



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Análise Numérica em Diferenças Finitas
da Desigualdade de Observabilidade de
Sistemas Hiperbólicos Conservativos**

Anderson de Jesus Araújo Ramos

Belém

2015

Anderson de Jesus Araújo Ramos

Análise Numérica em Diferenças Finitas da Desigualdade de Observabilidade de Sistemas Hiperbólicos Conservativos

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Doutorado em Matemática - UFPA, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior**

Agência Financiadora: **FAPESPA**

Belém

2015

Ramos, Anderson de Jesus Araújo

Análise Numérica em Diferenças Finitas da Desigualdade de Observabilidade de Sistemas Hiperbólicos Conservativos/(Anderson de Jesus Araújo Ramos); orientador, Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior- 2015.

134 f. il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Doutorado em Matemática. Belém, 2015.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Análise Numérica. 3. Diferenças Finitas. I. Almeida Júnior, Dilberto da Silva, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 515.35

Análise Numérica em Diferenças Finitas da Desigualdade de Observabilidade de Sistemas Hiperbólicos Conservativos

por

Anderson de Jesus Araújo Ramos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA - UFPA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

Aprovada em 06 de fevereiro de 2015 por:



Orient.: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (PDM-UFPA)



Dr. Mauro de Lima Santos (PDM-UFPA)



Dr. Alexandre Loureiro Madureira (LNCC)



Dr. Valcir João da Cunha Farias (PPGME-UFPA)



Dr. Anderson David de Souza Campelo (PPGME-UFPA)

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

(Arthur Schopenhauer)

Agradecimentos

– Ao meu Senhor Jesus Cristo, “... *no qual existem escondidos todos os tesouros da sabedoria e da ciência. Colossenses 2:3.*”, por ter me dado graça, paz, tranquilidade, ciência e entendimento nos momentos mais difíceis desta árdua tarefa.

– À minha noiva e futura esposa Neila Alves, pelo amor, carinho, companheirismo e compreensão demonstrada durante este percurso. Eu te amo. “*A casa e os bens são herança dos pais; porém do Senhor vem a esposa prudente. Provérbios 19:14*”.

– Aos meus pais: Mário e Odete, pelo amor, dedicação e exemplo, que alicerçaram minha formação e aos meus irmãos: Andrey, Andressa e André. “*Honra a teu pai e a tua mãe, para que se prolonguem os teus dias na terra que o Senhor teu Deus te dá. Êxodo 20:12*”.

– Ao meu orientador e amigo, Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, que desde o mestrado tem me instruído no caminho da pesquisa. “*Instrui ao sábio, e ele se tornará mais sábio; Ensina ao justo, e ele crescerá na ciência. Provérbios 9:9*”.

– Aos professores: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, Dr. Mauro de Lima Santos, Dr. Alexandre Loureiro Madureira, Dr. Valcir João da Cunha Farias e Dr. Anderson David de Sousa Campelo por aceitarem avaliar este trabalho. “*O bom siso te guardará e a inteligência te conservará. Provérbios 2:11*”.

– Ao corpo docente do PDM, em especial aos professores: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, Dr. Mauro de Lima Santos, Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa, pelos ensinamentos. “*Inclina o teu ouvido e ouve as palavras dos sábios, e aplica o teu coração ao meu conhecimento. Provérbios 22:17*”.

– Aos meus amigos: Lindomar Ribeiro, Renato Lobato, Anderson Campelo, Sebastião Cordeiro, Marcos Lima, Manoel Jeremias, João Fortes e Marly dos Anjos pelo companheirismo e incentivo. “... *há um amigo mais chegado do que um irmão. Provérbios 18:24*”.

– Às minhas colegas de trabalho: Cristina, Leila, Danuza e Dayziane, pela disposição em me ajudarem num momento difícil desta trajetória (ano 2012). “... *com toda a certeza vos afirmo que de modo algum perderá a sua recompensa. Mateus 10:42*”.

– Por fim, agradeço à FAPESPA pela bolsa de estudos que viabilizou este projeto.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Análise Numérica em Diferenças Finitas da Desigualdade de Observabilidade de Sistemas Hiperbólicos Conservativos

por Anderson de Jesus Araújo Ramos

Neste trabalho, analisamos a desigualdade de observabilidade ao nível do contínuo para um sistema de ondas acopladas e posteriormente para o sistema de Timoshenko. Em seguida, provamos que tal desigualdade não é válida no limite de h (parâmetro de malha) tendendo à zero em um domínio semidiscretizado pelo método de diferenças finitas, devido a presença de soluções espúrias introduzida pelo método. Para resolvermos esse problema identificamos as soluções espúrias e a partir daí, construímos uma subclasse de soluções numéricas filtradas que são uniformemente observáveis tanto para o sistema de ondas acopladas quanto para o sistema de Timoshenko.

Palavras-Chave: equações acopladas, desigualdade de observabilidade, diferenças finitas, semidiscretização.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Numerical Analysis in Finite-Difference Method of Observability Inequality of the Conservative Hyperbolic Systems

by Anderson de Jesus Araújo Ramos

In this work, we analyzed the observability inequality at the continuum-level for a coupled wave and to Timoshenko system. Next, we proved that inequality is not valid on h limit (mesh parameter) tend to zero in a semi-discretized domain by finite-difference method, due to spurious solutions presented for the method. For answer that problem, we identified the spurious solutions and from this we created a subclass of numerical solutions filtered, which are uniformly observables as to coupled wave system much as to Timoshenko system.

Keywords: coupled equations, observability inequality, finite-differences, semi-discretization.

Sumário

Símbolos	viii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações Gerais e Motivações	1
1.2 Objetivo da Tese	11
1.3 Organização da Tese	11
2 SISTEMA DE ONDAS ACOPLADAS	13
2.1 Introdução dos Principais Resultados	13
2.2 Modelo de Ondas Acopladas	16
2.3 Desigualdade de Observabilidade	17
3 SEMIDISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE ONDAS ACOPLADAS	21
3.1 Semidiscretização em Diferenças Finitas	21
3.1.1 Observabilidade Espectral Não Uniforme	25
3.2 Observabilidade Uniforme: Filtragem Numérica	33
3.2.1 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.8	45
3.2.2 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.9	47
3.3 Observabilidade Uniforme: Via Desigualdade de Ingham	48
3.3.1 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.8	56
3.3.2 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.9	58
4 SISTEMA DE VIGAS DE TIMOSHENKO	60
4.1 Introdução	60
4.2 Conservação de Energia	61
4.3 Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares	62

4.4	Problema Espectral	66
4.5	Desigualdade de Observabilidade	72
5	SEMIDISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE VIGAS DE TIMOSHENKO	77
5.1	Dinâmica Numérica Semidiscreta	77
5.1.1	Problema Espectral Semidiscreto	80
5.1.2	Observabilidade dos Autovetores	89
5.2	Observabilidade Uniforme em Diferenças Finitas	97
5.2.1	Resultados Preliminares	97
5.2.2	Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 5.10	112
6	ALGUNS COMENTÁRIOS E PROBLEMAS EM ABERTO	115
6.1	Sobre o Sistema de Ondas Acopladas	116
6.2	Sobre o Sistema de Vigas de Timoshenko	117
	Referências Bibliográficas	120

Símbolos

Símbolo	Nome
u	deslocamento da corda u
v	deslocamento da corda v
α	constante de acoplamento
φ	deslocamento transversal da viga
ψ	rotação na seção transversal da viga
ρ	densidade de massa do material do qual a viga é composta
A	área da seção transversal
I	momento de inércia da área da seção
E	módulo de elasticidade de Young
G	módulo de rigidez do cortante
k	fator de correção do cortante
ρ_1	ρA
κ	kGA
ρ_2	ρI
b	EI
v_1^2	κ/ρ_1 (velocidade)
v_2^2	b/ρ_2 (velocidade)

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O objetivo principal desta tese diz respeito a análise numérica de modelos matemáticos hiperbólicos e conservativos em estruturas do tipo cordas acopladas pelas hipóteses de Winkler [1] e do tipo vigas planas governadas pelas hipóteses de Timoshenko [2, 3].

1.1 Considerações Gerais e Motivações

Os modelos matemáticos envolvendo sistemas contínuos unidimensionais e bidimensionais de vibração são muito importantes tanto do ponto de vista teórico, quanto do ponto de vista técnico. Muitas estruturas modernas de engenharia fazem uso de elementos contínuos unidimensionais resistentes a tensão, mas não a flexão (por exemplo: cordas, cabos, correntes, etc) [4–10]. Uma corda, sendo o modelo mais simples de um sistema contínuo unidimensional tem sido um assunto de grande interesse científico. Este facto é confirmado pelo grande número de referências que encontramos na literatura. Os diferentes aspectos da dinâmica de cordas são tratados por diversos pesquisadores e muitos estudos recentes são dedicados aos problemas de vibração de cordas.

Em 2000, Z. Oniszczuk [11] investigou as vibrações transversais de um sistema de cordas paralelas continuamente unidas por um elemento elástico do tipo Winkler. As cordas são esticadas sob tensões constantes adequadas e submetidas a cargas contínuas arbitrariamente distribuídas. O sistema é constituído de duas equações diferenciais parciais não homogêneas acopladas

$$m_1 \ddot{w}_1 - S_1 w_1'' + k(w_1 - w_2) = f_1 \quad (1.1)$$

$$m_2 \ddot{w}_2 - S_2 w_2'' + k(w_2 - w_1) = f_2, \quad (1.2)$$

onde $w_i = w_i(x, t)$ é o deslocamento transversal da corda, $f_i = f_i(x, y, t)$ é a excitação da carga distribuída, as variáveis x, t são as coordenadas espacial e temporal, F_i é a área da seção transversal da corda, h é a altura de um elemento elástico, k é o módulo de rigidez de um elemento elástico de Winkler, l é o comprimento da corda, S_i é a tensão da corda, ρ_i é a densidade de massa e $m_i = \rho_i F_i$.

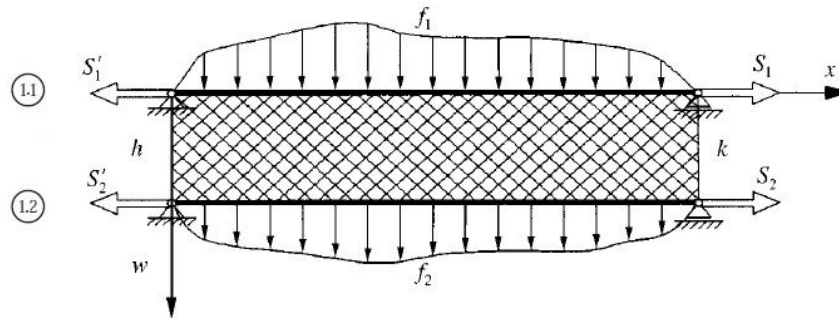


FIGURA 1.1: Modelo físico de cordas acopladas elasticamente

As condições de fronteira e as condições iniciais para este problema tem a forma

$$w_i(0, t) = w_i(l, t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (1.3)$$

$$w_i(x, 0) = w_{i0}(x), \quad \dot{w}_i(x, 0) = w_{i1}(x), \quad i = 0, 1. \quad (1.4)$$

Neste trabalho o autor desenvolve a teoria de vibração de ondas livres exibindo a solução do sistema em séries de Fourier e determinando as frequências e modos de vibrações naturais.

Não menos citados, são os trabalhos que abordam as estruturas flexíveis do tipo vigas planas, bem estabelecidas na literatura matemática e em engenharia mecânica. Em 1946, Hetenyi [12], realizou um estudo amplo de vigas apoiadas considerando diferentes teorias em fundações elásticas de comprimento infinito e finito com diversas condições de contorno, submetidas à

cargas estáticas. Dentre as teorias mais conhecidas destacamos: a de Euler-Bernoulli, Winkler, Rayleigh, Vlasov (também conhecida como teoria de corte) e a de Timoshenko.

A dinâmica do modelo de Euler-Bernoulli para vigas, leva em consideração a energia de estiramento ou potencial em função da flexão da estrutura e a energia cinética em função do deslocamento lateral. Por outro lado, a hipótese fundamental da teoria de Winkler é a de que as forças reativas da base, em um ponto da viga, são proporcionais à flexão daquele ponto, isto é, o modelo da base elástica segue a Lei de Hooke. O estudo dessa teoria teve início em 1867, quando Winkler modelou os trilhos de uma estrada de ferro como viga elástica continuamente apoiada e sujeita à aplicação de forças concentradas. Neste modelo o solo é assimilado por uma série de molas independentes com comportamento elástico e linear. A rigidez dessas molas é assim caracterizada por uma constante de proporcionalidade entre a pressão aplicada q e o deslocamento do solo y , constante essa designada pelo coeficiente de reação k .

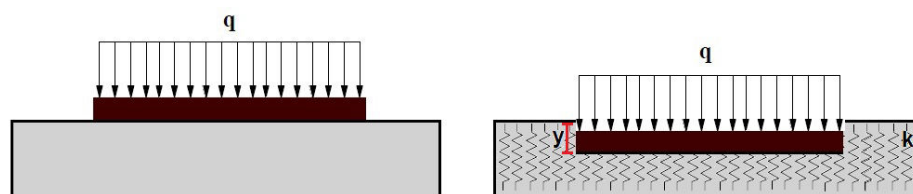


FIGURA 1.2: Modelo de Winkler - Fundações superficiais

A constante k é assim definida como sendo a pressão necessária para provocar um deslocamento unitário. Este modelo também pode ser utilizado para a análise de fundações de estacas sob ações laterais.

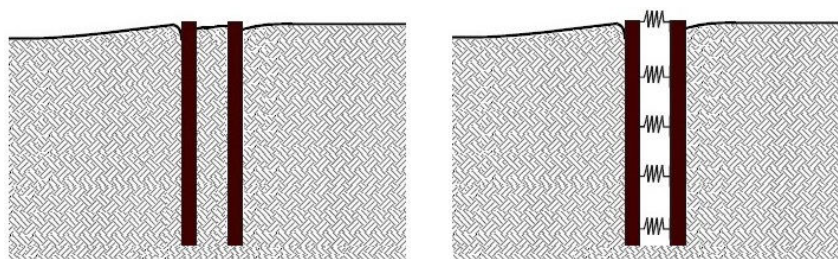


FIGURA 1.3: Modelo de Winkler - Fundações laterais

Inicialmente, os campos de aplicação dessa teoria eram muito restritos. Após os primeiros investigadores terem afirmado que o solo era o único meio de suporte, descobriram que haviam outros campos onde as condições de Winkler, para a análise de flexão de vigas sobre base

elástica, eram mais rigorosamente satisfeitas. Dois exemplos de campos de aplicação são de particular importância: um é a aplicação em malhas de vigas, as quais são características na construção de assoalhos de embarcações, edifícios e pontes; o outro, na aplicação de cascas de revolução, que incluem objetos como recipientes, caldeiras, containers e etc [12].

Em melhoria à teoria de vigas proposta e desenvolvida por Euler-Bernoulli que leva em consideração a energia de estiramento ou potencial em função da flexão da estrutura e a energia cinética em função do deslocamento lateral, Rayleigh considera o fato de que as seções transversais da estrutura sofrem rotações em relação ao seu eixo central. Vlasov, por sua vez, foi o primeiro a adicionar sobre as hipóteses de Euler-Bernoulli o efeito de distorção cisalhante, comumente conhecida como tensão de corte nas seções transversais. Timoshenko [2, 3], foi mais além ao propor uma teoria de vigas que adiciona o efeito potencial devido ao esforço cortante bem como o efeito de rotação nas seções.

De um modo geral, descrevemos as equações unidimensionais que governam a teoria de Timoshenko para o estiramento de vigas de acordo com as seguintes equações:

$$\rho A \varphi_{tt}(x, t) = S_x(x, t), \quad (1.5)$$

$$\rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - S(x, t), \quad (1.6)$$

em que t é o tempo, x a distância ao longo da linha central da viga, φ o deslocamento transversal, ψ a rotação nas seções transversais, ρ a densidade de massa do material do qual a viga é composta, M o momento de curvatura, S o esforço cortante, A a área da seção transversal e I o momento de inércia da área da seção.

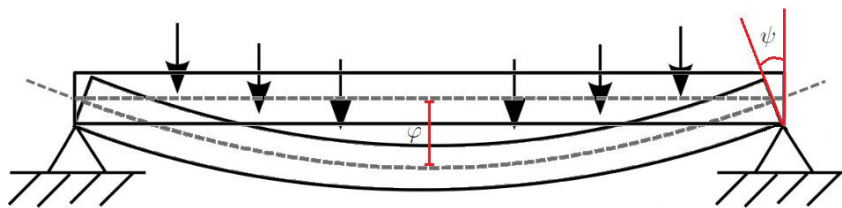


FIGURA 1.4: Modelo de vigas de Timoshenko

As relações de tensão-estiramento para o comportamento elástico da viga são dadas por:

$$M(x, t) = EI \psi_x(x, t), \quad (1.7)$$

$$S(x, t) = kAG(\varphi_x + \psi)(x, t), \quad (1.8)$$

em que E é o módulo de elasticidade de Young, G o módulo de rigidez do cortante e k o fator de correção do cortante. Dessa forma Timoshenko estabeleceu as seguintes equações diferenciais parciais hiperbólicas e acopladas:

$$\rho A \varphi_{tt} - kAG(\varphi_x + \psi)_x = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T), \quad (1.9)$$

$$\rho I \psi_{tt} - EI \psi_{xx} + kAG(\varphi_x + \psi) = 0, \text{ em } (0, L) \times (0, T). \quad (1.10)$$

Sistemas do tipo (1.9) – (1.10) surgem em muitas aplicações em engenharia. Em particular, podem ser visto como um modelo simplificado de vibração quando as dimensões da seção transversal da viga não são desprezíveis em comparação com o seu comprimento e é necessário considerar o efeito da inércia rotativa (ver [13–15]).

Podemos afirmar que uma questão fundamental que surge em todas as equações diferenciais parciais vistas até o presente momento é o estudo do problema de controle. Pois controlar oscilações em problemas traduzidos em termos de uma equação diferencial parcial de evolução tem despertado o interesse de muitos pesquisadores nos últimos anos. Até onde se tem conhecimento, tudo teria começado no início da década de 60, quando R.E. Kalman introduziu dois conceitos (controlabilidade e observabilidade) que, desde então, tornaram-se a espinha dorsal da teoria de controle moderno (ver [16–19]). Com a *Controlabilidade* e a *Observabilidade*, pode-se classificar um sistema de controle sem precisar primeiro encontrar a solução na forma fechada. Um sistema linear é dito ser controlável, se existe, pelo menos, uma entrada que conduz o vetor de estado à origem. Por outro lado, um sistema linear é observável se existe, pelo menos, uma saída de tal modo que o estado inicial pode ser determinado.

A controlabilidade é uma das propriedades mais estudadas em EDP, provavelmente porque uma EDP controlável também é estabilizável, e a recíproca também é válida para uma ampla classe de EDP's. Observamos que, para uma EDP, temos à nossa disposição três conceitos de controlabilidade, ou seja, a controlabilidade exata (qualquer par de vetores de estado pode ser ligado por uma trajetória), a controlabilidade nula (qualquer vetor de estado pode ser dirigido a 0) e a controlabilidade aproximada (qualquer vetor de estado pode ser dirigido arbitrariamente próximo de um outro vetor de estado).

Mesmo que esses conceitos (controlabilidade e observabilidade) possam ser de certa forma equivalentes e que este último se resuma a encontrar uma desigualdade indireta, a construção de tal desigualdade usa sofisticadas ferramentas adaptadas à EDP sob investigação, como exemplo pode-se mencionar a análise microlocal dando resultados afiados para a equação de ondas, ou

as estimativas de Carleman para a controlabilidade nula da equação do calor. Outros métodos têm sido desenvolvidos para o controle de equações de onda, por exemplo, o método das séries de Fourier não harmônicas bem adaptado para a EDP unidimensional, o método multiplicativo, entre outros. Estas propriedades têm sido estudadas em profundidade, tanto no contínuo quanto em casos discretos, onde se pode ver semelhanças impressionante, se não idênticas aos resultados contínuos.

Controle em Equações Diferenciais Parciais

Retomando a discussão levantada acima, cabe mencionar que pesquisadores da área de matemática têm investido muito tempo e esforço no desenvolvimento de diversos métodos e esquemas numéricos para resolução numérica de EDP's. Importantes contribuições nesse sentido foram alcançadas nos trabalhos de Glowinski *et al.* [20–22] onde foi estudado o problema

$$\mathcal{P} := \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u^1(x), \\ u = g & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \end{cases}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suave, Γ sendo a fronteira, $g \in L^2(\Sigma)$ o controle, $u^0 \in L^2(\Omega)$ e $u^1 \in H^{-1}(\Omega)$ as condições iniciais. Além disso, Lions [23] provou que a solução do problema \mathcal{P} satisfaz o problema de controlabilidade exata na fronteira, isto é:

Dado $T > 0$ e condições iniciais $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe um controle $g \in L^2(\Sigma_0)$ tal que

$$u(x, T) = \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.11)$$

Isto foi demonstrado, usando a implementação do Método de Unicidade Hilbertiana (HUM), descrito nos trabalhos de Lions [23–25]. Por questões didáticas nomearemos alguns passos do método HUM que nos auxiliarão no bom entendimento.

1º Passo: *Problema homogêneo adjunto*

Dado $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ consideramos

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ \phi = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ \phi(x, 0) = \phi^0(x), \phi'(x, 0) = \phi^1(x), & \forall x \in Q, \end{cases} \quad (1.12)$$

o qual possui uma única solução. Aqui, usamos ' para denotar a derivação em relação ao tempo.

2º Passo: *Problema de controlabilidade exata na fronteira*

Uma vez calculada a solução de (1.12), passamos a resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{em } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(x, T) = u'(x, T) = 0 & \forall x \in \Omega, \\ u = \frac{\partial \phi}{\partial \nu} & \text{sobre } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T), \end{cases} \quad (1.13)$$

onde $\nu = \nu(x)$ denota o vetor normal unitário exterior à Ω no ponto $x \in \Gamma$ e $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_0)$ é a derivada de ϕ nesta direção. O problema (1.13) possui novamente uma única solução regular.

3º Passo: *Operador* $\Lambda\{\cdot, \cdot\}$

Definimos o operador

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{u^1, -u^0\}, \quad (1.14)$$

e multiplicamos a primeira equação de (1.13) por $\theta = \theta(x, t)$, uma solução do problema homogêneo (1.12) com dados iniciais $\{\theta^0, \theta^1\}$ para então obtermos

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\theta^0, \theta^1\} \rangle := \int_{\Omega} (u^1 \theta^0 - u^0 \theta^1) dx = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma, \quad (1.15)$$

onde $d\Sigma = d\Gamma dt$ representa a medida sobre a superfície lateral do cilindro Q . Definimos a norma

$$\left\| \{\phi^0, \phi^1\} \right\|_F = \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma, \quad (1.16)$$

sobre o espaço $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, que induz o produto interno

$$\langle \{\phi^0, \phi^1\}, \{\theta^0, \theta^1\} \rangle_F := \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma. \quad (1.17)$$

Considerando a estrutura algébrica (1.16) – (1.17) definimos o espaço de Hilbert

$$F = \overline{\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_F}. \quad (1.18)$$

Graças a (1.17), o operador Λ se estende a um operador linear e contínuo de F em F' . Por outro lado, de (1.16) deduzimos que

$$\Lambda : F \longrightarrow F' \quad \text{é um isomorfismo.} \quad (1.19)$$

Em particular, se queremos mostra a controlabilidade exata em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, precisamos provar que $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ou equivalentemente

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

De fato, a inclusão $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset F$ é imediata, haja visto (1.18) e a densidade de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Resta então provar a inclusão

$$F \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

que é garantida mediante a desigualdade indireta

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq C(T) \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F, \quad \text{com } C(T) > 0, \quad (1.20)$$

também chamada de *Desigualdade de Observabilidade* do problema homogêneo (1.12).

Analisando o problema de controlabilidade exata na fronteira (1.13) através do método HUM, fica evidente sua equivalência com o problema de observabilidade na fronteira, dado por (1.12) e (1.20).

Para avanços mais recentes no que diz respeito ao problema de observabilidade numérica na fronteira, podem ser citados, por exemplo, os trabalhos de Infante e Zuazua [26], Zuazua [27] e Münch [28].

Em [26] os autores estudaram a versão semidiscreta do problema de vibrações de ondas, ou seja, o esquema numérico do tipo

$$\begin{aligned} u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, & 0 < t < T, \\ u_0(t) = u_{J+1}(t) &= 0, & & 0 < t < T, \\ u_j(0) = u_j^0, & u_j'(0) = u_j^1, & j = 0, 1, 2, \dots, J+1, & \end{aligned}$$

onde conseguiram obter expressivos resultados sobre a perda de observabilidade das soluções numéricas e posteriormente mostraram a subclasse $\mathcal{C}_h(\gamma)$ de soluções que são observáveis, desde que obedecida a relação $0 < \gamma < 4$.

Münch [28] estudou o problema totalmente discreto dado por

$$\begin{aligned} (1 + \theta h^2 \Delta_h) \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{h^2} \right) - \Delta_h \left(\alpha u_j^{n+1} + (1 - 2\alpha)u_j^n + \alpha u_j^{n-1} \right) &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, \\ u_0^n = u_{J+1}^n &= 0, & n = 0, 1, \dots, N, \\ u_j^0 = u_{j,0}, & (u_j^1 - u_j^{-1})/2\Delta t = u_{j,1}, & j = 0, 1, \dots, J+1. \end{aligned}$$

No problema acima o autor mostra a desigualdade de observabilidade no Teorema 3.2 e consequentemente uma perda de observabilidade no Teorema 3.4, desde que $\theta \in [0, 1/4)$, $\alpha = 1/4$ ou $\theta \geq 0$ e $\alpha > 1/4$.

A característica principal desses trabalhos é a utilização do método multiplicativo introduzido por Lions (ver [25, 29]) inicialmente para uso em modelos contínuo mas que vem sendo aplicado com sucesso em problemas discretizados por métodos de diferenças finitas e elementos finitos para se provar importantes resultados de controlabilidade, observabilidade, conservação e decaimento de energia em sistemas evolutivos.

No entanto, uma questão fundamental que permanece ainda em aberto é como criar esquemas numéricos capazes de preservar as propriedades de energia tais como: leis de conservação, positividade, decaimento exponencial entre outros e conseguir evitar as anomalias decorrentes dos esquemas numéricos aplicados a problemas acoplados, como por exemplo: sistemas de ondas acopladas e sistemas de Timoshenko.

Em Almeida Jr. [30], encontramos importantes contribuições nesse sentido para uma família parametrizada de esquemas numéricos em diferenças finitas onde se analisa as propriedades da energia do sistema de Timoshenko. Mostra-se também como evitar uma anomalia numérica

conhecida como *shear locking* para o esquema numérico do tipo

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_j'' - \kappa \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} - \kappa \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, 0 < t < T, \\ \rho_2 \psi_j'' - b \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} + \kappa \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + \kappa \frac{\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}}{4} &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, 0 < t < T, \end{aligned}$$

associado à diferentes condições de contorno, tais como:

(i) livre-livre

$$\begin{aligned} \kappa \left[\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right] &= 0, & \kappa \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] &= 0, \\ b \frac{\psi_1 - \psi_0}{h} - \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right] &= 0, & b \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} + \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

(ii) fixa-livre

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, & \kappa \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] &= 0, \\ \psi_0 &= 0, & b \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} + \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

(iii) apoiada-apoiada

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, & b \frac{\psi_1 - \psi_0}{h} - \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right] &= 0, \\ \varphi_{J+1} &= 0, & b \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} + \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

(iv) fixa-apoiada

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, & \varphi_{J+1} &= 0, \\ \psi_0 &= 0, & b \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} + \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] &= 0. \end{aligned}$$

(v) fixa-fixa

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{J+1} = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_{J+1} = 0.$$

Por outro lado, no que diz respeito a observabilidade semidiscreta, vale mencionar que desde

a publicação do primeiro artigo que trata sobre o assunto por Infante e Zuazua [26], até o presente trabalho, não se encontra na literatura nenhum trabalho que venha usar as técnicas desenvolvidas em [26] para estudar a perda de observabilidade das soluções numéricas em diferenças finitas semidiscretas, aplicadas à sistemas de ondas acopladas e muito menos para sistemas de Timoshenko. Sendo assim, além de ser um problema em aberto, nunca antes estudado na literatura, os resultados alcançados neste trabalho proporcionam meios para que outros problemas de mesma complexidade possam também ser estudados.

