Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática
UFPA-UFAM

Sobre existência de solução positiva para uma classe de problemas não locais e para uma classe de problemas locais com não linearidade descontínua

por

Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

Belém - PA

Julho/2016

Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática
UFPA-UFAM

Sobre existência de solução positiva para uma classe de problemas não locais e para uma classe de problemas locais com não linearidade descontínua

por

Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Tese apresentada ao Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática - UFPA/UFAM, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Belém - PA

Julho/2016

Santos, Gelson Conceição Gonçalves dos, 1981-

Sobre existência de solução positiva para uma classe de problemas não locais e para uma classe de problemas locais com não linearidade descontínua / Gelson Conceição Gonçalves dos Santos. - 2016.

Orientador: Giovany de Jesus Malcher.
Figueiredo.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Doutorado), Belém, 2016.

1.Análise funcional. 2. Teorias não-lineares. 3. Problemas elípticos não locais-Soluções positivas. 4. Método variacional em problemas não-lineares. 5. Método de penalização. I. Título

CDD 22. ed. 515.7242

Universidade Federal do Pará

Universidade Federal do Amazonas

Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática

UFPA-UFAM

Área de Concentração: Análise

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Augusto César dos Reis Costa - Professor do ICEN-Instituto de Ciências Exatas e Naturais da UFPA

____

Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa - Professor da Unidade Acadêmica de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande-UFCG

____

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - Professor do ICEN-Instituto de Ciências Exatas e Naturais da UFPA - orientador.

____

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - Professor da Unidade Acadêmica de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande-UFCG

____

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon - Professor do Departamento de Computação e Matemática da Universidade de São Paulo-USP-Ribeirão Preto.

Tese apresentada ao Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática - UFPA/UFAM, como requisito parcial, para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Julho/2016

Dedicatória

À minha família, em especial a minha esposa Francilena pelo amor, carinho e compreensão.

Agradecimentos

A Deus pela força fornecida para que eu pudesse enfrentar e transpor os obstáculos que sugiram até a conclusão deste trabalho.

A minha mãe, Maria, pelo carinho, amor e incentivo aos meus estudos.

A toda a minha família, em especial a minha esposa, Francilena, pelo carinho e compreensão.

Ao meu orientador, professor Giovany, por aceitar a me orientar, pela excelente orientação, empenho, dedicação a pesquisa em matemática e paciência na leitura e sugestões que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho. Também pelas sugestões e contribuições durantes o meu mestrado.

A professora Rúbia pela excelente orientação do meu mestrado e pelo excelente curso de Análise Real, dado na minha graduação, que me preparou para a seleção do Verão para o mestrado.

Aos professores da Faculdade de Matemática, do PPGME e do PDM, pelo empenho ao ministrar as disciplinas.

Aos funcionários da secretaria do Programa de Doutorado em Matemática.

A todos os meus amigos, que de uma forma especial fizeram parte de minha jornada, Amanda Suellen, pela amizade especial desde a época do mestrado, João Rodrigues, Denilson Pereira, Kelmem Barroso, Elifaleth Sabino, Andréia Gomes, Fernando Bruno, Julio Roberto, Mirelson Martins, Ítalo Bruno, Willian Cintra, Claudionei Pereira e a todos os demais que, mesmo não citados (para não me alongar), deixaram boas lembranças.

Aos professores Augusto César dos R. Costa, Francisco Júlio S. A. Corrêa, Giovany M. Figueiredo, Jefferson Abrantes dos Santos e Tiago Henrique Picon, por aceitarem participar da banca examinadora desta Tese e contribuir para a melhoria da mesma.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência de solução positiva para o problema elíptico não local envolvendo o espaço generalizado de Lebesgue

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r(x)}})\Delta u = f_1(x,u)|u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + f_2(x,u)|u|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e o sistema

$$(S) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = f_1(x,u,v)|v|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} + f_2(x,u,v)|v|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}} & \text{em} & \Omega, \\ -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = g_1(x,u,v)|u|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} + g_2(x,u,v)|u|^{\gamma_2(x)}_{L^{s_2(x)}} & \text{em} & \Omega, \\ \hfill u = v = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $|.|_{L^{m(x)}}$ é a norma de Luxemburg no espaço generalizado de Lebesgue $L^{m(x)}(\Omega)$, $r, q, s, \alpha, \gamma, r_i, q_i, s_i, \alpha_i, \gamma_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. No caso escalar, as funções $\mathcal{A}, f_1, f_2, : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas. No caso do sistema $f_1, f_2, g_1, g_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também são contínuas.

