2 e^{\int_s^{\tau-k} -\kappa_0+c_0|z(\vartheta_r\omega)|dr} ds < \infty.$$

Demonstração. De fato, para $s \leqslant \tau$ temos

$$\begin{aligned}\|h(s)\|_{V'} &= \|-z(\vartheta_{s-\tau}\omega)A\psi\|_{V'}^2\\ &\leqslant C|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^2\|\psi\|^2.\end{aligned}$$

Logo, o lema segue de (3.4). □

Assim, concluímos a prova de (3.28).

Para finalizar a demonstração, denotemos $\widetilde{y}_k = y_k - (z(\vartheta_{-k}\omega)\psi, 0)$ e

$$\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s) = \widetilde{u}(s,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,\phi(t_{n^{(k)}}-k,\tau-t_{n^{(k)}},\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega,x_{n^{(k)}})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0)),$$
$$v^{n^{(k)}}(s) = v(s,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,\phi(t_{n^{(k)}}-k,\tau-t_{n^{(k)}},\vartheta_{-t_{n^{(k)}}}\omega,x_{n^{(k)}})-(z(\vartheta_{-k}\omega)\psi,0)),$$

e também,

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_k(s) &= \widetilde{u}_k(s,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,y_{-k}-(z(\omega)\psi,0)),\\ v_k(s) &= v_k(s,\tau-k,\vartheta_{-\tau}\omega,y_{-k}-(z(\omega)\psi,0)),\end{aligned}$$

para $s \in (\tau-k,\tau)$.

De (3.21) e do Lema 3.2, temos que

$$\widetilde{u}^{n^{(k)}}(\cdot) \rightharpoonup \widetilde{u}_k(\cdot) \quad \text{em} \quad L^2(\tau-k,\tau;V). \tag{3.29}$$

Como $e^{-2\delta}\cdot f(\cdot), e^{-2\delta}\cdot h(\cdot), e^{-2\delta}\cdot g(\cdot) \in L^2(\tau-k,\tau,V')$, temos

$$\lim_{n^{(k)}\to\infty}\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\langle f(s),\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)\rangle ds = \int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(t-s)}\langle f(s),\widetilde{u}_k(s)\rangle ds, \tag{3.30}$$

$$\lim_{n^{(k)}\to\infty}\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\langle g(s),\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)\rangle ds=\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(t-s)}\langle g(s),\widetilde{u}_k(s)\rangle ds, \tag{3.31}$$

e

$$\lim_{n^{(k)}\to\infty}\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\langle h(s),v^{n^{(k)}}(s)\rangle ds=\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\langle h(s),v_k(s)\rangle ds. \tag{3.32}$$

Provemos agora que

$$\begin{aligned}\lim_{n^{(k)}\to\infty}\int_{\tau-k}^{\tau} & e^{-2\delta(\tau-s)}b(\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi,\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s))ds\\ &=\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}b(\widetilde{u}_k(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi,\widetilde{u}_k(s))ds.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Tendo em vista (3.29), basta então mostrar que

$$e^{-2\delta(\tau-\cdot)}B(\widetilde{u}^{n^{(k)}}(\cdot),z(\vartheta_{\cdot-\tau}\omega)\psi)\to e^{-\delta(\tau-\cdot)}B(\widetilde{u}_k(\cdot),z(\vartheta_{\cdot-\tau}\omega)\psi)\quad \text{em}\ \ L^2(0,T;V').$$

De fato, usando a desigualdade de Hölder, para toda $\varphi\in\mathcal{V}$, temos

$$\begin{aligned}|\langle B(\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)-\widetilde{u}_k(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi),\varphi\rangle|^2&=|b(\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)-\widetilde{u}_k(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi),\varphi)|^2\\ &\leqslant c_0^2|z(\vartheta_{s-\tau}\omega)|^2|\varphi|^2\|\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)-\widetilde{u}_k(s)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathrm{supp}\varphi)},\end{aligned}$$

onde $\mathrm{supp}\varphi$ é o suporte de φ. É fácil ver que $\widetilde{u}^{n^{(k)}}\to\widetilde{u}_k$ forte em $L^2(\tau-k,\tau;\mathbb{L}^2(\mathrm{supp}\varphi))$. Logo, $\|\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)-\widetilde{u}_k(s)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathrm{supp}\varphi)}\to 0$ quase sempre em $[\tau-k,\tau]$, e assim,

$$|\langle B(\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)-\widetilde{u}_k(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi),\varphi\rangle|^2\to 0,\ \ \text{para quase todo}\ \ s\in[\tau-k,\tau].$$

Pela densidade de $\mathcal{V}$ em V e pela continuidade da forma trilinear b, o mesmo vale para toda $\varphi\in V$. Novamente, pela desigualdade de Hölder, e pelo fato de $\widetilde{u}^{n^{(k)}}-\widetilde{u}_k$ ser limitada em $L^\infty(\tau-k,\tau;H)$, segue do Teorema da convergência dominada que

$$\int_{\tau-k}^{\tau}|\langle B(\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)-\widetilde{u}_k(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi),\varphi\rangle|^2\to 0,\quad \forall\varphi\in L^2(\tau-k,\tau;V).$$

E assim está provado (3.33).

Como a norma $[\cdot]$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes em V e $e^{-2\delta\tau}\leqslant e^{-2\delta(\tau-s)}\leqslant 1$ para todo $s\in[\tau-k,\tau]$, temos que

$$\left(\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}[\cdot]^2\right)^{1/2}ds$$

é uma norma equivalente à norma usual de $L^2(\tau-k,\tau;V)$. Logo, de (3.29) segue que

$$\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}[\widetilde{u}_k(s)]^2ds\leqslant\liminf\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}[\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)]^2ds.$$

Assim,

$$\limsup_{n^{(k)}\to\infty}\left\{-\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}[\widetilde{u}^{n^{(k)}}(s)]^2 ds\right\} \leqslant -\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}[\widetilde{u}_k(s)]^2 ds. \tag{3.34}$$

Portanto, de (3.26), (3.28), (3.31), (3.32), (3.33) e (3.34), encontramos

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t_{n'},\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-(z(\omega)\psi,0)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-k}\chi(s)ds+\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}b(\widetilde{u}_k(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi,\widetilde{u}_k(s))ds\\
&+\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\langle f(s)+g(s),\widetilde{u}_k(s)\rangle-[\widetilde{u}_k(s)]^2ds\\
&+\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\langle h(s),v_k(s)\rangle ds.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Por outro lado, de (3.22) e (3.24), encontramos

$$\begin{aligned}
&\|y_0-z(\omega)\psi\|_{\mathcal{H}}^2=\|\phi(k,\tau-k,\vartheta_{-k},y_k)-z(\omega)\psi)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&=\|\widetilde{u}(\tau,\tau-k.\vartheta_{-\tau}\omega,y_{-k}-z(\omega)\psi)\|_{\mathcal{H}}^2\\
&=\|y_{-k}-z(\omega)\psi)\|_{\mathcal{H}}^2e^{-2\delta k}-2\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}b(\widetilde{u}_k(s),z(\vartheta_{s-\tau}\omega)\psi,\widetilde{u}_k(s))ds\\
&\quad+2\int_{\tau-k}^{\tau} e^{-2\delta(\tau-s)}\left(\langle f(s)+g(s),\widetilde{u}_k(s)\rangle+\langle h(s),v_k(s)\rangle-[\widetilde{u}_k(s)]^2\right)ds.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Combinando (3.35) e (3.36) obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t_{n'},\tau-t_{n'},\vartheta_{-t_{n'}}\omega,x_{n'})-z(\omega)\psi\|_{\mathcal{H}}^2\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-k}\chi(s)ds+\|y_0-z(\omega)\psi\|_{\mathcal{H}}^2-\|y_{-k}-z(\omega)\psi)\|_{\mathcal{H}}^2e^{-2\delta k}\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{-k}\chi(s)ds+\|y_0-z(\omega)\psi\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação (3.27) e assim finalizamos a demonstração da Proposição 3.1. □

Claramente, para cada $\tau\in\mathbb{R}$, $R(\tau,\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ é mensurável $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável, e como

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\kappa_0}{2}t}\|B(\tau-t,\vartheta_{-t}\omega)\| &= e^{-\frac{\kappa_0}{2}t}\int_{-\infty}^{\tau-t} e^{\int_{s-(\tau-t)}^{0}-\kappa_0+c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)|dr}\|f(s)\|^2ds\\
&\leqslant e^{-\frac{\kappa_0}{2}t}\int_{-\infty}^{\tau} e^{\int_{s-\tau}^{0}-\kappa_0+c_0|z(\vartheta r-t\omega)|dr}\|f(s)\|^2 \xrightarrow{t\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

temos que $B\in\mathcal{D}$. Portanto, a demonstração do Teorema 3.1 segue do Lema 3.3, da proposição 3.1 e do Teorema 1.6.

Capítulo 4

Atrator *pullback* para um problema de mistura de sólidos não autônomo com damping não linear

Neste capítulo, estudamos o comportamento assintótico de um problema unidimensional de mistura de sólidos com forças externas dependentes do tempo. Estabelecemos a existência de um atrator *pullback* minimal com relação a um universo de atração formado por conjuntos temperados definido pela condição de crescimento dos termos de fonte. Além disso, estudamos o comportamento semicontínuo superior dos atratores *pullback* quando as forças externas tendem a zero.

4.1 Sobre o modelo

A teoria de mistura de sólidos tem sido amplamente investigada nas últimas décadas, veja por exemplo, as referências [5, 9, 11, 12] para uma introdução detalhada. Neste capítulo, o nosso interesse é direcionado a um caso especial da teoria de mistura binária de sólidos com damping não linear, termos de fontes e forças externas não-autônomas. As propriedades qualitativas das soluções do problema definindo o tipo de material tem sido o escopo de muitas investigações. Em particular, vários resultados envolvendo existência, unicidade, dependência contínua e estabilidade assintótica podem ser encontrados na literatura [2, 3, 47, 62].

Recentemente, Santos e Freitas em [70] estudaram o problema unidimensional de mistura binária de sólidos com damping não linear e termos de fonte dado por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + g_1(u_t) + f_1(u,w) = 0, & \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} + g_2(w_t) + f_2(u,w) = 0, & \text{em } (0,L)\times(0,T), \end{cases} \tag{4.1}$$

com condições de fronteira de Dirichlet e condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = 0, \ t \geqslant 0, \\ u(0) = u_0 \in H_0^1(0,L), \ u_t(0) = u_1 \in L^2(0,L), \\ w(0) = w_0 \in H_0^1(0,L), \ w_t(0) = w_1 \in L^2(0,L). \end{cases} \tag{4.2}$$

As incógnitas u e w são, respectivamente, deslocamento do fluido e do material sólido elástico, $g_1(u_t), g_2(w_t)$ são damping não lineares e $f_1(u,w), f_2(u,w)$ são termos de fonte não lineares. Finalmente, a_{11}, a_{12}, a_{22} são constantes satisfazendo a realação

$$a_{11} > 0 \quad \text{and} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0. \tag{4.3}$$

Fazendo o uso a teoria de quase-estabilidade de Chueshov e Lasiecka [27], os autores mostraram que o sistema dinâmico gerado pelo problema (4.1)-(4.2) possui um atrator global regular com dimensão fractal finita. Além disso, foi provada a existência de um atrator exponencial generalizado.

Estamos interessados no comportamento assintótico do problema unidimensional de mistura de sólidos com damping não linear e forças externas não autônomas dado por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + g_1(u_t) + f_1(u,w) = h_1, & \text{em } (0,L), \ t \geqslant \tau, \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} + g_2(w_t) + f_2(u,w) = h_2, & \text{em } (0,L), \ t \geqslant \tau, \end{cases} \tag{4.4}$$

com condição de fronteira de Dirichlet e condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = 0, \ t > \tau, \\ u(\tau) = u_0^\tau \in H_0^1(0,L), \ u_t(\tau) = u_1^\tau \in L^2(0,L), \\ w(\tau) = \phi_0^\tau \in H_0^1(0,L), \ w_t(\tau) = w_1^\tau \in L^2(0,L). \end{cases} \tag{4.5}$$

Aqui, consideramos as funções $h_j = h_j(x,t)$, $j = 1,2$, como perturbações que dependem do tempo, o que torna o sistema não-autônomo, cujas hipóteses serão dadas na próxima seção.

O nosso principal objetivo é provar a existência de um $\mathcal{D}$-atrator *pullback* minimal para o processo de evolução gerado pelo problema (4.4)-(4.5) com respeito ao universo de atração dos conjuntos temperados definidos pelo crescimento dos termos de fonte $f_1(u,w)$, $f_2(u,w)$. Provaremos também a semicontinuidade superior do atrator *pullback* quando as perturbações não-autônomas tendem a zero. Em verdade, provaremos que a família de atratores *pullback* associados ao problema (4.4)-(4.5) com h_j substituído por ϵh_j converge para o correspondente atrator global compacto associado ao problema limite autônomo (4.1)-(4.2) quando $\epsilon \to 0$.

