UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Existência e Unicidade de Soluções para alguns Fluidos Micropolares Não-Newtonianos

Elizardo Fabrício Lima Lucena

Belém-PA

Março/2015

Elizardo Fabrício Lima Lucena

Existência e Unicidade de Soluções para alguns Fluidos Micropolares Não-Newtonianos

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo.

Belém-PA

Março/2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Lucena, Elizardo Fabricio Lima, 1980-
Existência e unicidade de soluções para alguns fluidos micropolares não-newtonianos / Elizardo Fabricio Lima Lucena. - 2015.

Orientador: Geraldo Mendes de Araújo.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Doutorado), Belém, 2015.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Fluido micropolar. 3. Fluidos não-newtorianos. 4. Galerkin, Métodos de. 5. Cauchy, Problemas de. I. Título.

CDD 22. ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Elizardo Fabricio Lima Lucena

Existência e Unicidade de Soluções para Alguns Fluidos Micropolares Não-Newtonianos

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 06 de março de 2015.

Conceito: Aprovado.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo (Orientador)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
Universidade Federal do Pará - UFPA/UFCG

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Universidade do Estado do Pará - UEPA

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Este trabalho é dedicado as crianças de todos os mundos. Em especial: Joãozinho, Éric, Isabelle e Evellyn.

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar um ciclo de vida, com a conclusão de uma meta tão importante como essa, sinto uma profunda gratidão. Especialmente para com aqueles, que de alguma forma tiveram interseção, positiva ou não, com meu caminho, de modo a me permitir chegar neste ponto. Sem ter como citar todos, deixo registrado aqui meus votos de agradecimento. Entretanto, arrisquei-me em resumir em uma pequena lista, alguns nomes que, por mais proximidade, sobretudo nos últimos anos, tiveram uma contribuição mais direta sobre essa jornada.

À Deus pela oportunidade única que é viver.

Aos meus pais Eduardo Lucena e Elizabeth Lima (Minha Rainha!) por tudo, especialmente pelos ensinamentos silenciosos e pelo inabalável suporte emocional, mesmo em momentos impossíveis.

Aos meus manos, Felipe Bandeira e Êmily Lucena pelo amor, por uma infância feliz e por todo apoio em momentos muito difíceis.

À minha estrelinha, minha geninha, minha filha, Isabelle Lucena pela paciência e pelo carinho.

Às tias, Ana, Iracema, Maria da Paz e Jandira pelos sorvetes e pelo apoio materno, ao longo de todo um caminho que me trouxe a esse momento.

Aos meus padrinhos Jamerson e Dalila, por algumas lições de sabedoria que me permitiram valiosas reflexões sobre a vida.

À minha amada Zuriza Rodrigues pela paciência, incontáveis viagens e pela renúncia ao me acompanhar nessa jornada.

Aos amigos, Angeli Rodrigues e José Carlos pela confiança, amor e por todo apoio ao longo dessa caminhada.

À querida Professora Aparecida que ensinou o 1, 2, 3 e o a, b, c minha eterna gratidão.

Aos amigos e companheiros de batalha Michel Arnaud e Mirelson Martins, pelas discussões enriquecedoras e momentos de descontração.

Aos amigos do peito, Renato Fabricio, Juary Gonçalves e Luiz Gutemberg pelos exemplos inspiradores de vida e por todos os momentos de descontração.

Aos amigos da FAMAT-Bragança, Edson, Lázaro, Edilene, Deiziane, Sílvia, Leandro, Laila, Alessandro, Alessandra e Augusta pelo apoio e amizade.

Aos amigos que ganhei ao longo desse caminho, entre os quais, Jorsi Cunha, Marcos Lima, Augusto César, João Rodrigues e Elany Maciel.

Ao meu orientador, Professor Dr. Geraldo Mendes de Araújo, pela orientação competente, dedicação, paciência imensurável, confiança e sobretudo por me ajudar a acreditar que eu poderia concluir esse curso.

Ao Professor Marcos Araújo, por confirmar em mim o sentimento de que é possível liderar e educar com simplicidade e humildade.

Aos coordenadores do PDM, Professor Dr. Giovany Figueiredo e Professora Dra. Rúbia Nascimento pelo apoio e confiança depositados em mim desde o início.

À Carmem Almeida, cujo trabalho por vezes invisível, é uma peça fundamental para o bom funcionamento do PDM.

À Universidade Federal do Pará.

Resumo

Neste trabalho investigamos dois sistemas acoplados de fluidos micropolares não-Newtonianos. Os problemas são considerados em um domínio suave e limitado do $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, com condições de Dirichlet na fronteira. O tensor de estresse é dado por $\tau(e(u)) = M(|e(u)|_E^2)e(u)$. Usamos o método de Faedo-Galerkin e alguns argumentos de compacidade para provar existência de soluções fracas. Também consideramos a análise da unicidade, regularidade e periodicidade de soluções. Estudamos também para os dois sistemas a existência de soluções, usando o método de Cauchy-Kowaleska.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Fluido Micropolar, Fluido Não-Newtoniano, Método de Galerkin.

Abstract

In this work we study two coupled systems of non-Newtonian micropolar fluids. The problems are considered in a bounded, smooth domain of $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, with Dirichlet boundary conditions. The operator stress tensor is given by $\tau(e(u)) = M(|e(u)|_E^2)e(u)$. To prove existence of weak solutions we use the Faedo-Galerkin's method and compactness arguments. Uniqueness, regularity and periodicity of solutions are also considered. We also study the existence of solutions by using the Cauchy-Kowaleska's method to both systems considered in this work.

Key words: Partial Differential Equations, Micropolar Fluid, Non-Newtonian Fluid, Method of Galerkin.

“Paz e luz no caminho dos viajantes.”

Sumário

Introdução

Sejam Ω um domínio do $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$ e o número real $T > 0$. Denotamos por Q_T o cilindro espaço-temporal $I \times \Omega$, cuja fronteira lateral é dada por $\Sigma = I \times \partial\Omega$, em que $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo de tempo. O comportamento de um fluido incompressível confinado em Ω pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações

$$\left|\begin{array}{rcl} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot\tau(e(u)) + \rho(u\cdot\nabla)\, u &=& -\nabla p + \rho f \quad \text{em } Q_T, \\ \nabla\cdot\ u &=& 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u &=& 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) &=& u_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

no qual $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade linear do fluido, p representa a pressão, ρ é uma constante positiva que determina a densidade do fluido, $f = (f_1, f_2, f_3)$ representa a resultante das forças externas e $\tau : \mathbb{R}^{3^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ denota o tensor extra de estresse. A aplicação $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ leva cada vetor $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ na parte simétrica do gradiente da velocidade, ou seja

$$e(u) = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right]. \tag{2}$$

$\mathbb{R}^{3^2}_{sym}$ representa o conjunto de todas matrizes simétricas de ordem 3×3, ou seja,

$$\mathbb{R}^{3^2}_{sym} = \{D \in \mathbb{R}^{3^2}; D_{ij} = D_{ji},\ i, j = 1, 2, 3\}.$$

O tensor de estresse τ permite classificar o fluido estudado. Temos a chamada

Lei de Stokes, quando o tensor τ depende linearmente da matriz $e = e(u)$, ou seja, quando

$$\tau(e) = 2\nu e, \quad \nu > 0. \tag{3}$$

Nesse caso o sistema (1) se transforma no sistema de Navier-Stokes. Um fluido incompressível, cujo comportamento é caracterizado pela lei de Stokes (3), é chamado *fluido Newtoniano*. Por outro lado, fluidos que não podem ser descritos por (3) são chamados *fluidos não-Newtonianos*. A área da ciência que estuda o comportamento dos fluido não-Newtonianos é uma parte da Mecânica dos Fluidos chamada Reologia. Apenas com o intuito de ilustração, damos a seguir alguns exemplos de fluidos não-newtonianos com sua classificação segundo a Reologia.

(a) *Fluido Pseudo-Plástico.* Nesse caso a viscosidade aparente diminui conforme o aumento da tensão. Por exemplo, temos tintas a base de latex e o Catchup.

(b) *Plástico de Bingham.* Estes fluidos requerem a aplicação de uma tensão τ além de um limiar inicial τ_0, específico do fluido em questão, para que ocorra escoamento. Quando submetidos a tensões menores que τ_0, eles se comportam como sólidos. Um exemplo desse tipo de fluido é o creme dental.

(c) *Dilatante.* Nesse caso a viscosidade aparente aumenta com o aumento da tensão τ. É o caso, por exemplo, de suspensões concentradas de amido. Para o escoamento, usam-se bombas de deslocamento lento.

Para mais informações sobre Reologia veja, por exemplo, *G. K. Batchelor* [5], [1967].

De acordo com *K. R. Rajagopal* [30], [1993], o comportamento de um fluido não-Newtoniano pode ter uma ou mais característica entre as seguintes:

(a) a capacidade do fluido de aumentar a viscosidade ou diminui-la durante o cisalhamento;

(b) a presença de diferença de tensões normais não-nulas durante o cisalhamento;

(c) a capacidade do fluido de possuir um limite de elasticidade aparente;

(d) a capacidade do fluido de apresentar relaxamento de tensão;

(e) a capacidade do fluido de deslizar lentamente ao escorrer ("to creep").

O modelo de tensão de estresse que vamos considerar nesse trabalho se refere a um fluido que possui predominantemente a primeira característica.

Um modelo bastante estudado para o tensor de estresse, é a chamada *Lei Potência* (*Power-Law fluids*). A qual, em uma de suas variantes, é dada por

$$\tau(e(u)) = 2\nu_0(1 + |e(u)|_E^{p-2})e(u), \tag{4}$$

em que o símbolo $|e(u)|_E$ representa norma euclidiana usual de matrizes definida por $|e(u)|_E^2 = \sum_{i,j} e_{ij}^2(u)$, com $i, j = 1, ..., d$. Notemos que quando $p = 2$ em (4), temos um fluido newtoniano dado pela lei de Stokes (3). Nesse trabalho vamos considerar um fluido sujeito a Lei Potência. Trabalharemos com uma generalização de (4), dada por

$$\tau(e(u)) = M\left(|e(u)|_E^2\right) e(u), \tag{5}$$

em que $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $M \in C^1(0, +\infty)$ é a *função de viscosidade generalizada*. O tensor dado em (5), com $p \neq 2$ é o modelo para os chamados *fluidos Newtonianos generalizados* (apesar de serem fluidos não-Newtonianos). Mais especificamente vamos considerar o caso $p = 4$. Nessas condições, temos um fluido do tipo dilatante, cuja viscosidade aparente cresce com o aumento da tensão de cisalhamento. Para mais informações, veja *J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta e M. Rùžička* [14], [1996].

Fluidos não-Newtonianos são frequentemente usados nas mais diversas áreas de pesquisas científicas e da indústria como por exemplo em Química, Glaciologia, Biologia e Geologia. Algumas aplicações são discutidas em *J. Málek, K. R. Rajagopal, e M. Rùžička* [16], [1995].

A primeira investigação matemática do problema (1) foi feita por *O. A. Ladyzhenskaya* [25], [1963], onde ela propôs, entre outras coisas, estudar o sistema (1) com o tensor dado em (4) e $p = 4$. Combinando a teoria dos operadores monótonos e argumentos de compacidade, ela provou existência de soluções fracas para o modelo (1) no caso em que $p \geq 1 + \dfrac{2d}{d+2}$, assim como unicidade quando $p \geq \dfrac{d+2}{2}$. Outros resultados conhecidos a respeito do problema (1) foram obtidos em uma série de artigos, entre os quais citamos *J. Málek, K. R. Rajagopal, e M. Rùžička* [16], [1995], *J. Málek, J. Nečas e M. Rùžička* [15], [2001] e *Frehse J. e J. Málek* [4], [2003].

O sistema de equações a seguir descreve o movimento de um fluido micropolar.

$$
\left|\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p & = & 2\nu_r \nabla \times w + f \quad \text{em } Q_T, \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} - \alpha \Delta w + (u \cdot \nabla)w - \beta \nabla(\nabla \cdot w) + 4\nu_r w & = & 2\nu_r \nabla \times u + g \quad \text{em } Q_T, \\
\nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\
u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\
w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega,
\end{array}\right. \tag{6}
$$

no qual $u(x,t), w(x,t) \in \mathbb{R}^3$ e $p(x,t) \in \mathbb{R}$, denotam, respectivamente, as velocidades linear, microrotacional e a pressão hidrostática do fluido. Os símbolos α e β são constantes positivas. As constantes positivas ν e ν_r são, respectivamente, a *viscosidade newtoniana* e a *viscosidade microrrotacional*.

A principal diferença entre o modelo (6) e o de Navier-Stokes é que a rotação das partículas é considerada. A abordagem acima foi introduzida por *A. C. Eringen* [1], [1966]. O sistema acoplado (6) pode ser usado para modelar o comportamento de cristal líquido, fluido polimérico e sangue sob certas circunstâncias (veja por exemplo *C. Calmelet-Eluhu e D. R. Majundar* [2], [1998]). Esse sistema foi analizado em detalhes no livro de *G. Lukaszewicz* [6], [1999].

Existem diversos artigos que tratam da análise matemática de fluidos micropolares. Trata-se de um campo de pesquisa relativamente recente e em evidência na Matemática. Podemos citar por exemplo *J. L. Boldrini, M. Durán e M. A. Rojas-Medar* [11], [2010]; *P. Szopa* [26], [2007]; *N. Yamaguchi* [24], [2005]; *N. Kishan e S. Jagadha* [23], [2013]; bem como *R. Ellahi, S. U. Rahman, M. Mudassar Gulzar, S. Nadeem e K. Vafai* [27], [2014].

Neste texto propomos o estudo de fluidos micropolares não-Newtonianos. O problema estudado no segundo capítulo consiste em supor que no sitema (6) o fluido é do tipo (4), com $p = 4$ (fluido dilatante). Ou seja, um fluido micropolar com viscosidade variável. Mais precisamente, nós investigamos o seguinte problema: sejam Ω, $\partial\Omega$, $T > 0$, Q_T, Σ e $I = (0,T)$ conforme definidos anteriormente. Procuramos por funções $u, w : Q_T \to \mathbb{R}^3$ e $p : Q_T \to \mathbb{R}$ que são soluções do seguinte sistema de equações

$$\left|\begin{array}{rcl} u' - \nabla \cdot [(\nu + \nu_r + M(|e(u)|_E^2))e(u)] & + & (u \cdot \nabla)u + \nabla p \\ & = & 2\nu_r \nabla \times w + f \text{ em } Q_T, \\ w' - \nu_1 \nabla \cdot e(w) \;+\; (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w & = & 2\nu_r \nabla \times u + g \quad \text{em } Q_T, \\ \nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array}\right. \tag{7}$$

em que $e(u)$ é dado como em (2), ν, ν_1 e ν_r são constantes positivas, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $\nabla \times u$ é dado por

$$\nabla \times u = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

A aplicação real $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, deve satisfazer certas hipóteses que serão explicitadas no capítulo de preliminares. Notamos que quando M é uma função constante, o problema (7) se reduz ao problema (6). No estudo do sistema (7) obtivemos existência de soluções fracas no caso $d \leq 3$, unicidade de soluções quando $d = 2$, regularidade de soluções e existência de soluções periódicas. Os resultados desse capítulo deram origem a um artigo intitulado "On a System of Equations of a Non-Newtonian Micropolar Fluid", feito em colaboração por G. M. de Araújo, M. A. F. de Araújo e E. F. L. Lucena, o qual foi aceito para publicação na revista *Journal of Applied Mathematics* em novembro de 2014.

O terceiro capítulo é dedicado ao estudo do seguinte sistema

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
u' - \nabla \cdot [(\nu + \nu_r + M(|e(u)|_E^2))e(u)] + (u.\nabla)u & + & \nabla p \\
& = & 2\nu_r \nabla \times w + f \quad \text{em } Q_T, \\
w' - \nu_1 \nabla \cdot [M(|e(w)|_E^2)e(w)] + (u.\nabla)w + 4\nu_r w & = & 2\nu_r \nabla \times u + g \quad \text{em } Q_T, \\
\nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\
u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\
w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega,
\end{array}
\right. \tag{8}
$$

no qual consideramos uma não-linearidade do tipo $\nabla \cdot [M(|e(w)|_E^2)e(w)]$ na segunda equação, análoga ao tensor de estresse da primeira equação (por esse motivo decidimos chamar esse fluido de *micropolar fortemente dilatante*). Isso nos permite, em certo sentido, melhorar os resultados obtidos para o primeiro sistema. É importante ressaltar que, quando M é uma função constante, retomamos o sistema micropolar (6). No estudo do sistema (8) obtivemos existência e unicidade de soluções para $d \leq 3$, bem como resultados de periodicidade e regularidade de soluções.

No último capítulo estudamos novamente o sistema (7), mas dessa vez usando o método de Cauchy-Kowaleska. Para tanto, consideramos o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{lcl} u'_\epsilon - \nabla\cdot[(\nu+\nu_r+M(|e(u)|_E^2))e(u)] & + & (u_\epsilon\cdot\nabla)u_\epsilon + \frac{1}{2}(\nabla\cdot u_\epsilon)u_\epsilon + \nabla p_\epsilon \\ & = & 2\nu_r\nabla\times w_\epsilon + f \quad \text{em } Q_T, \\ w'_\epsilon - \nu_1\nabla\cdot e(w_\epsilon) + (u_\epsilon\cdot\nabla)w_\epsilon & + & \frac{1}{2}(\nabla\cdot u_\epsilon)w_\epsilon + 4\nu_r w_\epsilon \\ & = & 2\nu_r\nabla\times u_\epsilon + g \;\; \text{em } Q_T, \\ \epsilon p'_\epsilon + \nabla\cdot u_\epsilon & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u_\epsilon & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ w_\epsilon & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u_\epsilon(0) & = & u_{\epsilon 0} \quad \text{em } \Omega, \\ w_\epsilon(0) & = & w_{\epsilon 0} \quad \text{em } \Omega, \\ p_\epsilon(0) & = & p_{\epsilon 0} \quad \text{em } L^2(\Omega), \end{array}\right. \tag{9}$$

Empregando aproximações de Galerkin, mostramos que (9) tem uma única solução $\{u_\epsilon, w_\epsilon, p_\epsilon\}$ para cada $\epsilon > 0$, a qual converge para a solução do problema (7) quando $\epsilon \to 0$. A vantagem em usar esse método, é que desse modo obtemos as soluções em espaços sem divergência nula. *J. L. Lions* usou esse método em [12], [1969] para obter soluções do sistema de Navier-Stokes com viscosidade constante. Recentemente *G. M. de Araújo, S. B. de Menezes e R. B. Gúzman* [7], [2008] também usaram esse método para estudar um sistema similar ao sistema (7), com uma viscosidade variável dada por

$$\nabla\cdot\tau(e(u)) = (\nu_0 + \nu_1\|u(t)\|^2)\Delta u.$$

Os resultados obtidos nos capítulos 3 e 4 encontram-se em processo de publicação. Os sistemas citados nesta introdução serão repetidos nos capítulos correspondentes.

Lista de Símbolos

$I :=\ [0, T]$ intervalo da reta para algum número real $T > 0$;

$\Omega :=$ aberto do espaço eulidiano $\mathbb{R}^d$, com ponto arbitrário $x = (x_1, ..., x_d)$;

$|\Omega| :=$ medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^d$;

$\mathcal{D}(\Omega) :=$ espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto sobre Ω munido da topologia indutiva de *L. Schwartz* [21], [1957];

$\mathcal{D}'(\Omega) :=$ dual de $\mathcal{D}(\Omega) =$ espaço das distribuições sobre Ω;

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \ \text{ mensurável em } \Omega; \ \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}, \ 1 \leq p < \infty;$$

$C^k(\Omega) :=$ funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω, $k \geq 0$;

$W^{m,p}(\Omega),\ W_0^{m,p}(\Omega),\ H^m(\Omega),\ H^{-1}(\Omega) :=$ espaços de Sobolev;

$$L^p(I; X) := \left\{ u;\ u : I \to X \text{ é mensurável e } \left(\int_I \|u(t)\|_X^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \text{ se } 1 \leq p < \infty;$$

$$L^p(I; X) := \left\{ u;\ u : I \to X \text{ é mensurável e } \sup_{t \in (0,T)} ess \|u(t)\|_X < \infty \right\}, \text{ se } p = \infty;$$

$\nabla u :=$ gradiente da função u;

$\nabla \cdot u :=$ divergente da função u;

$\nabla \times u :=$ rotacional da função u;

$\Delta u :=$ laplaciano da função u;

$|A|_E :=$ norma euclidiana da matriz real A;

$\displaystyle\int_\Omega u :=$ integral de Lebesgue de uma função u sobre o conjunto Ω;

$\square :=$ fim da demonstração de um teorema, proposição, lema ou corolário;

$\|u\|_X :=$ norma de u em X;

$A \hookrightarrow B :=$ imersão contínua de A em B;

$A \overset{c}{\hookrightarrow} B :=$ imersão compacta de A em B;

$u_n \to u :=$ convergência forte de u_n para u;

$u_n \rightharpoonup u :=$ convergência fraca de u_n para u;

$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u :=$ convergência fraco estrela de u_n para u;

C e $C_\nu :=$ constantes positivas cujo valor exato não é relevante.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo fixaremos os espaços funcionais e algumas notações que serão usadas no texto. Também aproveitamos esse espaço, para citar alguns dos principais lemas que serão usados nas demonstrações.

1.1 Notações e Resultados

Em toda a discussão feita neste texto, consideramos um domínio Ω contido em $\mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3,4\}$, com fronteira suave $\partial\Omega$. Dado o número real $T > 0$, denotamos por Q_T o cilindro espaço-temporal $I \times \Omega$, cuja fronteira lateral é dada por $\Sigma = I \times \partial\Omega$, em que $I = (0,T) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo de tempo. Nesse contexto, os vetores $u = (u_1, ..., u_d)$ e $w = (w_1, ..., w_d)$ representam, respectivamente, a velocidade linear e a velocidade microrrotacional de um fluido confinado em Ω. A pressão desse fluido será representada por p, ρ é uma constante positiva que determina sua densidade e $f = (f_1, ..., f_d)$ será a resultante das forças externas aplicadas a esse fluido. Denotando

$$\mathbb{R}^{d^2}_{sym} = \{D \in \mathbb{R}^{d^2}; D_{ij} = D_{ji},\ i,j = 1, ..., d\},$$

definimos a aplicação $e : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ que leva cada vetor $u \in \mathbb{R}^d$ na parte simétrica do gradiente da velocidade $e(u)$ definido pela expressão dada em (2). Também consideramos uma aplicação real $M : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, $M \in C^1(0,+\infty)$ satisfazendo as seguintes hipóteses

$$C_1\left(1 + t^{1/2}\right)^2 \quad \leq \quad M(t) \leq C_2\left(1 + t^{1/2}\right)^2, \tag{1.1}$$

$$0 \ < \ M'(t) \leq \frac{C_3\left(1+t^{1/2}\right)}{t^{1/2}}. \tag{1.2}$$

em que C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas.

Além disso, usamos as notações usuais para os espaços de sobolev como $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$ e $C^p(\Omega)$ para funções que são definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, bem como $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ e $\mathbf{C}^p(\Omega)$ para funções, definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}^d$. Também consideramos os espaços $L^p(I;X)$ e $L^p(Q_T) = L^p\left(I;L^p(\Omega)\right)$. Para informações detalhadas sobre esses espaços, veja, por exemplo, *J. L. Lions* [12], [1969].

Sejam os espaços X e X', em que X' é o dual topológico de X. Representaremos por $\langle .,. \rangle$ a dualidade entre X e X'. Também definimos os seguintes espaços

$$\mathcal{V} = \left\{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \nabla \cdot \varphi = 0\right\},$$

$V_p = V_p(\Omega)$ como o fecho de $\mathcal{V}$ no espaço $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$, com a norma do gradiente em V_p dada por

$$||\nabla u||_p \equiv \left[\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Em particular $V = V_2$. O produto interno e a norma em V são dados respectivamente por

$$((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,dx, \quad ||u||^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx.$$

$H = H(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, com produto interno e norma definidos respectivamente por

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega u_i(x)v_i(x)\,dx, \quad |u|^2 = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |u_i(x)|^2\,dx.$$

Observação 1.1. *Notamos que $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ e $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert. Além disso, as imersões $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} \boldsymbol{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ são contínuas, sendo a primeira delas compacta.*

A seguir, elencamos alguns dos principais lemas que serão usados no texto.

Lema 1.1. *(Desigualdade de Korn) Seja* $1 < p < \infty$. *Então, existe uma constante* $K_p = K_p(\Omega)$, *tal que a inequação*

$$K_p||v||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ||e(v)||_{L^p(\Omega)} \tag{1.3}$$

é válida qualquer que seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *em que* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *é um aberto limitado com* $\partial\Omega \subset C^1$.

Demonstração. Veja o apêndice B.1. Outras demonstrações podem ser encontradas em J. Nečas [17], [1966] e *R. Temam* [28], [1985].

Lema 1.2. *Sejam* $p \geq 2$, *um tensor* $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ *e uma função potencial para* τ, *dada por* $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ *tais que as seguintes assertivas são satisfeitas quaisquer que sejam as matrizes* $B, D \in \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ *e quaisquer que sejam* $i, j, k, l = 1, ..., d$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} &= \tau_{ij}(D), && (1.4)\\
\Phi(0) &= \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = 0, && (1.5)\\
\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} B_{ij} B_{kl} &\geq C_3 (1 + |D|_E)^{p-2} |B|_E^2, && (1.6)\\
\left| \frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} \right| &\leq C_4 (1 + |D|_E)^{p-2}. && (1.7)
\end{aligned}$$

Nessas condições existem constantes positivas C_ν, $\nu = 5, 6, 7$ *tais que*

$$\begin{aligned}
C_5(1 + |D|_E^{p-2})|D|_E^2 &\leq \Phi(D) \leq C_6(1 + |D|_E)^p, && (1.8)\\
(\tau(B) - \tau(D)).(B - D) &\geq C_7 |B - D|_E^2. && (1.9)
\end{aligned}$$

Demonstração. Veja o apêndice B.2.

