



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Problemas de Transmissão para os Modelos de Timoshenko e Bresse

Gesson José Mendes Lima

Belém

2015

Gesson José Mendes Lima

Problemas de Transmissão para os Modelos de Timoshenko e Bresse

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática - UFPA, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Lima, Gesson José Mendes, 1968-
Problemas de transmissão para os modelos de
timoshenko e bresse / Gesson José Mendes Lima. - 2015.

Orientador: Mauro de Lima Santos.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do
Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais,
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Doutorado), Belém, 2015.

1. Equações diferenciais parciais. 2.
Problemas de transmissão em vigas de Timoshenko
e Bresse. 3. Decaimento exponencial. 4. Funções
exponenciais. I. Título.

CDD 22. ed. 515.353

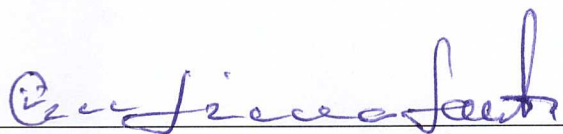
Problemas de Transmissão Para os Modelos de Timoshenko e Bresse

por

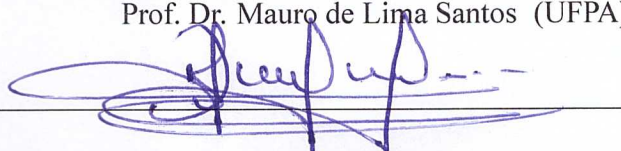
Gesson José Mendes Lima

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA - UFPA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

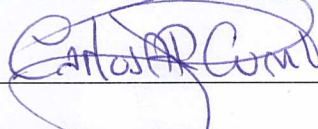
Aprovada em 13 de março de 2015 por:



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (UFPA)



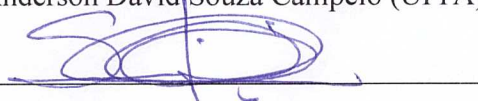
Prof. Dr. Carlos Alberto da Cunha Raposo (UFSJ)



Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias (UFPA)



Prof. Dr. Anderson David Souza Campelo (UFPA)



Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (UFPA)

Num lindo dia de verão, Santo Agostinho andava sozinho pela praia. O sol brilhava no oceano e na areia branca. De vez em quando uma gaivota voava no céu ou tirava um rasante das ondas. Pequenos flocos de nuvens macias flutuavam no azul do céu e o marulho das águas era o único barulho. O solitário homem refletia profundamente sobre um assunto que nem ele podia entender, embora fosse um homem inteligente e culto. Ponderava sobre os atos de Deus, tentando ver o seu significado oculto. Lutava para compreender o plano divino por trás dos acontecimentos. E seu coração se enchia de frustração e angústia por não conseguir encontrar explicações claras. De repente, ele se aproximou de um menino que cavara um buraco na areia. Ele enchia de água um pequeno balde na beira da praia. Corria e o esvaziava no buraco. Retornava para buscar mais água do mar. Balde após balde, ele derramava no buraco. - O que estás fazendo, menino? - perguntou o sábio. A criança não mostrou nenhuma surpresa com a pergunta, nem mesmo ergueu a cabeça. - Vou esvaziar a água do mar e pôr neste buraco? respondeu ela. - Isto é impossível, meu pequeno!? exclamou o sábio com um sorriso. O menino olhou para ele e disse: - Mas impossível ainda é compreender os mistérios e a grandeza de Deus. O santo homem foi atingido pela verdade das palavras do menino. Seu coração estava humilhado. A frustração deixou sua mente. Ele cobriu os olhos com as mãos e sentiu-se agradecido, pois a fé pode preencher o vazio onde o entendimento não basta. Ao levantar a cabeça, depois de alguns instantes, deu-se conta de que estava só com o céu e o mar. *”felizes aqueles crerão sem vê”*. JESUS

Santo Agostinho

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, causa primária do Universo, pela minha existência e a oportunidade de estudar.
- Aos meus pais, Gesson De Souza Lima (in memória) e Paula Mendes Lima, exemplos de simplicidade, sabedoria e dedicação, que transformaram essa oportunidade em realização, através de seus incentivos e carinho.
- À minha esposa e filhos, companheiros eternos desta e de outras vidas, razão de ser das minhas mais caras alegrias, que souberam compreender minha ausência em muitos momentos familiares para elaboração deste trabalho, tão significativo e importante para mim, sempre me incentivando para que eu superasse os espinhos que a vida de um sonhador impõe a si e aos seus.
- Agradeço ao professor Mauro De Lima Santos, primeiramente, por ser um homem que vislumbra, como poucos, as possibilidades de engrandecimento, não só de seu lado pessoa, mas de todos aqueles que estão vinculados a ele, seja de maneira direta ou indireta. Um exemplo, deste fato, é a implantação do doutorado em Matemática na região norte. Uma região tão carente de tudo e, em especial de conhecimentos e possibilidades, um contra ponto, quando comparada com regiões mais aquinhoadas em tudo, como são as regiões sul e sudeste de nosso país. E acredito, em particular, que uma das metas da Universidade Federal do Pará é exatamente dirimir ou pelo minorar tais distorções, através de seus cursos de graduação e/ou pós-graduação. Neste sentido, o senhor desempenha um papel fundamental e desafiador neste processo, não só como ser humano, mas como um grande pesquisador e profissional que é, sempre visando o bem maior. Agradeço também, pelas orientações, pelas horas de seminários que foram fundamentais para finalização deste trabalho, pelos momentos de descontração em nosso almoço e cafezinho na Big Bem, por me possibilitar um novo caminho, através das pesquisas. Em fim, a tudo que o senhor proporcionou a mim e aos meus colegas e amigos de doutoramento. Muito obrigado!!!
- Agradeço ao professor e amigo Dilberto Almeida Jr, um exemplo de simplicidade, humanidade e pesquisador, pelos momentos de seminários, por ter contribuído em minha formação através de suas aulas, bem como o incentivo nas pesquisas e nos momentos delicados deste trabalho. Muito obrigado!!!

- Como não poderia ser diferente, em toda caminha nós temos obstáculos, mas para todo obstáculo existe sempre, pelo menos, uma maneira de transpor-los e uma dessas maneiras, sem sombra de dúvidas são os amigos, que nos encorajam, nos estimulam e acreditam firmemente que seremos capazes de contornar tais obstáculos. Venho registrar nestas breves linhas todo o meu respeito, carinho e gratidão nesta jornada de doutorado aos amigos, Anderson Campelo, Anderson Ramos, Lindomar Ribeiro, Marcos C. Lima, Renato Lobato, Sebastião Cordeiro e Walter Martins.
- Ao professor João Batista Ribeiro, diretor do IG, que mesmo sem nos conhecer, nos cedeu sua sala, no Instituto de Geologia, para que pudéssemos nestes quatro anos ter um lugar digno para fazermos nosso estudo de doutorado e futuras pesquisas.
- Aos meus irmãos, Paula Helena, Regina Coelly, Walter Nazareno, Paulo Gesson que mesmo distantes torceram e incentivaram mais essa conquista.
- À Secretaria de Educação do Estado do Pará - SEDUC-Pa, por conceder minha liberação para conquista deste Título.
- Ao Departamento do Ensino Médio e Profissionalizante, DEMP, na pessoa do prof. Francinei Palheta, por permitir que meu horário de trabalho no departamento fosse flexível, tornando dessa maneira a conclusão deste trabalho possível.
- Aos meus colegas da, DEMP, em especial as colegas e amigas, Rosidéia Cantuária e Paola pela compreensão em relação ao meu horário de trabalho e aos meus estudos.
- Ao Programa de Doutorado em Matemática da Universidade Federal do Pará, de modo geral, pelo apoio de todos os professores que ainda que indiretamente, tenham contribuído com valiosos ensinamentos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Problemas de Transmissão para os Modelos de Timoshenko e Bresse

por Gesson José Mendes Lima

Neste trabalho analisamos o problema de transmissão para o modelo de vigas curvas governadas pelas hipóteses Bresse. Neste caso, o material considerado é misto, mais especificamente, materiais constituídos por dois diferentes tipos de componentes. O material é formado por dois componentes elásticos, sendo apenas um deles dissipativo com dissipação do tipo friccional. A existência de solução é mostrada através do Método de Galerkin. Através de técnicas multiplicativas e multiplicadores convenientes, mostramos o decaimento exponencial da solução, com isso concluímos que, apesar da dissipação está em apenas uma parte do domínio, o decaimento da solução é estendido a todo seu domínio. Em paralelo analisamos, também, um problema de transmissão para vigas de Timoshenko, mostrando que o modelo é exponencialmente estável, sendo utilizado o método da energia e técnicas específicas da teoria de semigrupo linear. [1]

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Transmissão, Bresse, Timoshenko, Decaimento exponencial e Funções Exponenciais.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Programa de Doutorado em Matemática

Problemas de Transmissão para os Modelos de Timoshenko e Bresse

by Gesson José Mendes Lima

In this work we analyze the transmission problem for the model of curved beams governed by the assumptions Bresse. In this case, the material that constitute the beam is composed by two elastic components, in which we introduce a frictional damping only one of them. To prove the existence of solution we used Galerkin method. Using multiplicative techniques and convenient multiplier, we showed the exponential decay of the solution, this way we concluded that, although the dissipation is acting only part of domain, the decay of the solution is extended to all domain. in parallel we study the existence, uniqueness and exponential decay of solutions to a transmission problem for Timoshenko beams. The method being used for energy and specific techniques theory of linear semigroup.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Estabilização da Equação da Onda	2
1.2	Problema de Transmissão na Equação da Onda	3
1.2.1	Estabilização para Problemas de Transmissão na Equação da Onda . . .	3
1.3	Estruturas Elásticas do Tipo Viga	4
1.4	Vigas Regidas pelas hipóteses Timoshenko	5
1.5	Estabilização em Vigas de Tomoshenko	6
1.6	Problema de Transmissão para Vigas de Timoshenko	9
1.6.1	Problema de Transmissão: Estabilização em Vigas de Timoshenko . . .	9
1.7	Vigas Regidas pelas hipóteses de Bresse	11
1.8	Objetivo da Tese	15
1.9	Problema de Transmissão: Vigas Regidas pelas Hipóteses de Bresse	16
1.10	Organização da Tese	18
2	Problema de Transmissão para o Sistema Elástico	19
2.1	Existência de Solução	19
2.2	Estimativa e Passagem ao Limite.	24
2.3	Regularidade de solução	31
2.4	Unicidade de solução	40
3	Decaimento Exponencial	47
3.1	Decaimento Exponencial	47
4	Problema de transmissão para o sistema de Timoshenko	103
4.1	Introdução	103

4.2	O problema de Transmissão	105
4.3	Notações e formulação de semigrupo	108
4.4	Decaimento Exponencial	112
5	Considerações Finais	123
A	Teorias das Distribuições Escalares e Análise Funcional	127
1.1	Teoria das Distribuições Escalares	127
1.1.1	Espaços Funções Testes	127
1.1.2	Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	129
1.1.3	Distribuições Escalares	130
1.1.4	Convergência e Derivada Distribucional	133
1.2	Espaços de Sobolev	134
1.2.1	O espaço $H^m(\Omega)$	134
1.2.2	Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	140
1.3	O Teorema Espectral	143
1.4	Semigrupos	145
	Referências Bibliográficas	148

CAPÍTULO 1

Introdução

Vivemos num mundo de ondas. Nossos ouvidos detectam ondas de compressão no ar como o som, e os nossos olhos detectam as ondas de luz. Quando um terremoto atinge uma cidade, a destruição é causada por ondas sísmicas que se deslocam através da Terra.

Matemáticos e cientistas não podiam deixar de pensar sobre as ondas, mas o seu ponto de partida veio das artes: como é que uma corda de violino cria um som? A questão remonta ao antigo culto grego dos pitagóricos, que descobriram que duas sequências do mesmo tipo e tensão teriam comprimentos numa relação simples, tais como 2:1 ou 3:2, e produziam notas que juntas criavam um som extraordinariamente harmonioso. Relações mais complexas eram discordantes e desagradáveis ao ouvido.

O matemático suíço Johann Bernoulli, começou a encontrar o sentido dessas observações. Em 1727, ele considerou que uma corda de violino é um modelo com um grande número de massas pontuais muito próximas e espaçadas, ligadas entre si por molas. Ele usou as leis de Newton para escrever as equações do movimento do sistema, e resolvê-las. A partir das soluções, ele concluiu que a forma mais simples para uma corda vibrante é uma curva sinusoidal. Há outros modos de vibração, bem como curvas sinusoidais em que mais de uma onda se encaixa no comprimento da corda, conhecidos pelos músicos como harmônicos.

Quase 20 anos depois, Jean Le Rond d'Alembert seguiu um procedimento semelhante, mas focou-se na simplificação das equações de movimento ao invés das suas soluções. O resultado foi uma equação elegante descrevendo como o formato da corda se altera ao longo do tempo [2].

A equação abaixo é conhecida, na literatura, como equação da onda e, modela a vibração de um corpo num meio homogêneo, isotrópico e não-dissipativo. Além disso, torna-se um sistema conservativo, quando acrescentamos as condições de contorno. Isto é, a energia total $E(t) = E(0)$ para todo $t > 0$. O significado físico para isso, é que o sistema é dito oscilante.

Esta é a equação de onda, e estabelece que a aceleração de qualquer pequeno segmento da corda é proporcional à tensão agindo sobre ela. Isso implica que as ondas cujas frequências não estão em razões simples produzem um ruído desagradável conhecido como “batidas”. Esta é uma razão pela qual as relações numéricas simples dão notas que soam harmoniosamente.

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e Δ é o operador Laplaciano. A função $u = u(x, t)$ representa o deslocamento transversal no ponto x , no instante t . A constante c representa a velocidade de propagação da onda, definida por $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, T é a tensão e ρ é a massa por unidade de tempo.

1.1 Estabilização da Equação da Onda

Tivemos contribuições importantes, de diversos autores, no sentido de estabilização da oscilação da equação (1.1), através de mecanismos dissipativos, dentre eles destacamos: friccional, térmica e viscoelásticos, com seus respectivos autores: E. Zuazua [3], obteve a taxa de decaimento da solução para uma larga classe de equação da onda com dissipação friccional. Nos trabalhos de Kim [4] e J. E. Muñoz Rivera [5], temos o decaimento exponencial das soluções, quando $t \rightarrow \infty$ em função da dissipação ser do tipo termoelástica e produzir uma diferença de temperatura suficientemente forte; veja, também, o trabalho de Z. Liu e S. Zheng, [6] onde a dissipação é do tipo, termo-elástico e visco-elástico. Os autores obtiveram, uma taxa de decaimento das soluções em função da taxa de decaimento das funções relaxação. Isto ocorre, porque o termo integral produz uma dissipação extra.

1.2 Problema de Transmissão na Equação da Onda

Nos trabalhos mencionados até aqui, a dissipação age sobre todo o domínio. Então, surge uma pergunta natural - será que o resultado permanece válido quando a dissipação ocorre sobre materiais mistos e em apenas uma parte do domínio? Para esse tipo de questionamento, existem trabalhos que corroboram para validação dessa resposta no sentido afirmativo; e esse tipo de trabalho é conhecido na literatura como problema de transmissão e é caracterizado por um sistema de E.D.P's com coeficientes descontínuos.

1.2.1 Estabilização para Problemas de Transmissão na Equação da Onda

Autores que contribuíram nessa direção, com dois tipos de dissipação, temos: J. E. Muñoz Rivera e H. P. Oquendo [7] com problema de transmissão para cordas viscoelásticas; Fatori, L. H., E. Lueders. e J. E. Muñoz Rivera [8] estudaram o problema de transmissão para um modelo termoelástico fracamente hiperbólico; D. Andrade, L. H. Fatori e J. E. Muñoz Rivera [9] estudaram o problema de transmissão na fronteira tipo memória.

No trabalho de Carolina Lupifierio Antonio [10], foi estudado o problema de transmissão em materiais constituídos por três diferentes tipos de componentes. Inicialmente o material é formado por três componentes elásticas, sendo duas delas dissipativas com dissipação do tipo friccional. Em seguida, substitui uma das dissipações por uma dissipação térmica. Quanto ao decaimento, a técnica utilizada foi a multiplicativa com multiplicadores convenientes, obtendo dessa forma o decaimento exponencial.

Tivemos contribuições mais recente, no trabalho, de Margareth Alves, Jaime Muñoz Rivera, Maurício Sepúlveda, Octávio Vera Villagrán e María Zegarra Garay [11], os autores, consideraram um problema de transmissão com dissipação localizada do tipo visco-elástica Kelvin-Voigt. E o principal resultado foi mostrar que o semigrupo correspondente $S(t)$ não é exponencialmente estável. Contudo a solução do sistema decai polinomialmente para zero com taxa $1/t^2$ quando os dados iniciais são tomados sobre o domínio $D(A)$. Além disso, provaram que esta taxa é ótima. Por fim, usando um esquema de segunda ordem que garantiu o decaimento da energia (Método Newmark-beta). Em seguida apresentaram alguns exemplos numéricos nos quais demonstram este comportamento polinomial assintótico.

1.3 Estruturas Elásticas do Tipo Viga

Pode-se dizer que as vigas foram um elemento de sustentação criado pelo homem, ainda que inconscientemente. Viga é uma estrutura linear que trabalha em posição horizontal ou inclinada, assentada em um ou mais apoios e que tem a função de suportar os carregamentos normais à sua direção.

A viga é um dos modelos fundamentais das estruturas elásticas e, é utilizada em uma variedade de aplicações como, por exemplo, em hélices de helicópteros, satélites flexíveis, asas de aviões, braços robóticos, trilhos de trens e subsistemas de estruturas mais complexas. Pode-se dizer que o astrônomo italiano Galileo Galilei (1564-1642), iniciou a idade da razão em análise estrutural, sendo, aparentemente, o primeiro a estudar a resistência dos sólidos dando origem a Mecânica dos Materiais. Em sua última publicação, *Duas Novas Ciências* (1638), discutia o problema da viga engastada carregada com seu peso próprio com peso adicional, este problema se conhece como o “Problema de Galileo”, no qual sua análise obteve resultados incorretos e não foi resolvido de maneira apropriada até 1855.

Robert Hooke (1635-1703) estudou a elasticidade dos materiais e formulou em 1660 a lei que todos conhecem e leva seu nome, a “Lei de Hooke”, publicada em 1676. Como resultado de seus estudos, inventou a mola espiral que substituiu o pêndulo dos mecanismos dos relógios.

Em 1680, Edme Mariotte (1654-1684) desenvolveu, independentemente, essa mesma lei e a aplicou às fibras de uma viga; observando que umas fibras se encurtavam e outras se esticavam, desenvolvendo o conceito de “linha neutra”.

O Problema de Galileo voltou a ser estudado por James Bernoulli (1654-1705), que supôs que uma seção plana de uma viga, permanece plana durante a flexão, mas não chegou a uma solução satisfatória porque não deu importância ao que hoje conhecemos como “linha neutra”.

Em 1717, Johann Bernoulli (1667-1748), irmão de James, enunciou o “Princípio dos Deslocamentos Virtuais”, que é o método que ainda hoje aplicamos na determinação das deflexões elásticas em estruturas. Posteriormente, seu filho Daniel Bernoulli (1700-1782), estudou o problema da determinação da curva elástica de barras flexionadas, e inspirou seu amigo Leonhard Euler (1707-1783), na determinação das curvas elásticas em vigas e colunas, contribuições ainda utilizadas na atualidade.

Após estes primeiros estudiosos, vários pesquisadores como: Charles Coulomb (1736-1806), Lamè (1795-1870), B.P.E. Clapeyron (1799-1864), Barrè de Saint-Venant (1797-1886), Agustín Louis Cauchy (1789-1857), William John Macquorn Rankine (1820-1872), Otto Christian Mohr (1835-1918), Jacques Antonie Charles Bresse (1822-1833), Sthepen Prokofievich Timoshenko (1878-1972) dentre outros, desenvolveram ou aperfeiçoaram formulações aplicadas na análise estrutural, sobretudo no estudo de vigas.

1.4 Vigas Regidas pelas hipóteses Timoshenko

Descrevemos, de modo geral, as equações unidimensionais que regem a teoria de Timoshenko para o estiramento de viga por:

$$\rho A \varphi_{tt}(x, t) = S_x(x, t) \quad (1.2)$$

$$\rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) + s(x, t), \quad (1.3)$$

onde t é o tempo, x a distância ao longo da linha central da viga, φ é o deslocamento transversal, ψ a rotação nas secções transversais, ρ a densidade da massa do material do qual a viga é composta, M o momento de curvatura, S o esforço cortante, A a área da secção transversal e I o momento de inércia da área da secção.

As relações de tensão-estiramento para o comportamento elástico da viga são dadas por:

$$M_x(x, t) = EI \psi_x(x, t) \quad (1.4)$$

$$S_x(x, t) = kAG(\varphi_x(x, t) - \psi(x, t)), \quad (1.5)$$

onde E é o módulo de elasticidade de Young, G o módulo de rigidez do cortante e k o fator de correção do cortante. Dessa forma Timoshenko estabeleceu as seguintes equações diferenciais parciais hiperbólicas e acopladas:

$$\rho A \varphi_{tt} - (kAG(\varphi_x - \psi))_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.6)$$

$$\rho I \psi_{tt} - (EI \psi_x)_x - kAG(\varphi_x - \psi) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T). \quad (1.7)$$

Sistemas que envolvem as equações de Timoshenko, com mecanismos dissipativos são amplos na literatura. Em seus estudos, os pesquisadores em matemática, estão interessados em verificar o comportamento assintótico das soluções a partir desses mecanismos. Isto é, verificar se esses mecanismos são suficientemente fortes para estabilizar o sistema. Se verificado a estabilização, qual será a taxa de decaimento para isso?. Nessa direção, estuda-se o comportamento assintótico das soluções visando um controle sobre as mesmas. Controle esse, que pode ser do tipo exponencial ou polinomial. Em busca da estabilização do sistema, utilizamos o método da energia, técnicas multiplicativas com multiplicadores convenientes e técnicas específicas da teoria de semigrupos de operadores lineares Pazy [1].

Um sistema é exponencialmente estável, quando existirem constantes positivas C e ω tal que

$$\|U(t)\| \leq C e^{-\omega t} \|U(0)\|, \forall t > 0, \quad (1.8)$$

onde $U(t)$ associado ao modelo resolve um problema de valor inicial em E.D.P's. Assim, se o sistema for exponencialmente estável, então teremos o decaimento exponencial das soluções. Caso contrário, teremos o decaimento “fraco” ou decaimento polinomial.

1.5 Estabilização em Vigas de Tomoshenko

Para ilustrar o decaimento exponencial das soluções, com alguns mecanismos dissipativos, destacamos alguns trabalhos, autores e suas contribuições relevantes no que concerne ao paradigma, vigas de Timoshenko.

Kim e Renardy [12] investigaram a estabilização uniforme para equações (1.6) - (1.7) com mecanismo de controle tipo atrito atuando somente nos termos de fronteira, como mostra as equações abaixo:

$$\kappa \varphi_x(L, t) - \kappa \psi(L, t) = -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) \forall t > 0 \quad (1.9)$$

$$EI \psi_x(L, t) = -\beta \frac{\partial \psi}{\partial t}(L, t) \forall t > 0, \quad (1.10)$$

onde $\kappa = kGA$, EI , α e β constantes positiva. Os autores mostraram através das técnicas multiplicativas que o decaimento das soluções é exponencial.

Soufyane [13], considerou o modelo abaixo, com um único amortecimento do tipo atrito e provou que a energia das soluções decrescem exponencialmente se, e somente se, as velocidades associadas ao sistema são iguais. Para a estabilização desse modelo usou as técnicas desenvolvidas por Neves [14]. Soufyane, também, foi considerado o primeiro a identificar as condições das velocidades iguais para se obter a propriedade de estabilidade exponencial.

$$\rho\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x - \psi)_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.11)$$

$$I_\rho\psi_{tt} - EI\psi_{xx} - \kappa(\varphi_x - \psi) + b(x)\psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T). \quad (1.12)$$

com as condições de contorno:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) \forall t > 0, \quad (1.13)$$

onde, $I_\rho = \rho I$, $\rho = \rho A$, $\kappa = kGA$ e $b(x)$ uma função contínua e positiva tal que $0 < b_0 \leq b(x) \leq b_1$.

Jaime Muñoz Rivera e Reinhard Racke [15] estudaram o modelo Linear abaixo, com a constante de proporcionalidade do termo de amortecimento $d > 0$. Além disso, provaram, assim como Soufyane, que o decaimento exponencial das soluções ocorre se, e somente se, as velocidades associadas ao sistema são iguais:

$$\rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x - \psi)_x = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.14)$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x - \psi) + d\psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.15)$$

com as condições de contorno:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) \forall t > 0, \quad (1.16)$$

onde, $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kGA$ e $b = EI$.

Mauro de Lima santos [16] estudou taxas de decaimento para soluções de um sistema de Timoshenko com condições de “memória” agindo sobre a fronteira, provando que a energia decai exponencialmente ou polinomialmente, desde que as funções de relaxações também possuam decaimento exponencial e polinomial, respectivamente. Nesse trabalho o autor não usou nenhuma hipótese sobre as velocidades de propagações de ondas.

C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, e N. N. O. Castro [17], contribuíram através do sistema linear com o mecanismo dissipativo do tipo atrito nas duas equações. Para mostrar o decaimento exponencial, utilizaram o método de Z. Liu e S. Zheng [18] e seus colaboradores. Método este, que difere de alguns métodos existente na literatura como, por exemplo, o método da energia.

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \varphi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.17)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T). \quad (1.18)$$

com as condições de contorno:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) \forall t > 0. \quad (1.19)$$

D. S. Almeida Júnior, M. L. Santos e J. E. Muñoz Rivera [19], analisaram o sistema Timoshenko, abaixo, com um único mecanismos dissipativo do tipo atrito na oscilação vertical. Mostraram que o modelo é exponencialmente estável se, e somente se, as velocidades associadas ao sistema são iguais. Para isso, utilizaram teorema de estabilização uniforme de Gearhart-Herbst-Huang-Pruss ([20],[21],[22],[23]). Caso contrário, os autores mostram, usando resultado recente de Borichev e Tomilov [24], que o sistema Timoshenko é polinomialmente estável, exibindo a taxa ótima.

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \varphi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.20)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, T) \quad (1.21)$$

com as condições de contorno,

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) \forall t > 0, \quad (1.22)$$

condições de dados iniciais,

$$\varphi(., 0) = \varphi_0; \varphi_t(., 0) = \varphi_1; \psi(., 0) = \psi_0; \psi_t(., 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L). \quad (1.23)$$

1.6 Problema de Transmissão para Vigas de Timoshenko

Novamente, observa-se, como na equação da onda, que as dissipações agem sobre todo domínio. Então surge um questionamento, também de forma natural: Será que os resultados permanecem válidos, com as dissipações agindo em apenas uma parte do domínio, assim como ocorreu para equação da onda?. Em outras palavras, será possível estender o problema de transmissão que ocorre na equação da onda, para vigas do tipo Timoshenko?. A resposta é:- sim, novamente; podemos estender o problema de transmissão para o sistema de Timoshenko e nessa direção, temos trabalhos importantes que sinalizam para esse fato.

1.6.1 Problema de Transmissão: Estabilização em Vigas de Timoshenko

Carlos Alberto Raposo [25]. Neste trabalho, o autor, estudou o problema de transmissão, abaixo, em materiais constituídos por dois diferentes tipos de componentes. O material é formado por duas componentes, uma elástica e a outra com viscosidade, com dissipação do tipo memória. Quanto ao decaimento, mostrou que as soluções do sistema decaem exponencial para zero, desde que as funções de relaxamento decaiam exponencial.

$$\rho_1^1 \phi_{tt}^1 - \kappa_1(\phi_x^1 + \psi^1)_x = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, T) \quad (1.24)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \kappa_1(\phi_x^1 + \psi^1) + g * \psi_{xx}^1 = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, T) \quad (1.25)$$

$$\rho_1^2 \phi_{tt}^2 - \kappa_2(\phi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, T) \quad (1.26)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + \kappa_2(\phi_x^2 + \psi^2) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, T) \quad (1.27)$$

com as condições de contorno:

$$\phi^1(0, t) = \phi^2(L, t) = \psi^1(0, t) = \phi^2(L, t) \forall t > 0, \quad (1.28)$$

condições de dados iniciais:

$$\phi^1(., 0) = \phi_0^1; \phi_t^1(., 0) = \phi_1^1; \psi^1(., 0) = \psi_0^1; \psi_t^1(., 0) = \psi_1^1 \quad \forall x \in (0, L_0). \quad (1.29)$$

$$\phi^2(., 0) = \phi_0^2; \phi_t^2(., 0) = \phi_1^2; \psi^2(., 0) = \psi_0^2; \psi_t^2(., 0) = \psi_1^2 \quad \forall x \in (L_0, L). \quad (1.30)$$

Condições de transmissão:

$$\begin{aligned}\phi^1(L_0, t) &= \phi^2(L_0, t); \phi_x^1(L_0, t) = \phi_x^2(L_0, t) \\ b_2\psi_x^2(L_0, t) &= b_1\psi_x^1 - g * \psi_x^1(L_0, t) \\ \psi^1(L_0, t) &= \psi^2(L_0, t).\end{aligned}\tag{1.31}$$

C. A. Raposo, W. D. Bastos e M. L. Santos [26] Neste artigo, os autores analisaram um problema de transmissão para o modelo de viga do tipo Timoshenko, como mostra o sistema abaixo: um material misto, sendo uma parte com atrito e outra puramente elástica, com dois mecanismo dissipativo do tipo atrito na oscilação vertical e ângulo de rotação, ambos, em apenas uma parte da viga. Quanto ao decaimento, utilizaram o método da energia, juntamente com a técnica multiplicativa e multiplicadores convenientes.

$$\rho_1^1 u_{tt} - \kappa_1(u_x + \psi)_x + u_t = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, T) \tag{1.32}$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt} - b_1 \psi_{xx} + \kappa_1(\varphi_x + \psi) + \psi_t = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, T) \tag{1.33}$$

$$\rho_1^2 v_{tt} - \kappa_2(v_x + \phi)_x = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, T) \tag{1.34}$$

$$\rho_2^2 \phi_{tt} - b_2 \phi_{xx} + \kappa_2(v_x + \phi) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, T) \tag{1.35}$$

com as condições de contorno:

$$u(0, t) = v(L, t) = \psi(0, t) = \phi(L, t) \forall t > 0, \tag{1.36}$$

condições de dados iniciais:

$$u(., 0) = u_0; u_t(., 0) = u_1; \psi(., 0) = \psi_0; \psi_t(., 0) = \psi_1 \quad \forall x \in (0, L_0). \tag{1.37}$$

$$v(., 0) = v_0; v_t(., 0) = v_1; \phi(., 0) = \phi_0; \phi_t(., 0) = \phi_1 \quad \forall x \in (L_0, L). \tag{1.38}$$

Condições de transmissão:

$$\begin{aligned}\kappa_1 u(L_0, t) &= \kappa_2 v(L_0, t); \kappa_1 u_x(L_0, t) = \kappa_2 v_x(L_0, t). \\ \rho_1^1 u_t(L_0, t) &= \rho_2^2 v_t(L_0, t); \kappa_1 \psi(L_0, t) = \kappa_2 \phi(L_0, t) \\ \kappa_1 \psi_x(L_0, t) &= \kappa_2 \phi_x(L_0, t); \rho_1^1 \psi_t(L_0, t) = \rho_2^2 \phi_t(L_0, t).\end{aligned}\tag{1.39}$$

1.7 Vigas Regidas pelas hipóteses de Bresse

Estruturas elásticas do tipo arcos, são objetos de estudos e amplamente exploradas por diversos profissionais, entre eles podemos destacar engenheiros civis, engenheiros navais, arquitetos e outros. As vibrações sobre estruturas elásticas e suas propriedades são de grande interesse de estudo tanto para engenheiros, quanto para os matemáticos.

Basicamente, as hipóteses para o modelo dinâmico de vigas curvas são realizadas considerando uma curvatura no plano de um arco circular de comprimento L , raio R , secção transversal A , momento de inércia I , módulo de Young E , módulo do cortante G e fator de correção k , no esforço cortante da estrutura.

As equações diferenciais que governam o estiramento de uma viga curva, são expressas pelas seguintes leis:

$$\rho A \varphi_{tt} = Q_x + R^{-1} N \quad (1.40)$$

$$\rho I \psi_{tt} = M_x - Q \quad (1.41)$$

$$\rho A \omega_{tt} = N_x - R^{-1} Q \quad (1.42)$$

Equações de Tensão-Estiramento ε , γ e $\hat{k}$:

$$\varepsilon = \omega_x - R^{-1} \omega \quad (1.43)$$

$$\gamma = \varphi_x + R^{-1} \omega + \psi \quad (1.44)$$

$$\hat{k} = \psi_x \quad (1.45)$$

Equações Elásticas Constitutivas N , Q e M :

$$N = EA\varepsilon \quad (1.46)$$

$$Q = \kappa GA\gamma \quad (1.47)$$

$$M = EI\hat{k} \quad (1.48)$$

em que t é o tempo e x a distância ao longo da linha central da viga curva. No primeiro conjunto de equações, as forças internas são a força axial N , a força cortante Q e o momento da curvatura M . O deslocamento total da linha central da viga curva possui um deslocamento tangencial ω , um deslocamento transversal/normal φ e a rotação das secções transversais denotado por ψ .

Das equações (1.40) - (1.48), segue as seguintes equações hiperbólicas e acopladas, conhecidas como equações de Bresse [27]:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + \omega)_x + \kappa_0 l (\omega_x - l\varphi) = 0 \quad (1.49)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \quad (1.50)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + l\omega) = 0. \quad (1.51)$$

Onde, $\rho_1 = \rho.A$, $\rho_2 = \rho.I$, $\kappa = \kappa.GA$, $\kappa_0 = EA$, $b = EI$, $l = R^{-1}$.

Temos diversos trabalhos que abordam o decaimento exponencial, em vigas curvas, com mecanismos dissipativos. Entre eles destacamos:

Almeida Junior, D. S. [28], estudou o sistema, abaixo, com o objetivo inicial de assegurar quais mecanismos dissipativos são suficientes para estabilizar o modelo, sem a necessidade da igualdade entre as velocidades de propagação de onda. Em seguida, considera poucos mecanismos dissipativos e a parti daí, constrói o decaimento exponencial com a hipótese de igualdade entre as velocidades. Para isso, usou método da energia e técnicas de simigrupos de operadores lineares.