Um outro problema que nós estudaremos a existência de solução positiva é

$$(P_{\epsilon,\beta}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u = H(u-\beta)f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \hfill u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\epsilon, \beta > 0$, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$ ou $p \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, H é a função de Heaviside, dada por

$$H(s) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ s > 0, \\ 0 \ \text{ se } \ s \leq 0. \end{cases}$$

Palavras-chaves: Problemas não locais, Método de sub e supersolução, Método variacional, localmente Lipischitz contínuo, Método de iteração de Moser, Método de penalização.

Abstract

In this work, we will study existence of positive solutions for the following class of nonlocal problems involving Lebesgue generalized spaces

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r(x)}})\Delta u = f_1(x,u)|u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + f_2(x,u)|u|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

and the system

$$(S) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = f_1(x,u,v)|v|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} + f_2(x,u,v)|v|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = g_1(x,u,v)|u|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} + g_2(x,u,v)|u|^{\gamma_2(x)}_{L^{s_2(x)}} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ $|.|_{L^{m(x)}}$ is the Luxemburg norm of Lebesgue generalized space $L^{m(x)}(\Omega)$, $r, q, s, \alpha, \gamma, r_i, q_i, s_i, \alpha_i, \gamma_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ are continuous functions. In the scalar case we have $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuous and in the system case $f_1, f_2, g_1, g_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuous too.

A other problem that we will study the existence of positive solutions is

$$(P_{\epsilon,\beta}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u = H(u-\beta)f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

where $\epsilon, \beta > 0$ are positive parameters, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, if $N \geq 3$ or $p \in (1,\infty)$ if $N = 1,2$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are positives and continuous functions and H is the Heaviside function given by

$$H(s) = \begin{cases} 1 \text{ se } s > 0, \\ 0 \text{ se } s \leq 0. \end{cases}$$

Key word: Nonlocal problems, sub-supersolution Method, variational Methods, Moser's iteration Method, locally Lipischitz continuous.

Conteúdo

Introdução

Os estudos das questões relacionadas com existência, não existência e positividade de soluções para algumas classes de problemas de fronteira, envolvendo equações diferenciais parciais elípticas não lineares, modelam problemas que interessam às várias áreas das ciências básicas, tais como: Biologia (dinâmica de população), Química (Fenômenos Glaciais), Física (Fluidos não-Newtonianos). Além disso, tal estudo desenvolveu, e ainda desenvolve, diversas áreas da Matemática, como a Análise e a Geometria.

Os problemas que estudaremos nesse trabalho são temas que têm sido, nos últimos anos, objetos de investigação por diversos pesquisadores e podem ser caracterizados por:

i) Investigar a existência de soluções (fracas, fortes, clássicas, radiais, etc) para problemas não lineares locais e não locais em domínios limitados e não limitados, via teoremas da Análise Funcional Não Linear.

ii) Investigar questões de existência de soluções positivas, via Teoria dos pontos críticos, Técnica de sub e supersolução, teorema de ponto fixo, etc.

iii) Investigar questões de existência e concentração de solução, via argumentos de penalização del Pino e Felmer.

Neste trabalho, estudaremos no Capítulo 1 um problema não local, no Capítulo 2 estudaremos um sistema não local associado ao problema estudado no Capítulo 1 e finalizaremos com o estudo do Capítulo 3 sobre um problema local envolvendo uma não linearidade descontínua.