1.2 Objetivo da Tese

Movido pelos resultados apresentados anteriormente, que tratam da perda de observabilidade numérica para o problema de ondas livres, o principal objetivo desta tese é analisar o comportamento assintótico da constante de observabilidade, provando o blow-up e conseqüentemente encontrar uma subclasse de soluções filtradas onde o problema de observabilidade é válido uniformemente com h tendendo a zero, tanto para o sistema de ondas acopladas quanto para o sistema de Timoshenko.

1.3 Organização da Tese

No capítulo 2 deste trabalho fazemos um breve resumo dos resultados alcançados em [26] e depois entramos com o primeiro problema objeto de nosso estudo, a saber o sistema de equações de ondas acopladas em $1 - d$, dado por:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) &= 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) &= 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, v(0, t) = v(L, t) &= 0, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & \forall x \in (0, L), \end{aligned}$$

onde estabelecemos uma desigualdade de observabilidade ao nível do contínuo, válida para todo $T > 2L$ e conseqüentemente no Capítulo 3, analisamos a versão semidiscreta dada pelo

esquema numérico

$$\begin{aligned}
u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha(u_j - v_j)(t) &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, & 0 < t < T, \\
v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha(v_j - u_j)(t) &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, & 0 < t < T, \\
u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, & v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, & & 0 < t < T, \\
u_j(0) = u_j^0, & u_j'(0) = u_j^1, & v_j(0) = v_j^0, & v_j'(0) = v_j^1, & j = 0, 1, 2, \dots, J + 1,
\end{aligned}$$

que diferente do contínuo não vale para todo $T > 2L$ e sim para uma subclasse de soluções filtradas em $\mathcal{H}_h(\gamma)$. Vale ressaltar que os resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3 desta tese originaram um artigo intitulado “Observability inequality for the finite-difference semi-discretization of the 1 – d coupled wave equations”, o qual foi publicado em *Advances in Computational Mathematics* [31].

No Capítulo 4, estudamos o sistema de Timoshenko dado por:

$$\begin{aligned}
\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\
\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0, & \text{em } (0, L) \times (0, T), \\
\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi_x(L, t) &= 0, & 0 < t < T, \\
\varphi(x, 0) = \varphi_0, & \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, & \psi(x, 0) = \psi_0 & \psi_t(x, 0) = \psi_1, & \forall x \in (0, L),
\end{aligned}$$

onde na primeira seção mostramos uma desigualdade de observabilidade para o sistema contínuo seguido da solução e do problema de autovalor. No Capítulo 5, passamos a estudar a sua versão semidiscreta que de acordo com Almeida Jr. [30] é dada por

$$\begin{aligned}
\rho_1 \varphi_j'' - \kappa \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} - \kappa \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, & 0 < t < T, \\
\rho_2 \psi_j'' - b \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} + \kappa \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + \kappa \frac{\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}}{4} &= 0, & j = 1, 2, \dots, J, & 0 < t < T, \\
\varphi_0 = \varphi_{J+1} = \psi_0 &= 0, & & 0 < t < T, \\
b \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} + \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] &= 0, & & 0 < t < T, \\
\varphi_j(0) = \varphi_j^0, & \psi_j(0) = \psi_j^0, & \varphi_j'(0) = \varphi_j^1, & \psi_j'(0) = \psi_j^1, & j = 0, 1, \dots, J + 1,
\end{aligned}$$

onde iniciamos construindo alguns resultados preliminares na intenção de mostrarmos uma perda de observabilidade das soluções numéricas. Na sequência, provamos a observabilidade uniforme (Teorema 5.10), um dos principais resultados desta tese e no Capítulo 6 fazemos um cometário sobre alguns problemas em aberto. Os resultados obtidos nos Capítulos 4 e 5 desta tese deram origem a um trabalho que foi submetido para publicação.

SISTEMA DE ONDAS ACOPLADAS

2.1 Introdução dos Principais Resultados

Neste capítulo abordamos um problema importante de análise numérica teórica: a análise de uma desigualdade de observabilidade de um esquema numérico espacial de diferenças finitas aplicadas a um sistema conservativo de duas equações de ondas acopladas. Para uma melhor compreensão do problema que temos em mente, descrevemos brevemente os resultados de observabilidade na fronteira para uma única equação de onda.

É bem conhecido que a equação de onda 1 – d dada por

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \forall x \in (0, L), \quad (2.3)$$

tem a energia total de suas soluções estimada uniformemente através da energia concentrada no extremo $x = L$. Mais precisamente, para qualquer $T > 2L$ existe uma constante positiva $C(T)$

satisfazendo

$$E(0) \leq C(T) \int_0^T |u_x(L, t)|^2 dt, \quad (2.4)$$

para cada solução de energia finita de (2.1) – (2.3) onde a energia $E(t)$ é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx. \quad (2.5)$$

A estimativa (2.4) é conhecida como problema de observabilidade na fronteira (desigualdade de observabilidade / desigualdade inversa) e a melhor constante $C(T) > 0$ é chamada de constante de observabilidade. Indicamos aos leitores interessados as seguintes referências: Lions [25] e Komornik [29], para uma análise da equivalência entre controlabilidade e observabilidade através do Método de Unicidade Hiberniana (HUM).

Por outro lado, os esquemas semidiscretos geram à alta frequência, oscilações numéricas espúrias. Essas oscilações espúrias fracamente convergem para zero quanto $h \rightarrow 0$ e este fato é perfeitamente compatível com a propriedade de convergência. Além disso, uma constante $C(T)$ uniforme para a estimativa (2.4) é necessária e isso não é o caso apenas de esquemas numéricos elementares, tais como: diferenças finitas e elementos finitos padrão. As evidências numéricas sobre a perda de observabilidade numérica para o problema de observabilidade na fronteira foi observado pela primeira vez por R. Glowinski *et al.* [20–22] em conexão com a controlabilidade exata na fronteira da equação de onda e a implementação numérica do chamado método HUM. A desigualdade de observabilidade para versões semidiscretas de (2.4) foi notada pela primeira vez por Infante e Zuazua [26]. Eles identificaram que o problema de estimar a energia numérica total em termos da energia numérica concentrada na fronteira não é uniforme quanto $h \rightarrow 0$ para a semidiscretização em diferenças finitas dada por

$$u_j''(t) - \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (2.6)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.7)$$

$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J + 1. \quad (2.8)$$

A energia total de (2.6) – (2.8) é conservada ao longo do tempo t , isto é,

$$E_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[|u'_j(t)|^2 + \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 \right] = E_h(0), \quad \forall 0 < t < T. \quad (2.9)$$

Mais precisamente, em [26] foi analisada uma versão discreta de (2.4), isto é,

$$E_h(0) \leq C(T, h) \int_0^T |u_J(t)/h|^2 dt, \quad (2.10)$$

desde que $u_{J+1}(t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$.

O problema consiste em saber se a constante positiva $C(T, h)$ sofre um blow-up com $h \rightarrow 0$. O resultado negativo dado pelo Teorema 1.1 em [26] mostra que esta anomalia numérica realmente ocorre, ou seja,

$$\sup_{u \text{ resolve (2.6)–(2.8)}} \frac{E_h(0)}{\int_0^T \left| \frac{u_J(t)}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty \text{ com } h \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Caso contrário, existe uma contrapartida positiva de (2.11) em um subespaço de soluções geradas por baixas frequências. Veja Teorema 1.2 em [26] e também resultados para métodos de elementos finitos padrão.

A nossa contribuição na primeira parte desta tese é em relação a análise numérica teórica e sobre a desigualdade de observabilidade de um esquema numérico em diferenças finitas aplicadas a um sistema de equações de ondas acopladas. As provas dos nossos resultados são obtidas usando técnicas multiplicativas discretas tais como as realizadas em [26]. Nas palavras dos autores em [26]: “... pensamos que o desenvolvimento que apresentamos aqui, das técnicas multiplicativas discretas é de interesse independente tendo em vista as suas potenciais aplicações na análise de problemas semelhantes...”. Portanto este trabalho é inspirado no de Infante e Zuazua [26].

2.2 Modelo de Ondas Acopladas

Consideramos o sistema conservativo 1 – d de duas equações de ondas acopladas dado por

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v) = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (2.12)$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \alpha(v - u) = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T) \quad (2.13)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.14)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad \forall x \in (0, L), \quad (2.15)$$

onde $\alpha > 0$ é a constante de acoplamento. Aqui, t e x são as variáveis do tempo e do espaço, respectivamente. As funções $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são os deslocamentos de duas cordas vibrantes, medidas a partir de suas posições de equilíbrio. As molas distribuídas que ligam as duas cordas vibrantes são os termos de acoplamento, ou seja: $\pm\alpha(u - v)$. Para mais detalhes a respeito da modelagem desse sistema consulte [11].

O sistema (2.12) – (2.15) está bem posto no espaço de energia $H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$. Isso quer dizer que denotando $U = (u, u_t, v, v_t)$, temos que para qualquer

$$U_0 \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L),$$

existe uma única solução

$$U \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)).$$

Este sistema é motivado por um problema análogo em equações diferenciais ordinárias para osciladores harmônicos acoplados e suas aplicações em várias engenharias (ver [32]).

A energia das soluções do sistema (2.12) – (2.15) é dada por

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^L (u - v)^2 dx. \quad (2.16)$$

De fato, podemos observar que se multiplicarmos formalmente as equações (2.12) e (2.13) por u_t e v_t respectivamente e se somarmos as duas equações resultantes, considerando as

condições de contorno (2.14) obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.17)$$

e, em seguida,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.18)$$

mostrando que a energia de cada solução é conservada para todo tempo t .

Resultados de estabilidade, considerando a inclusão de termos de amortecimento para o sistema (2.12) – (2.15) foram determinados nas obras de Najafi [32, 33]. Resultados sobre controlabilidade exata de um sistema de duas equações de ondas acopladas não conservativas de dimensão $N \geq 2$ podem ser encontrados em [34].

Por outro lado, é bem conhecido que as desigualdades de observabilidade são importantes para a teoria de controlabilidade e de estabilização (ver [29]). Aqui estabelecemos uma desigualdade de observabilidade para o sistema (2.12) – (2.15) e analisamos a contrapartida semi-discreta em diferenças finitas. Ao melhor de nosso conhecimento, este problema para equações de onda acopladas nunca foi considerado antes na literatura.

2.3 Desigualdade de Observabilidade

Nesta seção, estabelecemos uma desigualdade de observabilidade para o sistema conservativo de equações de ondas acopladas (2.12) – (2.15) em $1 - d$, usando técnicas multiplicativas.

Nosso resultado sobre a desigualdade de observabilidade é dado pelo seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *Para todo $T > 2L$ temos*

$$\mathcal{E}(0) \leq C(T) \left[\alpha \int_0^T \int_0^L (u - v)^2 dx dt + \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt + \frac{L}{2} \int_0^T v_x^2(L, t) dt \right], \quad (2.1)$$

para toda solução de (2.12) – (2.15) em que $C(T) = 1/(T - 2L)$.

Prova. Multiplicamos a equação (2.12) por xu_x e integramos em $(0, L) \times (0, T)$ para obtermos

$$\int_0^T \int_0^L (u_{tt} - u_{xx} + \alpha(u - v)) xu_x dx dt = 0. \quad (2.2)$$

Denotemos $I_1 := \int_0^T \int_0^L u_{tt} u_x x dx dt$. Realizando uma integração por partes e tendo em vista as condições de contorno em (2.14), obtemos

$$I_1 = \left[\int_0^L u_t u_x x dx \right]_0^T - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (u_t^2) x dx dt = \left[\int_0^L u_t u_x x dx \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L u_t^2 dx dt. \quad (2.3)$$

Denotemos $I_2 := - \int_0^T \int_0^L u_{xx} u_x x dx dt$. Daí resulta que

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (u_x^2) x dx dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T (u_x^2 x)|_0^L dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt - \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Combinando (2.2), (2.3) e (2.4), obtemos

$$X_u(t) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L u_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt + \alpha \int_0^T \int_0^L (u - v) xu_x dx dt = \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt \quad (2.5)$$

onde $X_u(t) = \int_0^L xu_x u_t dx$.

Analogamente, multiplicando a equação (2.13) por xv_x obtemos

$$X_v(t) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L v_t^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L v_x^2 dx dt + \alpha \int_0^T \int_0^L (v - u) xv_x dx dt = \frac{L}{2} \int_0^T v_x^2(L, t) dt \quad (2.6)$$

onde $X_v(t) = \int_0^L xv_x v_t dx$. Adicionando (2.5) e (2.6) podemos escrever

$$\begin{aligned} & [X_u(t) + X_v(t)] \Big|_0^T + \int_0^T \left[\frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx \right] dt \\ & + \alpha \int_0^T \int_0^L (u-v)x(u_x - v_x) dx dt = \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt + \frac{L}{2} \int_0^T v_x^2(L, t) dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Por outro lado, tem-se

$$\alpha \int_0^T \int_0^L (u-v)x(u_x - v_x) dx dt = \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_0^L x \frac{d}{dx} (u-v)^2 dx dt = -\frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_0^L (u-v)^2 dx dt. \quad (2.8)$$

Tomando (2.7) e (2.8) em consideração deduzimos que

$$\begin{aligned} & [X_u(t) + X_v(t)] \Big|_0^T + \int_0^T \left[\frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx \right] dt \\ & - \frac{\alpha}{2} \int_0^T \int_0^L (u-v)^2 dx dt = \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt + \frac{L}{2} \int_0^T v_x^2(L, t) dt, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [X_u(t) + X_v(t)] \Big|_0^T + \int_0^T \mathcal{E}(t) dt &= \alpha \int_0^T \int_0^L (u-v)^2 dx dt + \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt \\ &+ \frac{L}{2} \int_0^T v_x^2(L, t) dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $\mathcal{E}(t)$ é dado em (2.16). Além disso, é fácil verificar que

$$|X_u(t) + X_v(t)| \leq |X_u(t)| + |X_v(t)| \leq \int_0^L |xu_x u_t| dx + \int_0^L |xv_x v_t| dx.$$

E assim,

$$\begin{aligned} |X_u(t) + X_v(t)| &\leq \frac{L}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{L}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{L}{2} \int_0^L |v_x|^2 dx + \frac{L}{2} \int_0^L |v_t|^2 dx \\ &\leq L\mathcal{E}(t), \end{aligned}$$

e tendo em vista que $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$, para todo $t \in [0, T]$, obtemos $[X_u(t) + X_v(t)] \Big|_0^T \geq -2L\mathcal{E}(0)$. Portanto de (2.9) e para $T > 2L$ obtemos o resultado desejado, isto é,

$$\mathcal{E}(0) \leq C(T) \left[\alpha \int_0^T \int_0^L (u - v)^2 dx dt + \frac{L}{2} \int_0^T u_x^2(L, t) dt + \frac{L}{2} \int_0^T v_x^2(L, t) dt \right], \quad (2.10)$$

onde $C(T) = 1/(T - 2L)$. ■

Observação: Note que para $\alpha = 0$ a desigualdade de observabilidade (2.10) é

$$\frac{1}{2} \int_0^L u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L v_x^2 dx \leq \frac{L}{2} C(T) \int_0^T \left[u_x^2(L, t) + v_x^2(L, t) \right] dt \quad (2.11)$$

a qual é equivalente à desigualdade (2.4). Através deste trabalho, podemos recuperar todos os resultados em [26] se a constante α for nula.

SEMIDISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE ONDAS ACOPLADAS

3.1 Semidiscretização em Diferenças Finitas

Nesta seção, investigamos o problema da desigualdade de observabilidade uniforme de um esquema numérico de diferenças finitas aplicadas ao sistema conservativo (2.12) – (2.15). Nós estamos interessados em saber se a versão semidiscreta da desigualdade de observabilidade (2.1) é uniforme em relação ao tamanho do parâmetro de malha h .

Para nossos propósitos, consideramos J um inteiro não negativo, $h = \frac{L}{J+1}$ e uma partição de $(0, L)$ dada por

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_J < x_{J+1} = L, \quad \text{onde } x_j = jh, \quad \forall j = 0, \dots, J+1. \quad (3.1)$$

Agora consideramos as seguintes aproximações em diferenças finitas do sistema conservativo de duas equações de ondas acopladas (2.12) – (2.15):

$$u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha(u_j - v_j)(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (3.2)$$

$$v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha(v_j - u_j)(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (3.3)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3.4)$$

$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad v_j(0) = v_j^0, \quad v_j'(0) = v_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J+1, \quad (3.5)$$

onde ' denota derivação em relação ao tempo t e usamos $\Delta_h(\cdot)$ para denotar

$$\Delta_h u_j(t) := \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} \text{ e } \Delta_h v_j(t) := \frac{v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)}{h^2}. \quad (3.6)$$

As funções $u_j(t)$ e $v_j(t)$ são aproximações para $u(x_j, t)$ e $v(x_j, t)$ respectivamente, sendo u e v as soluções de (2.12) – (2.15). O sistema (3.2) – (3.5) consiste de $2J$ equações diferenciais lineares com $2J$ incógnitas $u_1, u_2, \dots, u_J, v_1, v_2, \dots, v_J$ desde que sejam válidas as condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Verificamos que a energia de (3.2) – (3.5) é dada por

$$\mathcal{E}_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[|u_j'(t)|^2 + \left| \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \right|^2 + |v_j'(t)|^2 + \left| \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h} \right|^2 + \alpha |u_j(t) - v_j(t)|^2 \right], \quad (3.7)$$

e é um funcional conservativo no tempo t para o sistema (3.2) – (3.5). Na verdade, vejamos a proposição abaixo.

Proposição 3.1 (Conservação de Energia). *Para qualquer $h > 0$ a energia total $\mathcal{E}_h(\cdot)$ definida em (3.7) satisfaz a taxa de variação*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_h(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.8)$$

para toda (u_j, v_j) solução de (3.2) – (3.5).

Prova. Multiplicando a equação (3.2) por hu_j' e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J |u_j'|^2 - h \sum_{j=1}^J (\Delta_h u_j) u_j' + \alpha h \sum_{j=1}^J (u_j - v_j) u_j' = 0. \quad (3.9)$$

Consideramos a simplificação

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^J (\Delta_h u_j) u'_j &= h \sum_{j=1}^J \left(\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} \right) u'_j \\
 &= -\frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 - \left(\frac{u_1 - u_0}{h} \right) u'_0 \\
 &\quad + \left(\frac{u_{J+1} - u_J}{h} \right) u'_{J+1}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

e as condições de contorno (3.4) na equação acima para obtermos

$$\frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |u'_j|^2 + \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \right|^2 + \alpha h \sum_{j=0}^J (u_j - v_j) u'_j = 0. \tag{3.11}$$

Procedendo de modo análogo para a equação (3.3) temos

$$\frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J |v'_j|^2 + \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right|^2 + \alpha h \sum_{j=0}^J (v_j - u_j) v'_j = 0. \tag{3.12}$$

Somamos (3.11) e (3.12) para obtermos o resultado,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_h(t) = 0, \forall t \in [0, T], \tag{3.13}$$

onde $\mathcal{E}_h(\cdot)$ está definida em (3.7). ■

A energia total $\mathcal{E}_h(\cdot)$ é uma versão semidiscreta da energia total $\mathcal{E}(\cdot)$. Notamos que assumindo a decomposição dada por $\phi_j(t) := u_j(t) + v_j(t)$ no sistema (3.2) – (3.5), obtemos a equação de onda semidiscreta

$$\phi_j''(t) - \Delta_h \phi_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \tag{3.14}$$

$$\phi_0(t) = \phi_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{3.15}$$

$$\phi_j(0) = \phi_j^0, \quad \phi_j'(0) = \phi_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J + 1. \tag{3.16}$$

Consequentemente, tendo $\psi_j(t) := u_j(t) - v_j(t)$ obtemos

$$\psi_j''(t) - \Delta_h \psi_j(t) + 2\alpha \psi_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (3.17)$$

$$\psi_0(t) = \psi_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3.18)$$

$$\psi_j(0) = \psi_j^0, \quad \psi_j'(0) = \psi_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J+1. \quad (3.19)$$

É claro que para $u_j(t) := (\phi_j(t) + \psi_j(t))/2$ e $v_j(t) := (\phi_j(t) - \psi_j(t))/2$ recuperamos as equações (3.2) – (3.3). Além disso, a energia total do sistema (3.14) – (3.16) é dada por

$$F_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[|\phi_j'(t)|^2 + \left| \frac{\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)}{h} \right|^2 \right], \quad (3.20)$$

e a energia total do sistema (3.17) – (3.19) é dada por

$$G_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[|\psi_j'(t)|^2 + \left| \frac{\psi_{j+1}(t) - \psi_j(t)}{h} \right|^2 + 2\alpha |\psi_j(t)|^2 \right]. \quad (3.21)$$

É fácil ver que $\mathcal{E}_h(t) = (G_h(t) + F_h(t))/2$, para todo $t \in [0, T]$. Notamos que o sistema (3.14) – (3.16) é do tipo dado por (2.6) – (2.8) e, em seguida, todos os resultados na ausência de observabilidade numérica bem como a observabilidade numérica de soluções filtradas mantem-se para o sistema (3.14) – (3.16). Portanto, usando os resultados de perda de observabilidade numérica em [26], temos o seguinte Teorema:

Teorema 3.2. *Para qualquer $T > 0$ temos*

$$\sup_{\phi \text{ resolve (3.14) - (3.16)}} \frac{F_h(0)}{\int_0^T \left| \frac{\phi_J(t)}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty \text{ com } h \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Observamos que

$$\varphi_{k,j} = \sin \left(\frac{k\pi x_j}{L} \right), \quad j, k = 1, \dots, J, \quad (3.23)$$

correspondem aos autovetores de (3.14) – (3.16) e a seguinte identidade é verdadeira:

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - \lambda(h)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2, \quad \forall k = 1, \dots, J, \quad (3.24)$$

onde $\lambda(h)$ são os autovalores dados por

$$\lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2L} \right), \quad \forall k = 1, \dots, J. \quad (3.25)$$

A identidade (3.24) é a chave para questões sobre a observabilidade numérica em dimensão finita. De fato, pode-se verificar que para o autovalor $\lambda_J(h)$ é verdade que $\lambda_J(h)h^2 \rightarrow 4$ com $h \rightarrow 0$. Isto significa que ocorre um blow-up no lado direito de (3.24) o que produz um resultado negativo de acordo com o Teorema 3.2 acima.

Nosso objetivo é construir uma contrapartida semidiscreta da desigualdade de observabilidade (2.1). Mais precisamente, estamos interessados na seguinte questão: Será que temos

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C \left[\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j(t) - v_j(t)|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J(t)}{h} \right|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{v_J(t)}{h} \right|^2 dt \right], \quad (3.26)$$

com uma constante $C = C(T) > 0$ independentemente das condições iniciais e do tamanho do parâmetro de malha h , onde as soluções u_j e v_j resolvem o sistema (3.2) – (3.5)? A resposta é um categórico não.

Como já foi mencionado, estimas como (3.26) não são uniformes em relação ao tamanho do parâmetro de malha h , para dinâmicas numéricas tais como diferenças finitas e elementos finitos padrão (ver [26] para uma única equação de onda). Na verdade, este fenômeno é bem conhecido e é devido ao efeito das soluções numéricas de alta frequência (soluções espúrias). É claro que outros métodos foram concebidos e analisados durante os últimos anos, o que permite evitar o blow-up da constante de observabilidade (ver [35]).

3.1.1 Observabilidade Espectral Não Uniforme

Nesta seção, vamos nos concentrar na desigualdade (3.26) onde u_j e v_j resolvem (3.2) – (3.5). Vamos provar que $C = C(T, h)$ sofre um blow-up com $h \rightarrow 0$.

Primeiro, estabelecemos duas proposições referentes às soluções dos esquemas numéricos (3.17) – (3.19) e (3.2) – (3.5).

Proposição 3.3. *A solução do sistema (3.17) – (3.19) é dada pelo desenvolvimento da série de Fourier*

$$\Psi_h(t) = \sum_{k=1}^J \left[a_k \sin \left(\sqrt{\frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2L} \right) + 2\alpha t} \right) + b_k \cos \left(\sqrt{\frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2L} \right) + 2\alpha t} \right) \right] \varphi^k,$$

onde a_k, b_k são os coeficientes de Fourier e $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,J})$ os autovetores associados, onde cada componente $\varphi_{k,j}$ é dada por (3.23).

Prova. Assumindo que

$$\psi_j(t) := \varphi_j T(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.27)$$

e substituindo (3.27) em (3.17) obtemos

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \left[\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} - 2\alpha\varphi_j \right] \frac{1}{\varphi_j} = -\nu. \quad (3.28)$$

Para soluções não triviais tomamos $\nu > 0$. Em seguida, obtém-se o problema de autovalores para o sistema (3.17) – (3.19) dado por

$$-\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} + 2\alpha\varphi_j = \nu\varphi_j, \quad j = 1, \dots, J, \quad (3.29)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{J+1} = 0. \quad (3.30)$$

Levando-se em conta as condições de contorno homogêneas (3.30) podemos supor que os autovetores $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,J})$ são dados em (3.23).

Portanto os autovalores são dados por

$$\nu_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2L} \right) + 2\alpha, \quad \forall k = 1, \dots, J. \quad (3.31)$$

Retornando à (3.28) obtemos a equação $T''(t) + \nu T(t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$, que resolvendo obtemos

$$T_k(t) = a_k \sin\left(\sqrt{\nu_k(h)}t\right) + b_k \cos\left(\sqrt{\nu_k(h)}t\right), \quad k = 1, \dots, J, \quad \forall t > 0, \quad (3.32)$$

onde a_k, b_k são os coeficientes Fourier. Assim, o resultado é estabelecido. \blacksquare

Outra proposição importante é dada por:

Proposição 3.4. *A solução do sistema (3.2) – (3.5) é dada pelo desenvolvimento da série de Fourier*

$$U_h(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^J \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + c_k \sin(\sqrt{\nu_k(h)}t) + d_k \cos(\sqrt{\nu_k(h)}t) \right] \varphi^k,$$

$$V_h(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^J \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) - c_k \sin(\sqrt{\nu_k(h)}t) - d_k \cos(\sqrt{\nu_k(h)}t) \right] \varphi^k,$$

onde a_k, b_k, c_k, d_k são os coeficientes de Fourier, $\lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)$ e $\nu_k(h) = \lambda_k(h) + 2\alpha$, $k = 1, \dots, J$ são os autovalores e $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,J})$ os autovetores associados, onde cada componente $\varphi_{k,j}$ é dada por (3.23).

Prova. A prova é imediata, basta considerarmos a solução dos sistemas (3.14) – (3.16) e (3.17) – (3.19) e a mudança de variáveis: $u_j = \frac{1}{2}(\phi_j + \psi_j)$ e $v_j = \frac{1}{2}(\phi_j - \psi_j)$. \blacksquare

Antes de entrarmos na discussão sobre a desigualdade de observabilidade do problema (3.17)–(3.19) e conseqüentemente na desigualdade de observabilidade do problema (3.2) – (3.5), é necessário analisarmos a observabilidade dos autovetores do problema (3.29) – (3.30).