4.2 Preliminares e boa colocação

Nesta seção, estabelecemos a existência e unicidade de soluções fracas e fortes para o problema (4.4)-(4.5).

4.2.1 Hipóteses consideradas e notações

Inicialmente, apresentamos algumas notações e hipóteses. Usaremos as seguintes notações

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(0,L)}, \quad p \geqslant 1, \quad (u,v)_2 = (u,v)_{L^2(0,L)}.$$

Relembremos a desigualdade de Poincaré

$$\lambda_0 \|\varphi\|_2^2 \leqslant \|\varphi_x\|_2^2, \quad \forall \varphi \in H_0^1(0,L), \tag{4.6}$$

onde $\lambda_0 = \pi^2/L^2$.

Nossa análise é dada no seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} = V \times H \ \text{ onde } \ V = (H_0^1(0,L))^2 \ \text{ e } \ H = (L^2(0,L))^2. \tag{4.7}$$

Este é um espaço de Hilbert munido do produto interno: Dados $z^1, z^2 \in \mathcal{H}$ podemos escrever

$$z^i = (v^i, p^i) \in \mathcal{H} \ \text{ com } \ v^i = (u^i, w^i) \in V \ \ p^i = (\tilde{u}^i, \tilde{w}^i) \in H, \ i = 1, 2,$$

então definimos

$$(z^1, z^2)_{\mathcal{H}} = (v^1, v^2)_V + (p^1, p^2)_H, \tag{4.8}$$

com

$$\begin{aligned}(v^1, v^2)_V = {} & \Big(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\Big) \int_0^L w_x^1 w_x^2 \,\mathrm{d}x \\ & + \int_0^L \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x^1 + \sqrt{a_{11}} u_x^1 \right) \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x^2 + \sqrt{a_{11}} u_x^2 \right) \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4.9}$$

e

$$(p^1, p^2)_H = \rho_1 \int_0^L \tilde{u}^1 \tilde{u}^2 \,\mathrm{d}x + \rho_2 \int_0^L \tilde{w}^1 \tilde{w}^2 \,\mathrm{d}x.$$

A norma induzida por este produto é então dada por

$$\|(u, w, \tilde{u}, \tilde{w})\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|\tilde{u}\|_2^2 + \rho_2 \|\tilde{w}\|_2^2 + \Big(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\Big) \|w_x\|_2^2 + \left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2.$$

Lema 4.1. *Existe uma constante $\kappa_0 > 0$ tal que*

$$\kappa_0 \Big(||u_x||_2^2 + ||w_x||_2^2 \Big) \leqslant (a_{22} - a_{12}^2/a_{11}) ||w_x||_2^2 + \left|\left| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right|\right|_2^2. \tag{4.10}$$

Demonstração. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
&\|u_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \\
&\quad = \|u_x\|_2^2 + \left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x + \left(1 - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right) w_x - \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leqslant \|u_x\|_2^2 + 2\left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 \\
&\qquad + 2\left\| \left(1 - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}\right) w_x - \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 \\
&\leqslant (1 + 4a_{11})\|u_x\|_2^2 + 2\left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 \\
&\qquad + 4\left(1 - a_{12}/\sqrt{a_{11}}\right)^2 \|w_x\|_2^2 \\
&= 2\left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 + 4\left(1 - a_{12}/\sqrt{a_{11}}\right)^2 \|w_x\|_2^2 \\
&\qquad + \frac{1 + 4a_{11}}{a_{11}} \left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x \right\|_2^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leqslant 2\left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 + 4\left(1 - a_{12}/\sqrt{a_{11}}\right)^2 \|w_x\|_2^2 \\
&\qquad + \frac{1 + 4a_{11}}{a_{11}} \left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x - \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x \right\|_2^2,
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leqslant 2\left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 + 4\left(1 - a_{12}/\sqrt{a_{11}}\right)^2 \|w_x\|_2^2 \\
&\qquad + \frac{2(1 + 4a_{11})}{a_{11}} \left(\left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 + \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \|w_x\|_2^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Agrupando os termos em (4.11) temos

$$\begin{aligned}
\|u_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leqslant \frac{2(1 + 5a_{11})}{a_{11}} \left\| \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x \right\|_2^2 \\
&\qquad + \frac{4a_{11}^2 \left(1 - a_{12}/\sqrt{a_{11}}\right)^2 + 2a_{12}^2(1 + 4a_{11})}{a_{11}^2} \|w_x\|_2^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$c := \max\left\{\frac{2(1+5a_{11})}{a_{11}}, \frac{4a_{11}^2(1-a_{12}/\sqrt{a_{11}})^2+2a_{12}^2(1+4a_{11})}{a_{11}^2(a_{22}-a_{12}^2/a_{11})}\right\}$$

concluímos que

$$\frac{1}{c}\left(\|u_x\|_2^2+\|w_x\|_2^2\right) \leqslant (a_{22}-a_{12}^2/a_{11})\|w_x\|_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x+\sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2.$$

A prova está completa. □

Observação 4.1. Combinando (4.6) e (4.10), obtemos a seguinte desigualdade do tipo Poincaré

$$\|u\|_2^2+\|w\|_2^2 \leqslant \gamma\left(\left(a_{22}-a_{12}^2/a_{11}\right)\|w_x\|_2^2+\left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x+\sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2\right), \tag{4.12}$$

onde $\gamma = (\kappa_0\lambda_0)^{-1}$.

Motivados por [59] consideraremos a seguinte hipótese sobre os termos não lineares e forças externas.

Hipótese 4.2 (Damping, fontes e forças externas)**.**

(i) ***Damping:*** *$g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R})$ são funções crescentes com $g_1(0) = g_2(0) = 0$. Além disso, existem $M_1, M_2 > 0$ tais que, para $j = 1, 2$*

$$M_1 \leqslant g_j'(s) \leqslant M_2, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

(ii) ***Fontes:*** *Existe uma função $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que*

$$\nabla F = (f_1, f_2). \tag{4.14}$$

- *Existem $p \geqslant 1$ e $C > 0$ tais que, para $j = 1, 2$*

$$|\nabla f_j(u,w)| \leqslant C\left(|u|^{p-1}+|w|^{p-1}+1\right). \tag{4.15}$$

- *Existem $\beta, m_F > 0$ com*

$$0 \leqslant \beta < \frac{1}{2\gamma}, \tag{4.16}$$

tais que

$$F(u,w) \geqslant -\beta\left(|u|^2+|w|^2\right) - m_F. \tag{4.17}$$

Além disso, assumiremos que

$$\nabla F(u,w)\cdot(u,w) - F(u,w) \geqslant -\beta\left(|u|^2+|w|^2\right) - m_F. \tag{4.18}$$

(iii) ***Forças externas:*** *Para as forças externas, assumiremos que* $h_1, h_2 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(0,L))$ *e*

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma_0(t-s)} \left(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2\right) \mathrm{d}s < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.19}$$

com $\sigma_0 \in (0, \sigma_1]$*, onde* $\sigma_1 > 0$ *é uma constante dependendo apenas dos parâmetros do modelo especificado mais adiante no Lema 4.6.*

Observação 4.3. Observe que a hipótese (4.13) implica a propriedade de monotonicidade, isto é,

$$(g_j(u) - g_j(v))(u - v) \geqslant M_1|u - v|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},\ j = 1, 2. \tag{4.20}$$

4.2.2 Existência e unicidade de soluções

Com o objetivo de descrevermos os resultados, introduzimos a definição de solução generalizada para o problema (4.4)-(4.5).

Definição 4.1. *Uma função* $z = (u, w, u_t, w_t)$ *é chamada de solução generalizada (ou fraca) para* (4.4)-(4.5) *se*

$$z \in C([\tau, \infty); \mathcal{H}), \quad z(\tau) = (u_0^\tau, w_0^\tau, u_1^\tau, w_1^\tau) \in \mathcal{H},$$

e satisfaz a seguinte identidade no sentido das distribuições

$$\begin{aligned} &\rho_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_t, \varphi)_2 + \rho_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_t, \psi)_2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)\left(w_x, \psi_x\right)_2 \\ &+ \left(\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x, \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \psi_x + \sqrt{a_{11}} \varphi_x\right)_2 \\ &+ \left(g_1(u_t), \varphi\right)_2 + \left(g_2(w_t), \psi\right)_2 + \left(f_1(u, w), \varphi\right)_2 + \left(f_2(u, w), \psi\right)_2 \\ &= (h_1, \varphi)_2 + (h_2, \psi)_2, \quad \forall \varphi, \psi \in H_0^1(0, L). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Se além disso uma solução fraca satisfizer

$$z \in C\left([\tau, \infty); \mathcal{H}_1\right) \cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}([\tau, \infty); \mathcal{H}),$$

onde

$$\mathcal{H}_1 = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))^2 \times (H_0^1(0, L))^2,$$

então ela é chamada de solução forte.

Definimos a energia total do sistema por

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + \int_0^L F(u(t), w(t))\, \mathrm{d}x, \tag{4.22}$$

onde $E(t)$ é a energia linear dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\|(u, w, u_t, w_t)\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Lema 4.2. *Seja $z = (u, w, u_t, w_t)$ uma solução forte de (4.4)-(4.5), então a energia total satisfaz*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) &= -\int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(w_t)w_t)\,\mathrm{d}x + \int_0^L (h_1 u_t + h_2 w_t)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant -\frac{M_1}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + \frac{1}{2M_1}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Demonstração. Multiplicando a primeira equação em (4.4) por u_t e integrando por partes sobre $[0, L]$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\rho_1}{2}\int_0^L |u_t|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{a_{11}}{2}\int_0^L |u_x|^2\,\mathrm{d}x + a_{12}\int_0^L w_x u_{xt}\,\mathrm{d}x \\ &\quad+ \int_0^L g(u_t)u_t\,\mathrm{d}x + \int_0^L f_1(u, w)u_t = \int_0^L h_1 u_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Multiplicando agora por w_t, a segunda equação em (4.4), encontramos

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\rho_2}{2}\int_0^L |w_t|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^L u_x w_{xt}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{a_{22}}{2}\int_0^L |w_x|^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad+ \int_0^L g_2(w_t)w_t\,\mathrm{d}x + \int_0^L f_2(u, w)w_t = \int_0^L h_2 w_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Somando (4.24) e (4.25), e usando (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho_1|u_t|^2\,\mathrm{d}x + \rho_2|w_t|^2\right)\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{a_{11}}{2}\int_0^L |u_x|^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_0^L \left(2a_{12}w_x u_x + a_{22}|w_x|^2\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^L \nabla F(u, w)\cdot(u_t, w_t)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(w_t)w_t)\,\mathrm{d}x + \int_0^L (h_1 u_t + h_2 w_t)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho_1|u_t|^2\,\mathrm{d}x + \rho_2|w_t|^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)|w_x|^2 + \left|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right|^2 + 2F(u, w)\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(w_t)w_t)\,\mathrm{d}x + \int_0^L (h_1 u_t + h_2 w_t)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Isto prova que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) = -\int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(w_t)w_t)\,\mathrm{d}x + \int_0^L (h_1 u_t + h_2 w_t)\,\mathrm{d}x.$$

De (4.13) e da desigualdade de Young, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) &= -\int_0^L (g_1(u_t)u_t + g_2(w_t)w_t)\,\mathrm{d}x + \int_0^L (h_1u_t + h_2w_t)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant -M_1(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + \int_0^L (h_1u_t + h_2w_t)\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant -\frac{M_1}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + \frac{1}{2M_1}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2).\end{aligned}$$

A demonstração está completa. □

4.2.3 Formulação de semigrupos

Nesta subseção, mostraremos que o sistema (4.4)-(4.5) é bem posto usando a teoria de semigrupos não lineares e operadores monótonos (veja por exemplo [25, 6]).