Sistema de Bresse, com termo dissipativo é modelado por:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + \omega)_x + \kappa_0 l (\omega_x - l\varphi) + \gamma_1 \varphi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.52)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma_2 \psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.53)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma_3 \omega_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.54)$$

com $0 < \gamma_i (i = 1, 2, 3)$ e $\rho_1, \kappa, \rho_2, b, l, \kappa_0$ positivas e constantes.

As condições iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi(., 0) &= \varphi_0(., 0), \psi(., 0) = \psi_0(., 0), \omega(., 0) = \omega_0(., 0); \\ \varphi_t(., 0) &= \varphi_1(., 0), \psi_t(., 0) = \psi_1(., 0); \omega_t(., 0) = \omega_1(., 0); \forall x \in (0, L) \end{aligned} \quad (1.55)$$

Estão sujeitas às condições contorno:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \omega_x(0, t) = \omega_x(L, t) = 0 \text{ para } t > 0 \quad (1.56)$$

Mauro de L. Santos e Dilberto da S. Almeida Júnior [29], analisaram o modelo abaixo, usando mecanismos dissipativos do tipo atrito, nas três equações. E provaram o decaimento exponencial das soluções, utilizando o método desenvolvido por Z. Liu e S. Zeng e seus colaboradores [18]. Por fim, usaram o método de diferenças finitas para validar os resultados teórico feitos para o caso analítico.

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + \omega)_x + \kappa_0 l (\omega_x - l\varphi) + \gamma_1 \varphi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.57)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma_2 \psi_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.58)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma_3 \omega_t = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.59)$$

com $0 < \gamma_i (i = 1, 2, 3)$ e $\rho_1, \kappa, \rho_2, b, l, \kappa_0$ positivas e constantes.

As condições iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi(., 0) &= \varphi_0(., 0), \quad \psi(., 0) = \psi_0(., 0), \quad \omega(., 0) = \omega_0(., 0); \\ \varphi_t(., 0) &= \varphi_1(., 0), \quad \psi_t(., 0) = \psi_1(., 0); \quad \omega_t(., 0) = \omega_1(., 0), \quad \forall x \in (0, L) \end{aligned} \quad (1.60)$$

Estão sujeitas às condições contorno de Dirichlet:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0 \text{ para } t > 0. \quad (1.61)$$

Fatiha Alabau Boussouira, Jaime E. Muñoz Rivera, e Dilberto da S. Almeida Júnior [30], trabalharam no modelo abaixo, com o mecanismo dissipativo tipo friccional, somente no ângulo deslocamento. Provaram que esse mecanismo dissipativo é suficiente para estabilizar exponencialmente todo o sistema, desde que as velocidades de propagação de ondas sejam iguais. Caso contrário, provam que a solução decai polinomialmente para zero, com taxas que podem ser melhoradas, desde que os dados iniciais sejam mais regulares. Por último, obtiveram resultados numéricos para validar os resultados analíticos.

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + \omega)_x + \kappa_0 l (\omega_x - l\varphi) = F_1 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.62)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l\omega) = F_2 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.63)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l\varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + l\omega) = F_3 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.64)$$

com $0 < \gamma, \rho_1, \kappa, \rho_2, b, l, \kappa_0$ positivas e constantes. Consideram também $F_1 = F_3 = 0$ e $F_2 = -\gamma \psi_t$

As condições iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned}\varphi(., 0) &= \varphi_0(., 0), \quad \psi(., 0) = \psi_0(., 0), \quad \omega(., 0) = \omega_0(., 0), \\ \varphi_t(., 0) &= \varphi_1(., 0), \quad \psi_t(., 0) = \psi_1(., 0), \quad \omega_t(., 0) = \omega_1(., 0), \quad \forall x \in (0, L)\end{aligned}\quad (1.65)$$

Estão sujeitas às condições contorno de Dirichlet:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0 \quad t \in (0, \infty). \quad (1.66)$$

Ou estão sujeitas às condições contorno de Dirichlet - Neumann:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \omega_x(0, t) = \omega_x(L, t) = 0 \quad t \in (0, \infty). \quad (1.67)$$

Fatori L. H. e Muñoz Rivera J. E. [8], fizeram a análise do sistema abaixo, considerando o mecanismo dissipativo do tipo térmico somente na segunda equação e mostraram que existe estabilidade exponencial se, e somente se, as velocidades de propagação da onda são iguais. Mostraram que em geral o sistema não é exponencialmente estável, mas existe a estabilidade polinomial com taxas que dependem da propagação da onda e da regularidade dos dados iniciais.

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + \omega)_x + \kappa_0 l (\omega_x - l \varphi) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.68)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l \omega) + \gamma \theta_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.69)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l \varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + l \omega) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.70)$$

$$\theta_t - \kappa_1 \theta_{xx} + m \psi_{xt} = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.71)$$

com $0 < \gamma, \rho_1, \kappa, \rho_2, b, l, \kappa_0$ e m positivas e constantes.

As condições iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned}\varphi(., 0) &= \varphi_0(., 0), \quad \psi(., 0) = \psi_0(., 0); \quad \omega(., 0) = \omega_0(., 0); \quad \theta(., 0) = \theta_0, \\ \varphi_t(., 0) &= \varphi_1(., 0), \quad \psi_t(., 0) = \psi_1(., 0), \quad \omega_t(., 0) = \omega_1(., 0); \quad \forall x \in (0, L)\end{aligned}\quad (1.72)$$

Estão sujeitas às condições contorno de Dirichlet:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0; \quad \theta(0, t) = \theta(L, t); \quad t \in (0, \infty). \quad (1.73)$$

Ou estão sujeitas às condições contorno de Dirichlet - Neumann:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \omega_x^1(0, t) = \omega_x(L, t) = 0; \theta(0, t) = \theta(L, t); t \in (0, \infty). \quad (1.74)$$

M. L. Santos, A. Soufyane, e D. S. A. Júnior, mostraram que existe estabilidade exponencial se, e somente se, as velocidades de propagação da onda são iguais. Caso contrário, o decaimento é polinomial e exibiram uma taxa ótima.

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + \omega)_x + \kappa_0 l (\omega_x - l \varphi) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \int_0^\infty g(s) \psi_{xx}(t-s) + \kappa (\varphi_x + \psi + l \omega) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \\ \rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l \varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + l \omega) &= 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

com $0 < \gamma_i (i = 1, 2, 3)$ e $\rho_1, \kappa, \rho_2, b, l, \kappa_0$ positivas e constantes.

As condições iniciais são dadas por:

$$\begin{aligned} \varphi(., 0) &= \varphi_0(., 0), \psi(., 0) = \psi_0(., 0), \omega(., 0) = \omega_0(., 0); \\ \varphi_t(., 0) &= \varphi_1(., 0), \psi_t(., 0) = \psi_1(., 0); \omega_t(., 0) = \omega_1(., 0), \forall x \in (0, L) \end{aligned}$$

1.8 Objetivo da Tese

Até o momento tivemos uma resposta afirmativa para os questionamentos feitos, tanto para equação da onda, quanto para vigas do tipo Timoshenko sobre a possibilidade do decaimento da energia que, apesar da dissipação está ocorrendo, apenas, em uma parte de seu domínio, o decaimento das soluções é estendido para todo seu domínio. Sendo, ainda, mostrado que esses decaimentos podem ser do tipo exponencial ou polinomial.

Problemas desse tipo são caracterizados na literatura como problema de transmissão. E usando a mesma linha de raciocínio, o objetivo desta tese consiste em analisar o decaimento exponencial, existência e unicidade de soluções no caso unidimensional, para o problema de transmissão, abaixo, para vigas curvas regidas pelas hipóteses de Bresse.

Em paralelo analisamos, também, um problema de transmissão para vigas de Timoshenko, mostrando que o modelo é exponencialmente estável. Sendo utilizado o método da energia e técnicas específicas da teoria de semigrupo linear. [1]

1.9 Problema de Transmissão: Vigas Regidas pelas Hipóteses de Bresse

A partir do sistema de Bresse Homogêneo, abaixo:

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa (\varphi_x + \psi + \omega)_x + \kappa_0 l (\omega_x - l \varphi) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.75)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + \kappa (\varphi_x + \psi + l \omega) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (1.76)$$

$$\rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0 (\omega_x - l \varphi)_x + \kappa l (\varphi_x + \psi + l \omega) = 0 \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.77)$$

com suas, respectivas, condições de dados iniciais e contorno,

Estão sujeitas às condições de dados:

$$\begin{aligned} \varphi(., 0) &= \varphi_0(., 0), \quad \psi(., 0) = \psi_0(., 0), \quad \omega(., 0) = \omega_0(., 0), \\ \varphi_t(., 0) &= \varphi_1(., 0), \quad \psi_t(., 0) = \psi_1(., 0), \quad \omega_t(., 0) = \omega_1(., 0), \quad \forall x \in (0, L) \end{aligned} \quad (1.78)$$

Estão sujeitas às condições contorno de Dirichlet:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \omega(0, t) = \omega(L, t) = 0 \quad t \in (0, \infty). \quad (1.79)$$

Considerando, respectivamente, as seguintes variações e notações:

Variações

Quando $i = 1, 2$ teremos os respectivos intervalos: $(0, L_0)$ e (L_0, L) .

Notações:

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \rho_j^1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ \rho_j^2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases}, \quad \kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ \kappa_2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases},$$

$$b(x) = \begin{cases} b_1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ b_2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases} \quad e \quad \kappa_0(x) = \begin{cases} \kappa_0^1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ \kappa_0^2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases}$$

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \varphi^1(x, t), & \text{se } x \in (0, L_0) \times (0, \infty) \\ \varphi^2(x, t), & \text{se } x \in (L_0, L) \times (0, \infty) \end{cases}$$

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \psi^1(x, t), & \text{se } x \in (0, L_0) \times (0, \infty) \\ \psi^2(x, t), & \text{se } x \in (L_0, L) \times (0, \infty) \end{cases}$$

$$\omega(x, t) = \begin{cases} \omega^1(x, t), & \text{se } x \in (0, L_0) \times (0, \infty) \\ \omega^2(x, t), & \text{se } x \in (L_0, L) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Teremos o Problema de transmissão para o sistema de Bresse, modelado por:

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)_x - \kappa_0^1 l (\omega_x^1 - l\varphi^1) + \gamma_1 \varphi_t^1 = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (1.80)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) + \gamma_2 \psi_t^1 = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (1.81)$$

$$\rho_1^1 \omega_{tt}^1 - \kappa_0^1 (\omega_x^1 - l\varphi^1)_x + \kappa_1 l (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) + \gamma_3 \omega_t^1 = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (1.82)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2)_x - \kappa_0^2 l (\omega_x^2 - l\varphi^2) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (1.83)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (1.84)$$

$$\rho_1^2 \omega_{tt}^2 - \kappa_0^2 (\omega_x^2 - l\varphi^2)_x + \kappa_2 l (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (1.85)$$

estão sujeitas às condições contorno:

$$\varphi^1(0, t) = \varphi^2(L, t) = \psi^1(0, t) = \psi^2(L, t) = \omega^1(0, t) = \omega^2(L, t) = 0 \text{ para } t > 0 \quad (1.86)$$

às condições de transmissão:

$$\kappa_1 \varphi^1(L_0, t) = \kappa_2 \varphi^2(L_0, t), \quad \kappa_1 \varphi_x^1(L_0, t) = \kappa_2 \varphi_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 \varphi_t^1(L_0, t) = \rho_2^2 \varphi_t^2(L_0, t) \quad (1.87)$$

$$\kappa_1 \psi^1(L_0, t) = \kappa_2 \psi^2(L_0, t), \quad b_1 \psi_x^1(L_0, t) = b_2 \psi_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 \psi_t^1(L_0, t) = \rho_2^2 \psi_t^2(L_0, t) \quad (1.88)$$

$$\kappa_1 \omega^1(L_0, t) = \kappa_2 \omega^2(L_0, t), \quad \kappa_0^1 \omega_x^1(L_0, t) = \kappa_0^2 \omega_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 \omega_t^1(L_0, t) = \rho_2^2 \omega_t^2(L_0, t) \quad (1.89)$$

$$\kappa_0^1 \omega^1(L_0, t) = \kappa_0^2 \omega^2(L_0, t), \quad \kappa_0^1 \varphi^1(L_0, t) = \kappa_0^2 \varphi^2(L_0, t). \quad (1.90)$$

e às condições iniciais:

$$\varphi^i(., 0) = \varphi_0^i(., 0), \quad \psi^i(., 0) = \psi_0^i(., 0), \quad \omega^i(., 0) = \omega_0^i(., 0), \quad i = 1, 2 \quad (1.91)$$

$$\varphi_t^i(., 0) = \varphi_1^i(., 0), \quad \psi_t^i(., 0) = \psi_1^i(., 0), \quad \omega_t^i(., 0) = \omega_1^i(., 0), \quad i = 1, 2. \quad (1.92)$$

Aqui, $\rho_1 = \rho.A$, $\rho_2 = \rho.I$, $\kappa = \kappa.GA$, $\kappa_0 = EA$, $b = EI$, $l = R^{-1}$, onde ρ denota a densidade, E o módulo de elasticidade Young, G o módulo de rigidez do cortante, K o fator de correção do cortante, A representa a área transversal, I o segundo momento de área da secção transversal, R o raio de curvatura.

1.10 Organização da Tese

No capítulo 2 analisamos a existência de solução fraca, regularidade e a unicidade de solução no problema de transmissão para o modelo de Bresse. Levando em consideração a dissipação atuando na oscilação vertical φ , longitudinal ω e no ângulo de rotação ψ da secção transversal, somente nas três primeiras equações.

No capítulo 3 analisamos o decaimento exponencial para zero quando $t \rightarrow \infty$ para problema de transmissão com o sistema de Bresse. Para isso utilizamos um problema de transmissão com sistema equivalente. A partir desse novo problema, construímos o funcional de Lyapunov e através da técnicas multiplicativas, com multiplicadores convenientes mostramos o decaimento exponencial para zero desse novo sistema, o que implicou, também, no decaimento exponencial para o sistema original de nosso estudo.

No capítulo 4 analisamos a existência de solução, regularidade e a unicidade de solução no problema de transmissão para o modelo de Timoshenko, utilizando para isso a técnica de semigrupo [1], além de mostrarmos que o sistema é exponencialmente estável, através do método da energia.

CAPÍTULO 2

Problema de Transmissão para o Sistema Elástico

Neste capítulo mostraremos existência de solução fraca, regularidade e unicidade de solução para o problema de transmissão para o sistema de Bresse com termos dissipativos atuando na oscilação vertical φ , longitudinal ω e no ângulo de rotação da secção transversal ψ , isto é, analisaremos o modelo abaixo, com dissipação do tipo friccional nas três primeiras equações.

2.1 Existência de Solução

O Problema de transmissão para o sistema de Bresse, é modelado por:

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)_x - \kappa_0^l l (\omega_x^1 - l\varphi^1) + \gamma_1 \varphi_t^1 = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (2.1)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) + \gamma_2 \psi_t^1 = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (2.2)$$

$$\rho_1^1 \omega_{tt}^1 - \kappa_0^1 (\omega_x^1 - l\varphi^1)_x + \kappa_1 l (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) + \gamma_3 \omega_t^1 = 0 \text{ em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (2.3)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2)_x - \kappa_0^2 l (\omega_x^2 - l\varphi^2) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (2.4)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (2.5)$$

$$\rho_1^2 \omega_{tt}^2 - \kappa_0^2 (\omega_x^2 - l\varphi^2)_x + \kappa_2 l (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) = 0 \text{ em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (2.6)$$

estão sujeitas às condições contorno:

$$\varphi^1(0, t) = \varphi^2(L, t) = \psi^1(0, t) = \psi^2(L, t) = \omega^1(0, t) = \omega^2(L, t) = 0 \text{ para } t > 0 \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

às condições de transmissão:

$$\kappa_1 \varphi^1(L_0, t) = \kappa_2 \varphi^2(L_0, t), \quad \kappa_1 \varphi_x^1(L_0, t) = \kappa_2 \varphi_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 \varphi_t^1(L_0, t) = \rho_2^2 \varphi_t^2(L_0, t) \quad (2.9)$$

$$\kappa_1 \psi^1(L_0, t) = \kappa_2 \psi^2(L_0, t), \quad b_1 \psi_x^1(L_0, t) = b_2 \psi_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 \psi_t^1(L_0, t) = \rho_2^2 \psi_t^2(L_0, t) \quad (2.10)$$

$$\kappa_1 \omega^1(L_0, t) = \kappa_2 \omega^2(L_0, t), \quad \kappa_0^1 \omega_x^1(L_0, t) = \kappa_0^2 \omega_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 \omega_t^1(L_0, t) = \rho_2^2 \omega_t^2(L_0, t) \quad (2.11)$$

$$\kappa_0^1 \omega^1(L_0, t) = \kappa_0^2 \omega^2(L_0, t), \quad \kappa_0^1 \varphi^1(L_0, t) = \kappa_0^2 \varphi^2(L_0, t). \quad (2.12)$$

e às condições iniciais:

$$\varphi^i(., 0) = \varphi_0^i(., 0), \quad \psi^i(., 0) = \psi_0^i(., 0), \quad \omega^i(., 0) = \omega_0^i(., 0), \quad i = 1, 2 \quad (2.13)$$

$$\varphi_t^i(., 0) = \varphi_1^i(., 0), \quad \psi_t^i(., 0) = \psi_1^i(., 0), \quad \omega_t^i(., 0) = \omega_1^i(., 0), \quad i = 1, 2. \quad (2.14)$$

Aqui, $\rho_1 = \rho.A$, $\rho_2 = \rho.I$, $\kappa = \kappa.GA$, $\kappa_0 = EA$, $b = EI$, $l = R^{-1}$, onde ρ denota a densidade, E o módulo de elasticidade Young, G o módulo de rigidez do cortante, K o fator de correção do cortante, A representa a área transversal, I o segundo momento de área da secção transversal, R o raio de curvatura. Para demonstrarmos o Teorema a seguir e facilitar o entendimento de nosso estudo, dividiremos nosso último sistema em dois, P_1 e P_2 . Onde P_1 é constituído pelas três primeiras equações e P_2 pelas três últimas, com suas respectivas energias.

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 + |\varphi_x^1 + \psi^1 + \omega^1|^2 + \kappa_0^1 |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2 \} dx$$

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \{ \rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + |\varphi_x^2 + \psi^2 + \omega^2|^2 + \kappa_0^2 |\omega_x^2 - l\varphi^2|^2 \} dx.$$

Portanto, a energia total do sistema é dada por:

$$E_T(t) = E_1(t) + E_2(t)$$

Definição 2.1. Sejam $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}^m$ e $\mathcal{L}^2$ espaços definidos por

$$\mathcal{V} = \{ (\bar{u}, u) \in H^1(0, L_0) \times H^1(L_0, L); \bar{u}(0) = u(L) = 0, \bar{u}(L_0) = u(L_0) \}$$

$$\mathcal{H}^m = H^m(0, L_0) \times H^m(L_0, L) \text{ e } \mathcal{L}^2 = L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L).$$

Dizemos que $(\varphi^1, \psi^1, \omega^1, \varphi^2, \psi^2, \omega^2)$ é solução fraca para o problema (2.1) à (2.14) se para todo $((u, \bar{u}), (h, z), (v, w)) \in H_0^1(0, T; \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V})$ satisfaz as equações:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_t^1 \bar{u}(x, t) dx \right]_0^T - \int_0^T \int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_t^1 \bar{u}_t(x, t) dx dt + \\
& \left[\int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_t^2 u(x, t) dx \right]_0^T - \int_0^T \int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_t^2 u_t(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) \bar{u}_x(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) u_x(x, t) dx dt - \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^1 - l\varphi^1) \bar{u}(x, t) dx dt - \int_0^T \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^2 - l\varphi^2) u(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_t^1 \bar{u}(x, t) dx dt = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_t^1 h(x, t) dx \right]_0^T - \int_0^T \int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_t^1 h_t(x, t) dx dt + \\
& \left[\int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_t^2 z(x, t) dx \right]_0^T - \int_0^T \int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_t^2 z_t(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^1 - l\varphi^1) h_x(x, t) dx dt - \int_0^T \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^2 - l\varphi^2) z_x(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) h(x, t) dx dt - \int_0^T \int_{L_0}^L \kappa_2 l (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) z(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} \gamma_3 \omega_t^1 h(x, t) dx dt = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^{L_0} \rho_1^1 \psi_t^1 v(x, t) dx \right]_0^T - \int_0^T \int_0^{L_0} \rho_1^1 \psi_t^1 v_t(x, t) dx dt + \\
& \left[\int_{L_0}^L \rho_1^2 \psi_t^2 w(x, t) dx \right]_0^T - \int_0^T \int_{L_0}^L \rho_1^2 \psi_t^2 + w_t(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} b_1 \psi_x^1 v_x(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{L_0}^L b_2 \psi_x^2 w_x(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) v(x, t) dx dt + \int_0^T \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) w(x, t) dx dt + \\
& \int_0^T \int_0^{l_0} \gamma_2 \psi_t^1 v(x, t) dx dt = 0,
\end{aligned}$$

temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. Se $(\varphi_0^1, \psi_0^1, \omega_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^2, \omega_0^2) \in \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V}$ e $(\varphi_1^1, \psi_1^1, \omega_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^2, \omega_1^2) \in \mathcal{L}^2$, satisfazendo as condições de transmissão. Então existe uma única solução fraca $(\varphi^1, \psi^1, \omega^1, \varphi^2, \psi^2, \omega^2)$ para o sistema (2.1) à (2.14), satisfazendo

$$(\varphi^1, \varphi^2), (\psi^1, \psi^2), (\omega^1, \omega^2) \in C(0, \infty, \mathcal{V}) \cap C^1(0, \infty, \mathcal{L}^2).$$

Além disso, se $(\varphi_0^1, \varphi_0^2), (\psi_0^1, \psi_0^2), (\omega_0^1, \omega_0^2) \in \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V}$ e $(\varphi_1^1, \varphi_1^2), (\psi_1^1, \psi_1^2), (\omega_1^1, \omega_1^2) \in \mathcal{V}$. Então a solução fraca é uma solução forte e satisfaz

$$(\varphi^1, \varphi^2), (\psi^1, \psi^2), (\omega^1, \omega^2) \in C(0, \infty, \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V}) \cap C^1(0, \infty, \mathcal{V}) \cap C^2(0, \infty, \mathcal{L}^2).$$

Prova. O método utilizado para mostrar a existência de solução é o de Faedo-Galerkin que garante a uma sequência de soluções aproximadas do nosso problema. Em seguida, mostraremos que a sequência em questão convergirá para solução do problema numa topologia conveniente e isso será demonstrado através de estimativas a priori e que, por conveniência será dividida em etapas como segue abaixo.

(I) Problema aproximado;

(II) Estimativa a priori e passagem ao limite;

(III) Regularidade de solução;

(IV) Unicidade de solução.

Consideramos um sistema ortonormal completo de H constituído de vetores próprios do operador A e $\{\lambda_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ a correspondente sequência de valores próprios. Além disso, o subespaço $[V_m]$ gerado pela a Base: $\{(\bar{u}^0, u^0, v^0, w^0, h^0, z^0), (\bar{u}^1, u^1, v^1, w^1, h^1, z^1), \dots, (\bar{u}^m, u^m, v^m, w^m, h^m, z^m)\}$,

onde $(\bar{u}^i, u^i) \in \mathcal{V}$, $(v^i, w^i) \in \mathcal{V}$ e $(h^i, z^i) \in \mathcal{V}$. Para cada $\mu \in N$ denotamos:

$$\varphi^{1,\mu}(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) \bar{u}^i(x) \in V_m; \varphi^{2,\mu}(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) u^i(x) \in V_m;$$

$$\psi^{1,\mu}(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) v^i(x) \in V_m; \psi^{2,\mu}(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) w^i(x) \in V_m;$$

$$\omega^{1,\mu}(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) h^i(x) \in V_m; \omega^{2,\mu}(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) z^i(x) \in V_m.$$

Onde $a_{i,\mu}(t)$ são de classe C^2 .

Fazendo $i = 1, 2, \dots, j$, em seguida $j, \mu = 1, 2, \dots, m$. Obtemos, m equações no sistema aproximado. Que por sua vez, são equivalentes a Equações Diferenciais Ordinárias. Estas ultimas, satisfazendo as condições de Carathéodory. Portanto, possuindo solução

$(\varphi^{1,\mu}, \psi^{1,\mu}, \omega^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}, \psi^{2,\mu}, \omega^{2,\mu})$ para o sistema aproximado, abaixo, num intervalo $(0, T^\mu)$, $T^\mu < T$.

As estimativas a priori e a regularidade de solução, nos permitirão prolongar a solução ao intervalo $[0, T]$.

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_{tt}^{1,\mu} \bar{u}^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_{tt}^{2,\mu} u^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu}) \bar{u}_x^i dx + \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu}) u_x^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu}) \bar{u}_x^i dx - \\ & \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu}) u_x^i dx + \int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_t^{1,\mu} \bar{u}^i dx = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_{tt}^{1,\mu} v^i dx + \int_{L_0}^L \rho_2^2 \psi_{tt}^{2,\mu} w^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu}) v_x^i dx + \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu}) w_x^i dx + \int_0^{L_0} b_1 \psi_x^{1,\mu} v_x^i dx + \int_{L_0}^L b_2 \psi_x^{1,\mu} w_x^i dx \\ & \int_0^{L_0} \gamma_2 \varphi_t^{1,\mu} v^i dx = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_{tt}^{1,\mu} h^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_{tt}^{2,\mu} z^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu}) h_x^i dx - \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu}) z_x^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu}) h_x^i dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu}) z_x^i dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 \varphi_t^{1,\mu} h^i dx = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$(\varphi^{1,\mu}(0, x), \varphi^{2,\mu}(0, x), \psi^{1,\mu}(0, x), \psi^{2,\mu}(0, x), \omega^{1,\mu}(0, x), \omega^{2,\mu}(0, x)) = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \omega_0^1, \omega_0^2) \tag{2.18}$$

$$(\varphi_t^{1,\mu}(0, x), \varphi_t^{2,\mu}(0, x), \psi_t^{1,\mu}(0, x), \psi_t^{2,\mu}(0, x), \omega_t^{1,\mu}(0, x), \omega_t^{2,\mu}(0, x)) = (\varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_1^1, \psi_1^2, \omega_1^1, \omega_1^2) \tag{2.19}$$

2.2 Estimativa e Passagem ao Limite.

Multiplicando (2.15) por $a_{i,\mu}^i(t)$, em seguida somando com $i = 1, 2, \dots, \mu$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_{tt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) \bar{u}^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_{tt}^{2,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) u^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) \bar{u}_x^i dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) u_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) \bar{u}_x^i dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) u_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_t^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) \bar{u}^i dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Note que derivando $\varphi^{1,\mu}(x, t)$ em relação a $\mathbf{t}$ e em seguida em relação a $\mathbf{x}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\varphi_t^{1,\mu}(x, t) &= \left(\sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) \bar{u}^i \right)', = \sum_{i=1}^{\mu} (a_{i,\mu}'(t) \bar{u}^i + a_{i,\mu}(t) \cdot 0) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}'(t) \bar{u}^i. \\
\varphi_{tx}^{1,\mu}(x, t) &= \left(\sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}(t) \bar{u}^i \right)', = \sum_{i=1}^{\mu} (a_{i,\mu}'(t) \bar{u}_x^i + \bar{u}^i(x) \cdot 0) = \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}'(t) \bar{u}_x^i.
\end{aligned}$$

De maneira análogo, para seguintes funções:

$$\varphi_t^{2,\mu}(x, t), \psi_t^{1,\mu}(x, t), \psi_t^{2,\mu}(x, t), \omega_t^{1,\mu}(x, t), \omega_t^{2,\mu}(x, t).$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_{tt}^{1,\mu} \varphi_t^{1,\mu} dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_{tt}^{2,\mu} \varphi_t^{2,\mu} dx + \\ & \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) \varphi_{tx}^{1,\mu} dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) \varphi_{tx}^{2,\mu} dx + \\ & \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}) \varphi_t^{1,\mu} dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}) \varphi_t^{2,\mu} dx + \\ & \int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_t^{1,\mu} \varphi_t^{1,\mu} dx = 0, \end{aligned}$$

donde segue,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\varphi_t^{1,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\varphi_t^{2,\mu}|^2 dx + \\ & \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) \varphi_{tx}^{1,\mu} dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) \varphi_{tx}^{2,\mu} dx + \\ & \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}) \varphi_t^{1,\mu} dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}) \varphi_t^{2,\mu} dx + \\ & \int_0^{L_0} \gamma_1 |\varphi_t^{1,\mu}|^2 dx = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Multiplicando (2.16) por $a_{i,\mu}^i(t)$, em seguida somando com $i = 1, 2, \dots, \mu$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_{tt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) v^i dx + \int_{L_0}^L \rho_2^2 \psi_{tt}^{2,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) w^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) v_x^i dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) w_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} b_1 \psi_x^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) v_x^i dx + \int_{L_0}^L b_2 \psi_x^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) w_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \gamma_2 \varphi_t^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) v^i dx = 0.
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_{tt}^{1,\mu} \psi_t^{1,\mu} dx + \int_{L_0}^L \rho_2^2 \psi_{tt}^{2,\mu} \psi_t^{2,\mu} dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) \psi_t^{1,\mu} dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) \psi_t^{2,\mu} dx + \int_0^{L_0} b_1 \psi_x^{1,\mu} \psi_{tx}^{1,\mu} dx + \int_{L_0}^L b_2 \psi_x^{2,\mu} \psi_{tx}^{2,\mu} dx \\
& \int_0^{L_0} \gamma_2 (\psi_t^{1,\mu})^2 dx = 0.
\end{aligned}$$

Donde segue,

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_2^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\psi_t^{1,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_2^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\psi_t^{2,\mu}|^2 dx + \frac{b_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\psi_x^{1,\mu}|^2 dx + \frac{b_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\psi_x^{2,\mu}|^2 dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) \psi_t^{2,\mu} dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) \psi_t^{1,\mu} dx \\
& \int_0^{L_0} \gamma_2 (\psi_t^{1,\mu})^2 dx = 0. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

E finalmente multiplicando (2.17) por $a_{i,\mu}^i(t)$, em seguida somando com $i = 1, 2, \dots, \mu$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_{tt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) h^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_{tt}^{2,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) z^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) h_x^i dx - \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 l (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) z_x^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) h_x^i dx + \\ & \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu}) \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) z_x^i dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 \varphi_t^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}^i(t) h^i dx = 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde segue,

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_{tt}^{1,\mu} \omega_t^{1,\mu} dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_{tt}^{2,\mu} \omega_t^{2,\mu} dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu}) \omega_t^{1,\mu} dx - \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 l (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu}) \omega_t^{1,\mu} dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu}) \omega_{tx}^{1,\mu} dx + \\ & \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu}) \omega_{tx}^{1,\mu} dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 (\omega_t^{1,\mu})^2 dx = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\omega_t^{1,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\omega_t^{2,\mu}|^2 dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu}) \omega_t^{1,\mu} dx - \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 l (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu}) \omega_t^{1,\mu} dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu}) \omega_{tx}^{1,\mu} dx + \\ & \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu}) \omega_{tx}^{1,\mu} dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 (\omega_t^{1,\mu})^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Segue de (2.21), (2.22) e (2.25)

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\varphi_t^{1,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\varphi_t^{2,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_2^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\psi_t^{1,\mu}|^2 dx + \\
& \frac{\rho_2^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\psi_t^{2,\mu}|^2 dx + \frac{b_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\psi_x^{1,\mu}|^2 dx + \frac{b_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\psi_x^{2,\mu}|^2 dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) (\varphi_{tx}^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) (\varphi_{tx}^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}) (\omega_{tx}^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}) dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2^0 (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}) (\omega_{tx}^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}) dx + \\
& \int_0^{L_0} \gamma_1 (\varphi_t^{1,\mu})^2 dx + \int_0^{L_0} \psi_2 (\omega_t^{1,\mu})^2 dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 (\omega_t^{1,\mu})^2 dx = 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

mas lembrando que:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}) (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t dx = \frac{\kappa_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |(\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})|^2 dx; \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}) (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t dx = \frac{\kappa_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |(\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})|^2 dx; \\
& \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}) (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu})_t dx = \frac{\kappa_0^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |(\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu})|^2 dx; \\
& \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}) (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu})_t dx = \frac{\kappa_0^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |(\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu})|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |\varphi_t^{1,\mu}|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^{1,\mu}|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^{1,\mu}|^2 + b_1 |\psi_x^{1,\mu}|^2 \right. \\
& \quad \left. |\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}|^2 + \kappa_0^1 |\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}|^2 \} dx + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \{ \rho_1^2 |\varphi_t^{2,\mu}|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^{2,\mu}|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^{2,\mu}|^2 + b_2 |\psi_x^{2,\mu}|^2 + \right. \\
& \quad \left. |\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}|^2 + \kappa_0^2 |\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}|^2 \} dx \right\} + \\
& \quad \int_0^{L_0} \gamma_1 |\varphi_t^{1,\mu}|^2 + \gamma_2 |\psi_t^{1,\mu}|^2 + \gamma_3 |\omega_t^{1,\mu}|^2 dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Definindo a energia,

$$\begin{aligned}
E^\mu(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |\varphi_t^{1,\mu}|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^{1,\mu}|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^{1,\mu}|^2 + b_1 |\psi_x^{1,\mu}|^2 \\
& \quad \left. |\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}|^2 + \kappa_0^1 |\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}|^2 \} dx + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \{ \rho_1^2 |\varphi_t^{2,\mu}|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^{2,\mu}|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^{2,\mu}|^2 + b_2 |\psi_x^{2,\mu}|^2 + \right. \\
& \quad \left. |\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}|^2 + \kappa_0^2 |\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}|^2 \} dx.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Utilizando (2.28), segue:

$$\frac{d}{dt} E^\mu(t) = - \int_0^{L_0} \gamma_1 |\varphi_t^{1,\mu}|^2 + \gamma_2 |\psi_t^{1,\mu}|^2 + \gamma_3 |\omega_t^{1,\mu}|^2 dx, \tag{2.30}$$

de onde concluímos que,

$$\frac{d}{dt} E^\mu(t) \leq 0.$$

Logo, integrando em $(0, T_0)$ a última desigualdade, obtemos

$$E^\mu \leq E^\mu(0).$$

Donde, segue:

$$E^\mu \leq C, \text{ onde } C \text{ independe de } \mu \text{ e } t.$$

Utilizando o teorema de prolongamento de Caratheodory, na última desigualdade, podemos estende a solução para o intervalo todo, isto é, para $[0, T]$ com $T > 0$. Além disso, Obtemos pela desigualdade de Poincaré, que todos os termos da energia são limitados.