No Capítulo 1, estudaremos a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos não locais

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = f_1(x,u)|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + f_2(x,u)|u|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $|.|_{L^{m(x)}}$ é a norma de Luxemburg no espaço generalizado de Lebesgue $L^{m(x)}(\Omega)$, as funções $\mathcal{A}, f_1, f_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $r, q, s, \alpha, \gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Mostraremos um resultado de existência de solução positiva para o problema (P) envolvendo a técnica de sub e supersolução associada a um argumento de ponto fixo. Além disso, faremos três aplicações desse resultado. Mais precisamente, mostraremos a existência de solução positiva para os seguintes problemas

$$(P)_s \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = u^{\beta(x)}|u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = \lambda|u|^{\beta(x)-1}u|u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + \mu|u|^{\eta(x)-1}u|u|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$(P')_\lambda \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = \lambda f(u)|u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

O problema (P) é chamado não local devido as presenças dos termos não locais $\mathcal{A}(., |u|_{L^{r(x)}}), |u|^{\alpha(.)}_{L^{q(x)}}, |u|^{\gamma(.)}_{L^{s(x)}}$. A expressão $|.|_{L^{m(x)}}$ (termo não local) é definida por

$$|u|_{L^{m(x)}} := |u|_{L^{m(x)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{m(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Nas últimas décadas muitos fenômenos da Física, Química, Biologia e de Engenharia foram formulados por intermédio de modelos matemáticos não locais, veja [18], [19], [23], [28], [29], [30], [32], [33], [35], [57], [58], [60], [74] e suas referências. Citamos alguns desses fenômenos relacionados ao problema (P). Quando $\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}}) = a(\int_\Omega |u|dx)$, o problema (P) está relacionado a fenômenos biológicos. A solução u de (P) pode descrever a densidade (concentração) de uma população (de uma bactéria, por exemplo) sujeita a disseminação.

Neste caso, o coeficiente a é suposto depender da população total em Ω, veja [32] e [35]. Em [28], [29], [30] e [42] encontramos outros problemas não locais semelhantes a (P), onde a solução u pode ser interpretada como a densidade da população de uma espécie, mas com outras condições de fronteira. A solução u também tem outras interpretações. Por exemplo, quando $\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}}) = a(\int_\Omega |u|^2 dx)$, o problema (P) está associado à chamada equação de Carrier que modela vibrações de uma corda elástica quando as mudanças nas tensões não são pequenas. A equação de Carrier,

$$\rho u_{tt} - \Big(1 + \frac{BE}{LT_0} \int_\Omega |u|^2 dx\Big) u_{xx} = 0,$$

foi deduzida em [23] por G.F. Carrier, onde $u(x,t)$ é o deslocamento do ponto x no instante t, T_0 é a tensão axial inicial, E é o módulo de Young de um material, B é a seção transversal de uma corda, L é o comprimento da corda e ρ é a densidade do material. Quando as propriedades do material variam com x e t, temos a equação hiperbólica quase-linear

$$\rho u_{tt} - a\Big(x, t, |u|_{L^2}^2\Big)\Delta u = 0.$$

Motivados pelas aplicações e pelo interesse matemático, vários pesquisadores vêm estudando problemas não locais. Relacionado ao problema (P) citamos alguns trabalhos, veja [10], [23], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [42] [45], [46], [47], [48], [49], etc. Outros trabalhos não locais interessantes são [37], [38], [39], [40], [41].

No Capítulo 2, estudaremos um sistema associado ao problema (P). Mais precisamente, estudaremos o sistema elíptico não local

$$(S) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = f_1(x,u,v)|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + f_2(x,u,v)|v|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = g_1(x,u,v)|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + g_2(x,u,v)|u|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ \hfill u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $|.|_{L^{m(x)}}$ é a norma de Luxemburg no espaço generalizado de Lebesgue $L^{m(x)}(\Omega)$ e as funções $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1, f_2, g_1, g_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $r_i, q_i, s_i, \alpha_i, \gamma_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Aqui também mostraremos um resultado de existência de solução positiva para o sistema (S) usando a técnica de sub e supersolução associada a um argumento de ponto fixo. Como aplicação, mostraremos a existência de solução positiva para os seguintes sistemas