O problema (4.4)-(4.5) pode ser escrito como um problema de Cauchy da forma

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}z(t) = \mathcal{F}(t, z(t)),\ t > \tau,\\ z(\tau) = z_\tau \in \mathcal{H},\end{cases} \tag{4.26}$$

onde

$$z(t) = (u(t), w(t), \tilde{u}(t), \tilde{w}(t)) \in \mathcal{H}, \quad \tilde{u} = u_t, \quad \tilde{w} = w_t,$$

com $\mathcal{H}$ definido em (4.7), e

$$z_\tau = (u_0^\tau, w_0^\tau, u_1^\tau, w_1^\tau) \in \mathcal{H},$$

é a condição inicial, e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador não linear definido por

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} -\tilde{u}\\ -\tilde{w}\\ -\frac{a_{11}}{\rho_1}u_{xx} - \frac{a_{12}}{\rho_1}w_{xx} + \frac{1}{\rho_1}g_1(\tilde{u})\\ -\frac{a_{12}}{\rho_2}u_{xx} - \frac{a_{22}}{\rho_2}w_{xx} + \frac{1}{\rho_2}g_2(\tilde{w}). \end{pmatrix}.$$

O domínio de $\mathcal{A}$ é dado por

$$D(\mathcal{A}) = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))^2 \times (H_0^1(0, L))^2,$$

e $\mathcal{F} : [\tau, \infty) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é definido por

$$\mathcal{F}(t, z) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -\frac{1}{\rho_1}(f_1(u, w) - h_1(t))\\ -\frac{1}{\rho_2}(f_2(u, w) - h_2(t)) \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Lema 4.3. *O operador $\mathcal{A}$ é maximal monótono no espaço de fase $\mathcal{H}$.*

Demonstração. A prova é motivada por [67] e também por [37]. Dividimos a demonstração em alguns passos.

Passo 1. Adotamos a notação

$$z = (v, p) \in \mathcal{H}, \quad v = (u, w) \in V, \quad p = (\tilde{u}, \tilde{w}) \in H.$$

Então podemos escrever $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A}z = \begin{pmatrix} -p \\ \mathcal{B}(v) + \mathcal{G}(p) \end{pmatrix}, \tag{4.28}$$

onde $B : D(\mathcal{B}) \subset V \to H$ e $\mathcal{G} : H \to H$ são dados por

$$\mathcal{B}v = \begin{pmatrix} -\frac{a_{11}}{\rho_1} u_{xx} - \frac{a_{12}}{\rho_1} w_{xx} \\ -\frac{a_{12}}{\rho_2} u_{xx} - \frac{a_{22}}{\rho_2} w_{xx} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}p = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1} g_1(\tilde{u}) \\ \frac{1}{\rho_2} g_2(\tilde{w}) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$D(\mathcal{B}) = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L))^2.$$

Observe que por definição do produto interno (4.8), e o fato que $V \subset H \cong H' \subset V'$, temos

$$\langle \mathcal{B}(u), v \rangle = (u, v)_V, \ \forall u, v \in V \quad \text{e} \quad \langle u, v \rangle = (u, v)_H, \ \forall u \in \ H, \ v \in V. \tag{4.29}$$

Passo 2: $\mathcal{A}$ é maximal monótono . De fato, por (4.28) e pela definição do produto interno (4.8), para todo $z^1 = (v^1, p^1), z^2 = (v^2, p^2) \in D(\mathcal{A})$, encontramos

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}z^1 - \mathcal{A}z^2, z^1 - z^2)_{\mathcal{H}} &= -(p^1 - p^2, v^1 - v^2)_V + (v^1 - v^2, p^1 - p^2)_V \\ &\quad + (\mathcal{G}p^1 - \mathcal{G}p^2 - p^1 - p^2)_{\mathcal{H}} \\ &= (\mathcal{G}p^1 - \mathcal{G}p^2 - p^1 - p^2)_{\mathcal{H}} \geqslant 0,\end{aligned}$$

e assim $\mathcal{A}$ é monótono. Para provar que $\mathcal{A}$ é maximal monótono, precisamos provar que $R(\mathcal{A} + I) = \mathcal{H}$. Seja $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H}$. Provaremos que existe $z = (v, p) \in D(\mathcal{A})$ tal que $(\mathcal{A} + I)z = h$, isto é,

$$\begin{cases} -p + v = h_1, \\ \mathcal{B}(v) + \mathcal{G}(p) + p = h_2. \end{cases} \tag{4.30}$$

Observe que (4.30) é equivalente a

$$(\mathcal{B} + I)p + \mathcal{G}(p) = h_2 - \mathcal{B}(h_1) \in V'. \tag{4.31}$$

Portanto, precisamos provar que o operador $\mathcal{S} : V \to V'$ dado por

$$\mathcal{S}p = (\mathcal{B} + I)p + \mathcal{G}(p)$$

é sobrejetivo. Tendo em vista [6, Corollary 2.2] é suficiente mostrar que $\mathcal{S}$ é maximal monótono e coercivo.

Passo 3: $(\mathcal{B} + I)$ **é maximal monótono e coercivo.** Graças a [6, Theorem 2.4] precisamos somente provar que $\mathcal{G}$ é maximal monótono e hemicontínuo.

Sejam $v^1, v^2 \in V$. Então por (4.29) segue-se que

$$\begin{aligned}
&\langle(\mathcal{B} + I)(v^1 - v^2), v^1 - v^2, v^1 - v^2\rangle \\
&= \langle\mathcal{B}(v^1 - v^2), v^1 - v^2\rangle + \langle v^1 - v^2, v^1 - v^2\rangle \\
&= \|v^1 - v^2\|_V^2 + \|v^1 - v^2\|_H^2.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto $(\mathcal{B} + I)$ é monótono.

Agora, provaremos que $(\mathcal{B} + I)$ é hemicontínuo. De fato, sejam $v, p, \psi \in V$, then

$$|\langle(\mathcal{B} + I)(v + tp), \psi\rangle - \langle(\mathcal{B} + I)(v), \psi\rangle| \leqslant |t||(p, \psi)_V + (p, \psi)_H|.$$

Portanto

$$\lim_{t\to 0}\langle(\mathcal{B} + I)(v + tp), \psi\rangle = \langle(\mathcal{B} + I)(v), \psi\rangle,$$

provando que $(\mathcal{B} + I) : V \to V'$ é hemicontínuo.

Passo 4: $\mathcal{G}$ **é maximal monótono.** Dado $v^i \in V$, temos que $\mathcal{G}(v^i) \in H$, $i = 1, 2$. Então, pela monotonicidade de $\mathcal{G}$, vemos que

$$\langle\mathcal{G}(v^1) - \mathcal{G}(v^2), v^1 - v^2\rangle = \big(\mathcal{G}(v^1) - \mathcal{G}(v^2), v^1 - v^2\big)_H \geqslant 0,$$

e assim $\mathcal{G}$ é monótono.

Agora, provaremos que $\mathcal{G}$ é hemicontínuo. Dados $v = (u^1, w^1), p = (u^2, w^2), \psi = (u^3, w^3) \in V$. Então

$$\langle\mathcal{G}(v + tp), \psi\rangle = \int_0^L g_1(u^1 + tu^2)u^3 \,\mathrm{d}x + \int_0^L g_2(w^1 + tw^2)w^3 \,\mathrm{d}x. \tag{4.33}$$

Pela continuidade de g_1 temos

$$g_1(u^1 + tu^2)u^3 \to g_1(u^1)u^3 \quad \text{quando } t \to 0 \text{ q.s. em } (0, L).$$

Além disso, pela hipótese sobre o damping e pela imersão contínua $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$, para $|t| \leqslant 1$ obtemos

$$|g_1(u^1 + tu^2)u^3| \leqslant M_1(|u^1 + tu^2| + 1)|u^3| \leqslant M_1(\|u^1\|_\infty + \|u^2\|_\infty + 1)\|u^3\|_\infty.$$

Então, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_0^L g_1(u^1+tu^2)u^3\,\mathrm{d}x = \int_0^L g_1(u^1)u^3\,\mathrm{d}x. \tag{4.34}$$

Analogamente temos

$$\lim_{t\to 0}\int_0^L g_2(w^1+tw^2)w^3\,\mathrm{d}x = \int_0^L g_2(w^1)w^3\,\mathrm{d}x. \tag{4.35}$$

Combinando (4.33), (4.34) e (4.35) concluímos que

$$\lim_{t\to 0}\langle \mathcal{G}(v+tp),\psi\rangle = \langle \mathcal{G}(v),\psi\rangle,$$

e assim $\mathcal{G}$ é hemicontínuo; a maximal monotonicidade então segue.

Step 5: Conclusão que $\mathcal{A}$ é maximal monótono. Como $(\mathcal{B}+I)$ e $\mathcal{G}$ são ambos maximais monótonos e $\operatorname{int}(D(\mathcal{B}+I))\cap D(\mathcal{G})\neq\emptyset$, por [6, Theorem 2.6], concluímos que $\mathcal{S}=(\mathcal{B}+I)+\mathcal{G}$ é maximal monótono. A coercivity de $\mathcal{S}$ segue imediatamente de (4.32). Portanto, $\mathcal{S}$ é maximal monótono e coercivo, o que mostra a sobrejetividade de $\mathcal{S}$, isto é, existe $p\in D(\mathcal{S})=V$ satisfazendo a equação (4.31). Consequentemente

$$v = p + h_1 \in V.$$

Por outro lado, pela segunda equação em (4.30) e devido a hipótese de crescimento sobre o damping teremos

$$\mathcal{B}(v) = h_2 - \mathcal{G}(p) - p \in H,$$

e assim $v\in D(\mathcal{B}) = (H_2(0,L)\cap H_0^1(0,L))^2$. Portanto concluímos que existe $z=(v,p)\in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(\mathcal{A}+I)z = h,$$

o que mostra que $\mathcal{A}$ é maximal monótono. A prova está completa. □

Lema 4.4. *Para cada $t\in[\tau,\infty)$ fixado, o operador $\mathcal{F}(t,\cdot):\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ é localmente Lipschitz contínuo.*

Demonstração. Seja $z=(u,w,u',w')$, $\tilde{z}=(\tilde{u},\tilde{w},\tilde{u}',\tilde{w}')\in\mathcal{H}$ tal que $\|z\|_{\mathcal{H}},\|\tilde{z}\|_{\mathcal{H}}\leqslant R$, onde $R>0$ é uma constante. Pela definição de $\mathcal{F}$ e da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(t,z)-\mathcal{F}(t,\tilde{z})\|_{\mathcal{H}}^2 &= \frac{1}{\rho_1}\int_0^L |f_1(u,w)-f_1(\tilde{u},\tilde{w})|^2\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{\rho_2}\int_0^L |f_2(u,w)-f_2(\tilde{u},\tilde{w})|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Usando (4.15) e o Teorema do Valor Médio, temos para algum $\theta \in (0,1)$ que

$$\begin{aligned}
&|f_j(u,w) - f_j(\tilde{u},\tilde{w})|^2 \\
&= |\nabla f_j(\theta(u,w) + (1-\theta)(\tilde{u},\tilde{w}))|^2 |(u,w) - (\tilde{u},\tilde{w})|^2 \\
&\leqslant C\left(|u|^{p-1} + |\tilde{u}|^{p-1} + |w|^{p-1} + |\tilde{w}|^{p-1} + 1\right)^2 \left(|u-\tilde{u}|^2 + |w-\tilde{w})|^2\right).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Segue de (4.37) e da imersão $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^\infty(0,L)$ que existe uma constante $L_R > 0$ tal que

$$\int_0^L |f_j(u,w) - f_j(\tilde{u},\tilde{w})|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant L_R \|z - \tilde{z}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad j = 1,2.$$

Substituindo esta última estimativa em (4.36), concluímos que existe $C_R > 0$ tal que

$$\|\mathcal{F}(t,z) - \mathcal{F}(t,\tilde{z})\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_R \|z - \tilde{z}\|_{\mathcal{H}}.$$

Isto prova que $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz contínuo. A prova está completa. □

4.2.4 Solução local e solução global

Esta subseção é dedicada a provar a existência de solução local e solução global para o problema (4.4)-(4.5). Começamos provando um resultado auxiliar que será usado a seguir.