Lema 3.5. *Para qualquer autovetor $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,J})$ de (3.29) – (3.30), vale a seguinte identidade:*

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - (\nu(h) - 2\alpha)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2, \quad (3.33)$$

onde os autovalores são dados por $\nu_k(h) - 2\alpha = \lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right)$, $k = 1, \dots, J$.

Prova. Nós nos concentramos na equação espectral (3.29)–(3.30). Em seguida, multiplicamos a equação (3.29) por $jh(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})/2$, adicionamos para $j = 1, \dots, J$ e obtemos

$$\begin{aligned} & -h \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} j \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} + 2\alpha h \sum_{j=1}^J \varphi_j j \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \\ & = \nu h \sum_{j=1}^J \varphi_j j \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

É bem conhecido as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} j \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} & = -\frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^J \varphi_j^2 + \frac{J+1}{2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \\ & + \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^J \varphi_{j+1} \varphi_j. \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\sum_{j=1}^J \varphi_j j \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \varphi_{j+1} \varphi_j. \quad (3.36)$$

Assim, substituindo (3.35) e (3.36) em (3.34) e, além disso, normalizando os autovetores obtemos

$$\frac{1}{h^2} - \frac{J+1}{2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 = -\left[\frac{\nu}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{h^2} \right] \sum_{j=1}^J \varphi_{j+1} \varphi_j = -\frac{\nu h^2 - \alpha h^2 - 2}{2h^2} \sum_{j=1}^J \varphi_{j+1} \varphi_j. \quad (3.37)$$

Por outro lado, usamos o multiplicador discreto $h\varphi_j$ em (3.29) e depois de alguns cálculos, resulta que

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + 2\alpha h \sum_{j=0}^J \varphi_j^2 = \nu h \sum_{j=0}^J \varphi_j^2. \quad (3.38)$$

Além disso, podemos escrever a identidade (3.38) como

$$\frac{2}{h^2} \sum_{j=0}^J (\varphi_j^2 - \varphi_{j+1} \varphi_j) = (\nu - 2\alpha) \sum_{j=0}^J \varphi_j^2 \Rightarrow \sum_{j=0}^J \varphi_{j+1} \varphi_j = -\frac{\nu h^2 - 2\alpha h^2 - 2}{2}. \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) em (3.37) e considerando que $J + 1 = \frac{L}{h}$ obtemos

$$\frac{L}{2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 = \frac{1}{h^2} - \frac{\nu h^2 - 2\alpha h^2 - 2\nu h^2 - 2\alpha h^2 - 2}{2h^2} \frac{\nu h^2 - 2\alpha h^2 - 2}{2h}, \quad (3.40)$$

e depois de alguns cálculos, obtemos

$$\nu = 2\alpha + \frac{2L}{4 - (\nu - 2\alpha)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2. \quad (3.41)$$

Portanto, a partir (3.38) e considerando a normalização dos autovetores obtemos o resultado desejado, isto é,

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - (\nu - 2\alpha)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2. \quad (3.42)$$

■

A identidade (3.33) fornece uma relação explícita entre a energia total dos autovetores e a energia concentrada em $x = L$ de acordo com a quantidade medida por $|\varphi_J/h|^2$. Além disso, ela sugere a presença de blow-up, se

$$[\nu_J(h) - 2\alpha]h^2 \rightarrow 4, \quad \text{com } h \rightarrow 0.$$

Nosso primeiro resultado negativo é dado de acordo com o seguinte Teorema:

Teorema 3.6. *Para qualquer $T > 0$ temos*

$$\sup_{\psi \text{ resolve (3.17) - (3.19)}} \frac{G_h(0)}{2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty \text{ com } h \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

Prova. Seja ψ a solução de (3.17) – (3.19) associado ao J -ésimo autovetor dado por

$$\psi = e^{i\sqrt{\nu_J(h)t}} \varphi^J. \quad (3.44)$$

Para esta solução, temos

$$2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt = T \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J |\varphi_{J,j}|^2 + \left| \frac{\varphi_{J,J}}{h} \right|^2 \right], \quad (3.45)$$

e de acordo com o Lema 3.5 podemos escrever

$$2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt = T \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J |\varphi_{J,j}|^2 + \frac{4 - \lambda_J(h)h^2}{2L} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2 \right]. \quad (3.46)$$

Por outro lado, note que

$$G_h(0) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[(\nu_J(h) + 2\alpha) |\varphi_{J,j}|^2 + \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2 \right]. \quad (3.47)$$

Agora multiplicamos a equação espectral (3.29) por $h\varphi_j$ e depois de alguns cálculos, obtemos

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = (\nu - 2\alpha) h \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2. \quad (3.48)$$

Combinando (3.48) e (3.47) reescrevemos $G_h(0)$ como

$$\begin{aligned} G_h(0) &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\frac{\nu_J(h) + 2\alpha}{\nu_J(h) - 2\alpha} \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2 + \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2 \right] \\ &= \frac{\nu_J(h)}{\nu_J(h) - 2\alpha} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Portanto, substituindo (3.49) em (3.46) e considerando que $h \sum_{j=0}^J |\varphi_{J,j}|^2 = 1$ obtemos

$$2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt = T \left[2\alpha + \frac{4 - [\nu_J(h) - 2\alpha]h^2}{2L} \frac{\nu_J(h) - 2\alpha}{\nu_J(h)} G_h(0) \right]. \quad (3.50)$$

Depois de alguns cálculos realizados em (3.50), segue-se que

$$\frac{G_h(0)}{2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt} = \left(1 - \frac{2\alpha T}{2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt} \right) \times \frac{2L}{T[4 - (\nu_J(h) - 2\alpha)h^2]} \frac{\nu_J(h)}{\nu_J(h) - 2\alpha}.$$

Levando-se em conta (3.45) e considerando novamente que $h \sum_{j=0}^J |\varphi_{J,j}|^2 = 1$, a identidade acima torna-se

$$\frac{G_h(0)}{2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt} = \frac{|\varphi_{J,J}|^2}{2\alpha h^2 + |\varphi_{J,J}|^2} \frac{2L}{T(4 - \lambda_J(h)h^2)} \frac{\lambda_J(h) + 2\alpha}{\lambda_J(h)}.$$

Nota-se também que $\lambda_J(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{J\pi h}{2L} \right) \rightarrow \infty$ para h suficientemente pequeno e, em seguida,

$$\frac{\lambda_J(h) + 2\alpha}{\lambda_J(h)} = 1 + \frac{2\alpha}{\lambda_J(h)} \rightarrow 1.$$

Finalmente, para concluir, segue-se que

$$\frac{G_h(0)}{2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty,$$

devido termos

$$\lambda_J(h)h^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{J\pi h}{2L} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2L} \right) = 4 \cos^2 \left(\frac{h\pi}{2L} \right) \rightarrow 4, \text{ com } h \rightarrow 0.$$

■

Agora estamos em condições de estabelecermos o principal resultado desta seção: a desigualdade de observabilidade não uniforme para o sistema acoplado (3.2) – (3.5).

Teorema 3.7. *Para qualquer $T > 0$ temos*

$$(u, v) \text{ resolve (3.2) – (3.5)} \sup \frac{\mathcal{E}_h(0)}{\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j(t) - v_j(t)|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{u_J(t)}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{v_J(t)}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty,$$

com $h \rightarrow 0$.

Prova. A prova é imediata. De fato, tendo em conta o Teorema 3.2 (devido a Infante e Zuazua em [26]), nosso Teorema 3.6 e considerando que $\mathcal{E}_h(0) = (F_h(0) + G_h(0))/2$ temos

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_h(0) &= \frac{2L}{T(4 - \lambda_J h^2)} \int_0^T \left| \frac{\phi_J(t)}{h} \right|^2 dt \\ &+ \frac{|\varphi_{J,J}|^2}{2\alpha h^2 + |\varphi_{J,J}|^2} \frac{2L}{T(4 - \lambda_J(h)h^2)} \frac{\nu_J(h)}{(\nu_J(h) - 2\alpha)} \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt \right] \\ &\geq \tilde{C}(h, T) \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\phi_J(t)}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J(t)}{h} \right|^2 dt \right], \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{C}(h, T) = \frac{2L}{T(4 - \lambda_J(h)h^2)} \min \left[1, \frac{|\varphi_{J,J}|^2}{2\alpha h^2 + |\varphi_{J,J}|^2} \frac{\lambda_J(h) + 2\alpha}{\lambda_J(h)} \right].$$

Lembrando que $\phi_j(t) = u_j(t) + v_j(t)$ e $\psi_j(t) = u_j(t) - v_j(t)$, concluímos que

$$\frac{\mathcal{E}_h(0)}{\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j(t) - v_j(t)|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{u_J(t)}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{v_J(t)}{h} \right|^2 dt} \geq \tilde{C}(h, T) \rightarrow \infty \text{ com } h \rightarrow 0.$$

■

O Teorema 3.7 mostra que a constante na desigualdade observabilidade sofre um blow-up com o parâmetro de malha h tendendo à zero. Este resultado está de acordo com os resultados negativos estabelecidos em [26, 36, 37].

3.2 Observabilidade Uniforme: Filtragem Numérica

Esta seção é dedicada a provar a contrapartida positiva do Teorema 3.7 usando o método multiplicativo. Para isso, analisamos a contrapartida positiva do Teorema 3.6 relativo às soluções filtradas do sistema (3.17) – (3.19).

A fim de obtermos uma contrapartida positiva do Teorema 3.6, usamos a técnica de filtragem para gerar subclasses adequadas de soluções numericamente observáveis. Estas soluções numéricas são as soluções filtradas geradas por autovetores do problema de autovalor (3.29) – (3.30) que satisfaçam $\lambda h^2 \leq \gamma$, quando verificamos a identidade de observabilidade do autovetores do Lema 3.5.

Dado qualquer $0 < \gamma < 4$ introduzimos a seguinte classe de soluções filtradas para o sistema (3.17) – (3.19):

$$\mathcal{G}_h(\gamma) := \left\{ \psi = \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[c_k \sin(\sqrt{\nu_k(h)}t) + d_k \cos(\sqrt{\nu_k(h)}t) \right] \varphi^k \right\},$$

onde $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ e também a classe de soluções filtradas para sistema (3.2) – (3.5) dada por

$$\mathcal{H}_h(\gamma) := \left\{ \begin{array}{l} U_h = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) + c_k \sin(\sqrt{\nu_k(h)}t) + d_k \cos(\sqrt{\nu_k(h)}t) \right] \varphi^k \\ V_h = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[a_k \sin(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k}t) - c_k \sin(\sqrt{\nu_k(h)}t) - d_k \cos(\sqrt{\nu_k(h)}t) \right] \varphi^k \end{array} \right\},$$

onde $\nu_k(h) = \lambda_k(h) + 2\alpha$ e $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.8. *Suponha que $0 < \gamma < 4$. Então, existe $T(\gamma) \geq 2L$ tal que para todo $T > T(\gamma)$ existe uma constante positiva $C(T, \gamma)$ tal que a desigualdade*

$$G_h(0) \leq C(T, \gamma) \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \right], \quad (3.1)$$

é verdadeira para toda solução de (3.17) – (3.19) na classe $\mathcal{G}_h(\gamma)$ com $h \rightarrow 0$ uniformemente. Além disso,

(a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ com $\gamma \nearrow 4$ e $T(\gamma) \searrow 2L$ com $\gamma \searrow 0$;

(b) $C(T, \gamma) \searrow \frac{1}{T-2L}$ com $\gamma \searrow 0$.

É imediato do Teorema 3.8 nosso principal teorema:

Teorema 3.9. *Suponha que $0 < \gamma < 4$. Então, existe $T(\gamma) \geq 2L$ tal que para todo $T > T(\gamma)$ existe uma constante positiva $C(T, \gamma)$ tal que a desigualdade*

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C(T, \gamma) \left[\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j - v_j|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{u_J(t)}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{v_J(t)}{h} \right|^2 dt \right], \quad (3.2)$$

é verdadeira para toda solução de (3.2) – (3.5) na classe $\mathcal{H}_h(\gamma)$ com $h \rightarrow 0$ uniformemente. Além disso,

(a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ com $\gamma \nearrow 4$ e $T(\gamma) \searrow 2L$ com $\gamma \searrow 0$;

(b) $C(T, \gamma) \searrow \frac{1}{T-2L}$ com $\gamma \searrow 0$.

Estes teoremas garantem que os esquemas semidiscretos são uniformemente observáveis como $h \rightarrow 0$, desde que as ondas de alta frequências sejam filtradas. Para as respectivas provas construímos um conjunto de lemas para o sistema (3.17) – (3.19) usando multiplicadores discretos.

Lema 3.10 (Conservação de Energia). *Para qualquer $h > 0$ a energia total $G_h(\cdot)$ definida em (3.21) satisfaz a taxa de variação*

$$\frac{d}{dt} G_h(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.3)$$

para toda ψ solução de (3.17) – (3.19) e conseqüentemente

$$G_h(t) = G_h(0), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

Prova. Multiplicamos a equação (3.17) por $h\psi'_j(t)$ e adicionamos para $j = 1, 2, \dots, J$.

$$\frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^J |\psi'_j|^2 - h \sum_{j=1}^J (\Delta_h \psi_j) \psi'_j + 2\alpha h \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^J |\psi_j|^2 = 0. \quad (3.5)$$

Considerando as condições contorno de Dirichlet homogêneas temos

$$-h \sum_{j=1}^J (\Delta_h \psi_j) \psi'_j = \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2. \quad (3.6)$$

Combinando (3.6) e (3.5) concluímos que $\frac{d}{dt}G_h(t) = 0$ e, em seguida, $G_h(t) = G_h(0)$, para todo $t \in [0, T]$ onde $G_h(t)$ é dada em (3.21). ■

Lema 3.11. *Para qualquer $h > 0$ e ψ solução de (3.17) – (3.19) temos*

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\psi'_j \psi'_{j+1} + \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + 2\alpha |\psi_j|^2 \right] dt &= \alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\psi_j|^2 + \psi_j \psi_{j+1}] dt + \chi_h(t) \Big|_0^T \\ &= \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt, \end{aligned}$$

onde

$$\chi_h(t) = h \sum_{j=1}^J j \psi'_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right).$$

Prova. Multiplicamos (3.17) por $jh(\psi_{j+1} - \psi_{j-1})/2$, adicionamos para $j = 1, 2, \dots, J$ e integramos em $(0, T)$ para obtermos

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \psi''_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) dt &= h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) dt \\ &+ 2\alpha h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \psi_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Denotamos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1h} &:= h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \psi''_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) dt = h \sum_{j=1}^J j \psi'_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) \Big|_0^T \\ &- h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \psi'_j \left(\frac{\psi'_{j+1} - \psi'_{j-1}}{2} \right) dt = \chi_h(t) \Big|_0^T + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \psi'_j \psi'_{j+1} dt, \end{aligned}$$

onde

$$\chi_h(t) = h \sum_{j=1}^J j \psi'_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right).$$

Por outro lado, denotamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2h} &:= h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} dt = \frac{h}{2h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j |\psi_{j+1}|^2 dt \\
&- \frac{h}{2h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j |\psi_{j-1}|^2 dt - \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j \psi_j \psi_{j+1} dt + \frac{h}{h^2} \sum_{j=1}^J \int_0^T j \psi_j \psi_{j-1} dt \\
&= \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |\psi_{j+1}|^2 dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (j+1) |\psi_j|^2 dt + \frac{(J+1)h}{2h^2} \int_0^T |\psi_J|^2 dt \\
&- \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j \psi_j \psi_{j+1} dt + \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T (j+1) \psi_j \psi_{j+1} dt \\
&= \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |\psi_{j+1}|^2 dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |\psi_j|^2 dt - \frac{h}{2h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt \\
&+ \frac{(J+1)h}{2h^2} \int_0^T |\psi_J|^2 dt + \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \psi_j \psi_{j+1} dt.
\end{aligned}$$

Agora, tendo em mente as condições de contorno (3.18), temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt &= h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_{j+1}|^2 dt. \\
\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |\psi_{j+1}|^2 dt - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T j |\psi_j|^2 dt &= -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt.
\end{aligned}$$

Daí resulta que \mathcal{I}_{2h} pode ser reescrito como

$$\mathcal{I}_{2h} = -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt.$$

Além disso, denotamos também

$$\mathcal{I}_{3h} := 2\alpha h \sum_{j=1}^J \int_0^T j\psi_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) dt = -\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T \psi_{j+1}\psi_j dt.$$

Substituindo \mathcal{I}_{1h} , \mathcal{I}_{2h} e \mathcal{I}_{3h} em (3.7) obtemos

$$\frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\psi'_j \psi'_{j+1} + \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right] dt - \alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T \psi_j \psi_{j+1} dt + \chi_h(t) \Big|_0^T = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\psi'_j \psi'_{j+1} + \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + 2\alpha |\psi_j|^2 \right] dt - \alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\psi_j|^2 + \psi_j \psi_{j+1}] dt + \chi_h(t) \Big|_0^T \\ = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt. \end{aligned}$$

■

Nosso próximo lema diz respeito a equipartição da energia $G_h(t)$.

Lema 3.12 (Equipartição de energia). *Para qualquer $h > 0$ e ψ solução de (3.17) – (3.19) temos*

$$- h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + 2\alpha |\psi_j|^2 \right] dt + Y_h(t) \Big|_0^T = 0, \quad (3.8)$$

onde

$$Y_h(t) = h \sum_{j=0}^J \psi'_j \psi_j.$$

Prova. Multiplicamos (3.17) por $h\psi_j$, adicionamos para $j = 1, 2, \dots, J$ e integramos em $(0, T)$ para obtermos

$$h \sum_{j=1}^J \int_0^T \psi_j'' \psi_j dt - h \sum_{j=1}^J \int_0^T \psi_j \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} dt + 2\alpha h \sum_{j=1}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt = 0. \quad (3.9)$$

Denotamos

$$\mathcal{J}_{1h} := h \sum_{j=1}^J \int_0^T \psi_j'' \psi_j dt = h \sum_{j=1}^J \psi_j' \psi_j \Big|_0^T - h \sum_{j=1}^J \int_0^T |\psi_j'|^2 dt = Y_h(t) \Big|_0^T - h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j'|^2 dt.$$

Além disso,

$$\mathcal{J}_{2h} := h \sum_{j=1}^J \int_0^T \psi_j \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} dt = -h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 dt.$$

Portanto, substituindo \mathcal{J}_{1h} e \mathcal{J}_{2h} em (3.9) provamos esse lema. ■

Corolário 3.13. Para qualquer $h > 0$ e ψ solução de (3.17) – (3.19) temos

$$h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j'|^2 dt = TG_h(t) + \frac{1}{2} Y_h(t) \Big|_0^T, \quad (3.10)$$

onde $G_h(t)$ é dada em (3.21).

Prova. A prova é imediata, basta adicionarmos o termo $2h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j'|^2 dt$ em ambos os lados do lema anterior e considerarmos a energia total $G_h(t)$ dada em (3.21). ■

Proposição 3.14 (Ortogonalidade dos autovetores). *Sejam φ^k, φ^l dois autovetores associados à autovalores distintos, isto é, $\lambda_k \neq \lambda_l$ respectivamente, então*

$$h \sum_{j=0}^J \left(\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j} \right) \left(\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j} \right) = 0. \quad (3.11)$$

Prova. Multiplicamos a equação (3.29) por $h\varphi_{l,j}$ e adicionamos para $j = 1, \dots, J$ para obtermos a equação seguinte

$$-h \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{k,j+1} - 2\varphi_{k,j} + \varphi_{k,j-1}}{h^2} \right) \varphi_{l,j} + 2\alpha h \sum_{j=1}^J \varphi_{k,j} \varphi_{l,j} = \nu_k h \sum_{j=1}^J \varphi_{k,j} \varphi_{l,j}.$$

No espaço das sequências quadrado somáveis dado por

$$l^2(J) := \left\{ \varphi_j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2 < \infty \right\},$$

definimos o produto interno

$$\left(\varphi^k, \varphi^l \right)_{l^2(J)} := h \sum_{j=1}^J \varphi_{k,j} \varphi_{l,j}, \quad (3.12)$$

de modo que possamos escrever

$$\left(A_h \varphi^k, \varphi^l \right)_{l^2(J)} = \nu_k \left(\varphi^k, \varphi^l \right)_{l^2(J)}, \quad (3.13)$$

onde $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, \dots, \varphi_{k,J})^T$ e a matriz A_h é dada por

$$A_h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Procedendo de forma análoga para $\varphi_{l,j}$ obtemos

$$-h \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{l,j+1} - 2\varphi_{l,j} + \varphi_{l,j-1}}{h^2} \right) \varphi_{k,j} + 2\alpha h \sum_{j=1}^J \varphi_{l,j} \varphi_{k,j} = \nu_l h \sum_{j=1}^J \varphi_{l,j} \varphi_{k,j},$$

e consequentemente,

$$\left(A_h \varphi^l, \varphi^k \right)_{l^2(J)} = \nu_l \left(\varphi^l, \varphi^k \right)_{l^2(J)}.$$

Levando em consideração que A_h é uma matriz real e simétrica, decorre que $A_h = A_h^T$ e portanto,

$$\left(\varphi^l, A_h \varphi^k\right)_{l^2(J)} = \nu_l \left(\varphi^l, \varphi^k\right)_{l^2(J)}. \quad (3.15)$$

Em seguida, subtraímos (3.13) e (3.15) para obtermos que

$$(\nu_k - \nu_l) \left(\varphi^k, \varphi^l\right)_{l^2(J)} = 0. \quad (3.16)$$

Desde que $\nu_k \neq \nu_l$, decorre que $\{\varphi^k, \varphi^l\}$ é ortogonal e A_h -ortogonal. Sendo assim, podemos escrever

$$h \sum_{j=1}^J \left(\varphi_{k,j+1} - 2\varphi_{k,j} + \varphi_{k,j-1}\right) \varphi_{l,j} = h \sum_{j=1}^J \left(\varphi_{k,j+1} \varphi_{l,j} - 2\varphi_{k,j} \varphi_{l,j} + \varphi_{k,j-1} \varphi_{l,j}\right) = 0,$$

donde vem que

$$h \sum_{j=1}^J \left(\varphi_{k,j+1} \varphi_{l,j} + \varphi_{k,j-1} \varphi_{l,j}\right) = 0.$$

Devido as condições de contorno $\varphi_0 = \varphi_{J+1} = 0$ podemos escrever:

$$h \sum_{j=0}^J \left(\varphi_{k,j+1} \varphi_{l,j} + \varphi_{k,j} \varphi_{l,j+1}\right) = 0. \quad (3.17)$$

E agora mostramos que

$$h \sum_{j=0}^J \left(\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}\right) \left(\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j}\right) = h \sum_{j=0}^J \left(\varphi_{k,j+1} \varphi_{l,j+1} - \varphi_{k,j+1} \varphi_{l,j} - \varphi_{k,j} \varphi_{l,j+1} + \varphi_{k,j} \varphi_{l,j}\right),$$

e das condições de contorno $\varphi_0 = \varphi_{J+1} = 0$, segue que

$$h \sum_{j=0}^J \varphi_{k,j} \varphi_{l,j} = h \sum_{j=0}^J \varphi_{k,j+1} \varphi_{l,j+1}.$$

Portanto, tendo em mente as equações (3.16) e (3.17) decorre que

$$h \sum_{j=0}^J (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}) (\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j}) = 2h \sum_{j=0}^J \varphi_{k,j} \varphi_{l,j} - h \sum_{j=0}^J (\varphi_{k,j+1} \varphi_{l,j} + \varphi_{k,j} \varphi_{l,j+1}) = 0.$$

■

Para provar os Teoremas 3.8 e 3.9 usamos os Lemas 3.11 e 3.12. Vamos precisar de algumas estimativas, principalmente para o termo $h \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2$.

Lema 3.15. *Para qualquer $h > 0$, $0 \leq t \leq T$ e ψ solução de (3.17) – (3.19) vale*

$$h \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 \leq \Lambda h^3 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2,$$

onde Λ é o limite superior dos autovalores introduzidos no desenvolvimento de Fourier.

Prova. Inicialmente consideramos a série de Fourier para (3.17) – (3.19) dada por

$$\psi = \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k e^{i\mu_k t} \varphi^k, \quad (3.18)$$

onde $\mu_k = \sqrt{\nu_k}$, $k > 0$, $\mu_{-k} = -\mu_k$, $\nu_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{k\pi h}{2L} \right) + 2\alpha$. Temos que

$$\psi' = i \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k \mu_k e^{i\mu_k t} \varphi^k. \quad (3.19)$$

Na sequência temos

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 &= h \sum_{j=0}^J \left| \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k \mu_k e^{i\mu_k t} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}) \right|^2 \\ &= h \sum_{j=0}^J \left[\sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \mu_k^2 |\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mu_k \neq \mu_l, |\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}, |\mu_l| \leq \sqrt{\Lambda}} a_k a_l \mu_k \mu_l e^{i(\mu_k - \mu_l)t} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}) (\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j}) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Devido a ortogonalidade dos autovetores φ_k e φ_l para $\mu_k \neq \mu_l$ temos

$$\sum_{\mu_k \neq \mu_l, |\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}, |\mu_l| \leq \sqrt{\Lambda}} (\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j})(\varphi_{l,j+1} - \varphi_{l,j}) = 0,$$

(ver Proposição 3.14) e, em seguida, tendo em vista a identidade (3.48), e a identidade (3.20) podemos escrever

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 &= h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \mu_k^2 (\nu_k - 2\alpha) h^2 \sum_{j=0}^J |\varphi_{k,j}|^2 \\ &= h \sum_{|\mu_k| \leq \sqrt{\Lambda}} |a_k|^2 \mu_k^2 \lambda_k h^2 \sum_{j=0}^J |\varphi_{k,j}|^2 \leq \Lambda h^3 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2, \end{aligned}$$

e assim, podemos concluir a prova. ■

Lema 3.16. Para qualquer $h > 0$, $0 \leq t \leq T$ e ψ solução de (3.17) – (3.19) vale

$$|Z_h(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1} G_h(0)}, \quad (3.21)$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor do Laplaciano discreto, Λ é o limite superior sobre os autovalores introduzidos no desenvolvimento de Fourier e além disso,

$$Z_h(t) = h \sum_{j=1}^J \psi'_j \left[j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right], \quad \eta = -\Lambda h^2 / 8. \quad (3.22)$$

Prova. Tomemos

$$Z_h(t) = h \sum_{j=1}^J \psi'_j \left[j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right]$$

e conseqüentemente

$$|Z_h(t)| \leq h \sum_{j=1}^J \left| \psi'_j \left[j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right] \right|.$$

Aplicando a versão semidiscreta da desigualdade de Hölder temos

$$|Z_h(t)| \leq \left[h \sum_{j=1}^J |\psi_j'|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.23)$$

com $\eta = -\Lambda h^2/8$.