Destarte, obtemos

$$(\varphi^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}), (\psi^{1,\mu}, \psi^{2,\mu}), (\omega^{1,\mu}, \omega^{2,\mu}) \text{ e limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \quad (2.31)$$

$$(\varphi_t^{1,\mu}, \varphi_t^{2,\mu}), (\psi_t^{1,\mu}, \psi_t^{2,\mu}), (\omega_t^{1,\mu}, \omega_t^{2,\mu}) \text{ e limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2). \quad (2.32)$$

Agora utilizaremos o teorema de Banach-Alouglu-Bourbaki, pois os espaços onde as sequências são limitadas são, na pior das hipóteses são, espaços de Banach, dessa forma, podemos extrair uma sub-sequência convergente de $(\varphi^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}), (\psi^{1,\mu}, \psi^{2,\mu}), (\omega^{1,\mu}, \omega^{2,\mu})$ que continuaremos a denotar $(\varphi^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}), (\psi^{1,\mu}, \psi^{2,\mu})$ tal que,

$$\varphi^{1,\mu} \xrightarrow{*} \varphi^1 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L_0)), \quad (2.33)$$

$$\varphi^{2,\mu} \xrightarrow{*} \varphi^2 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(L_0, L)), \quad (2.34)$$

$$\psi^{1,\mu} \xrightarrow{*} \psi^1 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L_0)), \quad (2.35)$$

$$\psi^{2,\mu} \xrightarrow{*} \psi^2 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(L_0, L)) \quad (2.36)$$

$$\omega^{1,\mu} \xrightarrow{*} \omega^1 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L_0)), \quad (2.37)$$

$$\omega^{2,\mu} \xrightarrow{*} \omega^2 \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(L_0, L)). \quad (2.38)$$

$$\varphi_t^{1,\mu} \xrightarrow{*} \varphi_t^1 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.39)$$

$$\varphi_t^{2,\mu} \xrightarrow{*} \varphi_t^2 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.40)$$

$$\psi_t^{1,\mu} \xrightarrow{*} \psi_t^1 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.41)$$

$$\psi_t^{2,\mu} \xrightarrow{*} \psi_t^2 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.42)$$

$$\omega_t^{1,\mu} \xrightarrow{*} \omega_t^1 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.43)$$

$$\omega_t^{2,\mu} \xrightarrow{*} \omega_t^2 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(L_0, L)). \quad (2.44)$$

Usando o fato de que

$$L^\infty(0, T; X) \hookrightarrow L^2(0, T; X),$$

segue de (2.33) - (2.44),

$$\varphi^{1,\mu} \rightharpoonup \varphi^1 \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(0, L_0)), \quad (2.45)$$

$$\varphi^{2,\mu} \rightharpoonup \varphi^2 \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(L_0, L)), \quad (2.46)$$

$$\psi^{1,\mu} \rightharpoonup \psi^1 \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(0, L_0)), \quad (2.47)$$

$$\psi^{2,\mu} \rightharpoonup \psi^2 \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(L_0, L)), \quad (2.48)$$

$$\omega^{1,\mu} \rightharpoonup \omega^1 \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(0, L_0)), \quad (2.49)$$

$$\omega^{2,\mu} \rightharpoonup \omega^2 \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(L_0, L)). \quad (2.50)$$

$$\varphi_t^{1,\mu} \rightharpoonup \varphi_t^1 \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.51)$$

$$\varphi_t^{2,\mu} \rightharpoonup \varphi_t^2 \text{ em } L^2(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.52)$$

$$\psi_t^{1,\mu} \rightharpoonup \psi_t^1 \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.53)$$

$$\psi_t^{2,\mu} \rightharpoonup \psi_t^2 \text{ em } L^2(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.54)$$

$$\omega_t^{1,\mu} \rightharpoonup \omega_t^1 \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.55)$$

$$\omega_t^{2,\mu} \rightharpoonup \omega_t^2 \text{ em } L^2(0, T; L^2(L_0, L)). \quad (2.56)$$

2.3 Regularidade de solução

Derivando (2.15), (2.16) e (2.17) em relação ao tempo, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_{ttt}^{1,\mu} \bar{u}^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_{ttt}^{2,\mu} u^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t \bar{u}_x^i dx + \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t u_x^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu})_t \bar{u}_x^i dx - \\ & \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu})_t u_x^i dx + \int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_{tt}^{1,\mu} \bar{u}^i dx = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_{ttt}^{1,\mu} v^i dx + \int_{L_0}^L \rho_2^2 \psi_{ttt}^{2,\mu} w^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t v_x^i dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t w_x^i dx + \int_0^{L_0} b_1 \psi_{tx}^{1,\mu} v_x^i dx + \int_{L_0}^L b_2 \psi_{tx}^{1,\mu} w_x^i dx \\
& \int_0^{L_0} \gamma_2 \varphi_{tt}^{1,\mu} v^i dx = 0
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_{ttt}^{1,\mu} h^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_{ttt}^{2,\mu} z^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t h_x^i dx - \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t z_x^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu})_t h_x^i dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu})_t z_x^i dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 \varphi_{tt}^{1,\mu} h^i dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Multiplicando (2.57) por $a_{i,\mu}''$ e somando $i = 1, 2, \dots, \mu$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_{ttt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) \bar{u}^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_{ttt}^{2,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) u^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) \bar{u}_x^i dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) u_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) \bar{u}_x^i dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) u_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_{tt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) \bar{u}^i dx = 0.
\end{aligned}$$

Donde segue,

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\varphi_{tt}^{1,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\varphi_{tt}^{2,\mu}|^2 dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t \varphi_{ttx}^{1,\mu} dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t \varphi_{ttx}^{2,\mu} dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu})_t \varphi_{tt}^{1,\mu} dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu})_t \varphi_{tt}^{2,\mu} dx + \\
& \int_0^{L_0} \gamma_1 |\varphi_{tt}^{1,\mu}|^2 dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Multiplicando (2.58) por $a_{i,\mu}''(t)$, em seguida somando com $i = 1, 2, \dots, \mu$, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_{ttt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) v^i dx + \int_{L_0}^L \rho_2^2 \psi_{ttt}^{2,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) w^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) v_x^i dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) w_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} b_1 \psi_{tx}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) v_x^i dx + \int_{L_0}^L b_2 \psi_{tx}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) w_x^i dx + \\
& \int_0^{L_0} \gamma_2 \varphi_{tt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) v^i dx = 0.
\end{aligned}$$

Donde segue,

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_2^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\psi_{tt}^{1,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_2^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\psi_{tt}^{2,\mu}|^2 dx + \frac{b_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\psi_{tx}^{1,\mu}|^2 dx + \frac{b_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\psi_{tx}^{2,\mu}|^2 dx + \\
& \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_t \psi_{tt}^{2,\mu} dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_t \psi_{tt}^{1,\mu} dx + \\
& \int_0^{L_0} \gamma_2 |\psi_{tt}^{1,\mu}|^2 dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Multiplicando (2.59) por $a_{i,\mu}''(t)$, em seguida somando com $i = 1, 2, \dots, \mu$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_{tt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) h^i dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_{tt}^{2,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) z^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) h_x^i dx \\ & - \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) z_x^i dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) h_x^i dx \\ & + \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu})_t \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) z_x^i dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 \varphi_{tt}^{1,\mu} \sum_{i=1}^{\mu} a_{i,\mu}''(t) h^i dx = 0, \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\omega_{tt}^{1,\mu}|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\omega_{tt}^{2,\mu}|^2 dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l \omega^{1,\mu})_t \omega_{tt}^{1,\mu} dx \\ & - \int_{L_0}^L \kappa_2 l (\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l \omega^{2,\mu})_t \omega_{tt}^{1,\mu} dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^{1,\mu} - l \varphi^{1,\mu})_t \omega_{tt}^{1,\mu} dx \\ & + \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^{2,\mu} - l \varphi^{2,\mu})_t \omega_{tt}^{1,\mu} dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 |\omega_{tt}^{1,\mu}|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Do fato de:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_{tx}^{1,\mu} + \psi_t^{1,\mu} + l \omega_t^{1,\mu}) (\varphi_{tx}^{1,\mu} + \psi_t^{1,\mu} + l \omega_t^{1,\mu})_t = \frac{\kappa_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |(\varphi_{tx}^{1,\mu} + \psi_t^{1,\mu} + l \omega_t^{1,\mu})|^2 \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_{tx}^{2,\mu} + \psi_t^{2,\mu} + l \omega_t^{2,\mu}) (\varphi_{tx}^{2,\mu} + \psi_t^{2,\mu} + l \omega_t^{2,\mu})_t = \frac{\kappa_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |(\varphi_{tx}^{2,\mu} + \psi_t^{2,\mu} + l \omega_t^{2,\mu})|^2 \\ & \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_{tx}^{1,\mu} - l \varphi_t^{1,\mu}) (\omega_{tx}^{1,\mu} - l \varphi_t^{1,\mu})_t = -\frac{\kappa_0^1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |(\omega_{tx}^{1,\mu} - l \varphi_t^{1,\mu})|^2 dx \\ & \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_{tx}^{2,\mu} - l \varphi_t^{2,\mu}) (\omega_{tx}^{2,\mu} - l \varphi_t^{2,\mu})_t = -\frac{\kappa_0^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |(\omega_{tx}^{2,\mu} - l \varphi_t^{2,\mu})|^2 dx, \end{aligned}$$

e das equações (2.60), (2.61) e (2.62), obtemos,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^{L_0} [\rho_1^1 |\varphi_{tt}^{1,\mu}|^2 + \rho_2^1 |\psi_{tt}^{1,\mu}|^2 + b_1 |\psi_{tx}^{1,\mu}|^2 + \rho_1^1 |\omega_{tt}^{1,\mu}|^2 \\
& + \kappa_1 |(\varphi_{tx}^{1,\mu} + \psi_t^{1,\mu} + l\omega_t^{1,\mu})|^2 - \kappa_0 |(\omega_{tx}^{1,\mu} - l\varphi_t^{1,\mu})|^2] dx \\
& + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{L_0}^L [\rho_1^2 |\varphi_{tt}^{2,\mu}|^2 + \rho_2^2 |\psi_{tt}^{2,\mu}|^2 + b_2 |\psi_{tx}^{2,\mu}|^2 + \rho_1^2 |\omega_{tt}^{2,\mu}|^2 \\
& + \kappa_2 |(\varphi_{tx}^{2,\mu} + \psi_t^{2,\mu} + l\omega_t^{2,\mu})|^2 - \kappa_0^2 |(\omega_{tx}^{2,\mu} - l\varphi_t^{2,\mu})|^2] dx \\
& + \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |\varphi_{tt}^1|^2 + \gamma_2 |\psi_{tt}^1|^2 + \gamma_3 |\omega_{tt}^1|^2 \} dx = 0.
\end{aligned}$$

Definindo a energia de segunda ordem, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\mu(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1^1 |\varphi_{tt}^{1,\mu}|^2 + \rho_2^1 |\psi_{tt}^{1,\mu}|^2 + b_1 |\psi_{tx}^{1,\mu}|^2 + \rho_1^1 |\omega_{tt}^{1,\mu}|^2 \\
& + \kappa_1 |(\varphi_{tx}^{1,\mu} + \psi_t^{1,\mu} + l\omega_t^{1,\mu})|^2 - \kappa_0 |(\omega_{tx}^{1,\mu} - l\varphi_t^{1,\mu})|^2] dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{L_0}^L [\rho_1^2 |\varphi_{tt}^{2,\mu}|^2 + \rho_2^2 |\psi_{tt}^{2,\mu}|^2 + b_2 |\psi_{tx}^{2,\mu}|^2 + \rho_1^2 |\omega_{tt}^{2,\mu}|^2 \\
& + \kappa_2 |(\varphi_{tx}^{2,\mu} + \psi_t^{2,\mu} + l\omega_t^{2,\mu})|^2 - \kappa_0^2 |(\omega_{tx}^{2,\mu} - l\varphi_t^{2,\mu})|^2] dx.
\end{aligned}$$

Das duas últimas igualdades, temos

$$\frac{d}{dt} \varepsilon^\mu(t) = - \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |\varphi_{tt}^1|^2 + \gamma_2 |\psi_{tt}^1|^2 + \gamma_3 |\omega_{tt}^1|^2 \} dx,$$

donde segue,

$$\frac{d}{dt} \varepsilon^\mu(t) < 0.$$

Agora integrando $(0, T)$ a última desigualdade, obtemos

$$\varepsilon^\mu(t) < \varepsilon(0),$$

desde que sejam limitadas,

$$\varphi_{tt}^{1,\mu}(0), \varphi_{tt}^{2,\mu}(0), \psi_{tt}^{1,\mu}(0), \psi_{tt}^{2,\mu}(0), \omega_{tt}^{1,\mu}(0) \text{ e } \omega_{tt}^{2,\mu}(0),$$

temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1^1 |\varphi_{tt}^{1,\mu}|^2 + \rho_2^1 |\psi_{tt}^{1,\mu}|^2 + b_1 |\psi_{tx}^{1,\mu}|^2 + \rho_1^1 |\omega_{tt}^{1,\mu}|^2 \\ & + \kappa_1 |(\varphi_{tx}^{1,\mu} + \psi_t^{1,\mu} + l\omega_t^{1,\mu})|^2 - \kappa_0 |(\omega_{tx}^{1,\mu} - l\varphi_t^{1,\mu})|^2] dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{L_0}^L [\rho_1^2 |\varphi_{tt}^{2,\mu}|^2 + \rho_2^2 |\psi_{tt}^{2,\mu}|^2 + b_2 |\psi_{tx}^{2,\mu}|^2 + \rho_1^2 |\omega_{tt}^{2,\mu}|^2 \\ & + \kappa_2 |(\varphi_{tx}^{2,\mu} + \psi_t^{2,\mu} + l\omega_t^{2,\mu})|^2 - \kappa_0 |(\omega_{tx}^{2,\mu} - l\varphi_t^{2,\mu})|^2] dx \leq C, \end{aligned}$$

onde C independe de μ e $t \in [T, 0]$.

Portanto,

$$\begin{aligned} & (\varphi_{tt}^{1,\mu}(t), \varphi_{tt}^{2,\mu}(t)) \text{ e limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2); \\ & (\psi_{tt}^{1,\mu}(t), \psi_{tt}^{2,\mu}(t)) \text{ e limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2); \\ & (\omega_{tt}^{1,\mu}(t), \omega_{tt}^{2,\mu}(t)) \text{ e limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{L}^2). \end{aligned}$$

De fato, consideremos as seguintes equações aproximadas do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1^1(\varphi_{tt}^{1,\mu}, \bar{u}) - \kappa_1((\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu})_x, \bar{u}) - \kappa_0 l((\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu}), \bar{u}) + \gamma_1(\varphi_t^{1,\mu}, \bar{u}) = 0 \\ \rho_2^1(\psi_{tt}^{1,\mu}, v) - b_1(\psi_{xx}^{1,\mu}, v) + \kappa_1((\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}), v) + \gamma_2(\psi_t^{1,\mu}, v) = 0 \\ \rho_1^1(\omega_{tt}^{1,\mu}, h) - \kappa_0((\omega_x^{1,\mu} - l\varphi^{1,\mu})_x, h) + \kappa_1 l((\varphi_x^{1,\mu} + \psi^{1,\mu} + l\omega^{1,\mu}), h) + \gamma_3(\omega_t^{1,\mu}, h) = 0 \\ \rho_1^2(\varphi_{tt}^{2,\mu}, u) - \kappa_2(\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu})_x, u) - \kappa_0 l((\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu}), u) = 0 \\ \rho_2^2(\psi_{tt}^{2,\mu}, w) - b_2(\psi_{xx}^{2,\mu}, w) + \kappa_2((\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}), w) = 0 \\ \rho_1^2(\omega_{tt}^{2,\mu}, z) - \kappa_0((\omega_x^{2,\mu} - l\varphi^{2,\mu})_x, z) + \kappa_2 l((\varphi_x^{2,\mu} + \psi^{2,\mu} + l\omega^{2,\mu}), z) = 0 \end{array} \right.$$

Fazendo respectivamente na primeira e terceira equação do último sistema:

$$t \longrightarrow 0^+, \bar{u} = \varphi_{tt}^{1,\mu}, \text{ integrando de } 0 \text{ até } L_0 \text{ e } u = \varphi_{tt}^{2,\mu}, \text{ integrando } L_0 \text{ até } L,$$

em seguida, somando-as obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} \rho_1^1 |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)|^2 dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)|^2 dx &\leq \int_0^{L_0} |\kappa_1(\varphi_x^{1,\mu}(0) + \psi^{1,\mu}(0) + l\omega^{1,\mu}(0))_x| |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)| dx + \\
&\int_{L_0}^L |\kappa_2(\varphi_x^{2,\mu}(0) + \psi^{2,\mu}(0) + l\omega^{2,\mu}(0))_x| |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)| dx + \\
&\int_0^{L_0} |\kappa_0^1 l((\omega_x^{1,\mu}(0) - l\varphi^{1,\mu}(0)))| |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)| dx + \\
&\int_{L_0}^L |\kappa_0^2 l((\omega_x^{2,\mu}(0) - l\varphi^{2,\mu}(0)))| |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)| dx \\
&\int_0^{L_0} |\gamma_1(\varphi_t^{1,\mu}(0))| |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)| dx, \tag{2.63}
\end{aligned}$$

agora, usando a desigualdade de Young em (2.63) obtemos:

$$\begin{aligned}
\rho_1^1 \int_0^{L_0} |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)|^2 dx + \rho_1^2 \int_{L_0}^L |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)|^2 dx &\leq \frac{\kappa_1 \epsilon_1}{2} \int_0^{L_0} |(\varphi_x^{1,\mu}(0) + \psi^{1,\mu}(0) + l\omega^{1,\mu}(0))_x| \\
&+ \frac{\kappa_2 \epsilon_2}{2} \int_{L_0}^L |(\varphi_x^{2,\mu}(0) + \psi^{2,\mu}(0) + l\omega^{2,\mu}(0))_x| \\
&+ \frac{\kappa_0^1 l \epsilon_3}{2} \int_0^{L_0} |((\omega_x^{1,\mu}(0) - l\varphi^{1,\mu}(0)))| + \frac{\kappa_0^1 l}{2\epsilon_3} \int_0^{L_0} |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)| dx \\
&+ \frac{\kappa_0^2 l \epsilon_4}{2} \int_{L_0}^L |((\omega_x^{2,\mu}(0) - l\varphi^{2,\mu}(0)))| + \frac{\kappa_0^2 l}{2\epsilon_4} \int_{L_0}^L |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)| dx \\
&+ \frac{\gamma_1 \epsilon_5}{2} \int_0^{L_0} |(\varphi_t^{1,\mu}(0))| + \frac{\gamma_1}{2\epsilon_5} \int_0^{L_0} |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)| dx, \\
&+ \frac{\kappa_1}{2\epsilon_1} \int_0^{L_0} |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)| dx + \frac{\kappa_2}{2\epsilon_2} \int_{L_0}^L |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)| dx.
\end{aligned}$$

Destarte, segue

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_1^1}{4} \int_0^{L_0} |\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)|^2 dx + \frac{3\rho_1^2}{4} \int_{L_0}^L |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)|^2 dx &\leq C \left\{ \int_0^{L_0} |\kappa_1(\varphi_x^{1,\mu}(0) + \psi^{1,\mu}(0) + l\omega^{1,\mu}(0))_x| \right. \\
&\quad + \int_{L_0}^L |\kappa_2(\varphi_x^{2,\mu}(0) + \psi^{2,\mu}(0) + l\omega^{2,\mu}(0))_x| \\
&\quad + \int_0^{L_0} |\kappa_0^l((\omega_x^{1,\mu}(0) - l\varphi^{1,\mu}(0)))| \\
&\quad + \int_{L_0}^L |\kappa_0^2 l((\omega_x^{2,\mu}(0) - l\varphi^{2,\mu}(0)))| \Big\} dx \\
&\quad + C \left\{ \int_0^{L_0} |\gamma_1(\varphi_t^{1,\mu}(0))| \right\} dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente, segue

$$|\varphi_{tt}^{1,\mu}(0)| \leq C_1 \text{ e } |\varphi_{tt}^{2,\mu}(0)| \leq C_2.$$

Onde C_1 e C_2 independem de μ e t .

De modo análogo, tem-se:

$$|\psi_{tt}^{1,\mu}(0)| \leq C_3, |\psi_{tt}^{2,\mu}(0)| \leq C_4, |\omega_{tt}^{1,\mu}(0)| \leq C_5 \text{ e } |\omega_{tt}^{2,\mu}(0)| \leq C_6.$$

Mais uma vez utilizaremos o teorema de Banach-Alouglu-Bourbaki, pois os espaços onde as sequências são limitadas, continuam sendo, na pior das hipóteses, espaços de Banach, dessa forma, podemos extrair uma subsequência convergente de $(\varphi_{tt}^{1,\mu}, \varphi_{tt}^{2,\mu}), (\psi_{tt}^{1,\mu}, \psi_{tt}^{2,\mu}), (\omega_{tt}^{1,\mu}, \omega_{tt}^{2,\mu})$ que continuaremos a denotar $(\varphi_{tt}^{1,\mu}, \varphi_{tt}^{2,\mu}), (\psi_{tt}^{1,\mu}, \psi_{tt}^{2,\mu}), (\omega_{tt}^{1,\mu}, \omega_{tt}^{2,\mu})$ tal que,

$$\varphi_{tt}^{1,\mu} \rightharpoonup^* \varphi_{tt}^1 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.64)$$

$$\varphi_{tt}^{2,\mu} \rightharpoonup^* \varphi_{tt}^2 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.65)$$

$$\psi_{tt}^{1,\mu} \rightharpoonup^* \psi_{tt}^1 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.66)$$

$$\psi_{tt}^{2,\mu} \rightharpoonup^* \psi_{tt}^2 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.67)$$

$$\omega_{tt}^{1,\mu} \rightharpoonup^* \omega_{tt}^1 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.68)$$

$$\omega_{tt}^{2,\mu} \rightharpoonup^* \omega_{tt}^2 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(L_0, L)). \quad (2.69)$$

Pelo fato de que

$$L^\infty(0, T; X) \hookrightarrow L^2(0, T; X),$$

segue de (2.64) - (2.69),

$$\varphi_{tt}^{1,\mu} \rightharpoonup \varphi_{tt}^1 \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.70)$$

$$\varphi_{tt}^{2,\mu} \rightharpoonup \varphi_{tt}^2 \text{ em } L^2(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.71)$$

$$\psi_{tt}^{1,\mu} \rightharpoonup \psi_{tt}^1 \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.72)$$

$$\psi_{tt}^{2,\mu} \rightharpoonup \psi_{tt}^2 \text{ em } L^2(0, T; L^2(L_0, L)), \quad (2.73)$$

$$\omega_{tt}^{1,\mu} \rightharpoonup \omega_{tt}^1 \text{ em } L^2(0, T; L^2(0, L_0)), \quad (2.74)$$

$$\omega_{tt}^{2,\mu} \rightharpoonup \omega_{tt}^2 \text{ em } L^2(0, T; L^2(L_0, L)). \quad (2.75)$$

De (2.31) e (2.32), segue

$$\begin{aligned} &(\varphi^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}), (\psi^{1,\mu}, \psi^{2,\mu}), (\omega^{1,\mu}, \omega^{2,\mu}) \text{ e limitada em } L^2(0, T; \mathcal{V}) \\ &(\varphi_t^{1,\mu}, \varphi_t^{2,\mu}), (\psi_t^{1,\mu}, \psi_t^{2,\mu}), (\omega_t^{1,\mu}, \omega_t^{2,\mu}) \text{ e limitada em } L^2(0, T; \mathcal{L}^2). \end{aligned}$$

De modo que usando o Lema de compacidade de Aubin-Lions, com $B_0 = \mathcal{V}$, $B = B_1 = \mathcal{L}^2$, podemos extrair novamente uma subsequência de $(\varphi^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}), (\psi^{1,\mu}, \psi^{2,\mu}), (\omega^{1,\mu}, \omega^{2,\mu})$ que continuaremos a denotar por $(\varphi^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}), (\psi^{1,\mu}, \psi^{2,\mu}), (\omega^{1,\mu}, \omega^{2,\mu})$ tal que

$$(\varphi^{1,\mu}, \varphi^{2,\mu}) \longrightarrow (\varphi^1, \varphi^2) \text{ forte em } L^2(0, T; \mathcal{L}^2) \quad (2.76)$$

$$(\psi^{1,\mu}, \psi^{2,\mu}) \longrightarrow (\psi^1, \psi^2) \text{ forte em } L^2(0, T; \mathcal{L}^2) \quad (2.77)$$

$$(\omega^{1,\mu}, \omega^{2,\mu}) \longrightarrow (\omega^1, \omega^2) \text{ forte em } L^2(0, T; \mathcal{L}^2). \quad (2.78)$$

2.4 Unicidade de solução

Sejam $(\overline{\varphi^1}, \overline{\varphi^2}, \overline{\psi^1}, \overline{\psi^2}, \overline{\omega^1}, \overline{\omega^2})$ e $(\widehat{\varphi^1}, \widehat{\varphi^2}, \widehat{\psi^1}, \widehat{\psi^2}, \widehat{\omega^1}, \widehat{\omega^2})$ soluções forte do problema (2.1) – (2.6) nas condições do teorema (2.2) e considere,

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \overline{\varphi^1} - \widehat{\varphi^1} \\ \varphi^2 &= \overline{\varphi^2} - \widehat{\varphi^2} \\ \psi^1 &= \overline{\psi^1} - \widehat{\psi^1} \\ \psi^2 &= \overline{\psi^2} - \widehat{\psi^2} \\ \omega^1 &= \overline{\omega^1} - \widehat{\omega^1} \\ \omega^2 &= \overline{\omega^2} - \widehat{\omega^2},\end{aligned}$$

e satisfaça

$$(\varphi^1(0, x), \varphi_t^1(0, x), \varphi_x^1(0, x)) = (0, 0, 0) \quad (2.79)$$

$$(\psi^1(0, x), \psi_t^1(0, x), \psi_x^1(0, x)) = (0, 0, 0) \quad (2.80)$$

$$(\omega^1(0, x), \omega_t^1(0, x), \omega_x^1(0, x)) = (0, 0, 0), \quad (2.81)$$

agora denina a energia $E(x, t)$ como segue,

$$\begin{aligned}E(x, t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 \\ &\quad + |\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1|^2 + \kappa_0^1 |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2 \} dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \{ \rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \\ &\quad + |\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2|^2 + \kappa_0^2 |\omega_x^2 - l\varphi^2|^2 \} dx.\end{aligned}$$

Multiplicando, cada uma das equações (2.1) - (2.3) respectivamente por φ_t^1 , ψ_t^1 e ω_t^1 . Em seguida integrarmos de $(0, L_0)$, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_{tt}^1 \varphi_t^1 dx}_{:=I_1} - \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)_x \varphi_t^1 dx}_{:=I_2} + \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (\omega_x^1 - l\varphi^1) \varphi_t^1 dx}_{:=I_3} + \underbrace{\int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_t \varphi_t^1 dx}_{I:=4} = 0 \\ \underbrace{\int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_{tt}^1 \psi_t^1 dx}_{:=I_5} - \underbrace{\int_0^{L_0} b_1 \psi_{xx}^1 \psi_t^1 dx}_{:=I_6} + \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) \psi_t^1 dx}_{:=I_7} + \underbrace{\int_0^{L_0} \gamma_2 \psi_t^1 \psi_t^1 dx}_{:=I_8} = 0 \\ \underbrace{\int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_{tt}^1 \omega_t^1 dx}_{:=I_9} - \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_0^1 (\omega_x^1 - l\varphi^1)_x \omega_t^1 dx}_{:=I_{10}} + \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_1 l (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) \omega_t^1 dx}_{:=I_{11}} + \underbrace{\int_0^{l_0} \gamma_3 \omega_t^1 \omega_t^1 dx}_{:=I_{12}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.82)$$

De (I_1) , (I_5) e (I_9) segue:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} \rho_1^1 \varphi_{tt}^1 \varphi_t^1 dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 \|\varphi_t^1\|^2 dx. \\ \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_{tt}^1 \psi_t^1 dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_2^1 \|\psi_t^1\|^2 dx. \\ \int_0^{L_0} \rho_1^1 \omega_{tt}^1 \omega_t^1 dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 \|\omega_t^1\|^2 dx. \end{aligned}$$

Além disso, integrando por parte I_6 , segue:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} b_1 \psi_{xx}^1 \psi_t^1 dx &= [b_1 \psi_x^1 \psi_t^1]_0^{L_0} - \int_0^{L_0} b_1 \psi_x^1 \psi_{tx}^1 dx \\ &= b_1 \psi_x^1(L_0) \psi_t^1(L_0) - \psi_x^1(0) \psi_t^1(0) - \int_0^{L_0} b_1 \psi_x^1 \psi_{tx}^1 dx, \end{aligned}$$

mas note que

$$\int_0^{L_0} b_1 \psi_{xx}^1 \psi_t^1 dx = - \int_0^{L_0} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\psi_x^1|^2 dx + b_1 \psi_x^1(L_0) \psi_t^1(L_0).$$

De I_4 , I_8 e I_{12} , temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{L_0} \gamma_1 \varphi_t^1 \varphi_t^1 dx &= \int_0^{L_0} \gamma_1 |\varphi_t^1|^2 dx \\ \int_0^{L_0} \gamma_2 \psi_t^1 \psi_t^1 dx &= \int_0^{L_0} \gamma_2 |\psi_t^1|^2 dx \\ \int_0^{L_0} \gamma_3 \omega_t^1 \omega_t^1 dx &= \int_0^{L_0} \gamma_3 |\omega_t^1|^2 dx.\end{aligned}$$

Integrando por parte I_2 , obtemos:

$$\begin{aligned}- \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) \varphi_t^1 dx &= [-\kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) \varphi_t^1]_0^{L_0} \\ &\quad + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) \varphi_{tx}^1 dx\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}- \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)_x \varphi_t^1 dx &= -\kappa_1 (\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0)) \varphi_t^1 \\ &\quad + \int_0^{L_0} \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1) \varphi_{tx}^1 dx.\end{aligned}$$

Somando I_2 , I_7 e I_{11} , segue:

$$\begin{aligned}
& - \kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0))\varphi_t^1 + \int_0^{L_0} \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)\varphi_{tx}^1 dx \\
& + \int_0^{L_0} \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)\psi_t^1 dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)\omega_t^1 dx \\
& = \int_0^{L_0} \kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0))(\varphi_{tx}^1 + \psi_t^1 + l\omega_t^1) dx - \kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0))\varphi_t^1 \\
& = -\kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0))\varphi_t^1 + \int_0^{L_0} \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)_t dx \\
& = -\kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0))\varphi_t^1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \kappa_1 \int_0^{L_0} |(\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Agora, integrando por parte I_{10} e somando a I_3 , obtemos:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l(\omega_x^1 - l\varphi^1)\varphi_t^1 - \kappa_0^1(\omega_x^1(L_0) - l\varphi^1(L_0))\omega_t^1 + \int_0^{L_0} \kappa_0^1(\omega_x^1 - l\varphi^1)\omega_{tx}^1 dx \\
& = \int_0^{L_0} \kappa_0^1(\omega_x^1 - l\varphi^1)(\omega_x^1 - l\varphi^1)_t dx - \kappa_0^1(\omega_x^1(L_0) - l\varphi^1(L_0))\omega_t^1 \\
& = -\kappa_0^1(\omega_x^1(L_0) - l\varphi^1(L_0))\omega_t^1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \kappa_0^1 |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2 dx.
\end{aligned}$$

Somando de I_7 até I_{15} , segue:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} b_1 |\psi_x^1|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \kappa_0^1 |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2 dx \\
& + b_1 \psi_x^1(L_0) \psi_t^1(L_0) - \kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0))\varphi_t^1(L_0) - \kappa_0^1(\omega_x^1(L_0) - l\varphi^1(L_0))\omega_t^1 \\
& + \int_0^{L_0} \gamma_1 |\varphi_t^1|^2 dx + \int_0^{L_0} \gamma_2 |\psi_t^1|^2 dx + \int_0^{L_0} \gamma_3 |\omega_t^1|^2 dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Multiplicando, cada uma das equações (2.4) - (2.6) respectivamente por φ_t^2 , ψ_t^2 e ω_t^2 . Em seguida integrarmos de (L_0, L) , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{L_0}^L \rho_1^2 \varphi_{tt}^2 \varphi_t^2 dx}_{:=I_{13}} - \underbrace{\int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2)_x \varphi_t^2 dx}_{:=I_{14}} + \underbrace{\int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (\omega_x^2 - l\varphi^2) \varphi_t^2 dx}_{:=I_{15}} = 0 \\
& \underbrace{\int_{L_0}^L \rho_2^2 \psi_{tt}^2 \psi_t^2 dx}_{:=I_{16}} - \underbrace{\int_{L_0}^L b_2 \psi_{xx}^2 \psi_t^2 dx}_{:=I_{17}} + \underbrace{\int_{L_0}^L \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) \psi_t^2 dx}_{:=I_{18}} = 0 \\
& \underbrace{\int_{L_0}^L \rho_1^2 \omega_{tt}^2 \omega_t^2 dx}_{:=I_{19}} - \underbrace{\int_{L_0}^L \kappa_0^2 (\omega_x^2 - l\varphi^2)_x \omega_t^2 dx}_{:=I_{20}} + \underbrace{\int_{L_0}^L \kappa_2 l (\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2) \omega_t^2 dx}_{:=I_{21}} = 0.
\end{aligned}$$

De modo análogo ao sistema (2.82), tem-se que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 dx + \\
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L b_2 |\psi_x^2|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \kappa_0^2 |\omega_x^2 - l\varphi^2|^2 dx + \\
& b_2 \psi_x^2(L_0) \psi_t^2(L_0) + \kappa_2 (\varphi_x^2(L_0) + \psi^2(L_0) + l\omega^2(L_0) \varphi_t^2(L_0)) + \\
& \kappa_0^2 (\omega_x^2(L_0) - l\varphi^2(L_0)) \omega_t^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

De (2.83) e (2.84), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 + \\
& b_1 |\psi_x^1|^2 + |\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1|^2 + \kappa_0^1 |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2 \} dx + \\
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \{ \rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 + \\
& b_2 |\psi_x^2|^2 + |\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2|^2 + \kappa_0^2 |\omega_x^2 - l\varphi^2|^2 \} dx + \\
& \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |\varphi_t^1|^2 + \gamma_2 |\psi_t^1|^2 + \gamma_3 (\omega_t^1)^2 \} dx - \\
& b_1 \psi_x^1(L_0) \psi_t^1(L_0) - \kappa_1 (\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0) + l\omega^1(L_0)) \varphi_t^1(L_0) - \\
& \kappa_0^1 (\omega_x^1(L_0) - l\varphi^1(L_0)) \omega_t^1(L_0) + \kappa_0^2 (\omega_x^2(L_0) - l\varphi^2(L_0)) \omega_t^2(L_0) \\
& b_2 \psi_x^2(L_0) \psi_t^2(L_0) + \kappa_2 (\varphi_x^2(L_0) + \psi^2(L_0) + l\omega^2(L_0)) \varphi_t^2(L_0) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, segue pelas condições de transmissão que:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \{ \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |\varphi_t^1|^2 + \rho_2^1 |\psi_t^1|^2 + \rho_1^1 |\omega_t^1|^2 + b_1 |\psi_x^1|^2 \\
& |\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1|^2 + \kappa_0^1 |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2 \} dx + \\
& \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \{ \rho_1^2 |\varphi_t^2|^2 + \rho_2^2 |\psi_t^2|^2 + \rho_1^2 |\omega_t^2|^2 + b_2 |\psi_x^2|^2 + \\
& |\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^2|^2 + \kappa_0^2 |\omega_x^2 - l\varphi^2|^2 \} dx \} = - \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |\varphi_t^1|^2 + \gamma_2 |\psi_t^1|^2 + \gamma_3 |\omega_t^1|^2 \} dx.
\end{aligned}$$

de onde concluímos,

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |\varphi_t^1|^2 + \gamma_2 |\psi_t^1|^2 + \gamma_3 |\omega_t^1|^2 \} dx.$$

ou ainda que,

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq 0,$$

e finalmente integrando de 0 até t , obtemos:

$$E(t) \leq E(0) \forall t.$$

Segue de (2.79), (2.80) e (2.81) que $E(0, x) = 0$, dessa forma obtemos que $E(x, t) = 0$. Utilizando a desigualdade de Poincaré, obtemos a unicidade para nosso problema, isto é,

$$\overline{\varphi^1} = \widehat{\varphi^1}$$

$$\overline{\varphi^2} = \widehat{\varphi^2}$$

$$\overline{\psi^1} = \widehat{\psi^1}$$

$$\overline{\psi^2} = \widehat{\psi^2}$$

$$\overline{\omega^1} = \widehat{\omega^1}$$

$$\overline{\omega^2} = \widehat{\omega^2}.$$

■

CAPÍTULO 3

Decaimento Exponencial

3.1 Decaimento Exponencial

Um dos resultados mais importante, é o decaimento exponencial das soluções com relação a dependência da variável temporal t . Em função disso, analisaremos em nosso modelo, esse tipo de estudo que, é o objeto de investigação para muitos pesquisadores em diversas parte do mundo.