Lema 1.3. *(Teorema da Convergência de Vitali) Seja* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^d$ *e* $f^m : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrável qualquer que seja* $m \in \mathbb{N}$. *Supondo que*

1. $\lim\limits_{m \to \infty} f^m(x)$ *existe e é finito quase sempre em* Ω;

2. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_H |f^m(x)|\, dx < \varepsilon, \quad \forall H \in \Omega,\ |H| < \delta$$

então

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega f^m(x)dx = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} f^m(x)dx.$$

Demonstração. Para uma demonstração desse resultado veja *G. Vitali* [8], [1907]; *J. R. Choksi* [19], [2001]; *N. Dunford e J. Schwartz* [22], [1958] ou ainda em *H. W. Alt* [10], [1992] , p. 63.

Lema 1.4. *Supondo $d = 2$, existe uma constante C, tal que*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}$$

$\forall u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Veja o apêndice B.3.

Lema 1.5. *Consideremos $d \geq 3$, $s, r \in \mathbb{R}$, com $s > 2$, $r > d$, verificando $\dfrac{2}{s} + \dfrac{d}{r} = 1$. Seja também a forma trilinear $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$b(u, v, w) = \int_\Omega u_i(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) w_j(x)\, dx.$$

Nessas condições, se $u \in \boldsymbol{L}^r(\Omega)$, então

$$|b(u, v, w)| \leq c\|u\|_{L^r(\Omega)} \|v\| |w|^{2/s} \|w\|^{d/r}$$

$\forall v, w \in V$. *Em que $c \geq 0$ é uma constante.*

Demonstração. Veja o apêndice B.4.

Observação 1.2. *Notamos que o Lema 1.5 continua válido para as formas trilineares $b_1, \bar{b} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} b_1(u, v, w) &= \int_\Omega u_i(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) w_j(x)\, dx. \\ \bar{b}(u, v, w) &= \frac{1}{2} \int_\Omega u_i(x) (\nabla \cdot v(x)) w_i(x)\, dx \end{aligned}$$

Para finalizar essa seção, definiremos o tensor de estresse $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e seu correspondente potencial $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ que serão utilizados no texto. Definimos esses objetos pondo

$$\tau(D) = M\left(|D|_E^2\right) D, \tag{1.10}$$

$$\Phi(D) = \frac{1}{2}\int_0^{|D|_E^2} M(s)ds. \tag{1.11}$$

No apêndice A, mostramos que o tensor τ e o potencial Φ satisfazem as hipóteses (1.4)-(1.7) do Lema 1.2 para $p = 4$.

Capítulo 2

Sobre um Fluido Micropolar Dilatante

Neste capítulo vamos estudar o seguinte sistema

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
u' - \nabla \cdot [(\nu + \nu_r + M(|e(u)|_E^2))e(u)] & + & (u \cdot \nabla)u + \nabla p \\
& = & 2\nu_r \nabla \times w + f \text{ em } Q_T, \\
w' - \nu_1 \nabla \cdot e(w) \ + \ (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w & = & 2\nu_r \nabla \times u + g \quad \text{em } Q_T, \\
\nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\
u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\
w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega,
\end{array}
\right. \tag{2.1}
$$

No qual os símbolos ν, ν_1 e ν_r são constantes positivas. Nosso objetivo é estabelecer existência, unicidade, regularidade e um resultado de periodicidade.

2.1 Definições e Resultados

A fim de simplificar algumas notações introduzimos as seguinte formas bilinear e trilinear: $a : V \times V \to \mathbb{R}$ e $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$, respectivamente dadas por

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,dx, \tag{2.2}$$

$$b(u,v,w) = \int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Chamamos a atenção do leitor para o uso da convenção de somação de Einstein segundo a qual $\alpha_i\beta_j$ substitui $\sum_{i,j=1}^{d}\alpha_i\beta_j$. Essa notação será usada quase sempre no texto. Notamos que (veja *J. L. Lions* [12], [1969])

$$a(u,v) = ((u,v)), \tag{2.4}$$

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v), \tag{2.5}$$

$\forall u \in V$ e $\forall v, w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Também usaremos as seguintes notações

$$Au = -\Delta u, \tag{2.6}$$

$$B_u v = (u\cdot\nabla)v, \tag{2.7}$$

$\forall u, v \in V$, e

$$\mathcal{K}u = -\nabla\cdot M(|e(u)|_E^2)e(u), \tag{2.8}$$

$\forall u \in V\cap V_4$. Assim, podemos escrever

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) \qquad \forall u, v \in V, \tag{2.9}$$

$$\langle B_u v, w\rangle = b(u,v,w) \quad \forall u \in V \text{ e } \forall v, w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.10}$$

$$\langle \mathcal{K}u, v\rangle = \int_\Omega M(|e(u)|_E^2)e_{ij}(u)e_{ij}(v)dx \quad \forall u, v \in V\cap V_4. \tag{2.11}$$

Observação 2.1. *Observamos que devido a desigualdade (1.9) do Lema 1.2, temos que*

$$\langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u_1 - u_2\rangle \geq 0,$$

quaisquer $u_1, u_2 \in V$. *Logo* $\mathcal{K} : V\cap V_4 \to (V\cap V_4)'$ *é um operador monótono.*

A seguir definimos o sentido de solução fraca considerado neste capítulo.

Definição 2.1. *Sejam* $u_0 \in H, w_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}(I, V')$ *e* $g \in L^2(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. *Uma solução fraca para o sistema (2.1) é um par de funções* $\{u, w\}$, *tal que*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(I; H) \cap L^4(I; V_4) \cap L^4(I; V), \\ w &\in L^\infty(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)) \cap L^2(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)), \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes identidades

$$\left| \begin{aligned} & \int_0^T \langle u'(t), \varphi \rangle \, dt + (\nu + \nu_r) \int_0^T a(u(t), \varphi) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \varphi) dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega M(|e(u(t))|_E^2) e_{ij}(u(t)) e_{ij}(\varphi) dx dt = 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times w(t), \varphi) dt \\ & + \int_0^T (f(t), \varphi) dt \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{V}), \\ & \\ & \int_0^T \langle w'(t), \phi \rangle \, dt + \nu_1 \int_0^T a(w(t), \phi) dt + \nu_1 \int_0^T (\nabla \cdot w(t), \nabla \cdot \phi) dt \\ & + \int_0^T b(u(t), w(t), \phi) dt + 4\nu_r \int_0^T (w(t), \phi) dt = 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times u(t), \phi) dt \\ & + \int_0^T (g(t), \phi) dt \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{D}(\Omega)), \\ & \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad u(0) = u_0, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad w(0) = w_0. \end{aligned} \right. \tag{2.12}$$

Usando os Lemas 1.1, 1.2, 1.3 e 1.5 obtivemos os seguintes resultados:

Teorema 2.1. *Se* $d \leq 3$, $u_0 \in H$, $w_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}(I; V')$ *e* $g \in L^2(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, *então existe uma solução fraca do sistema (2.1), no sentido da definição 2.1.*

Teorema 2.2. *Supondo as condições do teorema 2.1 com* $d = 2$, *o sistema (2.1) possui uma única solução fraca no sentido da definição 2.1.*

Teorema 2.3. *Supondo* $d \leq 3$, $u_0 \in V \cap V_4$, $w_0 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ *e* $f, g \in L^2(Q_T)$, *existe uma única solução fraca do sistema (2.1), no sentido da definição 2.1 tal que*

$$
\begin{aligned}
u' &\in L^2(I;H), &(2.13)\\
u &\in L^\infty(I;V_4), &(2.14)\\
u &\in L^\infty(I;V), &(2.15)\\
w &\in L^\infty\left(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right), &(2.16)\\
w' &\in L^2(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega)). &(2.17)
\end{aligned}
$$

Teorema 2.4. *(Soluções Periódicas) Se* $d \leq 3$, $u_0 \in H$, $w_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $f \in L^2(I;V')$ *e* $g \in L^2(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$, *então existe um par de funções* (u,w) *tal que*

$$
\begin{aligned}
u &\in L^\infty(I;H)\cap L^4(I;V_4)\cap L^4(I;V),\\
w &\in L^\infty(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega))\cap L^2(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)),
\end{aligned}
$$

satisfazendo o seguinte sistema

$$
\left|
\begin{array}{l}
(u'(t),\varphi)+(\nu+\nu_r)a(u(t),\varphi)+(\mathcal{K}u(t),\varphi)+(B_u u(t),\varphi)\\
\qquad\qquad\qquad = 2\nu_r(\nabla\times w(t),\varphi)+(f(t),\varphi),\\
(w'(t),\phi)+\nu_1 a(w(t),\phi)+\nu_1(\nabla\cdot w(t),\nabla\cdot\phi)\\
+(B_u w(t),\phi)+4\nu_r(w(t),\phi)=2\nu_r(\nabla\times u(t),\phi)+(g(t),\phi),\\
\qquad\qquad u(0)=u(T),\\
\qquad\qquad w(0)=w(T),\\
\forall\varphi\in V,\ \ \forall\phi\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\\
\textit{no sentido de } D'(0,T).
\end{array}
\right.
\qquad (2.18)
$$

2.2 Existência de Soluções

Demonstração do teorema 2.1.

Para demonstrar o teorema 2.1 usaremos aproximações de Galerkin. Para esse propósito tomemos uma base de autovetores do operador de Stokes dada por $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset$

H, bem como uma base de autovetores de Lamé dada por $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$. Representamos por $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m] \subset H$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$, e por $W_m = [\phi_1, ..., \phi_m] \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{\phi_1, ..., \phi_m\}$. Consideremos o sistema aproximado com $r = 1, ..., m$

$$\left|\begin{array}{rcl} \langle u'_m(t), \varphi_r\rangle + \langle \nu + \nu_r\rangle(Au_m(t), \varphi_r\rangle & + & \langle \mathcal{K}u_m(t), \varphi_r\rangle + \langle B_{u_m}u_m(t), \varphi_r\rangle \\ & = & 2\nu_r\langle \nabla \times w_m(t), \varphi_r\rangle + \langle f(t), \varphi_r\rangle, \\ \langle w'_m(t), \phi_r\rangle - \nu_1\langle \nabla \cdot e(w), \phi_r\rangle & + & \langle B_{u_m}w_m(t), \phi_r\rangle + 4\nu_r\langle w_m(t), \phi_r\rangle \\ & = & 2\nu_r\langle \nabla \times u_m(t), \phi_r\rangle + \langle g(t), \phi_r\rangle, \\ u_m(0) & = & u_{0m} \to u_0, \quad \text{forte em} \quad V \cap V_4, \\ w_m(0) & = & w_{0m} \to w_0, \quad \text{forte em} \quad \mathbf{H}^1_0(\Omega). \end{array}\right. \tag{2.19}$$

Sabemos que o sistema de equações diferenciais ordinárias (2.19) possui uma solução local (u_m, w_m) definida sobre um intervalo $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$ (veja *E. A. Coddington e N. Levinson* [3], [1955]), tal que

$$u_m(x,t) = \sum_{r=1}^{m} g_{rm}(t)\varphi_r(x) \quad \text{e} \quad w_m(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{rm}(t)\phi_r(x). \tag{2.20}$$

A primeira estimativa feita a seguir nos permitirá estender essa solução a todo intervalo $[0, T]$.

Primeira Estimativa

Por simplicidade vamos omitir o parâmetro t em alguns momentos. Começamos multiplicando ambos os membros da equação $(2.19)_1$ por g_{r_m}. A seguir, multiplicamos ambos os membros de $(2.19)_2$ por h_{r_m}. Por fim, somamos as equações obtidas de $r = 1$ até $r = m$ para obter

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + (\nu+\nu_r)\|u_m(t)\|^2 + \int_\Omega M(|e(u_m(t))|_E^2)|e_{ij}(u_m(t))|^2 dx \\ &\leq 2\nu_r|w_m(t)|\|u_m(t)\| + \|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\|,\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^2 + \nu_1\|w_m(t)\|^2 + \nu_1|\nabla\cdot w_m(t)|^2 + 4\nu_r|w_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\nu_r\|u_m(t)\||w_m(t)| + \|g(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_m(t)\|,\end{aligned} \tag{2.22}$$

pois $b(u,u,u) = b(u,w,w) = 0$, $\forall u(t) \in V$, $\forall w(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (veja *J. L. Lions* [12], [1969]). Temos também $|\nabla \times u_m| = |\nabla u_m| = \|u_m\|$ e $(\nabla \times w_m, u_m) = (w_m, \nabla \times u_m)$ (veja *G. Lukaszewicz* [6], [1999] p. 116). Agora usamos a desigualdade de Young para obter de (2.21) e (2.22), respectivamente

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + (\nu+\nu_r)\|u_m(t)\|^2 + \frac{C_1K}{2}\|u_m(t)\|^4_{V_4} + \nu_2\|u_m(t)\|^4 \\ &\leq \frac{\nu_r}{2}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu_r|w_m(t)|^2 + \frac{\nu_2}{2}\|u_m(t)\|^4 + c_{\nu_2}\|f(t)\|^{4/3}_{V'},\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^2 + \nu_1\|w_m(t)\|^2 + 4\nu_r|w_m(t)|^2 \leq \frac{\nu_r}{2}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu_r|w_m(t)|^2 \\ &+\frac{\nu_1}{2}\|w_m(t)\|^2 + c_{\nu_1}\|g(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Isso ocorre pois, devido a desigualdade de Korn (1.3), a propriedade (1.1) da função M e a imersão $L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(|e(u_m)|_E^2)|e_{ij}(u_m)|^2 dx \overset{(1.1)}{\geq} \frac{C_1}{2}\|e(u_m)\|^4_{L^4(\Omega)} \overset{(1.3)}{\geq} \frac{C_1K}{2}\|u_m\|^4_{V_4},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega M(|e(u_m)|_E^2)|e_{ij}(u_m)|^2dx &\overset{(1.1)}{\geq} \frac{C_1}{2}\|e(u_m)\|^4_{L^4(\Omega)}\\ &\geq C|e(u_m)|^4\\ &\overset{(1.3)}{\geq} \nu_2\|u_m\|^4.\end{aligned}$$

Somando as inequações (2.23) e (2.24) e integrando de 0 a t, com $0 \leq t \leq T$, concluímos

$$\begin{gathered}|u_m(t)|^2 + |w_m(t)|^2 + C_1K\int_0^t \|u_m(s)\|^4_{V_4}ds + \nu_2\int_0^t \|u_m(s)\|^4 ds\\ +\nu_1\int_0^t \|w_m(s)\|^2 ds \leq C.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Portanto, seguem de (2.25) as seguintes estimativas

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;H), \tag{2.26}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^4(I;V_4), \tag{2.27}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^4(I;V), \tag{2.28}$$

$$(w_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{2.29}$$

$$(w_m) \quad \text{é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)). \tag{2.30}$$

Segunda Estimativa

Consideremos agora a projeção ortogonal $P_m : V \to V_m$ dada por

$$P_m u = \sum_{r=1}^m (u,\varphi_r)\varphi_r,$$

assim como sua adjunta $P_m^* : V' \to V'$. Notamos que $P_m^* u_m' = u_m'$. Além disso, devido a escolha da base especial (φ_ν), temos que

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \|P_m^*\|_{\mathcal{L}(V',V')} \leq 1. \tag{2.31}$$

Desse modo, obtemos de $(2.19)_1$, (2.9), (2.10) e (2.11) a seguinte igualdade

$$u_m' = -(\nu+\nu_r)P_m^*Au_m - P_m^*\mathcal{K}u_m - P_m^*B_{u_m}u_m + 2\nu_r P_m^*\nabla\times w_m + P_m^* f. \tag{2.32}$$

A seguir, vamos obter limitações para os termos do segundo membro de (2.32). Primeiramente notamos que $|\langle Au_m, v\rangle| \leq \|u_m\|\|v\|$, $\forall u_m(t), v(t) \in V$. Portanto, (2.28) implica que

$$(Au_m) \text{ é limitada em } L^4(I; V') \hookrightarrow L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'). \tag{2.33}$$

Tomando $u_m(t), v(t) \in V$, obtemos de (2.11) e da desigualdade de Hölder o seguinte

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{K}u_m, v\rangle| &\leq C \int_\Omega (1 + |\nabla u_m|_E)^2 |\nabla u_m|_E |\nabla v|_E dx \\ &\leq C \int_\Omega (1 + |\nabla u_m|_E)^3 |\nabla v|_E dx \\ &\leq C \left(1 + \|u_m\|_{V_4}^3\right) \|v\|_{V_4} \\ &\leq C \left(1 + \|u_m\|_{V_4}^3\right) \|v\|_{V \cap V_4} \end{aligned}$$

Portanto, a limitação (2.27) assegura que

$$(\mathcal{K}u_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'). \tag{2.34}$$

Sabemos que $d \leq 3$ implica em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo usando (2.10) e a desigualdade de Hölder podemos concluir

$$|\langle B_{u_m} u_m, v\rangle| \overset{(2.10)}{=} |b(u_m, u_m, v)| \leq \|u_m\|_{L^4(\Omega)} \|u_m\| \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u_m\|^2 \|v\|$$

$\forall u_m(t), v(t) \in V$. Portanto, devido a (2.28) obtemos

$$(B_{u_m} u_m) \text{ é limitada em } L^2(I; V') \hookrightarrow L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'). \tag{2.35}$$

Temos que

$$|\langle \nabla \times w_m, v\rangle| = |\langle w_m, \nabla \times v\rangle| \leq |w_m| \|v\| \leq c\|w_m\| \|v\|$$

$\forall w_m(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, e $\forall v(t) \in V$ (veja *G. Lukaszewicz* [6], [1999] p.116). Portanto, segue de (2.30) que

$$(\nabla \times w_m) \text{ é limitada em } L^2(I; V') \hookrightarrow L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'). \tag{2.36}$$

Finalmente, devido a (2.31)-(2.36) e as hipóteses sobre f temos que

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'). \tag{2.37}$$

De um modo análogo, consideremos a projeção ortogonal $R_m : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to W_m$ definida por

$$R_m w = \sum_{j=1}^{m} (w, \phi_j)\phi_j$$

e sua adjunta $R_m^* : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Temos $R_m^* w'_m = w'_m$,

$$\|R_m\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))} \leq 1 \quad \text{ e } \quad \|R_m^*\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H^{-1}(\Omega))} \leq 1, \tag{2.38}$$

devido a escolha da base especial (ϕ_ν). Notamos que $(2.19)_2$, (2.9), (2.10) e (2.11) implicam que

$$w'_m = -\nu_1 R_m^* \nabla \cdot e(w_m) - R_m^* B_{u_m} w_m - 4\nu_r R_m^* w_m + 2\nu_r R_m^* \nabla \times u_m + R_m^* g. \tag{2.39}$$

A fim de limitar o segundo membro de (2.39), observamos inicialmente que

$$|\langle \nabla \cdot e(w_m), v \rangle| = |\langle e(w_m), \nabla v \rangle| \leq |\nabla w_m||\nabla v| \leq \|w_m\|\|v\|$$

$\forall w_m(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Desse modo, (2.30) implica que

$$(\nabla \cdot e(w_m)) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.40}$$

Por outro lado, considerando a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos de (2.30) a seguinte limitação

$$(w_m) \text{ é limitada em } L^4\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.41}$$

Em seguida, notamos que

$$|\langle \nabla \times u_m, v \rangle| \leq \|u_m\|\|v\|,$$

$\forall u_m(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Desse modo, usando (2.28) obtemos

$$(\nabla \times u_m) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.42}$$

Com a finalidade de obter uma limitação para $(B_{u_m} w_m)$, vamos considerar dois casos: $d = 2$ e $d = 3$. Primeiramente, supondo $d = 2$, obtemos da propriedade (2.5), de (2.10) e da Desigualdade de Hölder o seguinte

$$|\langle B_{u_m} w_m, v\rangle| \overset{(2.10)}{=} |b(u_m, w_m, v)| \overset{(2.5)}{=} |b(u_m, v, w_m)| \leq c\|u_m\|_{L^4(\Omega)}\|v\|\|w_m\|_{L^4(\Omega)}$$

$\forall u_m, w_m, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Logo devido ao Lema 1.4 podemos escrever

$$\|B_{u_m} w_m\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq c|u_m|\|u_m\||w_m|\|w_m\|.$$

Agora aplicamos a desigualdade de Young para obter

$$\|B_{u_m} w_m\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq c|u_m|^2\|u_m\|^2 + c|w_m|^2\|w_m\|^2$$

Portanto, (2.26) e (2.28)-(2.30) nos permitem obter

$$(B_{u_m} w_m) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right), \qquad \text{no caso } d = 2.$$

Usando um raciocínio análogo e supondo $d = 3$ obtemos do Lema 1.5 a seguinte inequação

$$\|B_{u_m} w_m\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u_m\|_{L^6(\Omega)}|w_m|^{1/2}\|w_m\|^{1/2}.$$

A seguir notamos que no caso $d = 3$ vale a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Segue-se da desigualdade de Young que a inequação anterior pode ser reescrita do seguinte modo

$$\|B_{u_m} w_m\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq c\|u_m\|^2|w_m|\|w_m\| \leq c\|u_m\|^4 + c|w_m|^2\|w_m\|^2.$$

Portanto, (2.28)-(2.30) nos fornecem

$$(B_{u_m} w_m) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right), \qquad \text{no caso } d = 3. \tag{2.43}$$

Desse modo, obtemos de (2.39)-(2.43) e das hipóteses sobre g que

$$(w_m') \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.44}$$

Devido as limitações (2.26)-(2.30), (2.37), (2.44) e ao Lema de compacidade de Aubin-Lions, temos que existem subsequências de (u_m) e (w_m), as quais ainda denotamos por (u_m) e (w_m), tais que

$$\begin{aligned}
u_m &\to u \quad \text{forte em } L^2(I;H) \text{ e q. s. em } Q_T, && (2.45)\\
u_m &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(I;H), && (2.46)\\
u_m &\rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4(I;V), && (2.47)\\
u_m &\rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4(I;V_4), && (2.48)\\
u'_m &\rightharpoonup u' \quad \text{fraco em } L^{4/3}(I;(V\cap V_4)'), && (2.49)\\
w_m &\to w \quad \text{forte em } L^2(I;\mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ e q. s. em } Q_T, && (2.50)\\
w_m &\overset{*}{\rightharpoonup} w \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), && (2.51)\\
w_m &\rightharpoonup w \quad \text{fraco em } L^2(I;\mathbf{H}^1_0(\Omega)), && (2.52)\\
w'_m &\rightharpoonup w' \quad \text{fraco em } L^2(I;H^{-1}(\Omega)), && (2.53)\\
\mathcal{K}u_m &\rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em } L^{4/3}(I;(V\cap V_4)'). && (2.54)
\end{aligned}$$

Além disso, notamos que (2.27) e (2.28) implicam que (u_m) é limitada em $L^4\,(I;V\cap V_4)$. Isso juntamente com (2.37) implica em $u\in C^0(I;\mathbf{H})$. De modo similar, (2.30) e (2.44) implicam em $w\in C^0(I;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Portanto, faz sentido considerar $u(0)=u_0$ e $w(0)=w_0$.