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right|^2 = h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} |\psi_{j+1} - \psi_{j-1}|^2 + \eta^2 |\psi_j|^2 + \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j \right] \\ &= h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} |(\psi_{j+1} - \psi_j) + (\psi_j - \psi_{j-1})|^2 + \eta^2 |\psi_j|^2 + \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j \right] \\ &= h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} [|\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + 2(\psi_{j+1} - \psi_j)(\psi_j - \psi_{j-1}) + |\psi_j - \psi_{j-1}|^2] \right. \\ &\quad \left. + \eta^2 |\psi_j|^2 + \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j \right] \\ &\leq h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} [2|\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + 2|\psi_j - \psi_{j-1}|^2] + \eta^2 |\psi_j|^2 + \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j \right], \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right|^2 &\leq h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{2} |\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + \frac{j^2}{2} |\psi_j - \psi_{j-1}|^2 + \eta^2 |\psi_j|^2 \right. \\ &\quad \left. + \eta j (\psi_{j+1} - \psi_{j-1}) \psi_j \right] \\ &\leq h \sum_{j=0}^J \left[\frac{j^2}{2} |\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + \frac{(j+1)^2}{2} |\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + \eta^2 |\psi_j|^2 + \eta j \psi_j \psi_{j+1} \right. \\ &\quad \left. - \eta(j+1) \psi_j \psi_{j+1} \right] \\ &= h \sum_{j=0}^J \left[\frac{j^2}{2} |\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + \frac{(j+1)^2}{2} |\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + \eta^2 |\psi_j|^2 - \eta \psi_j \psi_{j+1} \right] \\ &= h \sum_{j=0}^J \left[\frac{j^2}{2} |\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + \frac{(j+1)^2}{2} |\psi_{j+1} - \psi_j|^2 + \eta^2 |\psi_j|^2 + |\eta| |\psi_j|^2 \right. \\ &\quad \left. - |\eta| |\psi_j|^2 - \eta \psi_j \psi_{j+1} \right]. \end{aligned}$$

Como $j^2 h^2 \leq (j+1)^2 h^2 \leq (J+1)^2 h^2 = L^2$ temos

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right|^2 &\leq L^2 h \sum_{j=1}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 - |\eta| h \sum_{j=1}^J (|\psi_j|^2 - \psi_j \psi_{j+1}) \\ &+ (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=1}^J |\psi_j|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas obtemos

$$h \sum_{j=1}^J (|\psi_j|^2 - \psi_j \psi_{j+1}) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J |\psi_{j+1} - \psi_j|^2.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right|^2 &\leq \left(L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} \right) h \sum_{j=1}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \\ &+ (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=1}^J |\psi_j|^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

E por último aplicamos a desigualdade abaixo (versão discreta da desigualdade de Poincaré)

$$h \sum_{j=0}^J |\psi_j|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2, \quad (3.26)$$

para o primeiro autovalor λ_1 e obtemos

$$h \sum_{j=0}^J \left| j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + \eta \psi_j \right|^2 \leq \left[L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} + \frac{(\eta^2 + |\eta|)}{\lambda_1} \right] h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2. \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.23) temos

$$|Z_h(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1}} \left[h \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.28)$$

onde $|\eta| = \Lambda h^2/8 \leq 1/2$ e $\eta^2 + |\eta| \leq 3\Lambda h^2/16$.

Aplicamos a desigualdade de Young para obtermos

$$|Z_h(t)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1} h \sum_{j=0}^J \left[|\psi'_j|^2 + \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right]}, \quad (3.29)$$

e conseqüentemente

$$|Z_h(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{\Lambda h^4}{16} + \frac{3\Lambda h^2}{16\lambda_1} G_h(0)}.$$

■

Agora estamos em condições de estabelecer o principal resultado desta seção. Provamos os Teoremas 3.8 e 3.9.

3.2.1 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.8

Consideramos a identidade do Lema 3.11 e reescrevemos como

$$\int_0^T G_h(t) dt + \chi_h(t) \Big|_0^T - \alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\psi_j|^2 + \psi_j \psi_{j+1}] dt - \frac{h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 dt = \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt.$$

Levando-se em conta as condições de contorno homogêneas (3.18), podemos escrever

$$-h \sum_{j=0}^J [\psi_j^2 + \psi_j \psi_{j+1}] = -h \sum_{j=0}^J [\psi_j^2 + (\psi_j^2 + \psi_{j+1}^2)/2] \geq -2h \sum_{j=0}^J \psi_j^2,$$

daí, segue-se que

$$\int_0^T G_h(t) dt + \chi_h(t) \Big|_0^T - \frac{h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 dt \leq 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt.$$

Do Lema 3.15, temos

$$\int_0^T G_h(t) dt + \chi_h(t) \Big|_0^T - \frac{\Lambda h^3}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt \leq 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt,$$

e do Corolário 3.13, obtemos

$$\int_0^T G_h(t) dt + \chi_h(t) \Big|_0^T - \frac{\Lambda h^2}{4} T G_h(t) - \frac{\Lambda h^2}{8} Y_h(t) \Big|_0^T \leq 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt,$$

ou

$$\int_0^T G_h(t) dt - \frac{\Lambda h^2}{4} T G_h(t) + Z_h(t) \Big|_0^T \leq 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt,$$

onde

$$Z_h(t) = \chi_h(t) - \frac{\Lambda h^2}{8} Y_h(t).$$

Do Lema 3.16, segue que

$$\int_0^T G_h(t) dt - \frac{\Lambda h^2}{4} T G_h(t) - 2\sqrt{L^2 - \frac{\Lambda}{16} h^4 + \frac{3\Lambda}{16\lambda_1} h^2} G_h(0) \leq 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt.$$

Da conservação de energia do sistema (3.17) – (3.19), temos

$$T \left(1 - \frac{\Lambda h^2}{4} \right) G_h(0) - 2\sqrt{L^2 - \frac{\Lambda}{16} h^4 + \frac{3\Lambda}{16\lambda_1} h^2} G_h(0) \leq 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt.$$

Para $\Lambda h^2 = \gamma$, na classe de soluções $\mathcal{G}_h(\gamma)$ de (3.17) – (3.19) deduzimos a desigualdade observabilidade dada por

$$G_h(0) \leq C(T, \gamma) \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \right], \quad (3.30)$$

onde

$$C(T, \gamma) = \frac{1}{T(1 - \gamma/4) - 2\sqrt{L^2 - \frac{\gamma}{16}h^2 + \frac{3}{16\lambda_1}\gamma}}.$$

Note que (3.30) vale, desde que

$$T > \frac{2\sqrt{L^2 - \frac{\gamma}{16}h^2 + \frac{3}{16\lambda_1}\gamma}}{1 - \gamma/4}.$$

Tendo em conta que $\lambda_1 \geq \pi^2/2L^2$ para h suficientemente pequeno, escolhemos T como

$$T(\gamma) = \frac{2\sqrt{L^2(1 + 3\gamma/8\pi^2) - \frac{\gamma}{16}h^2}}{1 - \gamma/4}, \quad (3.31)$$

e, em seguida, $C(T, \gamma)$ é reescrita como

$$C(T, \gamma) = \frac{1}{T(1 - \gamma/4) - 2\sqrt{L^2\left(1 + \frac{3}{8\pi^2}\gamma\right) - \frac{\gamma}{16}h^2}}, \quad (3.32)$$

de onde segue a instrução do Teorema 3.8.

3.2.2 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.9

Levando-se em conta o resultado de observabilidade na fronteira para as soluções filtradas em [26], temos

$$F_h(0) \leq C(T, \gamma) \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt, \quad (3.33)$$

para toda solução ϕ de (3.14) – (3.16).

Combinando as desigualdades (3.30) e (3.33) e considerando que $2\mathcal{E}_h(0) = F_h(0) + G_h(0)$ e $\phi_j = u_j + v_j$, $\psi_j = u_j - v_j$ para todo $j = 0, 1, \dots, J, J + 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}_h(0) &\leq C(T, \gamma) \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt + C(T, \gamma) \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \right] \\ &\leq C(T, \gamma) \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \right] \\ &= C(T, \gamma) \left[2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j - v_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \right], \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C(T, \gamma) \left[\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |u_j - v_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 dt \right],$$

e a conclusão neste caso é análogo ao caso anterior.

3.3 Observabilidade Uniforme: Via Desigualdade de Ingham

Existem outras técnicas de regularização do problema da perda de observabilidade numérica. Nas seções anteriores, usamos as técnicas multiplicativas e o processo de filtragem numérica para construirmos a observabilidade uniforme. Uma outra técnica bastante utilizada consiste no uso da Desigualdade de Ingham [38]. Por questões didáticas, demonstraremos o resultado devido à Ingham.

Teorema 3.17 (Desigualdade de Ingham). *Seja $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ uma seqüência de números reais tais que*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Então, para qualquer $T > \frac{2\pi}{\gamma}$ existem constantes positivas $C_i(T, \gamma) > 0$, $i = 1, 2$ tal que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_{-T}^T \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2,$$

para toda seqüências de números complexos $\{a_k\} \in l^2$.

Prova. Primeiro reduzimos o problema para o caso em que $T = 2\pi$ e $\gamma > 1$. Com efeito, se T e γ são tais que $T\gamma > 2\pi$, então multiplicamos o intervalo $-T \leq t \leq T$ por $2\pi/T$ e passamos a considerar o intervalo $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, onde $s = 2\pi t/T$. Daí temos

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{T}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds, \quad (3.1)$$

onde $\mu_n = \frac{T\lambda_n}{2\pi}$. Segue que $\mu_{n+1} - \mu_n = \frac{T}{2\pi}(\lambda_{n+1} + \lambda_n) \geq \frac{T\gamma}{2\pi} := \gamma_1 > 1$. Agora mostraremos que existe $C_1 > 0$ tal que:

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (3.2)$$

A desigualdade (3.2), conhecida como desigualdade indireta, é a chave principal para provarmos a desigualdade de observabilidade.

Definimos o funcional $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, tal que

$$h(s) = \begin{cases} \cos(s/2), & \text{se } |s| \leq \pi \\ 0, & \text{se } |s| > \pi. \end{cases}$$

Aplicamos a transformada de Fourier e obtemos

$$H(\xi) = \mathfrak{F}(h(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{i\xi s} ds. \quad (3.3)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{i\xi s} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \\ &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} \Big|_{-\pi}^{\pi} - 2i\xi \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \\ &= 2\left(e^{i\xi\pi} + e^{-i\xi\pi}\right) - 2i\xi \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \end{aligned}$$

e assim,

$$H(\xi) = 4 \cos(\pi\xi) - 2i\xi \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{4}\right) e^{i\xi s} ds. \quad (3.4)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds &= -2 \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} \Big|_{-\pi}^{\pi} + 2i\xi \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \\ &= 2i\xi H(\xi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Combinando (3.4) e (3.5) temos

$$H(\xi) = \frac{4}{1 - 4\xi^2} \cos(\pi\xi). \quad (3.6)$$

Por outro lado, desde que $0 \leq h(s) < 1$, para qualquer $s \in [-\pi, \pi]$, decorre que

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq \frac{T}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds. \quad (3.7)$$

E além disso,

$$\begin{aligned} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds &= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \overline{a_m e^{i\mu_m s}} ds \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \overline{a_m} e^{-i\mu_m s} ds = \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} e^{i(\mu_n - \mu_m)s} ds \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) e^{i(\mu_n - \mu_m)s} ds = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} \int_{-\pi}^{\pi} h(s) e^{i(\mu_n - \mu_m)s} ds \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m) = H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m) \\ &\geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m}| |H(\mu_n - \mu_m)|. \end{aligned}$$

Usamos a versão discreta da desigualdade de Holder para obtermos

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \left[\sum_{n \neq m} |a_n \bar{a}_m|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n \neq m} |H(\mu_n - \mu_m)|^2 \right]^{1/2},$$

e conseqüentemente

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \sum_{n \neq m} |a_n \bar{a}_m| \sum_{n \neq m} |H(\mu_n - \mu_m)|.$$

Como

$$\sum_{n \neq m} |a_n \bar{a}_m| \leq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\bar{a}_m|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{a}_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2,$$

decorre que

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)|.$$

Resta encontrarmos uma estimativa para $\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)|$. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| &= \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \left| \frac{4 \cos[(\mu_n - \mu_m)\pi]}{1 - 4(\mu_n - \mu_m)^2} \right| \leq \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{4}{|1 - 4(\mu_n - \mu_m)^2|} \\ &\leq \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{4}{4|\mu_n - \mu_m|^2 - 1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos $\mu_{n+1} \geq \mu_n + \gamma_1$. Após fazermos iterações em $n \in \mathbb{N}$ temos $\mu_n \geq \mu_1 + (n-1)\gamma_1$, conseqüentemente para $n > m$ temos $\mu_n \geq \mu_m$ e daí vem que

$$\mu_n - \mu_m \geq (n - m)\gamma_1.$$

Sendo assim,

$$\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| \leq \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{4}{4\gamma_1^2 |n - m|^2 - 1} \leq \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4|n - m|^2 - \frac{1}{\gamma_1^2}}.$$

Consequentemente,

$$\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| \leq \frac{8}{\gamma_1^2} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4|n - m|^2 - 1}.$$

Escolhendo $r \in \mathbb{Z}$ tal que, $r = |n - m|$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| &\leq \frac{8}{\gamma_1^2} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{4r^2 - 1} = \frac{8}{\gamma_1^2} \frac{1}{2} \sum_{r \geq 1} \left(\frac{1}{2r - 1} - \frac{1}{2r + 1} \right) \\ &= \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{r \geq 1} \left(\frac{1}{2r - 1} - \frac{1}{2r + 1} \right) = \frac{4}{\gamma_1^2}. \end{aligned}$$

Com isso obtemos

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \geq 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (3.8)$$

Substituindo a desigualdade (3.8) em (3.7) temos

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt &\geq \frac{T}{2\pi} \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \frac{2T}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \\ &= \frac{2T}{\pi} \left(1 - \frac{4\pi^2}{T^2 \gamma^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \frac{2}{T\pi} \left(T^2 - \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \end{aligned}$$

Desde que $T > 2\pi/\gamma$ existe $C_1(T, \gamma) := \frac{2}{T\pi} \left(T^2 - \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) > 0$, tal que vale a desigualdade indireta

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_1(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (3.9)$$

Mostraremos agora que existe uma constante $C_2(T, \gamma) > 0$ tal que,

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (3.10)$$

Para este caso consideraremos o funcional $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definido por

$$h(s) = \begin{cases} \cos(s/2), & \text{se } |s| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{se } |s| > \pi/2. \end{cases}$$

Procedendo de forma análoga ao caso anterior temos

$$H(\xi) = \frac{4}{1 - 4\xi^2} \cos(\pi\xi). \quad (3.11)$$

Por outro lado, desde que $\sqrt{2}/2 \leq h(s) < 1$ temos

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq \frac{T}{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds. \quad (3.12)$$

Consequentemente, seguindo os mesmos passos da demonstração anterior encontramos

$$\begin{aligned} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds &= H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m) \\ &\leq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m}| |H(\mu_n - \mu_m)|, \end{aligned}$$

e

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \leq 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \left(4 + \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.12) temos

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt &\leq \frac{4T}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \frac{4T}{\pi} \left(1 + \frac{4\pi^2}{T^2 \gamma^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \\ &= \frac{4}{T\pi} \left(T^2 + \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Segue daí, que para todo $T > 0$ existe a constante $C_2(T, \gamma) := \frac{4}{T\pi} \left(T^2 + \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) > 0$, tal que

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \quad (3.15)$$

■

Este resultado mostra que a sequência de exponenciais $\{e^{i\lambda_n t}\}$ forma uma base de Riesz no intervalo simétrico $[-T, T]$ em relação à origem.

Segundo Infante e Zuazua [26], a observabilidade na fronteira dos autovetores e o gap entre as raízes de dois autovalores consecutivos desempenham um papel importante para se alcançar uma observabilidade uniforme, usando o Teorema 3.17 (ver secção 2.5 em [26]). Então, precisamos de uma estimativa entre as raízes de dois autovalores consecutivos introduzidos no desenvolvimento de Fourier das soluções do sistema (3.17) – (3.19) na classe de soluções filtradas dadas por $\mathcal{G}_h(\gamma)$.

Lema 3.18. *Suponha que*

$$\gamma = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} \right) \quad e \quad \alpha < \frac{\gamma(\varepsilon)}{h^2}, \quad (3.16)$$

para algum $0 \leq \varepsilon < 1$. Então

$$\sqrt{\nu_{j+1}(h)} - \sqrt{\nu_j(h)} \geq \frac{\pi}{L} \cos \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} \right), \quad (3.17)$$

para todos os autovalores de (3.31) tal que $\lambda h^2 \leq \gamma$.

Prova. Vamos agora calcular a diferença entre a raiz quadrada de dois autovalores consecutivos. Considerando que $\nu_j(h) = \lambda_j(h) + 2\alpha$ temos

$$\sqrt{\lambda_j(h) + 2\alpha} = \sqrt{\lambda_j(h)} \sqrt{1 + \frac{2\alpha}{\lambda_j(h)}} \approx \sqrt{\lambda_j(h)} \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_j(h)} \right), \quad \forall j = 1, \dots, J. \quad (3.18)$$

Portanto

$$\sqrt{\lambda_{j+1}(h) + 2\alpha} - \sqrt{\lambda_j(h) + 2\alpha} \approx \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_{j+1}(h)\lambda_j(h)}} \right), \quad (3.19)$$

para todo $j = 1, \dots, J$. Agora, levando em consideração que $\lambda_j(h) < \lambda_{j+1}(h)$, para $j = 1, \dots, J$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{j+1}(h) + 2\alpha} - \sqrt{\lambda_j(h) + 2\alpha} &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda_j(h)\lambda_j(h)}} \right) \\ &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left(1 - \frac{\alpha h^2}{4 \sin^2(j\pi h/2L)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{j+1}(h) + 2\alpha} - \sqrt{\lambda_j(h) + 2\alpha} &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left(1 - \frac{\alpha h^2}{4 \sin^2(\pi\varepsilon/2)} \right) \\ &\geq \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right) \left(1 - \frac{\alpha h^2}{\gamma(\varepsilon)} \right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha = \gamma(\varepsilon)/2h^2 \leq \gamma(\varepsilon)/h^2$ obtemos

$$\sqrt{\lambda_{j+1}(h) + 2\alpha} - \sqrt{\lambda_j(h) + 2\alpha} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} \right). \quad (3.20)$$

Por outro lado, tendo em conta que $\lambda_j(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2L}\right)$ para todo $j = 1, \dots, J$, temos

$$\sqrt{\lambda_{j+1}(h)} - \sqrt{\lambda_j(h)} = \frac{2}{h} \left[\sin\left(\frac{\pi(j+1)h}{2L}\right) - \sin\left(\frac{\pi j h}{2L}\right) \right], \quad (3.21)$$

e para algum $\tau \in \left[\frac{\pi j h}{2L}, \frac{\pi(j+1)h}{2L} \right]$ satisfazendo $0 \leq \tau \leq \frac{\pi\varepsilon}{2}$ obtemos

$$\left[\sin\left(\frac{\pi(j+1)h}{2L}\right) - \sin\left(\frac{\pi j h}{2L}\right) \right] = \frac{\pi h}{L} \cos(\tau). \quad (3.22)$$

Combinando (3.22), (3.21) e (3.20) temos

$$\sqrt{\lambda_{j+1}(h) + 2\alpha} - \sqrt{\lambda_j(h) + 2\alpha} \geq \frac{\pi}{L} \cos(\tau) \geq \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right), \quad (3.23)$$

e assim, podemos concluir a prova. ■

Dividimos o restante desta seção em duas partes, onde damos duas diferentes provas da desigualdade de observabilidade para as soluções dos sistemas (3.17) – (3.19) e (3.2) – (3.5).

3.3.1 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.8

Agora estamos em condições de provar o Teorema 3.8, usando a desigualdade de Ingham. Diferentemente da técnica de filtragem (ver seção 3.2), podemos obter um resultado melhor usando a desigualdade de Ingham, no sentido de que o termo com α não é útil. Em seguida, vamos provar isso.

Teorema 3.19. *Existe uma constante positiva $C > 0$, dependendo T e $\varepsilon \in [0, 1[$, de tal modo que para alguma solução do sistema (3.17) – (3.19) na classe $\mathcal{G}_h(\gamma(\varepsilon))$ vale*

$$G_h(0) \leq C \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt. \quad (3.24)$$

Prova. De acordo com a desigualdade de Ingham e tendo em vista o Lema 3.18, segue-se que para qualquer $0 \leq \varepsilon < 1$ e $T > \frac{2L}{\cos(\pi\varepsilon/2)}$ existe uma constante $C_i(T, \varepsilon) > 0$, $i = 1, 2$ satisfazendo

$$C_1(T, \varepsilon) \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \varepsilon) \sum_{|\mu_k| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2, \quad (3.25)$$

onde $\gamma(\varepsilon) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi\varepsilon}{2} \right)$. De acordo com a identidade do Lema 3.5, segue-se que

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - (\nu(h) - 2\alpha)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - \lambda(h)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \leq \frac{L}{2 \cos^2(\pi\varepsilon/2)} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2, \quad (3.26)$$

para qualquer autovetor φ associado a um autovalor λ satisfazendo $\lambda h^2 \leq \gamma(\varepsilon)$. Notamos que (3.26) é idêntica à desigualdade (2.65) em [26]. Então, vamos agora considerar uma solução ψ de (3.17) – (3.19) na classe $\mathcal{G}_h(\gamma(\varepsilon))$. Ela pode ser escrita como

$$\psi = \sum_{|\mu_k(h)| h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k(h)t} \varphi^k. \quad (3.27)$$

Levando-se em conta (3.25) e (3.26) podemos deduzir que, para $T > \frac{2L}{\cos(\pi\varepsilon/2)}$,

$$\begin{aligned} 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt &\geq \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \\ &= \frac{L}{2h^2} \int_0^T \left| \sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} a_k e^{i\mu_k(h)t} \varphi_{k,J} \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} 2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt &\geq C_1(T, \varepsilon) \left[\frac{L}{2} \sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 \left| \frac{\varphi_{k,J}}{h} \right|^2 \right] \\ &\geq C_1(T, \varepsilon) \left[\cos^2(\pi\varepsilon/2) \sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}}{h} \right|^2 \right], \end{aligned}$$

e podemos escrever o seguinte:

$$2\alpha h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \geq C_1(T, \varepsilon) \cos^2(\pi\varepsilon/2) \sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} |a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}}{h} \right|^2. \quad (3.28)$$

Por outro lado, tendo em mente a identidade criada em (3.49), temos

$$G_h(0) = \frac{\nu_J(h)}{\nu_J(h) - 2\alpha} \sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} \left[|a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}}{h} \right|^2 \right], \quad (3.29)$$

de onde obtemos

$$\sum_{|\mu_k|h \leq \sqrt{\gamma(\varepsilon)}} \left[|a_k|^2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{k,j+1} - \varphi_{k,j}}{h} \right|^2 \right] = \frac{\nu_J(h) - 2\alpha}{\nu_J(h)} G_h(0) = \frac{\lambda_J(h)}{\lambda_J(h) + 2\alpha} G_h(0). \quad (3.30)$$

Portanto, substituindo (3.30) em (3.28) obtemos a desigualdade observabilidade dada por

$$G_h(0) \leq \frac{\lambda_J(h) + 2\alpha}{\lambda_J(h)} \frac{L}{2 \cos^2(\pi\varepsilon/2) C_1(T, \varepsilon)} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt, \quad (3.31)$$

válida para qualquer $T > \frac{2L}{\cos(\pi\varepsilon/2)}$ e para qualquer $\psi \in \mathcal{G}_h(\gamma(\varepsilon))$. Além disso, levando em consideração que $T > \frac{2L}{\cos(\pi\varepsilon/2)}$, notamos que o Teorema 3.8 vale com

$$T(\gamma) = \frac{2L}{\sqrt{1 - \gamma/4}} \quad \text{e} \quad C(T, \gamma) = \frac{\lambda_J(h) + 2\alpha}{\lambda_J(h)} \frac{1}{C_1(T, \varepsilon)(1 - \gamma/4)}, \quad (3.32)$$

sendo que $\gamma = \gamma(\varepsilon)$. Portanto, concluímos a prova. ■

3.3.2 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 3.9

Notamos que um resultado semelhante de observabilidade uniforme é válido para o sistema conservativo (3.14) – (3.16). Na verdade, é o suficiente para ver que, para $\alpha = 0$ em (3.31), podemos escrever

$$F_h(0) \leq \frac{1}{\cos^2(\pi\varepsilon/2) D(T, \varepsilon)} \frac{L}{2} \int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt, \quad (3.33)$$

para qualquer $T > \frac{2L}{\cos(\pi\varepsilon/2)}$ e para qualquer ϕ em uma classe adequada de soluções filtradas onde $F_h(\cdot)$ é a energia de (3.14) – (3.16). Agora estamos em condições de estabelecermos o principal resultado desta seção.

Teorema 3.20. *Existe uma constante positiva $\tilde{C} > 0$, dependendo de T e $\varepsilon \in [0, 1[$, tal que para qualquer solução do sistema (3.2) – (3.5) na classe $\mathcal{H}_h(\gamma(\varepsilon))$ vale*

$$\mathcal{E}_h(0) \leq \tilde{C} \frac{L}{2} \left[\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 dt \right]. \quad (3.34)$$

Prova. A prova é imediata. Com efeito, tendo em conta as estimativas (3.31) e (3.33), temos

$$2\mathcal{E}_h(0) = F_h(0) + G_h(0) \leq \max \left[\frac{1}{\cos^2(\pi\varepsilon/2)D(T, \varepsilon)}, \frac{\lambda_J(h) + 2\alpha}{\lambda_J(h)} \frac{1}{\cos^2(\pi\varepsilon/2)C_1(T, \varepsilon)} \right] \times \\ \frac{L}{2} \left[\int_0^T \left| \frac{\phi_J}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt \right].$$

Para finalizarmos, lembramos das decomposições $\phi_j = u_j + v_j$ e $\psi_j = u_j - v_j$, para obtermos

$$\mathcal{E}_h(0) \leq \tilde{C} \frac{L}{2} \left[\int_0^T \left| \frac{u_J}{h} \right|^2 dt + \int_0^T \left| \frac{v_J}{h} \right|^2 dt \right], \quad (3.35)$$

onde

$$\tilde{C} = \max \left[\frac{1}{\cos^2(\pi\varepsilon/2)D(T, \varepsilon)}, \frac{\lambda_J(h) + 2\alpha}{\lambda_J(h)} \frac{1}{\cos^2(\pi\varepsilon/2)C_1(T, \varepsilon)} \right] \quad (3.36)$$

e a conclusão é análoga ao caso anterior. ■

SISTEMA DE VIGAS DE TIMOSHENKO

4.1 Introdução

Vimos no Capítulo 1 que a teoria de Timoshenko para estiramento de vigas é dada pelas equações:

$$\rho A \varphi_{tt}(x, t) = S_x(x, t), \quad (4.1)$$

$$\rho I \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - S(x, t), \quad (4.2)$$

com as seguintes relações de tensão-estiramento

$$M(x, t) = EI \psi_x(x, t) \quad \text{e} \quad S(x, t) = kAG(\varphi_x + \psi)(x, t), \quad (4.3)$$

para o comportamento elástico da viga. Dessa forma Timoshenko [2, 3] estabeleceu as equações

$$\rho A \varphi_{tt} - kAG(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (4.4)$$

$$\rho I \psi_{tt} - EI \psi_{xx} + kAG(\varphi_x + \psi) = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T). \quad (4.5)$$

Analisamos o sistema de Timoshenko conservativo em 1 – d dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (4.6)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \quad (4.7)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (4.8)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1, \quad \psi(x, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1, \quad \forall x \in (0, L), \quad (4.9)$$

onde $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kGA$ e $b = EI$ são constantes positivas.

4.2 Conservação de Energia

A energia total das soluções do sistema (4.6) – (4.9) é dada por

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi|^2 \right] dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.10)$$

e ela é conservada ao longo do tempo, isto é:

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Essa propriedade é garantida na seguinte proposição:

Proposição 4.1 (Conservação de energia). *A energia total $E(t)$ definida em (4.10) satisfaz a taxa de variação*

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

para toda (φ, ψ) solução do sistema (4.6) – (4.9).