Os sistemas físicos possuem em si, de modo natural, fenômenos de dissipação de energia. Mas, por outro lado temos mecanismos de liberação de energia que, são de grande interesse para os matemáticos e engenheiros. Dentre eles destacamos, por exemplo: dissipações friccionais, viscosas, viscoelásticas e efeito memória.

Se $E(t)$ representa a energia das soluções de modelos dissipativos, então nosso objetivo é encontrar constantes positivas C_0 e C_1 , onde $C_1 = 2\gamma$, de modo que:

$$\varepsilon(t) \leq C_0 E(0) e^{-C_1 t} \geq 0. \quad (3.1)$$

A desigualdade (3.1), nos indica que a energia das soluções pode ser controlada por uma função exponencial decrescente. Dessa forma, estabilizando rapidamente as soluções. Esse tipo de comportamento, é de grande interesse para muitos pesquisadores.

Para alcançar o resultado acima, algumas técnicas e métodos tem sido utilizadas com bastante sucesso.

O método consiste em construir um funcional que na literatura é conhecido, como funcional de Lyapunov, tal que,

$$N_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq N_2 E(t), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{L}(t)$ é equivalente $E(t)$ e N_1, N_2 são constantes positivas.

Para obtermos exito em nosso estudo, devemos encontrar a seguinte desigualdade:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -N_0 E(t) \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

com $N_0 > 0$. De fato, usando a equivalência (3.2) obtemos:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\frac{N_0}{N_2} \mathcal{L}(t) \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

cujas a solução é:

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\alpha t} \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

com $\alpha = \frac{N_0}{N_2}$. Recorrendo novamente a equivalência (3.2), obtemos o decaimento exponencial da energia $\varepsilon(t)$, isto é,

$$\varepsilon(t) \leq C_0 E(0) e^{-2\gamma t}. \quad (3.6)$$

Para mostrarmos que a solução do problema (2.1) - (2.14) decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para o infinito, utilizaremos um Modelo equivalente. Em seguida construiremos o funcional, $\mathcal{L}(t)$, de Lyapunov. E a técnica utilizada, será a técnica multiplicativa, que consiste obter funções adequadas que multiplicadas pelas equações do modelo nos permita a construção das equivalências necessárias.

Denotemos por $U^1(x, t) = \varphi^1(x, t)e^{\gamma t}$, $V^1(x, t) = \psi^1(x, t)e^{\gamma t}$, $W^1(x, t) = \omega^1(x, t)e^{\gamma t}$, sendo $\gamma > 0$. Então,

$$\begin{aligned} U_t^1 &= \varphi_t^1 e^{\gamma t} + \gamma U^1, \quad U_{tt}^1 = \varphi_{tt}^1 e^{\gamma t} + 2\gamma \varphi_t^1 e^{\gamma t} - \gamma^2 U^1, \\ V_t^1 &= \psi_t^1 e^{\gamma t} + \gamma V^1, \quad V_{tt}^1 = \psi_{tt}^1 e^{\gamma t} + 2\gamma \psi_t^1 e^{\gamma t} - \gamma^2 V^1, \\ W_t^1 &= \omega_t^1 e^{\gamma t} + \gamma W^1, \quad W_{tt}^1 = \omega_{tt}^1 e^{\gamma t} + 2\gamma \omega_t^1 e^{\gamma t} - \gamma^2 W^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_t^2 &= \varphi_t^2 e^{\gamma t} + \gamma U^2, \quad U_{tt}^2 = \varphi_{tt}^2 e^{\gamma t} + 2\gamma U_t^2 - \gamma^2 U^2, \\
V_t^2 &= \psi_t^2 e^{\gamma t} + \gamma V^2, \quad V_{tt}^2 = \psi_{tt}^2 e^{\gamma t} + 2\gamma V_t^2 - \gamma^2 V^2, \\
W_t^2 &= \omega_t^2 e^{\gamma t} + \gamma W^2, \quad W_{tt}^2 = \omega_{tt}^2 e^{\gamma t} + 2\gamma W_t^2 - \gamma^2 W^2.
\end{aligned}$$

Observe que introduzindo a notação:

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \rho_j^1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ \rho_j^2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases}, \quad \kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ \kappa_2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases},$$

$$b(x) = \begin{cases} b_1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ b_2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases} \quad e \quad \kappa_0(x) = \begin{cases} \kappa_0^1, & \text{se } x \in [0, L_0] \\ \kappa_1^2, & \text{se } x \in [L_0, L] \end{cases}$$

$$U(x, t) = \begin{cases} U^1(x, t), & \text{se } x \in (0, L_0) \times (0, \infty) \\ U^2(x, t), & \text{se } x \in (L_0, L) \times (0, \infty) \end{cases}$$

$$V(x, t) = \begin{cases} V^1(x, t), & \text{se } x \in (0, L_0) \times (0, \infty) \\ V^2(x, t), & \text{se } x \in (L_0, L) \times (0, \infty) \end{cases}$$

$$W(x, t) = \begin{cases} W^1(x, t), & \text{se } x \in (0, L_0) \times (0, \infty) \\ W^2(x, t), & \text{se } x \in (L_0, L) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Em seguida, multiplicarmos as equações (2.1) - (2.6) por $e^{\gamma t}$ e usando as igualdades acima, teremos $(U^1, V^1, W^1, U^2, V^2, W^2)$ que satisfaz o Modelo equivalente,

$$\rho_1^1 U_{tt}^1 - \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)_x - \kappa_0^1 l (W_x^1 - lU^1) + \gamma_1 U_t^1 = Q_1, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty), \quad (3.7)$$

$$\rho_2^1 V_{tt}^1 - b_1 V_{xx}^1 + \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) + \gamma_2 V_t^1 = R_1, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty), \quad (3.8)$$

$$\rho_1^1 W_{tt}^1 - \kappa_0^1 (W_x^1 - lU^1)_x + \kappa_1 l (U_x^1 + V^1 + lW^1) + \gamma_3 W_t^1 = S_1, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty), \quad (3.9)$$

$$\rho_1^2 U_{tt}^2 - \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2)_x - \kappa_0^2 l (W_x^2 - lU^2) = Q_2, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty), \quad (3.10)$$

$$\rho_2^2 V_{tt}^2 - b_2 V_{xx}^2 + \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) = R_2, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty), \quad (3.11)$$

$$\rho_1^2 W_{tt}^2 - \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2)_x + \kappa_2 l (U_x^2 + V^2 + lW^2) = S_2, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty), \quad (3.12)$$

onde

$$Q_1 = 2\rho_1^1 \gamma U_t^1 + (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma U^1, \quad (3.13)$$

$$R_1 = 2\rho_2^1 \gamma V_t^1 + (\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma) \gamma V^1, \quad (3.14)$$

$$S_1 = 2\rho_1^1 \gamma W_t^1 + (\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma W^1, \quad (3.15)$$

$$Q_2 = 2\rho_1^2 \gamma U_t^2 - \rho_1^2 \gamma^2 U^2, \quad (3.16)$$

$$R_2 = 2\rho_2^2 \gamma V_t^2 - \rho_2^2 \gamma^2 V^2, \quad (3.17)$$

$$S_2 = 2\rho_1^2 \gamma W_t^2 - \rho_1^2 \gamma^2 W^2, \quad (3.18)$$

e além disso, com $(U^1, V^1, W^1, U^2, V^2, W^2)$ satisfazendo as condições de fronteiras

$$U^1(0, t) = U^2(L, t) = V^1(0, t) = V^2(L, t) = W^1(0, t) = W^2(L, t) = 0 \quad (3.19)$$

às condições de transmissão:

$$\kappa_1 U(L_0, t) = \kappa_2 U^2(L_0, t), \quad \kappa_1 U_x^1(L_0, t) = \kappa_2 U_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 U_t^1(L_0, t) = \rho_1^2 U_t^2(L_0, t) \quad (3.20)$$

$$\kappa_1 V^1(L_0, t) = \kappa_2 V^2(L_0, t), \quad b_1 V_x^1(L_0, t) = b_2 V_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 V_t^1(L_0, t) = \rho_2^2 V_t^2(L_0, t) \quad (3.21)$$

$$\kappa_1 W^1(L_0, t) = \kappa^2 W^2(L_0, t), \quad \kappa_0^1 W_x^1(L_0, t) = \kappa_0^2 U_x^2(L_0, t), \quad \rho_1^1 W_t^1(L_0, t) = \rho_1^2 W_t^2(L_0, t) \quad (3.22)$$

$$\kappa_0^1 W^1(L_0, t) = \kappa^2 W_0^2(L_0, t), \quad \kappa_0^1 U^1(L_0, t) = \kappa^2 U_0^2(L_0, t). \quad (3.23)$$

e às condições iniciais:

$$U^i(x, 0) = U_0^i(x, 0), \quad U_t^i(x, 0) = U_1^i(x, 0) + \gamma U_0^i(x, 0), \quad i = 1, 2 \quad (3.24)$$

$$V^i(x, 0) = V_0^i(x, 0), \quad V_t^i(x, 0) = V_1^i(x, 0) + \gamma V_0^i(x, 0), \quad i = 1, 2 \quad (3.25)$$

$$W^i(x, 0) = W_0^i(x, 0), \quad W_t^i(x, 0) = W_1^i(x, 0) + \gamma W_0^i(x, 0). \quad i = 1, 2. \quad (3.26)$$

Para demonstrarmos o lema a seguir e facilitar o entendimento de nosso estudo, dividiremos nosso último sistema em dois, P_1 e P_2 . Onde P_1 é constituído pelas três primeiras equações e P_2 pelas três

últimas, com suas respectivas energias.

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{\rho_1^1 |U_t^1|^2 + \rho_2^1 |V_t^1|^2 + \rho_1^1 |W_t^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + |U_x^1 + V^1 + W^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1 - lU^1|^2\} dx$$

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{L_0}^L \{\rho_1^2 |U_t^2|^2 + \rho_2^2 |V_t^2|^2 + \rho_1^2 |W_t^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + |U_x^2 + V^2 + W^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2 - lU^2|^2\} dx$$

Lema 3.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq - \int_0^{L_0} \{\gamma_1 |U_t^1|^2 + \gamma_2 |V_t^1|^2 + \gamma_3 |W_t^1|^2\} + C\gamma E(t)$$

Prova. Multiplicando cada uma das equações (3.7) - (3.9) que, constituem o sistema P_1 , respectivamente por U_t^1, V_t^1 e W_t^1 . Em seguida integremos de $(0, L_0)$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^{L_0} \rho_1^1 U_{tt}^1 U_t^1 dx}_{:=I_1} - \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)_x U_t^1 dx}_{:=I_2} + \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (W_x^1 - lU^1) U_t^1 dx}_{:=I_3} + \underbrace{\int_0^{L_0} \gamma_1 U_t U_t^1 dx}_{:=I_4} = \underbrace{\int_0^{L_0} Q U_t dx}_I \\ & \underbrace{\int_0^{L_0} \rho_2^1 V_{tt}^1 V_t^1 dx}_{:=I_5} - \underbrace{\int_0^{L_0} b_1 V_{xx}^1 V_t^1 dx}_{:=I_6} + \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) V_t^1 dx}_{:=I_7} + \underbrace{\int_0^{L_0} \gamma_2 V_t^1 V_t^1 dx}_{:=I_8} = \underbrace{\int_0^{L_0} R V_t dx}_{II} \\ & \underbrace{\int_0^{L_0} \rho_1^1 W_{tt}^1 W_t^1 dx}_{:=I_9} - \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_0^1 (W_x^1 - lU^1)_x W_t^1 dx}_{:=I_{10}} + \underbrace{\int_0^{L_0} \kappa_1 l (U_x^1 + V^1 + lW^1) W_t^1 dx}_{:=I_{11}} + \underbrace{\int_0^{L_0} \gamma_3 W_t^1 W_t^1 dx}_{:=I_{12}} = \underbrace{\int_0^{L_0} S W_t dx}_{III} \end{aligned}$$

De I_1, I_2, I_9 , segue

$$\int_0^{L_0} \rho_1^1 U_{tt}^1 U_t^1 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 |U_t^1|^2 dx. \quad (3.27)$$

$$\int_0^{L_0} \rho_2^1 V_{tt}^1 V_t^1 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_2^1 |V_t^1|^2 dx. \quad (3.28)$$

$$\int_0^{L_0} \rho_1^1 W_{tt}^1 W_t^1 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 |W_t^1|^2 dx. \quad (3.29)$$

Além disso, integrando por parte I_6 , temos

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} b_1 V_{xx}^1 V_t^1 dx &= [b_1 V_x^1 V_t^1]_0^{L_0} - \int_0^{L_0} b_1 V_x^1 V_{tx}^1 dx \\ &= b_1 V_x^1(L_0) V_t^1(L_0) - V_x^1(0) V_t^1(0) - \int_0^{L_0} b_1 V_x^1 V_{tx}^1 dx, \end{aligned}$$

donde segue,

$$\int_0^{L_0} b_1 V_{xx}^1 V_t^1 dx = b_1 V_x^1(L_0) V_t^1(L_0) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx. \quad (3.30)$$

De I_4 , I_8 e I_{12} , temos:

$$\int_0^{L_0} \gamma_1 U_t^1 U_t^1 dx = \int_0^{L_0} \gamma_1 |U_t^1|^2 dx \quad (3.31)$$

$$\int_0^{L_0} \gamma_2 V_t^1 V_t^1 dx = \int_0^{L_0} \gamma_2 |V_t^1|^2 dx \quad (3.32)$$

$$\int_0^{L_0} \gamma_3 W_t^1 W_t^1 dx = \int_0^{L_0} \gamma_3 |W_t^1|^2 dx. \quad (3.33)$$

integrando por parte I_2 , obtemos:

$$\begin{aligned} - \int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)_x U_t^1 dx &= -\kappa_1 (U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)) U_t^1 \\ &\quad + \int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) U_{tx}^1 dx. \end{aligned}$$

Somando I_2 , I_7 e I_{11} , segue:

$$\begin{aligned}
& -\kappa_1(U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0))U_t^1 + \int_0^{L_0} \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1)U_{tx}^1 dx \\
& + \int_0^{L_0} \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1)V_t^1 dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l(U_x^1 + V^1 + lW^1)W_t^1 dx \\
& = -\kappa_1(U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0))U_t^1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \kappa_1 \int_0^{L_0} |(U_x^1 + V^1 + lW^1)|^2 dx. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

integrando por parte I_{10} e somando a I_3 , obtemos:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{L_0} \kappa_0 l(W_x^1 - lU^1)U_t^1 - \kappa_0^1(W_x^1(L_0) - lU^1(L_0))W_t^1 + \int_0^{L_0} \kappa_0^1(W_x^1 - lU^1)W_{tx}^1 dx \\
& = \int_0^{L_0} \kappa_0^1(W_x^1 - lU^1)(W_x^1 - lU^1)_t dx - \kappa_0^1(W_x^1(L_0) - lU^1(L_0))W_t^1 \\
& = -\kappa_0^1(W_x^1(L_0) - lU^1(L_0))W_t^1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \kappa_0^1 |W_x^1 - lU^1|^2 dx. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Somando (3.27) - (3.35) e (I) - (III), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \{\rho_1^1 |U_t^1|^2 + \rho_2^1 |V_t^1|^2 + \rho_1^1 |W_t^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + |U_x^1 + V^1 + W^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1 - lU^1|^2\} dx \\
& - b_1 V_x^1(L_0) V_t^1(L_0) - \kappa_1(U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0))U_t^1(L_0) - \kappa_0^1(W_x^1(L_0) - lU^1(L_0))W_t^1 = \\
& - \int_0^{L_0} \{\gamma_1 |U_t^1|^2 + \gamma_2 |V_t^1|^2 + \gamma_3 |W_t^1|^2\} dx + \int_0^{L_0} Q^1 U_t^1 + \int_0^{L_0} R^1 V_t^1 + \int_0^{L_0} S^1 W_t^1. \quad (3.36)
\end{aligned}$$

De modo análogo para sistema P_2 . Se multiplicarmos cada uma das equações (3.10) - (3.12), respectivamente, por U_t^2, V_t^2 e W_t^2 . Em seguida integramos de (L_0, L) , obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^2 |U_t^2|^2 + \rho_2^2 |V_t^2|^2 + \rho_1^2 |W_t^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2 - lU^2|^2 \\ & |U_x^2 + V^2 + W^2|^2 \} dx - b_2 V_x^2(L_0) V_t^2(L_0) - \kappa_0^2 (W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)) W_t^1 - \\ & \kappa_2 (U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0) U_t^2(L_0)) = \int_0^{L_0} Q_2 U_t^2 + \int_0^{L_0} R_2 V_t^2 + \int_0^{L_0} S_2 W_t^2. \end{aligned}$$

de (3.36) e (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |U_t^1|^2 + \rho_2^1 |V_t^1|^2 + \rho_1^1 |W_t^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + |U_x^1 + V^1 + W^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1 - lU^1|^2 \} dx \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^2 |U_t^2|^2 + \rho_2^2 |V_t^2|^2 + \rho_1^2 |W_t^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2 - lU^2|^2 + |U_x^2 + V^2 + W^2|^2 \} dx \\ & - b_1 V_x^1(L_0) V_t^1(L_0) - \kappa_1 (U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0) U_t^1(L_0)) - \kappa_0^1 (W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)) W_t^1 \\ & + b_2 V_x^2(L_0) V_t^2(L_0) + \kappa_0^2 (W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)) W_t^1 + \kappa_2 (U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0) U_t^2(L_0)) = \\ & - \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |U_t^1|^2 + \gamma_2 |V_t^1|^2 + \gamma_3 |W_t^1|^2 \} dx + \int_0^{L_0} Q^1 U_t^1 + \int_0^{L_0} R^1 V_t^1 + \int_0^{L_0} S^1 W_t^1 \int_0^{L_0} Q_2 U_t^2 + \int_0^{L_0} R_2 V_t^2 \\ & + \int_0^{L_0} S_2 W_t^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

e pelas condições de transmissão, segue:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^1 |U_t^1|^2 + \rho_2^1 |V_t^1|^2 + \rho_1^1 |W_t^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + |U_x^1 + V^1 + W^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1 - lU^1|^2 \} dx \\ & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \{ \rho_1^2 |U_t^2|^2 + \rho_2^2 |V_t^2|^2 + \rho_1^2 |W_t^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2 - lU^2|^2 + |U_x^2 + V^2 + W^2|^2 \} dx = \\ & - \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |U_t^1|^2 + \gamma_2 |V_t^1|^2 + \gamma_3 |W_t^1|^2 \} dx + \int_0^{L_0} Q^1 U_t^1 dx + \int_0^{L_0} R^1 V_t^1 dx + \int_0^{L_0} S^1 W_t^1 dx \\ & \int_0^{L_0} Q_2 U_t^2 dx + \int_0^{L_0} R_2 V_t^2 dx + \int_0^{L_0} S_2 W_t^2 dx. \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= - \int_0^{L_0} \{\gamma_1 |U_t^1|^2 + \gamma_2 |V_t^1|^2 + \gamma_3 |W_t^1|^2\} dx + \int_0^{L_0} [Q_1 U_t^1 + R_1 V_t^1 + S_1 W_t^1] dx \\ &\quad + \int_0^{L_0} [Q_2 U_t^2 + R_2 V_t^2 + S_2 W_t^2] dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando (3.13), temos que

$$\int_0^{L_0} Q_1 U_t^1 dx = \int_0^{L_0} 2\rho_1^1 \gamma U_t^1 U_t^1 dx + \int_0^{L_0} (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma U^1 U_t^1 dx. \quad (3.39)$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\int_0^{L_0} Q_1 U_t^1 dx \leq 2\rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + [(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_0} |\phi^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_0} |\phi_t^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

e aplicando a desigualdade de Young, segue

$$\int_0^{L_0} Q_1 U_t^1 dx \leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + \frac{(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |\phi^1|^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, resulta

$$\int_0^{L_0} Q_1 U_t^1 dx \leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + \frac{(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |\phi_x^1|^2 dx,$$

mas, por outro lado

$$\int_0^{L_0} |U_x^1|^2 \leq 2 \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 + 4 \int_0^{L_0} |V^1|^2 + 4l^2 \int_0^{L_0} |W^1|^2,$$

assim temos,

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} Q_1 U_t^1 dx &\leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p \int_0^{L_0} |\phi_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + \\ &\quad + 2(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p \int_0^{L_0} |V^1|^2 + 2l^2 (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p \int_0^{L_0} |W^1|^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Usando (3.14), temos que

$$\int_0^{L_0} R_1 V_t^1 dx = 2\rho_2^1 \gamma \int_0^{L_0} V_t^1 V_t^1 dx + (\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma) \gamma \int_0^{L_0} V^1 V_t^1 dx.$$

Assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_0^{L_0} R_1 V_t^1 dx \leq 2\rho_2^1 \gamma \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 + [(\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma)^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_0} |V^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

e aplicando a desigualdade de Young, segue

$$\int_0^{L_0} R_1 V_t^1 dx \leq \frac{(4\rho_2^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 + \frac{(\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma)^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, resulta

$$\int_0^{L_0} R_1 V_t^1 dx \leq \frac{(4\rho_2^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 + \frac{(\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma)^2 \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx. \quad (3.41)$$

Segue de (3.15),

$$\int_0^{L_0} S_1 W_t^1 dx = 2\rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} W_t^1 W_t^1 dx + (\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma \int_0^{L_0} W^1 W_t^1 dx,$$

assim, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_0^{L_0} S_1 W_t^1 dx \leq 2\rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 + [(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_0} |W^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

e aplicando a desigualdade de Young, segue

$$\int_0^{L_0} S_1 W_t^1 dx \leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + \frac{(\gamma_3 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, resulta

$$\int_0^{L_0} S_1 W_t^1 dx \leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 + \frac{(\gamma_3 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx,$$

mas, por outro lado

$$\int_0^{L_0} |W_x^1|^2 \leq 2 \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 + 2l^2 \int_0^{L_0} |U^1|^2,$$

assim temos,

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} S_1 W_t^1 dx &\leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 + (\gamma_3 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + \\ &\quad + l^2(\gamma_3 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p \int_0^{L_0} |U^1|^2, \end{aligned} \quad (3.42)$$

e da soma das desigualdades (3.40), (3.41) e (3.42), segue

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} [Q_1 U_t + R_1 V_t + S_1 W_t^1] dx &\leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + (\gamma_1 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p \int_0^{L_0} |\phi_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + \\ &\quad + 2(\gamma_1 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p \int_0^{L_0} |V^1|^2 + 2l^2(\gamma_1 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p \int_0^{L_0} |W^1|^2 \\ &\quad + \frac{(4\rho_2^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 + \frac{(\gamma_2 - \rho_2^1\gamma)^2\gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\ &\quad + l^2(\gamma_3 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p \int_0^{L_0} |U^1|^2 + \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 \\ &\quad + (\gamma_3 - \rho_1^1\gamma)^2\gamma c_p \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} [Q_1 U_t + R_1 V_t + S_1 W_t^1] dx &\leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + \frac{(4\rho_2^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 + \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 + \\
&+ C_1 \int_0^{L_0} [|U^1|^2 + |V^1|^2 + |W^1|^2] + \frac{(\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma)^2 \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\
&+ (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p \int_0^{L_0} |\phi_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\
&+ (\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx.
\end{aligned}$$

Onde $C_1 = \max\{(2\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p, 2l^2(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p, l^2(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p\}$. E pela equivalência entre as normas, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} [Q_1 U_t + R_1 V_t + S_1 W_t^1] dx &\leq \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \frac{(4\rho_2^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + \frac{(4\rho_1^1 + 1)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx \\
&+ \frac{(\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma)^2 \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx + (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p \int_0^{L_0} |\phi_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\
&+ (\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)^2 \gamma c_p \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + C_1 b_1 \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\
&+ C_1 \kappa_1 \int_0^{L_0} |\phi_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + C_1 \kappa_0 \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

De onde podemos concluir que,

$$\int_0^{L_0} [Q_1 U_t^1 + R_1 V_t^1 + S_1 W_t^1] dx \leq C_2 \gamma E_1(t). \tag{3.44}$$

De modo análogo para (3.16), (3.17) e (3.18), obtemos

$$\int_{L_0}^L Q_2 U_t^2 dx = 2\rho_1^2 \gamma \int_{L_0}^L U_t^2 U_t^2 dx - \rho_1^2 \gamma^2 \int_{L_0}^L U^2 U_t^2 dx. \tag{3.45}$$

$$\int_{L_0}^L R_2 V_t^2 dx = 2\rho_2^2 \gamma \int_{L_0}^L V_t^2 V_t^2 dx - \rho_2^1 \gamma^2 \int_{L_0}^L V^1 V_t^1 dx. \quad (3.46)$$

$$\int_{L_0}^L S_2 W_t^2 dx = 2\rho_1^2 \gamma \int_{L_0}^L W_t^2 W_t^2 dx - \rho_1^2 \gamma^2 \int_{L_0}^L W^2 W_t^2 dx, \quad (3.47)$$

e assim, pelas desigualdades Young, Poincaré e a equivalência entre as normas, temos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0}^L [Q_2 U_t^2 + R_2 V_t^2 + S_2 W_t^2] dx &\leq \frac{5\rho_1^1 \gamma^2}{2} \int_{L_0}^L [|U_t^2|^2 + |V_t^2|^2 + |W_t^2|^2] dx \\ &\quad + (\hat{C}_6 \kappa_2 + \rho_1^2 \gamma^2 c_p) \gamma \int_0^{L_0} |V_x^2|^2 dx \\ &\quad + (\hat{C}_6 \kappa_0^2 + \rho_1^2 \gamma^2 c_p) \gamma \int_{L_0}^L |W^2 - lU^2|^2 dx \\ &\quad + (\hat{C}_6 \kappa_2 + \rho_1^2 \gamma^2 c_p) \gamma \int_0^{L_0} |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx. \end{aligned}$$

De onde concluímos que,

$$\int_0^{L_0} [Q_2 U_t^2 + R_1 V_t^2 + S_1 W_t^2] dx \leq C_7 \gamma E_2(t). \quad (3.48)$$

Onde C_7 é uma constante positiva. Logo, de (3.44) e (3.48), segue

$$\int_0^{L_0} [Q_1 U_t^1 + R_1 V_t^1 + S_1 W_t^1] dx + \int_0^{L_0} [Q_2 U_t^2 + R_1 V_t^2 + S_1 W_t^2] dx \leq C \gamma E(t). \quad (3.49)$$

Onde C é uma constante positiva. Portanto, segue de (3.38) e (3.49) que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq - \int_0^{L_0} \{ \gamma_1 |U_t^1|^2 + \gamma_2 |V_t^1|^2 + \gamma_3 |W_t^1|^2 \} dx + C \gamma E(t).$$

■

Lema 3.2. *Seja o funcional $L(t) = \int_0^{L_0} \rho_1^1 [U_t^1 x \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) + xW_t^1 \kappa_0^1 (W_x - lU^1)] dx$. Então existem as constantes $\hat{C}_{19}$ e C_1 positivas tal que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) \leq & \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{L_0 (\kappa_1)^2 |U_x(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} + \\ & \frac{\kappa_0^1 L_0 |W_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_1}{4} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx - \frac{\kappa_0^1}{4} \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + \\ & \hat{C}_1 \int_0^{L_0} [|U_t^1| + |V_t^1| + |W_t^1|^2] dx + \hat{C}_{19} \gamma E_1(t), \end{aligned}$$

onde $\hat{C}_1 = \max\{\rho_1^1 l^2 (L_0)^2 \kappa_0^1 + \gamma_1^2 \gamma L_0 - \frac{\kappa_1 \rho_1^1}{2}, 3\rho_1^1 (L_0)^2 \kappa_1, \rho_1^1 l^2 (L_0)^2 \kappa_0^1\}$.