Lema 4.5. *Suponha que $z = (u,w,u_t,w_t)$ é uma solução fraca para (4.4)-(4.5). Então, existem constantes $\beta_0, C_F > 0$ tais que*

$$\mathcal{E}(t) \geqslant \beta_0 \|z\|_{\mathcal{H}}^2 - C_F, \quad \forall t \geqslant \tau, \tag{4.38}$$

e

$$\mathcal{E}(t) \leqslant C_F\left(\|z\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + 1\right), \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{4.39}$$

Demonstração. De (4.17) e (4.12) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^L F(u,w)\,\mathrm{d}x &\geqslant -\beta(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) - Lm_F \\
&\geqslant -\beta\gamma\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)\|w_x\|_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x\right\|_2^2\right) - Lm_F.
\end{aligned}$$

Escolhendo $C_F = Lm_F$ encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &\geqslant \frac{1}{2}\|(u,w,u_t,w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\quad - \beta\gamma\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)\|w_x\|_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x\right\|_2^2\right) - C_F \\
&\geqslant \left(\frac{1}{2} - \beta\gamma\right)\|(u,w,u_t,w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_F.
\end{aligned}$$

Usando (4.16), obtemos (4.38) com

$$\beta_0 = \frac{1}{2} - \beta\gamma > 0. \tag{4.40}$$

Por outro lado, pela hipótese (4.15) e pelo fato de que $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^p(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L F(u, w)\,\mathrm{d}x \leqslant C\big(\|u_x\|_2^{p+1} + \|w_x\|_2^{p+1} + 1\big) \leqslant C\big((\|u_x\|_2 + \|w_x\|_2)^{p+1} + 1\big).$$

Assim, usando a última estimativa e (4.10) vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2}\|(u, w, u_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L F(u, w)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|(u, w, u_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C\big((\|u_x\|_2 + \|w_x\|_2)^{p+1} + 1\big) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|(u, w, u_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C\big(\|(u, w, u_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + 1\big),
\end{aligned}$$

donde concluímos que existe $C_F > 0$ satisfazendo (4.39). A prova está completa. □

Teorema 4.4 (Boa colocação)**.** *Suponha que a Hipótese 4.2 é satisfeita. Então para qualquer condição inicial $z_\tau \in \mathcal{H}$, o problema (4.4)-(4.5) possui uma única solução fraca $z = (u, w, u_t, w_t)$ satisfazendo*

$$z \in C([\tau, \infty); \mathcal{H}), \quad z(\tau) = z_\tau.$$

Se $z_\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, a solução é forte. Além disso, as soluções fracas dependem continuamente da condição inicial z_τ no espaço de fase $\mathcal{H}$.

Demonstração. A demonstração do teorema será feita em alguns passos.

Passo 1: Soluções locais. Como $\mathcal{A}$ é monótono maximal e, para cada $t \in [\tau, \infty)$ fixado, $\mathcal{F}(t, \cdot) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é localmente Lipschitz. Então, por Chueshov, Eller e Lasiecka [25, Theorem 7.2] para todo $z_\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe $t_{\max} \leqslant \infty$ e uma única solução forte z para (4.26) definida no intervalo $[\tau, t_{\max})$. Além disso, se $z_\tau \in \mathcal{H}$ então (4.26) possui uma única solução fraca $z \in C([\tau, t_{\max}); \mathcal{H})$ e tais soluções satisfazem $\limsup_{t \to t_{\max}^-} \|z(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty$, desde que se tenha $t_{\max} < \infty$.

Passo 2: Soluções globais. Pelo Lema 4.2 temos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) \leqslant -\frac{M_1}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + \frac{1}{2M_1}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2).$$

Integrando de τ a t obtemos

$$\mathcal{E}(t) \leqslant \mathcal{E}(\tau) + \frac{1}{2M_1}\int_\tau^t (\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s.$$

Usando (4.38) e observando que $1 < e^{\sigma_0(s-\tau)}$ para $s \in (\tau, t)$ temos

$$\begin{aligned}\|z(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant C\mathcal{E}(\tau) + C\int_\tau^t (\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\mathcal{E}(\tau) + Ce^{-\sigma_0\tau}\int_\tau^t e^{\sigma_0 s}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant C\mathcal{E}(\tau) + Ce^{-\sigma_0\tau}\int_{-\infty}^t e^{\sigma_0 s}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Logo, por (4.19) concluímos que existe uma constante $C(\mathcal{E}(\tau), \tau) > 0$ tal que

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}} \leqslant C(\mathcal{E}(\tau), \tau), \quad \forall t \geqslant \tau,$$

o que implica que $t_{\max} = \infty$.

Parte 3: Dependência contínua. Sejam $z^1 = (u^1, w^1, u_t^1, w_t^1)$ e $z^2 = (u^2, w^2, u_t^2, w_t^2)$ soluções fracas do problema (4.4)-(4.5) com a condições inicias $z_\tau^1, z_\tau^2 \in \mathcal{H}$ respectivamente. Denotemos

$$u = u^1 - u^2, \quad w = w^1 - w^2.$$

Então (u, w, u_t, w_t) é a solução de

$$\begin{cases}\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + g_1(u_t^1) - g_1(u_t^2) = f_1(u^2, w^2) - f_1(u^1, w^1), \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} + g_2(w_t^1) - g_2(w_t^2) = f_2(u^2, w^2) - f_2(u^1, w^1),\end{cases} \tag{4.41}$$

com condições de fronteira de Dirichlet e condição inicial

$$(u(\tau), w(\tau), u_t(\tau), w_t(\tau)) = z_\tau^1 - z_\tau^2.$$

Multiplicando a primeira equação em (4.41) por u_t, a segunda por w_t e integrando sobre $[0, L]$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u, w, u_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 = &-\int_0^L (g_1(u_t^1) - g_1(u_t^2))u_t\,\mathrm{d}x \\ &-\int_0^L (g_2(w_t^1) - g_2(w_t^2))w_t\,\mathrm{d}x \\ &+\int_0^L (f_1(u^2, w^2) - f_1(u^1, w^1))u_t\,\mathrm{d}x \\ &+\int_0^L (f_2(u^2, w^2) - f_2(u^1, w^1))w_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.42}$$

De (4.15), da desigualdade de Hölder e da imersão $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$, encontramos que

$$\begin{aligned}&\int_0^L (f_1(u^2, w^2) - f_1(u^1, w^1))u_t\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\left(\|z^1\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + \|z^2\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + 1\right)(\|u\|_2 + \|w\|_2)\|u_t\|_2\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant C_0(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) + M_1\|u_t\|_2^2,\end{aligned} \tag{4.43}$$

onde

$$C_0 = C\left(\|z^1\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + \|z^2\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + 1\right)$$

e $C > 0$ é uma constante independente de z^1, z^2.

De modo similar, obtemos que

$$\int_0^L (f_2(u^2, w^2) - f_2(u^1, w^1))w_t \,\mathrm{d}x \leqslant \xi_0(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) + M_1\|w_t\|_2^2. \tag{4.44}$$

Segue de (4.43), (4.44) e (4.12) que

$$\begin{aligned}\int_0^L (f_1(u^2, w^2) - f_2(u^1, w^1))u_t \,\mathrm{d}x + \int_0^L (f_2(u^2, w^2) - f_2(u^1, w^1))w_t \,\mathrm{d}x \\ \leqslant 2C_0(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) + M_1(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) \\ \leqslant 2\gamma C_0\|(u, w, u_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + M_1(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2).\end{aligned} \tag{4.45}$$

De (4.20), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_0^L (g_1(u_t^1) - g_1(u_t^2))u_t \,\mathrm{d}x \geqslant M_1\|u_t\|_2^2, \\ \int_0^L (g_2(w_t^1) - g_2(w_t^2))w_t \,\mathrm{d}x \geqslant M_1\|w_t\|_2^2.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Substituindo as estimativas (4.45) e (4.46) em (4.42), encontramos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u(t), w(t), u_t(t), w_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant 4\gamma C_0(t)\|(u(t), w(t), u_t(t)w_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.47}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (4.47), concluímos que

$$\|z^1(t) - z^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant e^{4\gamma\int_\tau^t C_0(r)\,\mathrm{d}r}\|z_\tau^1 - z_\tau^2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad t \in [\tau, T], \tag{4.48}$$

para todo $T \geqslant \tau$. Como $\int_\tau^t C_0(r)\,\mathrm{d}r < \infty$ para $t \in [\tau, T]$, a dependência contínua segue de (4.48). A prova do Teorema 4.4 está completa. □

4.3 $\mathcal{D}$-atratores *pullback*

Nesta seção, provamos a existência de $\mathcal{D}$-atratores *pullback* para o processo de evolução gerado pelo problema (4.4)-(4.5).

4.3.1 Conjunto *pullback* $\mathcal{D}$-absorvente

Provaremos agora a existência de uma família *pullback* $\mathcal{D}$-absorvente. O Teorema 4.4 indica que o problema (4.4)-(4.5) define um processo de evolução contínuo $S(t, \tau) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$S(t, \tau)z_\tau = (u(t), w(t), u_t(t), w_t(t)), \quad t \geqslant \tau,$$

com $(u(t), w(t), u_t(t), w_t(t))$ sendo a solução fraca de (4.4)-(4.5) com condição inicial $z_\tau \in \mathcal{H}$.

Para definirmos um universo de atração em $\mathcal{H}$ adequado aos nossos propósitos, primeiro estabelecemos a seguinte desigualdade de estabilidade.

Lema 4.6. *Suponha que a Hipótese 4.2 é satisfeita. Então, para todo $z \in \mathcal{H}$ existem constantes $\sigma_1 > 0$ e $C_1, C_2, C_3 > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} \|S(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_1 \left(\|z\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + 1\right) e^{-\sigma_1(t-\tau)} \\ + C_2 \int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma_1(t-s)}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s + C_3 C_F, \quad \forall t \geqslant \tau. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Demonstração. Para cada $\epsilon > 0$, definimos a energia perturbada por

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) = \mathcal{E}(t) + \epsilon N(t), \quad t \geqslant \tau,$$

onde $\mathcal{E}(t)$ é definida em (4.22) e

$$N(t) = \rho_1 \int_0^L u u_t \,\mathrm{d}x + \rho_2 \int_0^L w w_t \,\mathrm{d}x.$$

Primeiramente, provemos que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}(t) - \frac{C_F}{2} \leqslant \mathcal{E}_\epsilon(t) \leqslant \frac{3}{2}\mathcal{E}(t) + \frac{C_F}{2}, \quad \forall t \geqslant \tau,\ 0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0. \tag{4.50}$$

De fato, pela desigualdade de Young, por (4.12) e (4.38) temos que

$$\begin{aligned} |N(t)| &\leqslant \rho_1 \|u\|_2 \|u_t\|_2 + \rho_2 \|w\|_2 \|w_t\|_2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\rho_1^2 \|u_t\|_2^2 + \rho_2^2 \|w_t\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\rho_1^2 \|u_t\|_2^2 + \rho_2^2 \|w_t\|_2^2\right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)\|w_x\|_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} w_x + \sqrt{a_{11}} u_x\right\|_2^2\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\max\left\{1, \rho_1, \rho_2, \gamma\right\}\|(u, w, u_t, w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2\beta_0}\max\left\{1, \rho_1, \rho_2, \gamma\right\}\left(\mathcal{E}(t) + C_F\right). \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\epsilon_0 = \beta_0 \min\left\{1, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\gamma}\right\}, \tag{4.51}$$

temos que (4.50) é satisfeita.

Agora, afirmamos que existem constantes $C_4, C_5 > 0$ independentes de t tais que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) \leqslant -\mathcal{E}(t) + C_4\left(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2\right) + C_5(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2) + C_F. \tag{4.52}$$

De fato, pela definição de N e (4.4), encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) &= \rho_1\|u_t\|_2^2 + \rho_1\int_0^L uu_{tt}\,\mathrm{d}x + \rho_2\|w_t\|_2^2 + \rho_2\int_0^L ww_{tt}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^L \big(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - g_1(u_t) - f_1(u,w) + h_1\big)u\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^L \big(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - g_2(w_t) - f_2(u,w) + h_2\big)w\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \rho_1\|u_t\|_2^2 + \rho_2\|w_t\|_2^2.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Integrando por partes sobre $[0, L]$ e usando (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^L \big(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - g_1(u_t) - f_1(u,w) + h_1\big)u\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^L \big(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - g_2(w_t) - f_2(u,w) + h_2\big)w\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^L \big(a_{11}u_x^2 + 2a_{12}w_xu_x + a_{22}w_x^2\big)\,\mathrm{d}x - \int_0^L \nabla F(u,v)\cdot(u,v)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^L (g_1(u_t)u + g_2(w_t)w)\,\mathrm{d}x + \int_0^L (h_1u + h_2w)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}&\int_0^L \big(a_{11}u_x^2 + 2a_{12}w_xu_x + a_{22}w_x^2\big)\,\mathrm{d}x \\ &\quad = \big(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\big)\|w_x\|_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}&\int_0^L \big(a_{11}u_{xx} + a_{12}w_{xx} - g_1(u_t) - f_1(u,w) + h_1\big)u\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^L \big(a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - g_2(w_t) - f_2(u,w) + h_2\big)w\,\mathrm{d}x \\ &= -\left(\big(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\big)||w_x||_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2\right) \\ &\quad - \int_0^L \nabla F(u,v)\cdot(u,v)\,\mathrm{d}x - \int_0^L (g_1(u_t)u + g_2(w_t)w)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^L (h_1u + h_2w)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.54}$$