Prova. Multiplicamos a equação (4.6) por φ_t e integramos por partes em $(0, L)$ para obtermos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx - \kappa(\varphi_x + \psi)\varphi_t \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi)\varphi_{xt} dx = 0. \quad (4.11)$$

Procedendo de modo análogo para a equação (4.7) temos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2 \right] dx - b \psi_x \psi_t \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0. \quad (4.12)$$

Somamos as equações acima e usamos as condições de contorno (4.8) para chegarmos ao resultado esperado, isto é,

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

onde $E(t)$ está definida em (4.10). ■

A energia $E(t)$ nos sugere fortemente que o sistema (4.6)–(4.9) está bem posto no espaço de energia $\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times W_*(0, L) \times L_*^2(0, L)$, onde $W_*(0, L) := W(0, L) \cap L_*^2(0, L)$ e $W(0, L) := \{u \in H^1(0, L); u(0) = u_x(L) = 0\}$. Isso quer dizer que denotando $\Phi = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$, temos que para qualquer

$$\Phi_0 \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times W_*(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

existe uma única solução

$$\Phi \in C([0, T]; H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, L)) \cap C([0, T]; W_*(0, L)) \cap C^1([0, T]; L_*^2(0, L)).$$

Essa questão ficará evidente na seção seguinte, onde usamos a teoria de Semigrupos de Operadores Lineares [39] para mostrar a existência e unicidade de solução.

4.3 Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares

Escrevemos as equações (4.6) – (4.7) juntamente com as condições iniciais (4.9) como um problema de valor inicial. Para tanto, consideramos a variável vetorial $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T$. Desse modo, U satisfaz o seguinte problema de Cauchy:

$$U_t = \mathcal{A}U, \quad (4.13)$$

$$U(0) = U_0, \quad (4.14)$$

onde $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T$ e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ corresponde ao operador diferencial, dado formalmente por

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & 0 & \frac{k}{\rho_1}(\cdot)_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\frac{k}{\rho_2}(\cdot)_x & 0 & \frac{b}{\rho_2}(\cdot)_{xx} - \frac{k}{\rho_2}I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

em que $(\cdot)_x$ e $(\cdot)_{xx}$ indicam os operadores derivadas de primeira e de segunda ordem na variável x e I é o operador identidade.

Para que possamos dizer que as funções em $H^1(0, L)$ são contínuas em $C^0([0, L])$, assumimos que a condição inicial $\psi_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\int_0^L \psi_0(x) dx = 0.$$

Dessa forma, consideramos os seguintes espaços

$$L_*^2(0, L) := \left\{ u \in L^2(0, L); \int_0^L u(x) dx = 0 \right\}, \quad W_*(0, L) := W(0, L) \cap L_*^2(0, L),$$

onde $W(0, L) := \{u \in H^1(0, L); u(0) = u_x(L) = 0\}$.

Com isso, definimos o espaço vetorial

$$\mathcal{H} := H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times W_*(0, L) \times L_*^2(0, L),$$

que naturalmente é um espaço de Hilbert para o produto interno

$$(U, V)_{\mathcal{H}} := \int_0^L \left[\rho_1 u_2 v_2 + \rho_2 u_4 v_4 + b u_{3,x} v_{3,x} + \kappa (u_{1,x} + u_3)(v_{1,x} + v_3) \right] dx,$$

em que $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T \in \mathcal{H}$. Para $U = V$ construímos a respectiva norma

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|u_2\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|u_4\|_{L^2}^2 + b \|u_3\|_{H^1}^2 + \kappa \|u_{1,x} + u_3\|_{L^2}^2.$$

Dessa forma, o domínio de \mathcal{A} dado por:

$$D(\mathcal{A}) := \left\{ U \in \mathcal{H}; u_1 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), u_2 \in H_0^1(0, L), u_3 \in H^2(0, L) \cap W_*(0, L), u_4 \in W_*(0, L) \right\}$$

é denso em \mathcal{H} . Além disso, tomando o produto interno

$$\left(\mathcal{A}U, U \right)_{\mathcal{H}} = \int_0^L \left[\kappa(u_{1,x} + u_3)_x u_2 + bu_{3,xx} u_4 - \kappa(u_{1,x} + u_3) u_4 + bu_{3,x} u_{4,x} + \kappa(u_{1,x} + u_3)(u_{2,x} + u_4) \right],$$

integrando por partes e usando as condições de contorno, obtemos que

$$\left(\mathcal{A}U, U \right)_{\mathcal{H}} = 0.$$

Logo \mathcal{A} é um operador dissipativo. Para o problema de existência e unicidade de soluções, utilizamos a teoria de Semigrupo de Operadores Lineares [39].

Lema 4.2. *O operador \mathcal{A} em (4.15) é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} .*

Prova. Pelo Teorema de Lumer-Phillips (ver [39]) basta mostrarmos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, onde o conjunto resolvente de \mathcal{A} é definido por:

$$\rho(\mathcal{A}) := \left\{ \lambda \in \mathbf{C}; \exists (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \right\}.$$

Devemos portanto assegurar que \mathcal{A}^{-1} é um operador limitado em \mathcal{H} . Primeiramente, mostramos que $Im(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Assim, dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in \mathcal{H}$ devemos determinar $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \in D(\mathcal{A})$ tal que $-\mathcal{A}U = F$. Desse modo, reescrevemos esta última equação componente a componente, resultando no seguinte sistema:

$$-u_2 = f_1 \in H_0^1(0, L) \quad (4.16)$$

$$-\frac{\kappa}{\rho_1}(u_{1,x} + u_3)_x = f_2 \in L^2(0, L) \quad (4.17)$$

$$-u_4 = f_3 \in W_*(0, L) \quad (4.18)$$

$$-\frac{b}{\rho_2}u_{3,xx} + \frac{\kappa}{\rho_2}(u_{1,x} + u_3) = f_4 \in L_*^2(0, L). \quad (4.19)$$

De (4.16) e (4.18) é imediato que temos uma única $u_2 \in H_0^1(0, L)$ e $u_4 \in W_*(0, L)$.

Por outro lado, segue de (4.17) que

$$u_{1,x} + u_3 = -\frac{\rho_1}{\kappa} \int_0^x f_2(y) dy \in L^2(0, L). \quad (4.20)$$

Substituindo (4.20) em (4.19) temos que

$$u_{3,xx} = g(x) \in L_*^2(0, L), \quad (4.21)$$

onde $g(x) = -\frac{\rho_1}{b} \int_0^x f_2(y) dy - \frac{\rho_2}{b} f_4$. Portanto concluímos que existe uma única

$$u_3 \in H^2(0, L) \cap W_*(0, L).$$

De (4.17) segue que

$$u_{1,xx} = -u_{3,x} - \frac{\rho_1}{\kappa} f_2 \in L^2(0, L),$$

isso implica que $u_1, u_{1,x} \in L^2(0, L)$ e portanto $u_1 \in H^2(0, L)$. Além disso, como $u_1(0) = u_1(L) = 0$ decorre que $u_1 \in H_0^1(0, L)$. Assim, concluímos que existe uma única $u_1 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$. Portanto a solução de (4.13) com $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \in D(\mathcal{A})$ está provada. Além disso fica óbvio que existe uma constante $K > 0$ independente de U tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq K \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Isso implica que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e que $\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq K$. Portanto \mathcal{A}^{-1} é limitado e pelo Teorema de Lumer-Phillips ([39]), \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre \mathcal{H} .

■

Segue nosso resultado de existência e unicidade de soluções:

Teorema 4.3 (Existência e Unicidade de Solução). *Existe uma única solução para o problema dado em (4.6) – (4.9) tal que*

$$U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T \in C([0, T]; D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, T]; \mathcal{H})$$

para $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T \in D(\mathcal{A})$, $T > 0$ e também

$$U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)^T \in C([0, T]; \mathcal{H})$$

para $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)^T \in \mathcal{H}$ e $T > 0$.

Na tese de Youssef [40] é considerado as equações de Timoshenko (4.6)–(4.7) com condições de contorno do tipo:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad (\text{Dirichlet}),$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad (\text{Dirichlet} - \text{Neumann}).$$

Para cada caso, o autor demonstra uma desigualdade de observabilidade que é do tipo

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \geq K \left[|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 \right] \quad (4.22)$$

para a condição de contorno de Dirichlet e do tipo

$$\int_0^T \int_0^L |\psi|^2 dx dt \geq K_1 \left[|\varphi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\varphi^1\|_{H^{-1}(0,L)}^2 + |\psi^0|_{L^2(0,L)}^2 + \|\psi^1\|_{[H_*^{-1}(0,L)]'}^2 \right] \quad (4.23)$$

para a condição de contorno de Dirichlet - Neumann. Nas duas desigualdade acima, foram assumidas a relação de identidade entre as velocidades, isto é: $\kappa/\rho_1 = b/\rho_2$ e as constantes K , K_1 são dependentes de T , L , ρ_1 , ρ_2 , b , e κ . E consequentemente, mostrou-se um resultado de controlabilidade para os dois casos, desde que a identidade entre as velocidades sejam satisfeitas, ou seja,

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}.$$

4.4 Problema Espectral

Para que possamos aplicar o método da separação de variáveis e posteriormente desenvolver a solução do problema em séries de Fourier é necessário analisarmos o conjunto de autovalores. Portanto é nesse contexto que ressaltamos a necessidade de formularmos o problema espectral.

Consideramos o problema espectral associado ao sistema (4.6) – (4.9) dado por

$$\lambda\rho_1\check{u} + \kappa(\check{u}' + \check{v})' = 0 \text{ em } (0, L), \quad (4.24)$$

$$\lambda\rho_2\check{v} + b\check{v}'' - \kappa(\check{u}' + \check{v}) = 0 \text{ em } (0, L), \quad (4.25)$$

$$\check{u}(0) = \check{u}(L) = \check{v}(0) = \check{v}'(L) = 0, \quad (4.26)$$

onde ' denota a derivação na variável x . Estamos interessados em saber sob que condições o problema espectral (4.24) – (4.26), possui solução não trivial. Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.4. *A solução não trivial do problema espectral (4.24) – (4.26) é dada por*

$$\check{u}(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ e } \check{v}(x) = B \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right], \text{ onde } B/A = L\kappa/n\pi b \quad (4.27)$$

se, e somente se,

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \frac{b}{\rho_1}. \quad (4.28)$$

Prova. De fato, é fácil ver que as soluções em (4.27) satisfazem as condições de contorno (4.26). Então substituímos as soluções em (4.24) para obtermos

$$\lambda\rho_1 A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \kappa A \frac{n^2\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \kappa B \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0,$$

de onde obtemos

$$A \left(\lambda\rho_1 - \kappa \frac{n^2\pi^2}{L^2} \right) + \kappa B \frac{n\pi}{L} = 0.$$

Desde que $B/A = L\kappa/n\pi b$ obtemos

$$\lambda = \frac{\kappa}{\rho_1} \left(\frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{\kappa}{b} \right). \quad (4.29)$$

De forma análoga para a equação (4.25) temos

$$(\lambda\rho_2 - \kappa)B \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] + \frac{n^2\pi^2 b}{L^2} \left(B - \frac{L\kappa A}{n\pi b}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0.$$

Consequentemente, para obtermos soluções não nulas devemos impor que:

$$\lambda = \frac{\kappa}{\rho_2} \text{ e } \frac{B}{A} = \frac{L\kappa A}{n\pi b}. \quad (4.30)$$

Das equações (4.29) e (4.30), obtemos a condição de compatibilidade

$$\frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \frac{b}{\rho_1}. \quad (4.31)$$

Reciprocamente, substituindo (4.30) em (4.25) e levando em conta as condições de contorno (4.26) temos que

$$b\check{v}'' - \kappa\check{u}' = 0.$$

Por inspeção, afirmamos que $\check{u}(x) = A \sin(n\pi x/L)$ satisfaz as condições de contorno (4.26) e consequentemente temos

$$\check{v}'' = \frac{n\pi\kappa}{bL} A \cos(n\pi x/L),$$

de onde obtemos $v(x) = \frac{\kappa LA}{n\pi b} [1 - \cos(n\pi x/L)]$, o que conclui a demonstração. ■

Em virtude das equações (4.29), (4.30) e (4.31) podemos escrever

$$\frac{\lambda\rho_1}{\kappa} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{\kappa}{b} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} - \frac{\lambda\rho_2}{b},$$

e assim os autovalores são dados explicitamente por

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}.$$

Denotamos a seguir a classe de autovetores

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{array}{l} (\check{u}, \check{v}) \text{ solução do problema (4.24) - (4.26) tal que} \\ \check{u}(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \check{v}(x) = B \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right], \\ \frac{B}{A} = \frac{\kappa L}{n\pi b} \text{ e } \frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \frac{b}{\rho_1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (4.32)$$

que satisfazem o problema (4.24) – (4.26) para qualquer que seja a paridade de n . Portanto podemos escrever

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_{2n} \cup \mathcal{C}_{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e isso nos permite afirmar que tanto \mathcal{C}_{2n} quanto \mathcal{C}_{2n+1} se constituem em subclasses de soluções que satisfazem o problema (4.24) – (4.26), $\forall n \in \mathbb{N}$.

O fato de termos dividido as soluções \mathcal{C} em duas subclasses \mathcal{C}_{2n} e \mathcal{C}_{2n+1} ficará evidente no Capítulo 5 ao estudarmos o caso numérico, pois neste caso, apenas soluções na subclasse \mathcal{C}_{2n} satisfazem o esquema numérico correspondente a (4.24) – (4.26).

A proposição seguinte trata das soluções do sistema (4.6) – (4.9) em séries de Fourier.

Teorema 4.5. *A solução do sistema (4.6) – (4.9) é dada por:*

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}} t \right) \right] \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad (4.33)$$

$$\psi(x, t) = \frac{L\kappa}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}} t \right) \right] \left[1 - \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right] \quad (4.34)$$

onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier.

Prova. Consideramos $\varphi(x, t) = S(t)\tilde{u}(x)$ e $\psi(x, t) = S(t)\tilde{v}(x)$ e as equações (4.6) – (4.7) para obtemos

$$\frac{S''(t)}{S(t)} = \frac{\kappa(\tilde{u}'(x) + \tilde{v}(x))'}{\rho_1 \tilde{u}(x)} = -\lambda, \quad (4.35)$$

$$\frac{S''(t)}{S(t)} = \frac{b\tilde{v}''(x) - \kappa(\tilde{u}'(x) + \tilde{v}(x))}{\rho_2 \tilde{v}(x)} = -\lambda. \quad (4.36)$$

Como conhecemos a solução do problema espectral (ver Teorema 4.4), voltamos nossa atenção para a equação

$$S''(t) + \lambda S(t) = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

cuja solução é dada por

$$S_n(t) = a_n \cos \left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}} t \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} \sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}} t \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde a_n, b_n são os coeficientes Fourier. Assim, o resultado está estabelecido. ■

Lema 4.6. Para toda (φ, ψ) solução de (4.6) – (4.9) vale

$$\rho_1 \int_0^L |\varphi|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\psi|^2 dx = \frac{b}{\lambda} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx.$$

Prova. Multiplicamos a equação (4.24) por \tilde{u} , integramos em $(0, L)$ e consideramos as condições de contorno (4.26) para obtermos

$$\lambda \rho_1 \int_0^L |\tilde{u}|^2 dx - \kappa \int_0^L (\tilde{u}' + \tilde{v}) \tilde{u}' dx = 0. \quad (4.37)$$

Analogamente, multiplicamos a equação (4.25) por \tilde{v} e obtemos

$$\lambda \rho_2 \int_0^L |\tilde{v}|^2 dx - b \int_0^L |\tilde{v}'|^2 dx - \kappa \int_0^L (\tilde{u}' + \tilde{v}) \tilde{v} dx = 0. \quad (4.38)$$

Somando as duas equações acima obtemos

$$\lambda \rho_1 \int_0^L |\tilde{u}|^2 dx + \lambda \rho_2 \int_0^L |\tilde{v}|^2 dx = b \int_0^L |\tilde{v}'|^2 dx + \kappa \int_0^L |\tilde{u}' + \tilde{v}|^2 dx. \quad (4.39)$$

Consequentemente

$$\rho_1 \int_0^L |\tilde{u}|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\tilde{v}|^2 dx = \frac{b}{\lambda} \int_0^L |\tilde{v}'|^2 dx + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^L |\tilde{u}' + \tilde{v}|^2 dx, \quad (4.40)$$

Para concluir, multiplicando a equação acima por $|S(t)|^2$ e considerando que $(\varphi, \psi) = (S(t)\tilde{u}, S(t)\tilde{v})$ segue o resultado. ■

Corolário 4.7. Para toda (φ, ψ) solução de (4.6) – (4.9), vale a seguinte desigualdade

$$\rho_1 \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \leq \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right) b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right) \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx.$$

Prova. Considerando na equação (4.24) a solução \tilde{v} temos

$$\lambda\rho_1\tilde{u} + \kappa\tilde{u}'' + \frac{n\pi}{L}B\kappa \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0.$$

Tendo em vista que $\tilde{u} = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $B/A = L\kappa/n\pi b$, decorre que

$$\frac{\lambda\rho_1}{k}\tilde{u} + \tilde{u}'' + \frac{\kappa}{b}\tilde{u} = 0,$$

ou

$$\frac{\lambda\rho_1}{k}\tilde{u} + \tilde{u}'' + \frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\rho_2}{b}\tilde{u} = 0, \text{ com } \kappa/\rho_2 = \lambda.$$

Daí, podemos considerar o seguinte problema

$$-\tilde{u}'' = p(\lambda)\tilde{u} \text{ em } (0, L), \quad (4.41)$$

$$\tilde{u}(0) = \tilde{u}(L) = 0, \quad (4.42)$$

onde $p(\lambda) = \lambda\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)$.

Multiplicando a equação (4.41) por \tilde{u} , integrando em $(0, L)$ e usando as condições de contorno (4.42) segue que

$$p(\lambda) \int_0^L |\tilde{u}|^2 dx = \int_0^L |\tilde{u}'|^2 dx. \quad (4.43)$$

Consequentemente, multiplicando a equação acima por $|S(t)|^2$ e considerando que $\varphi = S(t)\tilde{u}(x)$ obtemos

$$p(\lambda) \int_0^L |\varphi|^2 dx = \int_0^L |\varphi_x|^2 dx. \quad (4.44)$$

Combinando o Lema 4.6 com a equação (4.44) e considerando a relação $p(\lambda)/\lambda = \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}$, segue o resultado, isto é,

$$\rho_1 \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \leq \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)\kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx.$$

■

4.5 Desigualdade de Observabilidade

Nesta subsecção estabelecemos uma desigualdade de observabilidade para o sistema de Timoshenko (4.6) – (4.9) em $1 - d$, usando técnicas multiplicativas. Mas antes disso precisamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 4.8. *Para toda (φ, ψ) solução de (4.6) – (4.9), vale a seguinte desigualdade*

$$\left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx \right]_0^T \geq -2LM E(0), \quad (4.45)$$

onde

$$\mathcal{M} = \max \left\{ 1, 1 + \frac{1}{L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L} \right\} < \infty. \quad (4.46)$$

Prova. Usando a desigualdade de Young, juntamente com o Lema 4.6 e o Corolário 4.7, segue que

$$\begin{aligned} \left| \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx \right| &\leq \frac{\rho_1 L}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_1 L}{2} \int_0^L |\varphi_x|^2 dx \\ &+ \frac{\rho_2 L}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{\rho_2 L}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx \right| &\leq \frac{\rho_1 L}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \left(1 + \frac{1}{L}\right) \frac{\rho_2 L}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx \\ &+ \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{b} + \frac{1}{\lambda L}\right) \frac{bL}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} + \frac{1}{\lambda L}\right) \frac{\kappa L}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx. \end{aligned}$$

Substituindo $\lambda = \kappa/\rho_2$ na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \left| \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx \right| &\leq \frac{\rho_1 L}{2} \int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \left(1 + \frac{1}{L}\right) \frac{\rho_2 L}{2} \int_0^L |\psi_t|^2 dx \\ &+ \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L}\right) \frac{bL}{2} \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L}\right) \frac{\kappa L}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx, \end{aligned}$$

e escolhendo

$$\mathcal{M} = \max \left\{ 1, 1 + \frac{1}{L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L} \right\} < \infty, \quad (4.47)$$

segue que

$$\left| \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx \right| \leq LME(t).$$

Portanto, temos o resultado, isto é,

$$\left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_x x dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx \right]_0^T \geq -2LME(0).$$

■

Agora estamos em condições de provarmos o principal resultado desta seção.

Teorema 4.9. *Para todo $T > 2LM$ vale a seguinte desigualdade de observabilidade*

$$E(0) \leq C(T) \left[\rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t)|^2 dt \right],$$

para toda solução de (4.6) – (4.9) onde $C(T) = 1/(T - 2LM)$ e

$$\mathcal{M} = \max \left\{ 1, 1 + \frac{1}{L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L} \right\} < \infty.$$

Prova. Multiplicamos a equação (4.6) por $x\varphi_x$ e integramos em $(0, L) \times (0, T)$ para obtermos

$$\int_0^T \int_0^L [\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x] x \varphi_x dx dt = 0. \quad (4.48)$$

Denotemos $I_1 := \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_x x dx dt$. Realizando uma integração por partes e tendo em vista as condições de contorno em (4.8), temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx \right]_0^T - \int_0^T \int_0^L \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dx} |\varphi_t|^2 x dx dt. \\ &= \left[\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_x x dx \right]_0^T + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Substituindo (4.49) em (4.48) resulta que

$$X_\varphi(t) \Big|_0^T + \frac{\rho_1}{2} \int_0^T \int_0^L |\varphi_t|^2 dx dt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \varphi_x x dx dt = 0, \quad (4.50)$$

onde $X_\varphi(t) := \rho_1 \int_0^L x \varphi_x \varphi_t dx$.

Analogamente, multiplicando a equação (4.7) por $x\psi_x$ obtemos

$$\begin{aligned} X_\psi(t) \Big|_0^T + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt - \frac{L\rho_2}{2} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt \\ + L\kappa \int_0^T [\varphi_x(L, t) + \psi(L, t)] \psi(L, t) dt - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi x dx dt \\ - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde $X_\psi(t) := \rho_2 \int_0^L x \psi_x \psi_t dx$.

Finalmente, multiplicamos a equação (4.7) por ψ , integramos por partes e tendo em vista as condições de contorno em (4.8), temos

$$Y_\psi(t) \Big|_0^T - \rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + b \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt = 0, \quad (4.52)$$

onde $Y_\psi(t) := \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx$. Adicionando (4.50), (4.51) e (4.52) podemos escrever

$$\begin{aligned} & \left[X_\varphi(t) + X_\psi(t) + Y_\psi(t) \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \left[\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2 \right] dx dt \\ & - \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x (\varphi_x + \psi) x dx dt + L\kappa \int_0^T \left[\varphi_x(L, t) + \psi(L, t) \right] \psi(L, t) dt \\ & - \frac{L\rho_2}{2} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt - \rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + b \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Por outro lado, temos que

$$\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x (\varphi_x + \psi) x dx dt = \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t) + \psi(L, t)|^2 dt - \frac{\kappa}{2} \int_0^T \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx dt. \quad (4.54)$$

Levando em conta (4.53) e (4.54) deduzimos que

$$\begin{aligned} & \left[X_\varphi(t) + X_\psi(t) + Y_\psi(t) \right]_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L \left[\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2 + \kappa \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 \right] dx dt \\ & + b \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt + L\kappa \int_0^T \left[\varphi_x(L, t) + \psi(L, t) \right] \psi(L, t) dt - \frac{L\rho_2}{2} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt \\ & - \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t) + \psi(L, t)|^2 dt - \rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando que

$$\begin{aligned} L\kappa \int_0^T [\varphi_x(L, t) + \psi(L, t)] \psi(L, t) dt - \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t) + \psi(L, t)|^2 dt = \\ \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\psi(L, t)|^2 dt - \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

decorre que

$$\begin{aligned} \left[X_\varphi(t) + X_\psi(t) + Y_\psi(t) \right]_0^T + \int_0^T E(t) dt + b \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt + \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\psi(L, t)|^2 dt \\ = \rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \frac{L\rho_2}{2} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt + \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

onde $E(t)$ é dada em (4.10).

De um modo geral, considerando a estimativa construída no Lema 4.8, temos a desigualdade de observabilidade dada por

$$E(0) \leq C(T) \left[\rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \frac{L\kappa}{2} \int_0^T |\psi(L, t)|^2 dt + \frac{L\rho_2}{2} \int_0^T |\psi_t(L, t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t)|^2 dt \right],$$

onde $C(T)$ depende de $T, L, \rho_1, \rho_2, \kappa, b$. Cabe ressaltar que devido $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{C}_{2n}$ segue que $\psi(L, t) = \psi_t(L, t) = 0$ (ver 4.34). Portanto consideramos a seguinte estimativa

$$E(0) \leq C(T) \left[\rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T |\varphi_x(L, t)|^2 dt \right],$$

onde $C(T) = 1/(T - 2L\mathcal{M})$. ■

SEMIDISCRETIZAÇÃO DO SISTEMA DE VIGAS DE TIMOSHENKO

Neste capítulo analisamos do ponto de vista numérico das equações semidiscretas em diferenças finitas o equivalente semidiscreto da propriedade de observabilidade (Teorema 4.9) do sistema de Timoshenko (4.6) – (4.9).

O principal resultado deste capítulo versa sobre a perda de observabilidade numérica para a dinâmica semidiscreta em diferenças finitas aplicadas ao sistema de Timoshenko.

5.1 Dinâmica Numérica Semidiscreta

Nesta subseção analisamos o análogo de (4.6) – (4.9) para semidiscretizações em diferenças finitas do sistema de Timoshenko. Vamos considerar a semidiscretização para ilustrar o tipo de problema que temos em mente. Dado $J \in \mathbb{N}$ definimos $h = L/(J + 1)$ e introduzimos a partição

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_J < x_{J+1} = L, \text{ com } x_j = jh.$$

Consideramos o seguinte sistema semidiscreto para o problema conservativo (4.6) – (4.9).

$$\rho_1 \varphi_j'' - \kappa \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} - \kappa \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} = 0, \quad (5.1)$$

$$\rho_2 \psi_j'' - b \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} + \kappa \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + \kappa \frac{\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}}{4} = 0, \quad (5.2)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{J+1} = \psi_0 = 0, \quad (5.3)$$

$$b \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} + \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right] = 0, \quad (5.4)$$

$$\varphi_j(0) = \varphi_j^0, \psi_j(0) = \psi_j^0, \varphi_j'(0) = \varphi_j^1, \psi_j'(0) = \psi_j^1. \quad (5.5)$$

Em (5.1) – (5.5) ' denota a derivada com relação ao tempo e $(\varphi_j, \psi_j) \equiv (\varphi_j(t), \psi_j(t))$ para todo $j = 1, 2, \dots, J$ e $0 < t < T$.

A energia numérica das soluções de (5.1) – (5.5) é dada por

$$E_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 |\varphi_j'|^2 + \rho_2 |\psi_j'|^2 + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right], \quad (5.6)$$

para todo $t \geq 0$.