Prova. Multiplicando as equações (3.7) e (3.9), respectivamente por $\sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx$ e $\sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x^1 - lU^1)$, em seguida integrarmos em $(0, L_0)$, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_{tt}^1 \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx - \int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)_x \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx - \\ & \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (W_x^1 - lU^1) \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx + \int_0^{L_0} \gamma_1 U_t \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx = \\ & \int_0^{L_0} Q \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx \\ & \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_{tt}^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx - \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (W_x^1 - lU^1)_x \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx + \\ & \int_0^{L_0} \kappa_1 l (U_x^1 + V^1 + lW^1) \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx + \int_0^{l_0} \gamma_3 W_t^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx = \\ & \int_0^{L_0} S_1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx, \end{aligned}$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 \sigma_7(x) \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1) dx &= \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 \sigma_7(x) \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1)_t dx \\
&+ \int_0^{L_0} \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1)_x \sigma_7(x) \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1) dx \\
&+ \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l(W_x^1 - lU^1) \sigma_7(x) \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1) dx \\
&- \int_0^{L_0} \gamma_1 U_t \sigma_7(x) \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1) \\
&+ \int_0^{L_0} Q \sigma_7(x) \kappa_1(U_x^1 + V^1 + lW^1) dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_t^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1(W_x - lU^1) dx &= \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_t^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1(W_x - lU^1)_t dx \\
&+ \int_0^{L_0} \kappa_0^1(W_x^1 - lU^1)_x \sigma_8(x) \kappa_0^1(W_x - lU^1) dx \\
&- \int_0^{L_0} \kappa_1 l(U_x^1 + V^1 + lW^1) \sigma_8(x) \kappa_0^1(W_x - lU^1) dx \\
&- \int_0^{l_0} \gamma_3 W_t^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1(W_x - lU^1) dx \\
&+ \int_0^{L_0} S_1 \sigma_8(x) \kappa_0^1(W_x - lU^1) dx.
\end{aligned}$$

Logo, integrando por parte, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx &= \frac{\rho_1^1 \sigma_7(L_0) \kappa_1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\rho_1^1 \kappa_1}{2} \int_0^{L_0} \sigma_7'(x) |U_t^1|^2 dx \\
&+ \int_0^{L_0} \rho_1^1 \sigma_7(x) \kappa_1 V_t^1 U_t^1 dx + \int_0^{L_0} \rho_1^1 \sigma_7(x) \kappa_1 l W_t^1 U_t^1 dx \\
&+ \frac{\sigma_7(L_0) \kappa_1^2 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} \\
&- \frac{\kappa_1^2}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\
&+ \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (W_x^1 - lU^1) \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx \\
&- \int_0^{L_0} \gamma_1 U_t \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) \\
&+ \int_0^{L_0} Q \sigma_7(x) \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_t^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx &= \frac{\rho_1^1 \sigma_8(L_0) \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\rho_1^1 \kappa_0^1}{2} \int_0^{L_0} \sigma_8'(x) |W_t^1|^2 dx \\
&- \int_0^{L_0} \rho_1^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 l W_t^1 U_t^1 dx + \int_0^{l_0} \gamma_3 W_t^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx \\
&+ \frac{\sigma_8(L_0) (\kappa_0^1)^2 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} - \frac{(\kappa_0^1)^2}{2} \int_0^{L_0} |W_x - lU^1|^2 dx \\
&- \int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx \\
&+ \int_0^{L_0} S_1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx.
\end{aligned}$$

Considerando $\sigma_7(x) = \sigma_8(x) = x$ e aplicando a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 x \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx &\leq \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + (\gamma_1^2 L_0^2 - \frac{\rho_1^1 \kappa_1}{8}) \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx \\
&+ \rho_1^1 L_0^2 \kappa_1 \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + 2\rho_1^1 L_0^2 l^2 \kappa_1 \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx \\
&+ \frac{L_0 \kappa_1^2 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} \\
&- \frac{\kappa_1^2}{4} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\
&+ \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (W_x^1 - lU^1) x \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) dx \\
&+ \kappa_1 L_0 \int_0^{L_0} |QU_x^1 + V^1 + lW^1| dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_t^1 \sigma_8(x) \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx &\leq \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + (\gamma_3^2 L_0^2 - \frac{\rho_1^1 \kappa_0^1}{4}) \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx \\
&+ \rho_1^1 L_0^2 \kappa_0^1 l^2 \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \kappa_0^1 L_0 \int_0^{L_0} |S_1 W_x - lU^1| dx \\
&+ \frac{L_0 \kappa_0^1 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} - \frac{(\kappa_0^1)^2}{4} \int_0^{L_0} |W_x - lU^1|^2 dx \\
&- \int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) x \kappa_0^1 (W_x - lU^1) dx,
\end{aligned}$$

de onde concluímos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} L(t) &\leq \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \hat{C}_1 \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx \\
&+ \frac{L_0 \kappa_1^2 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_1^2}{4} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\
&\frac{L_0 \kappa_0^1 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} - \frac{(\kappa_0^1)^2}{4} \int_0^{L_0} |W_x - lU^1|^2 dx \\
&+ \kappa_1 L_0 \int_0^{L_0} |QU_x^1 + V^1 + lW^1| dx + \kappa_0^1 L_0 \int_0^{L_0} |S_1 W_x - lU^1| dx, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

onde $\hat{C}_1 = \max\{(\rho_1^1 L_0^2 \kappa_0^1 l^2 + \gamma_1^2 L_0^2 - \frac{\rho_1^1 \kappa_1}{2}), 2\rho_1^1 L_0^2 \kappa_1, (\rho_1^1 L_0^2 l^2 \kappa_1 + \gamma_3^2 L_0^2 - \frac{\rho_1^1 \kappa_0^1}{4})\}$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1 + V^1 + lW^1| dx &= \int_0^{L_0} |2\rho_1^1 \gamma U_t^1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) + (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma U^1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)| dx \\
&\leq \int_0^{L_0} |2\rho_1^1 \gamma U_t^1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)| dx + \\
&+ \int_0^{L_0} |(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma U^1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)| dx,
\end{aligned}$$

então, novamente, pela desigualdade de Young e Poincaré, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1 + V^1 + lW^1| dx &\leq \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |(U_x^1 + V^1 + lW^1)|^2 dx \\
&+ \frac{(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 + \frac{(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx,
\end{aligned}$$

mas pelo fato,

$$\int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \leq 2 \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + 4 \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + 4l^2 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx,$$

de onde obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1 + V^1 + lW^1| dx &\leq \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |(U_x^1 + V^1 + lW^1)|^2 dx \\
&\quad + \frac{(2c_p + 1)(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\
&\quad + \frac{(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) l^2 \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx \\
&\quad + \frac{(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

De modo similar, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |S_1 W_x^1 - lU^1| dx &= \int_0^{L_0} |2\rho_1^1 \gamma W_t^1 (W_x^1 - lU^1) + (\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma W^1 (W_x^1 - lU^1)| dx \\
&\leq \int_0^{L_0} 2\rho_1^1 \gamma |W_t^1 (W_x^1 - lU^1)| dx + \int_0^{L_0} (\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma |W^1 (W_x^1 - lU^1)| dx,
\end{aligned}$$

segue da desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |S_1 W_x^1 - lU^1| dx &\leq \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 + \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |(W_x^1 - lU^1)|^2 dx \\
&\quad + \frac{(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 + \frac{(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma}{2} \int_0^{L_0} |(W_x^1 - lU^1)|^2 dx,
\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Poincaré, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |S_1 W_x^1 - lU^1| dx &\leq \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 + \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |(W_x^1 - lU^1)|^2 dx \\
&\quad + \frac{(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma C_p}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 + \frac{(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx.
\end{aligned}$$

Pelo fato,

$$\int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx \leq 2 \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + 2l^2 \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx$$

concluimos que,

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} |S_1 W_x^1 - lU^1| dx &\leq \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 + \frac{2l^2(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx \\ &\quad + \frac{2\rho_1^1 \gamma + (1 + c_p)(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |(W_x^1 - lU^1)|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Logo, segue das desigualdades (3.51) e (3.52) que,

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} |QU_x^1 + V^1 + lW^1| + |S_1 W_x^1 - lU^1| dx &\leq \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx + \tilde{C} \gamma \int_0^{L_0} [|U^1|^2 + |V^1|^2 + |W^1|^2] dx \\ &\quad + \frac{[2\rho_1^1 + (c_p + 1) - \rho_1^1 \gamma]\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + W^1|^2 dx \\ &\quad + \frac{2\rho_1^1 \gamma + (1 + c_p)(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |(W_x^1 - lU^1)|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \max\{\frac{(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)l^2 c_p}{2}, \frac{2l^2(\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma)l^2 c_p}{2}, \frac{2l^2(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)}{2}\}$.

Donde concluimos, pela equivalência entre as normas,

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} |QU_x^1 + V^1 + lW^1| + |S_1 W_x^1 - lU^1| dx &\leq \rho_1^1 \gamma \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx + \tilde{C}_2 b_1 \gamma \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\ &\quad + \tilde{C}_2 \kappa_0^1 \gamma \int_0^{L_0} |U^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + \tilde{C}_2 \kappa_0^1 \gamma \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx \\ &\quad + \frac{[2\rho_1^1 + (c_p + 1) - \rho_1^1 \gamma]\gamma}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + W^1|^2 dx \\ &\quad + \frac{2\rho_1^1 \gamma + (1 + c_p)(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)\gamma}{2} \int_0^{L_0} |(W_x^1 - lU^1)|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\int_0^{L_0} |QU_x^1 + V^1 + lW^1| + |S_1 W_x^1 - lU^1| dx \leq \tilde{C}_3 \gamma E_1(t), \quad (3.53)$$

onde $\tilde{C}_3$ é uma constante positiva.

Portanto, usando a desigualdade (3.53) em (3.50), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) \leq & \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{L_0 (\kappa_1)^2 |U_x(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} + \\ & \frac{\kappa_0^1 L_0 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_1}{4} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1| - \frac{\kappa_0^1}{4} \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 + \\ & \hat{C}_1 \int_0^{L_0} [|U_t^1| + |V_t^1| + |W_t^1|^2] dx + \hat{C}_{19} \gamma E_1(t), \end{aligned}$$

onde $\hat{C}_{19}$ é uma constante positiva. ■

Lema 3.3. Seja o funcional $M(t) = \int_{L_0}^L \rho_1^2(x - L)[U_t^2 \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2) + W_t^2 \kappa_0^2(W_x - lU^2)] dx$.

Então existem as constantes $\hat{C}_{25}$ e $\hat{C}_4$ positivas tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) \leq & \frac{\rho_1^2(L - L_0) \kappa_0^2 |W_t^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2(L - L_0) \kappa_2 |U_t^2(L_0)|^2}{2} \\ & + \frac{(L - L_0) (\kappa_2)^2 |U_x(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2}{2} \\ & + \frac{\kappa_0^2(L - L_0) |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_1}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx \\ & - \frac{\kappa_0^2}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2 - lU^2|^2 dx + \hat{C}_4 \int_{L_0}^L [|U_t^2| + |V_t^2| + |W_t^2|^2] dx + \hat{C}_{25} \gamma E_2(t), \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando as equações (3.10) e (3.12), respectivamente por $\sigma_9(x) \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2) dx$ e $\sigma_{10}(x) \kappa_0^2(W_x^2 - lU^2)$, em seguida integrarmos em (L_0, L) , temos

$$\begin{aligned} & \int_{L_0}^L \rho_1^2 U_{tt}^2 \sigma_9(x) \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2) dx - \int_{L_0}^L \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2)_x \sigma_9(x) \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2) dx - \\ & \int_{L_0}^L \rho_0^2 l(W_x^2 - lU^1) \sigma_9(x) \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2) dx = \int_{L_0}^L Q^2 \sigma_9(x) \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_0}^L \rho_1^2 W_{tt}^2 \sigma_{10}(x) \kappa_0^2(W_x^2 - lU^2) dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2(W_x^2 - lU^2)_x \sigma_{10}(x) \kappa_0^2(W_x^2 - lU^2) dx + \\ & \int_{L_0}^L \kappa_2 l(U_x^2 + V^2 + lW^2) \sigma_{10}(x) \kappa_0^2(W_x^2 - lU^2) dx = \int_{L_0}^L S_2 \sigma_{10}(x) \kappa_0^2(W_x^2 - lU^2) dx, \end{aligned}$$

de onde segue, da integração por parte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_1^2 U_t^2 \sigma_9(x) \kappa_2(U_x^2 + V^2 + lW^2) dx &= -\frac{\rho_1^2 \sigma_9(L_0) \kappa_2 |U_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\rho_1^2 \kappa_2}{2} \int_{L_0}^L \sigma_9'(x) |U_t^2|^2 dx \\ &+ \int_{L_0}^L \rho_1^2 \sigma_9(x) \kappa_2 V_t^2 U_t^2 dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 \sigma_9(x) \kappa_1 l W_t^2 U_t^2 dx \\ &- \frac{\sigma_9(L_0) \kappa_2^2 |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2}{2} \\ &- \frac{\kappa_2^2}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx \\ &+ \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (W_x^2 - lU^2) \sigma_9(x) \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) dx \\ &+ \int_{L_0}^L Q \sigma_9(x) \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) dx \\ &+ \frac{\sigma_9(L) \kappa_2^2 |U_x^2(L) + V^2(L) + lW^2(L)|^2}{2} \\ &+ \frac{\rho_1^2 \sigma_9(L) \kappa_2 |U_t^2(L)|^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_1^2 W_t^2 \sigma_{10}(x) \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2) dx &= -\frac{\rho_1^2 \sigma_{10}(L_0) \kappa_0^2 |W_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\rho_1^2 \kappa_0^2}{2} \int_{L_0}^L \sigma'_{10}(x) |W_t^2|^2 dx \\
&\quad - \frac{\sigma_{10}(L_0) (\kappa_0^2)^2 |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2}{2} - \frac{(\kappa_0^2)^2}{2} \int_0^L |W_x^2 - lU^2|^2 dx \\
&\quad - \int_0^{L_0} \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) \sigma_{10}(x) \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2) dx \\
&\quad - \int_{L_0}^L \rho_1^2 \sigma_{10}(x) \kappa_0^2 l W_t^2 U_t^2 dx + \int_{L_0}^L S_2 \sigma_{10}(x) \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2) dx \\
&\quad + \frac{\sigma_{10}(L) (\kappa_0^2)^2 |W_x^2(L) - lU^2(L)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2 \sigma_{10}(L) \kappa_0^2 |W_t^2(L)|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Considerando $\sigma_9(x) = \sigma_{10}(x) = x - L$, aplicando a desigualdade de Young e as condições de contorno, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_1^2 U_t^2 (x - L) \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) dx &\leq \frac{\rho_1^2 (L - L_0) \kappa_2 |U_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\rho_1^2 \kappa_2}{2} \int_{L_0}^L |U_t^2|^2 dx \\
&\quad + \rho_1^2 L_0^2 \kappa_2 \int_{L_0}^L |V_t^2|^2 dx + 2\rho_1^2 L_0^2 l^2 \kappa_2 \int_{L_0}^L |W_t^2|^2 dx \\
&\quad + \frac{(L - L_0) \kappa_2^2 |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2}{2} \\
&\quad - \frac{\kappa_2^2}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx \\
&\quad + \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2) (x - L) \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) dx \\
&\quad + \kappa_2 L \int_0^{L_0} |Q^2 (U_x^2 + V^2 + lW^2)| dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^2 W_t^2 (x-L) \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2) dx &\leq \frac{\rho_1^2 (L-L_0) \kappa_0^2 |W_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\rho_1^2 \kappa_0^2}{4} \int_0^{L_0} |W_t^2|^2 dx \\
&+ \rho_1^2 L^2 \kappa_0^2 l^2 \int_0^{L_0} |U_t^2|^2 dx + \kappa_0^2 L \int_0^{L_0} |S_2 W_x^2 - lU^2| dx \\
&- \int_0^{L_0} \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^1) (x-L) \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2) dx \\
&+ \frac{(L-L_0) \kappa_0^2 |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2}{2} \\
&- \frac{(\kappa_0^2)^2}{2} \int_0^{L_0} |W_x^2 - lU^2|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

De onde concluímos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{L_0}^L M(t) &\leq \frac{\rho_1^1 (L-L_0) \kappa_2 |U_t^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2 (L-L_0) \kappa_0^2 |W_t^2(L_0)|^2}{2} \\
&+ \hat{C}_3 \int_{L_0}^L [|U_t^2|^2 + |V_t^2|^2 + |W_t^2|^2] dx \\
&+ \frac{(L-L_0) \kappa_2^2 |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_2^2}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx \\
&+ \frac{(L-L_0) \kappa_0^2 |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2}{2} - \frac{(\kappa_0^2)^2}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2 - lU^2|^2 dx \\
&+ \kappa_2 L \int_0^{L_0} |Q^2 U_x^2 + V^2 + lW^2| dx + \kappa_0^2 L \int_{L_0}^L |S^2 W_x^2 - lU^2| dx.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Onde $\hat{C}_1 = \max\{(\rho_1^1 L_0^2 \kappa_0^1 l^2 + \gamma_1^2 L_0^2 - \frac{\rho_1^1 \kappa_1}{2}), 2\rho_1^1 L_0^2 \kappa_1, (\rho_1^1 L_0^2 l^2 \kappa_1 + \gamma_3^2 L_0^2 - \frac{\rho_1^1 \kappa_0^1}{4})\}$.

Por outro lado, de (3.16) e (3.18) temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{L_0}^L |Q_2 U_x^2 + V^2 + lW^2| dx &= \int_{L_0}^L |2\rho_1^2 \gamma U_t^2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) - \rho_1^2 \gamma^2 U^2 (U_x^2 + V^2 + lW^2)| dx \\
 &\leq 2\rho_1^2 \gamma \int_0^{L_0} |U_t^2 (U_x^2 + V^2 + lW^2)| dx + \\
 &\quad + \rho_1^2 \gamma^2 \int_0^{L_0} |U^2 (U_x^2 + V^2 + lW^2)| dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{L_0}^L |S_2 W_x^2 - lW^2| dx &= \int_{L_0}^L |2\rho_1^2 \gamma W_t^2 (W_x^2 - lU^2) - \rho_1^2 \gamma^2 W^2 (W_x^2 - lU^2)| dx \\
 &\leq 2\rho_1^2 \gamma \int_0^{L_0} |W_t^2 (W_x^2 - lU^2)| dx + \\
 &\quad + \rho_1^2 \gamma^2 \int_0^{L_0} |W^2 (W_x^2 - lU^2)| dx,
 \end{aligned}$$

e assim, pelas desigualdades de Young, Poincaré, temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{L_0}^L |Q_2 U_x^2 + V^2 + lW^2| dx &\leq \rho_1^2 \gamma^2 \int_0^{L_0} |U_t^2|^2 dx + \rho_1^2 \gamma^2 \int_0^{L_0} |(U_x^2 + V^2 + lW^2)|^2 dx + \\
 &\quad + \frac{\rho_1^2 \gamma c_p}{2} \int_0^{L_0} |U_x^2|^2 dx + \frac{\rho_1^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |(U_x^2 + V^2 + lW^2)| dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{L_0}^L |S_2 W_x^2 - lW^2| dx &\leq \rho_1^2 \gamma^2 \int_0^{L_0} |W_t^2|^2 dx + \rho_1^2 \gamma^2 \int_0^{L_0} |(W_x^2 - lU^2)|^2 dx + \\
 &\quad + \frac{\rho_1^2 \gamma c_p}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2|^2 dx + \frac{\rho_1^2 \gamma}{2} \int_{L_0}^L |(W_x^2 - lU^2)|^2 dx,
 \end{aligned}$$

pelo fato de,

$$\int_{L_0}^L |U_x^2|^2 dx \leq 2 \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx + 4 \int_0^{L_0} |V^2|^2 dx + 4l^2 \int_0^{L_0} |W^2|^2 dx.$$

$$\int_{L_0}^L |W_x^2|^2 dx \leq 2 \int_{L_0}^L |W_x^2 - lU^2|^2 dx + 2l^2 \int_0^{L_0} |U^2|^2 dx$$

e a equivalência entre as normas, concluímos que

$$\int_0^{L_0} |(U_x^2 + V^2 + lW^2)|^2 + |S_2 W_x^2 - lW^2| dx \leq \hat{C}_5 \gamma E_2(t). \quad (3.56)$$

Onde $\hat{C}_{25}$ é uma constante positiva.

Portanto usando as desigualdades (3.54) e (3.56), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) &\leq \frac{\rho_1^2(L-L_0)\kappa_0^2|W_t^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2(L-L_0)\kappa_2|U_t^2(L_0)|^2}{2} \\ &\quad + \frac{(L-L_0)(\kappa_2)^2|U_x(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2}{2} + \\ &\quad \frac{\kappa_0^2(L-L_0)|W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_1}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2| \\ &\quad - \frac{\kappa_0^2}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2 - lU^2|^2 + \hat{C}_4 \int_{L_0}^L [|U_t^2| + |V_t^2| + |W_t^2|^2] dx + \hat{C}_{25} \gamma E_2(t), \end{aligned}$$

■

Lema 3.4. Seja o funcional $P(t)$ definido por

$$P(t) = H_1(t) + H_2(t).$$

Onde,

$$H_1(t) = \int_0^{L_0} \gamma x [\rho_1^1 U_t^1 U_x^1 + \rho_2^1 V_t^1 V_x^1 + \rho_1^1 W^1 W_x^1] dx \quad (3.57)$$

e

$$H_2(t) = \int_{L_0}^L \gamma x [\rho_1^2 U_t^2 U_x^2 + \rho_2^2 V_t^2 V_x^2 + \rho_1^2 W_t^2 W_x^2] dx. \quad (3.58)$$

Então existem as constantes $\hat{C}_{26}$, $\hat{C}_6$ e $\hat{C}_{13}$ positivas tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(t) \leq & -\frac{\gamma}{4} \int_0^L [\kappa_1 |U_x^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1|^2] dx - \frac{\gamma}{4} \int_{L_0}^L [\kappa_2 |U_x^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2|^2] dx \\ & - \frac{\gamma}{4} \int_{L_0}^L [\rho_1^2 |U_t^2|^2 + \rho_2^2 |V_t^2|^2 + \rho_1^2 |W_t^2|^2] dx + \hat{C}_{26} \int_{L_0}^L [|U_t^2| + |V_t^2| + |W_t^2|] dx \\ & + \hat{C}_6 \gamma E_1(t) + \hat{C}_{13} \gamma E_2(t), \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando as equações (3.7), (3.8) e (3.9), respectivamente por $\sigma_1(x)U_x^1$, $\sigma_2(x)V_x^1$ e $\sigma_3(x)W_x^1$, em seguida integramos de $(0, L_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_{tt}^1 \sigma_1(x) U_x^1 dx - \int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1)_x \sigma_1(x) U_x^1 dx + \int_0^{L_0} \kappa_0^1 l (W_x^1 - lU^1) \sigma_1(x) U_x^1 dx + \\ + \int_0^{L_0} \gamma_1 U_t^1 \sigma_1(x) U_x^1 dx = \int_0^{L_0} Q_1 \sigma_1(x) U_x^1 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} \rho_2^1 V_{tt}^1 \sigma_2(x) V_x^1 dx - \int_0^{L_0} b_1 V_{xx}^1 \sigma_2(x) V_x^1 dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + lW^1) \sigma_2(x) V_x^1 dx + \\ + \int_0^{L_0} \gamma_2 V_t^1 \sigma_1(x) V_x^1 dx = \int_0^{L_0} R_1 \sigma_2(x) V_x^1 dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_{tt}^1 \sigma_1(x) W_x^1 dx - \int_0^{L_0} \kappa_0^1 (W_x^1 - lU^1)_x \sigma_1(x) W_x^1 dx + \int_0^{L_0} \kappa_1 l (U_x^1 + V^1 + lW^1) \sigma_1(x) W_x^1 dx + \\ + \int_0^{L_0} \gamma_3 W_t^1 \sigma_1(x) W_x^1 dx = \int_0^{L_0} S_1 \sigma_1(x) W_x^1 dx. \end{aligned}$$

Logo, considerando $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = \sigma_3(x) = \gamma x$ e, em seguida, integrarmos por parte, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 \gamma x U_x^1 &= \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |U_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_1^1}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |U_x^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \\ &\quad - \frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma L_0 |U^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_0^1 l^2}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + \kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} V_x^1 x U_x^1 + \kappa_1 l \gamma \int_0^{L_0} W_x^1 x U_x^1 \\ &\quad + \kappa_0^1 l \gamma \int_0^{L_0} W_x^1 x U_x^1 - \gamma_1 \gamma \int_0^{L_0} U_t^1 x U_x^1 + \gamma \int_0^{L_0} Q^1 x U_x^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_2^1 V_t^1 \gamma x V_x^1 &= \frac{\rho_2^1 \gamma L_0 |V_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_2^1}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + \frac{b_1 \gamma L_0 |V_x^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma b_1}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\ &\quad - \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |V^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx - \kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} V_x^1 x U_x^1 - \kappa_1 l \gamma \int_0^{L_0} W^1 x U_x^1 \\ &\quad - \gamma_1 \gamma \int_0^{L_0} V_t^1 x V_x^1 + \gamma \int_0^{L_0} R_1 x V_x^1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_t^1 \gamma x W_x^1 &= \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |W_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_1^1}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + \frac{\kappa_0^1 \gamma L_0 |W_x^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \kappa_0^1}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx \\ &\quad - \frac{\kappa_1 l^2 \gamma L_0 |W^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_1 l^2}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx - \kappa_1 \gamma l \int_0^{L_0} V^1 x W_x^1 - \kappa_1 l \gamma \int_0^{L_0} W_x^1 x U_x^1 \\ &\quad - \kappa_0^1 l \gamma \int_0^{L_0} W_x^1 x U_x^1 + \gamma_1 \gamma \int_0^{L_0} W_t^1 x W_x^1 + \gamma \int_0^{L_0} S_1 x U_x^1, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_1(t) = & \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \gamma x [\rho_1^1 U_t^1 U_x^1 + \rho_2^1 V_t^1 V_x^1 + \rho_1^1 W_t^1 W_x^1] dx = -\frac{\gamma \rho_1^1}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx - \frac{\gamma \kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \\
& + \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |U_x^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma L_0 |U^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_0^1 l^2}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx \\
& + \gamma_1 \gamma \int_0^{L_0} U_t^1 x U_x^1 + \gamma \int_0^{L_0} Q^1 x U_x^1 + \frac{\rho_2^1 \gamma L_0 |V_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_2^1}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx \\
& + \frac{b_1 \gamma L_0 |V_x^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma b_1}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx - \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |V^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx \\
& - \kappa_1 l \gamma \int_0^{L_0} W^1 V^1 - \gamma_1 \gamma \int_0^{L_0} V_t^1 x V_x^1 + \gamma \int_0^{L_0} R_1 x V_x^1 - \kappa_1 \gamma l V^1(L_0) W^1(L_0) \\
& + \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |W_t^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_1^1}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + \frac{\kappa_0^1 \gamma L_0 |W_x^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \kappa_0^1}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx \\
& - \frac{\kappa_1 l^2 \gamma L_0 |W^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_1 l^2}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + \gamma_1 \gamma \int_0^{L_0} W_t^1 x W_x^1 + \gamma \int_0^{L_0} S_1 x U_x^1.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_1(t) &\leq \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_2^1 \gamma L_0 |V_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |W_t^1(L_0)|^2}{2} \\
&+ \left(\frac{\gamma \gamma_1^2 L_0^2}{2\kappa_1} - \frac{\gamma \rho_1^1}{2}\right) \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \left(\frac{\gamma \gamma_2^2 L_0^2}{b_1} - \frac{\gamma \rho_2^1}{2}\right) \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + \left(\frac{\gamma \gamma_3^2 L_0^2}{2\kappa_0^1} - \frac{\gamma \rho_1^1}{2}\right) \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx \\
&+ \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |U_x^1(L_0)|^2}{2} + \frac{b_1 \gamma L_0 |V_x^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^1 \gamma L_0 |W_x^1(L_0)|^2}{2} \\
&- \frac{\kappa_1 \gamma}{4} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx - \frac{b_1 \gamma}{4} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx - \frac{\kappa_0^1 \gamma}{4} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx \\
&- \frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma L_0 |U^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |V^1(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_l l^2 \gamma L_0 |W^1(L_0)|^2}{2} \\
&+ \frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + \kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + \frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx \\
&\gamma L_0 \int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1| dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |R_1 V_x^1| dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |S_1 W_x^1| dx \\
&- \kappa_1 \gamma l V^1(L_0) W^1(L_0).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Onde $\bar{C} = \max\{\kappa_1, \kappa_1 l^2, \kappa_0^1 l^2\}$. Mas, Por outro lado, usando (3.13), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1| dx &\leq \frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + 2L_0 \rho_1^1 \gamma^2 \int_0^{L_0} |U_t^1 U_x^1| dx \\
&+ L_0 \rho_1^1 (\gamma_1 - \rho_1^1 \gamma) \gamma^2 \int_0^{L_0} |U^1 U_x^1| dx,
\end{aligned}$$

e assim pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1| dx &\leq \rho_1^1 l^2 \gamma \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \frac{[\rho_1^1 + \gamma(\gamma_1^1 - \rho_1^1 \gamma)] \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \\
&+ \frac{[\kappa_0^1 l^2 + \gamma(\gamma - \rho_1^1 \gamma)] \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx
\end{aligned}$$

e pelo fato,

$$\int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \leq 2 \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + 4 \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + 4l^2 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx, \quad (3.60)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1| dx &\leq \rho_1^1 l^2 \gamma \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + [\rho_1^1 + \bar{C}_1 \kappa_1 \gamma] \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\ &\quad + [\rho_1^1 + \gamma(\gamma - \rho_1^1 \gamma)] \gamma \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\ &\quad + \bar{C}_1 b_1 \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + \bar{C}_1 \kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $\bar{C}_1 = \max\{\frac{[\kappa_0^1 l^2 + \gamma(\gamma - \rho_1^1 \gamma)]}{2}, 2[\rho_1^1 + \gamma(\gamma_1 - \rho_1 \gamma)], 2l^2[\rho_1^1 + \gamma(\gamma_1 - \rho_1 \gamma)]\}$.

Logo, podemos concluir que,

$$\frac{\kappa_0^1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |Q_1 U_x^1| dx \leq \bar{C}_2 \gamma E_1(t). \quad (3.61)$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned} \kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |R_1 V_x^1| dx &\leq \kappa_l \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + 2L_0 \rho_2^1 \gamma^2 \int_0^{L_0} |V_t^1 V_x^1| dx \\ &\quad + L_0 (\gamma_2 - \rho_2^1 \gamma) \gamma^2 \int_0^{L_0} |V^1 V_x^1| dx, \end{aligned}$$

e assim pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |R_1 V_x^1| dx &\leq \kappa_l \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + \rho_2^1 L_0 \gamma^2 \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx \\
 &\quad + \rho_2^1 L_0 \gamma^2 \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\
 &\quad + \frac{L_0(\gamma_2 + \rho_2^1 \gamma) \gamma^2}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\
 &\quad + \frac{L_0(\gamma_2 + \rho_2^1 \gamma) \gamma^2}{2} \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Logo, aplicando a desigualdade de Poincaré,

$$\kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |R_1 V_x^1| dx \leq \rho_2^1 \gamma \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + \bar{C}_3 \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx.$$

Onde $\bar{C}_3 = \max\{\kappa_1 C_p, \gamma L_0 \rho_2^1, \frac{L_0(\gamma_2 + \rho_2^1 \gamma) \gamma}{2}, \frac{L_0(\gamma_2 + \rho_2^1 \gamma) \gamma C_p}{2}\}$. Daí concluímos que,

$$\kappa_1 \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |R_1 V_x^1| dx \leq \bar{C}_4 \gamma E_1(t), \quad (3.62)$$

onde $\bar{C}_4$ é uma constante positiva.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |S_1 W_x^1| dx &\leq \frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + 2L_0 \rho_1^1 \gamma^2 \int_0^{L_0} |W_t^1 W_x^1| dx \\
 &\quad + L_0 \rho_1^1 (\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma) \gamma^2 \int_0^{L_0} |W^1 W_x^1| dx,
 \end{aligned}$$

e assim pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |S_1 U_x^1| dx &\leq \rho_1^1 l^2 \gamma \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + \frac{[\rho_1^1 + \gamma(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)] \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx \\ &\quad + \frac{[\kappa_1 l^2 + \gamma(\gamma - \rho_1^1 \gamma)] \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Poincaré temos que

$$\frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |S_1 U_x^1| dx \leq \bar{C}_5 \gamma \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx + \rho_1^1 l^2 \gamma \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx$$

$$\bar{C}_1 = \max \left\{ \frac{[\kappa_1 l^2 + \gamma(\gamma - \rho_1^1 \gamma)]}{2}, 2[\rho_1^1 + \gamma(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)], 2l^2[\rho_1^1 + \gamma(\gamma_3 - \rho_1^1 \gamma)] \right\}$$

e pelo fato,

$$\int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx \leq 2 \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + 2l^2 \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx, \quad (3.63)$$

e

$$\int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \leq 2 \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + 4 \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + 4l^2 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx,$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |S_1 U_x^1| dx &\leq 2\bar{C}_5 \gamma \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + \bar{C}_5 \gamma l^2 \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx \\ &\quad 2\bar{C}_5 \gamma \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + 4\bar{C}_5 \gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx \\ &\quad + 4l^2 \bar{C}_5 \gamma \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx, \end{aligned}$$

de onde obtemos pela equivalência,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |S_1 U_x^1| dx &\leq 2\bar{C}_5 \gamma \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + \bar{C}_6 \kappa_0^1 \gamma \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx \\ &\quad 2\bar{C}_5 \gamma \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + \bar{C}_6 \gamma \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\ &\quad \bar{C}_6 \gamma \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo concluímos que,

$$\frac{\kappa_1 l^2 \gamma}{2} \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx + \gamma L_0 \int_0^{L_0} |S_1 U_x^1| dx \leq \bar{C}_7 \gamma E_1(t). \quad (3.64)$$

Onde $\bar{C}_7$ é uma constante positiva.