Agora vamos obter (2.12). A fim de provar que

$$\int_0^T b(u_m,u_m,\varphi)\longrightarrow\int_0^T b(u,u,\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(I;\mathcal{V}), \tag{2.55}$$

consideremos $\varphi\in\mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T}(u_{mi}u_{mj}-u_iu_j)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dxdt &= \int_{Q_T}(u_{mi}-u_i)u_{mj}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dxdt\\
&+ \int_{Q_T}u_i(u_{mj}-u_j)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dxdt\\
&= I_1+I_2,
\end{aligned}$$

$\forall\varphi\in\mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Além disso, notamos que devido a estimativa (2.26), temos que

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq C\int_0^T |u_m - u||u_m|dt \\
&\overset{(2.26)}{\leq} C\int_0^T |u_m - u|dt.
\end{aligned}
$$

Agora notando que temos uma convergência forte (2.45), resulta que $|I_1| \to 0$, quando $m \to \infty$. Por outro lado, novamente devido a (2.45), temos $|I_2| \to 0$, quando $m \to \infty$. Portanto,

$$
\int_{Q_T} u_{mi}u_{mj}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dxdt \to \int_{Q_T} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dxdt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V}). \tag{2.56}
$$

Por fim, usando a propriedade (2.5) e a convergência (2.56) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T b(u_m, u_m, \varphi)dt &\overset{(2.5)}{=} -\int_0^T b(u_m, \varphi, u_m)dt \\
&\overset{(2.56)}{\to} -\int_0^T b(u,\varphi, u)dt \\
&\overset{(2.5)}{=} \int_0^T b(u,u,\varphi)dt,
\end{aligned}
$$

qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Isso assegura a convergência (2.55). Para provar que

$$
\int_0^T b(u_m, w_m, \phi) \longrightarrow \int_0^T b(u, w, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}\left(I; \mathcal{D}(\Omega)\right), \tag{2.57}
$$

procedemos de modo análogo usando a convergência (2.50) e as estimativas (2.29) e (2.30). Por outro lado, notamos que

$$
\int_{Q_T} e_{ij}(w_m)e_{ij}(\phi)dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} e_{ij}(w)e_{ij}(\phi)dxdt, \tag{2.58}
$$

ou de modo equivalente,

$$
\int_0^T \langle \nabla \cdot e(w_m), \phi\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \nabla \cdot e(w), \phi\rangle dt, \tag{2.59}
$$

resulta de (2.52). Para provar que

$$\int_{Q_T} M(|e(u_m)|_E^2) e_{ij}(u_m) e_{ij}(\varphi) dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} M(|e(u)|_E^2) e_{ij}(u) e_{ij}(\varphi) dxdt, \tag{2.60}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$, usaremos o Lema 1.3. Primeiramente usamos o fato $\nabla u_m \to \nabla u$ q. s. em Q_T, (veja *Frehse J. e J. Málek* [4], [2003] p. 565-566). Logo

$$|\nabla u_m|_E^2 \longrightarrow |\nabla u|_E^2 \text{ q. s. em } Q_T.$$

Ou ainda,

$$|e(u_m)|_E^2 \longrightarrow |e(u)|_E^2 \text{ q. s. em } Q_T. \tag{2.61}$$

Além disso, como $M \in C^1(0,+\infty)$ segue de (2.61) que

$$M(|e(u_m)|_E^2) \longrightarrow M(|e(u)|_E^2) \text{ q. s. em } \quad Q_T, \tag{2.62}$$

Portanto,

$$M(|e(u_m)|_E^2) e_{ij}(u_m) e_{ij}(\varphi) \longrightarrow M(|e(u)|_E^2) e_{ij}(u) e_{ij}(\varphi) \tag{2.63}$$

q. s. em Q_T, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Em outra direção, usando a estimativa (2.27) e (1.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} M\left(|e(u_m)|_E^2\right) e_{ij}(u_m) e_{ij}(\varphi) dxdt &\overset{(1.1)}{\leq} C \int_{Q_T} \left(1 + |e(u_m)|_E\right)^3 |e(\varphi)|_E \, dxdt \\
&\leq \quad C \left(\int_{Q_T} \left(1 + |\nabla u_m|_E\right)^4 dxdt \right)^{3/4} \left(\int_{Q_T} |\nabla \varphi|_E^4 dxdt \right)^{1/4} \\
&\overset{(2.27)}{\leq} \quad C.
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$M\left(|e(u_m)|_E^2\right) e_{ij}(u_m) e_{ij}(\varphi) \in L^1(Q_T), \tag{2.64}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{V})$. Agora se $H \subset Q_T$ é um conjunto mensurável, obtemos de (1.1), (2.27) e da desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
\int_H M(|e(u_m)|_E^2)\, e_{ij}(u_m)e_{ij}(\varphi)dxdt &\overset{(1.1)}{\leq} c\int_H (1+|e(u_m)|_E)^3\, |e(\varphi)|_E dxdt \\
&\leq c\left(\int_{Q_T}(1+|e(u_m)|_E)^4\, dxdt\right)^{3/4}\left(\int_H |e(\varphi)|_E^4 dxdt\right)^{1/4} \\
&\leq c\left(\int_{Q_T}(1+|e(u_m)|_E)^4\, dxdt\right)^{3/4}|H|^{1/4} \\
&\overset{(2.27)}{\leq} c|H|^{1/4}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_H M(|e(u_m)|_E^2)e_{ij}(u_m)e_{ij}(\varphi)dxdt \leq c|H|^{1/4}.
$$

Supondo que $|H|$ é suficientemente pequeno, obtemos

$$
\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_H M(|e(u_m)|_E^2)e_{ij}(u_m)e_{ij}(\varphi)dxdt \leq \varepsilon, \tag{2.65}
$$

$\forall\varepsilon > 0$. Por fim, usando (2.63)-(2.65) e o Teorema da Convergência de Vitali (Lema 1.3), obtemos (2.60). Portanto, $\chi = \mathcal{K}u$ em $L^{4/3}(I;(V\cap V_4)')$. O sistema (2.12) e as limitações obtidas anteriormente em (2.33)-(2.37) e (2.40)-(2.44) implicam que

$$
\begin{aligned}
u' + (\nu+\nu_r)Au + \mathcal{K}u + B_u u &= 2\nu_r\nabla\times w + f \text{ em } L^{4/3}(I;(V\cap V_4)'), && (2.66)\\
w' - \nu_1\nabla\cdot e(w) + B_u w + 4\nu_r w &= 2\nu_r\,\nabla\times u + g \text{ em } L^2\left(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right). && (2.67)
\end{aligned}
$$

Concluímos assim a prova do teorema 2.1. □

2.3 Unicidade de Solução

Demonstração do Teorema 2.2.

Consideremos (u_1, w_1) e (u_2, w_2), soluções fracas do sistema (2.1) no sentido da definição 2.1 e $d = 2$. Nessas condições,

$$
\begin{aligned}
u_1, u_2 &\in L^\infty(I;H) \cap L^4(I;V) \cap L^4(I,V_4),\\
w_1, w_2 &\in L^\infty\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right).
\end{aligned}
$$

Sejam $u = u_1 - u_2$ e $w = w_1 - w_2$. Logo, (u, w) verifica

$$
\left|
\begin{aligned}
& u' + (\nu+\nu_r)Au + (\mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2) + (B_{u_1}u_1 - B_{u_2}u_2) &=\ & 2\nu_r \nabla \times w,\\
& w' + \nu_1 Aw + \nu_1 \nabla(\nabla \cdot w) + (B_{u_1}w_1 - B_{u_2}w_2) + 4\nu_r w &=\ & 2\nu_r \nabla \times u,\\
& u(0) = w(0) = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{2.68}
$$

em que a primeira equação é considerada em $L^{4/3}(I;(V \cap V_4)')$ e a segunda em $L^2\left(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)$. A seguir, tomamos as dualidades nas equações $(2.68)_1$ e $(2.68)_2$ com u e w, respectivamente. Isso faz sentido, pois $u \in L^4(I;V)$ e $w \in L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$. Assim,

$$
\left|
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + \langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u\rangle + \langle B_{u_1}u_1 - B_{u_2}u_2, u\rangle\\
& = 2\nu_r\langle \nabla \times w, u\rangle,\\
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu_1\|w\|^2 + \nu_1|\nabla\cdot w|^2 + \langle B_{u_1}w_1 - B_{u_2}w_2, w\rangle\\
& +4\nu_r|w|^2 = 2\nu_r\langle \nabla \times u, w\rangle,\\
& u(0) = w(0) = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{2.69}
$$

Observação 2.2. *Notamos que*

$$
\begin{aligned}
\langle B_{u_1}u_1 - B_{u_2}u_2, u\rangle &= b(u, u_1, u),\\
\langle B_{u_1}w_1 - B_{u_2}w_2, w\rangle &= b(u, w_1, w).
\end{aligned} \tag{2.70}
$$

De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\langle B_{u_1}u_1 - B_{u_2}u_2, u\rangle &= \langle B_{u_1}u_1, u\rangle - \langle B_{u_2}u_2, u\rangle\\
&= b(u_1,u_1,u) - b(u_2,u_2,u) - b(u_2,u_1,u) + b(u_2,u_1,u)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= b(u,u_1,u)+b(u_2,u,u)\\
&= b(u,u_1,u).
\end{aligned}
$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
\langle B_{u_1}w_1 - B_{u_2}w_2, w\rangle &= \langle B_{u_1}w_1, w\rangle - \langle B_{u_2}w_2, w\rangle\\
&= b(u_1,w_1,w)-b(u_2,w_2,w)-b(u_2,w_1,w)+b(u_2,w_1,w)\\
&= b(u,w_1,w)+b(u_2,w,w)\\
&= b(u,w_1,w).
\end{aligned}
$$

Observação 2.3. *Também notamos que a monotonia de $\mathcal{K}$, nos permite escrever a seguinte desigualdade $\langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u\rangle \ \geq 0$.*

Usando as observações 2.2 e 2.3, obtemos de (2.69) o seguinte

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + b(u,u_1,u) \leq 2\nu_r \left\langle \nabla \times w, u\right\rangle,
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu_1\|w\|^2 + 4\nu_r|w|^2 + b(u,w_1,w) \leq 2\nu_r \left\langle \nabla \times u, w\right\rangle.
$$

Somando membro a membro as inequações acima concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right) + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + \nu_1\|w\|^2 + 4\nu_r|w|^2\\
&\leq 2\nu_r|w|\|u\| + 2\nu_r\|u\||w| + |b(u,u_1,u)| + |b(u,w_1,w)|.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Young temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right) + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + \nu_1\|w\|^2 + 4\nu_r|w|^2\\
&\leq 2\nu_r|w|^2 + \frac{\nu_r}{2}\|u\|^2 + \frac{\nu_r}{2}\|u\|^2 + 2\nu_r|w|^2 + |b(u,u_1,u)| + |b(u,w_1,w)|.
\end{aligned}
$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right)+\nu\|u\|^2+\nu_1\|w\|^2 \leq |b(u,u_1,u)|+|b(u,w_1,w)|. \tag{2.71}$$

Sendo $d=2$, temos $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$. Devido a definição da forma trilinear (2.3), as desigualdades de Hölder e Young e o Lema 1.4 obtemos

$$\begin{aligned}
|b(u,u_1,u)|+|b(u,w_1,w)| &\leq \|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|u_1\|+\|u\|_{L^4(\Omega)}\|w_1\|\|w\|_{L^4(\Omega)}\\
&\leq c\|u_1\||u|\|u\|+c\|w_1\||u|^{1/2}\|u\|^{1/2}|w|^{1/2}\|w\|^{1/2}\\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2+c_\nu\|u_1\|^2|u|^2+\sqrt{\nu}\|u\|\sqrt{2\nu_1}\|w\|+c|u||w|\|w_1\|^2\\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2+c_\nu\|u_1\|^2|u|^2+\frac{\nu}{2}\|u\|^2+\nu_1\|w\|^2\\
&+ c\|w_1\|^2|u|^2+c\|w_1\|^2|w|^2.
\end{aligned}$$

Daí e de (2.71) segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right)\leq c\left(\|u_1\|^2+\|w_1\|^2\right)\left(|u|^2+|w|^2\right).$$

Integrando essa inequação de 0 a t, com $0\leq t\leq T$, obtemos

$$|u(t)|^2+|w(t)|^2\leq c\int_0^t(\|u_1(s)\|^2+\|w_1(s)\|^2)(|u(s)|^2+|w(s)|^2)ds. \tag{2.72}$$

Finalmente, aplicando a desigualdade de Gronwall em (2.72), deduzimos, usando as estimativas (2.28) e (2.30), que

$$u_1(t)=u_2(t)\quad \text{e} \quad w_1(t)=w_2(t)\quad \forall t\in[0,T].$$

Concluímos assim a demonstração do teorema 2.2. $\square$

2.4 Regularidade de Soluções

Demonstração do Teorema 2.3.

Na demonstração do Teorema 2.3 vamos considerar o tensor de estresse $\tau:\mathbb{R}^{d^2}_{sym}\to\mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e seu correspondente potencial $\Phi:\mathbb{R}^{d^2}_{sym}\to\mathbb{R}$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\tau(D) &= M\left(|D|_E^2\right)D, \\
\Phi(D) &= \frac{1}{2}\int_0^{|D|_E^2} M(s)ds,
\end{aligned}
$$

já definidos no final do capítulo de preliminares em (1.10) e (1.11). Lembramos que τ e Φ satisfazem as hipóteses do Lema 1.2, conforme feito no apêndice A.

A seguir vamos obter uma estimativa para u_m'. Para isso, façamos $\varphi_r = u_m'$ no problema aproximado $(2.19)_1$, e apliquemos a desigualdade de Schwarz para obter

$$
\begin{aligned}
&|u_m'|^2 + (\nu+\nu_r)\int_\Omega e_{ij}(u_m)e_{ij}\left(u_m'\right)dx + \int_\Omega \tau_{ij}\left(e(u_m)\right)e_{ij}\left(u_m'\right)dx \\
&\leq \int_\Omega |u_{m_i}|\left|\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x_i}\right|\left|u_{m_j}'\right|dx + 2\nu_r\left|u_m'\right|\left|\nabla\times w_m\right| + |f|\left|u_m'\right|.
\end{aligned} \tag{2.73}
$$

Observação 2.4. *Devido a hipótese (1.4) do Lema 1.2, temos que*

$$
\int_\Omega \tau_{ij}\left(e(v)\right)e_{ij}\left(v'\right)dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \Phi\left(e(v)\right)dx. \tag{2.74}
$$

Agora, aplicamos a desigualdade de Young, a estimativa (2.30) e a observação (2.74) em (2.73) para obter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|u_m'\right|^2 + \frac{\nu+\nu_r}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |e(u_m)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega \Phi(e(u_m))dx \leq \\
c + c\int_\Omega |u_m|^2\left|\nabla u_m\right|^2dx.
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

Notamos que a estimativa (2.27) implica em $u_m(t)\in V_4 \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, pois $d\leq 3$. Por outro lado, (2.28) impica que $\nabla u_m(t)\in\mathbf{L}^2(\Omega)$. Portanto, aplicando a desigualdade de Hölder em (2.75), em seguida integrando sobre $(0,t)$, com $t\leq T$, e depois aplicando a desigualdade de Korn, obtemos

$$\int_0^t |u_m'(s)|^2\,ds + (\nu+\nu_r)K\|u_m\|^2 + 2\int_\Omega \Phi(e(u_m))dx$$
$$\le c + 2\int_\Omega \Phi\left(e(u_m(0))\right)dx + (\nu+\nu_r)K\|u_m(0)\|^2 \tag{2.76}$$
$$+c\int_0^t \|u_m(s)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\,\|u_m(s)\|^2\,ds.$$

Observamos que a estimativa (2.27) implica que $\|u_m(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \in L^2(0,T)$. Temos também $\|u_m(t)\|^2 \in L^2(0,T)$, devido a estimativa (2.28). Então usando a desigualdade de Hölder em (2.76), concluímos que

$$\int_0^t |u_m'(s)|^2 ds + (\nu+\nu_r)K\|u_m\|^2 + 2\int_\Omega \Phi(e(u_m))dx \le c, \tag{2.77}$$

pois $u_0 \in V \cap V_4$ e vale (1.8). Agora notamos que (1.8) e a desigualdade de Korn implicam que

$$2\int_\Omega \Phi(e(u_m))dx \overset{(1.8)}{\ge} C_3\|e(u_m)\|^4_{L^4(\Omega)} \overset{(1.3)}{\ge} C_3K\|u_m\|^4_{V_4}.$$

Logo obtemos de (2.77) que

$$\int_0^t |u_m'(s)|^2 ds + (\nu+\nu_r)K\|u_m\|^2 + C_3K\|u_m\|^4_{V_4} \le c, \tag{2.78}$$

A inequação (2.78) nos permite obter as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} &(u_m') \text{ é limitada em } L^2(I;H),\\ &(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(I;V),\\ &(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(I;V_4). \end{aligned} \tag{2.79}$$

Agora vamos obter uma estimativa para w_m'. Façamos $\phi_r = w_m'$ no problema aproximado $(2.19)_2$ para obter

$$|w_m'|^2 + \nu_1 \int_\Omega e_{ij}(w_m)e_{ij}(w_m')dx + 2\nu_r \frac{d}{dt}|w_m|^2$$

$$\leq \int_\Omega |u_{m_i}||\frac{\partial w_{m_j}}{\partial x_i}||w'_{m_j}|dx + 2\nu_r\|u_m\||w'_m| + |g||w'_m|.$$

Aplicando a desigualdade de Young e usando a estimativa (2.28) resulta

$$\frac{1}{2}|w'_m|^2 + \frac{\nu_1}{2}\frac{d}{dt}|e(w_m)|^2 + 2\nu_r\frac{d}{dt}|w_m|^2 \leq c + c\int_\Omega |u_m|^2|\nabla w_m|^2 dx. \tag{2.80}$$

Notamos que a estimativa (2.27) implica que $u_m(t) \in V_4 \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, pois $d \leq 3$. Por outro lado, (2.30) implica que $\nabla w_m(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Desse modo, aplicando a desigualdade de Hölder em (2.80), integrando sobre $(0,t)$, com $t \leq T$, e depois aplicando a desigualdade de Korn, obtemos

$$\int_0^t |w'_m(s)|^2 ds + \nu_1 K\|w_m\|^2 \leq c + c\int_0^t \|u_m(s)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|w_m(s)\|^2 ds, \tag{2.81}$$

pois $w_0 \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$. Notamos também que (2.27) implica que $\|u_m(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \in L^2(0,T)$ e (2.30) implica que $\|w_m(t)\| \in L^1(0,T)$. Portanto, usando a desigualdade de Hölder em (2.81) podemos concluir que

$$(w'_m) \quad \text{é limitada em } L^2(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{2.82}$$

$$(w_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{H}^1_0(\Omega)). \tag{2.83}$$

Por fim, vamos estabelecer a unicidade de soluções no caso em que $d = 3$. Primeiramente notamos que supondo $d = 3$, temos $H^1_0 \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Agora usamos o Lema 1.5 com $s = 4$, $r = 6$, bem como a desigualdade de Young para obter

$$\begin{aligned}
|b(u,u_1,u)| + |b(u,w_1,w)| &\leq c\|u\|_{L^6(\Omega)}\|u_1\||u|^{1/2}\|u\|^{1/2} \\
&+ c\|u\|_{L^6(\Omega)}\|w_1\||w|^{1/2}\|w\|^{1/2} \\
&\leq c\|u_1\||u|^{1/2}\|u\|^{3/2} + c\|w_1\||w|^{1/2}\|u\|\|w\|^{1/2} \\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|u_1\|^4|u|^2 + \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|w_1\|^2|w|\|w\| \\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|u_1\|^4|u|^2 + \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + \nu_1\|w\|^2 + c_{\nu_1}\|w_1\|^4|w|^2.
\end{aligned}$$

Segue da inequação (2.71) obtida na demonstração do teorema de unicidade que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + |w|^2\right) \leq c\left(\|u_1\|^4 + \|w_1\|^4\right)\left(|u|^2 + |w|^2\right).$$

Integrando de 0 a t obtemos

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq c\int_0^t \left(\|u_1(s)\|^4 + \|w_1(s)\|^4\right)(|u(s)|^2 + |w(s)|^2)ds. \tag{2.84}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (2.84), deduzimos, devido as estimativas (2.28) e (2.83), que

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{e} \quad w_1(t) = w_2(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{para } d = 3.$$

Com isso concluímos a demonstração do teorema 2.3. □

2.5 Existência de Soluções Periódicas

Demonstração do teorema 2.4.

Sabemos que o sistema aproximado (2.19) possui uma solução qualquer que seja o dado inicial $(u_m(0), w_m(0)) \in V_m \times W_m$. Com a finalidade de demonstrar o Teorema 2.4, primeiramente vamos mostrar que existe uma solução aproximada para o sistema (2.19), tal que

$$(u_m(0), w_m(0)) = (u_m(T), w_m(T)). \tag{2.85}$$

Tomemos $\varphi = u_m$ e $\phi = w_m$ em (2.19). Temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + (\nu + \nu_r)\|u_m\|^2 + \int_\Omega M(|e(u_m)|_E^2)|e_{ij}(u_m)|^2 dx \\ &\leq 2\nu_r |w_m|\|u_m\| + \|f\|_{V'}\ \|u_m\|, \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m|^2 + \nu_1\int_\Omega |e_{ij}(w_m)|^2 dx + 4\nu_r|w_m|^2 \\ &\leq 2\nu_r\|u_m\||w_m| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_m\|, \end{aligned} \tag{2.87}$$

visto que $b(u,u,u) = 0$ (veja *J. L. Lions* [12], [1969]), $|\nabla \times u_m| = |\nabla u_m| = \|u_m\|$ e $(\nabla \times w_m, u_m) = (w_m, \nabla \times u_m)$ (veja *G. Lukaszewicz* [6], [1999] p. 116). Agora, usando a hipótese (1.1) sobre a função M, a desigualdade de Korn (1.3) e o fato $L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos de (2.86) e (2.87), respectivamente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + (\nu + \nu_r)\|u_m\|^2 + M_0 K |e(u_m)|^2 \leq 2\nu_r |w_m|\|u_m\| + \|f\|_{V'}\|u_m\|, \tag{2.88}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m|^2 + \nu_1 K\|w_m\|^2 + 4\nu_r|w_m|^2 \leq 2\nu_r\|u_m\||w_m| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_m\|. \tag{2.89}$$

Após alguns cálculos obtemos de (2.88) e (2.89) a seguinte inequação

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m|^2 + |w_m|^2\right) + \nu\|u_m\|^2 + \nu_1 K\|w_m\|^2 \leq C\left(\|f\|_{V'}^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\right).$$

Considerando que $V \hookrightarrow H$ e $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, existe uma constante c_2 tal que

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m|^2 + |w_m|^2\right) + c_2|u_m|^2 + c_2|w_m|^2 \leq C\left(\|f\|_{V'}^2 + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\right).$$

Multiplicando essa inequação por $e^{c_2 t}$ e integrando sobre o intervalo $[0,t)$, obtemos

$$|u_m(t)|^2 + |w_m(t)|^2 \quad \leq \quad e^{-c_2 t}\left(|u_m(0)|^2 + |w_m(0)|^2\right) + C,$$

qualquer que seja $t \in [0,T]$. Tomando $\theta(t) = e^{-c_2 t}$, temos que $0 < \theta(t) < 1$. Portanto,

$$|u_m(T)|^2 + |w_m(T)|^2 \leq \theta\left(|u_m(0)|^2 + |w_m(0)|^2\right) + C, \tag{2.90}$$

em que $\theta = \theta(T)$ é uma constante positiva satisfazendo $0 < 1 - \theta < 1$. Segue que, $C < \dfrac{C}{1-\theta}$. Agora consideremos uma constante positiva $R > 0$, tal que $\dfrac{C}{1-\theta} < R^2$. Temos $C < (1-\theta)R^2$. Escolhendo o dado inicial $(u_m(0), w_m(0)) \in V_m \times W_m$, tal que

$$|u_m(0)|^2 < \frac{R^2}{2} \quad \text{e} \quad |w_m(0)|^2 < \frac{R^2}{2},$$

obtemos de (2.90)

$$|u_m(T)|^2 + |w_m(T)|^2 \leq \theta(|u_m(0)|^2 + |w_m(0)|^2) + C < \theta R^2 + (1-\theta)R^2 = R^2.$$

Portanto, $|u_m(0)|^2 + |w_m(0)|^2 < R^2$ implica em $|u_m(T)|^2 + |w_m(T)|^2 < R^2$.

A seguir, definimos $\sigma : \mathcal{B}_R(0) \cap (V_m \times W_m) \longrightarrow \mathcal{B}_R(0) \cap (V_m \times W_m)$, por

$$\sigma\left(u_m(0), w_m(0)\right) = \left(u_m(T), w_m(T)\right),$$

em que $\mathcal{B}_R(0) = \{(u,w) \in H \times \mathbf{L}^2(\Omega);\ \ |u|^2 + |w|^2 < R\}$. Notamos que σ é uma função contínua, pois a solução do sistema aproximado (2.19) depende continuamente dos dados iniciais. Também notamos que (2.90) implica que $\sigma(\mathcal{B}_R(0)) \subset \mathcal{B}_R(0)$. Portanto, obtemos do Teorema do ponto fixo de Brower que σ possui um ponto fixo

$$(u_{0m}, w_{0m}) \in \mathcal{B}_R(0) \subset V_m \times W_m.$$

Dito de outro modo, $\sigma(u_{0m}, w_{0m}) = (u_{0m}, w_{0m})$. Tomando o dado inicial (u_{0m}, w_{0m}) no sistema aproximado (2.19), isto é, $(u_m(0), w_m(0)) = (u_{0m}, w_{0m})$ obtemos

$$(u_m(0), w_m(0)) = (u_m(T), w_m(T)).$$

Portanto, (2.19) possui uma solução periódica para dados "pequenos"contidos na bola $\mathcal{B}_R(0) \subset V_m \times W_m$. A seguir, obtemos as estimativas para o sistema (2.19) com o dado inicial (u_{0m}, w_{0m}), do mesmo modo que foi feito na demonstração do Teorema 2.1. Segue-se que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4(I;V), \tag{2.91}$$

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4(I;V_4), \tag{2.92}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{fraco em } L^{\frac{4}{3}}(I;V'), \tag{2.93}$$

$$w_m \rightharpoonup w \quad \text{fraco em } L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \tag{2.94}$$

$$w'_m \rightharpoonup w' \quad \text{fraco em } L^2(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)), \tag{2.95}$$

em que (u, w) é uma solução do sistema (2.1) no sentido da definição 2.1. As convergências (2.91) e (2.93) nos permitem concluir que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_m(s), v)\,\theta(s)\right] ds \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(s), v)\,\theta(s)\right] ds, \tag{2.96}$$

$\forall v \in V$ e $\theta \in \mathcal{C}^1(0, T)$, com $\theta(T) = 0$. Daí concluímos que,

$$(u_m(0), v) \to (u(0), v),\ \forall v \in V. \tag{2.97}$$

Usando o mesmo argumento com $\theta \in \mathcal{C}^1(0, T)$ e $\theta(0) = 0$ concluímos que

$$(u_m(T), v) \to (u(T), v),\ \forall v \in V. \tag{2.98}$$

Segue das convergências (2.97) e (2.98) que $u(0) = u(T)$. De modo análogo, a partir de (2.94) e (2.95) obtemos

$$\begin{aligned} (w_m(0), \overline{v}) &\to (w(0), \overline{v}),\ \forall \overline{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ (w_m(T), \overline{v}) &\to (w(T), \overline{v}),\ \forall \overline{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2.99}$$

Portanto, $w(0) = w(T)$. Com isso concluímos a demonstração do teorema 2.4. $\square$

Capítulo 3

Sobre um Fluido Micropolar Fortemente Dilatante

Motivados pelos resultados obtidos com o sistema 2.1, consideraremos neste capítulo a análise do seguinte sistema

$$\left| \begin{array}{rcl} u' - \nabla \cdot [(\nu + \nu_r + M(|e(u)|_E^2))e(u)] + (u.\nabla)u & + & \nabla p \\ & = & 2\nu_r \nabla \times w + f \;\; \text{em } Q_T, \\ w' - \nu_1 \nabla \cdot [M(|e(w)|_E^2)e(w)] + (u.\nabla)w + 4\nu_r w & = & 2\nu_r \nabla \times u + g \;\; \text{em } Q_T, \\ \nabla \cdot u & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\ u & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ w & = & 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\ u(0) & = & u_0 \quad \text{em } \Omega, \\ w(0) & = & w_0 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

em que ν, ν_1 e ν_r são constantes positivas. Notamos que nesse sistema consideramos uma não-linearidade na segunda equação análoga ao tensor de estresse da primeira equação.