$$(Ss) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = (u^{\beta_1(x)} + v^{\gamma_1(x)})|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = (u^{\beta_2(x)} + v^{\gamma_2(x)})|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(S)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = \lambda u^{\beta_1(x)-1}u|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + \mu v^{\eta_1(x)-1}v|v|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)} & \text{em} \ \ \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = \lambda v^{\beta_2(x)-1}v|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + \mu u^{\eta_2(x)-1}u|u|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)} & \text{em} \ \ \Omega, \\ \qquad u, v = 0 & \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$(S')_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = \lambda f_1(u)|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} & \text{em} \ \ \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = \mu f_2(v)|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} & \text{em} \ \ \Omega, \\ \qquad u = v = 0 & \text{sobre} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalizaremos o nosso trabalho com o Capítulo 3. Nesse capítulo estudaremos a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos locais com não linearidade descontínua

$$(P'_{\epsilon,\beta}) \qquad \begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u = H(u-\beta)f(u) & \text{em} \ \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{em} \ \ \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

que por uma mudança de variável é equivalente ao problema

$$(P_{\epsilon,\beta}) \qquad \left\{ \begin{array}{r} -\Delta u + V(\epsilon x)u = H(u-\beta)f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

onde ϵ, β são parâmetros positivos, H é a função de Heaviside, isto é,

$$H(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \ \text{ se } \ t > 0, \\ 0 \ \text{ se } \ t \leq 0, \end{array} \right.$$

$1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$ ou $p \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

O estudo desse tipo de problema é importante por vários motivos. Citaremos alguns: muitos problemas de fronteira livre, que surgem na Física Matemática, podem ser reduzidos a problemas de fronteira com não linearidade descontínua. Tais classes de problemas representam uma variedade de situações físicas relevantes. Alguns problemas representam modelos de soluções estacionárias para fenômenos químicos e biológicos e é bem conhecido que vários problemas relacionados à Física de Plasma originam equações com não-linearidade descontínua.

Aqui, usaremos técnicas variacionais, mais precisamente, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, associado a uma adaptação dos argumentos de del Pino e Felmer, veja [50].

No Capítulo 3, estudaremos o problema $(P'_{\epsilon,\beta})$, seu equivalente $(P_{\epsilon,\beta})$, para a classe de funções f e duas classes novas de potenciais V introduzida por Alves em [3]. Neste trabalho o autor estudou o problema

$$(P)_\epsilon \qquad \left\{ \begin{array}{r} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

onde ϵ é um parâmetro positivo, $V:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ são funções contínuas. Alves introduziu as seguintes classes de potenciais.

Classe 1: O potencial V satisfazendo a condição Palais-Smale.

(A_0) Existe $V_0>0$, tal que $V(x)\geq V_0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}^N$.

(A_1) $V\in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $V, \frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^N$, $i,j=1,2...,N$.

(A_2) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n)\subset\mathbb{R}^N$, é tal que

$$(V(x_n)) \text{ é limitada e } \nabla V(x_n)\to 0,$$

então (x_n) possui uma subsequencia convergente.

Classe 2: O potencial V não possui ponto crítico na fronteira de algum domínio limitado.

Nesta classe de potenciais, V satisfaz $(A_0),(A_1)$ e a hipótese adicional

(A_3) Existe um domínio $\Lambda\subset\mathbb{R}^N$, tal que, $\nabla V(x)\neq 0,\ \forall\, x\in\partial\Lambda$.

A não linearidade f é contínua satisfazendo

(f_1) $\limsup_{s\to 0}\dfrac{f(s)}{s}=0$.

(f_2) Existe $p\in(1,2^*-1)$, tal que, $\limsup_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s^p}=0$.

(f_3) Existe $\theta>2$, tal que $0<\theta F(s)\leq sf(s),\ \ \forall\, s>0$.