Proposição 5.1 (Conservação de Energia). *Para qualquer $h > 0$ a energia total $E_h(\cdot)$ definida em (5.6) satisfaz a taxa de variação*

$$\frac{d}{dt} E_h(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.7)$$

para toda (φ, ψ) solução de (5.1) – (5.5) e conseqüentemente temos

$$E_h(t) = E_h(0), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.8)$$

Prova. Multiplicando a equação (5.1) por $h\varphi_j'(t)$ e adicionando para $j = 1, 2, \dots, J$, obtemos

$$\rho_1 \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J |\varphi_j'|^2 - \kappa h \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \right) \varphi_j' - \kappa h \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \varphi_j' = 0. \quad (5.9)$$

Considerando as condições contorno (5.3) temos

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \right) \varphi'_j &= -\frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 - \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} \right) \varphi'_0 \\
 &+ \left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} \right) \varphi'_{J+1}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 h \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \varphi'_j &= -h \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \frac{\varphi'_{j+1} - \varphi'_j}{h} \\
 &- \left(\frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \varphi'_0 + \left(\frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \varphi'_{J+1}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Combinando (5.9), (5.10) e (5.11) concluimos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \rho_1 |\varphi'_j|^2 - \kappa \left[\left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \varphi'_{J+1} - \kappa \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \varphi'_0 \right] \\
 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) \frac{\varphi'_{j+1} - \varphi'_j}{h} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

De forma análoga, multiplicamos a equação (4.7) por $h\psi'_j$ e obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 |\psi'_j|^2 + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right] - b \left[\left(\frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right) \psi'_{J+1} - b \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{h} \right) \psi'_0 \right] \\
 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) \frac{\psi'_{j+1} + \psi'_j}{2} \\
 - \frac{\kappa h}{2} \left[\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \psi'_0 + \left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \psi'_{J+1} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

E assim, somando as equações (5.12) e (5.13) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 |\varphi'_j|^2 + \rho_2 |\psi'_j|^2 + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right] - b \left[\left(\frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right) \psi'_{J+1} - b \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{h} \right) \psi'_0 \right] \\ + \kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) \left(\frac{\varphi'_{j+1} - \varphi'_j}{h} + \frac{\psi'_{j+1} + \psi'_j}{2} \right) \\ - \frac{\kappa h}{2} \left[\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \psi'_0 + \left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \psi'_{J+1} \right] = 0, \end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 |\varphi'_j|^2 + \rho_2 |\psi'_j|^2 + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] \\ - b \left[\left(\frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right) \psi'_{J+1} - b \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{h} \right) \psi'_0 \right] - \frac{\kappa h}{2} \left[\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \psi'_0 \right. \\ \left. + \left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \psi'_{J+1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Usando as condições de contorno (5.3) – (5.4) obtemos $\frac{d}{dt} E_h(t) = 0$ e em seguida, $E_h(t) = E_h(0)$, para todo $t \in [0, T]$ onde $E_h(t)$ é dada em (5.6). ■

5.1.1 Problema Espectral Semidiscreto

Para tornar precisa nossas afirmações consideramos o problema espectral semidiscreto associado ao sistema (5.1) – (5.5), o qual é dado por

$$\lambda \rho_1 \check{u}_j + \kappa \frac{\check{u}_{j+1} - 2\check{u}_j + \check{u}_{j-1}}{h^2} + \kappa \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_{j-1}}{2h} = 0, \quad (5.14)$$

$$\lambda \rho_2 \check{v}_j + b \frac{\check{v}_{j+1} - 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{h^2} - \kappa \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1}}{2h} - \kappa \frac{\check{v}_{j+1} + 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{4} = 0, \quad (5.15)$$

$$\check{u}_0 = \check{u}_{J+1} = \check{v}_0 = 0, \quad (5.16)$$

$$b \frac{\check{v}_{J+1} - \check{v}_J}{h} + \frac{\kappa h}{2} \left[\frac{\check{u}_{J+1} - \check{u}_J}{h} + \frac{\check{v}_{J+1} + \check{v}_J}{2} \right] = 0. \quad (5.17)$$

Vamos denotar por $\lambda_1(h), \lambda_2(h), \dots, \lambda_J(h)$, os J autovalores de (5.14) – (5.17), satisfazendo

$$0 < \lambda_1(h) < \lambda_2(h) < \dots < \lambda_N(h), \text{ com } N = J/2.$$

Estes autovalores são dados por

$$\lambda_n(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi h}{L} \right) \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h) \right)^{-1}, \quad (5.18)$$

onde

$$\sigma(h) = \frac{4b}{4b - \kappa h^2} \cos^2 \left(\frac{n\pi h}{L} \right) \rightarrow 1, \text{ com } h \rightarrow 0 \text{ (} h \neq 2\sqrt{b/\kappa} \text{)}. \quad (5.19)$$

Teorema 5.2. *A solução não trivial do problema espectral (5.14) – (5.17) é dada por*

$$\check{u}_j = A \sin \left(\frac{2n\pi x_j}{L} \right) \text{ e } \check{v}_j = B \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi x_j}{L} \right) \right], \quad (5.20)$$

onde

$$\frac{B}{A} = \frac{2\kappa h}{4b - \kappa h^2} \cot \left(\frac{n\pi h}{L} \right) \text{ com } h \neq 2\sqrt{b/\kappa}, \quad (5.21)$$

se, e somente se,

$$\sigma(h) \frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi h}{L} \right) \frac{b}{\rho_1}. \quad (5.22)$$

Prova. É fácil ver que a solução $(\check{u}_j, \check{v}_j)$ satisfaz as condições de contorno (5.16). Agora mostramos que ela também satisfaz as condições de contorno (5.17) e daí obtemos relação (5.21).

Levando em consideração que $\check{u}_{J+1} = 0$, podemos reescrever (5.17) como

$$\left(\frac{b}{h} + \frac{\kappa h}{4} \right) \check{v}_{J+1} - \left(\frac{b}{h} - \frac{\kappa h}{4} \right) \check{v}_J = \frac{\kappa}{2} \check{u}_J.$$

Agora substituindo \check{u}_J, \check{v}_J e \check{v}_{J+1} segue que

$$\left(\frac{4b + \kappa h^2}{4h} \right) B \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi x_{J+1}}{L} \right) \right] - \left(\frac{4b - \kappa h^2}{4h} \right) B \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi x_J}{L} \right) \right] = \frac{\kappa A}{2} \sin \left(\frac{2n\pi x_J}{L} \right),$$

e como $\cos\left(\frac{2n\pi x_{J+1}}{L}\right) = 1$ obtemos

$$-\left(\frac{4b - \kappa h^2}{4h}\right)B \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x_J}{L}\right)\right] = \frac{\kappa A}{2} \sin\left(\frac{2n\pi x_J}{L}\right).$$

Considerando as identidades dadas por

$$\cos\left(\frac{2n\pi x_J}{L}\right) = \cos\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{2n\pi x_J}{L}\right) = -\sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{4b - \kappa h^2}{4h}B \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi h}{L}\right)\right] &= \frac{\kappa A}{2} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right), \\ \frac{4b - \kappa h^2}{2h}B \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) &= \frac{\kappa}{2}A \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right), \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$(4b - \kappa h^2)B \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) = \kappa h A \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right). \quad (5.23)$$

De onde obtemos a seguinte relação

$$\frac{B}{A} = \frac{2\kappa h}{4b - \kappa h^2} \cot\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \quad \text{com} \quad h \neq 2\sqrt{b/\kappa}.$$

É importante ressaltar aqui a convergência de B/A para o caso contínuo na classe \mathcal{C}_{2n} no limite de h tendendo à zero, ou seja,

$$\frac{B}{A} = \frac{2\kappa L}{(4b - \kappa h^2)n\pi} \cos(n\pi h/L) \left[\frac{\sin(n\pi h/L)}{n\pi h/L}\right]^{-1} \longrightarrow \frac{\kappa L}{2n\pi b},$$

com $h \rightarrow 0$.

Agora que conhecemos os autovetores $(\check{u}_j, \check{v}_j)$ e a relação B/A podemos aplicá-los nas equações de (5.14) – (5.15).

Para a equação (5.14) temos

$$\lambda\rho_1 A \sin\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) - \frac{2\kappa A}{h^2} \sin\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) + \frac{\kappa A}{h^2} \left[\sin\left(\frac{2n\pi x_{j+1}}{L}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi x_{j-1}}{L}\right) \right] - \frac{\kappa B}{2h} \left[\cos\left(\frac{2n\pi x_{j+1}}{L}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi x_{j-1}}{L}\right) \right] = 0.$$

Usando relações trigonométricas elementares, reescrevemos

$$\lambda\rho_1 A - \frac{2\kappa}{h^2} A + \frac{2\kappa}{h^2} A \cos\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) + \frac{\kappa B}{h} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) = 0,$$

desde que $\sin(2n\pi x_j/L) \neq 0$.

Simplificando convenientemente, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda\rho_1 A - \frac{2\kappa A}{h^2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi h}{L}\right)\right) + \frac{\kappa B}{h} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) &= 0, \\ \lambda\rho_1 A - \frac{4\kappa A}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) + \frac{\kappa B}{h} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) &= 0. \end{aligned}$$

E daí, obtemos a sequência os autovalores

$$\lambda = \frac{4\kappa}{\rho_1 h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) - \frac{\kappa B}{\rho_1 A h} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right). \quad (5.24)$$

Para a equação (5.15) temos

$$\lambda\rho_2 \check{v}_j + b \frac{\check{v}_{j+1} - 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{h^2} - \kappa \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1}}{2h} - \kappa \frac{\check{v}_{j+1} + 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{4} = 0. \quad (5.25)$$

Em seguida, usamos a identidade dada por

$$\frac{\check{v}_{j+1} + 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{4} = \check{v}_j + \frac{\check{v}_{j+1} - 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{4},$$

para reescrevermos a equação (5.25) da seguinte forma:

$$\left(\lambda\rho_2 - \kappa\right)\check{v}_j + \left(\frac{4b - \kappa h^2}{4h^2}\right)\left(\check{v}_{j+1} - 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}\right) - \frac{\kappa}{2h}\left(\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1}\right) = 0.$$

Substituindo os autovetores $(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j)$ temos

$$B(\lambda\rho_2 - \kappa) \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) \right] - \frac{\kappa A}{2h} \left[\sin\left(\frac{2n\pi x_{j+1}}{L}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi x_{j-1}}{L}\right) \right] \\ - B\left(\frac{4b - \kappa h^2}{4h^2}\right) \left[\cos\left(\frac{2n\pi x_{j+1}}{L}\right) - 2\cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) + \cos\left(\frac{2n\pi x_{j-1}}{L}\right) \right] = 0.$$

Em seguida, usamos relações trigonométricas na adição e subtração do $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$.

$$B(\lambda\rho_2 - \kappa) \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) \right] - \frac{\kappa A}{h} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) \\ + 2B\left(\frac{4b - \kappa h^2}{4h^2}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) \right] = 0.$$

E assim,

$$2B(\lambda\rho_2 - \kappa) \sin^2\left(\frac{n\pi x_j}{L}\right) - \frac{\kappa A}{h} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) \\ + B\left(\frac{4b - \kappa h^2}{h^2}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) = 0,$$

ou

$$2B(\lambda\rho_2 - \kappa) \sin^2\left(\frac{n\pi x_j}{L}\right) \\ + \frac{1}{h^2} \left[(4b - \kappa h^2) B \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) - \kappa h A \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) = 0.$$

Consequentemente resulta que

$$\lambda = \frac{\kappa}{\rho_2}, \quad (5.26)$$

pois como sabemos (ver 5.23), $(4b - \kappa h^2) B \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) - \kappa h A \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) = 0$.

Igualando (5.24) e (5.26) obtemos a relação dada por

$$\sigma(h) \frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \frac{b}{\rho_1}, \quad (5.27)$$

onde $\sigma(h) = 4b/(4b - \kappa h^2) \cos^2(n\pi h/L)$.

A recíproca segue de modo análogo ao que é feito no Teorema 4.4 e portanto encerramos a demonstração. ■

Devido as equações (5.24), (5.26) e (5.27) podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda\rho_1}{\kappa} &= \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) - \frac{B}{Ah} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right). \\ &= \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) - \frac{4\kappa}{4b - \kappa h^2} \cos^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right). \end{aligned}$$

Escolhendo

$$\sigma(h) := \frac{4b}{4b - \kappa h^2} \cos\left(\frac{n\pi h}{L}\right),$$

temos

$$\frac{\lambda\rho_1}{\kappa} = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) - \frac{\kappa}{b} \sigma(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) - \frac{\lambda\rho_2}{b} \sigma(h)$$

e conseqüentemente

$$\lambda\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h)\right) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right).$$

Seguindo o análogo contínuo em (4.32) denotamos a seguinte classe de autovetores com modo de vibração par, isto é:

$$\mathcal{C}_{2n}(h) := \begin{cases} (\check{u}_j, \check{v}_j) \text{ solução do problema (5.14)-(5.17) tal que} \\ \check{u}_j = A \sin\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right), \check{v}_j = B \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right)\right], \\ \frac{B}{A} = \frac{2\kappa h}{4b - \kappa h^2} \cot\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \text{ com } h \neq 2\sqrt{b/\kappa} \text{ e} \\ \sigma(h) \frac{\kappa}{\rho_1} + \frac{b}{\rho_2} = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \frac{b}{\rho_1} \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 1. \end{cases} \quad (5.28)$$

Diferentemente do que ocorre no contínuo, afirmamos que apenas essa subclasse de soluções numéricas satisfazem o problema (5.14) – (5.17). Ou seja, autovetores na classe $\mathcal{C}_{2n+1}(h)$ não o satisfazem. Isto fica evidente quando substituimos $(\check{u}_j, \check{v}_j) \in \mathcal{C}_{2n+1}(h)$ nas equações (5.15) e (5.17), pois resulta numa contradição que pode ser vista na proposição seguinte.

Proposição 5.3. *Afirmamos que as soluções $(\check{u}_j, \check{v}_j) \in \mathcal{C}_{2n+1}(h)$ não satisfazem o problema (5.14) – (5.17).*

Prova. De fato, consideramos soluções $(\check{u}_j, \check{v}_j) \in \mathcal{C}_{2n+1}(h)$, isto é:

$$\check{u}_j = A \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right) \text{ e } \check{v}_j = B \left[1 - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right)\right], \quad (5.29)$$

e em seguida, substituímos na equação (5.15) para obtermos

$$\begin{aligned} & 2B(\lambda\rho_2 - \kappa) \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right) \\ & + \frac{1}{h^2} \left[(4b - \kappa h^2)B \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi h}{2L}\right) - \kappa h A \sin\left(\frac{(2n+1)\pi h}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right) = 0. \end{aligned}$$

Daí, decorre que

$$\frac{B}{A} = \frac{\kappa h}{4b - \kappa h^2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi h}{L}\right)}{\sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi h}{2L}\right)}, \text{ com } h \neq 2\sqrt{b/\kappa}. \quad (5.30)$$

Por outro lado, substituindo na equação (5.17) obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4b + \kappa h^2}{4h}\right) B \left[1 - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x_{j+1}}{L}\right)\right] - \left(\frac{4b - \kappa h^2}{4h}\right) B \left[1 - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right)\right] \\ & = \frac{\kappa A}{2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right), \end{aligned}$$

e como $\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x_{j+1}}{L}\right) = -1$, segue que

$$(4b + \kappa h^2)B - (4b - \kappa h^2)B \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{2L}\right) = \kappa h A \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right).$$

Tendo em vista que

$$\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{2L}\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi h}{2L}\right) \text{ e } \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x_j}{L}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi h}{L}\right),$$

decorre que

$$(4b + \kappa h^2)B - (4b - \kappa h^2)B \cos^2\left(\frac{(2n+1)\pi h}{2L}\right) = \kappa h A \sin\left(\frac{(2n+1)\pi h}{L}\right)$$

e por conseguinte

$$(4b + \kappa h^2)B - (4b - \kappa h^2)B \left[1 - \sin^2 \left(\frac{(2n+1)\pi h}{2L} \right) \right] = \kappa h A \sin \left(\frac{(2n+1)\pi h}{L} \right).$$

O que implica em

$$\frac{B}{A} = \frac{\kappa h \sin \left(\frac{(2n+1)\pi h}{L} \right)}{2\kappa h^2 + (4b - \kappa h^2) \sin^2 \left(\frac{(2n+1)\pi h}{2L} \right)}. \quad (5.31)$$

Comparando (5.30) e (5.31) vemos a contradição. ■

De agora em diante, quando falarmos em solução numérica ficará implícito que estamos considerando a classe de autovetores $\mathcal{C}_{2n}(h)$.

O principal objetivo desta seção é analisar a versão semidiscreta da desigualdade de observabilidade (4.48), ou seja:

$$E(0) \leq C(T, h) \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt \right]. \quad (5.32)$$

O resultado seguinte afirma que isso é falso, ou seja, a constante $C(T, h)$ não é limitada.

Teorema 5.4. *Para qualquer $T > 0$, temos*

$$\sup_{(\varphi, \psi) \text{ resolve (5.1) - (5.5)}} \frac{E_h(0)}{\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty, \quad (5.33)$$

com $h \rightarrow 0$.

Como foi visto na introdução, este fato se deve a introdução de soluções numéricas espúrias próprias do esquema numérico em diferenças finitas.

Para provar o Teorema (5.4) utilizamos o mesmo procedimento usado por Infante e Zuazua [26], que consiste em analisarmos o espectro de (5.1) – (5.5) e usarmos as técnicas multiplicativas para obtermos a identidade de observabilidade e concluir a respeito da perda de observabilidade numérica. Para provar a contrapartida positiva do Teorema (5.4), isto é, a desigualdade da

forma (5.32) que seja uniforme quando $h \rightarrow 0$, usamos também as técnicas multiplicativas discretas. Como mencionado acima, para que essas desigualdades sejam uniformes com respeito ao parâmetro de malha h , temos que descartar as soluções numéricas espúrias introduzidas pelo esquema numérico sob consideração.

A solução explícita do problema (5.1) – (5.5) pode ser encontrada utilizando o Método da Separação de Variáveis como segue na proposição abaixo em séries de Fourier.

Proposição 5.5. *A solução do sistema (5.1) – (5.5) é dada pelo desenvolvimento da série de Fourier*

$$\varphi(x_j, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\sqrt{\lambda_n(h)}t) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n(h)}t) \right] \check{u}^n, \quad (5.34)$$

$$\psi(x_j, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\sqrt{\lambda_n(h)}t) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n(h)}t) \right] \check{v}^n, \quad (5.35)$$

onde

$$\lambda_n(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\sigma(h)\right)^{-1}, \quad \sigma(h) = \frac{4b}{4b - \kappa h^2} \cos^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right)$$

e a_n, b_n são os coeficientes de Fourier, $\check{u}^n = (\check{u}_{n,1}, \dots, \check{u}_{n,J})$, $\check{v}^n = (\check{v}_{n,1}, \dots, \check{v}_{n,J})$ os autovetores associados, onde cada componente é dada por $\check{u}_{n,j} = A \sin\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right)$ e $\check{v}_{n,j} = B\left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right)\right)$ com a relação $B/A = (2\kappa h/(4b - \kappa h^2)) \cot(n\pi h/L)$.

Prova. Assumimos que

$$\varphi_j(t) := S(t)\check{u}_j \text{ e } \psi_j(t) := S(t)\check{v}_j, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, J, \quad (5.36)$$

e substituímos (5.36) em (5.1) – (5.5) para obtermos

$$\frac{S''(t)}{S(t)} = \left[\kappa \frac{\check{u}_{j+1} - 2\check{u}_j + \check{u}_{j-1}}{h^2} + \kappa \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_{j-1}}{2h} \right] \frac{1}{\rho_1 \check{u}_j} = -\lambda, \quad (5.37)$$

$$\frac{S''(t)}{S(t)} = \left[b \frac{\check{v}_{j+1} - 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{h^2} - \kappa \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1}}{2h} - \kappa \frac{\check{v}_{j+1} + 2\check{v}_j + \check{v}_{j-1}}{4} \right] \frac{1}{\rho_2 \check{v}_j} = -\lambda. \quad (5.38)$$

Para soluções não triviais tomamos $\lambda > 0$. Em seguida, obtemos o problema espectral dado pelo sistema (5.14) – (5.17). Levando em conta as condições de contorno (5.16), (5.17) e o Teorema 5.2, sabemos que os autovetores $\check{u}^n = (\check{u}_{n,1}, \dots, \check{u}_{n,J})$, $\check{v}^n = (\check{v}_{n,1}, \dots, \check{v}_{n,J})$ são dados por

$$\check{u}_{n,j} = A \sin\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right) \quad \text{e} \quad \check{v}_{n,j} = B \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{L}\right)\right),$$

com a relação $B/A = (2\kappa h / (4b - \kappa h^2)) \cot(n\pi h/L)$.

Consequentemente, os autovalores são dados por

$$\lambda_n(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h)\right)^{-1}, \quad \text{onde} \quad \sigma(h) = \frac{4b}{4b - \kappa h^2} \cos^2\left(\frac{n\pi h}{L}\right), \quad \forall n = 1, \dots, J.$$

Retornando a (5.37) e (5.38) obtemos a equação $S'''(t) + \lambda S(t) = 0$, para todo $t \in [0, T]$. Resolvendo obtemos

$$S_n(t) = a_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n(h)}t\right) + b_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n(h)}t\right), \quad n = 1, \dots, J, \quad \forall t > 0, \quad (5.39)$$

onde a_n, b_n são os coeficientes de Fourier. Assim o resultado é estabelecido. ■

Verifica-se sem muita dificuldade que as soluções as quais se referem a proposição anterior satisfazem pontualmente as equações (5.1) – (5.5) e no limite de $h \rightarrow 0$, temos que

$$u(x_j, t) \rightarrow u(x, t) \quad \text{e} \quad v(x_j, t) \rightarrow v(x, t) \quad (5.40)$$

em que $u(x, t)$ e $v(x, t)$ são as soluções (4.33) e (4.34) do sistema (4.6) – (4.9).

Nosso próximo resultado versa sobre a perda de observabilidade numérica para o sistema espectral (5.14) – (5.17). Esse resultado é fundamental para que possamos demonstrar o resultado mais importante deste capítulo, que é o Teorema 5.4.

5.1.2 Observabilidade dos Autovetores

Aqui mostramos que o problema espectral é acometido de uma perda de observabilidade. Para isto, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 5.6. Para qualquer solução $(\check{u}_j, \check{v}_j)$ do problema espectral (5.14) – (5.17), vale

$$bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_j}{h} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} + \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \right|^2 = \lambda \rho_1 h \sum_{j=0}^J |\check{u}_j|^2 + \lambda \rho_2 h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2.$$

Prova. Multiplicamos a equação (5.14) por $h\check{u}_j$ e efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$. Daí, segue que

$$\lambda \rho_1 h \sum_{j=1}^J |\check{u}_j|^2 + \kappa h \sum_{j=1}^J \frac{\check{u}_{j+1} - 2\check{u}_j + \check{u}_{j-1}}{h^2} \check{u}_j + \kappa h \sum_{j=1}^J \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_{j-1}}{2h} \check{u}_j = 0.$$

Após simplificações, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \lambda \rho_1 h \sum_{j=0}^J |\check{u}_j|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \right|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \\ & - \lambda \rho_1 h |\check{u}_0|^2 - \kappa h \frac{\check{u}_1 - \check{u}_0}{h^2} \check{u}_0 + \kappa h \frac{\check{u}_{J+1} - \check{u}_J}{h^2} \check{u}_{J+1} + \kappa h \frac{\check{v}_1 + \check{v}_0}{2} \frac{\check{u}_0}{h} + \kappa h \frac{\check{v}_{J+1} + \check{v}_J}{2} \frac{\check{u}_{J+1}}{h} = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, levando em conta as condições de contorno (5.16) obtemos

$$\lambda \rho_1 h \sum_{j=0}^J |\check{u}_j|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \right|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} = 0. \quad (5.41)$$

Analogamente, multiplicamos a equação (5.15) por $h\check{v}_j$ e obtemos

$$\begin{aligned} & \lambda \rho_2 h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 - bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_j}{h} \right|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \right|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \\ & - \lambda \rho_2 h |\check{v}_0|^2 - bh \frac{\check{v}_1 - \check{v}_0}{h^2} \check{v}_0 + bh \frac{\check{v}_{J+1} - \check{v}_J}{h^2} \check{v}_{J+1} + \kappa \frac{(\check{u}_{J+1} - \check{u}_J) \check{v}_{J+1}}{2} + \kappa h \frac{(\check{v}_{J+1} + \check{v}_J) \check{v}_{J+1}}{4} = 0, \end{aligned}$$

e devido as condições de contorno (5.16) e (5.17) temos que

$$\begin{aligned} & \lambda \rho_2 h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 - bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_j}{h} \right|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \right|^2 \\ & - \kappa h \sum_{j=0}^J \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Somando as equações (5.41) e (5.42) obtemos o resultado

$$\lambda\rho_1 h \sum_{j=0}^J |\check{u}_j|^2 + \lambda\rho_2 h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 - bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_j}{h} \right|^2 - \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} + \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \right|^2 = 0.$$

■

Lema 5.7 (Observabilidade dos Autovetores). *Para qualquer solução $(\check{u}_j, \check{v}_j)$ do problema espectral (5.14) – (5.17), vale*

$$bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_j}{h} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} + \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \right|^2 = \frac{2\kappa L}{4 - p(\lambda)h^2} \left| \frac{\check{u}_J}{h} \right|^2 + \lambda\rho_2 \left(1 - \frac{\kappa}{b} \sigma(h) \right).$$

Prova. Consideramos a normalização unitária dos autovetores $(\check{u}_j, \check{v}_j)$ no Lema 5.6, isto é, assumimos $h \sum_{j=0}^J |\check{u}_j|^2 = h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 = 1$. Portanto obtemos

$$bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_j}{h} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} + \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \right|^2 = \lambda\rho_1 + \lambda\rho_2. \quad (5.43)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \check{v}_{j+1} - \check{v}_{j-1} &= B \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi x_{j+1}}{L} \right) - 1 + \cos \left(\frac{2n\pi x_{j-1}}{L} \right) \right] \\ &= -B \left[\cos \left(\frac{2n\pi x_{j+1}}{L} \right) - \cos \left(\frac{2n\pi x_{j-1}}{L} \right) \right] \\ &= 2B \sin \left(\frac{2n\pi h}{L} \right) \sin \left(\frac{2n\pi x_j}{L} \right) \\ &= 2 \frac{B}{A} \sin \left(\frac{2n\pi h}{L} \right) \check{u}_j. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Substituindo (5.44) em (5.14) temos a equação

$$p(\lambda)\check{u}_j + \frac{\check{u}_{j+1} - 2\check{u}_j + \check{u}_{j-1}}{h^2} = 0, \quad (5.45)$$

onde $p(\lambda) = \frac{\lambda\rho_1}{\kappa} + \frac{B}{A} \frac{1}{h} \sin \left(\frac{2\kappa\pi h}{L} \right)$.

Passamos a analisar o seguinte problema espectral:

$$-\frac{\check{u}_{j+1} - 2\check{u}_j + \check{u}_{j-1}}{h^2} = p(\lambda)\check{u}_j, \quad (5.46)$$

$$\check{u}_0 = \check{u}_{J+1} = 0. \quad (5.47)$$

Note que substituindo a relação B/A dada em 5.21 no autovalor $p(\lambda)$, obtemos a seguinte identidade

$$p(\lambda) = \lambda \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h) \right) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi h}{L} \right), \quad (5.48)$$

onde $\sigma(h)$ é dado em (5.19).

Tendo em mente o problema espectral (5.46) – (5.47), multiplicamos a primeira equação por $h\check{u}_j$, efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$ e usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas para obtermos

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \right|^2 = p(\lambda) h \sum_{j=0}^J |\check{u}_j|^2. \quad (5.49)$$

Em seguida multiplicamos a equação espectral (5.46) por $j h(\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1})/2$, efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$ e obtemos

$$- h \sum_{j=1}^J \frac{\check{u}_{j+1} + \check{u}_{j-1}}{h^2} \frac{j(\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1})}{2} + 2h \sum_{j=1}^J \frac{\check{u}_j}{h^2} \frac{j(\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1})}{2} = p(\lambda) h \sum_{j=1}^J \check{u}_j \frac{j(\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1})}{2}.$$

Usamos a identidade dada por,

$$h \sum_{j=1}^J j \check{u}_j (\check{u}_{j+1} - \check{u}_{j-1}) = -h \sum_{j=0}^J \check{u}_j \check{u}_{j+1}$$

e as condições de contorno de Dirichlet homogêneas (5.47) para obtermos,

$$\frac{1}{h^2} - \frac{L}{2} \left| \frac{\check{u}_J}{h} \right|^2 - \frac{h}{h^2} \sum_{j=0}^J \check{u}_{j+1} \check{u}_j = -p(\lambda) \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \check{u}_{j+1} \check{u}_j.$$

Considerando a identidade acima na identidade 5.49 e assumindo a normalização unitária, isto é, $h \sum_{j=0}^J |\tilde{u}_j|^2 = 1$ temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{h^2} - \frac{L}{2} \left| \frac{\tilde{u}_J}{h} \right|^2 - \frac{1}{h^2} + \frac{p(\lambda)}{2} &= -\frac{p(\lambda)}{2} \left(1 - \frac{p(\lambda)h^2}{2} \right) \\
 \frac{p(\lambda)}{2} + \frac{p(\lambda)}{2} \left(1 - \frac{p(\lambda)h^2}{2} \right) &= \frac{L}{2} \left| \frac{\tilde{u}_J}{h} \right|^2 \\
 \frac{p(\lambda)}{2} \left(\frac{4 - p(\lambda)h^2}{2} \right) &= \frac{L}{2} \left| \frac{\tilde{u}_J}{h} \right|^2 \\
 \frac{p(\lambda)}{2} \left(\frac{4 - p(\lambda)h^2}{2} \right) &= \frac{L}{2} \left| \frac{\tilde{u}_J}{h} \right|^2.
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Consequentemente,

$$p(\lambda) = \frac{2L}{4 - p(\lambda)h^2} \left| \frac{\tilde{u}_J}{h} \right|^2. \tag{5.51}$$

Para mais detalhes da demonstração consulte a seção 2.2 em [26].