3.1 Definições e Resultados

Neste capítulo vamos considerar as mesmas formas $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e $b : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas no capítulo anterior em (2.2) e (2.3), respectivamente. Chamamos a atenção do leitor para as propriedades dessas formas dadas em (2.4) e (2.5). Também consideraremos

$$Au = -\Delta u, \quad B_u v = (u \cdot \nabla)v \quad \forall u, v \in V.$$

Assim como,

$$\mathcal{K}u = -\nabla \cdot M(|e(u)|_E^2)e(u) \quad \forall u \in V \cap V_4,$$

definido em (2.8). Notamos a validade de (2.9)-(2.11), bem como a monotonia de $\mathcal{K}$ conforme a observação 2.1. A seguir, definimos solução fraca para o sistema 3.1

Definição 3.1. *Sejam $u_0 \in H, w_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}(I, V')$ e $g \in \boldsymbol{L}^{4/3}(I; H^{-1}(\Omega))$. Uma solução fraca para o sistema (3.1) é um par de funções $\{u, w\}$, tal que*

$$\begin{aligned} u &\in L^4(I; V) \cap L^4(I; V_4) \cap L^\infty(I; H), \\ w &\in L^4\left(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^4\left(I; \boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes identidades

$$\left|\begin{aligned} &\int_0^T \langle u'(t), \varphi \rangle \, dt + (\nu + \nu_r) \int_0^T a(u(t), \varphi) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), \varphi) dt \\ &+ \int_{Q_T} M\left(|e(u(t))|_E^2\right) e_{ij}\left(u(t)\right) e_{ij}(\varphi) dx dt = 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times w(t), \varphi) dt \\ &+ \int_0^T (f(t), \varphi) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{V}), \\ &\int_0^T \langle w'(t), \phi \rangle \, dt + \nu_1 \int_{Q_T} M\left(|e(w(t))|_E^2\right) e_{ij}\left(w(t)\right) e_{ij}(\phi) dx dt \\ &+ \int_0^T b\left(u(t), w(t), \phi\right) dt + 4\nu_r \int_0^T (w(t), \phi) dt = 2\nu_r \int_0^T (\nabla \times u(t), \phi) dt \\ &+ \int_0^T (g(t), \phi) dt \quad \forall \phi \in \mathcal{D}\left(I; \mathcal{D}(\Omega)\right), \\ &u(0) = u_0, \quad w(0) = w_0. \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$

Usando os Lemas (1.1)-(1.5) obtivemos os seguintes resultados

Teorema 3.1. *Supondo que* $d \leq 4$*,* $u_0 \in H$*,* $w_0 \in L^2(\Omega)$*,* $f \in L^{4/3}(I;V')$ *e* $g \in L^{4/3}\left(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$*, existe uma solução fraca para o sistema (3.1) no sentido da Definição 3.1.*

Teorema 3.2. *Sob as mesmas condições do teorema 3.1, com* $d \leq 3$*, o sistema (3.1) possui uma única solução fraca, no sentido da Definição 3.1.*

Teorema 3.3. *Se* $d \leq 3$*,* $u_0 \in V \cap V_4$*,* $w_0 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \cap \boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)$ *e* $f, g \in L^2(Q_T)$*, então existe um par de funções* $\{u, w\}$*, solução fraca do sistema (3.1) no sentido da definição 3.1 satisfazendo as seguintes propriedades*

$$u \in L^\infty(I;V), \tag{3.3}$$

$$u \in L^\infty(I;V_4), \tag{3.4}$$

$$u' \in L^2(I;H), \tag{3.5}$$

$$w \in L^\infty\left(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right), \tag{3.6}$$

$$w \in L^\infty\left(I;\boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)\right), \tag{3.7}$$

$$w' \in L^2\left(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega)\right). \tag{3.8}$$

Teorema 3.4. *(Soluções Periódicas) Supondo que* $d \leq 4$*,* $u_0 \in H$*,* $w_0 \in L^2(\Omega)$*,* $f \in L^2(I;V')$ *e* $g \in L^2\left(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$*, existe um par de funções* (u, w) *tal que*

$$u \in L^4(I;V) \cap L^4(I;V_4) \cap L^\infty(I;H),$$

$$w \in L^4\left(I;\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^4\left(I;\boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I;\boldsymbol{L}^2(\Omega)\right),$$

satisfazendo

$$
\left|
\begin{array}{l}
(u'(t),\varphi) + (\nu+\nu_r)a(u(t),\varphi) + (\mathcal{K}u(t),\varphi) + (Bu(t),\varphi) \\
= 2\nu_r(\nabla \times w(t),\varphi) + (f(t),\varphi), \\
\\
(w'(t),\phi) + \nu_1\,(\mathcal{K}w(t),\phi) + (Bw(t),\phi) + 4\nu_r(w(t),\phi) \\
= 2\nu_r\,(\nabla \times u(t),\phi) + (g(t),\phi), \\
\\
u(0) = u(T), \quad w(0) = w(T), \\
\\
\forall \varphi \in \mathcal{V}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \\
\textit{no sentido de } \; D'(0,T).
\end{array}
\right. \tag{3.9}
$$

3.2 Existência de Soluções

Demonstração do Teorema 3.1.

Para mostrar a existência de soluções fracas para o sistema (3.1), usaremos o método de Faedo-Galerkin. Para isso, consideremos uma base de autovetores do operador de Stokes dada por $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset H$, bem como uma base de autovetores de Lamé dada por $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$. Sejam $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m] \subset H$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ e $W_m = [\phi_1, ..., \phi_m] \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{\phi_1, ..., \phi_m\}$. Consideremos agora o sistema aproximado, com $r = 1, ..., m$

$$
\left|
\begin{array}{l}
(u_m'(t),\varphi_r) + (\nu+\nu_r)(Au_m(t),\varphi_r) + (\mathcal{K}u_m(t),\varphi_r) + \langle B_{u_m}u_m(t),\varphi_r\rangle \\
= 2\nu_r(\nabla \times w_m(t),\varphi_r) + (f(t),\varphi_r), \\
\\
(w_m'(t),\phi_r) + \nu_1(\mathcal{K}w_m(t),\phi_r) + \langle B_{u_m}w_m(t),\phi_r\rangle + 4\nu_r(w_m(t),\phi_r) \\
= 2\nu_r(\nabla \times u_m(t),\phi_r) + (g(t),\phi_r), \\
\\
u_m(0) = u_{0m} \to u_0, \text{ forte em } \; V \cap V_4, \\
\\
w_m(0) = w_{0m} \to w_0, \text{ forte em } \; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega).
\end{array}
\right. \tag{3.10}
$$

Sabemos que (3.10) possui uma solução local (u_m, w_m), definida no intervalo $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$, em que

$$u_m(x,t) = \sum_{r=1}^{m} g_{rm}(t)\varphi_r(x) \quad \text{e} \quad w_m(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{rm}(t)\phi_r(x). \tag{3.11}$$

A primeira estimativa, feita a seguir, nos permite estender essa solução a todo intervalo $[0,T]$

Primeira Estimativa

Multiplicamos ambos os membros da equação $(3.10)_1$ por g_{r_m} e de $(3.10)_2$ por h_{r_m}. Em seguida somamos de $r=1$ até $r=m$ para obter

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + (\nu+\nu_r)\|u_m(t)\|^2 + \int_\Omega M\left(|e(u_m(t))|_E^2\right)|e_{ij}(u_m(t))|^2\,dx\\ &\leq 2\nu_r|w_m(t)|\|u_m(t)\| + \|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\|,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^2 + \nu_1\int_\Omega M\left(|e(w_m(t))|_E^2\right)|e_{ij}(w_m(t))|^2dx + 4\nu_r|w_m(t)|^2\\ &\leq 2\nu_r\|u_m(t)\||w_m(t)| + \|g(t)\|_{H^{-1}}\|w_m(t)\|,\end{aligned} \tag{3.13}$$

visto que $b(u,u,u) = b(u,w,w) = 0$, $\forall u(t) \in V$ e $\forall w(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (veja *J. L. Lions* [12], [1969]). Além disso, $|\nabla \times u_m| = |\nabla u_m| = \|u_m\|$ e $(\nabla \times w_m, u_m) = (w_m, \nabla \times u_m)$ (veja *G. Lukaszewicz* [6], [1999] p.116). Agora usamos a desigualdade de Young e obtemos de (3.12) e (3.13), respectivamente

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + (\nu+\nu_r)\|u_m(t)\|^2 + \nu_2\|u_m(t)\|^4 + \nu_3\|u_m\|_{V_4}^4\\ &\leq \frac{\nu_r}{2}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu_r|w_m(t)|^2 + \frac{\nu_2}{2}\|u_m(t)\|^4 + c_{\nu_2}\|f(t)\|_{V'}^{4/3},\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m(t)|^2 + \nu_4\|w_m(t)\|^4 + \nu_5\|w_m\|_{W_0^{1,4}(\Omega)}^4 + 4\nu_r|w_m(t)|^2\\ &\leq \frac{\nu_r}{2}\|u_m(t)\|^2 + 2\nu_r|w_m(t)|^2 + \frac{\nu_4}{2}\|w_m(t)\|^4 + c_{\nu_4}\|g(t)\|_{H^{-1}}^{4/3}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

De fato, devido a desigualdade de Korn (1.3), a imersão $L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a hipótese (1.1) sobre M, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(|e(u_m(t))|^2\right)|e_{ij}(u_m(t))|^2dx &\overset{(1.1)}{\geq} \frac{C_1}{2}\|e(u_m)\|^4_{L^4(\Omega)}\\
&\overset{(1.3)}{\geq} C|e(u_m)|^4\\
&\geq \nu_2\|u_m\|^4,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(|e(u_m(t))\,|^2\right)|e_{ij}(u_m(t))|^2\,dx \overset{(1.1)}{\geq} \nu_3\|u_m\|^4_{V_4}.
$$

De modo análogo obtemos

$$
\frac{\nu_1}{2}\int_\Omega M\left(|e(w_m(t))|^2\right)|e_{ij}(w_m(t))|^2dx \geq \nu_4\|w_m\|^4,
$$

$$
\frac{\nu_1}{2}\int_\Omega M\left(|e(w_m(t))\,|^2\right)|e_{ij}(w_m(t))|^2\,dx \geq \nu_5\|u_m\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)}.
$$

Somamos as inequações (3.14) e (3.15) e integramos de 0 a t, com $0 \leq t \leq T$, para concluir

$$
\begin{aligned}
&\left(|u_m(t)|^2 + |w_m(t)|^2\right) + \nu_2\int_0^t \|u_m(s)\|^4ds + 2\nu_3\int_0^t \|u_m(s)\|^4_{V_4}ds\\
&+\nu_4\int_0^t \|w_m(s)\|^4ds + 2\nu_5\int_0^t \|w_m(s)\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)}ds \leq C.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Portanto, seguem da inequação (3.16) as seguintes limitações

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;H), \tag{3.17}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^4(I;V), \tag{3.18}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^4\left(I;V_4\right), \tag{3.19}$$

$$(w_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.20}$$

$$(w_m) \quad \text{é limitada em } L^4\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right). \tag{3.21}$$

$$(w_m) \quad \text{é limitada em } L^4\left(I;\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right). \tag{3.22}$$

Segunda Estimativa

Sejam $P_m : V \to V_m$ a projeção ortogonal de V em V_m, dada por

$$P_m u = \sum_{j=1}^{m} (u, \varphi_j)\varphi_j,$$

assim como sua adjunta $P_m^* : V' \to V'$. Notamos que $P_m^* u_m' = u_m'$. Além disso, devido a escolha da base especial (φ_ν), temos que

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V,V)} \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \|P_m^*\|_{\mathcal{L}(V',V')} \leq 1. \tag{3.23}$$

No que segue, omitiremos o parâmetro t em alguns momentos. Segue de $(3.10)_1$, e das propriedades (2.9), (2.10) e (2.11)

$$u_m' = -(\nu + \nu_r) P_m^* A u_m - P_m^* \mathcal{K} u_m - P_m^* B_{u_m} u_m + 2\nu_r P_m^* \nabla \times w_m + P_m^* f. \tag{3.24}$$

Agora vamos limitar cada termo do segundo membro de (3.24). Primeiramente, da estimativa (3.18) obtemos

$$(A u_m) \text{ é limitada em } L^4(I; V') \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; (V \cap V_4)'\right). \tag{3.25}$$

Agora tomemos $u_m(t), v(t) \in V$. Devido a (2.11), a desigualdade de Hölder e a (3.19), obtemos do mesmo modo feito no capítulo anterior a seguinte estimativa

$$(\mathcal{K} u_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I; (V \cap V_4)'\right). \tag{3.26}$$

Supondo $d \leq 4$, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Consequentemente, tomando $u_m(t), v(t) \in V$, obtemos a partir da propriedade (2.10) e da desigualdade de Hölder

$$|\langle B_{u_m} u_m, v\rangle| \overset{(2.10)}{\leq} |b(u_m, u_m, v)| \leq \|u_m\|_{L^4(\Omega)} \|u_m\| \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u_m\|^2 \|v\|$$

Portanto, a estimativa (3.18) nos permite escrever

$$(B_{u_m} u_m) \text{ é limitada em } L^2\left(I; V'\right) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; (V \cap V_4)'\right). \tag{3.27}$$

Por outro lado, sejam $w_m(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, e $v(t) \in V$. Temos que

$$|\langle \nabla \times w_m, v\rangle| = |\langle w_m, \nabla \times v\rangle| \leq |w_m| \|v\| \leq c\|w_m\| \|v\|$$

(veja *G. Lukaszewicz* [6], [1999] p.116). Segue da limitação (3.21) que

$$(\nabla \times w_m) \text{ é limitada em } L^4(I;V') \hookrightarrow L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right). \tag{3.28}$$

As estimativas (3.25)-(3.28), (3.23), (3.24) e as hipóteses sobre f nos permitem concluir que

$$(u_m') \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right). \tag{3.29}$$

A seguir vamos considerar a projeção ortogonal $R_m : H_0^1(\Omega) \to W_m$ dada por

$$R_m w = \sum_{j=1}^{m} (w,\varphi_j)\varphi_j,$$

bem como sua adjunta $R_m^* : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Novamente temos que $R_m^* w_m' = w_m'$. Também notamos que a escolha da base especial (ϕ_ν), nos permite escrever

$$\|R_m\|_{\mathcal{L}\left(H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega)\right)} \leq 1 \quad \|R_m^*\|_{\mathcal{L}(H^{-1},H^{-1})} \leq 1. \tag{3.30}$$

Segue da equação $(3.10)_2$, bem como das propriedades (2.9), (2.10) e (2.11) que

$$w_m' = -\nu_1 R_m^* \mathcal{K} w_m - R_m^* B_{u_m} w_m - 4\nu_r R_m^* w_m + 2\nu_r R_m^* \nabla \times u_m + R_m^* g. \tag{3.31}$$

Para obter uma limitação de w_m', primeiro notamos que tomando $w_m(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, obtemos da desigualdade de Hölder e da propriedade (2.11) que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{K} w_m, v\rangle| &\leq C\int_\Omega (1+|\nabla w_m|_E)^3 \, |\nabla v|_E dx \\
&\leq \left(C + \|\nabla w_m\|_{L^4(\Omega)}^3\right) \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \left(C + \|w_m\|_{W_0^{1,4}(\Omega)}^3\right) \|v\|_{W_0^{1,4}(\Omega)} \\
&\leq \left(C + \|w_m\|_{W_0^{1,4}(\Omega)}^3\right) \|v\|_{H_0^1(\Omega)\cap W_0^{1,4}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Segue de (3.22) que

$$(\mathcal{K} w_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{3.32}$$

Como estamos supondo $d \leq 4$, temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Logo da propriedade (2.10) e da desigualdade de Hölder concluímos que

$$|\langle B_{u_m} w_m, v\rangle| \overset{(2.10)}{\leq} |b(u_m, w_m, v)| \leq \|u_m\|_{L^4(\Omega)} \|w_m\| \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u_m\| \|w_m\| \|v\|,$$

$\forall u_m(t) \in V, \ \ \forall w_m(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, de (3.18) e (3.21) obtemos

$$(B_{u_m} w_m) \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right) \hookrightarrow L^{4/3}\Big(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\Big). \tag{3.33}$$

Temos também, devido a (3.21) que

$$(w_m) \text{ é limitada em } L^4\left(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right) \hookrightarrow L^{4/3}\Big(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\Big). \tag{3.34}$$

Finalmente, de (3.18) concluímos que

$$(\nabla \times u_m) \text{ é limitada em } L^4\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^{4/3}\Big(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\Big). \tag{3.35}$$

Portanto, segue de (3.30)-(3.35), e das hipóteses sobre g que

$$(w_m') \text{ é limitada em } L^{4/3}\Big(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\Big). \tag{3.36}$$

As limitações (3.17)-(3.22), (3.29), (3.36) e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions implicam que existem subsequências de (u_m) e (w_m), as quais ainda denotamos por (u_m) e (w_m), tais que

$$u_m \to u \quad \text{forte em } L^2(I; H) \text{ e q. s. em } Q_T, \tag{3.37}$$

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(I; H), \tag{3.38}$$

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4(I; V), \tag{3.39}$$

$$u_m' \rightharpoonup u' \quad \text{fraco em } L^{4/3}\left(I; (V \cap V_4)'\right), \tag{3.40}$$

$$
\begin{aligned}
w_m &\rightarrow w && \text{forte em } L^2\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \text{ e q. s. em } Q_T, && (3.41)\\
w_m &\overset{*}{\rightharpoonup} w && \text{fraco estrela em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), && (3.42)\\
w_m &\rightharpoonup w && \text{fraco em } L^4\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right), && (3.43)\\
w_m' &\rightharpoonup w' && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right), && (3.44)\\
\mathcal{K}u_m &\rightharpoonup \chi && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;(V\cap V_4)'\right), && (3.45)\\
\mathcal{K}w_m &\rightharpoonup \xi && \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). && (3.46)
\end{aligned}
$$

Finalmente, notamos que faz sentido considerar $u(0)=u_0$ e $w(0)=w_0$, pois, (3.18), (3.29) implicam que $u\in C^0(I;\mathbf{H})$. Analogamente, (3.21) e (3.36) implicam que $w\in C^0\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. A seguir usaremos as convergências obtidas acima para obter (3.2).

Para provar que

$$\int_0^T b(u_m,u_m,\varphi) \longrightarrow \int_0^T b(u,u,\varphi), \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(I;\mathcal{V}), \tag{3.47}$$

$$\int_0^T b(u_m,w_m,\phi) \longrightarrow \int_0^T b(u,w,\phi), \quad \forall\phi\in\mathcal{D}\left(I;\mathcal{D}(\Omega)\right), \tag{3.48}$$

usamos (3.37) e (3.41) (de modo análogo ao que foi feito no capítulo anterior). A fim de mostrar que

$$\int_{Q_T} M(|e(u_m)|_E^2)e_{ij}(u_m)e_{ij}(\varphi)dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} M(|e(u)|_E^2)e_{ij}(u)e_{ij}(\varphi)dxdt, \tag{3.49}$$

usamos o Teorema da Convergência de Vitali (Lema 1.3) analogamente ao que foi feito no capítulo anterior. Assim obtemos $\chi=\mathcal{K}u$ em $L^{4/3}(I;(V\cap V_4)')$. De modo inteiramente análogo, e considerando (3.21) obtemos

$$\int_{Q_T} M(|e(w_m)|_E^2)e_{ij}(w_m)e_{ij}(\phi)dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} M(|e(w)|_E^2)e_{ij}(w)e_{ij}(\phi)dxdt. \tag{3.50}$$

Dito de outro modo, $\xi=\mathcal{K}w$ em $L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right)$. As convergências (3.37)-(3.50) nos permitem obter

$$u' + (\nu + \nu_r)Au + \mathcal{K}u + B_u u = 2\nu_r \nabla \times w + f \text{ em } L^{4/3}(I; (V \cap V_4)'), \tag{3.51}$$

$$w' + \nu_1 \mathcal{K}w + B_u w + 4\nu_r w = 2\nu_r \nabla \times u + g \text{ em } L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{3.52}$$

Isso conclui a demonstração do teorema 3.1. □

3.3 Unicidade de Solução

Demonstração do teorema 3.2.

Para demonstrar o teorema 3.2, tomemos (u_1, w_1) e (u_2, w_2) soluções fracas do sistema (3.1), no sentido da Definição 3.1. Temos que

$$\begin{aligned} u_1, u_2 &\in L^4(I; V) \cap L^4(I; V_4) \cap L^\infty(I; H), \\ w_1, w_2 &\in L^4\left(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^4\left(I; \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Sejam $u = u_1 - u_2$ e $w = w_1 - w_2$. Logo (u, w) é tal que

$$\left| \begin{aligned} & u' + (\nu + \nu_r)Au + (\mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2) + (B_{u_1}u_1 - B_{u_2}u_2) = 2\nu_r \nabla \times w, \\ & w' + \nu_1(\mathcal{K}w_1 - \mathcal{K}w_2) + (B_{u_1}w_1 - B_{u_2}w_2) + 4\nu_r w = 2\nu_r \nabla \times u, \\ & u(0) = w(0) = 0. \end{aligned} \right. \tag{3.53}$$

Com a primeira igualdade em $L^{4/3}(I; (V \cap V_4)')$, e a segunda em $L^{4/3}\left(I; (\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega))'\right)$. A seguir, tomamos as dualidades nas equações $(3.53)_1$ e $(3.53)_2$ com respeito a u e w, respectivamente. Isso faz sentido, pois $u \in L^4(I; V)$ e $w \in L^4(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$. Desse modo, obtemos

$$
\left|\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|u|^2 + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + \langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u\rangle + \langle B_{u_1}u_1 - B_{u_2}u_2, u\rangle \\
= 2\nu_r \left\langle \nabla \times w, u\right\rangle, \\
\\
\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w|^2 + \nu_1 \left\langle \mathcal{K}w_1 - \mathcal{K}w_2, w\right\rangle + \langle B_{u_1}w_1 - B_{u_2}w_2, w\rangle + 4\nu_r|w|^2 \\
= 2\nu_r \left\langle \nabla \times u, w\right\rangle, \\
\\
u(0) = w(0) = 0.
\end{array}\right. \tag{3.54}
$$

Observação 3.1. *Notamos que (veja a Observação 2.2).*

$$
\begin{aligned}
\langle B_{u_1}u_1 - B_{u_2}u_2, u\rangle &= b(u, u_1, u), \\
\langle B_{u_1}w_1 - B_{u_2}w_2, w\rangle &= b(u, w_1, w).
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Também notamos que devido a desigualdade (1.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u\rangle &\geq C\left|e(u_1) - e(u_2)\right|^2 \geq 0, \\
\langle \mathcal{K}w_1 - \mathcal{K}w_2, w\rangle &\geq C\left|e(w_1) - e(w_2)\right|^2 \geq C\|w\|^2.
\end{aligned}
$$

Segue-se que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + b(u(t), u_1(t), u(t)) &\leq 2\nu_r \left\langle \nabla \times w, u\right\rangle, \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + C\|w\|^2 + b(u(t), w_1(t), w(t)) + 4\nu_r|w|^2 &\leq 2\nu_r \left\langle \nabla \times u, w\right\rangle,
\end{aligned}
$$

Somando, membro a membro, as inequações acima, obtemos

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + |w|^2\right) + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + C\|w\|^2 + 4\nu_r|w|^2 \leq 2\nu_r|w|\|u\| + 2\nu_r\|u\||w|
$$

$$
+|b(u, u_1, u)| + |b(u, w_1, w)|.
$$

Agora devido a desigualdade de Young concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right)+\nu\|u\|^2+C\|w\|^2 \leq |b(u,u_1,u)|+|b(u,w_1,w)|. \tag{3.56}$$

Supondo $d=2$, temos que $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$. Usando o Lema 1.4, a propriedade (2.3) e as desigualdades de Hölder e de Young obtemos

$$\begin{aligned}
|b(u,u_1,u)|+|b(u,w_1,w)| &\leq \|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|u_1\|+\|u\|_{L^4(\Omega)}\|w_1\|\|w\|_{L^4(\Omega)}\\
&\leq c\|u_1\||u|\|u\|+c\|w_1\||u|^{1/2}\|u\|^{1/2}|w|^{1/2}\|w\|^{1/2}\\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2+c_\nu\|u_1\|^2|u|^2\\
&+ \sqrt{\nu}\|u\|\sqrt{2C}\|w\|+c|u||w|\|w_1\|^2\\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2+c_\nu\|u_1\|^2|u|^2+\frac{\nu}{2}\|u\|^2+C\|w\|^2\\
&+ c\|w_1\|^2|u|^2+c\|w_1\|^2|w|^2.
\end{aligned}$$

desse modo, concluímos de (3.56) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2\right)\leq c\left(\|u_1\|^2+\|w_1\|^2\right)\left(|u|^2+|w|^2\right).$$

Integrando de 0 a t temos

$$|u(t)|^2+|w(t)|^2\leq c\int_0^t(\|u_1(s)\|^2+\|w_1(s)\|^2)(|u(s)|^2+|w(s)|^2)ds. \tag{3.57}$$

Por fim, aplicamos a desigualdade de Gronwall em (3.57), para concluir, considerando (3.19) e (3.21), que

$$u_1(t)=u_2(t) \quad \text{e} \quad w_1(t)=w_2(t) \quad \forall t\in[0,T], \quad \text{no caso } d=2.$$

Supondo agora $d=3$ temos que $H_0^1\hookrightarrow L^6(\Omega)$. Usando o Lema (1.5) com $s=4$ e $r=6$, bem como a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
|b(u,u_1,u)|+|b(u,w_1,w)| &\leq c\|u\|_{L^6(\Omega)}\|u_1\||u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\\
&+ c\|u\|_{L^6(\Omega)}\|w_1\||w|^{1/2}\|w\|^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c\|u_1\||u|^{1/2}\|u\|^{3/2} + c\|w_1\||w|^{1/2}\|u\|\|w\|^{1/2} \\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|u_1\|^4|u|^2 + \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|w_1\|^2|w|\|w\| \\
&\leq \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c_\nu\|u_1\|^4|u|^2 + \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + C\|w\|^2 + c\|w_1\|^4|w|^2.
\end{aligned}
$$

Segue de (3.56) que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + |w|^2\right) \leq c\left(\|u_1\|^4 + \|w_1\|^4\right)\left(|u|^2 + |w|^2\right).
$$

Integrando de 0 a t obtemos

$$
|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq c\int_0^t (\|u_1(s)\|^4 + \|w_1(s)\|^4)(|u(s)|^2 + |w(s)|^2)ds. \tag{3.58}
$$

Agora aplicamos a desigualdade de Gronwall em (3.58), para deduzir, considerando as estimativas (3.18) e (3.21), que

$$
u_1(t) = u_2(t) \quad \text{e} \quad w_1(t) = w_2(t) \quad \forall t \in [0,T], \quad \text{no caso } d = 3.
$$

Desse modo, o Teorema 3.2 fica demonstrado. □

3.4 Regularidade de Soluções

Demonstração do teorema 3.3.