Substituindo (4.54) em (4.53) e subtraindo e adicionando $\mathcal{E}(t)$ vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) = -\mathcal{E}(t) + \frac{3\rho_1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{3\rho_2}{2}\|w_t\|_2^2 - \int_0^L (g_1(u_t)u + g_2(w_t)w)\,\mathrm{d}x \\ - \frac{1}{2}\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)||w_x||_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2 \right) \\ + \int_0^L (F(u,w) - \nabla F(u,w)\cdot(u,w))\,\mathrm{d}x + \int_0^L (h_1 u + h_2 w)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Graças a (4.12) e (4.18) segue que

$$\begin{aligned}&\int_0^L (F(u,w) - \nabla F(u,w)\cdot(u,w))\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \beta\gamma \left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)||w_x||_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2 \right) + C_F.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Usando (4.13), (4.12) e a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}&- \int_0^L (g_1(u_t)u + g_2(w_t)w)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M_2 \int_0^L (|u_t||u| + |w_t||w|)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M_2\|u_t\|_2\|u\|_2 + M_2\|w_t\|_2\|w\|_2 \\ &\leqslant \frac{\gamma M_2^2}{2\beta_0}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + \frac{\beta_0}{2\gamma}(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) \\ &\leqslant \frac{\gamma M_2^2}{2\beta_0}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) \\ &\quad + \frac{\beta_0}{2}\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)\|w_x\|_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2 \right).\end{aligned} \tag{4.57}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}\int_0^L (h_1 u + h_2 w)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\gamma}{2\beta_0}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2) \\ + \frac{\beta_0}{2}\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)||w_x||_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2 \right).\end{aligned} \tag{4.58}$$

Substituindo as estimativas (4.56)-(4.58) em (4.53) e usando o fato de que $\beta_0 + \beta\gamma = 1/2$ (cf. (4.40)), concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) \leqslant -\mathcal{E}(t) + \left(\frac{3\rho_1}{2} + \frac{\gamma M_2^2}{2\beta_0}\right)\|u_t\|_2^2 + \left(\frac{3\rho_2}{2} + \frac{\gamma M_2^2}{2\beta_0}\right)\|w_t\|_2^2 \\ + \frac{\gamma}{2\beta_0}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2) + C_F.\end{aligned}$$

Então, tomando

$$C_4 = \frac{1}{2}\max\left\{3\rho_1 + \frac{\gamma M_2^2}{\beta_0}, 3\rho_2 + \frac{\gamma M_2^2}{\beta_0}\right\} \quad \text{and} \quad C_5 = \frac{\gamma}{2\beta_0}, \tag{4.59}$$

concluímos que (4.52) é satisfeita.

Finalmente, mostremos a desigualdade (4.49). Seja $C_6 = \frac{1}{2M_1} + C_5$, escolhendo

$$\epsilon = \min\left\{\epsilon_0, \frac{M_1}{2C_4}\right\}. \tag{4.60}$$

De (4.52), (4.23) e da escolha de ϵ, temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_\epsilon(t) \leqslant -\epsilon\mathcal{E}(t) + C_6(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2) + \epsilon C_F.$$

Usando a segunda desigualdade em (4.50), conclímos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_\epsilon(t) \leqslant -\frac{2\epsilon}{3}\mathcal{E}_\epsilon(t) + C_6(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2) + \frac{4\epsilon}{3}C_F. \tag{4.61}$$

Multiplicando (4.61) por $e^{\frac{2\delta}{3}t}$ e integrando de τ a t, encontramos

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) \leqslant e^{-\frac{2\epsilon}{3}(t-\tau)}\mathcal{E}_\epsilon(\tau) + C_6\int_\tau^t e^{-\frac{2\epsilon}{3}(t-s)}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s + 2C_F.$$

Escolhendo $\sigma_1 = \frac{2\epsilon}{3}$ e usando novamente (4.50), obtemos

$$\mathcal{E}(t) \leqslant 3e^{-\sigma_1(t-\tau)}\mathcal{E}(\tau) + 2C_6\int_\tau^t e^{-\sigma_1(t-s)}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s + 6C_F, \tag{4.62}$$

Combinando as desigualdades (4.38)-(4.39) com (4.62), segue que, para todo $z \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\|S(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant{}& \frac{3C_F}{\beta_0}\left(\|z\|_{\mathcal{H}}^{p+1} + 1\right)e^{-\sigma_1(t-\tau)} \\ &+ \frac{2C_6}{\beta_0}\int_{-\infty}^t e^{-\sigma_1(t-s)}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s + \frac{7C_F}{\beta_0}, \quad \forall t \geqslant \tau,\end{aligned} \tag{4.63}$$

e assim, (4.49) vale, com $C_1 = \frac{3C_F}{\beta_0}$, $C_2 = \frac{2C_6}{\beta_0}$ e $C_3 = \frac{7}{\beta_0}$. O que finaliza a demonstração. □

Graças ao Lema 4.6, podemos definir um universo de atração temperado adequado $\mathcal{D}$ em $\mathcal{H}$.

Definição 4.2. *Dada uma função $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, considere a família de bolas fechadas em $\mathcal{H}$*

$$\overline{B}_{\mathcal{H}}(0, R(t)) = \left\{z \in \mathcal{H} : \|z\|_{\mathcal{H}} \leqslant R(t)\right\}$$

satisfazendo

$$\lim_{\tau\to-\infty} R^{p+1}(\tau)e^{\sigma_1\tau} = 0. \tag{4.64}$$

onde $\sigma_1 > 0$ é uma constante dada no Lema 4.6. Então, definimos o universo de atração por

$$\mathcal{D} = \left\{\widehat{D} : D(t) \neq \emptyset \quad \text{e } D(t) \subset \overline{B}_{\mathcal{H}}(0, R_{\widehat{D}}(t)) \text{ com } R_{\widehat{D}}(t) \text{ satisfazendo (4.64)}\right\}. \tag{4.65}$$

Lema 4.7. *Suponha que a Hipótese 4.2 é satisfeita. Então, a família $\widehat{B}_0 = \{B_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ definida por $B_0 = \overline{B}_{\mathcal{H}}(0, R_0(t))$, de bolas fechadas em $\mathcal{H}$ de centro zero e raio $R_0(t)$, onde*

$$R_0^2(t) = C_2 \int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma_0(t-s)}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s + C_3C_F + 1, \tag{4.66}$$

é pullback $\mathcal{D}$-absorvente.

Demonstração. Primeiramente, observe que a hipótese (4.19) implica que (4.66) é bem definido. Agora, seja $\widehat{D} \in \mathcal{D}$ e $t \in \mathbb{R}$. Como $\sigma_0 \leqslant \sigma_1$, concluímos que

$$e^{-\sigma_1(t-s)} \leqslant e^{-\sigma_0(t-s)}, \quad \forall t \geqslant s.$$

Portanto, de (4.49) temos que

$$\begin{aligned} \|S(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant C_1\left(R_{\widehat{D}}^{p+1}(\tau) + 1\right)e^{-\sigma_1(t-\tau)} \\ &\quad + C_2\int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma_1(t-s)}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s + C_3C_F \\ &\leqslant C_1e^{-\sigma_1 t}\left(R_{\widehat{D}}^{p+1}(\tau) + 1\right)e^{\sigma_1\tau} + R_0^2(t) - 1, \end{aligned} \tag{4.67}$$

para todo $z_\tau \in D(\tau)$. Como $\widehat{D} \in \mathcal{D}$ segue-se que

$$\left(R_{\widehat{D}}^{p+1}(\tau) + 1\right)e^{\sigma_1\tau} \to 0, \quad \text{quando } \tau \to -\infty.$$

Então, existe um $\tau_0(\widehat{D}, t) < t$ tal que

$$\|S(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant R_0^2(t), \quad \forall \tau \leqslant \tau_0(\widehat{D}, t),\ z_\tau \in D(\tau),$$

isto é,

$$S(t,\tau)D(\tau) \subset B_0(t), \quad \forall \tau \leqslant \tau_0(\widehat{D}, t).$$

Isto prova que $\widehat{B}_0$ é uma família *pullback* $\mathcal{D}$-absorvente. O que finaliza a demonstração. □

4.3.2 *pullback* $\mathcal{D}$-compacidade assintótica

Nesta parte do trabalho, provaremos que o processo de evolução gerado pelo problema (4.4)-(4.5) é *pullback* $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto. Primeiramente, mostremos a seguinte desigualdade de estabilização.

Lema 4.8. *Suponha que a Hipótese 4.2 é satisfeita. Seja $\widehat{B}_0$ a família pullback $\mathcal{D}$-absorvente da no Lema 4.7 e seja $S(t,\tau)z^j = (u^j, w^j, u_t^j, w_t^j)$ soluções fracas de (4.4)-(4.5) com condições* *iniciais* $z^j \in B_0(\tau)$, $j = 1, 2$. *Então, existe uma constante* $\sigma_2 > \sigma_1$, *e uma constante* $C_{\tau,t} > 0$ *dependendo de* $\tau \leqslant t$ *tal que*

$$\begin{aligned} \|S(t,\tau)z^1 - S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^2 &\leqslant 3R_0^2(\tau)e^{-\sigma_2(t-\tau)} \\ &\quad + C_{\tau,t}\int_\tau^t (\|u(s)\|_{p+1}^2 + \|w(s)\|_{p+1}^2)\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4.68}$$

onde $u = u^1 - u^2$ *e* $w = w^1 - w^2$.

Demonstração. As diferenças $u = u^1 - u^2$ e $w = w^1 - w^2$ são soluções do problema

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} = F_1(u,w) - G_1(u_t), \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} = F_2(u,w) - G_2(u_t), \end{cases} \tag{4.69}$$

onde

$$\begin{aligned} &G_1(u_t) = g_1(u_t^1) - g_1(u_t^2),\ G_2(w_t) = g_2(w_t^1) - g_2(w_t^2), \\ &F_j(u,w) = f_j(u^2,w^2) - f_j(u^1,w^1), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

com condições de fronteira de Dirichlet e condições iniciais

$$(u(\tau), w(\tau), u_t(\tau), w_t(\tau)) = z^1 - z^2.$$

Multiplicando a primeira equação em (4.69) por u_t e a segunda por w_t, respectivamente, e integrando sobre $(0, L)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) &= \int_0^L (F_1(u,w)u_t + F_2(u,w)w_t)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^L (G_1(u_t)u_t + G_2(w_t)w_t)\ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Usando (4.15), a desigualdade de Hölder com expoentes $p_1 = \frac{2(p+1)}{p-1}$, $p_2 = p + 1$ e $p_3 = 2$ obtemos que

$$\begin{aligned} &\int_0^L F_1(u,w)u_t\,\mathrm{d}x = \int_0^L \left(f_1(u^2,w^2) - f_1(u^1,w^1)\right) u_t\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\left(\|S(t,\tau)z^1\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + \|S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + 1\right)(\|u\|_{p+1} + \|w\|_{p+1})\|u_t\|_2 \\ &\leqslant C\left(\|S(t,\tau)z^1\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + \|S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + 1\right)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2) \\ &\quad + \frac{M_1}{2}\|u_t\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.71}$$

De modo similar, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^L F_2(u,w)w_t\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\left(\|S(t,\tau)z^1\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + \|S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + 1\right)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2) \\ &\quad + \frac{M_1}{2}\|w_t\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Segue de (4.71) e (4.72) que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L (F_1(u,w)u_t + F_2(u,w)w_t)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\left(\|S(t,\tau)z^1\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + \|S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^{2(p-1)} + 1\right)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2) \\
&\quad + \frac{M_1}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2).
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Como $z^j \in B(\tau)$, de (4.67) temos

$$\|S(t,\tau)z^j\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant C_1\left(R_0^{p+1}(\tau)+1\right)e^{-\sigma_1(t-\tau)} + R_0^2(t) - 1. \tag{4.74}$$

Então, por (4.73) e (4.74) existe uma constante $\kappa_1(t,\tau) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L (F_1(u,w)u_t + F_2(u,w)w_t)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \kappa_1(t,\tau)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2) + \frac{M_1}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2).
\end{aligned} \tag{4.75}$$

De (4.13) sabemos que

$$\int_0^L G_1(u_t)\,\mathrm{d}x \geqslant M_1\|u_t\|_2^2, \quad \int_0^L G_2(w_t)\,\mathrm{d}x \geqslant M_1\|w_t\|_2^2. \tag{4.76}$$

Substituindo as estimativas (4.73) e (4.76) em (4.70), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leqslant -\frac{M_1}{2}\left(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2\right) + \kappa_1(t,\tau)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2). \tag{4.77}$$

Para cada $\delta > 0$, consideremos o funcional

$$E_\delta(t) = E(t) + \delta Y(t),$$

onde

$$Y(t) = \rho_1\int_0^L uu_t\,\mathrm{d}x + \rho_2\int_0^L ww_t\,\mathrm{d}x.$$

Primeiramente, provemos que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant E_\delta(t) \leqslant \frac{3}{2}E(t), \quad \forall t \geqslant \tau,\ \forall \delta \leqslant \delta_0. \tag{4.78}$$

De fato, pela desigualdade de Young e por (4.12) temos que

$$\begin{aligned}
|Y(t)| &\leqslant \rho_t\|u\|_2\|u_t\|_2 + \rho_2\|w\|_2\|w_t\|_2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\rho_1^2\|u_t\|_2^2 + \rho_2^2\|w_t\|_2^2\right) \\
&\quad + \frac{\gamma}{2}\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)\|w_x\|_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2\right) \\
&\leqslant \max\left\{1,\rho_1,\rho_2,\gamma\right\}E(t).
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Então, tomando

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}, \frac{1}{\gamma}\right\}, \tag{4.80}$$

temos que (4.78) é satisfeita.