Por outro lado, sabemos de (5.24) que

$$\lambda = \lambda_n = \frac{4\kappa}{\rho_1 h^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi h}{L} \right) - \frac{\kappa B}{\rho_1 A h} \sin \left(\frac{2n\pi h}{L} \right)$$

e de 5.48 que

$$p(\lambda) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{n\pi h}{L} \right),$$

e assim podemos escrever

$$\lambda \rho_1 = \frac{2\kappa L}{4 - p(\lambda)h^2} \left| \frac{\tilde{u}_J}{h} \right|^2 - \lambda \rho_2 \frac{\kappa}{b} \sigma(h). \tag{5.52}$$

Combinando (5.43) e (5.52) obtemos o resultado

$$bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{v}_{j+1} - \check{v}_j}{h} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} + \frac{\check{v}_{j+1} + \check{v}_j}{2} \right|^2 = \frac{2\kappa L}{4 - p(\lambda)h^2} \left| \frac{\tilde{u}_J}{h} \right|^2 + \lambda \rho_2 \left(1 - \frac{\kappa}{b} \sigma(h) \right). \tag{5.53}$$

A identidade acima nos mostra que a energia total dos autovetores pode ser obtida de forma explícita por meio da quantidade expressa no lado direito da equação acima.

Por outro lado, é fácil verificar que

$$p(\lambda) < 4, \quad (5.54)$$

para todo $h > 0$ e todo autovalor do sistema (5.14) – (5.17). Mas, obviamente, (5.54) não exclui o blow-up da constante no lado direito de (5.53). Na verdade, pode-se verificar que

$$p(\lambda_N)h^2 \rightarrow 4, \quad N = J/2, \text{ com } J \text{ par e } h \rightarrow 0.$$

Portanto um blow-up ocorre. ■

Agora estamos em condições de demonstrarmos o Teorema 5.4, um dos principais resultados deste capítulo.

Prova do Teorema 5.4 - Perda de Observabilidade

Para mostrarmos a perda de observabilidade das soluções de (5.1) – (5.5), da qual trata o Teorema 5.4, vamos considerar $\psi_j(t)$ e que $\varphi_N(t)$ seja uma solução particular associada ao N -ésimo autovalor, isto é,

$$\psi_j(t) = e^{i\sqrt{\lambda}t}\tilde{v}^n \quad \text{e} \quad \varphi_J(t) = e^{i\sqrt{\lambda_N}t}\tilde{u}^J \quad \text{com } N = J/2 \in \mathbb{Z}, \quad (5.55)$$

onde lembramos que $\lambda_n = p(\lambda_n)\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\sigma(h)\right)^{-1}$.

O lado direito da desigualdade de observabilidade 5.32 pode ser expresso por

$$\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt = T \left[\lambda \rho_2 h \sum_{j=0}^J |\tilde{v}_j|^2 + \frac{\kappa L}{2} \left| \frac{\tilde{u}_{J,J}}{h} \right|^2 \right]. \quad (5.56)$$

Do Lema 5.7 obtemos que,

$$\begin{aligned}
 & \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt = T \lambda \rho_2 h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 \\
 & + \frac{T(4 - p(\lambda_N)h^2)}{4} h \sum_{j=0}^J \left[b \left| \frac{\check{v}_{N,j+1} - \check{v}_{N,j}}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\check{u}_{N,j+1} - \check{u}_{N,j}}{h} + \frac{\check{v}_{N,j+1} - \check{v}_{N,j}}{2} \right|^2 \right] \\
 & + \frac{T(4 - p(\lambda_N)h^2)}{4} \frac{B \kappa}{A h} \sin\left(\frac{2n\pi h}{L}\right) - \lambda \rho_2 \frac{T(4 - p(\lambda_N)h^2)}{4}. \tag{5.57}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando o funcional de energia (5.6), para $t = 0$ e usando o Lema 5.6, temos:

$$E_h(0) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\lambda \rho_1 |\check{u}_{J,j}|^2 + \lambda \rho_2 |\check{v}_{J,j}|^2 + b \left| \frac{\check{v}_{J,j+1} - \check{v}_{J,j}}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\check{u}_{J,j+1} - \check{u}_{J,j}}{h} + \frac{\check{v}_{J,j+1} - \check{v}_{J,j}}{2} \right|^2 \right].$$

De onde vem,

$$h \sum_{j=0}^J \left[b \left| \frac{\check{v}_{J,j+1} - \check{v}_{J,j}}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\check{u}_{J,j+1} - \check{u}_{J,j}}{h} + \frac{\check{v}_{J,j+1} - \check{v}_{J,j}}{2} \right|^2 \right] = E_h(0). \tag{5.58}$$

Por conseguinte, substituindo a expressão anterior em (5.57), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt & = T \left[\lambda \rho_2 h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 + \frac{4 - p(\lambda_N)h^2}{4} E_h(0) \right] \\
 & - \frac{T(4 - p(\lambda_N)h^2)}{4} \lambda \rho_2 \left(1 - \frac{\kappa}{b} \sigma(h) \right),
 \end{aligned}$$

e para $h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 = 1$ resulta em,

$$\begin{aligned}
 \frac{E_h(0)}{\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt} & = \left(1 - \frac{T \lambda \rho_2}{\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_N(t)}{h} \right|^2 dt} \right) \frac{4}{T(4 - p(\lambda_N)h^2)} \\
 & + \frac{1}{\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_N(t)}{h} \right|^2 dt} \lambda \rho_2 \left(1 - \frac{\kappa}{b} \sigma(h) \right),
 \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{E_h(0)}{\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt} &= \left(1 - \frac{\lambda \rho_2}{\rho_2 \lambda h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 + \frac{\kappa L}{2} \left| \frac{\check{u}_N}{h} \right|^2} \right) \frac{4}{T(4 - p(\lambda_N)h^2)} \\ &+ \frac{1}{T \left(\rho_2 \lambda h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 + \frac{\kappa L}{2} \left| \frac{\check{u}_N}{h} \right|^2 \right)} \lambda \rho_2 \left(1 - \frac{\kappa}{b} \sigma(h) \right). \end{aligned}$$

Usando novamente a normalização $h \sum_{j=0}^J |\check{v}_j|^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{E_h(0)}{\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt} &= \frac{\kappa L |\check{u}_{N,J}|^2}{\rho_2 \lambda h^2 + \frac{\kappa L}{2} |\check{u}_{N,J}|^2} \frac{4}{T(4 - p(\lambda_N)h^2)} \\ &+ \frac{h^2}{T \left(\rho_2 \lambda h^2 + \frac{\kappa L}{2} |\check{u}_{N,J}|^2 \right)} \lambda \rho_2 \left(1 - \frac{\kappa}{b} \sigma(h) \right). \end{aligned}$$

Como $h = \frac{L}{J+1}$, resulta que

$$p(\lambda_N)h^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{J\pi h}{2L} \right) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2L} \right) = 4 \cos^2 \left(\frac{h\pi}{2L} \right) \rightarrow 4, \text{ com } h \rightarrow 0. \quad (5.59)$$

Finalmente, combinando esses dois últimos obtemos,

$$\frac{E_h(0)}{\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_N(t)}{h} \right|^2 dt} \rightarrow \infty, \text{ com } h \rightarrow 0, \quad (5.60)$$

e portanto segue imediatamente o Teorema 5.4.

5.2 Observabilidade Uniforme em Diferenças Finitas

Esta seção é dedicada a provar a contrapartida positiva do Teorema 5.4 usando o método multiplicativo. Para isso, analisamos as soluções filtradas do sistema (5.1) – (5.5) usando a técnica de filtragem para gerar uma subclasses adequadas de soluções numericamente observáveis. Estas soluções numéricas são as soluções filtradas geradas por autovetores do problema de autovalor que satisfaçam $p(\lambda)h^2 \leq \gamma < 4$.

Dado qualquer $0 < \gamma < 4$, introduzimos a seguinte classe de soluções filtradas para o sistema (5.1) – (5.5):

$$\mathcal{D}_h(\gamma) := \left\{ \begin{array}{l} \Phi_h = \sum_{p(\lambda_n(h)) \leq \gamma h^{-2}} \left[a_n \cos(\sqrt{\lambda_n(h)}t) + b_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n(h)}t) \right] \tilde{u}^n \\ \Psi_h = \sum_{p(\lambda_n(h)) \leq \gamma h^{-2}} \left[a_n \cos(\sqrt{\lambda_n(h)}t) + b_n \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n(h)}t) \right] \tilde{v}^n \end{array} \right\},$$

onde $\lambda = p(\lambda_n) \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h) \right)^{-1}$ e $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes de Fourier.

5.2.1 Resultados Preliminares

Antes de enunciarmos o Teorema 5.10, que trata da observabilidade na classe $\mathcal{D}_h(\gamma)$ de soluções filtradas, apresentamos alguns resultados preliminares que nos auxiliarão na sua demonstração.

Lema 5.8. *Para toda (φ_j, ψ_j) solução de (5.1) – (5.5) vale*

$$\rho_1 h \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2 dx + \rho_2 h \sum_{j=0}^J |\psi_j|^2 dx = \frac{b}{\lambda} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \frac{\kappa}{\lambda} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2.$$

Prova. A prova é imediata, basta multiplicarmos a identidade do Lema 5.6 por $|S(t)|^2$ e considerarmos a solução da forma $(\varphi_j, \psi_j) = S(t)(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j)$. ■

Corolário 5.9. Para toda (φ_j, ψ_j) solução de (5.1) – (5.5) vale

$$\begin{aligned} \rho_1 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 &\leq \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h) \right) bh \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \\ &+ \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h) \right) \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Prova. Considerando o sistema (5.46) – (5.47) temos

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\check{u}_{j+1} - \check{u}_j}{h} \right|^2 = p(\lambda) h \sum_{j=0}^J |\check{u}_j|^2. \quad (5.62)$$

Consequentemente, multiplicamos por $|S(t)|^2$ e obtemos

$$h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = p(\lambda) h \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2. \quad (5.63)$$

Combinando o Lema 5.8 com a equação (5.63) e considerando que $p(\lambda)/\lambda = \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h)$ temos o resultado. ■

Teorema 5.10. Suponha que $0 < \gamma < 4$. Então, existe $T(\gamma) \geq 2LM$ tal que para todo $T > T(\gamma)$ existe uma constante positiva $C(T, \gamma)$ tal que a desigualdade

$$E_h(0) \leq C(T, \gamma) \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j(t)|^2 dt + \kappa L \int_0^T \left| \frac{\varphi_J(t)}{h} \right|^2 dt \right], \quad (5.64)$$

é verdadeira para toda solução de (5.1) – (5.5) na classe $\mathcal{D}_h(\gamma)$ com $h \rightarrow 0$ uniformemente. Além disso,

(a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ com $\gamma \nearrow 4$ e $\mathcal{M}(\gamma) \searrow \mathcal{M}$, $T(\gamma) \searrow 2LM$ com $\gamma \searrow 0$;

(b) $C(T, \gamma) \searrow \frac{1}{T-2LM}$ com $\gamma \searrow 0$.

onde $\mathcal{M} = \max \left\{ 1, 1 + \frac{1}{L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{2\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L}, \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa L} \right\} < \infty$.

Esse Teorema garante que o sistema semidiscreto é uniformemente observável como $h \rightarrow 0$ desde que as soluções de alta frequências sejam filtradas. Para as respectivas provas construímos um conjunto de lemas usando multiplicadores discretos.

Temos os seguintes resultados nesta direção:

Lema 5.11 (Conservação de Energia). *Para qualquer $h > 0$ a energia total $E_h(\cdot)$ definida em (5.6) satisfaz a taxa de variação*

$$\frac{d}{dt} E_h(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.65)$$

para toda (φ, ψ) solução de (5.1) – (5.5).

Prova. Multiplicamos a equação (5.1) por $h\varphi'_j(t)$ e adicionamos para $j = 1, 2, \dots, J$, para obtermos

$$\rho_1 \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J |\varphi'_j|^2 - \kappa h \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \varphi'_j - \kappa h \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \varphi'_j = 0. \quad (5.66)$$

Considerando as condições de contorno (5.3) e (5.4), temos

$$h \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \varphi'_j = -\frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2, \quad (5.67)$$

$$h \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \varphi'_j = -h \sum_{j=0}^J \frac{\varphi'_{j+1} - \varphi'_j}{h} \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2}. \quad (5.68)$$

Combinando (5.66), (5.67) e (5.68) concluímos que

$$\rho_1 \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J |\varphi'_j|^2 + \kappa \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \frac{\varphi'_{j+1} - \varphi'_j}{h} \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} = 0. \quad (5.69)$$

Analogamente, multiplicando a equação (5.2) por $h\psi'_j(t)$ e considerando as condições de contorno (5.3) e (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J |\psi'_j|^2 + b \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \kappa \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \\ + \kappa h \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \frac{\psi'_{j+1} + \psi'_j}{2} = 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Adicionando as equações (5.69) e (5.70) podemos escrever $\frac{d}{dt} E_h(t) = 0$ e então $E_h(t) = E_h(0)$, para todo $t \in [0, T]$ onde $E_h(t)$ é dado em (5.6). ■

Lema 5.12. Para qualquer $h \geq 2\sqrt{b/\kappa}$ e (φ, ψ) solução de (5.1) – (5.5) temos

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\rho_1 \varphi'_j \varphi'_{j+1} + \rho_2 \psi'_j \psi'_{j+1} + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] dt \\ + \chi_\varphi(t) \Big|_0^T + \chi_\psi(t) \Big|_0^T + Y_\psi(t) \Big|_0^T \leq \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_j}{h} \right|^2 dt, \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde

$$\chi_\varphi(t) = \rho_1 h \sum_{j=1}^J j \varphi'_j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right), \quad \chi_\psi(t) = \rho_2 h \sum_{j=1}^J j \psi'_j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right), \quad Y_\psi(t) = \rho_2 h \sum_{j=1}^J \psi'_j \psi_j.$$

Prova. Multiplicamos (5.1) por $jh(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})/2$, adicionamos para $j = 1, 2, \dots, J$ e integramos em $(0, T)$ para obtermos

$$\begin{aligned} \rho_1 h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \varphi''_j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) dt - \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \left(\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) dt \\ - \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (5.72)$$

O restante da prova segue literalmente como é feito no Lema 3.11, exceto pelo último somatório. Portanto podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\rho_1 \varphi'_j \varphi'_{j+1} + \kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 \right] dt - \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) dt \\ & + \chi_\varphi(t) \Big|_0^T = \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Analogamente, multiplicando a equação (5.2) por $jh(\psi_{j+1} - \psi_{j-1})/2$ e considerando as condições de contorno (5.3) e (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\rho_2 \psi'_j \psi'_{j+1} + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right] dt - \kappa \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right|^2 dt \\ & + \chi_\psi(t) \Big|_0^T + \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) dt - \frac{bL}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right|^2 dt = 0. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Multiplicamos a equação (5.2) por $h\psi_j$ e adicionamos para $j = 1, 2, \dots, J$.

$$h \sum_{j=1}^J \left(\rho_2 \psi_j'' - b \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} + \kappa \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + \kappa \frac{\psi_{j+1} + 2\psi_j + \psi_{j-1}}{4} \right) \psi = 0. \quad (5.75)$$

Considerando as condições de contorno (5.3) e (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} & -\rho_2 h \sum_{j=1}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + bh \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 dt + \kappa h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) dt \\ & + Y_\psi(t) \Big|_0^T + \kappa h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 dt = 0, \end{aligned} \quad (5.76)$$

onde $Y_\psi(t) = \rho_2 h \sum_{j=1}^J \psi'_j \psi_j$.

Adicionando as equações (5.73), (5.74) e (5.76) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\rho_1 \varphi'_j \varphi'_{j+1} + \rho_2 \psi'_j \psi'_{j+1} + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] dt \\
& + bh \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 dt + \chi_\varphi(t) \Big|_0^T + \chi_\psi(t) \Big|_0^T + Y_\psi(t) \Big|_0^T = \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt \\
& + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt + \frac{bL}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right|^2 dt - \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right|^2 dt. \tag{5.77}
\end{aligned}$$

Além disso, tendo em conta que $\psi_{J+1} = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{bL}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right|^2 dt - \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right|^2 dt &= \frac{bL}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt - \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{2} \right|^2 dt \\
&= \left(\frac{b}{2} - \frac{\kappa h^2}{8} \right) L \int_0^T \left| \frac{\psi_J}{h} \right|^2 dt.
\end{aligned}$$

e uma vez que tomamos $\frac{b}{2} - \frac{\kappa h^2}{8} \leq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\rho_1 \varphi'_j \varphi'_{j+1} + \rho_2 \psi'_j \psi'_{j+1} + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] dt \\
& + bh \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 dt + \chi_\varphi(t) \Big|_0^T + \chi_\psi(t) \Big|_0^T + Y_\psi(t) \Big|_0^T \leq \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt.
\end{aligned}$$

■

Lema 5.13 (Equipartição de energia). *Para qualquer $h > 0$ e (φ, ψ) solução de (5.1) – (5.5) temos*

$$\begin{aligned}
& -\rho_1 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\varphi'_j|^2 dt - \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + Y_\varphi(t) \Big|_0^T + Y_\psi(t) \Big|_0^T \\
& + h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h^2} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] dt = 0, \tag{5.78}
\end{aligned}$$

onde

$$Y_\varphi(t) = \rho_1 h \sum_{j=0}^J \varphi'_j \varphi_j, \quad e \quad Y_\psi(t) = \rho_2 h \sum_{j=0}^J \psi'_j \psi_j.$$

Prova. Primeiramente multiplicamos a equação (5.1) por $h\varphi_j$, efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$ e integramos em $(0, T)$.

$$\rho_1 h \sum_{j=1}^J \int_0^T \varphi_j'' \varphi_j dt - \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} \varphi_j dt - \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \varphi_j dt = 0. \quad (5.79)$$

Agora fazemos as seguintes simplificações. De \mathcal{I}_{1h} temos,

$$\mathcal{I}_{1h} := \rho_1 h \sum_{j=1}^J \int_0^T \varphi_j'' \varphi_j dt = \rho_1 h \sum_{j=1}^J \varphi'_j \varphi_j \Big|_0^T - \rho_1 h \sum_{j=1}^J \int_0^T |\varphi'_j|^2 dt.$$

Usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas para obtermos

$$\mathcal{I}_{1h} = \rho_1 h \sum_{j=0}^J \varphi'_j \varphi_j \Big|_0^T - \rho_1 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\varphi'_j|^2 dt,$$

onde tomamos

$$Y_\varphi(t) = \rho_1 h \sum_{j=0}^J \varphi'_j \varphi_j.$$

E daí,

$$\mathcal{I}_{1,h} = Y_\varphi(t) \Big|_0^T - h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\varphi'_j|^2 dt.$$

De \mathcal{I}_{2h} temos

$$\mathcal{I}_{2h} := \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T \varphi_j \frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} dt = \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T \varphi_j \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h^2} dt + \kappa h \sum_{j=1}^J \int_0^T \varphi_j \frac{\varphi_{j-1} - \varphi_j}{h^2} dt.$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, temos

$$\mathcal{I}_{2h} = -\kappa h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 dt.$$

De \mathcal{I}_{3h} segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{3h} &:= \kappa h \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2h} \psi_j = \kappa h \sum_{j=1}^J \frac{(\psi_{j+1} + \psi_j) - (\psi_j + \psi_{j-1})}{2h} \psi_j \\ &= -\kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) + \kappa h \left(\frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right) \underbrace{\frac{\varphi_{J+1}}{2}}_{:=0} \\ &= -\kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Substituindo as simplificações \mathcal{I}_{1h} , \mathcal{I}_{2h} e \mathcal{I}_{3h} em (5.79) temos

$$-\rho_1 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\varphi'_j|^2 dt + h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[\kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) \right] dt + Y_\varphi(t) \Big|_0^T = 0, \quad (5.81)$$

onde tomamos

$$Y_\varphi(t) = \rho_1 h \sum_{j=0}^J \varphi'_j \varphi_j.$$

Levando em conta que $\psi_{J+1} = 0$ (ver 5.35), segue analogamente que

$$\begin{aligned} &-\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \kappa \left| \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 + \kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) \right] dt \\ &+ Y_\psi(t) \Big|_0^T = 0, \end{aligned} \quad (5.82)$$

onde tomamos

$$Y_\psi(t) = \rho_2 h \sum_{j=0}^J \psi'_j \psi_j.$$

Somando as equações (5.81) e (5.82) obtemos

$$\begin{aligned}
 & -\rho_1 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\varphi'_j|^2 dt - \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + Y_\varphi(t) \Big|_0^T + Y_\psi(t) \Big|_0^T \\
 & + h \sum_{j=0}^J \int_0^T \left[b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h^2} \right|^2 + \kappa h \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] dt = 0.
 \end{aligned}$$

■

Corolário 5.14. Para qualquer $h > 0$ e (φ, ψ) solução de (5.1) – (5.5) temos

$$\rho_1 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\varphi'_j|^2 dt + \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt = TE_h(t) + \frac{1}{2} Y_\varphi(t) \Big|_0^T + \frac{1}{2} Y_\psi(t) \Big|_0^T,$$

onde $E_h(t)$ é dado em (5.6).

Prova. A prova é imediata, basta adicionarmos o termo $2h \sum_{j=0}^J \int_0^T [|\varphi'_j|^2 + |\psi'_j|^2] dt$ em ambos os lados do lema anterior e considerarmos a energia total $E_h(t)$ dada em (5.6). ■

Para provar o Teorema 5.10 usamos os Lemas 5.12 e 5.13. Vamos precisar de algumas estimativas, principalmente para os termos $h \sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1} - \varphi'_j|^2$ e $h \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2$.

Lema 5.15. Para qualquer $h > 0$, $0 \leq t \leq T$ e (φ, ψ) solução de (5.1) – (5.5) vale

$$h \sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1} - \varphi'_j|^2 \leq p(\Lambda) h^3 \sum_{j=0}^J |\varphi'_j|^2 \quad e \quad h \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 \leq p(\Lambda) h^3 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2,$$

onde $p(\Lambda) = p(\lambda_{J/2})$ com J par, é um autovalor inserindo no desenvolvimento Fourier.

Prova. Inicialmente, consideramos as soluções em séries de Fourier do problema (5.1) – (5.5)

$$\varphi_j(t) = \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} a_n e^{i\mu_n t} \tilde{u}_{n,j} \quad e \quad \psi_j(t) = \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} b_n e^{i\mu_n t} \tilde{v}_{n,j},$$

com $\check{u}_{n,j} = A \operatorname{sen}(2n\pi x_j)$ e $\check{v}_{n,j} = B [1 - \cos(2n\pi x_j)]$.

Daí temos

$$\varphi_j(t) = \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} a_n e^{i\mu_n t} \check{u}_{n,j},$$

com $\mu_n = \sqrt{p(\lambda_n)}$ para $n > 0$ e $\mu_{-n} = -\mu_n$. Portanto,

$$\varphi'_j(t) = i \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} a_n \mu_n e^{i\mu_n t} \check{u}_{n,j}.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1}(t) - \varphi'_j(t)|^2 &= h \sum_{j=0}^J \left| \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} a_n \mu_n e^{i\mu_n t} (\check{u}_{n,j+1} - \check{u}_{n,j}) \right|^2 \\ &= h \sum_{j=0}^J \left[\sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} |a_n|^2 |\mu_n|^2 |\check{u}_{n,j+1} - \check{u}_{n,j}|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\mu_n| \neq |\mu_l| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} a_n a_l \mu_n \mu_l e^{(\mu_n - \mu_l)t} (\check{u}_{n,j+1} - \check{u}_{n,j})(\check{u}_{l,j+1} - \check{u}_{l,j}) \right] \\ &= h \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} |a_n|^2 |\mu_n|^2 |\check{u}_{n,j+1} - \check{u}_{n,j}|^2 \\ &\quad + \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_n| \neq |\mu_l| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} a_n a_l \mu_n \mu_l e^{(\mu_n - \mu_l)t} (\check{u}_{n,j+1} - \check{u}_{n,j})(\check{u}_{l,j+1} - \check{u}_{l,j}). \end{aligned}$$

Devido a ortogonalidade de autovetores \check{u}_n e \check{u}_l , para $\mu_n \neq \mu_l$ (ver Proposição 3.14), temos

$$\sum_{|\mu_n| \neq |\mu_l| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} (\check{u}_{n,j+1} - \check{u}_{n,j})(\check{u}_{l,j+1} - \check{u}_{l,j}) = 0.$$

E assim obtemos

$$\begin{aligned} h \sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1}(t) - \varphi'_j(t)|^2 &= h \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} |a_n|^2 |\mu_n|^2 |\check{u}_{n,j+1} - \check{u}_{n,j}|^2 \\ &= h \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} |a_n|^2 |\mu_n|^2 p(\lambda) h^2 |\check{u}_{n,j}|^2, \end{aligned}$$

onde $p(\lambda)$ é um autovalor associado ao autovetor \check{u}_n (ver 5.46).

Portanto temos

$$h \sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1}(t) - \varphi'_j(t)|^2 = p(\lambda) h^3 \sum_{j=0}^J \sum_{|\mu_n| \leq \sqrt{p(\Lambda)}} |a_n|^2 |\mu_n|^2 |\check{u}_{n,j}|^2.$$

Agora tomamos $p(\Lambda)$ suficientemente grande, tal que $p(\lambda) \leq p(\Lambda)$ e obtemos

$$\sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1} - \varphi'_j|^2 \leq p(\Lambda) h^3 \sum_{j=0}^J |\varphi'(x_j, t)|^2.$$

E como temos $\varphi'(x_j, t) \equiv \varphi'_j$, segue que

$$\sum_{j=0}^J |\varphi'_{j+1} - \varphi'_j|^2 \leq p(\Lambda) h^3 \sum_{j=0}^J |\varphi'_j|^2.$$

Resta-nos provar que

$$\sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 \leq p(\Lambda) h^2 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2. \quad (5.83)$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 &= \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1}|^2 - 2 \sum_{j=0}^J \psi'_{j+1} \psi'_j + \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1}|^2 + 2 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2. \end{aligned}$$

Desde que $\psi'_{J+1} = 0$ (ver 5.35), decorre que $\sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1}|^2 = \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2$ e assim temos

$$\sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 \leq 4 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2. \quad (5.84)$$

Agora suponhamos por absurdo que

$$\sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 > p(\Lambda)h^2 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2. \quad (5.85)$$

A passagem ao limite com $h \rightarrow 0$ nos mostra que

$$\lim \sum_{j=0}^J |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 > \lim p(\Lambda)h^2 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 = 4 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2, \quad (5.86)$$

o que é um absurdo de acordo com (5.84). Isso encerra a demonstração. \blacksquare

Lema 5.16. Para qualquer $h > 0$, $0 \leq t \leq T$ e (φ, ψ) solução de (5.1) – (5.5) vale

$$|Z_\varphi(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{p(\Lambda)h^4}{16} + \frac{3p(\Lambda)h^2}{16p(\lambda_1)}} h \sum_{j=0}^J \left[\frac{\rho_1}{2} |\varphi'_j|^2 + \frac{p(\lambda)\kappa}{2\lambda} \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 + \frac{p(\lambda)b}{2\lambda} \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right]$$

e

$$\begin{aligned} |Z_\psi(t)| &\leq \sqrt{L^2 - \frac{p(\Lambda)h^4}{16} + \frac{3p(\Lambda)h^2b}{16\lambda_1}} h \sum_{j=0}^J \left[\frac{\rho_2}{2} |\psi'_j|^2 + \frac{\rho_2}{2} \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right] \\ &+ \sqrt{\frac{3p(\Lambda)h^2}{16\lambda_1}} h \sum_{j=0}^J \left[\frac{\rho_2}{2} |\psi'_j|^2 + \frac{\kappa}{2} \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] \\ &+ \frac{\rho_2}{2} h \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 + \frac{b}{2\lambda_1} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \frac{\kappa}{2\lambda_1} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2, \end{aligned}$$

onde $p(\lambda_1) > 0$ é o primeiro autovalor do Laplaciano discreto, $p(\Lambda) = p(\lambda_{J/2})$ é um autovalor introduzido no desenvolvimento de Fourier, $\lambda_1 = p(\lambda_1) \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \sigma(h) \right)^{-1} e$

$$Z_\varphi(t) = \rho_1 h \sum_{j=1}^J \varphi'_j \left[j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) + \eta \varphi_j \right], \quad Z_\psi(t) = \rho_2 h \sum_{j=1}^J \psi'_j \left[j \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j-1}}{2} \right) + (1 + \eta) \psi_j \right],$$

onde $\eta = -p(\Lambda)h^2/8$.