Portanto, podemos concluir das inequações (3.61), (3.62) e (3.64) que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_1(t) &\leq \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_2^1 \gamma L_0 |V_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 \gamma L_0 |W_t^1(L_0)|^2}{2} \\ &\quad + \left(\frac{\gamma \rho_1^2 L_0^2}{2\kappa_1} - \frac{\gamma \rho_1^1}{2} \right) \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \left(\frac{\gamma \rho_2^2 L_0^2}{b_1} - \frac{\gamma \rho_2^1}{2} \right) \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + \left(\frac{\gamma \rho_3^2 L_0^2}{2\kappa_0^1} - \frac{\gamma \rho_1^1}{2} \right) \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx \\ &\quad + \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |U_x^1(L_0)|^2}{2} + \frac{b_1 \gamma L_0 |V_x^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^1 \gamma L_0 |W_x^1(L_0)|^2}{2} \\ &\quad - \frac{\kappa_1 \gamma}{4} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx - \frac{b_1 \gamma}{4} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx - \frac{\kappa_0^1 \gamma}{4} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx - \kappa_1 \gamma l V^1(L_0) W^1(L_0). \end{aligned} \quad (3.65)$$

De modo análogo, quando multiplicarmos as equações (3.10), (3.11) e (3.12), respectivamente por $\sigma_4(x)U_x^2$, $\sigma_5(x)V_x^2$ e $\sigma_6(x)W_x^2$, em seguida integrarmos de (L_0, L) , obteremos

$$\int_{L_0}^L \rho_1^2 U_{tt}^2 \sigma_4(x) U_x^2 dx - \int_{L_0}^L \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2)_x \sigma_4(x) U_x^2 dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2 l (W_x^2 - lU^2) \sigma_4(x) U_x^2 dx = \int_{L_0}^L Q_2 \sigma_4(x) U_x^2 dx.$$

$$\int_{L_0}^L \rho_1^2 V_{tt}^2 \sigma_5(x) V_x^2 dx - \int_{L_0}^L b_2 V_{xx}^2 \sigma_5(x) V_x^2 dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) \sigma_5(x) V_x^2 dx = \int_{L_0}^L S_2 \sigma_5(x) V_x^2 dx.$$

$$\int_{L_0}^L \rho_1^2 W_{tt}^2 \sigma_6(x) W_x^2 dx - \int_{L_0}^L \kappa_0^2 (W_x^2 - l U^2)_x \sigma_6(x) W_x^2 dx + \int_{L_0}^L \kappa_2 l (U_x^2 + V^2 + l W^2) \sigma_6(x) W_x^2 dx = \int_{L_0}^L S_2 \sigma_6(x) W_x^1 dx.$$

Logo, considerando $\sigma_4(x) = \sigma_5(x) = \sigma_6(x) = \gamma x$ e, em seguida, integrarmos por parte e aplicando as condições de contorno, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_1^2 U_t^2 \gamma x U_x^2 &= -\frac{\rho_1^2 \gamma L_0 |U_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_1^2}{2} \int_{L_0}^L |U_t^2|^2 dx - \frac{\kappa_2 \gamma L_0 |U_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \kappa_2}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2|^2 dx \\ &\quad + \frac{\kappa_0^2 l^2 \gamma L_0 |U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_0^2 l^2}{2} \int_{L_0}^L |U^2|^2 dx + \kappa_2 \gamma \int_{L_0}^L V_x^1 x U_x^1 + \kappa_1 l \gamma \int_{L_0}^L W_x^2 x U_x^2 \\ &\quad + \kappa_0^2 l \gamma \int_{L_0}^L W_x^2 x U_x^2 + \gamma \int_0^{L_0} Q^2 x U_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_2^2 V_t^2 \gamma x V_x^2 &= -\frac{\rho_2^2 \gamma L_0 |V_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_2^2}{2} \int_{L_0}^L |V_t^2|^2 dx - \frac{b_2 \gamma L_0 |V_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma b_2}{2} \int_{L_0}^L |V_x^2|^2 dx \\ &\quad + \frac{\kappa_1 \gamma L_0 |V^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_1}{2} \int_{L_0}^L |V^2|^2 dx - \kappa_2 \gamma \int_{L_0}^L V_x^2 x U_x^2 - \kappa_1 l \gamma \int_0^{L_0} W^1 x V_x^1 \\ &\quad + \gamma \int_0^{L_0} R_2 x V_x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \rho_1^2 W_t^2 \gamma x W_x^2 &= -\frac{\rho_1^2 \gamma L_0 |W_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_1^2}{2} \int_{L_0}^L |W_t^2|^2 dx - \frac{\kappa_0^2 \gamma L_0 |W_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \kappa_0^2}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2|^2 dx \\ &\quad + \frac{\kappa_1 l^2 \gamma L_0 |W^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_2 l^2}{2} \int_{L_0}^L |W^2|^2 dx - \kappa_2 \gamma l \int_{L_0}^L V^2 x W_x^2 - \kappa_2 l \gamma \int_{L_0}^L W_x^2 x U_x^2 \\ &\quad - \kappa_0^2 l \gamma \int_{L_0}^L W_x^2 x U_x^2 + \gamma \int_{L_0}^L S_2 x U_x^2, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_2(t) &= \frac{d}{dt} \int_{L_0}^L \gamma x [\rho_1^2 U_t^2 U_x^2 + \rho_2^2 V_t^2 V_x^2 + \rho_1^2 W_t^2 W_x^2] dx = -\frac{\gamma \rho_1^1}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx - \frac{\gamma \kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \\
&\quad - \frac{\rho_1^2 \gamma L_0 |U_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_2 \gamma L_0 |U_x^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^2 l^2 \gamma L_0 |U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_0^2 l^2}{2} \int_{L_0}^L |U^2|^2 dx \\
&\quad + \gamma \int_{L_0}^L Q_2 x U_x^2 + \gamma \int_0^{L_0} S_2 x U_x^2 - \frac{\rho_2^1 \gamma L_0 |V_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_2^1}{2} \int_{L_0}^L |V_t^2|^2 dx \\
&\quad - \frac{b_2 \gamma L_0 |V_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma b_2}{2} \int_0^{L_0} |V_x^2|^2 dx + \frac{\kappa_2 \gamma L_0 |V^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_2}{2} \int_{L_0}^L |V^2|^2 dx \\
&\quad + \kappa_2 l \gamma \int_{L_0}^L W^2 V^2 + \gamma \int_{L_0}^L R_2 x V_x^2 - \frac{\rho_1^2 \gamma L_0 |W_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \rho_2^1}{2} \int_{L_0}^L |W_t^2|^2 dx \\
&\quad - \frac{\kappa_0^2 \gamma L_0 |W_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma \kappa_0^2}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2|^2 dx + \frac{\kappa_2 l^2 \gamma L_0 |W^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma \kappa_2 l^2}{2} \int_{L_0}^L |W^1|^2 dx \\
&\quad + \kappa_2 \gamma l V^2(L_0) W^2(L_0).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_2(t) \leq & -\frac{\rho_1^2\gamma L_0|U_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\kappa_2\gamma L_0|U_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\rho_1^1}{2}\int_0^{L_0}|U_t^1|^2dx - \frac{\gamma\kappa_1}{2}\int_0^{L_0}|U_x^1|^2dx \\
& + \frac{\kappa_0^2l^2\gamma L_0|U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\gamma\kappa_0^2l^2}{2}\int_{L_0}^L|U^2|^2dx - \frac{\rho_2^1\gamma L_0|V_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\rho_2^1}{2}\int_{L_0}^L|V_t^2|^2dx \\
& - \frac{b_2\gamma L_0|V_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma b_2}{2}\int_0^{L_0}|V_x^2|^2dx + \frac{\kappa_2\gamma L_0|V^2(L_0)|^2}{2} + \gamma\kappa_2\int_{L_0}^L|V^2|^2dx \\
& - \frac{\rho_1^2\gamma L_0|W_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\rho_2^1}{2}\int_{L_0}^L|W_t^2|^2dx - \frac{\kappa_0^2\gamma L_0|W_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\kappa_0^2}{2}\int_{L_0}^L|W_x^2|^2dx \\
& + \frac{\kappa_2l^2\gamma L_0|W^2(L_0)|^2}{2} + \gamma\kappa_2l^2\int_{L_0}^L|W^1|^2dx + \gamma L\int_{L_0}^L|Q_2U_x^2|dx + \gamma L\int_0^{L_0}|S_2W_x^2|dx \\
& + \gamma L\int_{L_0}^L|R_2V_x^2|dx + \kappa_2\gamma lV^2(L_0)W^2(L_0).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_0^2l^2\gamma}{2}\int_{L_0}^L|U^2|^2dx + \gamma L\int_{L_0}^L|Q_2U_x^2|dx & \leq \frac{\kappa_0^2l^2\gamma}{2}\int_{L_0}^L|U^2|^2dx + 2L\rho_2^1\gamma^2\int_{L_0}^L|U_t^2U_x^2|dx \\
& + L\rho_1^2\gamma^3\int_{L_0}^L|U^2U_x^2|dx, \\
\kappa_2l^2\gamma\int_{L_0}^L|V^2|^2dx + \gamma L\int_{L_0}^L|R_2V_x^2|dx & \leq \kappa_2l^2\gamma\int_{L_0}^L|V^2|^2dx + 2L\rho_2^2\gamma^2\int_{L_0}^L|V_t^2V_x^2|dx \\
& + L\rho_2^2\gamma^3\int_{L_0}^L|V^2V_x^2|dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 l^2 \gamma \int_{L_0}^L |W^2|^2 dx + \gamma L \int_{L_0}^L |S_2 W_x^2| dx &\leq \kappa_2 l^2 \gamma \int_{L_0}^L |W^2|^2 dx + 2L \rho_2^1 \gamma^2 \int_{L_0}^L |W_t^2 W_x^2| dx \\ &\quad + L \rho_1^2 \gamma^3 \int_{L_0}^L |W^2 W_x^2| dx. \end{aligned}$$

Usando nas três últimas desigualdades, as desigualdades de Young, Poincaré e o fato de,

$$\int_{L_0}^L |W_x^2|^2 dx \leq 2 \int_{L_0}^L |W_x^2 - lU^2|^2 dx + 2l^2 \int_{L_0}^L |U^2|^2 dx,$$

e

$$\int_{L_0}^L |U_x^2|^2 dx \leq 2 \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx + 4 \int_{L_0}^L |V^2|^2 dx + 4l^2 \int_{L_0}^L |W^2|^2 dx,$$

Logo, obtemos que,

$$\frac{\kappa_0^2 l^2 \gamma}{2} \int_{L_0}^L |U^2|^2 dx + \gamma L \int_{L_0}^L |Q_2 U_x^2| dx \leq \check{C}_1 \gamma E_2(t) \quad (3.66)$$

$$\kappa_2 l^2 \gamma \int_{L_0}^L |V^2|^2 dx + \gamma L \int_{L_0}^L |R_2 V_x^2| dx \leq \check{C}_2 \gamma E_2(t),$$

$$\kappa_2 l^2 \gamma \int_{L_0}^L |W^2|^2 dx + \gamma L \int_{L_0}^L |S_2 W_x^2| dx \leq \check{C}_3 \gamma E_2(t).$$

Onde $\check{C}_1, \check{C}_2$ e $\check{C}_3$ são constantes positivas.

Portanto, podemos concluir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H_2(t) \leq & -\frac{\rho_1^2\gamma L_0|U_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\rho_1^2}{2}\int_{L_0}^L|U_t^2|^2dx - \frac{\rho_2^1\gamma L_0|V_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\rho_2^2}{2}\int_{L_0}^L|V_t^2|^2dx \\
& -\frac{\rho_1^2\gamma L_0|W_t^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\rho_1^2}{2}\int_{L_0}^L|W_t^2|^2dx - \frac{\kappa_2\gamma L_0|U_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\kappa_2}{2}\int_{L_0}^L|U_x^2|^2dx \\
& -\frac{b_2\gamma L_0|V_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma b_2}{2}\int_0^{L_0}|V_x^2|^2dx - \frac{\kappa_0^2\gamma L_0|W_x^2(L_0)|^2}{2} - \frac{\gamma\kappa_0^2}{2}\int_{L_0}^L|W_x^2|^2dx \\
& +\frac{\kappa_0^2l^2\gamma L_0|U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_2\gamma L_0|V^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_2l^2\gamma L_0|W^2(L_0)|^2}{2} \\
& +\kappa_2\gamma lV^2(L_0)W^2(L_0) + \check{C}_4\gamma E_2(t).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Onde $\check{C}_5$ é uma constante positiva.

Somando as inequações (3.65) e (3.67), as condições de transmissão, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P(t) \leq & -\frac{\gamma}{4}\int_0^L[\kappa_1|U_x^1|^2 + b_1|V_x^1|^2 + \kappa_0^1|W_x^1|^2]dx - \frac{\gamma}{4}\int_{L_0}^L[\kappa_2|U_x^2|^2 + b_2|V_x^2|^2 + \kappa_0^2|W_x^2|^2]dx \\
& -\frac{\gamma}{4}\int_{L_0}^L[\rho_1^2|U_t^2|^2 + \rho_2^2|V_t^2|^2 + \rho_1^2|W_t^2|^2]dx + \hat{C}_{26}\int_0^{L_0}[|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2]dx \\
& +\hat{C}_6\gamma E_1(t) + \hat{C}_{13}\gamma E_2(t),
\end{aligned}$$

$$\hat{C}_{26} = \max\left\{\left(\frac{\gamma\gamma_1^2L_0^2}{2\kappa_1} - \frac{\gamma\rho_1^1}{2}\right), \left(\frac{\gamma\gamma_2^2L_0^2}{b_1} - \frac{\gamma\rho_2^1}{2}\right), \left(\frac{\gamma\gamma_3^2L_0^2}{2\kappa_0^1} - \frac{\gamma\rho_1^1}{2}\right)\right\}$$

■

Lema 3.5. O funcional $V(t)$ é definido por

$$V(t) = NE(t) + (P(t) + L(t)),$$

satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t) \leq & \ddot{N}_1 \gamma E(t) - \hat{C}_{28} \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} \\
& \frac{\kappa_1^2 L_0 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^1 L_0 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} \\
& - \frac{\kappa_1}{4} \int_0^{L_0} [|U_x^1 + V^1 + lW^1|^2] dx - \frac{\kappa_0^1}{4} \int_0^{L_0} [|W_x^1 - lU^1|^2] dx \\
& - \frac{\gamma}{4} \int_0^L [\kappa_1 |U_x^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1|^2] dx - \frac{\gamma}{4} \int_{L_0}^L [\kappa_2 |U_x^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2|^2] dx,
\end{aligned}$$

onde $\ddot{N}_1 = \max\{NC, \hat{C}_{27}\}$

Prova. Usando os Lemas (3.2) e (3.4)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t) \leq & NC \gamma E(t) + \hat{C}_{27} \gamma E(t) + \hat{C}_{26} \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx \\
& - N \int_0^{L_0} [\gamma_1 |U_t^1|^2 + \gamma_2 |V_t^1|^2 + \gamma_3 |W_t^1|^2] dx + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} \\
& \frac{\kappa_1^2 L_0 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^1 L_0 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} \\
& - \frac{\kappa_1}{4} \int_0^{L_0} [|U_x^1 + V^1 + lW^1|^2] dx - \frac{\kappa_0^1}{4} \int_0^{L_0} [|W_x^1 - lU^1|^2] dx \\
& - \frac{\gamma}{4} \int_0^L [\kappa_1 |U_x^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1|^2] dx - \frac{\gamma}{2} \int_{L_0}^L [\kappa_2 |U_x^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2|^2] dx,
\end{aligned}$$

onde $\hat{C}_{27} = \max\{(\hat{C}_{19} + \hat{C}_6), \hat{C}_{13}\}$.

De onde segue que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t) \leq & NC\gamma E(t) + \hat{C}_{27}\gamma E(t) + (\hat{C}_{27} - N\gamma_1) \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 + (\hat{C}_{27} - N\gamma_1) \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 \\
& + (\hat{C}_{27} - N\gamma_1) \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} \\
& + \frac{\kappa_1^2 L_0 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^1 L_0 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} \\
& - \frac{\kappa_1}{4} \int_0^{L_0} [|U_x^1 + V^1 + lW^1|^2] dx - \frac{\kappa_0^1}{4} \int_0^{L_0} [|W_x^1 - lU^1|^2] dx \\
& - \frac{\gamma}{4} \int_0^L [\kappa_1 |U_x^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1|^2] dx - \frac{\gamma}{2} \int_{L_0}^L [\kappa_2 |U_x^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2|^2] dx,
\end{aligned}$$

escolhendo $N \gg \hat{C}_{27}$, onde $N\gamma_i > \hat{C}_{27}$, para $i = 1, 2, 3$. Então existe uma constante positiva $\hat{C}_{28}$ tal que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t) \leq & \ddot{N}_1 \gamma E(t) - \hat{C}_{28} \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} \\
& + \frac{\kappa_1^2 L_0 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^1 L_0 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} \\
& - \frac{\kappa_1}{4} \int_0^{L_0} [|U_x^1 + V^1 + lW^1|^2] dx - \frac{\kappa_0^1}{4} \int_0^{L_0} [|W_x^1 - lU^1|^2] dx \\
& - \frac{\gamma}{4} \int_0^L [\kappa_1 |U_x^1|^2 + b_1 |V_x^1|^2 + \kappa_0^1 |W_x^1|^2] dx - \frac{\gamma}{2} \int_{L_0}^L [\kappa_2 |U_x^2|^2 + b_2 |V_x^2|^2 + \kappa_0^2 |W_x^2|^2] dx.
\end{aligned}$$

Onde $\ddot{N}_1 = \max\{NC, \hat{C}_{27}\}$. ■

Lema 3.6. Seja o funcional $G(t)$ definido por

$$G(t) = N_2 H_2(t) + M(t)$$

satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) \leq & \frac{\ddot{N}_2 \kappa_0^2 l^2 \gamma |U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\ddot{N}_2 (\kappa_2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |V^2(L_0)|^2}{2} \\
& + \frac{\ddot{N}_2 (\kappa_2 l^2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |W^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2 (L - L_0) |U_t^2(L_0)|^2}{2} \\
& + \frac{\kappa_0^2 \rho_1^2 (L - L_0) W_t^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_2 (L - L_0) |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + l W^2(L_0)|^2}{2} \\
& - \ddot{N}_3 \int_{L_0}^L [|U_t^2|^2 + |V_t^2|^2 + |W_t^2|^2 + |U_x^2 + V^2 + l W^2|^2 + |W_x^2 - l U^2|^2] dx \\
& + \frac{\kappa_2 (L - L_0) |W_x^2(L_0) - l U^2(L_0)|^2}{2} + \ddot{N}_4 \gamma E_2(t),
\end{aligned}$$

onde $\ddot{N}_3$ é uma constante positiva.

Prova. Usando o lema (4.3) e inequação (3.67), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) \leq & \frac{\ddot{N}_2 \kappa_0^2 l^2 \gamma |U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\ddot{N}_2 (\kappa_2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |V^2(L_0)|^2}{2} \\
& + \frac{\ddot{N}_2 (\kappa_2 l^2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |W^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2 (L - L_0) |U_t^2(L_0)|^2}{2} \\
& + \frac{\kappa_0^2 \rho_1^2 (L - L_0) W_t^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_2 (L - L_0) |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + l W^2(L_0)|^2}{2} \\
& + (\hat{C} - \ddot{N}_2 \gamma \rho_1^2) \int_{L_0}^L |U_t^2|^2 dx + (\hat{C} - \ddot{N}_2 \gamma \rho_2^2) \int_{L_0}^L |V_t^2|^2 dx + (\hat{C} - \ddot{N}_2 \gamma \rho_1^2) \int_{L_0}^L |W_t^2|^2 dx \\
& - \frac{\kappa_2}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + l W^2|^2 - \frac{\kappa_0^2}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2 - l U^2|^2 dx \\
& + \frac{\kappa_2 (L - L_0) |W_x^2(L_0) - l U^2(L_0)|^2}{2} + \ddot{N}_4 \gamma E_2(t),
\end{aligned}$$

escolhendo $\ddot{N}_2 \gg \gamma$, tal que $\ddot{N}_2 \gamma \rho_i^2 \gg \hat{C}$ para $i = 1, 2$. Podemos concluir que existe uma constante positiva $\ddot{N}_3$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(t) \leq & \frac{\ddot{N}_2 \kappa_0^2 l^2 \gamma |U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\ddot{N}_2 (\kappa_2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |V^2(L_0)|^2}{2} \\ & + \frac{\ddot{N}_2 (\kappa_2 l^2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |W^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2 (L - L_0) |U_t^2(L_0)|^2}{2} \\ & + \frac{\kappa_0^2 \rho_1^2 (L - L_0) |W_t^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_2 (L - L_0) |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2}{2} \\ & - \ddot{N}_3 \int_{L_0}^L [|U_t^2|^2 + |V_t^2|^2 + |W_t^2|^2 + |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 + |W_x^2 - lU^2|^2] dx \\ & + \frac{\kappa_2 (L - L_0) |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2}{2} + \ddot{N}_4 \gamma E_2(t). \end{aligned}$$

■

Lema 3.7. Para todo $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$ independente dos dados iniciais, tal que

$$\begin{aligned} & \int_0^T |U^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |V^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_t^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^1(L_0)|^2 dt \\ & + \int_0^T |U_t^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2 dt \\ & + \int_0^T |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2 dt \\ & + \int_0^T |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2 dt \leq \delta \int_0^T E(t) dt + C_\delta \left\{ \int_0^T \int_0^{L_0} [|U_x^1|^2 + |V_x^1|^2 + |W_x^1|^2] dx dt \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_{L_0}^L [|U_x^2|^2 + |V_x^2|^2 + |W_x^2|^2] dx dt \right\} \end{aligned}$$

Para toda solução forte $(U^1, V^1, W^1, U^2, V^2, W^2)$ do sistema (3.7) - (3.26) e, T suficientemente grande.

Prova. Provemos por contradição. Suponha que exista uma sequência de valores iniciais $(U_{0,\nu}^1, V_{0,\nu}^1, W_{0,\nu}^1, U_{0,\nu}^2, V_{0,\nu}^2, W_{0,\nu}^2) \in \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V}$ e $(U_{1,\nu}^1, V_{1,\nu}^1, W_{1,\nu}^1, U_{1,\nu}^2, V_{1,\nu}^2, W_{1,\nu}^2) \in \mathcal{V}$ e, uma constante positiva

$\delta_0 > 0$ tal que a solução correspondente $(U^1, V^1, W^1, U^2, V^2, W^2)$ do sistema (3.7) - (3.26) satisfaça:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T |U^{2,\nu}(L_0)|^2 dt + \int_0^T |V^{2,\nu}(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W^{2,\nu}(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_t^{1,\nu}(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^{1,\nu}(L_0)|^2 \\
& + \int_0^T |U_t^{2,\nu}(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^{2,\nu}(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^{1,\nu}(L_0) + V^{1,\nu}(L_0) + lW^{2,\nu}(L_0)|^2 dt \\
& + \int_0^T |W_x^{1,\nu}(L_0) - lU^{1,\nu}(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^{2,\nu}(L_0) + V^{2,\nu}(L_0) + lW^{2,\nu}(L_0)|^2 dt \\
& + \int_0^T |W_x^{2,\nu}(L_0) - lU^{2,\nu}(L_0)|^2 dt = 1
\end{aligned} \tag{3.68}$$

e verifica a desigualdade

$$1 > \delta_0 \int_0^T E^\nu(t) + \nu \left\{ \int_0^T \int_0^{L_0} [|U_x^{1,\nu}|^2 + |V_x^{1,\nu}|^2 + |W_x^{1,\nu}|^2] dx dt + \int_0^T \int_{L_0}^L [|U_x^{2,\nu}|^2 + |V_x^{2,\nu}|^2 + |W_x^{2,\nu}|^2] dx dt \right\}$$

para cada ν , onde $E^\nu(t) = E(t, U^{1,\nu}, V^{1,\nu}, W^{1,\nu}, U^{2,\nu}, V^{2,\nu}, W^{2,\nu})$. Assim, da desigualdade anterior temos que

$$\int_0^T E^\nu(t) \text{ é limitada para cada } \nu, \tag{3.69}$$

e também

$$\int_0^T \int_0^{L_0} [|U_x^{1,\nu}|^2 + |V_x^{1,\nu}|^2 + |W_x^{1,\nu}|^2] dx dt \rightarrow 0 \text{ quando } \nu \rightarrow \infty \tag{3.70}$$

$$\int_0^T \int_{L_0}^L [|U_x^{2,\nu}|^2 + |V_x^{2,\nu}|^2 + |W_x^{2,\nu}|^2] dx dt \rightarrow 0 \text{ quando } \nu \rightarrow \infty. \tag{3.71}$$

Logo,

$$(U^{1,\nu}, V^{1,\nu}, W^{1,\nu}) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V}),$$

$$(U^{2,\nu}, V^{2,\nu}, W^{2,\nu}) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V}),$$

$(U_t^{1,\nu}, V_t^{1,\nu}, W_t^{1,\nu})$ é limitada em $L^\infty(0, T; \mathcal{V})$,

$(U_t^{2,\nu}, V_t^{2,\nu}, W_t^{2,\nu})$ é limitada em $L^\infty(0, T; \mathcal{V})$.

Portanto existe uma subsequência de $(U^{1,\nu}, V^{1,\nu}, W^{1,\nu})$ e $(U^{2,\nu}, V^{2,\nu}, W^{2,\nu})$, que será denotada da mesma forma, tal que

$$(U^{1,\nu}, V^{1,\nu}, W^{1,\nu}) \xrightarrow{*} (U^1, V^1, W^1) \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V});$$

$$(U^{2,\nu}, V^{2,\nu}, W^{2,\nu}) \xrightarrow{*} (U^2, V^2, W^2) \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}^2 \cap \mathcal{V});$$

$$(U_t^{1,\nu}, V_t^{1,\nu}, W_t^{1,\nu}) \rightharpoonup (U_t^1, V_t^1, W_t^1) \text{ em } L^2(0, T; \mathcal{V});$$

$$(U_t^{2,\nu}, V_t^{2,\nu}, W_t^{2,\nu}) \rightharpoonup (U_t^2, V_t^2, W_t^2) \text{ em } L^2(0, T; \mathcal{V}).$$

Então aplicando o lema de Kim, temos que

$$(U^{1,\nu}, V^{1,\nu}, W^{1,\nu}) \rightarrow (U^1, V^1, W^1) \text{ em } C(0, T; \mathcal{H}^r(0, L_0));$$

$$(U^{2,\nu}, V^{2,\nu}, W^{2,\nu}) \rightarrow (U^2, V^2, W^2) \text{ em } C(0, T; \mathcal{H}^r(L_0, L)).$$

Onde $r < 1$. Assim, usando (3.68), temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T |U^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |V^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_t^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^1(L_0)|^2 dt \\ & + \int_0^T |U_t^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2 dt \\ & + \int_0^T |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2 dt \\ & + \int_0^T |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2 dt = 1. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Segue das convergências (3.70) e (3.71) que,

$$\begin{aligned} U_x^1 &= 0 \text{ em quase todo } (0, L_0) \times (0, T); \\ V_x^1 &= 0 \text{ em quase todo } (0, L_0) \times (0, T); \\ W_x^1 &= 0 \text{ em quase todo } (0, L_0) \times (0, T); \\ U_x^2 &= 0 \text{ em quase todo } (0, L_0) \times (0, T); \\ V_x^2 &= 0 \text{ em quase todo } (0, L_0) \times (0, T); \\ W_x^2 &= 0 \text{ em quase todo } (0, L_0) \times (0, T). \end{aligned}$$

Agora, usando as condições de contorno temos que

$$\int_0^{L_0} \frac{d}{dx} (U^1)^2(x) dx = |U^1(L_0)|^2,$$

por outro lado,

$$\int_0^{L_0} \frac{d}{dx} (U^1)^2(x) dx = \int_0^{L_0} 2U^1(x)U_x^1(x) \leq \int_0^{L_0} 2|U^1(x)||U_x^1(x)|dx,$$

de onde concluímos, aplicando a desigualdade de Poincaré

$$\int_0^{L_0} \frac{d}{dx} (U^1)^2(x) dx \leq 2C_p \int_0^{L_0} |U_x^1(x)|^2 dx.$$

Portanto,

$$\int_0^T |U^1(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |U_x^1(x)|^2 dx dt = 0.$$

De modo análogo, segue que

$$\int_0^T |U_x^1(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |U_{xx}^1(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |V^1(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |V_x^1(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |W^1(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |W_x^1(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |W_x^1(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |W_{xx}^1(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |U^2(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |U_x^2(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |U_x^2(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |U_{xx}^2(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |V^2(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |V_x^2(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |W^2(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |W_x^2(x)|^2 dx dt = 0,$$

$$\int_0^T |W_x^2(L_0)|^2 dt \leq 2C_p \int_0^T \int_0^{L_0} |W_{xx}^2(x)|^2 dx dt = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T |U^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |V^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W^2(L_0)|^2 + \int_0^T |U_t^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^1(L_0)|^2 \\
& + \int_0^T |U_t^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^2(L_0)|^2 + \int_0^T |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2 dt \\
& + \int_0^T |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2 dt \\
& + \int_0^T |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2 dt \leq 0.
\end{aligned}$$

O que contradiz (3.72). Portanto, para qualquer $\delta > 0$, existe $C_\delta > 0$ tal que,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T |U^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |V^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W^2(L_0)|^2 + \int_0^T |U_t^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^1(L_0)|^2 \\
& + \int_0^T |U_t^2(L_0)|^2 dt + \int_0^T |W_t^2(L_0)|^2 + \int_0^T |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2 dt \\
& + \int_0^T |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2 dt + \int_0^T |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2 dt \\
& + \int_0^T |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2 dt \leq \delta \int_0^T E(t) + C_\delta \left\{ \int_0^T \int_0^{L_0} [|U_x^1|^2 + |V_x^1|^2 + |W_x^1|^2] dx dt \right. \\
& \left. + \int_0^T \int_{L_0}^L [|U_x^2|^2 + |V_x^2|^2 + |W_x^2|^2] dx dt \right\}.
\end{aligned}$$

■

No próximo teorema, definimos $\varepsilon(t) := E(t, \varphi^1, \psi^1, \omega^1, \phi^2, \psi^2, \omega^2)$, onde $E(t, \varphi^1, \psi^1, \omega^1, \phi^2, \psi^2, \omega^2)$ é dado por (??).

Teorema 3.8. *Seja $(\varphi^1, \psi^1, \omega^1, \phi^2, \psi^2, \omega^2)$ uma solução forte para o problema de transmissão (2.1)-(2.14). Então existe uma constante positiva C_0*

$$\varepsilon(t) \leq C_0 E(0) e^{-2\gamma t} \quad (3.73)$$

Prova. Considere o seguinte funcional

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + (N_0P(t) + L(t)) + N_2H_2(t) + M(t).$$

Pelos lemas (3.5) e (3.6), temos que existe uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |W_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1 |U_t^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^2 L_0 |U_x^1(L_0) + V^1(L_0) + lW^1(L_0)|^2}{2} \\ &\quad + \frac{L_0 \kappa_0^1 |W_x^1(L_0) - lU^1(L_0)|^2}{2} + \frac{\bar{N}_2(L_0)^3 l^2 \gamma \kappa_0^1 |U^2(L_0)|^2}{2} + \frac{N_2(\kappa_2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |V^2(L_0)|^2}{2} \\ &\quad + \frac{N_2(\kappa_2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0 |W^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2 (L - L_0) |U_t^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\rho_1^2 (L - L_0) \kappa_0^2 |W_t^2(L_0)|^2}{2} \\ &\quad + \frac{\kappa_2 (L - L_0) |U_x^2(L_0) + V^2(L_0) + lW^2(L_0)|^2}{2} + \frac{\kappa_0^2 (L - L_0) |W_x^2(L_0) - lU^2(L_0)|^2}{2} \\ &\quad - \hat{C} \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2 + |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 + |W_x^1 - lU^1|^2] dx - \frac{\hat{N}_3}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx \\ &\quad - \hat{C} \int_{L_0}^L [|U_t^2|^2 + |V_t^2|^2 + |W_t^2|^2 + |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 + |W_x^2 - lU^2|^2] dx - \hat{N}_3 \int_{L_0}^L |V_x^2|^2 dx \\ &\quad - \hat{N}_3 \int_0^{L_0} [|U_x^1|^2 + |V_x^1|^2 + |W_x^1|^2] dx - \hat{N}_3 \int_L^{L_0} [|U_x^2|^2 + |V_x^2|^2 + |W_x^2|^2] dx + C\gamma E(t). \end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade de 0 até T e, aplicando o lema de compacidade, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\hat{C} \int_0^{TL_0} \int_0^1 [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2 + |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 + |W_x^1 - lU^1|^2] dx dt \\ &\quad - \frac{\hat{N}_3}{2} \int_0^{TL_0} \int_0^1 |V_x^1|^2 dx dt - \hat{C} \int_0^T \int_{L_0}^L [|U_t^2|^2 + |V_t^2|^2 + |W_t^2|^2 + |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 + |W_x^2 - lU^2|^2] dx dt \\ &\quad - \hat{N}_3 \int_0^T \int_{L_0}^L |V_x^2|^2 dx dt - \hat{N}_3 \int_0^T \int_0^{L_0} [|U_x^1|^2 + |V_x^1|^2 + |W_x^1|^2] dx dt - \hat{N}_3 \int_0^T \int_0^{L_0} [|U_x^2|^2 + |V_x^2|^2 + |W_x^2|^2] dx dt \\ &\quad + C\gamma \int_0^T E(t) dt + C_\delta \left\{ \int_0^T \int_0^{L_0} [|U_x^1|^2 + |V_x^1|^2 + |W_x^1|^2] dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{L_0}^L [|U_x^2|^2 + |V_x^2|^2 + |W_x^2|^2] dx dt \right\}. \end{aligned}$$

Onde $\hat{C}_6 = \max\{\rho_1^1 L_0 \kappa_0^1, \kappa_0^1 L_0, \kappa_1^2 L_0, \bar{N}_2 l^2 L_0 \gamma, N_2(\kappa_2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0, (\bar{N}_2(\kappa_2 l^2 + \kappa_0^2 l) \gamma L_0, \rho_1^2(L - L_0), \kappa_0^2 \rho_1^2(L - L_0), \kappa_2(L - L_0, \kappa_0^2(L - L_0))\}$ e $N \gg \gamma$ tal que $N \cdot \gamma > 1$.

Tomando γ e δ suficientemente pequeno. Concluimos que existe uma constante positiva N_0 tal que

$$\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(0) \leq -N_0 \int_0^T E(t) dt,$$

ou ainda

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0). \quad (3.74)$$

Agora, observe que existem constantes positivas N_1 e N_2 tais que

$$N_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq N_2 E(t). \quad (3.75)$$

De fato, utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 x \kappa_1 (U_x^1 + V^1 + l W^1) dx + \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 x \kappa_0^1 (W_x^1 - l U^1) dx \\ &\leq \frac{\rho_1^1 \kappa_1 L_0}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 \kappa_1 L_0}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + l W^1|^2 dx \\ &\quad + \frac{\rho_1^1 \kappa_1 L_0}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 \kappa_0^1 L_0}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1 - l U^1|^2 dx \\ &\leq C_1 E(t). \end{aligned}$$

Sabendo que

$$P(t) = H_1(t) + H_2(t),$$

então

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \int_0^{L_0} \rho_1^1 U_t^1 x \gamma U_x^1 dx + \int_0^{L_0} \rho_2^1 V_t^1 x \gamma V_x^1 dx + \int_0^{L_0} \rho_1^1 W_t^1 x \gamma W_x^1 dx \\
 &\leq \frac{\rho_1^1 \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \\
 &\quad + \frac{\rho_2^1 \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + \frac{\rho_2^1 \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx + \\
 &\quad + \frac{\rho_1^1 \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 \gamma L_0}{2} \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx,
 \end{aligned}$$

pelo fato de

$$\int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx \leq 2 \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx + 4 \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + 4l \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx \quad (3.76)$$

e

$$\int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx \leq 2 \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + 2l^2 \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx \quad (3.77)$$

temos,

$$\begin{aligned}
 H_1(t) &\leq C_1 \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx + C_1 \int_0^{L_0} [|U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 + |W_x^1 - lU^1|^2] dx \\
 &\quad + 4C_1 \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx + 4l^2 C_1 \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + 2l^2 C_1 \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx,
 \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{\frac{\rho_1^1 \gamma L_0}{2}, \frac{\rho_2^1 \gamma L_0}{2}\}$ e, usando o fato das normas serem equivalentes, segue que

$$\begin{aligned}
 H_1(t) &\leq C_1 \int_0^{L_0} [|U_t^1|^2 + |V_t^1|^2 + |W_t^1|^2] dx + \\
 &\quad + C_3 \int_0^{L_0} [|U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 + |V_x^1|^2 + |W_x^1 - lU^1|^2] dx,
 \end{aligned}$$

$$C_3 = \max\{c_2\kappa, C_2b_1, C_2\kappa_0^1\}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$H_1(t) \leq C_4 E(t).$$

Onde C_4 é uma constante positiva.

De modo análogo para H_2 , temos

$$H_2 = \int_{L_0}^L \rho_1^2 U_t^2 x \gamma U_x^2 dx + \int_{L_0}^L \rho_2^2 V_t^2 x \gamma V_x^2 dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 W_t^2 x \gamma W_x^2 dx \quad (3.78)$$

de onde segue,

$$\begin{aligned} H_2(t) \leq & C_5 \int_{L_0}^L [|U_t^2| + |V_t^2| + |W_t^2|] dx + \\ & + C_7 \int_{L_0}^L [|U_x^2 + V^2 + lW^2| + |V_x^2| + |W_x^2 - lU^2|] dx, \end{aligned}$$

$$C_7 = \max\{c_6\kappa_2, C_6b_1, C_6\kappa_0^2\}.$$

Donde concluimos,

$$H_2(t) \leq C_8 E(t).$$

Sendo C_8 uma constante positiva.