Agora, derivando Y e usando (4.69), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) &= -E(t) + \frac{3\rho_1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{3\rho_2}{2}\|w_t\|_2^2 - \int_0^L (G_1(u_t)u + G_2(w_t)w)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)||w_x||_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2\right) \\ &\quad + \int_0^L (F_1(u,w)u + F_2(u,w)w)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.81}$$

De (4.13), (4.12) e da desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}&\int_0^L (G_1(u_t)u + G_2(w_t)w)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M_2\int_0^L (|u_t||u| + |w_t||w|)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant M_2\|u_t\|_2\|u\|_2 + M_2\|w_t\|_2\|w\|_2 \\ &\leqslant \frac{\gamma M_2^2}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + \frac{1}{2\gamma}(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) \\ &\leqslant \frac{\gamma M_2^2}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2) + \frac{1}{2}\left(\left(a_{22} - a_{12}^2/a_{11}\right)||w_x||_2^2 + \left\|\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}}w_x + \sqrt{a_{11}}u_x\right\|_2^2\right).\end{aligned} \tag{4.82}$$

Usando (4.15), a desigualdade de Hölder com expoentes $p_1 = \frac{2(p+1)}{p-1}$, $p_2 = p+1$ e $p_3 = 2$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L F_1(u,w)u\,\mathrm{d}x &= \int_0^L \left(f_1(u^2,w^2) - f_1(u^1,w^1)\right)u\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant C\left(\|S(t,\tau)z^1\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + \|S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + 1\right)(\|u\|_{p+1} + \|w\|_{p+1})\|u\|_2 \\ &\leqslant C\left(\|S(t,\tau)z^1\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + \|S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + 1\right)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2).\end{aligned} \tag{4.83}$$

De modo similar, temos

$$\int_0^L F_2(u,w)w\,\mathrm{d}x \leqslant C\left(\|S(t,\tau)z^1\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + \|S(t,\tau)z^2\|_{\mathcal{H}}^{p-1} + 1\right)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2). \tag{4.84}$$

Combinando (4.83), (4.84) e (4.74) concluímos que existe uma constante $\kappa_2(t,\tau) > 0$ tal que

$$\int_0^L (F_1(u,w)u + F_2(u,w)w)\,\mathrm{d}x \leqslant \kappa_2(t,\tau)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2). \tag{4.85}$$

Substituindo as estimativas (4.82) e (4.85) em (4.81), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) \leqslant -E(t) + \left(\frac{3\rho_1}{2} + \frac{\gamma M_2^2}{2}\right)\|u_t\|_2^2 + \left(\frac{3\rho_2}{2} + \frac{\gamma M_2^2}{2}\right)\|w_t\|_2^2$$
$$+ \kappa_2(t,\tau)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2).$$

Definindo a constante $C_7 > 0$ por

$$C_7 = \frac{1}{2}\max\left\{3\rho_1 + \gamma M_2^2, 3\rho_2 + \gamma M_2^2\right\}, \tag{4.86}$$

obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) \leqslant -E(t) + C_7\left(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2\right) + \kappa_2(t,\tau)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2). \tag{4.87}$$

Seja $\kappa(t,\tau) = \kappa_1(t,\tau) + \kappa_2(t,\tau)$ e definimos

$$\delta = \min\left\{\delta_0, \frac{M_1}{2C_7}\right\}. \tag{4.88}$$

Usando (4.77) e (4.87) observamos que, uma vez que $\delta \leqslant 1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_\delta(t) \leqslant -\delta E(t) + \kappa(t,\tau)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2). \tag{4.89}$$

Usando a segunda desigualdade em (4.78) concluímos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_\delta(t) \leqslant -\frac{2\delta}{3}E_\delta(t) + \kappa(t,\tau)(\|u\|_{p+1}^2 + \|w\|_{p+1}^2). \tag{4.90}$$

Multiplicando (4.90) por $e^{\frac{2\delta}{3}t}$ e integrando sobre $[\tau,t]$ obtemos

$$E_\delta(t) \leqslant e^{-\frac{2\delta}{3}(t-\tau)}E_\epsilon(\tau) + \sup_{s\in[\tau,t]}\kappa(t,s)\int_\tau^t e^{-\frac{2\delta}{3}(t-s)}(\|u(s)\|_{p+1}^2 + \|w(s)\|_{p+1}^2)\,\mathrm{d}s.$$

Escolhendo $\sigma_2 = \frac{2\delta}{3}$, e usando (4.78) novamente, obtemos

$$E(t) \leqslant 3e^{-\sigma_2(t-\tau)}E(\tau) + 2\sup_{s\in[\tau,t]}\kappa(t,s)\int_\tau^t (\|u(s)\|_{p+1}^2 + \|w(s)\|_{p+1}^2)\,\mathrm{d}s.$$

Além disso, da definição de $E(t)$ temos $E(\tau) \leqslant \frac{1}{2}R_0^2(\tau)$, e assim, segue (4.68) com $C_{\tau,t} = 4\sup_{s\in[\tau,t]}\kappa(t,s)$. Agora, provemos que $\sigma_2 > \sigma_1$. De fato, como $\beta_0 < \frac{1}{2}$, de (4.51) e (4.80) temos que $\epsilon_0 < \delta_0$. Logo, de (4.59), (4.60), (4.86) e (4.88), concluímos que $\epsilon < \delta$. Isto prova que $\sigma_2 > \sigma_1$. □

Lema 4.9. *Suponha que a Hipótese 4.2 é satisfeita. Então o processo de evolução $\{S(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ é pullback $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto.*

Demonstração. Para provarmos este resultado, usaremos o Teorema 1.2.

Dado $\epsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, de (4.66) temos que

$$R_0^2(\tau) = \left(C_2 \int_{-\infty}^{\tau} e^{\sigma_0 s}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\, \mathrm{d}s \right) e^{-\sigma_0 \tau} + C_3 C_F + 1, \quad t \geqslant \tau. \tag{4.91}$$

Como a integral em (4.91) são cresce quando τ decresce, e $\sigma_0 < \sigma_2$, encontramos

$$\lim_{\tau \to -\infty} R_0^2(\tau) e^{-\sigma_2(t-\tau)} = \lim_{\tau \to -\infty} e^{(\sigma_2 - \sigma_0)\tau} \left(C_2 \int_{-\infty}^{\tau} e^{C_0 s}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\, \mathrm{d}s \right) e^{-\sigma_2 t} = 0.$$

Então, existe um $\tau_\epsilon = \tau_\epsilon(t, \epsilon) \leqslant t$ tal que

$$3R_0^2(\tau_\epsilon) e^{-\sigma_2(t-\tau_\epsilon)} < \epsilon^2.$$

Defina $\Psi_\epsilon : B_0(\tau_\epsilon) \times B_0(\tau_\epsilon) \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_\epsilon(z^1, z^2)^2 = C_{\tau_\epsilon, t} \int_{\tau_\epsilon}^{t} (\|u^1(s) - u^2(s)\|_{p+1}^2 + \|w^1(s) - w^2(s)\|_{p+1}^2)\, \mathrm{d}s.$$

onde $C_{\tau_\epsilon, t} > 0$ é dado em (4.68). Então, pelo Lema 4.8 obtemos que

$$\|S(t, \tau_\epsilon)z^1 - S(t, \tau_\epsilon)z^2\|_{\mathcal{H}} \leqslant \epsilon + \Psi_\epsilon(z^1, z^2), \quad \forall z^1, z^2 \in B_0(\tau_\epsilon).$$

Agora, mostraremos que $\Psi_\epsilon(z^1, z^2)$ é contrativa em $B_0(\tau_\epsilon)$. Seja $z^n \in B_0(\tau_\epsilon)$, denotemos $S(s, \tau_\epsilon)z^n = (u^n(s), w^n(s), u_t^n(s), w_t^n(s))$. Então, de (4.49) segue que

$$\|S(s, \tau_\epsilon)z^n\|_{\mathcal{H}} \leqslant \tilde{C}_{\tau_\epsilon, t}, \quad \forall s \in [\tau_\epsilon, t].$$

Portanto, existe uma constante $C_8 > 0$ tal que

$$\|(u^n, w^n)\|_{L^2(\tau_\epsilon, t; (H_0^1(0,L))^2)} \leqslant C_8 \quad \text{and} \quad \|(u_t^n, w_t^n)\|_{L^2(\tau_\epsilon, t; (L^2(0,L))^2)} \leqslant C_8. \tag{4.92}$$

Graças ao Teorema de compacidade de Aubin-Simon [71] existe uma subsequência tal que

$$(u^n, w^n) \to (u, w) \quad \text{forte em } L^2\left(\tau_\epsilon, t; (L^{p+1}(0, L))^2\right). \tag{4.93}$$

Finalmente, de (4.93) concluímos que

$$\liminf_{m \to \infty} \liminf_{n \to \infty} \Psi_\epsilon(z^m, z^n) = 0.$$

Então a $\mathcal{D}$-compacidade assintótica *pullback* segue do Teorema 1.2. O que finaliza a demonstração. $\square$

4.3.3 Existência de $\mathcal{D}$-atratores *pullback*

Como consequência dos resultados anteriores, obtemos o seguinte teorema, que é o principal resultados desta seção.

Teorema 4.5. *Suponha que a condição 4.2 seja satisfeita. Então o processo de evolução associado ao problema* (4.4)-(4.5) *possui um $\mathcal{D}$-atrator pullback minimal, onde $\mathcal{D}$ é definido em* (4.65). *Se além disso, $\sigma_0 < \frac{2\sigma_1}{p+1}$, tentão o $\mathcal{D}$-atrator pullback pertence a $\mathcal{D}$.*

Demonstração. Os Lemas 4.7 e 4.9 mostram que o processo de evolução gerado pelo problema (4.4)-(4.5) possui uma família *pullback* $\mathcal{D}$-absorvente e é *pullback* $\mathcal{D}$-assintoticamente compacto. Então, o Teorema 1.3 garante a existência de um $\mathcal{D}$-atrator *pullback* minimal.

Agora, mostraremos que o atrator pertence ao universo de atração $\mathcal{D}$ sob a hipótese de que $\sigma_0 < \frac{2\sigma_1}{p+1}$. Claramente, $\mathcal{D}$ é inclusão fechada. Então precisamos mostrar que $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$, isto é,

$$\lim_{\tau\to-\infty} R_0^{p+1}(\tau)e^{\sigma_1\tau} = 0. \tag{4.94}$$

De (4.66) encontramos que

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to-\infty} & R_0^2(\tau)e^{-\sigma_2(t-\tau)} \\ &= \lim_{\tau\to-\infty} e^{(\sigma_2-\sigma_0)\tau}\left(C_2\int_{-\infty}^{\tau} e^{C_0 s}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s\right)e^{-\sigma_2 t} = 0.\end{aligned} \tag{4.95}$$

Como a integral em (4.95) não cresce quando τ decresce e $\sigma_0 < \frac{2\sigma_1}{p+1}$, concluímos que

$$\lim_{\tau\to-\infty} R_0^2(\tau)e^{\frac{2\sigma_1}{p+1}\tau} = 0.$$

Logo, (4.94) vale e, consequentemente $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$. Então, do Teorema 1.3 o atrator *pullback* pertence a $\mathcal{D}$. Como queríamos mostrar. □

4.4 Semicontinuidade superior

Nesta seção, assumiremos que as forças externas $h_1, h_2 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(0,L))$ e que

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\sigma_0(t-s)}\left(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2\right)\,\mathrm{d}s < \infty, \quad \forall t \in (-\infty, 0]. \tag{4.96}$$

Consideramos o problema (4.4)-(4.5) com h_1, h_2 substituído por $\epsilon h_1, \epsilon h_2$

$$\begin{cases}\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} + g_1(u_t) + f_1(u,w) = \epsilon h_1, & \text{em } (0,L),\ t \geqslant \tau,\\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} + g_2(w_t) + f_2(u,w) = \epsilon h_2, & \text{em } (0,L),\ t \geqslant \tau,\end{cases} \tag{4.97}$$

com condições de fronteira de Dirichlet e condições iniciais

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = 0, \ t > \tau, \\ u(\tau) = u_0^\tau \in H_0^1(0,L), \ u_t(\tau) = u_1^\tau \in L^2(0,L), \\ w(\tau) = \phi_0^\tau \in H_0^1(0,L), \ w_t(\tau) = w_1^\tau \in L^2(0,L). \end{cases} \tag{4.98}$$

O principal objetivo é estudar o sistema (4.97) quando $\epsilon \to 0$. Em toda esta seção, assumiremos $\epsilon \in (0,1]$. Para indicar a dependência em relação ao parâmetro ϵ, denotaremos o processo gerado pelo problema (4.97)-(4.98) por $\{S_\epsilon(t,\tau)\}_{t \geqslant \tau}$. Para cada $\epsilon \in (0,1]$ fixado, o Teorema 4.5 implica a existência de um atrator $\mathcal{D}$-*pullback* minimal $\widehat{A}_\epsilon = \{A_\epsilon(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Quando $\epsilon = 0$ o problema não-autônomo (4.97)-(4.98) se reduz a um problema autônomo. A existência de um atrator global A_0 para o problema autônomo foi provado em [70]. Agora formulamos e provamos o resultado sobre a semicontinuidade superior de atratores *pullback*.