Em [3], Alves provou que se o potencial V pertence a Classe 1 ou 2 e f satisfaz $(f_1)-(f_3)$, o problema $(P)_\epsilon$ possui uma solução positiva para $\epsilon>0$ pequeno. Para provar este resultado Alves usou o Teorema do Passo da Montanha (para funcionais de classe C^1), o método de penalização de del Pino e Felmer e explorou as hipóteses sobre o potencial V.

Motivados por esses trabalhos, principalmente por [3], [8], [11] e [50], estudaremos, no Capítulo 3, o problema $(P_{\epsilon,\beta})$ com as duas classes de potencias V introduzida por Alves.

Nossos resultados relativos ao problema $(P_{\epsilon,\beta})$ são os seguintes teoremas

Teorema 0.1 *Suponha que V satisfaz $(A_0),(A_1),(A_2)$ e f satisfaz $(f_1)-(f_3)$. Então, existe $a>0$, tal que, para cada $\beta\in(0,a)$, obtemos $\epsilon_0>0$, tal que, $(P_{\epsilon,\beta})$ possui uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ para cada $\epsilon\in(0,\epsilon_0)$. Além disso, se a função $s\mapsto\frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0,a]$, temos*

(i) *O conjunto $\Gamma_{\epsilon,\beta}=\{x\in\mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x)=\beta\}$ tem medida de Lebesgue nula.*

(ii) $-\Delta u_{\epsilon,\beta}+V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}=H(u_{\epsilon,\beta}-\beta)f(u_{\epsilon,\beta}(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) *O conjunto* $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > a\}$ *tem medida de Lebesgue positiva.*

e

Teorema 0.2 *Suponha que* V *satisfaz* $(A_0), (A_1), (A_3)$ *e* f *satisfaz* $(f_1) - (f_3)$. *Então, existe* $a > 0$, *tal que, para cada* $\beta \in (0, a)$, *obtemos* $\epsilon_0 > 0$, *tal que,* $(P_{\epsilon,\beta})$ *possui uma solução fraca* $u_{\epsilon,\beta}$ *para cada* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. *Além disso, se a função* $s \mapsto \frac{f(s)}{s}$ *é não decrescente em* $[0, a]$, *temos*

(i) *O conjunto* $\Gamma_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) = \beta\}$ *tem medida de Lebesgue nula.*

(ii) $-\Delta u_{\epsilon,\beta} + V(\epsilon x) u_{\epsilon,\beta} = H(u_{\epsilon,\beta} - \beta) f(u_{\epsilon,\beta}(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) *O conjunto* $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > a\}$ *tem medida de Lebesgue positiva.*

Para finalizar, no Apêndice A faremos uma revisão dos espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ e apresentaremos algumas de suas propriedades. No Apêndice B enunciaremos alguns resultados importantes utilizados ao longo deste trabalho e indicaremos suas referências para as consultas das demonstrações. No Apêndice C faremos um pequeno resumo da teoria dos funcionais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$.

Notações

$\square$: fim de uma demonstração,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|.|_{L^p} = |.|_{L^p(\Omega)}$,

$|.|_{L^{q(x)}} = |.|_{L^{q(x)}(\Omega)}$,

$|A|$ é a medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\displaystyle\int_\Omega f$: denota $\displaystyle\int_\Omega f(x)\, dx$,

$\langle .,. \rangle$: par de dualidade.

Capítulo

1

Solução positiva para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo os espaços generalizados de Lebesgue: caso escalar

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos não locais

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = f_1(x,u)|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + f_2(x,u)|u|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $|.|_{L^{m(x)}}$ é a norma de Luxemburg no espaço generalizado de Lebesgue $L^{m(x)}(\Omega)$, as funções $\mathcal{A}, f_1, f_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $r, q, s, \alpha, \gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

O problema (P) é chamado não local devido às presenças dos termos não locais $\mathcal{A}(., |u|_{L^{r(x)}}), |u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(.)}, |u|_{L^{s(x)}}^{\gamma(.)}$. A expressão $|.|_{L^{m(x)}}$ (termo não local) é definida por

$$|u|_{L^{m(x)}} := |u|_{L^{m(x)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{m(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Para mais informações sobre os espaços $L^{m(x)}(\Omega)$ e propriedades da norma $|.|_{L^{m(x)}}$ veja o Apêndice A. Ressaltamos que apesar das notações, os termos $|u|_{L^{r(x)}}$, $|u|_{L^{q(x)}}$ e $|u|_{L^{s(x)}}$ são os únicos no problema (P) que não dependem pontualmente de x, pois eles são termos não locais.