Para demonstrar (3.3)-(3.8) precisamos obter mais estimativas para u_m, u'_m, w_m e w'_m. Para esse propósito consideremos novamente o tensor de estresse $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \rightarrow \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e seu potencial $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \rightarrow \mathbb{R}$ conforme (1.10) e (1.11), respectivamente. Fazendo $\varphi_r = u'_m$ em $(3.10)_1$ e aplicando a desigualdade de Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
&|u'_m|^2 + (\nu + \nu_r)\int_\Omega e_{ij}(u_m)e_{ij}(u'_m)dx + \int_\Omega \tau_{ij}(e(u_m))e_{ij}(u'_m)dx \\
&\leq \int_\Omega |u_{m_i}|\left|\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x_i}\right||u'_{m_j}|dx + 2\nu_r|u'_m||\nabla \times w_m| + |f||u'_m|.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

Observação 3.2. *Lembramos que devido a (1.4) do Lema 1.2, temos*

$$\int_{\Omega} \tau_{ij}(e(v))e_{ij}(v')dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \Phi\left(e(v)\right) dx. \tag{3.60}$$

Aplicando a desigualdade de Young e usando a estimativa (3.21) em (3.59), resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u_m'|^2 + \frac{\nu+\nu_r}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|e(u_m)|^2dx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega}\Phi(e(u_m))dx \\ \leq c + c\int_{\Omega}|u_m|^2|\nabla u_m|^2dx. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Notamos que a estimativa (3.19) implica que $u_m(t) \in V_4 \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, pois $d \leq 3$. Notamos também que, (3.18) implica que $\nabla u_m(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Em seguida, aplicamos a desigualdade de Hölder em (3.61), integramos em $(0,t)$, com $t \leq T$, e aplicamos a desigualdade de Korn para obter

$$\begin{aligned} &\int_0^t |u_m'(s)|^2ds + (\nu+\nu_r)K\|u_m\|^2 + 2\int_{\Omega}\Phi\left(e(u_m)\right)dx \\ &\leq c + 2\int_{\Omega}\Phi\left(e(u_m(0))\right)dx + (\nu+\nu_r)K\|u_m(0)\|^2 \\ &+c\int_0^t \|u_m(s)\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u_m(s)\|^2ds. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Observamos que da estimativa (3.19), resulta que $\|u_m(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \in L^2(0,T)$. Por outro lado, a estimativa (3.18) implica que $\|u_m(t)\|^2 \in L^2(0,T)$. Então, aplicando a desigualdade de Hölder em (3.62) obtemos

$$\int_0^t |u_m'(s)|^2ds + (\nu+\nu_r)K\|u_m\|^2 + 2\int_{\Omega}\Phi(e(u_m))dx \leq c, \tag{3.63}$$

devido a propriedade (1.8) e a hipótese $u_0 \in V \cap V_4$. Notamos agora que (1.8) e a desigualdade de Korn implicam que

$$\int_{\Omega}\Phi\left(e(u_m)\right)dx \overset{(1.8)}{\geq} C_3\|e(u_m)\|^4_{L^4(\Omega)} \overset{(1.3)}{\geq} C_3K\|u_m\|^4_{V_4}. \tag{3.64}$$

Segue da estimativa (3.63) que

$$\int_0^t |u_m'(s)|^2 ds + \nu_1 K \|u_m\|^2 + C_3 K \|u_m\|_{V_4}^4 \le c, \tag{3.65}$$

Essa desigualdade nos permite obter as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} &(u_m') \text{ é limitada em } L^2(I;H), \\ &(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(I;V), \\ &(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(I;V_4). \end{aligned} \tag{3.66}$$

As estimativas (3.66) asseguram a validade de (3.3)-(3.5). Agora tomemos $\phi_r = w_m'$ em $(3.10)_2$ para obter

$$\begin{aligned} &|w_m'|^2 + \nu_1 \int_\Omega \tau_{ij}(e(w_m)) e_{ij}(w_m') dx + 2\nu_r \frac{d}{dt} |w_m|^2 \\ &\le \int_\Omega |u_{m_i}|| \frac{\partial w_{m_j}}{\partial x_i} || w_{m_j}' | dx + 2\nu_r |\nabla \times u_m || w_m'| + |g||w_m'|. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Aplicando em (3.67) a Desigualdade de Young, a Observação 3.2 e a estimativa (3.18), obtemos

$$\frac{1}{2}|w_m'|^2 + \nu_1 \frac{d}{dt} \int_\Omega \Phi(e(w_m)) dx + 2\nu_r \frac{d}{dt} |w_m|^2 \le c + c \int_\Omega |u_m|^2 |\nabla w_m|^2 dx. \tag{3.68}$$

Notamos que (3.19) implica que $u_m(t) \in V_4 \hookrightarrow \mathbf{L}^\infty(\Omega)$, pois estamos supondo $d \le 3$. Em vista da estimativa (3.21), temos também $\nabla w_m(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Desse modo, segue de (3.68) após aplicar a desigualdade de Hölder, integrar em $(0,t)$, com $t \le T$, e usar a desigualdade de Korn que

$$\begin{aligned} &\int_0^t |w_m'(s)|^2 ds + 2\nu_1 \int_\Omega \Phi(e(w_m)) dx + 4\nu_r |w_m|^2 \\ &\le c + 2\nu_1 \int_\Omega \Phi(e(w_m(0))) dx + 4\nu_r |w_m(0)|^2 \\ &+ c \int_0^t \|u_m(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|w_m(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Notamos que $\|u_m(t)\|^2_{L^\infty(\Omega)} \in L^2(0,T)$, pois vale (3.19). Mais ainda, temos $\|w_m(t)\|^2 \in L^2(0,T)$, devido a (3.21). Agora aplicamos a desigualdade de Hölder em (3.69) para concluir

$$\int_0^t |w_m'(s)|^2 ds + 2\nu_1 \int_\Omega \Phi(e(w_m))dx + 4\nu_r |w_m|^2 \leq c, \tag{3.70}$$

pois vale a propriedade (1.8) e estamos supondo $w_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)$. Finalmente, notamos que (1.8), a imersão $L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a desigualdade de Korn implicam que

$$\int_\Omega \Phi(e(w_m))dx \overset{(1.8)}{\geq} C_3 \|e(w_m)\|^4_{L^4(\Omega)} \overset{(1.3)}{\geq} C_3 K \|w_m\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)}$$

$$\int_\Omega \Phi(e(w_m))dx \overset{(1.8)}{\geq} C_3 \|e(w_m)\|^4_{L^4(\Omega)} \geq C_4 |e(w_m)|^4 \overset{(1.3)}{\geq} C_4 K \|w_m\|^4$$

Desse modo, obtemos de (3.70) o seguinte

$$\int_0^t |w_m'(s)|^2 ds + C_4 K \|w_m\|^4 + C_3 K \|w_m\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)} \leq c, \tag{3.71}$$

A desigualdade (3.71) nos fornece as seguintes estimativas

$$(w_m') \text{ é limitada em } L^2\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.72}$$

$$(w_m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right), \tag{3.73}$$

$$(w_m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(I; \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \tag{3.74}$$

As estimativas (3.72)-(3.74) garantem a validade de (3.6)-(3.8). Concluímos assim a demonstração do Teorema 3.3. □

3.5 Soluções Periódicas

Demonstração do teorema 3.4.

Consideremos o sistema aproximado (3.10). Sabemos que esse sistema possui uma única solução local, qualquer que seja o dado inicial $(u_m(0), w_m(0)) \in V_m \times W_m$.

Mostraremos primeiro que o sistema aproximado (3.10) possui uma solução local $(u_m(t), w_m(t))$ periódica, ou seja,

$$(u_m(0), w_m(0)) = (u_m(T), w_m(T)) \,. \tag{3.75}$$

Para isso, façamos $\varphi = u_m$ e $\phi = w_m$ em (3.10) para obter

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + (\nu + \nu_r)\|u_m\|^2 + \int_\Omega M\left(|e(u_m)|_E^2\right)|e_{ij}(u_m)|^2 dx \\ &\leq 2\nu_r|w_m|\|u_m\| + \|f\|_{V'}\|u_m\|,\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m|^2 + \nu_1\int_\Omega M\left(|e(w_m)|_E^2\right)|e_{ij}(w_m)|^2 dx + 4\nu_r|w_m|^2 \\ &\leq 2\nu_r\|u_m\||w_m| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_m\|,\end{aligned} \tag{3.77}$$

visto que $b(u,u,u) = b(u,w,w) = 0$, $\forall u(t) \in V$, $\forall w(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (veja *J. L. Lions* [12], [1969]). Além disso, $|\nabla \times u_m| = |\nabla u_m| = \|u_m\|$ e $(\nabla \times w_m, u_m) = (w_m, \nabla \times u_m)$ (veja *G. Lukaszewicz*, [6] p. 116). Devido a (1.1), a imersão $L^4(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a desigualdade de Korn (1.3), obtemos de (3.76) e (3.77), respectivamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + (\nu + \nu_r)\|u_m\|^2 + M_0K\|u_m\|^2 &\leq 2\nu_r|w_m|\|u_m\| + \|f\|_{V'}\|u_m\|,\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m|^2 + \nu_1 M_0 K\|w_m\|^2 + 4\nu_r|w_m|^2 &\leq 2\nu_r\|u_m\||w_m| + \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_m\|.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + (\nu + \nu_r)\|u_m\|^2 &+ M_0K\|u_m\|^2 \\ &\leq \frac{\nu_r}{2}\|u_m\|^2 + 2\nu_r|w_m|^2 + M_0K\|u_m\|^2 + c\|f\|_{V'}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_m|^2 + \nu_1 M_0K\|w_m\|^2 &+ 4\nu_r|w_m|^2 \\ &\leq \frac{\nu_r}{2}\|u_m\|^2 + 2\nu_r|w_m|^2 + \frac{\nu_1 M_0 K}{2}\|w_m\|^2 + c\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Somando essas inequações concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m|^2+|w_m|^2\right)+2\nu\|u_m\|^2+\nu_1 M_0 K\|w_m\|^2\le C\left(\|f\|_{V'}^2+\|g\|_{H^{-1}}^2\right).$$

Considerando que $V\hookrightarrow H$ e $\mathbf{H}_0^1(\Omega)\hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, existe uma constante c_3 tal que

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m|^2+|w_m|^2\right)+c_3|u_m|^2+c_3|w_m|^2\le C\left(\|f\|_{V'}^2+\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\right). \tag{3.78}$$

Multiplicando essa desigualdade por $e^{c_3 t}$ e em seguida integrando em $[0,t)$, obtemos

$$|u_m(t)|^2+|w_m(t)|^2\le e^{-c_3 t}\left(|u_m(0)|^2+|w_m(0)|^2\right)+C, \tag{3.79}$$

qualquer que seja $t\in[0,T]$. Agora consideremos $\theta(t)=e^{-c_3 t}$. Notamos que vale $0<\theta(t)<1$. Logo

$$|u_m(T)|^2+|w_m(T)|^2\le \theta\left(|u_m(0)|^2+|w_m(0)|^2\right)+C, \tag{3.80}$$

em que $\theta=\theta(T)$ é uma constante positiva, tal que $0<1-\theta<1$. Segue-se que, $C<\dfrac{C}{1-\theta}$. Tomando $R>0$, tal que $\dfrac{C}{1-\theta}<R^2$ obtemos $C<(1-\theta)R^2$. Portanto, escolhendo um dado inicial $(u_m(0),w_m(0))\in V_m\times W_m$, com a propriedade

$$|u_m(0)|^2<\frac{R^2}{2}\ \text{ e }\ |w_m(0)|^2<\frac{R^2}{2},$$

obtemos de (3.80) que

$$|u_m(T)|^2+|w_m(T)|^2\le\theta\left(|u_m(0)|^2+|w_m(0)|^2\right)+C<\theta R^2+(1-\theta)R^2=R^2.$$

Concluímos que, $|u_m(0)|^2+|w_m(0)|^2<R^2$ implica em $|u_m(T)|^2+|w_m(T)|^2<R^2$. A seguir, definimos uma aplicação $\sigma:\mathcal{B}_R(0)\cap(V_m\times W_m)\longrightarrow\mathcal{B}_R(0)\cap(V_m\times W_m)$, tal que

$$\sigma\left(u_m(0),w_m(0)\right)=\left(u_m(T),w_m(T)\right).$$

em que $\mathcal{B}_R(0) = \{(u, w) \in H \times \mathbf{L}^2(\Omega);\ |u|^2 + |w|^2 < R\}$. Notamos que σ é contínua, pois a solução do problema aproximado (3.10) depende continuamente dos dados iniciais. Também notamos que (3.80) implica que $\sigma\left(\mathcal{B}_R(0)\right) \subset \mathcal{B}_R(0)$. Desse modo, obtemos do teorema do ponto fixo de Brower que σ tem um ponto fixo

$$(u_{0m}, w_{0m}) \in \mathcal{B}_R(0) \subset V_m \times W_m.$$

Em outras palavras, $\sigma(u_{0m}, w_{0m}) = (u_{0m}, w_{0m})$. Tomando o dado inicial (u_{0m}, w_{0m}) em (3.10), ou seja, $(u_m(0), w_m(0)) = (u_{0m}, w_{0m})$ obtemos

$$(u_m(0), w_m(0)) = (u_m(T), w_m(T)).$$

Isso mostra que o problema aproximado (3.10) tem uma solução periódica para dados pequenos. Em seguida, fazemos estimativas para o sistema (3.10) com o referido dado inicial (u_{0m}, w_{0m}) e, obtemos de forma análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.1 que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4(I; V), \tag{3.81}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{fraco em } L^{4/3}\left(I; (V \cap V_4)'\right), \tag{3.82}$$

$$w_m \rightharpoonup w \quad \text{fraco em } L^4\left(I; \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right), \tag{3.83}$$

$$w'_m \rightharpoonup w' \quad \text{fraco em } L^{4/3}\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{3.84}$$

em que u é uma solução do sistema (3.1) no sentido da definição 3.1. As convergências (3.81) e (3.82) nos permitem escrever

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_m(s), v)\,\theta(s)\right] ds \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(s), v)\,\theta(s)\right] ds, \tag{3.85}$$

$\forall v(t) \in V$, $\theta \in C^1(0,T)$, com $\theta(T) = 0$. Em outras palavras,

$$(u_m(0), v) \to (u(0), v),\ \forall v \in V, \tag{3.86}$$

Usando o mesmo argumento, dessa vez com $\theta \in C^1(0,T)$ e $\theta(0) = 0$ obtemos

$$(u_m(T), v) \to (u(T), v),\ \forall v \in V. \tag{3.87}$$

Segue de (3.86) e (3.87) que $u(0) = u(T)$. Analogamente e usando (3.83) e (3.84) obtemos

$$\begin{aligned} &(w_m(0), \overline{v}) \to (w(0), \overline{v}), \ \forall \overline{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ &(w_m(T), \overline{v}) \to (w(T), \overline{v}), \ \forall \overline{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega). \end{aligned} \tag{3.88}$$

Portanto, $w(0) = w(T)$. Isso conclui essa demonstração. $\square$

Capítulo 4

Existência de Soluções via Cauchy-Kowaleska

Neste capítulo estudaremos novamente o sistema (2.1) já discutido no segundo capítulo. Nosso objetivo é estabelecer a existência de soluções para esse sistema aproximando-o por um sistema do tipo Cauchy-Kowaleska. De um modo mais preciso, vamos considerar o seguinte sistema

$$
\left|\begin{array}{rcl}
u'_\epsilon - \nabla\cdot[(\nu+\nu_r+M(|e(u_\epsilon)|_E^2))\,e(u_\epsilon)] & + & (u_\epsilon\cdot\nabla)u_\epsilon + \frac{1}{2}(\nabla\cdot u_\epsilon)u_\epsilon + \nabla p_\epsilon \\
 & = & 2\nu_r\nabla\times w_\epsilon + f \quad \text{em } Q_T, \\
w'_\epsilon - \nu_1\nabla\cdot(e(w_\epsilon)) + (u_\epsilon\cdot\nabla)w_\epsilon & + & \frac{1}{2}(\nabla\cdot u_\epsilon)w_\epsilon + 4\nu_r w_\epsilon \\
 & = & 2\nu_r\nabla\times u_\epsilon + g \ \text{ em } Q_T, \\
\epsilon p'_\epsilon + \nabla\cdot u_\epsilon & = & 0 \quad \text{em } Q_T, \\
u_\epsilon & = & w_\epsilon = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_T, \\
u_\epsilon(0) & = & u_{\epsilon 0} \quad \text{em } \Omega, \\
w_\epsilon(0) & = & w_{\epsilon 0} \quad \text{em } \Omega, \\
p_\epsilon(0) & = & p_{\epsilon 0} \quad \text{em } L^2(\Omega),
\end{array}\right. \tag{4.1}
$$

Empregando o método de Faedo-Galerking, mostramos que o sistema (4.1) possui uma solução fraca $\{u_\epsilon, w_\epsilon, p_\epsilon\}$, para cada $\epsilon > 0$ (em um sentido a ser definido). Quando fazemos $\epsilon \to 0$, essa solução converge para uma solução fraca do problema

(2.1) (em um sentido a ser definido).

A principal vantagem desse método é que os resultados são obtidos sobre os espaços $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, mais gerais que àqueles obtidos no segundo capítulo.

4.1 Definições e Resultados

Começamos essa seção advertindo o leitor para o fato de que nesse capítulo não trabalharemos com o espaço V, considerado nos capítulos anteriores. Aqui tudo ocorre nos espaços $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, bem como em seus análogos vetoriais. Posto isso, e, para evitar confusão, consideremos as formas bilinear e trilinear $a_1 : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $b_1 : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dadas, respectivamente por

$$a_1(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,dx, \tag{4.2}$$

$$b_1(u,v,w) = \int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx. \tag{4.3}$$

Além dessas, também vamos considerar as seguintes formas trilineares

$$\overline{b}(u,v,w) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_i(x)(\nabla\cdot v(x))w_i(x)\,dx \quad \forall\, u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{4.4}$$

$$\widetilde{b}(u,v,w) = b_1(u,v,w) + \overline{b}(v,u,w) \qquad \forall\, u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{4.5}$$

Introduzimos também as seguintes notações

$$\overline{B}_u v = \frac{1}{2}(\nabla\cdot u)v, \quad \widetilde{B}_u v = B_u v + \overline{B}_u v \quad \forall u,v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Relembramos as notações $Au = -\Delta u$, $B_u v = (u\cdot\nabla)v$ já usadas anteriormente, e definimos o operador $\mathcal{K}_1 : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ usando a mesma expressão dada no segundo capítulo em (2.8), qual seja:

$$\mathcal{K}_1 u = -\nabla\cdot M\left(|e(u)|_E^2\right)e(u)$$

Notamos a validade das propriedades (2.9)-(2.11), bem como a monotonia de $\mathcal{K}_1$ conforme a observação 2.1. Além disso, temos

$$\langle \overline{B}_u v, w\rangle = \overline{b}(v,u,w) \qquad \forall u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{4.6}$$

Observação 4.1. *Notamos que* $\widetilde{b}(u,v,v) = 0$, $\forall u, v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

De fato, $\forall u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ temos que

$$b_1(u,v,w) = \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx = -\int_\Omega v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} w_i dx - \int_\Omega v_i \frac{\partial w_i}{\partial x_j} u_j dx.$$

Dito de outro modo,

$$b_1(u,v,w) = -2\overline{b}(v,u,w) - b_1(u,w,v) \quad \forall u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{4.7}$$

Fazendo $w = v$ nessa última expressão obtemos $b_1(u,v,v) = -2\overline{b}(v,u,v) - b_1(u,v,v)$. Segue-se que $b_1(u,v,v) = -\overline{b}(v,u,v)$, $\quad \forall u,v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, quaisquer que sejam $u,v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, temos

$$\widetilde{b}(u,v,v) = b_1(u,v,v) + \overline{b}(v,u,v) = -\overline{b}(v,u,v) + \overline{b}(v,u,v) = 0$$

□

A desigualdade a seguir será de fundamental importância e pode ser obtida sem dificuldade usando a definição dada em (4.5) e a igualdade (4.7) obtida na observação acima.

Observação 4.2. *Quaisquer que sejam* $u,v,w \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, *temos que*

$$|\widetilde{b}(u,w,v)| \le |b_1(u,v,w)| + |\overline{b}(v,u,w)|.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |\widetilde{b}(u,w,v)| &\overset{(4.5)}{=} |b_1(u,w,v) + \overline{b}(w,u,v)| \\ &\overset{(4.7)}{\le} |-2\overline{b}(w,u,v) - b_1(u,v,w) + \overline{b}(w,u,v)| \\ &= |b_1(u,v,w)| + |\overline{b}(w,u,v)| \\ &= |b_1(u,v,w)| + |\overline{b}(v,u,w)|. \end{aligned}$$

A seguir, definimos o sentido de solução fraca que vamos considerar nesse capítulo para os sistemas (2.1) e (4.1).

Definição 4.1. *Sejam* $u_0, w_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ *e* $g \in L^2\left(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$. *Uma solução fraca para o sistema (2.1) é um par de funções* $\{u, w\}$ *tal que*

$$
\begin{array}{rcl}
u & \in & L^4\left(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^4\left(I; \boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), \\
w & \in & L^2\left(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right),
\end{array}
$$

satisfazendo as seguintes identidades

$$
\left|\begin{array}{l}
(u'(t), v) + (\nu + \nu_r)a_1\left(u(t), v\right) + \langle \mathcal{K}_1 u(t), v\rangle + \langle B_u u(t), v\rangle \\
= 2\nu_r(\nabla \times w(t), v) + \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\
\\
(w'(t), z) - \nu_1(\nabla \cdot e(w(t)), z) + \langle B_u w(t), z\rangle + 4\nu_r(w(t), z) \\
= 2\nu_r(\nabla \times u(t), z) + \langle g(t), z\rangle \quad \forall z \in \mathcal{D}(\Omega) \\
\\
\nabla \cdot u = 0, \\
\\
u(0) = u_0, \;\; w(0) = w_0.
\end{array}\right. \tag{4.8}
$$

Definição 4.2. *Sejam* $u_{\epsilon 0}, w_{\epsilon 0} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $p_{\epsilon 0} \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ *e* $g \in L^2(I; H^{-1}(\Omega))$. *Uma solução fraca para o sistema (4.1) é uma terna de funções* $u_\epsilon, w_\epsilon, p_\epsilon$, *tal que*

$$
\begin{array}{rcl}
u_\epsilon & \in & L^4\left(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^4\left(I; \boldsymbol{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), \\
w_\epsilon & \in & L^2\left(I; \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)\right), \\
p_\epsilon & \in & L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right),
\end{array}
$$

satisfazendo as seguintes identidades

$$
\left|
\begin{array}{l}
(u'_\epsilon(t), v) + (\nu + \nu_r) a_1(u_\epsilon(t), v) + \langle \mathcal{K}_1 u_\epsilon(t), v\rangle + \langle \widetilde{B}_{u_\epsilon} u_\epsilon(t), v\rangle + (\nabla p_\epsilon(t), v) \\
= 2\nu_r \langle \nabla \times w_\epsilon(t), v\rangle + \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \\
\\
(w'_\epsilon(t), z) - \nu_1(\nabla \cdot e(w_\epsilon)(t), z) + \langle \widetilde{B}_{u_\epsilon} w_\epsilon(t), z\rangle + 4\nu_r(w_\epsilon, z) \\
= 2\nu_r \langle \nabla \times u_\epsilon(t), z\rangle + \langle g(t), z\rangle \quad \forall z \in \mathcal{D}(\Omega), \\
\\
\epsilon(p'_\epsilon(t), q) + (\nabla \cdot u_\epsilon(t), q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{D}(\Omega), \\
\\
u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}, \\
\\
w_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}, \\
\\
p_\epsilon(0) = p_{\epsilon 0}.
\end{array}
\right. \tag{4.9}
$$

Nosso objetivo é demonstrar os seguintes resultados.

Teorema 4.1. *Se $d \leq 3$, $u_0, w_0 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ e $g \in L^2\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$, então existe uma solução fraca para o sistema (2.1) no sentido da definição 4.1.*

Teorema 4.2. *Se $d \leq 3$, $u_{\epsilon 0}, w_{\epsilon 0} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $p_{\epsilon 0} \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{4/3}\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$ e $g \in L^2\left(I; \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\right)$, então para cada $\epsilon > 0$, existe uma solução fraca para o sistema (4.1) no sentido da definição 4.2, dada por $\{u_\epsilon, w_\epsilon, p_\epsilon\}$. Além disso, se $d = 2$, essa solução é única.*

4.2 Soluções Para o Problema Penalizado

Demonstração do teorema 4.2.