Teorema 4.6. *A família de $\mathcal{D}$-atratores pullback $\widehat{A}_\epsilon$ é semicontínua superiormente em $\epsilon = 0$, isto é,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{dist}(A_\epsilon(t), A_0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Em vista do Teorema 1.4, precisamos apenas provar que

(i) Existem $\delta > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\bigcup_{\epsilon \in (0,\delta)} \bigcup_{s \leqslant t_0} A_\epsilon(s)$$

é limitado em $\mathcal{H}$.

(ii) Para todo $t \in \mathbb{R}$, todo $T \geqslant 0$ e todo conjunto limitado $D \subset \mathcal{H}$,

$$\sup_{\tau \in [t-T,t], z \in D} \|S_\epsilon(t,\tau)z - S_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0. \tag{4.99}$$

Para provar (i), observe que o raio da bola absorvente dado por (4.66) pode ser estimado a partir de um tempo inicial fixado. De fato, seja $t_0 \in \mathbb{R}$ fixado. Então por (4.66) e (4.96) obtemos

$$\begin{aligned} R_\epsilon^2(t) &\leqslant C_2 \sup_{\tau \leqslant t_0} \left(\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\sigma_0(\tau - s)} (\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2) \, \mathrm{d}s \right) + C_3 C_F + 1 \\ &=: R^2(t_0) < \infty, \quad \forall t \in (-\infty, t_0], \ \epsilon \in (0,1]. \end{aligned}$$

Assim, pela invariância de $\widehat{A}_\epsilon$ temos

$$A_\epsilon(t) \subset \overline{B}_{\mathcal{H}}(0, R(t_0)), \quad \forall t \in (-\infty, t_0], \ \forall \epsilon \in (0,1].$$

Consequentemente

$$\bigcup_{\epsilon\in(0,1)}\bigcup_{s\leqslant t_0} A_\epsilon(s)\subset \overline{B}_{\mathcal{H}}(0,R(t_0)),$$

e assim (i) é satisfeita.

Para provarmos (ii), dado $z\in D$ e $t\geqslant\tau$, denotemos por

$$S_\epsilon(t,\tau)z=(u^\epsilon(t),w^\epsilon(t),u_t^\epsilon(t),w_t^\epsilon(t)),$$

e

$$u=u^\epsilon-u^0,\quad w=w^\epsilon-w^0.$$

Então, (u,w,u_t,w_t) é solução da equação

$$\begin{cases}\rho_1 u_{tt}-a_{11}u_{xx}-a_{12}w_{xx}+g_1(u^\epsilon)-g_1(u_t^0)=f_1(u^0,w^0)-f_1(u^\epsilon,w^\epsilon)+\epsilon h_1,\\ \rho_2 w_{tt}-a_{12}u_{xx}-a_{22}w_{xx}+g_2(w_t^\epsilon)-g_2(w_t^0)=f_2(u^0,w^0)-f_2(u^\epsilon,w^\epsilon)+\epsilon h_2,\end{cases}\tag{4.100}$$

com condições de fronteira de Dirichlet e condições iniciais

$$(u(\tau),w(\tau),u_t(\tau),w_t(\tau))=0.$$

Multiplicando a primeira equação em (4.100) por u_t, a segunda por w_t, e integrando sobre $[0,L]$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u,w,u_t,w_t)\|_{\mathcal{H}}^2=&-\int_0^L(g_1(u_t^\epsilon)-g_1(u_t^0))u_t\,\mathrm{d}x\\&-\int_0^L(g_2(w_t^\epsilon)-g_2(w_t^0))w_t\,\mathrm{d}x\\&-\int_0^L(f_1(u^\epsilon,w^\epsilon)-f_1(u^0,w^0))u_t\,\mathrm{d}x\\&-\int_0^L(f_2(u^\epsilon,w^\epsilon)-f_2(u^0,w^0))w_t\,\mathrm{d}x\\&+\epsilon\int_0^L h_1u_t\,\mathrm{d}x+\epsilon\int_0^L h_2w_t\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{4.101}$$

De (4.13) temos que

$$\int_0^L(g_1(u_t^\epsilon)-g_1(u_t^0))u_t\,\mathrm{d}x\geqslant M_1\|u_t\|_2^2,\quad \int_0^L(g_2(w_t^\epsilon)-g_2(w_t^0))w_t\,\mathrm{d}x\geqslant M_1\|w_t\|_2^2.\tag{4.102}$$

De (4.15), da desigualdade de Hölder e da imersão $H_0^1(0,L)\hookrightarrow L^\infty(0,L)$, encontramos

$$\begin{aligned}&\int_0^L(f_1(u^\epsilon,w^\epsilon)-f_1(u^0,w^0))u_t\,\mathrm{d}x\\&\leqslant C\left(\|u^\epsilon\|_\infty^{p-1}+\|u^0\|_\infty^{p-1}+\|w^\epsilon\|_\infty^{p-1}+\|w^0\|_\infty^{p-1}+1\right)(\|u\|_2+\|w\|_2)\|u_t\|_2\,\mathrm{d}x\\&\leqslant C(D,T,t)(\|u\|_2^2+\|w\|_2^2)+\frac{M_1}{2}\|u_t\|_2^2,\end{aligned}\tag{4.103}$$

Analogamente,

$$\int_0^L (f_2(u^\epsilon, w^\epsilon) - f_2(u^0, w^0))w_t \,\mathrm{d}x \leqslant C(D,T,t)(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) + \frac{M_1}{2}\|w_t\|_2^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\int_0^L (f_1(u^\epsilon, w^\epsilon) - f_1(u^0, w^0))u_t \,\mathrm{d}x + \int_0^L (f_2(u^\epsilon, w^\epsilon) - f_2(u^0, w^0))w_t \,\mathrm{d}x \\ &\quad\leqslant 2C(D,T,t)(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) + \frac{M_1}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2).\end{aligned} \tag{4.104}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}&\epsilon \int_0^L h_1 u_t \,\mathrm{d}x + \epsilon \int_0^L h_2 w_t \,\mathrm{d}x \\ &\quad\leqslant \frac{\epsilon^2}{2M_1}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2) + \frac{M_1}{2}(\|u_t\|_2^2 + \|w_t\|_2^2).\end{aligned} \tag{4.105}$$

Substituindo as estimativas (4.102), (4.104) e (4.105) em (4.101), obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u,w,u_t,w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant 4C(D,T,t)(\|u\|_2^2 + \|w\|_2^2) + \frac{\epsilon^2}{M_1}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2). \tag{4.106}$$

Combinando (4.12) e (4.106), temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u,w,u_t,w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant 4C(D,T,t)\|(u,w,u_t,w_t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\epsilon^2}{M_1}(\|h_1(t)\|_2^2 + \|h_2(t)\|_2^2). \tag{4.107}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (4.107), concluímos que

$$\|(u(t), w(t), u_t(t), w_t(t))\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{M_1}\int_\tau^t e^{4\int_\tau^t C(D,T,t)(t-s)\,\mathrm{d}r}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s, \tag{4.108}$$

e assim

$$\|S_\epsilon(t,\tau)z - S_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{M_1}\int_{t-T}^t e^{4\int_\tau^t C(D,T,t)(t-s)\,\mathrm{d}r}(\|h_1(s)\|_2^2 + \|h_2(s)\|_2^2)\,\mathrm{d}s,$$

para todo $\tau \in [t-T, t]$ e $z \in D$. Como $h_1, h_2 \in L^2_{loc}\big(\mathbb{R}; L^2(0,L)\big)$, segue que

$$\sup_{\tau\in[t-T,t], z\in D} \|S_\epsilon(t,\tau)z - S_0(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0, \tag{4.109}$$

e assim, segue (ii). A demonstração está completa. □

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico de soluções das equações de fluido Oldroyd determinística e estocástica usando a teoria de sistemas dinâmicos deterministas e estocásticos respectivamente. Usando a teoria determinística, estudamos também o comportamento assintótico de uma equação de mistura de sólidos com fontes e damping não linear. Mais precisamente, para a equação de fluido Oldroyd desterminística, provamos a existência de um $\mathcal{D}$-atrator *pullback* para um problema que nos permite estudar variação de longo prazo da solução no espaço de fase H em termos desse $\mathcal{D}$-atrator *pullback*, e apresentamos um estimativa para a dimensão fractal do atrator. Para a equação estocástica, provamos a existência de um $\mathcal{D}$-atrator *pullback* aleatório, que nos permite investigar a dinâmica de longo prazo da solução da equação estocástica original. Para a equação de mistura de sólidos com fontes e damping não linear, provamos a existência de um $\mathcal{D}$-atrator *pullback*, e provamos um resultado de semicontinuidade quando as perturbações não autônomas tendem a zero, a semicontinuidade foi considerada em relação ao atrator global para a equação autônoma.

É importante notar que para provamos a existência do atrator no capítulo 2, usamos a hipótese bastante razoável de que

$$f \in L^2(\mathbb{R}; V') \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} \|f(t)\|_{V'} ds < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Enquanto que para estimarmos a dimensão fractal do atrator, exigimos a condição

$$f \in L^\infty(-\infty, T^*; V') \text{ para algum } T^* \in \mathbb{R}.$$

Isto é, f é uniformemente limitada no passado para algum $T^* \in \mathbb{R}$. Vale ressaltar que esta é uma hipótese bastante forte. Uma hipótese bastante conhecida na literatura é a de que $f \in L^2(\mathbb{R}; V')$ é translação limitada, isto é,

$$\eta(f) := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} \|f(s)\|_{V'}^2 < +\infty. \tag{5.2}$$

Em trabalhos mais recentes observa-se uma hipótese intermediária a (5.1) e (5.2) onde exige-se que $f \in L_b(\mathbb{R}_-; V')$, isto é,

$$\sup_{\tau<0} \int_{\tau-1}^{\tau} \|f(s)\|_{V'}^2 < +\infty.$$

vem sendo investigada na teoria de atratores *pullback*.

O nosso objetivo futuro é estudar a dimensão fractal para o atrator com tais hipóteses sobre a função f. Também pretendemos investigar a seguinte equação de fluido Oldroyd Fracionária

$$\begin{cases} u'+\mu(-\Delta)^{1+\alpha}u+(u\cdot\nabla)u+\displaystyle\int_{\tau}^{t}\beta(t-s)(-\Delta)^{1+\alpha}u(s)ds+\nabla p=f(t) \text{ em } [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u=0 \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ u=0 \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\partial\Omega, \\ u(\tau)=u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{5.3}$$

Quando $\alpha = 0$, obtemos a equação de fluido Oldroyd considerada neste trabalho

$$\begin{cases} u'-\mu\Delta u+(u\cdot\nabla)u-\displaystyle\int_{\tau}^{t}\beta(t-s)\Delta u(s)ds+\nabla p=f(t) \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u=0 \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\Omega, \\ u=0 \quad \text{em} \quad [\tau,+\infty)\times\partial\Omega, \\ u(\tau)=u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{5.4}$$

Portanto seria interessante estudar o problema (5.3) e generalizar sos resultados aqui apresentados. Consideraremos os seguintes pontos:

1. Provaremos a existência de um atrator *pullback* (aleatório) para cada $\alpha \in (0, 1)$.

2. Analisaremos a relação entre o atrator do problema (5.3) e o atrator do problema (5.4) quando $\alpha \to 0^+$. Mais precisamente, estabeleceremos um resultado de semicontinuidade superior de atratores.