Portanto,

$$P(t) \leq C_9 E(t). \quad (3.79)$$

Onde C_9 é uma constante positiva.

$$\begin{aligned}
 M(t) &= \int_{L_0}^L \rho_1^2 U_t^2 (x-L) \kappa_2 (U_x^2 + V^2 + lW^2) dx + \int_{L_0}^L \rho_1^2 W_t^2 (x-L) \kappa_0^2 (W_x^2 - lU^2) dx \\
 &\leq \frac{\rho_1^2 \kappa_2 L}{2} \int_{L_0}^L |U_t^2|^2 dx + \frac{\rho_1^2 \kappa_2 L}{2} \int_{L_0}^L |U_x^2 + V^2 + lW^2|^2 dx \\
 &\quad + \frac{\rho_1^2 \kappa_1 L}{2} \int_{L_0}^L |W_t^2|^2 dx + \frac{\rho_1^2 \kappa_0^2 L}{2} \int_{L_0}^L |W_x^2 - lU^2|^2 dx \\
 &\leq C_{10} E(t),
 \end{aligned}$$

onde C_{10} é uma constante positiva.

Note que,

$$NE(t) + N_2 P(t) + L(t) \leq C_{10} E(t)$$

onde $\epsilon = \max\{N, C_1, C_9\}$.

Além disso,

$$G(t) = N_2 H_2(t) + M(t) \leq C_{11} E(t),$$

onde $C_{11} = \max\{N_2 C_8, C_{10}\}$.

Assim, segue que existe uma constante N_2 tal que

$$\mathcal{L}(t) \leq N_2 E(t). \quad (3.80)$$

Por outro lado temos também que

$$\mathcal{L}(t) \geq NE(t) - C_{10} E(t) - C_{11} E(t), \quad (3.81)$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}(t) \geq N_1 E(t), \quad (3.82)$$

onde N_1 é uma constante positiva.

Logo, existem constantes positivas N_1 e N_2 tais que

$$N_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq N_2 E(t). \quad (3.83)$$

Logo, das desigualdades (3.74) e (3.75), segue que

$$N_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) \leq N_2 E(t),$$

o que implica

$$E(t) \leq N_3 E(0). \quad (3.84)$$

Onde $N_3 = \frac{N_2}{N_1}$. Assim para completarmos a prova basta mostrarmos que

$$\varepsilon(t) e^{2\gamma t} \leq N_4 E(t),$$

onde $N_4 > 0$ é constante, para obtermos o decaimento exponencial.

De fato, note que

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx &= \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 e^{\gamma t} + \psi^1 e^{\gamma t} + l\omega^1 e^{\gamma t}|^2 dx \\ &= \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1|^2 e^{2\gamma t} dx. \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx &= \int_0^{L_0} |\omega_x^1 e^{\gamma t} - l\varphi^1 e^{\gamma t}|^2 dx \\ &= \int_0^{L_0} |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2 e^{2\gamma t} dx \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx &= \int_0^{L_0} |\psi_x^1 e^{\gamma t}|^2 dx \\ &= \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 e^{2\gamma t} dx \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 e^{2\gamma t} &= \int_0^{L_0} |U_t^1 - \gamma U^1|^2 \leq \int_0^{L_0} (|U_t^1| + \gamma |U^1|)^2 \\
&\leq 2 \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + 2\gamma \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx \\
&\leq 2 \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + 2\gamma C_p \int_0^{L_0} |U_x^1|^2 dx,
\end{aligned}$$

mas pela desigualdade (3.76), concluímos

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 e^{2\gamma t} &\leq 2 \int_0^{L_0} |U_t^1|^2 dx + 4\gamma C_p \int_0^{L_0} |U_x^1 + V^1 + lW^1|^2 dx \\
&\quad + 8\gamma C_p \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx + 8l^2 C_p \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |\omega_t^1|^2 e^{2\gamma t} &= \int_0^{L_0} |W_t^1 - \gamma W^1|^2 \leq \int_0^{L_0} (|W_t^1| + \gamma |W^1|)^2 \\
&\leq 2 \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + 2\gamma \int_0^{L_0} |W^1|^2 dx \\
&\leq 2 \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + 2\gamma C_p \int_0^{L_0} |W_x^1|^2 dx,
\end{aligned} \tag{3.89}$$

de onde obtemos pela desigualdade (3.77),

$$\int_0^{L_0} |\omega_t^1|^2 e^{2\gamma t} \leq 2 \int_0^{L_0} |W_t^1|^2 dx + 4\gamma C_p \int_0^{L_0} |W_x^1 - lU^1|^2 dx + 4\gamma C_p l^2 \int_0^{L_0} |U^1|^2 dx.$$

Podemos concluir usando, novamente, a equivalência que entre as normas que

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 e^{2\gamma t} + \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 e^{2\gamma t} &\leq 2 \int_0^{L_0} (|U_t^1| + |W_t^1|)^2 dx + \check{C}_1 \int_0^{L_0} (|U_x^1 + V^1 + lW^1|^2) dx \\
&\quad + \check{C}_1 \int_0^{L_0} (|\psi_x^1|^2 + |W_x^1 - lU^1|^2) dx.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Onde $\check{C}_1 = \max\{4\gamma l^2 C_p, \check{C}_{\kappa_1}, \check{C}_{b_1}, \check{C}_{\kappa_0^1}\}$.

E finalmente,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 e^{2\gamma t} &= \int_0^{L_0} |V_t^1 - \gamma V^1|^2 \leq \int_0^{L_0} (|V_t^1| + \gamma |V^1|)^2 \\
 &\leq 2 \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + 2\gamma \int_0^{L_0} |V^1|^2 dx \\
 &\leq 2 \int_0^{L_0} |V_t^1|^2 dx + 2\gamma C_p \int_0^{L_0} |V_x^1|^2 dx,
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

assim, podemos concluir das desigualdades (3.85)-(3.91) que existe uma constante positiva, $\check{C}_2$ tal que

$$E_1(t, \varphi^1, \psi^1, \omega^1) e^{2\gamma t} \leq \check{C}_2 E_1(t, U^1, V^1, W^1). \tag{3.92}$$

De modo análogo, existe uma constante positiva $\check{C}_3$ tal que

$$E_2(t, \varphi^2, \psi^2, \omega^2) e^{2\gamma t} \leq \check{C}_3 E_2(t, U^2, V^2, W^2). \tag{3.93}$$

Portando de (3.92) e (3.93), segue que existe uma constante $N_4 > 0$ tal que

$$\varepsilon(t) e^{2\gamma t} \leq N_4 E(t). \tag{3.94}$$

Logo, pela última desigualdade e de (3.84) concluímos que

$$\varepsilon(t) e^{2\gamma t} \leq C_0 E(0), \tag{3.95}$$

onde $C_0 = N_4 \cdot N_3$. Portanto

$$\varepsilon(t) \leq C_0 E(0) e^{-2\gamma t}, \tag{3.96}$$

concluindo dessa forma nossa prova. ■

CAPÍTULO 4

Problema de transmissão para o sistema de Timoshenko

4.1 Introdução

Seguindo a idéia principal sobre deformação em estruturas elásticas, considerarmos o sistema de Timoshenko dado pelas equações de movimento

$$\rho A \varphi_{tt}(x, t) = S_x(x, t), \quad (4.1)$$

$$\rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - S(x, t), \quad (4.2)$$

onde

$$S = \kappa(\varphi_x + \psi), \quad (4.3)$$

$$M = b\psi_x \quad (4.4)$$

são as relações de tensão-deformação para o comportamento elástico. Aqui, t é o tempo, x é a distância ao longo da linha central da viga, φ o deslocamento transversal, ψ a rotação nas secções transversais devido a curvatura, ρ a densidade de massa do material do qual a viga é composta, M o momento de curvatura, S a força de cisalhamento transversal, A a área da secção transversal e I o momento de

inércia da área da secção transversal. Além disso, usamos $\kappa = k'GA$, $b = EI$ onde E é o módulo de elasticidade, G é o módulo de cisalhamento e k' é o fator cisalhamento. Portanto, a partir das equações acopladas (4.1)–(4.4) obtemos o seguinte sistema de Timoshenko

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (4.5)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (4.6)$$

Onde $\rho_1 = \rho A$ e $\rho_2 = \rho I$.

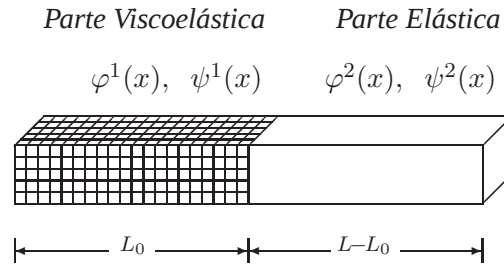
Nos últimos anos, desde o trabalho pioneiro de Soufyane [13], vários estudos foram feitos no contexto de estabilização dos sistemas Timoshenko, considerando o mínimo possível de mecanismo de dissipação. Citemos alguns resultados nesse sentido. Soufyane [13] foi o primeiro a provar o decaimento exponencial para o sistema de Timoshenko com um amortecimento do tipo atrito, distribuído localmente, se, e somente se suas velocidades são iguais.

Denotemos por χ a diferença entre as velocidades,

$$\chi = \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}. \quad (4.7)$$

Um grande número de resultados interessantes sobre decaimento exponencial para o sistema de Timoshenko com dissipação somente em uma equação foram estabelecidas, desde que $\chi = 0$. Ammar Khodja et al. [31] considera o efeito memória. Rivera e Fernández [32] estudaram os sistema de Timoshenko com uma parte historia sujeita as condições adequadas nas funções relaxamento. Veja também as referências [11, 19, 31, 33, 34]

O que existe de novo aqui? O novo aqui é estudar o problema de transmissão para o modelo de viga do tipo Timoshenko, isto é, uma viga composta por dois componentes, elástico e viscoelástico. Nas vibrações transversais da barra, φ^1 e φ^2 , a dissipação é ocasionada pelo amortecimento friccional. No ângulo de rotação do filamento da barra ψ^1 e ψ^2 não temos dissipação e o sistema é puramente elástico. Uma vez que a barra é composta por dois materiais diferentes, a densidade não necessariamente é uma função contínua e desde que tensão-deformação mude da parte elástico para viscoelástico, o modelo correspondente não é um modelo contínuo. Isso produz uma série de dificuldades na regularidade do resultado. Isto é, não podemos esperar regularidade em todo domínio. Mostramos para esse tipo de viga que o sistema é exponencialmente estável (veja afigura abaixo)



Nossa abordagem para este problema é importante não só do ponto de vista matemático, mas principalmente do ponto de vista físico, com aplicações em Mecânica, entre outros ramos da ciência.

O trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2, descreve brevemente as notações e uma visão geral na literatura. Seção 3. nós provamos a existência, regularidade e unicidade de soluções para o sistema (4.1)–(4.11). Usamos a técnica semigrupo (see [1]). Na seção 4, mostramos que o sistema (4.1)–(4.11) é exponencial estável. Para fazer isso, usamos o método de energia.

4.2 O problema de Transmissão

Nesta seção, vamos descrever com precisão o problema de transmissão tratados neste trabalho e estabelecer a existência e regularidade da solução. Para começar, vamos introduzir algumas notações

$$\rho_j(x) = \begin{cases} \rho_j^1, & \text{para } 0 \leq x \leq L_0, j = 1, 2, \\ \rho_j^2, & \text{para } L_0 \leq x \leq L, j = 1, 2. \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & \text{para } 0 \leq x \leq L_0, \\ k_2, & \text{para } L_0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} b_1, & \text{para } 0 \leq x \leq L_0, \\ b_2, & \text{para } L_0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1, & \text{para } 0 \leq x \leq L_0, \\ \gamma_2, & \text{para } L_0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} \varphi^1(x, t), & \text{para } (x, t) \in]0, L_0[\times]0, \infty[, \\ \varphi^2(x, t), & \text{para } (x, t) \in]L_0, L[\times]0, \infty[. \end{cases}$$

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \psi^1(x, t), & \text{para } (x, t) \in]0, L_0[\times]0, \infty[, \\ \psi^2(x, t), & \text{para } (x, t) \in]L_0, L[\times]0, \infty[. \end{cases}$$

Com esta notação, vamos considerar o problema de transmissão para o sistema de Timoshenko com amortecimento do tipo atrito que atua nas vibrações transversais

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \gamma_1 \varphi_t^1 = 0, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (4.1)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2)_x + \gamma_2 \varphi_t^2 = 0, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (4.2)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1) = 0, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (4.3)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + \kappa_2 (\varphi_x^2 + \psi^2) = 0, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (4.4)$$

com condições de contorno

$$\varphi^1(0, t) = \varphi^2(L, t) = \psi_x^1(0, t) = \psi_x^2(L, t) = 0, \quad (4.5)$$

para todo $t > 0$. As condições de transmissão são dadas por

$$\varphi^1(L_0, t) = \varphi^2(L_0, t), \quad (4.6)$$

$$\psi^1(L_0, t) = \psi^2(L_0, t), \quad (4.7)$$

$$\kappa_1 (\varphi_x^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) = \kappa_2 (\varphi_x^2(L_0, t) + \psi^2(L_0, t)), \quad (4.8)$$

$$b_1 \psi_x^1(L_0, t) = b_2 \psi_x^2(L_0, t), \quad (4.9)$$

Para todo $t > 0$ as condições iniciais são

$$(\varphi^1(x, 0), \psi^1(x, 0)) = (\varphi_0^1(x), \psi_0^1(x)), \quad (\varphi_t^1(x, 0), \psi_t^1(x, 0)) = (\varphi_1^1(x), \psi_1^1(x)), \quad \text{em } (0, L_0), \quad (4.10)$$

$$(\varphi^2(x, 0), \psi^2(x, 0)) = (\varphi_0^2(x), \psi_0^2(x)), \quad (\varphi_t^2(x, 0), \psi_t^2(x, 0)) = (\varphi_1^2(x), \psi_1^2(x)), \quad \text{em } (L_0, L). \quad (4.11)$$

O problema de transmissão têm sido objeto de intensos estudos de diferentes pontos de vista matemático. O problema de transmissão de equações hiperbólicas foi estudada por Dautray e Lions [35] que provou a existência e regularidade das soluções para o problema linear. Enquanto em Lions [36] provou a controlabilidade exata. Mais tarde, Lagnese [37] estende este resultado: ele mostrou a controlabilidade exata para

uma classe de sistemas hiperbólicos que incluem o problema de transmissão para materiais anisotrópico homogêneo. em [?] Hugo D. Fernandez Sare e Jaime E. Muñoz Rivera estudaram um problema de transmissão de placas termoelásticos. Eles provaram que o semigrupo correspondente associado a este problema é do tipo analítico. Em [?]. M. Alves et. al. Considerou o problema de transmissão com amortecimento localizado viscoelástico do tipo Kelvin-Voigt. Eles mostraram que o semigrupo correspondente $(\mathcal{SA}(t))_{t \geq 0}$, não é exponencialmente estável, porém a solução decai polinomialmente para zero com taxa de $\frac{1}{t^2}$ e com os dados iniciais no domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Além disso, eles mostraram que a taxa de decaimento é ótima.

Em relação ao objetivo do presente trabalho, Raposo et. al. [26] estudou o seguinte problema de transmissão para o sistema de Timoshenko

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \alpha \varphi_t^1 = 0, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (4.12)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (4.13)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1) + \beta \psi_t^1 = 0, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (4.14)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = 0, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (4.15)$$

com condições de contorno

$$\varphi^1(0, t) = \varphi^2(L, t) = \psi^1(0, t) = \psi^2(L, t) = 0 \quad (4.16)$$

e as condições de transmissão como em (4.6)-(4.9). Mostraram que o sistema é exponencialmente estável sem impor qualquer restrição sobre os coeficientes de velocidade de onda do modelo. Em [11], M. S. Alves et. al. foi estudado o problema de transmissão do sistema de Timoshenko com memória dada pelo

$$\rho_1^1 \varphi_{tt}^1 - \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = 0, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (4.17)$$

$$\rho_1^2 \varphi_{tt}^2 - \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (4.18)$$

$$\rho_2^1 \psi_{tt}^1 - b_1 \psi_{xx}^1 + \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1) + g_1 * \psi_{xx}^1 = 0, \quad \text{em } (0, L_0) \times (0, \infty) \quad (4.19)$$

$$\rho_2^2 \psi_{tt}^2 - b_2 \psi_{xx}^2 + \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2) + g_2 * \psi_{xx}^2 = 0, \quad \text{em } (L_0, L) \times (0, \infty) \quad (4.20)$$

Com condições de contorno

$$\varphi^1(0, t) = \varphi^2(L, t) = \psi^1(0, t) = \psi^2(L, t) = 0 \quad (4.21)$$

e condições de transmissão

$$\varphi^1(L_0, t) = \varphi^2(L_0, t), \quad (4.22)$$

$$\psi^1(L_0, t) = \psi^2(L_0, t), \quad (4.23)$$

$$\kappa_1(\varphi_x^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) = \kappa_2(\varphi_x^2(L_0, t) + \psi^2(L_0, t)), \quad (4.24)$$

$$b_1\psi_x^1(L_0, t) - g_1 * \psi_x^1(L_0, t) = b_2\psi_x^2(L_0, t) - g_2 * \psi_x^2(L_0, t), \quad (4.25)$$

Eles provaram a estabilização uniforme, no sentido que a taxa de decaimento do sistema tem relação direta com a velocidade das funções de relaxamento, dado por

$$\frac{\rho_1^1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2^1}{b_1}, \quad \frac{\rho_1^2}{\kappa_2} = \frac{\rho_2^2}{b_2} \quad \text{e} \quad \rho_2^1\kappa_1 = \rho_2^2\kappa_2.$$

O sistema aqui estudado é um modelo para vigas submetidas a vibração de amortecimento de fricção agindo apenas sobre as vibrações transversais da viga, φ^1 e φ^2 . Mais precisamente, provamos que a presença do amortecimento friccional em uma parte do domínio é o suficiente para estabilizar a energia em todo domínio da viga. Além disso, estabiliza rapidamente(em ritmo exponencial). Em nossos estudos, percebemos que este problema não tem sido estudado com frequência na literatura.

4.3 Notações e formulação de semigrupo

Aqui vamos estabelecer as notações e principal ferramenta que serão utilizados nas próximas seções. Primeiro, vamos definir os espaços de Hilbert.

$$\mathbb{H}^m(0, L) = H^m(0, L_0) \times H^m(L_0, L), \quad (m \geq 1), \quad (4.1)$$

$$\mathbb{H}_0^m(0, L) = \{(w^1, w^2) \in \mathbb{H}^m(0, L) : w^1(0) = w^2(L) = 0, w^1(L_0) = w^2(L_0)\}, \quad (4.2)$$

$$\mathbb{L}^2(0, L) = L^2(0, L_0) \times L^2(L_0, L), \quad (4.3)$$

$$\mathbb{L}_*^2(0, L) = \{(\phi^1, \phi^2) \in \mathbb{L}^2(0, L) : \int_0^{L_0} \phi^1(x) dx = \int_{L_0}^L \phi^2(x) dx = 0\} \quad (4.4)$$

e

$$\mathbb{H}_*^1(0, L) = \{(\phi^1, \phi^2) \in \mathbb{H}^1(0, L) \cap \mathbb{L}_*^2(0, L) : \phi_x^1(0) = \phi_x^2(L) = 0, \phi^1(L_0) = \phi^2(L_0)\}. \quad (4.5)$$

usando estas notações, vamos definir um espaço adequado de Hilbert onde o semigrupo será definido, por:

$$\mathcal{H} = \mathbb{H}_0^1(0, L) \times \mathbb{L}^2(0, L) \times \mathbb{H}_*^1(0, L) \times \mathbb{L}_*^2(0, L) \quad (4.6)$$

com produto interno dado por:

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} &:= \rho_1^1 \int_0^{L_0} u^3 \overline{v^3} dx + \kappa_1 \int_0^{L_0} (u_x^1 + u^5) \overline{(v_x^1 + v^5)} dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} u^7 \overline{v^7} dx \\ &+ b_1 \int_0^{L_0} u_x^5 \overline{v_x^5} dx + \rho_1^2 \int_{L_0}^L u^4 \overline{v^4} dx + \kappa_2 \int_{L_0}^L (u_x^2 + u^6) \overline{(v_x^2 + v^6)} dx \\ &+ \rho_2^2 \int_{L_0}^L u^8 \overline{v^8} dx + b_2 \int_{L_0}^L u_x^6 \overline{v_x^6} dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $U = (u^1, u^2, \dots, u^8)'$, $V = (v^1, v^2, \dots, v^8)'$ $\in \mathcal{H}$, com a norma associada

$$U = (\varphi^1, \varphi^2, z^1, z^2, \psi^1, \psi^2, w^1, w^2)' \in \mathcal{H}$$

definido por

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}} &:= \rho_1^1 \int_0^{L_0} |z^1|^2 dx + \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} |w^1|^2 dx \\ &+ b_1 \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx + \rho_1^2 \int_{L_0}^L |z^2|^2 dx + \kappa_2 \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx \\ &+ \rho_2^2 \int_{L_0}^L |w^2|^2 dx + b_2 \int_{L_0}^L |\psi_x^2|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Também, para $U = (\varphi^1, \varphi^2, z^1, z^2, \psi^1, \psi^2, w^1, w^2)'$ definimos o operador linear

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \frac{\kappa_1}{\rho_1}(\varphi_x^1 + \psi^1)_x - \frac{\gamma_1}{\rho_1}z^1 \\ \frac{\kappa_2}{\rho_1}(\varphi_x^2 + \psi^2)_x - \frac{\gamma_2}{\rho_1}z^2 \\ w^1 \\ w^2 \\ \frac{b_1}{\rho_2}\psi_{xx}^1 - \frac{\kappa_1}{\rho_2}(\varphi_x^1 + \psi^1) \\ \frac{b_2}{\rho_2}\psi_{xx}^2 - \frac{\kappa_2}{\rho_2}(\varphi_x^2 + \psi^2) \end{pmatrix},$$

sobre o domínio $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ dado por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) := \{U = (\varphi^1, \varphi^2, z^1, z^2, \psi^1, \psi^2, w^1, w^2)' \in \mathcal{H} : & (\varphi^1, \varphi^2) \in \mathbb{H}^2(0, L) \cap \mathbb{H}_0^1(0, L), \\ & (\psi^1, \psi^2) \in \mathbb{H}^2(0, L) \cap \mathbb{H}_*^1(0, L), (z^1, z^2) \in \mathbb{H}_0^1(0, L), (w^1, w^2) \in \mathbb{H}_*^1(0, L), \\ & \kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi^1(L_0)) = \kappa_2(\varphi_x^2(L_0) + \psi^2(L_0)), b_1\psi_x^1(L_0) = b_2\psi_x^2(L_0)\} \end{aligned}$$

que está associado ao sistema (4.1)-(4.11) com as notações clássicas $z^1 := \varphi_t^1$, $z^2 := \varphi_t^2$, $w^1 := \psi_t^1$ e $w^2 := \psi_t^2$.

Portanto, o problema de valor inicial (4.1)-(4.11) é equivalente a

$$U_t = \mathcal{A}U, \quad U(0) = U_0 \quad (4.9)$$

onde $U_0 = (\varphi_0^1, \varphi_0^2, \varphi_1^1, \varphi_1^2, \psi_0^1, \psi_0^2, \psi_1^1, \psi_1^2)'$.

A existência de solução é estabelecida pelo seguinte teorema.

Teorema 4.1. *O operador $\mathcal{A}$ gera um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contração sobre $\mathcal{H}$. Assim, para qual quer dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (4.9) tem uma única solução fraca $U(t) \in C^0([0, \infty[; \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então $U(t)$ é solução forte de (4.9), e satisfaz $U(t) \in C^0([0, \infty[; D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty[; \mathcal{H})$.*

Prova. É fácil ver que $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$. Agora, para $U = (\varphi^1, \varphi^2, z^1, z^2, \psi^1, \psi^2, w^1, w^2)' \in D(\mathcal{A})$ e usando o produto interno (4.7), obtemos

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_0^{L_0} |z^1|^2 dx - \gamma_2 \int_{L_0}^L |z^2|^2 dx \leq 0. \quad (4.10)$$

Portanto, $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo.

Para mostrarmos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ (conjunto resolvente $\mathcal{A}$), tomemos $F \in \mathcal{H}$. Vamos mostrar que existe uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = F$, onde $F = (f^1, f^2, \dots, f^8)'$. sob esta condição espectral o sistema pode ser escrito como

$$z^1 = f^1, \quad (4.11)$$

$$z^2 = f^2, \quad (4.12)$$

$$\kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x - \gamma_1 z^1 = \rho_1^1 f^3, \quad (4.13)$$

$$\kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x - \gamma_2 z^2 = \rho_1^2 f^4, \quad (4.14)$$

$$w^1 = f^5, \quad (4.15)$$

$$w^2 = f^6, \quad (4.16)$$

$$b_1 \psi_{xx}^1 - \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1) = \rho_2^1 f^7, \quad (4.17)$$

$$b_2 \psi_{xx}^2 - \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = \rho_2^2 f^8, \quad (4.18)$$

Substituindo z^1 , z^2 , w^1 e w^2 dados por (4.11), (4.12), (4.15) e (4.16), respectivamente, em (4.13), (4.14), (4.17) e (4.18), respectivamente, temos

$$\kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = \gamma_1 f^1 + \rho_1^1 f^3, \quad (4.19)$$

$$\kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = \gamma_2 f^2 + \rho_1^2 f^4, \quad (4.20)$$

$$b_1 \psi_{xx}^1 - \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1) = \rho_2^1 f^7, \quad (4.21)$$

$$b_2 \psi_{xx}^2 - \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = \rho_2^2 f^8. \quad (4.22)$$

Além disso, pela definição de $D(\mathcal{A})$ devemos ter

$$\varphi^1(0) = \varphi^2(L) = 0,$$

$$\psi_x^1(0) = \psi_x^2(L) = 0,$$

$$\varphi^1(L_0) = \varphi^2(L_0),$$

$$\psi^1(L_0) = \psi^2(L_0),$$

$$\kappa_1(\varphi_x^1(L_0) + \psi_x^1(L_0)) = \kappa_2(\varphi_x^2(L_0) + \psi_x^2(L_0)),$$

$$b_1 \psi_x^1(L_0) = b_2 \psi_x^2(L_0).$$

Vamos considerar um mapeamento

$$\mathcal{X} : \mathbb{H}_0^1(0, L) \times \mathbb{H}_*^1(0, L) \times \mathbb{H}_0^1(0, L) \times \mathbb{H}_*^1(0, L) \rightarrow \mathbb{C}$$

e um funcional

$$\mathcal{M} : \mathbb{H}_0^1(0, L) \times \mathbb{H}_*^1(0, L) \rightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(((\varphi^1, \varphi^2), (\psi^1, \psi^2)), ((\phi^1, \phi^2), (\theta^1, \theta^2))) &= \kappa_1 \int_0^{L_0} (\varphi_x^1 + \psi^1) \overline{(\phi_x^1 + \theta^1)} dx \\ &+ b_1 \int_0^{L_0} \psi_x^1 \overline{\theta_x^1} dx + \kappa_2 \int_{L_0}^L (\varphi_x^2 + \psi^2) \overline{(\phi_x^2 + \theta^2)} dx + b_2 \int_{L_0}^L \psi_x^2 \overline{\theta_x^2} dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\phi^1, \phi^2), (\theta^1, \theta^2)) &= \int_0^{L_0} (\gamma_1 f^1 + \rho_1^1 f^3) \overline{\phi^1} dx + \int_{L_0}^L (\gamma_2 f^2 + \rho_1^2 f^4) \overline{\phi^2} dx \\ &+ \int_0^{L_0} (f^5 + \rho_2^1 f^7) \overline{\theta^1} dx + \int_{L_0}^L (f^6 + \rho_2^2 f^8) \overline{\theta^2} dx. \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que $\mathcal{X}(\cdot, \cdot)$ é coercivo, contínuo e sesquilinear. Em virtude do teorema de Lax-Milgram, existe uma única $((\varphi^1, \varphi^2), (\psi^1, \psi^2)) \in \mathbb{H}_0^1(0, L) \times \mathbb{H}_*^1(0, L)$ tal que

$$\mathcal{X}(((\varphi^1, \varphi^2), (\psi^1, \psi^2)), ((\phi^1, \phi^2), (\theta^1, \theta^2))) = \mathcal{M}((\phi^1, \phi^2), (\theta^1, \theta^2))$$

para todo $(\phi^1, \phi^2), (\theta^1, \theta^2) \in \mathbb{H}_0^1(0, L) \times \mathbb{H}_*^1(0, L)$.

Usando argumentos padrão, concluímos que $(\varphi^1, \varphi^2), (\psi^1, \psi^2) \in \mathbb{H}^2(0, L) \times \mathbb{H}^2(0, L)$. Portanto, $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. ■

4.4 Decaimento Exponencial

O ponto principal para mostrarmos o decaimento exponencial é a construção de um funcional de Lyapunov $\mathcal{L}$ satisfazendo

$$C_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_2 E(t), \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -C_3 E(t),$$

para todo $t \geq 0$ e para algumas constantes positivas C_1, C_2, C_3 , onde $E(t)$ é a energia do sistema (4.1)-(4.11), dada por

$$\begin{aligned}
 E(t) := & \frac{\rho_1^1}{2} \int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx + \frac{\kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx + \frac{\rho_2^1}{2} \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\
 & + \frac{b_1}{2} \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx + \frac{\rho_1^2}{2} \int_{L_0}^L |\varphi_t^2|^2 dx + \frac{\kappa_2}{2} \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx \\
 & + \frac{\rho_2^2}{2} \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx + \frac{b_2}{2} \int_{L_0}^L |\psi_x^2|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para começarmos, vamos mostrar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$.

Lema 4.2. *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contração sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então*

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

Prova. Sendo $\mathcal{A}$ Um operador fechado e $D(\mathcal{A})$ tem uma imersão compacta sobre o espaço de fase $\mathcal{H}$, o conjunto do espectro de $\mathcal{A}$ denotado como $\sigma(\mathcal{A})$ é constituído somente de valores próprios. Assim, para provar que os eixos imaginários estão contidos no conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ é suficientes provarmos que não existem valores próprios imaginários. Para ver isso, vamos raciocinar por contradição. Vamos supor que existe um valor próprio imaginário $i\lambda$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = 0$$

com $U = (\varphi^1, \varphi^2, z^1, z^2, \psi^1, \psi^2, w^1, w^2)'$. Em termos de componentes, temos

$$i\lambda\varphi^1 - z^1 = 0, \tag{4.2}$$

$$i\lambda\varphi^2 - z^2 = 0, \tag{4.3}$$

$$i\lambda\rho_2^1 z^1 - \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1)_x + \gamma_1 z^1 = 0, \tag{4.4}$$

$$i\lambda\rho_1^2 z^2 - \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2)_x + \gamma_2 z^2 = 0, \tag{4.5}$$

$$i\lambda\psi^1 - w^1 = 0, \tag{4.6}$$

$$i\lambda\psi^2 - w^2 = 0, \tag{4.7}$$

$$i\lambda\rho_2^1 w^1 - b_1\psi_{xx}^1 + \kappa_1(\varphi_x^1 + \psi^1) = 0, \tag{4.8}$$

$$i\lambda\rho_2^2 w^2 - b_2\psi_{xx}^2 + \kappa_2(\varphi_x^2 + \psi^2) = 0. \tag{4.9}$$

Uma vez que,

$$i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = 0,$$

em seguida, tendo a parte real e usando (4.10), obtemos

$$\gamma_1 \int_0^{L_0} |z^1|^2 dx + \gamma_2 \int_{L_0}^L |z^2|^2 dx = 0.$$

De onde segue que $z^1 = z^2 = 0$, o que implica $\varphi^1 = \varphi^2 = 0$. A partir de (4.4) e (4.5), podemos concluir que $\psi^1 = \psi^2 = 0$. Consequentemente, a partir de (4.6) e (4.7), obtemos $w^1 = w^2 = 0$. Portanto, $U = 0$. Mas, isso é uma contradição, e, portanto, não existem valores próprios imaginários. Assim, $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. ■

Observação 4.3. Em particular este resultado sugere que o semigrupo é fortemente estável, que é

$$S(t)U_0 \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

onde $S(t) := e^{\mathcal{A}t}$ é o C_0 -semigrupo de contração sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e U_0 são os dados iniciais.

Os seguintes lemas vão ser usados no teorema principal a partir de agora.

Lema 4.4. *A energia $E(t)$ associada as soluções forte do sistema (4.1)-(4.11) satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma_1 \int_0^{L_0} |\varphi^1|^2 dx - \gamma_2 \int_{L_0}^L |\varphi^2|^2 dx.$$

Prova. Multiplicando as equações (4.1)-(4.4) por φ_t^1 , φ_t^2 , ψ_t^1 e ψ_t^2 , respectivamente, integrando por partes e usando as condições de transmissões (4.6)-(4.9), segue nossa conclusão. ■

Vamos considerar o seguinte funcional

$$\mathcal{F}_1(t) := \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1(x, t) p^1(x, t) dx + \rho_1^2 \int_{L_0}^L \varphi_t^2(x, t) p^2(x, t) dx$$

onde

$$p^1(x, t) = \varphi^1(x, t) + \int_0^x \psi^1(s, t) ds \quad \text{e} \quad p^2(x, t) = \varphi^2(x, t) + \int_{L_0}^x \psi^2(s, t) ds.$$

Lema 4.5. *dado $\delta > 0$, existem constantes positivas $C_{1,\delta}$, $C_{2,\delta}$, tal que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &\leq -\frac{\kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx - \frac{\kappa_1}{2} \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx \\ &+ C_{1,\delta} \int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx + C_{2,\delta} \int_{L_0}^L |\varphi_t^2|^2 dx \\ &+ \frac{L_0 \delta}{2} \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx + \frac{(L - L_0) \delta}{2} \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a equação (4.1) por $p^1(x, t)$ e integrando por partes sobre $(0, L_0)$, obtemos

$$\rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_{tt}^1 p^1 dx - \kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1) p^1|_0^{L_0} + \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx + \gamma_1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p_t^1 dx = 0.$$

Uma vez que,

$$\kappa_1 (\varphi_x^1 + \psi^1) p^1|_0^{L_0} = \kappa_1 (\varphi^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \varphi^1(L_0, t)$$

e

$$\rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_{tt}^1 p^1 dx = \frac{d}{dt} \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p^1 dx - \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p_t^1 dx$$

a igualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p^1 dx &= \kappa_1 (\varphi^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \varphi^1(L_0, t) + \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p_t^1 dx \\ &- \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx - \gamma_1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p_t^1 dx. \end{aligned}$$

A partir das desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p^1 dx &\leq \kappa_1 (\varphi^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \varphi^1(L_0, t) + \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p_t^1 dx \\ &- \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx + \gamma_1 C_p \left(\int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_0} |p_x^1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde C_p é a constante de Poincaré. Usando a desigualdade de Young's, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p^1 dx &\leq \kappa_1 (\varphi^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \varphi^1(L_0, t) - \frac{\kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx \\ &+ \left(\rho_1^1 + \frac{\gamma_1^2 C_p^2}{2\kappa_1} \right) \int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx + \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 \left(\int_0^x \psi_t^1 ds \right) dx. \end{aligned}$$

Agora, observando que

$$\rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 \left(\int_0^x \psi_t^1 ds \right) dx \leq \frac{\rho_1^1}{2\delta} \int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 L_0 \delta}{2} \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx$$

onde δ é uma constante positiva, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_1^1 \int_0^{L_0} \varphi_t^1 p^1 dx &\leq \kappa_1 (\varphi^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \varphi^1(L_0, t) - \frac{\kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx \\ &+ C_{1,\delta} \int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 L_0 \delta}{2} \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde $C_{1,\delta} := \left(\rho_1^1 + \frac{\gamma_1^2 C_p^2}{2\kappa_1} + \frac{\rho_1^1}{2\delta} \right)$.

por outro lado, multiplicando a equação (4.2) por $p^2(x, t)$, integrando sobre (L_0, L) e utilizando argumentos similares como acima, obtemos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_1^2 \int_{L_0}^L \varphi_t^2 p^2 dx &\leq -\kappa_2 (\varphi^2(L_0, t) + \psi^2(L_0, t)) \varphi^2(L_0, t) - \frac{\kappa_2}{2} \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx \\ &+ C_{2,\delta} \int_{L_0}^L |\varphi_t^2|^2 dx + \frac{\rho_1^2 (L - L_0) \delta}{2} \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $C_{2,\delta} := \left(\rho_1^2 + \frac{\gamma_2^2 C_p^2}{2\kappa_2} + \frac{\rho_1^2}{2\delta} \right)$.