Prova. Tomemos

$$Z_\varphi(t) = \rho_1 h \sum_{j=1}^J \varphi'_j \left[j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) - \frac{\Lambda h^2}{8} \varphi_j \right]$$

e conseqüentemente

$$|Z_\varphi(t)| \leq \rho_1 h \sum_{j=1}^J \left| \varphi'_j \left[j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) - \frac{\Lambda h^2}{8} \varphi_j \right] \right|.$$

Aplicando a versão semidiscreta da desigualdade de Hölder temos

$$|Z_\varphi(t)| \leq \rho_1 \left[h \sum_{j=1}^J |\varphi'_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) + \eta \varphi_j \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.87)$$

com $\eta = -\Lambda h^2/8$.

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} & h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) + \eta \varphi_j \right|^2 = h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} |\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}|^2 + \eta^2 |\varphi_j|^2 + \eta j (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) \varphi_j \right] \\ &= h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} |(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + (\varphi_j - \varphi_{j-1})|^2 + \eta^2 |\varphi_j|^2 + \eta j (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) \varphi_j \right] \\ &= h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} [|\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + 2(\varphi_{j+1} - \varphi_j)(\varphi_j - \varphi_{j-1}) + |\varphi_j - \varphi_{j-1}|^2] \right. \\ & \quad \left. + \eta^2 |\varphi_j|^2 + \eta j (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) \varphi_j \right] \\ &\leq h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{4} [2|\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + 2|\varphi_j - \varphi_{j-1}|^2] + \eta^2 |\varphi_j|^2 + \eta j (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) \varphi_j \right], \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) + \eta \varphi_j \right|^2 &\leq h \sum_{j=1}^J \left[\frac{j^2}{2} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + \frac{j^2}{2} |\varphi_j - \varphi_{j-1}|^2 + \eta^2 |\varphi_j|^2 \right. \\
&\quad \left. + \eta j (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) \varphi_j \right] \\
&\leq h \sum_{j=0}^J \left[\frac{j^2}{2} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + \frac{(j+1)^2}{2} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + \eta^2 |\varphi_j|^2 + \eta j \varphi_j \varphi_{j+1} \right. \\
&\quad \left. - \eta(j+1) \varphi_j \varphi_{j+1} \right] \\
&= h \sum_{j=0}^J \left[\frac{j^2}{2} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + \frac{(j+1)^2}{2} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + \eta^2 |\varphi_j|^2 - \eta \varphi_j \varphi_{j+1} \right] \\
&= h \sum_{j=0}^J \left[\frac{j^2}{2} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + \frac{(j+1)^2}{2} |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2 + \eta^2 |\varphi_j|^2 + |\eta| |\varphi_j|^2 \right. \\
&\quad \left. - |\eta| |\varphi_j|^2 - \eta \varphi_j \varphi_{j+1} \right].
\end{aligned}$$

Como $j^2 h^2 \leq (j+1)^2 h^2 \leq (J+1)^2 h^2 = L^2$ temos

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) + \eta \varphi_j \right|^2 &\leq L^2 h \sum_{j=1}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 - |\eta| h \sum_{j=1}^J (|\varphi_j|^2 - \varphi_j \varphi_{j+1}) \\
&\quad + (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2.
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas obtemos

$$h \sum_{j=1}^J (|\varphi_j|^2 - \varphi_j \varphi_{j+1}) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^J |\varphi_{j+1} - \varphi_j|^2.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
h \sum_{j=1}^J \left| j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) + \eta \varphi_j \right|^2 &\leq \left(L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} \right) h \sum_{j=1}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 \\
&\quad + (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=1}^J |\varphi_j|^2.
\end{aligned} \tag{5.89}$$

E por último aplicamos a desigualdade abaixo (versão discreta da desigualdade de Poincaré)

$$h \sum_{j=0}^J |\varphi_j|^2 \leq \frac{1}{p(\lambda_1)} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2, \quad (5.90)$$

para o primeiro autovalor $p(\lambda_1)$ (ver 5.48) e obtemos

$$h \sum_{j=0}^J \left| j \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2} \right) + \eta \varphi_j \right|^2 \leq \left[L^2 - \frac{|\eta|h^2}{2} + \frac{(\eta^2 + |\eta|)}{p(\lambda_1)} \right] h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2. \quad (5.91)$$

Substituindo (5.91) em (5.87) temos

$$|Z_\varphi(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{p(\Lambda)h^4}{16} + \frac{3p(\Lambda)h^2}{16p(\lambda_1)} \rho_1} \left[h \sum_{j=0}^J |\varphi'_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.92)$$

onde $|\eta| = p(\Lambda)h^2/8 \leq 1/2$ e $\eta^2 + |\eta| \leq 3p(\Lambda)h^2/16$.

Aplicamos a desigualdade de Young em (5.92) e em seguida usamos o Corolário 5.9 para obtermos

$$|Z_\varphi(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{p(\Lambda)h^4}{16} + \frac{3p(\Lambda)h^2}{16p(\lambda_1)}} h \sum_{j=0}^J \left[\frac{\rho_1}{2} |\varphi'_j|^2 + \frac{\rho_1}{2} \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 \right] \quad (5.93)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} |Z_\varphi(t)| \leq \sqrt{L^2 - \frac{p(\Lambda)h^4}{16} + \frac{3p(\Lambda)h^2}{16p(\lambda_1)}} h \sum_{j=0}^J \left[\frac{\rho_1}{2} |\varphi'_j|^2 + \frac{p(\lambda)}{2\lambda} b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right. \\ \left. + \frac{p(\lambda)}{2\lambda} \kappa \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

De forma análoga temos para $Z_\psi(t)$, ou seja,

$$\begin{aligned} |Z_\psi(t)| \leq \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 \right]^{1/2} \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J \left| j \frac{(\psi_{j+1} - \psi_j)}{2} + \eta \psi_j \right|^2 \right]^{1/2} \\ + \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 \right]^{1/2} \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J |\psi_j|^2 \right]^{1/2}. \quad (5.94) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\rho_2 h \sum_{j=0}^J \left| j \frac{(\psi_{j+1} - \psi_j)}{2} + \eta \psi_j \right|^2 \leq \rho_2 \left(L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} \right) h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \rho_2 (\eta^2 + |\eta|) h \sum_{j=0}^J |\psi_j|^2.$$

Levando em consideração o Lema 5.8 para o primeiro autovalor λ_1 obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2 h \sum_{j=0}^J \left| j \frac{(\psi_{j+1} - \psi_j)}{2} + \eta \psi_j \right|^2 &\leq \left(L^2 - \frac{|\eta| h^2}{2} + \frac{(\eta^2 + |\eta|) b}{\lambda_1 \rho_2} \right) \rho_2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \\ &+ \frac{(\eta^2 + |\eta|) \kappa}{\lambda_1} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Combinando as equações 5.94 e 5.95 deduzimos que

$$\begin{aligned} |Z_\psi(t)| &\leq \sqrt{L^2 - \frac{p(\Lambda) h^4}{16} + \frac{3p(\Lambda) h^2 b}{16 \lambda_1 \rho_2}} \left[\rho_2 \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 \right]^{1/2} \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &+ \sqrt{\frac{3p(\Lambda) h^2}{16 \lambda_1}} \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 \right]^{1/2} \left[\kappa h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &+ \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 \right]^{1/2} \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J |\psi_j|^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Usamos a desigualdade de Young na última parcela acima e novamente aplicamos o Lema 5.8 para obtermos o resultado. ■

Agora estamos em condições de estabelecermos o principal resultado deste capítulo.

5.2.2 Prova da Observabilidade Uniforme: Teorema 5.10

Fazemos notório que os cálculos necessários para a prova, são os mesmos usados no Capítulo 3 com exceção de alguns termos. Em primeiro lugar, consideramos a identidade do Lema 5.12

para obtermos

$$\begin{aligned} & \int_0^T E_h(t) dt + \chi_\varphi(t) \Big|_0^T + \chi_\psi(t) \Big|_0^T - \rho_1 \frac{h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\varphi'_{j+1} - \varphi'_j|^2 dt \\ & - \rho_2 \frac{h}{4} \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_{j+1} - \psi'_j|^2 dt + Y_\psi(t) \Big|_0^T \leq \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt. \end{aligned}$$

Agora, do Lema 5.15 e do Corolário 5.14 temos que

$$\int_0^T E_h(t) dt - \frac{p(\Lambda)h^2}{4} T E_h(t) + Z_\varphi(t) \Big|_0^T + Z_\psi(t) \Big|_0^T \leq \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt,$$

onde

$$Z_\varphi(t) = \chi_\varphi(t) - \frac{p(\Lambda)h^2}{8} Y_\varphi(t) \quad \text{e} \quad Z_\psi(t) = \chi_\psi(t) - \frac{p(\Lambda)h^2}{8} Y_\psi(t) + Y_\psi(t).$$

Aplicando o Lema 5.16 e o Lema 5.11, levando em conta que

$$H(\gamma) := \max \left\{ \frac{\gamma}{p(\lambda_1)}, \frac{\gamma b}{\lambda_1 \rho_2} \right\}, \quad \text{onde } \gamma = p(\Lambda)h^2 \quad \text{e} \quad H(\gamma) \rightarrow 0,$$

com $\gamma \rightarrow 0$, segue que

$$\begin{aligned} & T \left(1 - \frac{\gamma}{4} \right) E_h(0) - 2 \sqrt{L^2 - \frac{\gamma h^2}{16} + \frac{3}{16} H(\gamma)} \\ & \times \left[\frac{\rho_1}{2} h \sum_{j=0}^J |\varphi'_j|^2 + A(\gamma) \frac{\rho_2}{2} h \sum_{j=0}^J |\psi'_j|^2 + B(\gamma) \frac{b}{2} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right. \\ & \left. + C(\gamma) \frac{\kappa}{2} h \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right|^2 \right] \leq \rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi'_j|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt, \end{aligned}$$

onde

$$A(\gamma) := 1 + \frac{\sqrt{\frac{3\gamma}{16\lambda_1}}}{\sqrt{L^2 - \frac{\gamma h^2}{16} + \frac{3}{16} H(\gamma)}} + \frac{1}{\sqrt{L^2 - \frac{\gamma h^2}{16} + \frac{3}{16} H(\gamma)}},$$

$$B(\gamma) := \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{(1 + \sigma(h))\rho_2}{b} + \frac{\rho_2}{\kappa \sqrt{L^2 - \frac{\gamma h^2}{16} + \frac{3}{16}H(\gamma)}},$$

$$C(\gamma) := \frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\sigma(h) + \frac{\sqrt{\frac{3\gamma}{16\lambda_1}}}{\sqrt{L^2 - \frac{\gamma h^2}{16} + \frac{3}{16}H(\gamma)}} + \frac{\rho_2}{\kappa \sqrt{L^2 - \frac{\gamma h^2}{16} + \frac{3}{16}H(\gamma)}}.$$

Prosseguimos como no Capítulo 3, para $p(\Lambda)h^2 = \gamma$ na classe de soluções $\mathcal{D}_h(\gamma)$ de (5.1) – (5.5) e escolhendo $\mathcal{M}(\gamma) := \max\{1, A(\gamma), B(\gamma), C(\gamma)\}$ deduzimos que a desigualdade de observabilidade uniforme é dada por

$$E_h(0) \leq C(T, \gamma) \left[\rho_2 h \sum_{j=0}^J \int_0^T |\psi_j|^2 dt + \frac{\kappa L}{2} \int_0^T \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 dt \right], \quad (5.96)$$

onde

$$C(T, \gamma) = \frac{1}{T(1 - \gamma/4) - 2\mathcal{M}(\gamma)\sqrt{L^2 - \frac{\gamma}{16}h^2 + \frac{3}{16}H(\gamma)}}.$$

Portanto para

$$T > \frac{2\mathcal{M}(\gamma)\sqrt{L^2 - \frac{\gamma}{16}h^2 + \frac{3}{16}H(\gamma)}}{1 - \gamma/4},$$

concluimos as afirmações do Teorema 5.10.

ALGUNS COMENTÁRIOS E PROBLEMAS EM ABERTO

Nesta tese apresentamos a análise de observabilidade uniforme para a semidiscretização em diferenças finitas de um sistema de equações de ondas acopladas e também para o sistema de Timoshenko utilizando multiplicadores discretos e resultados da teoria de séries de Fourier não harmônicas. Abordamos o problema de saber se as estimativas de observabilidade dadas em 3.26 e 5.32 são uniformes, quando o tamanho do parâmetro de malha h tende a zero. Na verdade, a resposta a este problema é negativa.

Mais precisamente, é bem conhecido que esta anomalia numérica da falta de uniformidade na estimativa de observabilidade obtidas via semidiscretização se deve ao comportamento semidiscreto das aproximações de ondas de alta frequência. Estas questões numéricas foram inicialmente consideradas nas obras de Glowinski et al. ([21], [22]) e resolvido por Infante e Zuazua [26].

Provamos os seguintes resultados, com relação a desigualdade de observabilidade do sistema (2.12) – (2.15):

- A observabilidade uniforme não vale para qualquer $T > 0$;

- A observabilidade uniforme vale para $T > T^*$ desde que filtremos adequadamente as soluções de alta frequência.

Vários problemas podem ser discutidos em análises futuras. Destacamos alguns deles para o sistema de ondas acopladas (2.12) – (2.15).

6.1 Sobre o Sistema de Ondas Acopladas

Na configuração semidiscreta, os resultados apresentados neste trabalho podem ser facilmente estendidos para elementos finitos, bem como o modelo semidiscreto baseado em um método de elementos finitos mistos com duas funções de bases diferentes para a posição e velocidade. Estas abordagens são casos particulares bem conhecidos como Método- θ (veja [28, 30, 41, 42]). Assim, pode-se aplicar ao sistema (2.12) – (2.15) o seguinte esquema parametrizado por $\theta \in [0, 1/4[$:

$$\delta_\theta u_j''(t) - \Delta_h u_j(t) + \alpha \delta_\theta (u_j - v_j)(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (6.1)$$

$$\delta_\theta v_j''(t) - \Delta_h v_j(t) + \alpha \delta_\theta (v_j - u_j)(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad 0 < t < T, \quad (6.2)$$

$$u_0(t) = u_{J+1}(t) = 0, \quad v_0(t) = v_{J+1}(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (6.3)$$

$$u_j(0) = u_j^0, \quad u_j'(0) = u_j^1, \quad v_j(0) = v_j^0, \quad v_j'(0) = v_j^1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J + 1, \quad (6.4)$$

onde δ_θ é uma combinação linear convexa definida como

$$\delta_\theta u_j(t) := (1 - 2\theta)u_j(t) + \theta(u_{j+1} + u_{j-1})(t), \quad (6.5)$$

com a mesma discretização para $v_j(t)$, $u_j''(t)$ e $v_j''(t)$. Em particular, para $\theta = 0$ obtemos o sistema (3.2) – (3.5) analisados neste trabalho. Outros casos a serem analisados são a semidiscretização padrão de elemento finito obtida para $\theta = 1/6$ e o método misto de elementos finitos obtidos para $\theta = 1/4$. Neste último caso, tal como comprovado por Castro e Micu [35] para a equação de uma única onda, as equações semidiscretas são uniformemente observáveis para todas as soluções. Assim, pode-se esperar que para qualquer $\theta \in [0, 1/4[$ a observabilidade uniforme não vale para qualquer $T > 0$.

Em geral, a respeito da observabilidade uniforme (3.26), muitos outros recursos podem ser desenvolvidos e analisados para superar as dificuldades impostas pelas soluções numéricas espúrias (soluções de alta frequência) e citamos alguns deles para análise futura.

- **O método two-grid.** A observabilidade uniforme (3.26) pode ser recuperada escolhendo dados iniciais em um subespaço específico. Ela é composta por dados iniciais lentamente oscilantes obtidos por interpolação a partir de dados fornecidos em uma malha grossa. Foi proposto por Glowinski *et al.* [20].
- **Abordagem multiplicativa .** O método two-grid foi analisado em primeiro lugar por Negreanu e em Zuazua [43]. Eles usaram multiplicadores discretos e provaram um observabilidade uniforme para uma única equação de onda com $T > 4$ num subespaço de dados iniciais lentamente oscilantes.
- **Abordagem tipo Ingham.** Neste trabalho utilizamos a abordagem do tipo Ingham para obter uma observabilidade uniforme em um subespaço de soluções filtradas. Ela também pode ser usada no método two-grid.

6.2 Sobre o Sistema de Vigas de Timoshenko

Os resultados apresentados nesta tese para o esquema numérico de Timoshenko (5.1) – (5.5) foram baseados em autovetores cujo modo de vibração é par, ou seja, consideramos apenas autovetores na classe $\mathcal{C}_{2n}(h)$ e como vimos somente essa subclasse satisfaz o problema.

Para entendermos melhor esse fenômeno numérico fizemos um rápido comentário comparando o caso numérico ao caso contínuo, analisando principalmente as condições de contorno do problema contínuo (4.8) e do problema semidiscreto (5.3) – (5.4). Essa análise será feita através do método da energia analisando os termos semidiscretos adicionais que figuram para os contornos no processo de construção da energia semidiscreta, devidamente adaptado para esse ambiente numérico.

Usando o método multiplicativo no sistema (4.6) – (4.9) e na sua versão semidiscreta em (5.1) – (5.5) obtemos a equação

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L \rho_1 |\varphi_t|^2 dx - \kappa (\varphi_x + \psi) \varphi_t \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \varphi_{xt} dx = 0, \quad (6.6)$$

seguido do análogo semidiscreto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \rho_1 |\varphi'_j|^2 - \kappa \left[\left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \varphi'_{J+1} - \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \varphi'_0 \right] \\ + \kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) \frac{\varphi'_{j+1} - \varphi'_j}{h} = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

A comparação entre as duas equações mostram uma identificação exata entre o contínuo e o semidiscreto. O mesmo não se verifica para as equação (4.7) e (5.2), pois temos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_2 |\psi_t|^2 + b |\psi_x|^2 \right] dx - b \psi_x \psi_t \Big|_0^L + \kappa \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi_t dx = 0 \quad (6.8)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 |\psi'_j|^2 + b \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 \right] - b \left[\left(\frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h} \right) \psi'_{J+1} - \left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{h} \right) \psi'_0 \right] \\ + \kappa h \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} + \frac{\psi_{j+1} + \psi_j}{2} \right) \frac{\psi'_{j+1} + \psi'_j}{2} \\ - \frac{\kappa h}{2} \left[\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \psi'_0 + \left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \psi'_{J+1} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

É notório que o termo de contorno

$$\frac{\kappa h}{2} \left[\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h} + \frac{\psi_1 + \psi_0}{2} \right) \psi'_0 + \left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2} \right) \psi'_{J+1} \right],$$

não faz parte do análogo contínuo (6.8), mas foi introduzido naturalmente pelo esquema numérico sob consideração. Além disso observamos que na equação (6.8) as condições de contorno $\psi(0, t) = \psi_x(L, t) = 0$, são suficientes para anular os termos pontuais, portanto esperávamos

que na equação (6.9) as condições de contorno também fossem os correspondentes numéricos: $\psi_0 = 0$ e $\psi_{J+1} - \psi_J = 0$, mas a última condição de contorno não é suficiente e por isso devemos considerar a condição de contorno

$$b\left(\frac{\psi_{J+1} - \psi_J}{h}\right) + \frac{\kappa h}{2}\left(\frac{\varphi_{J+1} - \varphi_J}{h} + \frac{\psi_{J+1} + \psi_J}{2}\right) = 0,$$

ao invés de $\psi_{J+1} - \psi_J = 0$, o que não reflete o caso contínuo. Mas essa discrepância numérica é facilmente solucionada assumindo autovetores na subclasse $\mathcal{C}_{2n}(h)$.

Algumas questões ainda estão em aberto.

- **Questão da paridade.** Vimos no Capítulo 5 e no parágrafo acima que há uma necessidade de considerarmos autovetores na subclasse $\mathcal{C}_{2n}(h)$. Uma questão interessante seria encontrar soluções numéricas que não dependessem da paridade, tal como acontece no caso contínuo.
- **Observabilidade dos autovetores.** Na seção 5.1.2 mostramos uma desigualdade de observabilidade para os autovetores, graças ao desacoplamento da equação (5.14) resultando no problema (5.46) – (5.47). Uma outra alternativa seria encontrar uma desigualdade de observabilidade sem a necessidade de um desacoplamento.
- **Métodos totalmente discretos.** No Capítulo 5 estudamos métodos numéricos semidiscretos aplicados na resolução do problema de perda de observabilidade das soluções. Qualquer resultado nesse sentido onde tanto o tempo quanto o espaço estão discretizados é algo inédito.

Referências Bibliográficas

- [1] E. Winkler. *Die Lehre von der Elasticitat und Festigkeit mit besonderer Rucksicht auf ihre Anwendung in der Technik*. H. Dominicus, Prag., 1867.
- [2] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 6:744–746, 1921.
- [3] S. P. Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 43:125–131, 1922.
- [4] R. E. D. Bishop and D. C. Johnson. *The Mechanics of Vibration*. Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
- [5] J. P. D. Hartog. *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill, New York, 1956.
- [6] L. Fryba. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Academia, Prague, 1972.
- [7] S. Kaliski. *Vibrations and Waves in Solids*. IPPT PAN., Polish, 1966.
- [8] W. Nowacki. *Dynamics of Elastic Systems*. Chapman & Hall Limited, London, 1963.
- [9] W. Nowacki. *Dynamics of Structures*. Warsaw: Arkady, Polish., 1972.
- [10] S. P. Timoshenko and D. H. Young. *Vibration Problems in Engineering*. D. Van Nostrand, New York, 1955.

- [11] Z. Oniszczyk. Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system, part i: Free vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 232 (2):355–366, 2000.
- [12] M. Hetényi. *Beams on Elastic Foundation*. The University of Michigan Press, New York, 1946.
- [13] D.L. Russell. Mathematical models for the elastic beam and their control-theoretic implications, in semigroups: Theory and applications (eds. brezis, h . crandall, m. g, kappel, f.). pages 847–857, 1986.
- [14] S Timoshenko. *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, New York, 1955.
- [15] J. Lagnese and J . L. Lions. *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*. Masson, Paris, 1988.
- [16] R.E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 2: 102–119, 1960.
- [17] R.E. Kalman. On the general theory of control systems. *Proc. 1st IFAC Congress Automatic Control*, 1:481 – 492, 1960.
- [18] R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *J. SIAM Control Ser. A Control*, 1:152 – 192, 1963.
- [19] R.E. Kalman, Y.C. Ho, and K. S. Narendra. Controllability of linear dynamical systems. *Contrib. Differ. Equ.*, 1:189 – 213, 1963.
- [20] R. Glowinski, C.H. Li, and J.L. Lions. A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. (i). dirichlet controls: Description of the numerical methods. *Jap. J. Appl. Math.*, 103:1–76, 1990.
- [21] R. Glowinski. Ensuring well-posedness by analogy; stokes problem and boundary control for the wave equation. *Journal Comput. Physics*, 103:189–221, 1992.
- [22] R. Glowinski and J.L. Lions. Exact and approximate controllability for distributed parameter system. *Acta Numerica*, xx:159–333, 1996.
- [23] J.L. Lions. Controlabilité exacte des systèmes distribués. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 302: 471–475, 1986.

- [24] J.L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Review*, 30:1–68, 1988.
- [25] J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Vol. 1 and 2*. Masson, Paris, 1988.
- [26] J.A. Infante and E. Zuazua. Boundary observability for the space-discretizations of the one-dimensional wave equation. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33: 407 – 438, 1999.
- [27] E. Zuazua. Propagation, observation, control and numerical approximation of waves approximated by finite difference methods. *SIAM, Rev.* 47:197 – 243, 2005.
- [28] A. D. Münch. Family of implicit and controllable schemes for $1 - d$ wave equation. *C. R. Acad. Paris Sér. I.*, 339:733–738, 2004.
- [29] V. Komornik. *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*. John Wiley & Sons, Masson, 1994.
- [30] D.S. Almeida Jr. Conservative semidiscrete difference schemes for timoshenko systems. *Journal of Applied Mathematics*, pages 1–7, 2014.
- [31] D. S. Almeida Júnior, A. J. A. Ramos, and M. L. Santos. Observability inequality for the finite-difference semidiscretization of the $1 - d$ coupled wave equations. *Advances in Computational Mathematics*, 41:105–130, 2015.
- [32] M. Najafi. The study of stabilizability of the coupled wave equations under various end conditions. *The 3 IEEE Conference on Decision and Control, Dec.*, pages 374–379, 1992.
- [33] M. Najafi. Stability treatments of wave system in \mathbb{R}^n with coupling controllers via energy functional and decomposition methods. *Mathematical and Computer Modelling*, 49:46–54, 2009.
- [34] R. Rajaram and M. Najafi. Exact controllability of wave equations in \mathbb{R}^n coupled in parallel. *JMAA*, 356:7–12, 2009.
- [35] C. Castro and S. Micu. Boundary controllability of a linear semi-discrete 1-d wave equations derived a mixed finite element method. *Numerische Mathematik*, 102:413–462, 2006.

-
- [36] E. Zuazua. Boundary observability for the finite-difference space semi-discretizations of the 2-d wave equation in the square. *J. Math. Pures Appl.*, 26:523–563, 1999.
- [37] E. Zuazua. Propagation, observation, control and numerical approximation of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Rev.*, 47:197–243, 2005.
- [38] A.E. Ingham. Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Mathematische Zeitschrift*, 41:367–379, 2004.
- [39] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44. Springer, 1992.
- [40] W. Youssef. *Contrôle et stabilisation de systèmes élastiques couplés*. Thèse de doctorat, l' Université Paul Verlaine de Metz, 2009.
- [41] P. Loreti and M. Mehrenberger. An ingham type proof for a two-grid observability theorem. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 14:604–631, 2008.
- [42] P. Loreti and M. Mehrenberger. Observabilité uniform de léquation des ondes $1 - d$. *ESAIM: Proceedings*, 25:68–79, 2008.
- [43] M. Negreanu and E. Zuazua. Convergence of a multigrid method for the controllability of a $1 - d$ wave equation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I.*, 338:413–418, 2004.