Empregamos o método de Faedo-Galerkin. Sejam $\{\varphi_\nu, \lambda_\nu\}$ e $\{q_\nu, \overline{\lambda_\nu}\}$, $\nu \in \mathbb{N}$ soluções do seguinte problema espectral

$$
\left|
\begin{array}{lcl}
((\varphi, v)) & = & \lambda(\varphi, v) \quad \forall v \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\
\\
((q, \overline{v})) & = & \overline{\lambda}(q, \overline{v}) \quad \forall \overline{v} \in L^2(\Omega).
\end{array}
\right. \tag{4.10}
$$

Consideremos $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m] \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ e $W_m = [q_1, ..., q_m] \subset L^2(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{q_1, ..., q_m\}$. Seja também o seguinte problema aproximado, com $r = 1, ..., m$

$$\left| \begin{array}{l} (u'_{\epsilon m}(t), \varphi_r) + (\nu + \nu_r)(Au_{\epsilon m}(t), \varphi_r) + (\mathcal{K}_1 u_{\epsilon m}(t), \varphi_r) + \langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}(t), \varphi_r \rangle \\ +(\nabla p_{\epsilon m}, \varphi_r) = 2\nu_r(\nabla \times w_{\epsilon m}(t), \varphi_r) + (f(t), \varphi_r), \\ \\ (w'_{\epsilon m}(t), \varphi_r) - \nu_1(\nabla \cdot e(w_{\epsilon m}(t)), \varphi_r) + \langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}(t), \varphi_r \rangle \\ +4\nu_r(w_{\epsilon m}(t), \varphi_r) = 2\nu_r(\nabla \times u_{\epsilon m}(t), \varphi_r) + (g(t), \varphi_r) \\ \\ \epsilon(p'_{\epsilon m}(t), q_r) + (\nabla \cdot u_{\epsilon m}(t), q_r) = 0, \\ \\ u_{\epsilon m}(0) = u_{\epsilon 0 m} \to u_{\epsilon 0}, \quad \text{forte em} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \\ w_{\epsilon m}(0) = w_{\epsilon 0 m} \to w_{\epsilon 0}, \quad \text{forte em} \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \\ p_{\epsilon m}(0) = p_{\epsilon 0 m} \to p_{\epsilon 0}, \quad \text{forte em} \quad L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{4.11}$$

Sabemos que o sistema de equações diferenciais e ordinárias (4.11) possui uma solução local no intervalo $[0, t_m[$, $0 < t_m < T$ dada pela terna $\{u_{\epsilon m}, w_{\epsilon m}, p_{\epsilon m}\}$, em que

$$u_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} \overline{f}r_{\epsilon m}(t)\varphi_r(x), \quad w_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} \overline{g}_{r\epsilon m}(t)\varphi_r(x), \tag{4.12}$$

$$p_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{r\epsilon m}(t) q_r(x), \tag{4.13}$$

A primeira estimativa a seguir nos permitirá estender essa solução a todo o intervalo $[0, T]$.

Primeira Estimativa

Por simplicidade de escrita vamos omitir o parâmetro t em algumas expressões. Começamos multiplicando ambos os lados das igualdades $(4.11)_1$, $(4.11)_2$ e $(4.11)_3$ por $\overline{f}_{r_{\epsilon m}}$, $\overline{g}_{r_{\epsilon m}}$ e $h_{r_{\epsilon m}}$, respectivamente. Em seguida somamos de $r = 1$ até $r = m$ para obter

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2+(\nu+\nu_r)\|u_{\epsilon m}(t)\|^2+\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m}(t))|_E)^2|e_{ij}(u_{\epsilon m}(t))|^2dx\\&-(p_{\epsilon m}(t),\nabla\cdot u_{\epsilon m}(t))\leq 2\nu_r|w_{\epsilon m}(t)|\|u_{\epsilon m}(t)\|+\|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_{\epsilon m}(t)\|,\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_{\epsilon m}(t)|^2+\nu_1\|w_{\epsilon m}(t)\|^2+\nu_1|\nabla\cdot w_{\epsilon m}(t)|^2+4\nu_r|w_{\epsilon m}(t)|^2\\&\leq 2\nu_r\|u_{\epsilon m}(t)\||w_{\epsilon m}(t)|+\|g(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w_{\epsilon m}(t)\|,\end{aligned}\tag{4.15}$$

$$\epsilon\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p_{\epsilon m}(t)|^2+(\nabla\cdot u_{\epsilon m}(t),p_{\epsilon m}(t))=0,\tag{4.16}$$

pois, $\widetilde{b}(u,v,v)=0,\ \forall u,v\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (veja a observação 4.1). Além disso, $|\nabla\times u_{\epsilon m}|\leq c\|u_{\epsilon m}\|$ e $(\nabla\times w_{\epsilon m},u_{\epsilon m})=(w_{\epsilon m},\nabla\times u_{\epsilon m})$ (veja *G. Lukaszewicz* [6], [1999] p. 116). Agora notamos que devido a desigualdade de Korn (1.3), a imersão $L^4(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ e a propriedade (1.1), temos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2)|e_{ij}(u_{\epsilon m})|^2dx\overset{(1.1)}{\geq}\frac{C_1}{2}\|e(u_{\epsilon m})\|^4_{L^4(\Omega)}\overset{(1.3)}{\geq}\frac{C_1K}{2}\|u_{\epsilon m}\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)},$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega M\left(|e(u_{\epsilon m})|_E\right)^2|e_{ij}(u_{\epsilon m})|^2dx\overset{(1.1)}{\geq}\frac{C_1}{2}\|e(u_{\epsilon m})\|^4_{L^4(\Omega)}\geq C|e(u_{\epsilon m})|^4\overset{(1.3)}{\geq}\nu_2\|u_{\epsilon m}\|^4.$$

Segue-se dessa observação e da desigualdade de Young aplicada a (4.14) a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}|^2+(\nu+\nu_r)\|u_{\epsilon m}\|^2+\frac{C_1K}{2}\|u_{\epsilon m}\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)}+\nu_2\|u_{\epsilon m}\|^4\\&-(p_{\epsilon m},\nabla\cdot u_{\epsilon m})\leq\frac{\nu_r}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2+2\nu_r|w_{\epsilon m}|^2+\frac{\nu_2}{2}\|u_{\epsilon m}\|^4+c_{\nu_2}\|f\|^{4/3}_{H^{-1}(\Omega)},\end{aligned}\tag{4.17}$$

Em seguida aplicamos a desigualdade de Young em (4.15) e obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_{\epsilon m}|^2+\nu_1\|w_{\epsilon m}\|^2+4\nu_r|w_{\epsilon m}|^2\leq\frac{\nu_r}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2+2\nu_r|w_{\epsilon m}|^2\\&+\frac{\nu_1}{2}\|w_{\epsilon m}\|^2+c_{\nu_1}\|g\|^2_{H^{-1}(\Omega)},\end{aligned}\tag{4.18}$$

Por fim, somamos, membro a membro, as desigualdades (4.16), (4.17) e (4.18) e integramos de 0 a t, com $0 \leq t \leq T$ para obter

$$\begin{aligned}&(|u_{\epsilon m}(t)|^2 + |w_{\epsilon m}(t)|^2 + \epsilon|p_{\epsilon m}(t)|^2)\\ &+C_1K\int_0^t \|u_{\epsilon m}\|^4_{W_0^{1,4}(\Omega)} + \nu_2\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^4 ds + \nu_1\int_0^t \|w_{\epsilon m}(s)\|^2 ds \leq C\end{aligned} \tag{4.19}$$

Em que C é uma constante positiva que independe de m e t. Desse modo obtemos de (4.19) as seguintes limitações

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{4.20}$$

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^4(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \tag{4.21}$$

$$(u_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^4(I;\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)), \tag{4.22}$$

$$(w_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{4.23}$$

$$(w_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \tag{4.24}$$

$$(\sqrt{\epsilon}p_{\epsilon m}) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;L^2(\Omega)), \tag{4.25}$$

Segunda Estimativa

Sejam $P_m : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to V_m$ o operador projeção ortogonal dado por

$$P_m u = \sum_{j=1}^m (u,\varphi_j)\varphi_j,$$

e seu adjunto $P_m^* : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Notamos que $P_m^* u'_{\epsilon m} = u'_{\epsilon m}$ e $P_m^* w'_{\epsilon m} = w'_{\epsilon m}$. Vemos também que devido a escolha da base especial (φ_ν), temos

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega))} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|P_m^*\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega),H^{-1}(\Omega))} \leq 1. \tag{4.26}$$

A partir da primeira equação do sistema aproximado (4.11), das propriedades (2.9)-(2.11), bem como (4.6) obtemos

$$\begin{aligned}&u'_{\epsilon m} = -(\nu+\nu_r)P_m^* A u_{\epsilon m} - P_m^*\mathcal{K}_1 u_{\epsilon m} - P_m^*\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m} - P_m^*\nabla p_{\epsilon m}\\ &+2\nu_r P_m^*\nabla\times w_{\epsilon m} + P_m^* f.\end{aligned} \tag{4.27}$$

A seguir vamos limitar cada termo do segundo membro da igualdade (4.27). Primeiramente temos que $|\langle Au_{\epsilon m}, v\rangle| \leq \|u_{\epsilon m}\|\|v\|$, $\forall u_{\epsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, devido a (4.21) concluímos que

$$(Au_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.28}$$

A seguir, sejam $u_{\epsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Devido a desigualdade de Hölder e a propriedade (2.11), temos que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{K}_1 u_{\epsilon m}, v\rangle| &\leq C\int_\Omega (1+|\nabla u_{\epsilon m}|_E)^3 |\nabla v|_E dx \\
&\leq \left(C+\|\nabla u_{\epsilon m}\|^3_{L^4(\Omega)}\right)\|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \left(C+\|u_{\epsilon m}\|^3_{W_0^{1,4}(\Omega)}\right)\|v\|_{W_0^{1,4}(\Omega)} \\
&\leq \left(C+\|u_{\epsilon m}\|^3_{W_0^{1,4}(\Omega)}\right)\|v\|_{H_0^1(\Omega)\cap W_0^{1,4}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Portanto, a estimativa (4.22) nos assegura que

$$(\mathcal{K}_1 u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.29}$$

Para estimar o termo correspondente a forma trilinear, usamos (4.5) e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
|\langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}, v\rangle| &\overset{(4.5)}{\leq} |b_1(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)| + |\bar{b}(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)| \\
&\leq 2\|u_{\epsilon m}\|_{L^4(\Omega)}\|u_{\epsilon m}\|\|v\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq c\|u_{\epsilon m}\|^2\|v\|,
\end{aligned}$$

$\forall u_{\epsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, devido a estimativa (4.21) concluímos que

$$(\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.30}$$

Por outro lado, notamos que

$$|\langle \nabla p_{\epsilon m}, v \rangle| = |\langle p_{\epsilon m}, \nabla \cdot v \rangle| \leq |p_{\epsilon m}| \|v\|$$

$\forall u_{\epsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Desse modo, devido a (4.25) concluímos que

$$(\nabla p_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (4.31)$$

Finalmente notamos que

$$|(\nabla \times w_{\epsilon m}, v)| \leq c\|w_{\epsilon m}\| \|v\|$$

$\forall w_{\epsilon m}, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, a partir de (4.24) obtemos

$$(\nabla \times w_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (4.32)$$

Segue-se de (4.26)-(4.32) e das hipóteses sobre f que

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \quad (4.33)$$

A seguir obtemos de $(4.11)_3$ a seguinte desigualdade

$$|(\epsilon p'_{\epsilon m}, v)| = |(\nabla \cdot u_{\epsilon m}, v)| \leq \|u_{\epsilon m}\| |v|,$$

$\forall v(t) \in L^2(\Omega)$. Portanto, (4.21) implica que

$$(\epsilon p'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^4(I; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(I; L^2(\Omega)). \quad (4.34)$$

Com a finalidade de obter uma limitação para $w'_{\epsilon m}$, notamos que a segunda equação do sistema aproximado (4.11), as propriedades (2.9)-(2.11), bem como (4.6) nos permitem obter

$$\begin{aligned} w'_{\epsilon m} &= -\nu_1 P_m^* \nabla \cdot e(w_{\epsilon m}) - P_m^* \widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m} - 4\nu_r P_m^* w_{\epsilon m} \\ &+2\nu_r P_m^* \nabla \times u_{\epsilon m} + P_m^* g. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Para limitar o segundo membro de (4.35), primeiramente notamos que

$$|\langle \nabla \cdot e(w_{\epsilon m}), v\rangle| = |\langle e(w_{\epsilon m}), \nabla v\rangle| \leq |\nabla w_{\epsilon m}||\nabla v| \leq \|w_{\epsilon m}\|\|v\|,$$

$\forall w_{\epsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Portanto, devido a (4.24) concluímos que

$$(\nabla \cdot e(w_{\epsilon m})) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{4.36}$$

Por outro lado, considerando a estimativa (4.24) e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$(w_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{4.37}$$

A seguir, sejam $u_{\epsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Temos que

$$|\langle \nabla \times u_{\epsilon m}, v\rangle| \leq \|u_{\epsilon m}\|\|v\|.$$

Desse modo, (4.21) nos permite escrever

$$(\nabla \times u_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{4.38}$$

Agora vamos limitar o termo $\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}$. Para isso, vamos considerar dois casos: $d = 2$ e $d = 3$. Vamos supor primeiro $d = 2$. Considerando a Definição (4.5), a igualdade (4.7) obtida na Observação 4.1 e a Desigualdade de Hölder, vemos que

$$\begin{aligned}
\left|\langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}, v\rangle\right| &\overset{(4.5)}{=} \left|b_1(u_{\epsilon m}, w_{\epsilon m}, v) + \bar{b}(w_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)\right| \\
&\overset{(4.7)}{=} \left|-2\bar{b}(w_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v) - b_1(u_{\epsilon m}, v, w_{\epsilon m}) + \bar{b}(w_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)\right| \\
&\leq c\|w_{\epsilon m}\|_{L^4(\Omega)}\|u_{\epsilon m}\|\|v\|
\end{aligned}$$

$\forall u_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon m}(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, pois $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$. Logo

$$\left\|\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}\right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \leq c|w_{\epsilon m}|\|w_{\epsilon m}\|\|u_{\epsilon m}\|^2$$

e como estamos supondo $d=2$, vale o Lema 1.4. Aplicando a Desigualdade de Young na última desigualdade obtida, concluímos que

$$\left\|\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}^{2} \leq c\|u_{\epsilon m}\|^4 + c|w_{\epsilon m}|^2\|w_{\epsilon m}\|^2$$

Desse modo, as limitações (4.21)-(4.24) nos fornecem

$$(\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \text{ para } d=2. \tag{4.39}$$

Supondo agora $d=3$, obtemos do Lema 1.5 e da Observação 4.2 que

$$|\langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}, v\rangle| \leq C_1\|u_{\epsilon m}\|_{L^6(\Omega)}\|v\||w_{\epsilon m}|^{1/2}\|w_{\epsilon m}\|^{1/2} + C_2\|v\|_{L^6(\Omega)}\|u_{\epsilon m}\||w_{\epsilon m}|^{1/2}\|w_{\epsilon m}\|^{1/2}.$$

Como $d=3$, temos $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^6(\Omega)$, logo

$$\|\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq c\|u_{\epsilon m}\|^2|w_{\epsilon m}|\|w_{\epsilon m}\| \leq c\|u_{\epsilon m}\|^4 + c|w_{\epsilon m}|^2\|w_{\epsilon m}\|^2.$$

As limitações (4.21)-(4.24) nos fornecem

$$(\widetilde{B}_{u_{\epsilon m}} w_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \text{ para } d=3. \tag{4.40}$$

Segue das limitações (4.35)-(4.40), de (4.26) e das hipóteses sobre g que

$$(w'_{\epsilon m}) \text{ é limitada em } L^2(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{4.41}$$

As limitações (4.20)-(4.25), (4.33), (4.34), (4.41) juntamente com o Lema de Compacidade de Aubin-Lions implicam que existem subsequências de $(u_{\epsilon m})$, $(w_{\epsilon m})$ e $(p_{\epsilon m})$, ainda denotadas por $(u_{\epsilon m})$, $(w_{\epsilon m})$ e $(p_{\epsilon m})$, tais que

$$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon \quad \text{forte em } L^2\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right) \text{ e q. s. em } Q_T, \tag{4.42}$$

$$u_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\epsilon \quad \text{fraco estrela em } L^\infty\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{4.43}$$

$$u_{\epsilon m} \rightharpoonup u_\epsilon \quad \text{fraco em } L^4(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \tag{4.44}$$

$$u_{\epsilon m} \rightharpoonup u_\epsilon \quad \text{fraco em } L^4\left(I;\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right), \tag{4.45}$$

$$u'_{\epsilon m} \rightharpoonup u'_\epsilon \quad \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right), \tag{4.46}$$

$$w_{\epsilon m} \to w_\epsilon \quad \text{forte em } L^2\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \text{ e q. s. em } Q_T, \tag{4.47}$$

$$w_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\epsilon \quad \text{fraco estrela em } L^\infty\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{4.48}$$

$$w_{\epsilon m} \rightharpoonup u_\epsilon \quad \text{fraco em } L^2\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right), \tag{4.49}$$

$$w'_{\epsilon m} \rightharpoonup w'_\epsilon \quad \text{fraco em } L^2\left(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right), \tag{4.50}$$

$$\mathcal{K}u_{\epsilon m} \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.51}$$

$$p_{\epsilon m} \overset{*}{\rightharpoonup} p_\epsilon \quad \text{fraco estrela em } L^\infty\left(I;L^2(\Omega)\right), \tag{4.52}$$

$$\epsilon p'_{\epsilon m} \rightharpoonup \epsilon p'_\epsilon \quad \text{fraco em } L^2\left(I;L^2(\Omega)\right). \tag{4.53}$$

Para finalizar essa segunda estimativa, notamos que faz sentido considerar $u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}$, $w_\epsilon(0) = w_{\epsilon 0}$ e $p_\epsilon(0) = p_{\epsilon 0}$. Pois, por um lado, as estimativas (4.21) e (4.33) implicam que $u_\epsilon \in C^0(I;\mathbf{L}^2(\Omega))$ e por outro lado, (4.24) e (4.41) implicam que $w_\epsilon \in C^0(I;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Mais ainda, (4.25) e (4.34) asseguram que $p_\epsilon \in C^0(I;L^2(\Omega))$.

A seguir, vamos mostrar que podemos passar o limite, com $m \to \infty$, no sistema aproximado (4.11). Primeiramente, para provar que

$$\int_0^T \widetilde{b}(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, \varphi) \longrightarrow \int_0^T \widetilde{b}(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{D}(\Omega)), \tag{4.54}$$

$$\int_0^T \widetilde{b}(u_{\epsilon m}, w_{\epsilon m}, \varphi) \longrightarrow \int_0^T \widetilde{b}(u_\epsilon, w_\epsilon, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I;\mathcal{D}(\Omega)), \tag{4.55}$$

usamos (4.42) e (4.47) do mesmo modo feito no capítulo 2 (veja também *J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta e M. Růžička* [14], [1996], p.210). Por outro lado, para mostrar que

$$\int_{Q_T} e_{ij}(w_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} e_{ij}(w_\epsilon)e_{ij}(\varphi)dxdt, \tag{4.56}$$

ou equivalentemente,

$$\int_0^T \langle \nabla \cdot e(w_{\epsilon m}), \varphi \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \nabla \cdot e(w_\epsilon), \varphi \rangle dt, \tag{4.57}$$

usamos (4.49). Para estabelecer a convergência

$$\int_{Q_T} M(|e(u_{\epsilon m})|_E^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) dxdt \to \int_{Q_T} M(|e(u_\epsilon)|_E^2) e_{ij}(u_\epsilon) e_{ij}(\varphi) dxdt, \tag{4.58}$$

usamos o Lema de Vitali, analogamente ao que foi feito no segundo capítulo.

Segue-se que podemos escrever $\chi = \mathcal{K}_1 u_\epsilon$ em $L^{4/3}\Big(I; \big(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\big)'\Big)$. Os demais termos em (4.9) são obtidos de maneira usual. Portanto, podemos concluir de (4.9) que

$$\begin{aligned} u_\epsilon' + (\nu + \nu_r) A u_\epsilon + \mathcal{K}_1 u_\epsilon + \widetilde{B}_{u_\epsilon} u_\epsilon &= 2\nu_r \nabla \times w_\epsilon + f, && (4.59) \\ w_\epsilon' - \nu_1 \nabla \cdot e(w_\epsilon) + \widetilde{B}_{u_\epsilon} w_\epsilon + 4\nu_r w_\epsilon &= 2\nu_r \nabla \times u_\epsilon + g, && (4.60) \\ \epsilon p_\epsilon' + \nabla \cdot u_\epsilon &= 0. && (4.61) \end{aligned}$$

Sendo a primeira igualdade em $L^{4/3}\Big(I; \big(\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\big)'\Big)$, a segunda em $L^2\left(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)$, e a terceira em $L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)$.

A fim de estabelecer a unidade de solução para o sistema (4.1), consideremos $(u_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 1}, p_{\epsilon 1})$ e $(u_{\epsilon 2}, w_{\epsilon 2}, p_{\epsilon 2})$, soluções fracas do sistema (4.1). Temos

$$\begin{aligned} u_{\epsilon 1}, u_{\epsilon 2} &\in L^4\left(I, \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^4\left(I, \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \\ w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2} &\in L^2\left(I, \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \\ p_{\epsilon 1}, p_{\epsilon 2} &\in L^\infty\left(I; \mathbf{L}^2(\Omega)\right). \end{aligned}$$

Sejam $u = u_{\epsilon 1} - u_{\epsilon 2}$, $w = w_{\epsilon 1} - w_{\epsilon 2}$ e $p = p_{\epsilon 1} - p_{\epsilon 2}$. Nessas condições a terna (u, w, p) é tal que

$$\left|\begin{array}{lcl} u' + (\nu+\nu_r)Au + (\mathcal{K}_1 u_{\epsilon 1} - \mathcal{K}_1 u_{\epsilon 2}) + (\widetilde{B}_{u_{\epsilon 1}} u_{\epsilon 1} - \widetilde{B}_{u_{\epsilon 2}} u_{\epsilon 2}) + \nabla p &=& 2\nu_r \nabla \times w, \\ w' + \nu_1 Aw + \nu_1 \nabla(\nabla\cdot w) + (\widetilde{B}_{u_{\epsilon 1}} w_{\epsilon 1} - \widetilde{B}_{u_{\epsilon 2}} w_{\epsilon 2}) + 4\nu_r w &=& 2\nu_r \nabla\times u, \\ \epsilon p' + \nabla\cdot u &=& 0, \\ u(0) = w(0) = p(0) &=& 0, \end{array}\right. \tag{4.62}$$

sendo a primeira igualdade em $L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right)$, a segunda em $L^2\left(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)$, e a terceira em $L^2\left(I;L^2(\Omega)\right)$. Em seguida, tomamos as dualidades nas equações $(4.62)_1$, $(4.62)_2$ e $(4.62)_3$ com u, w e p, respectivamente. Isso faz sentido, pois $u_\epsilon \in L^4\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)$, $w_\epsilon \in L^2\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)$ e $p_\epsilon\in L^2\left(I;L^2(\Omega)\right)$. Desse modo,

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + (\nu+\nu_r)\|u\|^2 + \langle \mathcal{K}_1 u_{\epsilon 1} - \mathcal{K}_1 u_{\epsilon 2}, u\rangle + \langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon 1}} u_{\epsilon 1} - \widetilde{B}_{u_{\epsilon 2}} u_{\epsilon 2}, u\rangle \\ +(\nabla p, u) = 2\nu_r\langle \nabla\times w, u\rangle, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu_1\|w\|^2 + \nu_1|\nabla\cdot w|^2 + \langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon 1}} w_{\epsilon 1} - \widetilde{B}_{u_{\epsilon 2}} w_{\epsilon 2}, w\rangle + 4\nu_r|w|^2 \\ = 2\nu_r\langle\nabla\times u, w\rangle, \\ \epsilon\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p|^2 + (\nabla\cdot u, p) = 0, \\ u(0)=w(0)=p(0)=0. \end{array}\right. \tag{4.63}$$

Observação 4.3. *Notamos que (veja a observação 2.2)*

$$\langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon 1}} u_{\epsilon 1} - \widetilde{B}_{u_{\epsilon 2}} u_{\epsilon 2}, u\rangle = \widetilde{b}(u, u_{\epsilon 1}, u), \tag{4.64}$$

$$\langle \widetilde{B}_{u_{\epsilon 1}} w_{\epsilon 1} - \widetilde{B}_{u_{\epsilon 2}} w_{\epsilon 2}, w\rangle = \widetilde{b}(u, w_{\epsilon 1}, w). \tag{4.65}$$

Observação 4.4. *Notamos que $\mathcal{K}_1$ é monótono por um argumento análogo ao que foi usado para estabelecer a monotonia de $\mathcal{K}$ (veja observação 2.1). Devido a monotonia de $\mathcal{K}_1$ temos que*

$$\langle \mathcal{K}_1 u_{\epsilon 1} - \mathcal{K}_1 u_{\epsilon 2}, \widetilde{u}\rangle \geq 0.$$

Agora somamos, membro a membro, as equações $(4.63)_1$, $(4.63)_2$ e $(4.63)_3$ para obter

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2+\epsilon|p|^2\right)+(\nu+\nu_r)\|u\|^2+\nu_1\|w\|^2+4\nu_r|w|^2\\&\leq 4\nu_r\|u\||w|+|\widetilde{b}(u,u_{\epsilon 1},u)|+|\widetilde{b}(u,w_{\epsilon 1},w)|,\end{aligned}\tag{4.66}$$

visto que $(\nabla p,u)=-(p,\nabla\cdot u)$. Aplicando a desigualdade de Young em (4.66) obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2+\epsilon|p|^2\right)+(\nu+\nu_r)\|u\|^2+\nu_1\|w\|^2+4\nu_r|w|\\&\qquad\leq \nu_r\|u\|^2+4\nu_r|w|^2+|\widetilde{b}(u,u_{\epsilon 1},u)|+|\widetilde{b}(u,w_{\epsilon 1},w)|.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2+\epsilon|p|^2\right)+\nu\|u\|^2+\nu_1\|w\|^2\leq|\widetilde{b}(u,u_{\epsilon 1},u)|+|\widetilde{b}(u,w_{\epsilon 1},w)|.\tag{4.67}$$

Por outro lado, supondo $d=2$, temos que $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$. Além disso vale o Lema 1.4. Portanto, devido a definição (4.5), a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}|\widetilde{b}(u,u_{\epsilon 1},u)|+|\widetilde{b}(u,w_{\epsilon 1},w)| &\leq |b_1(u,u_{\epsilon 1},u)|+|\overline{b}(u_{\epsilon 1},u,u)|\\
&+ |b_1(u,w_{\epsilon 1},w)|+|\overline{b}(w_{\epsilon 1},u,w)|\\
&\leq c\|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|u_{\epsilon 1}\|+c\|u_{\epsilon 1}\|_{L^4(\Omega)}\|u\|\|u\|_{L^4(\Omega)}\\
&+ c\|u\|_{L^4(\Omega)}\|w_{\epsilon 1}\|\|w\|_{L^4(\Omega)}\\
&+ c\|w_{\epsilon 1}\|_{L^4(\Omega)}\|u\|\|w\|_{L^4(\Omega)}\\
&\leq c|u|\|u\|\|u_{\epsilon 1}\|+c\|u_{\epsilon 1}\||u|^{1/2}\|u\|^{3/2}\\
&+ c\|w_{\epsilon 1}\||u|^{1/2}\|u\|^{1/2}|w|^{1/2}\|w\|^{1/2}\\
&\leq \frac{\nu}{3}\|u\|^2+c_\nu\|u_{\epsilon 1}\|^2|u|^2+\frac{\nu}{3}\|u\|^2+c_\nu\|u_{\epsilon 1}\|^4|u|^2\\
&+ \sqrt{\frac{2\nu}{3}}\|u\|\sqrt{2\nu_1}\|w\|+c|u||w|\|w_{\epsilon 1}\|^2\\
&\leq \nu\|u\|^2+\nu_1\|w\|^2\\
&+ c\left(\|u_{\epsilon 1}\|^2+\|u_{\epsilon 1}\|^4+\|w_{\epsilon 1}\|^2\right)\left(|u|^2+|w|^2+\epsilon|p|^2\right)\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.67) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u|^2+|w|^2+\epsilon|p|^2\right)\leq c\left(\|u_{\epsilon 1}\|^2+\|u_{\epsilon 1}\|^4+\|w_{\epsilon 1}\|^2\right)\left(|u|^2+|w|^2+\epsilon|p|^2\right). \quad (4.68)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall na inequação (4.68) e considerando as estimativas (4.21) e (4.24), obtemos

$$u_{\epsilon 1}(t)=u_{\epsilon 2}(t),\ \ w_{\epsilon 1}(t)=w_{\epsilon 2}(t) \text{ e } p_{\epsilon 1}(t)=p_{\epsilon 2}(t)\ \ \forall t\in[0,T].$$

Isso conclui a demonstração do teorema 4.2. □

4.3 Passagem ao Limite no Problema Penalizado

Demonstração do teorema 4.1.