Somando as desigualdades (4.10) e (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{F}_1(t) &\leq \kappa_1(\varphi^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t))\varphi^1(L_0, t) - \frac{\kappa_1}{2} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx \\
&+ C_{1,\delta} \int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx + \frac{\rho_1^1 L_0 \delta}{2} \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\
&- \kappa_2(\varphi^2(L_0, t) + \psi^2(L_0, t))\varphi^2(L_0, t) - \frac{\kappa_2}{2} \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx \\
&+ C_{2,\delta} \int_{L_0}^L |\varphi_t^2|^2 dx + \frac{\rho_1^2 (L - L_0) \delta}{2} \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx.
\end{aligned}$$

Usando as condições de transmissão, segue a conclusão do lema. ■

Vamos considerar o funcional

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_2(t) &:= -\rho_2^1 \int_0^{L_0} (\psi_t^1(\varphi_x^1 + \psi^1) + \frac{b_1 \rho_2^1}{\kappa_1} \psi_x^1 \varphi_t^1) dx \\
&- \rho_2^2 \int_{L_0}^L (\psi_t^2(\varphi_x^2 + \psi^2) + \frac{b_2 \rho_2^2}{\kappa_2} \psi_x^2 \varphi_t^2) dx.
\end{aligned}$$

Lema 4.6. *Seja $(\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2)$ uma solução forte de (4.1)-(4.11). Então*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{F}_2(t) &= \left(\frac{b_1 \rho_1^1}{\kappa_1} - \rho_2^1 \right) \int_0^{L_0} \psi_t^1 \varphi_{tx}^1 dx + \left(\frac{b_2 \rho_2^2}{\kappa_2} - \rho_2^2 \right) \int_{L_0}^L \psi_t^2 \varphi_{tx}^2 dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\
&- \rho_2^2 \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx + \frac{b_1}{\kappa_1} \int_0^{L_0} \psi_x^1 \varphi_t^1 dx + \frac{b_2}{\kappa_2} \int_{L_0}^L \psi_x^2 \varphi_t^2 dx \\
&+ \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx + \kappa_2 \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx \\
&- b_1 \psi_x^1(L_0, t)(\varphi_x^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) + b_2 \psi_x^2(L_0, t)(\varphi_x^2(L_0, t) + \psi^2(L_0, t)) \\
&+ \frac{b_1 \rho_1^1}{\kappa_1} \psi_t^1(L_0, t) \varphi_t^1(L_0, t) - \frac{b_2 \rho_2^2}{\kappa_2} \psi_t^2(L_0, t) \varphi_t^2(L_0, t).
\end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a equação (4.2) por $p_x^1 = \varphi_x^1 + \psi^1$, obtemos

$$\begin{aligned} & \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_{tt}^1 \varphi_x^1 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_{tt}^1 \psi^1 dx \\ & - b_1 \int_0^{L_0} \psi_{xx}^1 (\varphi_x^1 + \psi^1) dx + \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx = 0 \end{aligned}$$

de onde resulta que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_t^1 \varphi_x^1 dx - \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_t^1 \varphi_{tx}^1 dx + \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} \rho_2^1 \psi_t^1 \psi^1 dx \\ & - \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx - b_1 \int_0^{L_0} \psi_{xx}^1 (\varphi_x^1 + \psi^1) dx + \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} -b_1 \int_0^{L_0} \psi_{xx}^1 (\varphi_x^1 + \psi^1) dx &= b_1 \int_0^{L_0} \psi_x^1 (\varphi_x^1 + \psi^1)_x dx \\ &- b_1 \psi_x^1(L_0, t) (\varphi_x^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \end{aligned}$$

a igualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^{L_0} (\rho_2^1 \psi_t^1 (\varphi_x^1 + \psi^1)) dx = \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_t^1 \varphi_{tx}^1 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\ & - b_1 \int_0^{L_0} \psi_x^1 (\varphi_x^1 + \psi^1)_x dx + b_1 \psi_x^1(L_0, t) (\varphi_x^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \\ & - \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.12}$$

a partir da equação (4.1), obtemos

$$-(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = -\frac{\rho_1^1}{\kappa_1} \varphi_{tt}^1 - \frac{1}{\kappa_1} \varphi_t^1$$

e, em seguida, (4.12) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} (\rho_2^1 \psi_t^1 (\varphi_x^1 + \psi^1)) dx &= \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_t^1 \varphi_{tx}^1 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\
&- \frac{b_1 \rho_1^1}{\kappa_1} \int_0^{L_0} \psi_x^1 \varphi_{tt}^1 dx + b_1 \psi_x^1(L_0, t) (\varphi_x^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \\
&- \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx - \frac{b_1}{\kappa_1} \int_0^{L_0} \psi_x^1 \varphi_t^1 dx.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Observando que

$$\psi_x^1 \varphi_{tt}^1 = \frac{d}{dt} (\psi_x^1 \varphi_t^1) - \psi_{tx}^1 \varphi_t^1,$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_0^{L_0} (\rho_2^1 \psi_t^1 (\varphi_x^1 + \psi^1) + \frac{b_1 \rho_1^1}{\kappa_1} \psi_x^1 \varphi_t^1) dx &= \left(\rho_2^1 - \frac{b_1 \rho_1^1}{\kappa_1} \right) \int_0^{L_0} \psi_t^1 \varphi_{tx}^1 dx \\
&+ \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx - \frac{b_1 \rho_1^1}{\kappa_1} \psi_t^1(L_0, t) \varphi_t^1(L_0, t) \\
&+ b_1 \psi_x^1(L_0, t) (\varphi_x^1(L_0, t) + \psi^1(L_0, t)) \\
&- \kappa_1 \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx - \frac{b_1}{\kappa_1} \int_0^{L_0} \psi_x^1 \varphi_t^1 dx.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Agora, multiplicando a equação (4.4) por $p_x^2 = \varphi_x^2 + \psi^2$ e usando argumentos similares tal como utilizado para obter (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{L_0}^L (\rho_2^2 \psi_t^2 (\varphi_x^2 + \psi^2) + \frac{b_2 \rho_1^2}{\kappa_2} \psi_x^2 \varphi_t^2) dx &= \left(\rho_2^2 - \frac{b_2 \rho_1^2}{\kappa_2} \right) \int_{L_0}^L \psi_t^2 \varphi_{tx}^2 dx \\
&+ \rho_2^2 \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx + \frac{b_2 \rho_1^2}{\kappa_2} \psi_t^2(L_0, t) \varphi_t^2(L_0, t) \\
&- b_2 \psi_x^2(L_0, t) (\varphi_x^2(L_0, t) + \psi^2(L_0, t)) \\
&- \kappa_2 \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx - \frac{b_2}{\kappa_2} \int_{L_0}^L \psi_x^2 \varphi_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Somando as igualdades (4.14) e (4.15) segue a conclusão do lema. ■

Vamos considerar o seguinte funcional

$$\mathcal{F}_3(t) = \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_t^1 \psi^2 dx + \rho_2^2 \int_{L_0}^L \psi_t^2 \psi^2 dx.$$

Lema 4.7. *Seja $(\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2)$ uma solução forte de (4.1)-(4.11). Então*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{F}_3(t) &\leq -\frac{b_1}{2} \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx - \frac{b_2}{2} \int_0^L |\psi_x^2|^2 dx \\ &+ \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx + \rho_2^2 \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx \\ &+ \frac{\kappa_1^2}{2b_1} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx + \frac{\kappa_2^2}{2b_2} \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a equação (4.2) por ψ^1 e integrando sobre $(0, L_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_t^1 \psi^1 dx &= -b_1 \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\ &+ b_1 \psi_x^1(L_0, t) \psi^1(L_0, t) - \kappa_1 \int_0^{L_0} (\varphi_x^1 + \psi^1) \psi^1 dx. \end{aligned}$$

De onde resulta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_2^1 \int_0^{L_0} \psi_t^1 \psi^1 dx &\leq -\frac{b_1}{2} \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx + \rho_2^1 \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\ &+ b_1 \psi_x^1(L_0, t) \psi^1(L_0, t) + \frac{\kappa_1^2}{2b_1} \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Multiplicando a equação (4.4) por ψ^2 e utilizando argumentos similares acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_2^2 \int_{L_0}^L \psi_t^2 \psi^2 dx &\leq -\frac{b_2}{2} \int_{L_0}^L |\psi_x^2|^2 dx + \rho_2^2 \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx \\ &- b_2 \psi_x^2(L_0, t) \psi^2(L_0, t) + \frac{\kappa_2^2}{2b_2} \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Somando as inequações (4.16) e (4.17), usando as condições de transmissões segue a conclusão do lema.

■

Vamos definir o funcional

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t) + \epsilon \mathcal{F}_3(t)$$

onde N_1 , N_2 e ϵ são constantes positivas.

Não é difícil ver que existem constantes positivas C_1 e C_2 , tal que

$$C_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_2 E(t).$$

Finalmente, nós constatamos o decaimento exponencial da energia.

Teorema 4.8. *Seja $(\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2)$ uma solução forte de (4.1)-(4.11). Se*

$$\frac{\rho_1^1}{\kappa_1} = \frac{\rho_2^1}{b_1}, \quad \frac{\rho_1^2}{\kappa_2} = \frac{\rho_2^2}{b_2} \quad e \quad \kappa_2 b_1 \rho_1^1 = \kappa_1 b_2 \rho_1^2,$$

então existe uma constante positiva α_0 e α_1 sendo independente dos dados iniciais, de tal modo que

$$E(t) \leq \alpha_0 E(0) e^{-\alpha_1 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Prova. Dos lemas (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) e usando as condições transmissão, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq - \left(N_1\gamma_1 - N_2C_{1,\delta} - \frac{b_1}{2\kappa_1^2\delta} \right) \int_0^{L_0} |\varphi_t^1|^2 dx \\
&- \left(N_1\gamma_2 - N_2C_{2,\delta} - \frac{b_2}{2\kappa_2^2\delta} \right) \int_{L_0}^L |\varphi_t^2|^2 dx \\
&- \left(\frac{N_2\kappa_1}{2} - \kappa_1 - \frac{\epsilon\kappa_1^2}{2b_1} \right) \int_0^{L_0} |\varphi_x^1 + \psi^1|^2 dx \\
&- \left(\frac{N_2\kappa_2}{2} - \kappa_2 - \frac{\epsilon\kappa_2^2}{2b_2} \right) \int_{L_0}^L |\varphi_x^2 + \psi^2|^2 dx \\
&- \left(\rho_2^1 - N_2\frac{L_0\delta}{2} - \epsilon\rho_2^1 \right) \int_0^{L_0} |\psi_t^1|^2 dx \\
&- \left(\rho_2^2 - N_2\frac{(L-L_0)\delta}{2} - \epsilon\rho_2^2 \right) \int_{L_0}^L |\psi_t^2|^2 dx \\
&- \frac{b_1}{2}(\epsilon - \delta) \int_0^{L_0} |\psi_x^1|^2 dx - \frac{b_2}{2}(\epsilon - \delta) \int_{L_0}^L |\psi_x^2|^2 dx.
\end{aligned}$$

Agora, escolhendo N_1, N_2 suficientemente grande, com $N_1 > N_2$, e ϵ, δ suficientemente pequeno, com $\epsilon > \delta$, podemos concluir que existe uma constante positiva C_0 tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_0 E(t).$$

De onde segue a conclusão do teorema. ■

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

Para melhor entendimento do problema de transmissão, seja, na equação da onda ou vigas de Timoshenko, analisamos, primeiramente, artigos que nos remeteram a estabilização na equação da onda e seus mecanismos dissipativos agindo sobre todo domínio. Além, das técnicas para obtenção da mesma por seus autores. Dentre eles, destacamos: E. Zuazua [3], Kim [4], J. E. Muñoz Rivera [5], Z. Liu e S. Zheng, [6].

Nos deparamos com o seguinte problema: se tivermos o mecanismo dissipativo, agora, em apenas uma parte do domínio e o material for composto de dois ou mais materiais diferentes, ou seja, se o material for misto, existe estabilização para o problema na equação da onda, nessas condições?

Esse tipo de problema é conhecido na literatura como problema de transmissão e é caracterizado por um sistema de E.D.P's com coeficientes descontínuos. Destacamos autores e seus artigos que contribuíram para resolução desse tipo de problemas, dentre eles: J. E. Muñoz Rivera e H. P. Oquendo [7], D. Andrade, L. H. Fatori e J. E. Muñoz Rivera [9], Carolina Lupifierio Antonio [10], Margareth Alves, Jaime Muñoz Rivera, Maurício Sepúlveda, Octávio Vera Villagrán e María Zegarra Garay [11]

De modo análogo a equação da onda, nos detemos em estudar artigos que tratavam da estabilização, agora, em vigas de Timoshenko, com mecanismo dissipativo em todo seu domínio, bem como as técnicas para sua estabilização. Sem no entanto, deixarmos de salientar que o grau de dificuldade para obter a estabilização do sistema é bem maior. Não só em função do número de equações que compõe o sistema,

mas também pelas funções que o constitui $\varphi = \varphi(x, t)$ e $\psi = \psi(x, t)$, respectivamente, oscilação vertical e ângulo de rotação e os coeficientes positivos $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $b = EI$, $\kappa = K'GA$, onde ρ denota a densidade, E é o módulo de elasticidade, G o módulo de cisalhamento, K' o fator cortante, A representa a área secção transversal, I o segundo momento de área da secção transversal. Neste sentido, destacamos os trabalhos: Kim e Renardy [12], Soufyane [13], Jaime Muñoz Rivera e Reinhard Racke [15], Mauro de Lima Santos [16], C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, e N. N. O. Castro [17] e D. S. Almeida Júnior, M. L. Santos e J. E. Muñoz Rivera [19].

Constatamos, também, que podemos estender o problema de transmissão que ocorre na equação da onda, para o sistema de Timoshenko. Novamente ressaltamos que o grau de dificuldade para obter a estabilização para o problema é bem mais complexo e interessante. Agora o sistema é composto pelas funções $\varphi_1 = \varphi_1(x, t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x, t)$, $\psi_1 = \psi_1(x, t)$ e $\psi_2 = \psi_2(x, t)$, além dos coeficientes ρ_1^1 , ρ_2^1 , ρ_1^2 , ρ_2^2 , b_1 , b_2 , κ_1 e κ_2 .

Também destacamos alguns artigos que nos auxiliaram em nossa pesquisa: Carlos Alberto Raposo [25], C. A. Raposo, W. D. Bastos e M. L. Santos [26].

Para completar, preliminarmente, nosso entendimento para posterior e principal objetivo desta tese. Analisamos, ainda, artigos sobre estabilização em vigas, agora, regidas pelas hipóteses de Bresse.

O sistema de Bresse é composto pelas funções, oscilação vertical, ângulo de rotação da secção transversal e oscilação longitudinal, respectivamente, $\varphi = \varphi(x, t)$, $\psi = \psi(x, t)$ e $\omega = \omega(x, t)$, bem como pelas constantes positivas $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = K'GA$, $\kappa_0 = EA$, $b = EI$ e $l = R^{-1}$, onde ρ denota a densidade, E é o módulo de elasticidade, G o módulo de cisalhamento, K' o fator cortante, A representa a área secção transversal, I o segundo momento de área da secção transversal e R o raio de curvatura.

Autores que com diferentes tipos de mecanismos dissipativo contribuíram para estabilização do modelo de Bresse: Mauro de L. Santos e Dilberto da S. Almeida Júnior [29], Fatiha Alabau Boussouira, Jaime E. Muñoz Rivera e Dilberto da S. Almeida Júnior [30],

Estimulado pelos resultados de estabilização tanto para o problema de transmissão na equação da onda, quanto para transmissão em vigas de Timoshenko, considerando-se diferentes tipos de mecanismos dissipativo, iniciamos uma pesquisa que envolvessem estruturas flexíveis, agora, regidas pelas hipóteses de Bresse. Isto é, será possível estender o problema de transmissão para vigas de Bresse?

Em nossa pesquisa, para o problema de transmissão em vigas de Bresse, no primeiro momento, o sistema é homogêneo, dissipativo e condições de contorno de Dirichlet. O mecanismo empregado para estabilizar as oscilações na estrutura foi tipo atrito ou friccional, nas três primeiras equações, isto é, na

primeira parte da viga. A existência e unicidade de solução para o modelo é obtida através do método de Faedo-Galerkin, nas condições da Teoria Espectral. Para obtermos o decaimento exponencial, a partir do mecanismo dissipativo, nosso modelo é transformado num sistema equivalente, não homogêneo e condições de Dirichlet na fronteira. A técnica aplicada é conhecida na literatura, como técnica multiplicativa e seus multiplicadores são convenientes. Dessa forma, concluímos que as dissipações do tipo friccional foram suficientes para determinar o decaimento e que a estabilidade da oscilação ocorre independente da parte dissipativa.

Em paralelo, analisamos a existência de solução, regularidade e a unicidade de solução no problema de transmissão para o modelo de Timoshenko, utilizando para isso a técnica de semigrupo [1], além de mostrarmos que o sistema é exponencialmente estável, através do método da energia.

Uma das aplicações para o problema de transmissão em vigas pode ser encontrado nos Estados Unidos, na Califórnia, uma ponte que liga as Cidades de São Francisco a Oakland. Os constantes abalos sísmicos produzidos pelas falhas tectônicas de San Andreas e Hayward comprometeram as estruturas de sua antiga ponte, sendo necessário a construção de uma nova ponte, onde a mesma, apresenta três inovações da engenharia para pontes. O que contribuiu, de modo efetivo, para estabilização das ondas sísmica sobre sua estrutura. Neste sentido vem validar a pesquisa desenvolvida, em nosso trabalho, para o problema de transmissão em relação a estabilização da oscilação em vigas.

Imagens da ponte construída entre San Francisco e Oakland:



FIGURA 5.1: Ponte sobre a baía de San Francisco, Califórnia



FIGURA 5.2: Ponte sobre a baía de San Francisco, Califórnia

Em anexo a tese, temos um vídeo que mostra as inovações na ponte Bay Bridge na Califórnia. O que vai ao encontro de nossa pesquisa, ratificando, dessa forma, na prática, todo nosso estudo teórico.

Teorias das Distribuições Escalares e Análise Funcional

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ , ao fecho, em Ω , do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $\text{supp}(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $\text{supp}(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula, e vale as seguintes relações:

1. $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$
2. $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$

3. $\text{supp}(\lambda\varphi) = \lambda \text{supp}(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.1. *Seja $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0, 1)$: Verifica-se que o $\text{supp}(\varphi) = (0, 1)$, não é um conjunto compacto.*

Neste nosso estudo, damos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definiremos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis e suporte compacto contido em Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω .

Exemplo 1.2. *Seja $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0, 1)$: Verifica-se que o $\text{supp}(\varphi) = (0, 1)$, não é um conjunto compacto*

Neste nosso estudo, damos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definiremos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis e suporte compacto contido em Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω .

Exemplo 1.3. *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, denotamos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r , isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se*

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{r^2}{\|x-x_0\|^2-r^2}\right) & \text{se } \|x-x_0\| < r \\ 0 & \text{se } \|x-x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $\text{supp}(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.1. Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α

o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que:

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo p , tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que:

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

note que,

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [?]]

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω , introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ , é denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω . Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, converge para T , quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω , com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.2. .

Dizemos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \iff \int_K |u(x)| dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1.4. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω .

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u , pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ . Então

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x)| dx \\ &\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_{\Omega} |u(x)| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois, $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita *gerada pela função localmente integrável u* e, usando o Lema Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u , no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.3 (de Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração: ver [36]

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.5. *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0).$$

É fácil verificar δ_{x_0} que é uma distribuição, conhecida por Distribuição de Dirac, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac(1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então tem-se:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por

$$\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$$

daí,

$$\xi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \xi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela proposições (1.1), segue que $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω , logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω , isto é, $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev*, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \rightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.4. Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.6. Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada u' não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Com efeito, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de *Espaços de Sobolev*.

Observação 1.5. Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção de derivada no sentido das distribuições, isto é

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall |\alpha| \leq k.$$

é uma consequência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev*.

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ . Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Vimos que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em

espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev*.

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω .

Este espaço quando munido da norma

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é espaço de *Banach* Ver [13].

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)|, \forall v \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach* Ver [38].

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx,$$

cujas norma induzida é:

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

as derivadas D^α , evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} dx, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

com norma induzida por este produto escalar dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u)_{L^2(\Omega)}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Mostra-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável*. Ver [?]]

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a, b) = \left\{ u \in L^2(a, b); u' \in L^2(a, b) \right\}, \quad u' = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \int_a^b [u(t)]^2 dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} [u(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é *bem maior* que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [?] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi|_{\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω . Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k|_{\Gamma},$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$..

O operador γ_0 , denominado operador de traço, é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_{\Gamma}$ em vez de $\gamma_0\varphi$ assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$.

A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.6. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: ver [15].

Proposição 1.7 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n + 1$ funções $u_0, u_1, \dots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: ver [36]

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.8 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração: Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1 . Sendo $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \rightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in \Omega \quad a < \text{proj } x < b$ onde a $\text{proj } x$ é a projeção de x sobre o eixo coordenado x_1 , agora dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e $\varphi(a, x_1, \dots, x_n) = 0$. Temos:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi.$$

E da desigualdade de Schwartz, obtemos:

$$|\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 = \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi.$$

Aplicando o Teorema de Fubini temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx &\leq (b-a) \int_{\Omega} \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi dx \leq \\ &\leq (b-a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

Logo,

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Observação Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato; Consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = |v|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2 \geq |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1+C) |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

1.2.2 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E . Uma função vetorial $\varphi :]0, T[\rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i(t),$$

onde cada $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i(t) \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X

dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}$ – *integrável*) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

- (i) $\varphi_\nu \rightarrow u$ em X , q.s em $(0, T)$;
- (ii) $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$.

Neste caso, a integral de Bochner Ver [?] de u , é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t) dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X . Dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável *Lebesgue*.

Denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lebesgue* em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^q(0, T; X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma :

$$\langle u, v \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \langle u, v \rangle_{L^q(0, T; X') \times L^p(0, T; X)}$$

Definição 1.9. $f : [0, T] \rightarrow X$ é integrável se existe uma sequência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que,

$$\int_0^T \|S_k(t) - f(t)\|_X dt \rightarrow 0, \text{ com } k \rightarrow \infty.$$

Se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T S_k(t) dt.$$

A expressão $\int_0^T f(t) d\mu$ é dita integral de Bochner de f , em relação a μ .

Exemplo 1.7. Sejam $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$. Consideremos a função $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s) \varphi(s) ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X . A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0, T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; X)$ com injeção contínua e densa,

onde $\mathcal{D}'(0, T; X)$ é espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X .

Definição 1.10. Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, estamos representando o espaço de *Banach* das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$, denotaremos o espaço das funções $u : [0, T] \rightarrow X$ *fracamente contínuas*, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

1.3 O Teorema Espectral

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, cujas normas e produtos internos serão representados, respectivamente, por, $\|\cdot\|$, $((\cdot, \cdot))$ e $|\cdot|$, $(\cdot, \cdot)$. Suponhamos que $V \subset H$, V denso em H e a injeção de V em H é contínua.

A terna $\{V, H, ((\cdot, \cdot))\}$ determina um operador linear A caracterizado por: o domínio do operador A é o subespaço vetorial $D(A)$ de V dado por

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } ((u, v)) = (f, v), \forall v \in V\}$$

e $Au = f$.

Temos então que

$$((u, v)) = (Au, v), \forall u \in D(A) \text{ e } v \in V.$$

Demonstra-se em M. Mianda [13], que A é um operador auto-adjunto não limitado de H e $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, com injeções contínuas e densas, além disso A tem espectro discreto.

Supondo que a imersão de V em H é compacta, segue-se da Teoria Espectral, que existe um sistema ortonormal completo de H , enumerável, $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$, constituído de autovetores de A , cujos autovalores correspondentes $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ satisfazem à

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots, \lambda_j \rightarrow \infty \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Para cada α real, o operador A^α é caracterizado por

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} |(u, w_\nu)|^2 < \infty \right\}$$

e

$$A^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu \in H, u \in D(A^\alpha).$$

Dado $u \in H$, então

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (u, w_\nu) w_\nu.$$

Em $D(A^\alpha)$ consideremos o produto interno e a norma definidos, respectivamente, por

$$(u, v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v)$$

e

$$|u|_{D(A^\alpha)} = |A^\alpha u|.$$

Temos que $D(A^\alpha)$ munido do produto interno $(u, v)_{D(A^\alpha)}$ é um espaço de Hilbert e dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$, a imersão de $D(A^{\alpha_1})$ em $D(A^{\alpha_2})$ é compacta.

Sendo A um operador positivo, então o operador $S = A^{\frac{1}{2}}$ está bem definido, é denominado raiz quadrada positiva de A e é caracterizado por

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = V, |A^{\frac{1}{2}}| = \|u\|, \forall u \in V.$$

No que se segue o operador A será definido pelo terno $\{V, H, ((u, v))\}$ nas condições do Teorema Espectral.

1.4 Semigrupos

Definição 1.11. Seja X um espaço de Banach. Uma família parametrizada de operadores lineares limitados $T(t) : X \longrightarrow X$, onde $0 \leq t < \infty$, é chamada Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em X se:

- (i) $T(0) = I$ (I é o operador identidade em X);
- (ii) $T(s+t) = T(s)T(t)$, para todo $t, s > 0$ (propriedade de semigrupos).

Um semigrupo de operadores lineares limitados, $T(t)$, é dito Uniformemente Contínuo se:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

O operador linear A com domnio

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e definido por:

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d}{dt} T(t)x \right|_{t=0} \quad \forall x \in D(A),$$

é chamado de *gerador infinitesimal* do semigrupo $T(t)$.

Definição 1.12. Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é dito Semigrupo Fortemente Contínuo de operadores lineares limitados se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x \quad \forall x \in X.$$

Todo Semigrupo fortemente contínuo Será chamado Semigrupo de Classe C_0 .

Definição 1.13. Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é dito Semigrupo Contrações se

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Teorema 1.14 (Hille-Yosida). *Um operador linear (não-limitado) A é o gerador in*

infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, $t > 0$, se e somente se,

(i) *A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda; A)\| \geq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova: Ver [1].

Considere, o problema de valor inicial não homogêneo:

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

onde, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , denotado por $T(t)$.

Definição 1.15. Uma função $U : [0; T) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (1.1) sobre $[0; T)$, se U é contínua no intervalo $[0; T)$, continuamente diferenciável em $(0; T)$, $U(t) \in D(A)$, e satisfaz (1.1), $\forall t \in [0; T)$.

Definição 1.16. Uma função $U : [0; T) \rightarrow X$ é uma solução Fraca de (1.1) sobre $[0; T)$, se U é contínua no intervalo $[0; T)$, continuamente diferenciável em $(0; T)$, $U(t) \in X$, e satisfaz (1.1), $\forall t \in [0; T)$.

Teorema 1.17 (Lumner Phillips). *Seja A um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(A)$, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

Prova: Ver [1].

Lema 1.18 (Lax-Milgran). *Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para toda aplicação linear $\varphi : H \rightarrow R$, existe uma única $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Prova: Ver [38].

Referências Bibliográficas

- [1] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] Ian Stewart. Seven equations that rule your world. *New Scientist Physics & Mat*, 2851: 21–31, 2012.
- [3] ZUAZUA.E. Stability and decay for a class of nonlinear problems. *Asymptotic Analysis* 1, 1:161–185, 1988.
- [4] J.U.KIM. On the energy decay of a linear thermoviscoelastic bar and plate. *Siam J. Math. Anal*, 23(4).
- [5] J.E. Rivera Muñoz. On the energy decay rates un linear thermoviscoelasticity. *Funkcialj Etvacioj*, 35(1).
- [6] Z.Liu and S.Zheng. On the exponencial stability of linear viscoelasticity and thermoviscoelasticity. *Quartely of Appied Mathematics*, 54:21–31, 1996.
- [7] J.E. Rivera Muñoz and H.P. Oquendo. The transmission problem of viscoelastic waves. *Acta Applicandae Mathematicae*, 62(1).
- [8] Fatori L. H and Muñoz Rivera J. E. Rates of decay to weak thermoelastic bresse system. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 75 (6):881–904, 2010.

- [9]
- [10] Carolina Lupifierio Antonio. Problema de transmissão para materiais constituídos por três componentes. Master's thesis, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, 2010.
- [11] Margareth S. Alves, J.E. Rivera Muñoz, Mauricio Sepúlveda, Octávio Vera Villagrán, and Maria Zegarra Gary. the asymptotic behavior of the linear problem in viscoelasticity. *Math Nachr*, pages 1–15, 2013.
- [12] J.U. Kim and Y. Renardy. Boundary control of the timoshenko beam. *Siam Journal on Control and Optimization*, 25(6):1417–1429, 1987.
- [13] A. Soufyane. Stabilisation de la poutre de timoshenko. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I*(328): 731–734, 1999.
- [14] H. S. Ribeiro A.F. Neves and O. Lopes. On the spectrum of evolution operators generated by hyperbolic systems. *Jounal Functional Analysis*, 67:320–344, 1986.
- [15] J.E.M. Rivera and R. Racke. Global stability for damped timoshenko sistms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, B(9.
- [16] M. De Lima Santos. Decay rates for solutions of a timoshenko sistms with a memory condition at the boundary. *Abstract and Applied Analysis*, 7(10):531–546, 2002.
- [17] M.L. Santos C. A. Raposo, J. Ferreira and N.N.O. Castro. Exponential stability for the timoshenko system with two weak dampings. *Applied Mathematics Letters*, 18:535–541, 2005.
- [18] Z.Liu and S.Zheng. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*. Chapman & Hall/-CRC Research Notes in Mathematics, Fla, USA, 1999.
- [19] D. S. Almeida Júnior, M. L. Santos, and J. E. Muñoz Rivera. Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36:1965–1976, 2013.
- [20] Gearhart LM. Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 236:385–394, 1978.

- [21] Herbst IW. The spectrum of hilbert space semigroups. *Journal of Operator Theory*, 10: 87-90, 1983.
- [22] F. L. Huang. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Annals of Differential Equations*, 1:43-56, 1985.
- [23] Prüss J. On the spectrum of c_0 -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284:847-857, 1984.
- [24] A. Borichev Y. Tomilov. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen*, 347 (2):455-478, 2009.
- [25] C.A. Raposo. *Problema De Transmissão para o Sistema de Timoshenko com Memória*. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2001.
- [26] W.D. BASTOS C.A. RAPOSO and M.L. SANTOS. A transmission problem for the timoshenko system. *Computational & Applied Mathematics*, 26:2, 2007.
- [27] J. E. Lagnese and J. L. Lions. *Modelling Analysis and Control of Thin Plates*. Recherches en Mathématiques Appliquées, Masson, Paris, 1988.
- [28] D.S. Almeida Junior. *Estabilidade Assintótica e Numérica de sistemas dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse*. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2009.
- [29] M. L. Santos and Dilberto da S. Almeida Júnior. Numerical exponential decay to dissipative bresse system. *Journal of Applied Mathematics*, 2010:17, 2010.
- [30] Dilberto da S. Almeida Júnior Fatiha Alabau Boussouira, Jaime E. Muñoz Rivera. Stability to weak dissipative bresse system. *Mathematical Analysis and Applications*, 374:481-498, 2011.
- [31] F. Ammar-Khodja, S. Kerbal, and Soufyane. Stabilization of the nonuniform timoshenko beam. *J. Math. Anal. Appl.*, 327 (1):525-538, 2007.
- [32] J.E.M. Rivera and Fernández. Study of timoshenko sistms with past history. *J. Math. Anal. Appl.*, 339(1):482-502, 2008.
- [33] J.E.M. Rivera and Hugo D. Fernandez Sare. Exponential decay of timoshenko sistms with indefinite damping memory dissipation. *Adv. Differential Equations*, 13, (7-8):733-752, 2009.

-
- [34] J.E.M. Rivera and R. Racke. Timoshenko sistms with indefinite damping. *J. Math. Anal. Appl.*, 341:1068–1083, 2008.
- [35] R. Dautray and J. L. Lions. Analyse mathématique et calcul numérique puor les sciences et les techniques. *Masson, Paris, I*, 1984.
- [36] J. L. Lions. Controlabilité exacte, perturbations et stabilization de systems distribués sci-ences et les techniques. *Masson, Paris*, Tome I:collection, 1988.
- [37] J. E. Lagnese and J. L. Lions. *Boundary Controllabilty in Problem of Transmission for a class of second order Hyperbolic Sistems*, volume 2. ESAIM:Control, Optim and Cal, 1997.
- [38] H. Brezis. *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*. Springer-Verlag, Masson, 1992.