3. Estudaremos a estrutura dos atratores *pullback*.

Bibliografia

[1] Y. Agranovich and P. Sobolevskii. Investigation of viscoelastic fluid mathematical model. *RAC. Ukranian SSR. Ser. A*, 10:71–74, 1989.

[2] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, and R. Quintanilla. Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. *Internat J. Solids Struct.*, 46:1659–1666, 2009.

[3] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, and O. V. Villagrán. Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids. *Internat J. Solids Struct.*, 24:4151–4162, 2009.

[4] L. Arnold. Random dynamical systems. In *Dynamical systems*, pages 1–43. Springer, 1995.

[5] R. Atkin and R. Craine. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 29(2):209–244, 1976.

[6] V. Barbu. *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*. Springer Science & Business Media, 2010.

[7] P. W. Bates, H. Lisei, and K. Lu. Attractors for stochastic lattice dynamical systems. *Stochastics and Dynamics*, 6(01):1–21, 2006.

[8] P. W. Bates, K. Lu, and B. Wang. Random attractors for stochastic reaction–diffusion equations on unbounded domains. *Journal of Differential Equations*, 246(2):845–869, 2009.

[9] A. Bedford and D. S. Drumheller. Theory of immiscible and structured mixtures. *Int. J. Eng. Sci.*, 21:863–960, 1983.

[10] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. Dynamics of polymeric liquids. vol. 1: Fluid mechanics. 1987.

[11] R. M. Bowen. Continuum physics iii: Theory of mixtures, a.c. eringen. *ed., Academic Press, New York*, pages 689–722, 1976.

[12] R. M. Bowen and J. C. Wiese. Diffusion in mixtures of elastic materials. *Int. J. Eng. Sci.*, 7:689–722, 1969.

[13] Z. Brzezniak. Asymptotic compactness and absorbing sets for stochastic burger's equations driven by space-time white noise and for some two-dimensional stochastic navier-stokes equations on certain unbounded domains. *Stochastic Partial Differential Equations and Applications, VII*, 245:35–52, 2006.

[14] Z. Brzeźniak, M. Capiński, and F. Flandoli. Pathwise global attractors for stationary random dynamical systems. *Probability theory and related fields*, 95(1):87–102, 1993.

[15] Z. Brzeźniak, T. Caraballo, J. Langa, Y. Li, G. Lukaszewicz, and J. Real. Random attractors for stochastic 2d-navier–stokes equations in some unbounded domains. *Journal of Differential Equations*, 255(11):3897–3919, 2013.

[16] Z. Brzeźniak and Y. Li. Asymptotic compactness and absorbing sets for 2d stochastic navier-stokes equations on some unbounded domains. *Transactions of the American Mathematical Society*, 358(12):5587–5629, 2006.

[17] Z. Brzeźniak and Y.-H. Li. Asymptotic behaviour of solutions to the 2d stochastic navier-stokes equations in unbounded domains–new developments. In *Recent developments in stochastic analysis and related topics*, pages 78–111. World Scientific, 2004.

[18] J. R. Cannon, R. E. Ewing, Y. He, and Y. Lin. A modified nonlinear galerkin method for the viscoelastic fluid motion equations. *International journal of engineering science*, 37(13):1643–1662, 1999.

[19] T. Caraballo and J. A. Langa. On the upper semicontinuity of cocycle attractors for non-autonomous and random dynamical systems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A*, 10:491–514, 2003.

[20] T. Caraballo, J. A. Langa, and J. C. Robinson. Upper semicontinuity of attractors for small random perturbations of dynamical systems. *Communications in partial differential equations*, 23(9-10):1557–1581, 1998.

[21] T. Caraballo, G. Łukaszewicz, and J. Real. Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 64(3):484–498, 2006.

[22] A. Carvalho, J. A. Langa, and J. Robinson. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, volume 182. Springer Science & Business Media, 2012.

[23] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik. *Attractors for equations of mathematical physics*, volume 49. American Mathematical Soc., 2002.

[24] I. Chueshov. *Monotone random systems theory and applications*. Springer, 2004.

[25] I. Chueshov, M. Eller, and I. Lasiecka. On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. *Comm. Partial Differential Equations*, 27:1901–1951, 2002.

[26] I. Chueshov and I. Lasiecka. *Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping*. American Mathematical Soc., 2008.

[27] I. Chueshov and I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations: Well-posedness and Long Time Dynamics*. Springer Science & Business Media, 2010.

[28] I. D. Chueshov. Global attractors for non-linear problems of mathematical physics. *Russian Mathematical Surveys*, 48(3):133, 1993.

[29] H. Crauel. *Random probability measures on Polish spaces*. CRC press, 2002.

[30] H. Crauel, A. Debussche, and F. Flandoli. Random attractors. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 9(2):307–341, 1997.

[31] H. Crauel and F. Flandoli. Attractors for random dynamical systems. *Probability Theory and Related Fields*, 100(3):365–393, 1994.

[32] H. Cui, M. M. Freitas, and J. A. Langa. On random cocycle attractors with autonomous attraction universes. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 22(9):3379–3407, 2017.

[33] H. Cui, M. M. Freitas, and J. A. Langa. Squeezing and finite dimensionality of cocycle attractors for 2D stochastic Navier-Stokes equation with non-autonomous forcing. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 23(3):1297–1324, 2018.

[34] C. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 37:297–308, 1970.

[35] G. M. De Araujo, S. B. De Menezes, and A. O. Marinho. Existence of solutions for an oldroyd model of viscoelastic fluids. *Electronic Journal of Differential Equations (EJDE)[electronic only]*, 2009:Paper–No, 2009.

[36] X. Fan. Attractors for a damped stochastic wave equation of sine–gordon type with sublinear multiplicative noise. *Stochastic Analysis and Applications*, 24(4):767–793, 2006.

[37] B. Feng, T. F. Ma, R. N. Monteiro, and C. A. Raposo. Dynamics of Laminated Timoshenko Beams. *J Dyn Diff Equat*, 2017. http://doi.org/10.1007/s10884-017-9604-4.

[38] M. M. Freitas, A. L. C. Costa, and G. M. Araújo. Pullback dynamics of a non-autonomous mixture problem in one dimensional solids with nonlinear damping. *Commun. Pure Appl. Anal.*, (Aceito para publicação).

[39] A. Fröhlich and R. Sack. Theory of the rheological properties of dispersions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 185(1003):415–430, 1946.

[40] J. García-Luengo, P. Marín-Rubio, and J. Real. Pullback attractors in v for non-autonomous 2d-navier–stokes equations and their tempered behaviour. *Journal of Differential Equations*, 252(8):4333–4356, 2012.

[41] J. García-Luengo, P. Marín-Rubio, and J. Real. Pullback attractors in V for non-autonomous 2D-Navier-Stokes equations and their tempered behaviour. *J. Differential Equations*, 252:4333–4353, 2012.

[42] J.-M. Ghidaglia, M. Marion, R. Temam, et al. Generalization of the sobolev-lieb-thirring inequalities and applications to the dimension of attractors. *Differential and Integral Equations*, 1(1):1–21, 1988.

[43] D. Goswami and A. K. Pani. A priori error estimates for semidiscrete finite element approximations to equations of motion arising in oldroyd fluids of order one. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2010.

[44] J. K. Hale, X.-B. Lin, and G. Raugel. Upper semicontinuity of attractors for approximations of semigroups and partial differential equations. *Mathematics of computation*, 50(181):89–123, 1988.

[45] J. K. Hale, L. T. Magalhães, and W. M. Oliva. *An introduction to infinite dimensional dynamical systems-geometric theory*, volume 47. Springer Science & Business Media, 2013.

[46] Y. Hou and K. Li. The uniform attractor for the 2d non-autonomous navier–stokes flow in some unbounded domain. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 58(5-6):609–630, 2004.

[47] D. Iesan and R. Quintanilla. existence and continuous dependence results in the theory of interacting continua. *J. Elasticity*, 36:85–98, 1994.

[48] D. D. Joseph. *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2013.

[49] N. Karzeeva, A. Kotsiolis, and A. Oskolkov. On dynamical system generated by initial-boundary value problems for the equations of motion of linear viscoelastic fluids,(russian) trudy mat. inst. steklov. 188 (1990), 59-87; english translation in proc. In *Steklov Inst. Math*, volume 191, pages 73–108, 1991.

[50] P. E. Kloeden and M. Rasmussen. *Nonautonomous dynamical systems*. Number 176. American Mathematical Soc., 2011.

[51] A. Kotsiolis and A. Oskolkov. Dynamical system generated by the equations of motion of oldroyd fluids. *Journal of Soviet Mathematics*, 41(2):967–970, 1988.

[52] A. Kotsiolis, A. Oskolkov, and R. Shadiev. A priori estimates on the semiaxis $t \geqslant 0$ for the solutions of the equations of motion of linear viscoelastic fluids with an infinite dirichlet integral, and their applications. *Journal of Soviet Mathematics*, 62(3):2777–2788, 1992.

[53] A. Kufner, O. John, and S. Fucik. *Function spaces*, volume 3. Springer Science & Business Media, 1977.

[54] O. Ladyzhenskaya. A dynamical system generated by the navier-stokes equations. *Zap. Nauch. Sem.*, LOMI 27:91–114, 1972.

[55] O. Ladyzhenskaya. Dynamical system generated by the navier-stokes equations. *Soviet Physics Dokl.*, 17:647–649, 1973.

[56] O. Ladyzhenskaya. *Attractors for semi-groups and evolution equations*. CUP Archive, 1991.

[57] J. A. Langa, G. Łukaszewicz, and J. Real. Finite fractal dimension of pullback attractors for non-autonomous 2d navier–stokes equations in some unbounded domains. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 66(3):735–749, 2007.

[58] T. F. Ma, P. Marín-Rubio, and C. M. S. Chuño. Dynamics of wave equations with moving boundary. *Journal of Differential Equations*, 262(5):3317–3342, 2017.

[59] T. F. Ma and R. N. Monteiro. Singular limit and long-time dynamics of bresse systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 49(4):2468–2495, 2017.

[60] T. F. Ma and T. M. Souza. Pullback dynamics of non-autonomous wave equations with acoustic boundary condition. *Differential and Integral Equations*, 30(5-6):443–462, 2017.

[61] P. Marín-Rubio and J. Real. On the relation between two different concepts of pullback attractors for non-autonomous dynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(9):3956–3963, 2009.

[62] F. Martinez and R. Quintanilla. Some qualitative results for the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids. *Collect. Math.*, 46:236–277, 1995.

[63] J. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 200(1063):523–541, 1950.

[64] J. Oldroyd. Non-newtonian flow of liquids and solids. In *Rheology*, pages 653–682. Elsevier, 1956.

[65] A. Oskolkov. initial boundary value problems for the equations of motion of kelvin-voigt fluids and oldroyd fluids. In *Proc. Steklov Inst. Math*, volume 2, pages 137–182, 1989.

[66] A. Oskolkov and D. Emel'yanova. Certain nonlocal problems for two-dimensional equations of motion of oldroyd fluids. *Journal of Soviet Mathematics*, 62(5):3004–3016, 1992.

[67] P. Pei, M. A. Rammaha, and D. Toundykov. Local and global well-posedness of semilinear Reissner-Mindlin-Timoshenko plate equations. *Nonlinear Analysis*, 105:62–85, 2014.

[68] J. C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, volume 28. Cambridge University Press, 2001.

[69] R. Rosa. The global attractor for the 2D Navier-Stokes ow on some unbounded domains. *Nonlinear Analisys, Theory, Methods & Applications*, 32(1):71–85, 1998.

[70] M. Santos and M. M. Freitas. Global attractors for a mixture problem in one dimensional solids with nonlinear damping and sources terms. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 18(4):1869–1890, 2019.

[71] J. Simon. Compact sets in the spacel p (o, t; b). *Annali di Matematica pura ed applicata*, 146(1):65–96, 1986.

[72] C. Sun, D. Cao, and J. Duan. Non-autonomous dynamics of wave equations with nonlinear damping and critical nonlinearity. *Nonlinearity*, 19(11):2645, 2006.

[73] R. Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*, volume 66. Siam, 1995.

[74] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, 2012.

[75] B. Wang. Random attractors for the stochastic benjamin–bona–mahony equation on unbounded domains. *Journal of Differential Equations*, 246(6):2506–2537, 2009.

[76] B. Wang. Sufficient and necessary criteria for existence of pullback attractors for non-compact random dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, 253(5):1544–1583, 2012.

[77] B. Wang. Random attractors for non-autonomous stochastic wave equations with multiplicative noise. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 34(1):269–300, 2014.

[78] Y. Wang. On the upper semicontinuity of pullback attractors with applications to plate equations. *Commun. Pure Appl. Anal*, 9:1653–1673, 2010.