Usando o teorema da limitação uniforme de Banach-Steinhauss (veja por exemplo *H. Brézis* [9], [1983]) e um argumento similar ao que foi usado para obter as estimativas na demonstração anterior, concluímos que, quando $\epsilon\to 0$ temos

$$(u_\epsilon) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad (4.69)$$

$$(u_\epsilon) \quad \text{é limitada em } L^4(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad (4.70)$$

$$(u_\epsilon) \quad \text{é limitada em } L^4(I;\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)), \quad (4.71)$$

$$(w_\epsilon) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad (4.72)$$

$$(w_\epsilon) \quad \text{é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \quad (4.73)$$

$$(\sqrt{\epsilon}p_\epsilon) \quad \text{é limitada em } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)). \quad (4.74)$$

A seguir, vamos obter convergências forte e quase sempre para u_ϵ usando derivada fracionária. Para mais detalhes sobre os objetos e resultados usados aqui, veja o apêndice C.2. Vamos denotar por $\widehat{\psi}$ a transformada de Fourier da função ψ. Denotamos por $\widetilde{u}_\epsilon$, $\widetilde{w}_\epsilon$ e $\widetilde{p}_\epsilon$ as extensões por zero fora do intervalo $[0,T]$ das funções u_ϵ, w_ϵ e p_ϵ, respectivamente. Desse modo, obtemos do sistema aproximado $(4.11)_1$ e $(4.11)_3$ o seguinte

$$
\left|
\begin{array}{l}
\dfrac{d}{dt}(\widetilde{u}_\epsilon, \varphi_r) + (\nu+\nu_r)a(\widetilde{u}_\epsilon, \varphi_r) + \langle \mathcal{K}_1 \widetilde{u}_\epsilon, \varphi_r\rangle + \langle \widetilde{B}_{\widetilde{u}_\epsilon}\widetilde{u}_\epsilon, \varphi_r\rangle - (\widetilde{p}_\epsilon, \nabla\cdot\varphi_r) \\
= 2\nu_r(\nabla\times\widetilde{w}_\epsilon, \varphi_r) + \langle \widetilde{f}, \varphi_r\rangle + (u_{\epsilon 0}, \varphi_r)\delta_0 - (u_\epsilon(T), \varphi_r)\delta_T, \\
\\
\epsilon\dfrac{d}{dt}(\widetilde{p}_\epsilon, q_r) + (\nabla\cdot\widetilde{u}_\epsilon, q_r) = \epsilon(p_{\epsilon 0}, q_r)\delta_0 - \epsilon(p_\epsilon(T), q_r)\delta_T.
\end{array}
\right. \tag{4.75}
$$

Agora tomamos a transformada de Fourier em cada equação de (4.75), em seguida fazemos $\varphi_r = \widehat{u}_\epsilon$ e $q_r = \widehat{p}_\epsilon$ e, por fim, somamos as igualdades obtidas para concluir que

$$
\begin{aligned}
&2\pi i\tau|\widehat{u}_\epsilon|^2 + 2\pi i\tau\epsilon|\widehat{p}_\epsilon|^2 = 2\nu_r(\widehat{\nabla\times w_\epsilon}, \widehat{u}_\epsilon) + \langle \widehat{f}, \widehat{u}_\epsilon\rangle - (\nu+\nu_r)(\widehat{Au_\epsilon}, \widehat{u}_\epsilon) \\
&-(\widehat{\mathcal{K}_1 u_\epsilon}, \widehat{u}_\epsilon) - (\widehat{\widetilde{B}u_\epsilon}, \widehat{u}_\epsilon) + (u_{\epsilon 0}, \widehat{u}_\epsilon) - (u_\epsilon(T), \widehat{u}_\epsilon)e^{-2\pi i\tau T} \\
&+\epsilon(p_{\epsilon 0}, \widehat{p}_\epsilon) - \epsilon(p_\epsilon(T), \widehat{p}_\epsilon)e^{-2\pi i\tau T},
\end{aligned} \tag{4.76}
$$

em que denotamos, por simplicidade de notação, $\widehat{\widetilde{u}} = \widehat{u}$ e $\widehat{\delta_t} = e^{-2\pi i\tau t}$. Chamamos a atenção para o fato de que $\tilde{B}$ não significa extensão de B, mas sim a forma trilinear definida em (4.5). Tomando o valor absoluto em (4.76), obtemos

$$
\begin{gathered}
\tau||\widehat{u}_\epsilon|^2 + \epsilon|\tau||\widehat{p}_\epsilon|^2 \leq \\
\tfrac{c}{2\pi}\left(\|\widehat{\nabla\times w_\epsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\widehat{f}\|_{H^{-1}} + \|\widehat{Au_\epsilon}\|_{H^{-1}} + \|\widehat{\mathcal{K}_1 u_\epsilon}\|_{H^{-1}} + \|\widehat{\widetilde{B}u_\epsilon}\|_{H^{-1}}\right)\|\widehat{u}_\epsilon\| \\
+\tfrac{c}{2\pi}\left(|u_{\epsilon 0}||\widehat{u}_\epsilon| + |u_\epsilon(T)||\widehat{u}_\epsilon| + \epsilon|p_{\epsilon 0}||\widehat{p}_\epsilon| + \epsilon|p_\epsilon(T)||\widehat{p}_\epsilon|\right).
\end{gathered} \tag{4.77}
$$

Agora vamos majorar o segundo membro da desigualdade acima. Primeiro notamos que devido as hipóteses sobre f, temos

$$
\int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}ds \leq C.
$$

Portanto, $\|\widehat{f}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C$. Por outro lado, vemos que

$$
|\langle Au_\epsilon, v\rangle| \leq \|u_\epsilon\|\|v\|,
$$

$\forall u_\epsilon(t), v(t) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Desse modo, a estimativa (4.70) nos assegura que

$$(Au_\epsilon) \text{ é limitada em } L^4(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^1\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.78}$$

Portanto, $\|\widehat{Au_\epsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C$. Notamos também que usando a desigualdade de Hölder e a propriedade (2.11), temos que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{K}_1 u_\epsilon, v\rangle| &\leq C\int_\Omega (1+|\nabla u_\epsilon|_E)^3\,|\nabla v|_E dx\\
&\leq \left(C+\|\nabla u_\epsilon\|^3_{L^4(\Omega)}\right)\|\nabla v\|_{L^4(\Omega)}\\
&\leq \left(C+\|u_\epsilon\|^3_{W_0^{1,4}(\Omega)}\right)\|v\|_{W_0^{1,4}(\Omega)}\\
&\leq \left(C+\|u_\epsilon\|^3_{W_0^{1,4}(\Omega)}\right)\|v\|_{H_0^1(\Omega)\cap W_0^{1,4}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Portanto, a estimativa (4.71) nos assegura que

$$(\mathcal{K}_1 u_\epsilon) \text{ é limitada em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.79}$$

Entretanto,

$$L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right) \hookrightarrow L^1\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right).$$

Portanto, $\|\widehat{\mathcal{K}_1 u_\epsilon}\|_{H^{-1}} \leq C$. Agora notamos que (4.73) é suficiente para garantir que

$$(\nabla\times w_\epsilon) \text{ é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^1\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.80}$$

Segue-se que $\|\widehat{\nabla\times w_\epsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C$. Finalmente, usando (4.5) e a desigualdade de Ḧolder, concluímos que

$$\begin{aligned}
|\langle \widetilde{B}u_\epsilon, v\rangle| &\overset{(4.5)}{\leq} |b_1(u_\epsilon,u_\epsilon,v)|+|\overline{b}(u_\epsilon,u_\epsilon,v)|\\
&\leq 2\|u_\epsilon\|_{L^4(\Omega)}\|u_\epsilon\|\|v\|_{L^4(\Omega)}\\
&\leq c\|u_\epsilon\|^2\|v\|.
\end{aligned}$$

Logo $|\langle \widetilde{B}u_\epsilon, v\rangle| \leq c\|u_\epsilon\|^2\|v\|$. Essa desigualdade, juntamente com (4.70) nos permitem obter

$$(\widetilde{B}u_\epsilon) \text{ é limitada em } L^2(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^1\left(I;\left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap \mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right). \tag{4.81}$$

Segue-se que $\|\widehat{\widetilde{B}u_\epsilon}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C$. Levando as limitações obtidas em (4.77), concluímos que

$$|\tau||\widehat{u}_\epsilon|^2 + \epsilon|\tau||\widehat{p}_\epsilon|^2 \leq c(\|\widehat{u}_\epsilon\| + \epsilon|\widehat{p}_\epsilon|). \tag{4.82}$$

Observação 4.5. *Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ com $0 < \gamma < \dfrac{1}{4}$. Então, existe uma constante positiva C, tal que*

$$|\tau|^{2\gamma} \leq C\frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Usando a observação 4.5 e (4.82) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma}|\widehat{u}_\epsilon|^2 dt \quad &\leq \quad C\int_{\mathbb{R}} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}|\widehat{u}_\epsilon|^2 dt \\
&\leq \quad C\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{u}_\epsilon|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt + C\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tau||\widehat{u}_\epsilon|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt \\
&\overset{(4.82)}{\leq} \quad c\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_\epsilon\|^2 dt + c\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u}_\epsilon\| + \epsilon|\widehat{p}_\epsilon|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt.
\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma}|\widehat{u}_\epsilon|^2 dt \leq c\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_\epsilon\|^2 dt + c\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u}_\epsilon\| + \epsilon|\widehat{p}_\epsilon|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt. \tag{4.83}$$

A fim de limitar o segundo membro de (4.83), primeiro usamos a identidade de Parseval para obter

$$\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_\epsilon\|^2 d\tau = \int_{\mathbb{R}} \|\widetilde{u}_\epsilon\|^2 dt \leq c. \tag{4.84}$$

Em seguida, usamos a desigualdade de Hölder's e a estimativa (4.70) para escrever

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\widehat{u}_\epsilon\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{u}_\epsilon\|^2 dt\right)^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\right)^2 dt\right]^{1/2} \leq c. \tag{4.85}$$

Por fim, notamos que com esse mesmo argumento e a estimativa (4.72) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon|\widehat{p}_\epsilon|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt \leq c. \tag{4.86}$$

Segue-se de (4.82), (4.84), (4.85) e (4.86) que

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma}|\widehat{u}_\epsilon|^2 dt \leq c, \quad 0<\gamma<\frac{1}{4}. \tag{4.87}$$

Em outras palavras

$$|\tau|^\gamma \widehat{u}_\epsilon \in L^2(\mathbb{R};\mathbf{L}^2(\Omega)), \quad 0<\gamma<\frac{1}{4}. \tag{4.88}$$

Combinando (4.70) e (4.88), concluímos que $\widetilde{u}_\epsilon$ é limitada no subespaço $\mathcal{H}^\gamma_\Omega\left(\mathbb{R};\mathbf{H}^1_0(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ de

$$\mathcal{H}^\gamma\left(\mathbb{R};\mathbf{H}^1_0(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right) = \{u; u\in L^2(\mathbb{R};\mathbf{H}^1_0(\Omega)), |\tau|^\gamma\widehat{u}\in L^2(\mathbb{R};\mathbf{L}^2(\Omega))\}.$$

Portanto, u_ϵ é limitada em $\mathcal{H}^\gamma_\Omega\left(I;\mathbf{H}^1_0(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. Entretanto, a imersão

$$\mathcal{H}^\gamma_\Omega\left(I;\mathbf{H}^1_0(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \hookrightarrow L^2(I;\mathbf{L}^2(\Omega))$$

é compacta (veja o apêndice C.2). A partir desse argumento e das limitações (4.69)-(4.74), concluímos que existem subsequências de (u_ϵ), (w_ϵ) e (p_ϵ), as quais ainda denotamos por (u_ϵ), (w_ϵ) e (p_ϵ), respectivamente, tais que

$$u_\epsilon \to u \quad \text{forte em } L^2\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \text{ e q. s. em } Q_T, \tag{4.89}$$

$$u_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{4.90}$$

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4\left(I;\mathbf{W}^{1,4}_0(\Omega)\right), \tag{4.91}$$

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } L^4\left(I;\mathbf{H}^1_0(\Omega)\right), \tag{4.92}$$

$$\mathcal{K}_1 u_\epsilon \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em } L^{4/3}\left(I;\left(\mathbf{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbf{W}^{1,4}_0(\Omega)\right)'\right), \tag{4.93}$$

$$w_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad \text{fraco estrela em } L^\infty\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{4.94}$$

$$w_\epsilon \rightharpoonup w \quad \text{fraco em } L^2\left(I;\mathbf{H}^1_0(\Omega)\right). \tag{4.95}$$

Além disso, devido a (4.74), temos que $\epsilon p'_\epsilon \to 0$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Portanto, $\nabla\cdot u_\epsilon = -\epsilon p'_\epsilon \to 0$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Combinando isso com (4.91), obtemos $\nabla\cdot u = 0$. Portanto, as convergências acima nos permitem escrever

$$
\left|\begin{array}{l}
\langle u', v\rangle + (\nu+\nu_r)a_1(u,v) + \langle \chi, v\rangle + \langle B_u u, v\rangle = 2\nu_r(\nabla\times w, v) + \langle f, v\rangle, \\[2ex]
\qquad \langle w', z\rangle + \nu_1(\nabla\cdot e(w), z) + \langle B_u w, z\rangle = (\nabla\times u, z) + \langle g, z\rangle, \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nabla\cdot u = 0,
\end{array}\right. \tag{4.96}
$$

$\forall v, z \in \mathcal{D}(\Omega)$, pois $\nabla\cdot u = 0$ implica $\widetilde{b}(u,u,v) = b_1(u,u,v)$ e $\widetilde{b}(u,w,v) = b_1(u,w,v)$. Para finalizar, notamos que podemos obter $\mathcal{K}_1 u = \chi$ em $L^{4/3}\left(I; \left(\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_0^{1,4}(\Omega)\right)'\right)$ de modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 4.1. $\square$

Encerramos esse capítulo observando que podemos repetir essa mesma técnica a fim de obter existência de soluções fracas para o sistema (3.1).

Apêndice A

Sobre o Tensor de Estresse

Nesse apêndice vamos mostrar que o tensor $\tau : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}^{d^2}$ e seu potencial $\Phi : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}$ definidos no capítulo de preliminares em (1.10) e (1.11) satisfazem as hipóteses do Lema 1.2 para $p = 4$.

Lema A.1. *Seja $M : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ uma aplicação real de classe C^1 sobre $(0, +\infty)$ satisfazendo as seguintes hipóteses*

$$C_1 \left(1 + t^{1/2}\right)^2 \leq M(t) \quad \leq \quad C_1 \left(1 + t^{1/2}\right)^2, \tag{A.1}$$

$$0 < M'(t) \quad \leq \quad \frac{C_3 \left(1 + t^{1/2}\right)}{t^{1/2}}, \tag{A.2}$$

em que C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas. Nessas condições, o tensor $\tau : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}^{d^2}$ e o potencial $\Phi : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}$ dados respectivamente por

$$\tau(D) \quad = \quad M\left(|D|_E^2\right) D, \tag{A.3}$$

$$\Phi(D) \quad = \quad \frac{1}{2} \int_0^{|D|_E^2} M(s) ds, \tag{A.4}$$

Satisfazem as seguintes condições para $p = 4$

$$\frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} \quad = \quad \tau_{ij}(D), \tag{A.5}$$

$$\Phi(0) \quad = \quad \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = 0, \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} B_{ij} B_{kl} \quad \geq \quad C(1 + |D|_E)^{p-2} |B|_E^2, \tag{A.7}$$

$$\left|\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{ij}\partial D_{kl}}\right| \;\leq\; C(1+|D|_E)^{p-2}. \tag{A.8}$$

Demonstração. Primeiro derivamos diretamente o potencial Φ e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi(D)}{\partial D_{ij}} &= \frac{1}{2}M(|D|_E^2)\frac{\partial}{\partial D_{ij}}\left(\sum_{k,l} D_{kl}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}M\left(|D|_E^2\right)2D_{ij} \\
&= M\left(|D|_E^2\right)D_{ij} \\
&= \tau_{ij}(D)
\end{aligned}$$

Isso prova a validade de (A.5). Em vista de (A.5), temos imediatamente a validade de (A.6). Para estabelecer (A.7) usamos (A.5) para escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}} &\overset{(A.5)}{=} \frac{\partial}{\partial D_{kl}}\tau_{ij}(D) \\
&= \frac{\partial}{\partial D_{kl}}\left(M(|D|_E^2)D_{ij}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial D_{kl}}\left[M(|D|_E^2)\right]D_{ij} + M(|D|_E^2)\frac{\partial(D_{ij})}{\partial D_{kl}} \\
&= 2M'(|D|_E^2)D_{kl}D_{ij} + M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}.
\end{aligned}$$

Agora usando a hipótese (A.1) sobre M, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}}B_{kl}B_{ij} &= \left[2M'(|D|_E^2)D_{kl}D_{ij} + M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}\right]B_{kl}B_{ij} \\
&\geq 2M'(|D|_E^2)\,(D\cdot B)^2 + M(|D|_E^2)B_{ij}B_{ij} \\
&\overset{(A.1)}{\geq} C\,(1+|D|_E)^2\,|B|^2.
\end{aligned}$$

Logo vale (A.7). Por fim, para verificar (A.8), tomamos o módulo da expressão obtida acima para a segunda derivada de Φ e concluímos que

$$\left|\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}}\right| \leq 2|M'(|D|_E^2)D_{kl}D_{ij}| + |M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}|.$$

Supondo $i=k$ e $j=l$, usamos as hipóteses (A.1) e (A.2) sobre M para obter

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2\Phi(D)}{\partial D_{kl}\partial D_{ij}}\right| &\leq 2|M'(|D|_E^2)D_{ij}^2| + |M(|D|_E^2)\delta_{ik}\delta_{jl}| \\
&\overset{(A.1)}{\leq} 2M'\left(|D|_E^2\right)|D|_E^2 + C\left(1+|D|_E^2\right) \\
&\overset{(A.2)}{\leq} \frac{C\left(1+|D|_E\right)|D|_E^2}{|D|_E} + C\left(1+|D|_E\right)^2 \\
&\leq C\left(1+|D|_E\right)^2.
\end{aligned}$$

Isso conclui essa demonstração. □

Apêndice B

Sobre algumas Estimativas Importantes

Neste apêndice vamos apresentar as demonstrações dos Lemas 1.1, 1.2, 1.4 e 1.5. Os enunciados desses lemas serão repetidos por conveniência.

B.1 Desigualdade de Korn

Lema B.1. *(Desigualdade de Korn) Seja $1 < p < \infty$. Então, existe uma constante $K_p = K_p(\Omega)$, tal que a inequação*

$$K_p||v||_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ||e(v)||_{L^p(\Omega)}$$

é válida qualquer que seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto limitado com $\partial\Omega \subset C^1$.

Demonstração do Lema B.1. A demonstração feita a seguir foi adaptada de *J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta e M. Růžička* [14], [1996], p. 196. Sejam Ω conforme o enunciado e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Afirmamos que se

$$T, \frac{\partial T}{\partial x_i} \in \left(W_0^{1,q}(\Omega)\right)' \text{ (dual topológico de } W_0^{1,q}(\Omega)),$$

para algum $q \in (1, \infty)$ e para todo $i = 1, ..., d$, então existe uma função $u \in L^{q'}(\Omega)$, com $q' = \dfrac{q}{q-1}$, tal que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mais ainda, existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{q'}^{q'} \leq C \left(\|T\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}^{q'} + \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial T}{\partial x_1} \right\|_{W^{-1,q'}(\Omega)}^{q'} \right) \tag{B.1}$$

De fato, supondo que $m \in \mathbb{Z}$, $T \in W^{m-1,q'}(\Omega)$ e $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} \in W^{m-1,q'}(\Omega)$, então $T \in W^{m,q'}(\Omega)$. Disso segue (B.1). A seguir passamos a demonstração da desigualdade de Korn. Seja o espaço

$$E(\Omega)^d := \left\{ u \in L^p(\Omega);\ e(u) \in L^p(\Omega)^{d^2} \right\},$$

com $\|u\|_{E(\Omega)^d} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|e(u)\|_{L^p(\Omega)}$. Nesses termos, $E(\Omega)^d$ é um espaço de Banach. Seja agora

$$\mathcal{I} : W^{1,p}(\Omega)^d \to E(\Omega)^d$$

definida pela aplicação identidade. É claro que $\mathcal{I}$ é uma aplicação contínua. Queremos mostrar que $\mathcal{I}$ é injetiva. Para esse propósito, tomemos $v \in E(\Omega)^d$. Assim obtemos, no sentido das distribuições e para quaisquer $i, j, k = 1, ..., d$ a seguinte igualdade

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial e_{ik}(v)}{\partial x_j} + \frac{\partial e_{ij}(v)}{\partial x_k} - \frac{\partial e_{jk}(v)}{\partial x_i}. \tag{B.2}$$

Como $e(v) \in L^p(\Omega)^{d^2}$, a igualdade (B.2) implica que

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} \in \left(W_0^{1,p'}(\Omega) \right)',$$

em que p' é tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Portanto, segue de $v \in L^p(\Omega)^d$ que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in \left(W_0^{1,p'}(\Omega) \right)'.$$

Logo desigualdade (B.1) obtida acima nos garante que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), \quad \forall i, j = 1, ...d.$$

Segue-se que $v \in W^{1,p}(\Omega)^d$ e $\mathcal{I}$ é injetiva. Isso nos diz que $W^{1,p}(\Omega)^d$ e $E(\Omega)^d$ coincidem (em certo sentido). Usando o teorema da aplicação aberta (veja por exemplo *H. Brézis* [9], [1983]) obtemos

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C(p,\Omega)\left(\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|e(v)\|_{L^p(\Omega)}\right). \tag{B.3}$$

Resta mostrar que $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1(p,\Omega)\|e(v)\|_{L^p(\Omega)}$, qualquer que seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)^d$. Faremos isso por contradição. Suponhamos que exista uma sequência $(v_m) \subset W_0^{1,p}(\Omega)^d$, tal que $\|v_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $m\|e(v_m)\|_{L^p(\Omega)} < 1$. Teremos

$$e(v_m) \to 0 \qquad \text{forte em } L^p(\Omega)^{d^2}.$$

Usando (B.3), construímos uma subsequência de (v_m), ainda denotada por (v_m), tal que as seguintes convergências são asseguradas

$$v_m \rightharpoonup v \qquad \text{fraco em } W^{1,p}(\Omega)^d,$$

$$v_m \to v \qquad \text{fraco em } L^p(\Omega)^d.$$

Segue-se que $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ e $v|_{\partial\Omega} = 0$ e $e(v) = 0$. É possível demonstrar que um campo de vetores v, tais que $e(v) = 0$ tem a forma $v = a + b \times x$ (veja em *J. Nečas e Hlaváček* [18], [1981]). Devido às condições de contorno sobre v, devemos ter $v \equiv 0$. Contradição com $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$. $\square$

B.2 Lema Algébrico

Lema B.2. *Sejam $p \geq 2$, $\tau : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e $\Phi : \mathbb{R}^{d^2}_{sym} \to \mathbb{R}$ tais que as seguintes assertivas são satisfeitas $\forall B, D \in \mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ e $i,j,k,l = 1,...,d$*

$$\frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} = \tau_{ij}(D), \tag{B.4}$$

$$\Phi(0) = \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = 0, \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij}\partial D_{kl}} B_{ij}B_{kl} \geq C_3(1+|D|)^{p-2}|B|^2, \tag{B.6}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi(D)}{\partial D_{ij}\partial D_{kl}}\right| \leq C_4(1+|D|)^{p-2}. \tag{B.7}$$

Nessas condições existem constantes positivas C_ν, $\nu = 5, 6, 7$ tais que

$$C_5(1 + |D|^{p-2})|D|^2 \leq \Phi(D) \leq C_6(1 + |D|)^p, \tag{B.8}$$

$$(\tau(B) - \tau(D)).(B - D) \geq C_7|B - D|^2. \tag{B.9}$$

Demonstração do Lema B.2. Essa demonstração foi feita seguindo as ideias apresentadas em *J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta e M. Růžička* [14], [1996], p. 198-202. Primeiro vamos estabelecer a validade de (B.9). Devido a (B.4), temos

$$(\tau_{ij}(B) - \tau_{ij}(D))(B_{ij} - D_{ij}) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Phi(D + s(B - D))}{\partial B_{ij}}\right) ds(B_{ij} - D_{ij})$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial^2\Phi(D + s(B - D))}{\partial B_{ij}\partial B_{kl}}(B_{ij} - D_{ij})(B_{kl} - D_{kl})ds$$

Usando agora (B.6), temos que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2\Phi(D + s(B - D))}{\partial B_{ij}\partial B_{kl}}(B_{ij} - D_{ij})(B_{kl} - D_{kl})ds$$

$$\geq C_3|B - D|^2 \int_0^1 (1 + |D + s(B - D)|)^{p-2} ds$$

Desse modo obtemos

$$(\tau_{ij}(B) - \tau_{ij}(D))(B_{ij} - D_{ij}) \geq C_3|B - D|^2 \int_0^1 (1 + |D + s(B - D)|)^{p-2} ds \tag{B.10}$$

Por outro lado, notamos que

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{1 + x^\alpha}{(1 + x)^\alpha} < 2, \tag{B.11}$$

qualquer que seja o número real $\alpha > 0$. Como estamos supondo $p \geq 2$, podemos escrever

$$(1 + x)^{p-2} \geq \frac{1}{2}(1 + x^{p-2}). \tag{B.12}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Segue-se que

$$\int_0^1 (1 + |D + s(B - D)|)^{p-2}\, ds \geq \frac{1}{2}\left(1 + \int_0^1 |D + s(B - D)|^{p-2} ds\right).$$

Portanto, resta apenas mostrar que

$$\int_0^1 |D + s(B-D)|^{p-2} ds \geq C|B-D|^{p-2}. \tag{B.13}$$

A fim de provar a validade de (B.13) vamos considerar dois casos: $|D| \geq |B-D|$ e $|D| < |B-D|$. Supondo $|D| \geq |B-D|$, temos $|D+s(B-D)| \geq ||D| - s|B-D|| \geq (1-s)|B-D|$. Logo vale (B.13). No caso em que $|D| < |B-D|$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |D + s(B-D)|^{p-2} ds &= \int_0^1 \frac{(|D+s(B-D)|^2)^{p/2}}{|D+s(B-D)|^2} ds \\
&\geq \frac{1}{2|B-D|^2} \left(\int_0^1 |sB + (1-s)D|^2 ds \right)^{p/2} \\
&= \frac{1}{2|B-D|^2} \frac{1}{3^{p/2}} \left(|B|^2 + \langle B, D \rangle + |D|^2 \right)^{p/2} \\
&\geq \frac{1}{2|B-D|^2} \frac{1}{6^{p/2}} (|B|^2 + |D|^2)^{p/2}.
\end{aligned}$$

Entretanto, $|B-D|^2 \leq 2(|B|^2 - |D|^2)$. Logo obtemos (B.13). A seguir vamos demonstrar (B.8).

Inicialmente notamos que devido a hipótese (B.5) temos que

$$\Phi(D) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\Phi(sD) ds = \int_0^1 \frac{\partial \Phi(sD)}{\partial D_{ij}} D_{ij} ds = \int_0^1 \frac{1}{s} \tau_{ij}(sD) s D_{ij} ds. \tag{B.14}$$

Agora considerando as hipóteses (B.4) e (B.5) podemos escrever

$$\tau_{ij}(B) = \frac{\partial \Phi(D)}{\partial D_{ij}} - \frac{\partial \Phi(0)}{\partial D_{ij}} = \int_0^1 \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi(sD)}{\partial D_{ij}} ds = \int_0^1 \frac{\partial^2 \partial \Phi(sD)}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} D_{kl} ds. \tag{B.15}$$

Em seguida, considerando (B.15) e (B.6), temos que

$$\tau_{ij}(D) D_{ij} \geq C_3 \int_0^1 (1 + s|D|)^{p-2} ds |D|^2. \tag{B.16}$$

Por fim, usando (B.12) e (B.16), temos que

$$\tau_{ij}(D) D_{ij} \geq \frac{C_3}{2} \int_0^1 \left[1 + (s|D|)^{p-2} \right] ds |D|^2 \geq \frac{C_3}{2(p-1)} (1 + |D|^{p-2}) |D|^2.$$

Essa última desigualdade, juntamente com (B.14) nos assegura a validade de uma parte de (1.8). Para a desigualdade à direita em (B.8) usamos a hipótese (B.7), juntamente com (B.15) para obtermos

$$|\tau_{ij}(D)| \leq C_4 d^2 \int_0^1 (1+s|D|)^{p-2}|D|ds = \frac{C_4 d^2}{p-1}\left[(1+s|D|)^{p-1}\right]_0^1 \leq \frac{C_4 d^2}{p-1}(1+|D|)^{p-1}.$$

Usando essa última desigualdade em (B.14) obtemos o resultado esperado. □

B.3 Estimativa em $L^4(\Omega)$

Lema B.3. *Supondo $d=2$, existe uma constante C, tal que*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}$$

$\forall u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$.

Demonstração. No que segue apresentamos um esboço das ideias discutidas em *J. L. Lions* [12], [1969], p. 70. Vamos considerar $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Começamos prolongando φ por zero fora de Ω. Daí obtemos

$$\varphi^2(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s}\left[\varphi^2(s,x_2)\right]ds = 2\int_{-\infty}^{x_1} \varphi(s,x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)ds.$$

Segue-se que

$$|\varphi(x_1,x_2)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s,x_2)|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)\right| ds. \tag{B.17}$$

De modo análogo obtemos

$$|\varphi(x_1,x_2)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1,s)|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(x_1,s)\right| ds. \tag{B.18}$$

Multiplicando membro a membro as desigualdades (B.17) e (B.18) ficamos com

$$|\varphi(x)|^4 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)\right| dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)\right| dx_2\right),$$

em que denotamos $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Integrando em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4\,dx \leq 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right|dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right|dx\right).$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4\,dx \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right).$$

Ou ainda,

$$\|\varphi\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\varphi\|^2_{H^1_0(\mathbb{R}^2)}, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Por fim usando a densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ obtemos o resultado procurado. □

B.4 Estimativa Para a Forma Trilinear $b(u, v, w)$

Lema B.4. *Consideremos $d \geq 3$ e $s, r \in \mathbb{R}$, com $s > 2$, $r > d$, verificando $\frac{2}{s} + \frac{d}{r} = 1$. Seja também a forma trilinear $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ dada por*

$$b(u, v, w) = \int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx.$$

Nessas condições, se $u \in \boldsymbol{L}^r(\Omega)$, então

$$|b(u, v, w)| \leq c\|u\|_{L^r(\Omega)}\|v\||w|^{2/s}\|w\|^{d/r}$$

$\forall v, w \in V$. Em que $c \geq 0$ é uma constante.

Demonstração. A prova dada a seguir é uma adaptação do que consta em *J. L. Lions* [12], [1969], p. 84. Seja $\rho > 0$, tal que $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$. Devido a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|b(u, v, w)| \leq \|u\|_{L^r(\Omega)}\|v\|\|w\|_{L^\rho(\Omega)}. \tag{B.19}$$

Por outro lado, devido as hipóteses do enunciado, temos $\frac{1}{s} + \frac{d}{2r} = \frac{1}{2}$. Segue da escolha de ρ que

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{d}{2r}.$$

Após algumas manipulações algébricas obtemos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{2}{s}}{2} + \frac{\frac{d}{r}}{\frac{2d}{d-2}}.$$

Além disso, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$, resulta que $w_i \in L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)$. Logo devido a desigualdade de interpolação, temos

$$\|w_i\|_{L^\rho(\Omega)} \leq |w_i|^{2/s} \|w_i\|^{d/r}_{L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)}.$$

Desse modo,

$$\|w_i\|^2_{L^\rho(\omega)} \leq C|w_i|^{4/s} \|w_i\|^{\frac{2d}{r}}.$$

A seguir somamos de $i = 1$ até $i = d$ e aplicamos a desigualdade de Hölder para obter

$$\|w\|_{L^\rho(\Omega)} \leq C|w|^{2/s} \|w\|^{d/r}.$$

Substituindo essa desigualdade em (B.19) obtemos o resultado do lema. $\square$

Apêndice C

Lemas de Compacidade

C.1 Teorema de Compacidade de Aubin-Lions

Nessa seção vamos apresentar uma demonstração teorema de Aubin-Lions enunciado a seguir. A demonstração apresentada é baseada nas ideias apresentadas em *L. A. Medeiros* [20], [2001], p. 36-40. Vamos começar com um lema auxiliar.

Lema C.1. *Seja $B_0 \overset{*}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ nas condições do enunciado. Para cada $\epsilon > 0$ existe $c(\epsilon)$, tal que*

$$\|u\|_B \leq \epsilon \|u\|_{B_0} + c(\epsilon)\|u\|_{B_1},$$

qualquer que seja $u \in B_0$.

Demonstração do Lema C.1: Suponhamos que para algum $\epsilon > 0$ existe $u_n \in B$, satisfazendo

$$\|u\|_B > \epsilon \|u\|_{B_0} + c(\epsilon)\|u\|_{B_1}. \tag{C.1}$$

Tomando $u_n \neq 0$, definimos

$$w_n = \frac{1}{\|u_n\|_{B_0}} u_n. \tag{C.2}$$

Em vista de (C.1), obtemos de (C.2) a seguinte desigualdade

$$\|w_n\|_B = \frac{\|u_n\|_B}{\|u_n\|_{B_0}} > \epsilon + n\frac{\|u_n\|_{B_1}}{\|u_n\|_{B_0}}.$$

Segue-se que

$$\|w_n\|_B > \epsilon + n\|w_n\|_{B_1} \tag{C.3}$$

Por outro lado, devido a imersão $B_0 \hookrightarrow B$, temos que

$$\|w_n\|_B = \frac{\|u_n\|_B}{\|u_n\|_{B_0}} \leq C \tag{C.4}$$

Agora devido a (C.3) e (C.4), temos que

$$\frac{\epsilon}{n} + \|w_n\|_{B_1} < \frac{\|w_n\|_B}{n} < \frac{C}{n}.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{B_1} = 0 \tag{C.5}$$

Notamos agora que B é reflexivo. Além disso, concluímos de (C.2) que $\|w_n\|_{B_0} = 1$. Logo existe uma subsequência de (w_n) que converge fracamente em B_0. Além disso, como a imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta, existe uma subsequência de (w_n), ainda denotada por (w_ν), que converge forte para w em B. No entanto, devido a imersão $B \hookrightarrow B_1$ e (C.5), concluímos que (w_ν) converge fortemente para zero em B. Portanto, $w = 0$. Contradição com (C.3). Isso conclui a demonstração do Lema auxiliar. Passamos agora ao principal objetivo desta seção.

Lema C.2. *(Compacidade de Aubin-Lions) Sejam $1 < p_0, p_1 < \infty$, bem como os espaços de Banach B_0, B, B_1, tais que B_0 e B_1 são reflexivos. Além disso, as imersões $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ são contínuas, sendo a primeira delas compacta. Dado o número real $T > 0$, consideremos o espaço*

$$W = \{u; u \in L^{p_0}(I; B_0) \ e \ u' \in L^{p_1}(I; B_1)\},$$

com a norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + \|u\|_{L^{p_1}(I;B_1)}$. Nessas condições, W é um espaço de Banach. Além disso, $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(I; B)$.

Demonstração. Mostraremos que dada uma sequência (v_n) limitada em W, podemos obter uma subsequência de (v_n) que converge forte para v em $L^{p_0}(I,B)$. Sem perda de generalidade, vamos provar o caso $v=0$.

Seja $(v_n) \subset W$ uma sequência limitada. Devido ao Lema auxiliar, dado $\epsilon > 0$, existe $c(\epsilon)$, tal que

$$\|v_n\|_B \leq \epsilon \|v_n\|_{B_0} + c(\epsilon)\|v_n\|_{B_1}.$$

Desse modo, para cada $\eta > 0$, existe $d(\eta)$, tal que

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B)} \leq \eta \|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_0)} + d(\eta)\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_1)}. \tag{C.6}$$

Sabemos que (v_n) é limitada em W, logo

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_0)} \leq \|v_n\|_W < C.$$

Levando essa desigualdade em (C.6), obtemos

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B)} \leq C\eta + d(\eta)\|v_n\|_{L^{p_0}(I,B_1)}. \tag{C.7}$$

Notamos que W é reflexivo, pois B_0 e B_1 o são. Logo podemos obter uma subsequência de (v_n), ainda denotada por (v_n), tal que $v_n \rightharpoonup 0$ em W. Para concluir a demonstração, afirmamos que é suficiente mostrar que (v_n) converge fortemente para zero em $L^{p_0}(I,B_1)$. De fato, sabemos que W tem imersão contínua em $C^0(I;B_1)$ veja *J. L. Lions, E. Magenes* [13], [1969]. Logo

$$\|v_n(s)\|_{B_1} \leq \|v_n\|_{C^0(I;B_1)} \leq C_0\|v_n\|_W < C \tag{C.8}$$

Se mostrarmos que $\|v_n(s)\|_{B_1}$ converge para zero quase sempre em $(0,T)$, concluiremos de (C.8) que $\|v_n(s)\|_{B_1}^{p_0}$ é limitada e converge para zero em $(0,T)$. Logo pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, teremos que $\|v_n\|_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $L^{p_0}(I;B_1)$. De volta a (C.7), concluímos que (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(I;B)$, o que conclui a prova da compacidade da imersão de W em $L^{p_0}(I;B)$.

Portanto, resta-nos mostrar que $\|v_n(s)\|_{B_1}$ converge para zero em $(0,T)$. O que faremos para o caso $s=0$. Seja w_n dada por

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \qquad \lambda > 0,$$

em que λ é uma constante a determinar. Temos

$$w_n(0) = v_n(0),$$

$$\|w_n(t)\|_{L^{p_0}(I;B_0)} \leq C_1 \lambda^{-1/p_0},$$

$$\|w_n'(t)\|_{L^{p_0}(I;B_1)} \leq C_2 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}}$$

Agora tomemos $\theta \in C^1(I;\mathbb{R})$, tal que $\theta(0) = -1$ e $\theta(T) = 0$. Temos que

$$w_n(0) = \int_0^T (\theta w_n)' dt = \int_0^T \theta w_n' dt + \int_0^T \theta' w_n dt = \beta_n + \gamma_n$$

Segue-se que

$$\|w_n(0)\|_{B_1} \leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \leq C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} + \|\gamma_n\|_{B_1}.$$

Agora para cada $\epsilon > 0$, tomemos $\lambda > 0$, tal que $C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Por outro lado, seja a integral em B_0 dada por

$$\gamma_n = \int_0^T \theta' w_n dt.$$

Dada $\psi \in B_0'$, temos que

$$\psi(\gamma_n) = \int_0^T \theta' \gamma(w_n) dt$$

converge para zero. Logo γ_n converge fracamente para zero em B_0. Como a imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta, resulta que γ_n converge fortemente para zero em B. Notando que v_n converge fracamente para zero em W e que $W \hookrightarrow L^{p_0}(I;B_0)$, vemos que v_n converge fracamente para zero em $L^{p_0}(I;B_0)$. Segue-se que para $\lambda > 0$ fixo, w_n converge fracamente para zero em $L^{p_0}(I;B_0)$. Desse modo, $v_n(0) = w_n(0)$ converge fortemente para zero em B_1. Isso conclui a demonstração. $\square$

C.2 Derivada Fracionária

Nessa seção vamos definir os objetos relacionados com a transformada de Fourier e que foram usados na última seção do capítulo 4. Nosso principal objetivo é demonstrar um resultado de compacidade para derivada fracionária devido a *J. L. Lions* [12], [1969]. Seguimos as ideias apresentadas em *L. A. Medeiros* [20], [2001], p. 54-58.

Sejam os espaços de Hilbert B_0, B e B_1, tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$. Dada uma função $u : \mathbb{R} \to B_1$, definimos sua transformada de Fourier por

$$\widehat{u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\tau t} u(t)dt.$$

A transformada inversa é dada por

$$\widehat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\tau t} \widehat{u}(\tau)d\tau.$$

Dado um número real γ, definimos a *derivada fracionária* D_t^γ de ordem γ da função $u(t)$ por

$$\widehat{D_t^\gamma u(t)} = (2\pi i\tau)^\gamma \widehat{u}(\tau).$$

Supondo γ positivo, definimos

$$H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1) = \{u;\ u \in L^2(\mathbb{R}, B_0) \text{ e } |\tau|^\gamma \widehat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}, B_1)\}.$$

Definimos uma norma em nesse espaço dada por

$$\|u\|^2_{H^\gamma(\mathbb{R};B_0,B_1)} = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},B_0)} + \||\tau|^\gamma \widehat{u}(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R},B_1)}.$$

Podemos mostrar que o espaço $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$ com essa norma é um espaço de Hilbert. Dado $K \subset \mathbb{R}$, representemos por H_K^γ o subespaço de H^γ cujas funções têm suporte contido em K. Temos o seguinte resultado de compacidade.

Teorema C.1. *Sejam B_0, B e B_1, espaços de Hilbert, tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$. Se $\gamma > 0$ e $K \subset \mathbb{R}$ é limitado, então*

$$H_K^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\mathbb{R}, B).$$

Demonstração. Seja (u_m) uma sequência limitada em $H^\gamma_K(\mathbb{R}; B_0, B_1)$. Vamos mostrar que (u_m) possui uma subsequência que converge fortemente em $L^2(\mathbb{R}, B)$. Primeiramente notamos que, como $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$ é um espaço de Hilbert, existe uma subsequência de (u_m), ainda denotada por (u_m), que converge fracamente para $u \in H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$. Logo a sequência (v_m) dada por $v_m = u_m - u$ converge fracamente para zero em $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$. Segue-se que

$$v_m \rightharpoonup 0 \qquad \text{fraco em } L^2(\mathbb{R}, B_0),$$

$$v_m \rightharpoonup 0 \qquad \text{fraco em } L^2(\mathbb{R}, B_1).$$

Resta mostrar que (v_m) converge fortemente para zero em $L^2(\mathbb{R}, B)$.

Observação C.1. *Devido ao Lema auxiliar C.1, para cada $\epsilon > 0$, existe $c(\epsilon) > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R},B)} \leq \epsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R},B_0)} + c(\epsilon)\|u\|_{L^2(\mathbb{R},B_1)}.$$

Sabemos que (v_m) é limitada em $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$. Logo (v_m) é limitada em $L^2(\mathbb{R}, B_0)$. Se mostrarmos que (v_m) converge para zero em $L^2(\mathbb{R}, B_1)$, devido a observação acima, teremos

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R},B)} \leq K\epsilon,$$

para cada $\epsilon > 0$. Isso implicaria que (v_m) converge para zero em $L^2(\mathbb{R}, B)$. Portanto, basta mostrarmos que $v_m \to 0$ em $L^2(\mathbb{R}, B_1)$. Ou ainda,

$$\lim_{m\to\infty} \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R},B_1)} = 0.$$

Usando a identidade de Parseval, temos

$$J_m = \int_{\mathbb{R}} \|v_m(t)\|^2_{B_1} dt = \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{v}_m(\tau)\|^2_{B_1} d\tau$$

Devemos mostrar que $\lim_{m\to\infty} J_m = 0$. Temos:

$$J_m = \int_{|\tau|\leq M} \|\widehat{v}_m(\tau)\|^2_{B_1} d\tau + \int_{|\tau|>M} (1 + |\tau|^\gamma)\|\widehat{v}_m(\tau)\|^2_{B_1}(1 + |\tau|^\gamma)^{-1} d\tau$$

$$\leq \int_{|\tau|\leq M} \|\widehat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau + \frac{C}{1+M^{2\gamma}},$$

em que usamos o fato de (v_m) ser limitada em $H^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$. Dado $\epsilon > 0$, escolhemos M de modo que

$$\frac{C}{1+M^{2\gamma}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Desse modo obtemos

$$J_m \leq \int_{|\tau|\leq M} \|\widehat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau + \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora vamos mostrar que a integral no segundo membro da desigualdade acima converge para zero quando $m \to \infty$. Usaremos o teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Seja χ função característica de K. Temos $v_m = \chi v_m$, pois v_m tem suporte compacto em K. Temos por hipótese

$$\widehat{v}_m(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\tau t} v_m(t)\chi(t) dt.$$

Logo

$$\|\widehat{v}_m(\tau)\|_{B_1} \leq \|v_m\|_{L^2(\mathbb{R},B_1)} \|e^{-2\pi i\tau t}\chi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Além disso, como $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ e (v_m) é limitada em $L^2(\mathbb{R}, B_0)$, temos que $\|\widehat{v}_m(\tau)\|_{B_1} < C$. Agora dada $w \in B_0$, temos

$$(\widehat{v}(\tau), w)_{B_0} = \int_{\mathbb{R}} (v_m(t), e^{-2\pi i\tau t} w\chi(t))_{B_0} dt,$$

em que $v_m \rightharpoonup 0$ em $L^2(\mathbb{R}; B_0)$. Logo

$$\lim_{m\to\infty} (\widehat{v}_m(\tau), w)_{B_0} = 0 \quad \forall w \in B_0.$$

Ou ainda, $\widehat{v}_m(\tau) \rightharpoonup 0$ em B_0. Como a imersão $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B$ é compacta, concluímos que $\widehat{v}_m \to 0$ em B. Logo $\widehat{v}_m \to 0$ em B_1. Portanto, $\|\widehat{v}_m(\tau)\|_{B_1}$ é limitada e convergente. Segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{v}_m(\tau)\|_{B_1}^2 d\tau \to 0.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Fluid Mech. **16** (1966) 1-18.

[2] C. Calmelet-Eluhu and D. R. Majundar, *Flow of a micropolar fluid trhough a circular cylinder subject to longitudinal and torsional oscilations*, Math. Comput. Modelling. **27** (8) (1998) 69-78.

[3] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, New Delhi, 1955.

[4] Frehse J. and J. Málek, *Problems duo to the no-slip boundary in incompressible fluids dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003 .

[5] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

[6] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids, Theory and applications*, Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 1999.

[7] G. M. de Araújo, S. B. de Menezes and R. B. Gúzman, *Approximation of the Navier-Stokes System With Variable Viscosity By a System of Cauchy-Kowaleska Type*, Mathematical Methods in The Applied Sciences, New York; **31** (2008) 1409-1425.

[8] G. Vitali, *Sull' Integrazione per Serie,* Rendiconti Circolo Mat. Palermo, **23** (1907) 137-155.

[9] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[10] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (in German), 1992.

[11] J. L. Boldrini, M. Durán and M. A. Rojas-Medar, *Existence and Uniqueness of Strong Solution for the Incompressible Micropolar Fluid Equations in Domain of* $\mathbb{R}^3$, Ann Univ Ferrara **56** (2010) 37-51.

[12] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[13] J. L. Lions, E. Magenes, *Problémes Aux Limites Non Homogènes et Applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1969.

[14] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta and M. Růžička, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman & Hall, First Edition, 1996.

[15] J. Málek, J. Nečas, and M. Růžička, *On weak solutions to a class of non-Newtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case* $p \geq 2$, Advances in Differential Equations, **6**(3)(2001) 257-302.

[16] J. Málek, K. R. Rajagopal, and M. Růžička, *Existence and regularity of solution and stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity*, Math. Models Methods Appl. Sci. **5**(6)(1995) 789-812.

[17] J. Nečas, *Sur le normes équivalentes dans* $W_p^k(\Omega)$ *et sur la coercivité des formes formellement positives*, in Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Montreal (1966) 102-128

[18] J. Nečas and Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-Plastic Bodies: An Introduction*, Studies in Applied Mechanics, 3, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.

[19] J. R. Choksi, *Vitali's Convergence Theorem on Term by Term Integration*, L'Enseignement Mathématique, **47** (2001), 269-285.

[20] L. A. Medeiros, *Lições de Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro - RJ, 2001.

[21] L. Schwartz, *Théorie des distribuitions*, Vols. I, II. Hermann, Paris, 1950-1951 (2^o édition 1957).

[22] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Vol. 1-3. Interscience, New York, 1958.

[23] N. Kishan and S. Jagadha, *MHD Effects on Non-Newtonian Micropolar Fluid with Uniform Suction/ Blowing and Heat Generation in the Presence of Chemical Reaction and Thermophoresis* **2**(9)(2013) 1567-1573.

[24] N. Yamaguchi, *Existence of Global Strong Solution to the Micropolar Fluid System in a Bounded Domain*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **28**(2005) 1507-1526.

[25] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, Science Publishers, New York. (1963).

[26] P. Szopa, *On Existence and Regularity of Solutions for 2-D Micropolar Fluid Equations with Periodic Boundary Conditions* , Mathematical Methods in the Applied Sciences **30**(2007) 331-346.

[27] R. Ellahi, S. U. Rahman, M. Mudassar Gulzar, S. Nadeem and K. Vafai, *A Mathematical Study of Non-Newtonian Micropolar Fluid in Arterial Blood Flow Through Composite Stenosis* **8**(4)(2014) 1567-1573.

[28] R. Temam, *Mathematical Problems in Plasticity*, Gauthier Villars, Paris, 1985.

[29] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland Publishing Company, 1979.

[30] Rajagopal, K. R., *Mechanics of non-Newtonian Fluids. In: Recent Developments in Theoretical Fluid Mechanics, Galdi, G. P. and Nečas, J. (eds)*, Pitman Research Notes in Mathematics, Series 291, Longman Scientific & Technical, Essex, 129-162, 1993.

[31] W. L. Wilkinson, *Non-Newtonian fluids*, Pergamon Press, Oxford, 1960.