Problemas não locais são interessantes do ponto de vista matemático por apresentarem algumas dificuldades técnicas. As presenças dos termos não locais $\mathcal{A}(., |u|_{L^{r(x)}})$, $|u|^{\alpha(.)}_{L^{q(x)}}$, $|u|^{\gamma(.)}_{L^{s(x)}}$ fazem com que o problema (P) seja, em geral, não variacional. Assim, não é possível associar um funcional ao problema e tentar obter, diretamente, solução deste problema via ponto crítico de um funcional. Nesse caso, para resolvermos o problema (P) podemos usar outras técnicas da Análise Funcional Não Linear como sub e supersolução, teoremas de ponto fixo, teoria do grau, o método de Galerkin, etc. Ressaltamos que o método variacional pode ser aplicado de modo indireto para resolver problemas semelhantes a (P), veja [36].

Motivados pelas aplicações e pelo interesse matemático vários pesquisadores vêm estudando problemas não locais. Relacionado ao problema (P) citamos alguns trabalhos, veja [10], [23], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [42] [45], [46], [47], [48], [49], etc. Outros trabalhos não locais interessantes são [37], [38], [39], [40], [41].

Em [45], Corrêa estudou o problema

$$\begin{cases} -a(\int_\Omega |u|^q)\Delta u = H(x)f(u) \text{ em } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde as funções $a : [0,\infty) \to (0,\infty)$ e $f : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ são contínuas e satisfazem certas hipóteses. O autor usou o teorema do ponto fixo de Krasnoselskii no caso unidimensional e o teorema do ponto fixo de Schaefer no caso multidimensional para obter a existência de solução positiva.

Já em [48], Corrêa-Menezes utilizando o método de Galerkin, obtiveram a existência de solução positiva para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x,u)|u|^p_{L^q} \text{ em } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Recentemente, Yan-Wang em [76], estudaram o problema

$$(Y.W) \qquad \begin{cases} -a(\int_\Omega |u|^\gamma)\Delta u = \lambda f(u) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\gamma \in (0, \infty)$. Os autores mostraram multiplicidade de solução positiva para $(Y.W)$ quando a é limitada e multiplicidade de solução radial positivas quando $f(|x|, u)$ é contínua em $u = 0$ e multiplicidade de solução radial positiva quando $f(|x|, u)$ tem uma singularidade arbitrária em $u = 0$. A principal ferramenta utilizada por eles foi a Teoria do Grau (teorema envolvendo o índice).

Além da motivação gerada pelas aplicações e pelos problemas citados anteriormente, três problemas nos motivaram a estudar o problema (P).

O primeiro problema é

$$(P)_p \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

estudado em [46] por Corrêa-Figueiredo-Lopes. Usando a técnica de sub e supersolução, combinado com a iteração monotônica, eles mostraram a existência de solução positiva para o problema $(P)_p$.

O segundo problema é

$$(P)_g \qquad \begin{cases} -a(\int_\Omega |u|^q)\Delta u = h_1(x, u)f(\int_\Omega |u|^p) + h_2(x, u)g(\int_\Omega |u|^r) \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $h_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, $q, p, r \in [1, \infty)$ e as funções $a, f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ satisfazem $f, g \in L^\infty([0, \infty))$ e

$$(a_0') \qquad a(t), f(t), g(t) \geq a_0 > 0, \ \forall\, t \in [0, \infty),$$

estudado em [10] por Alves-Covei. Usando a técnica de sub e supersolução combinada com uma versão do teorema de Minty–Browder para Operadores Pseudomonotônicos, eles provaram dois teoremas de sub e supersolução relacionados ao problema $(P)_g$, em seguida fizeram uma aplicação para cada teorema.

O terceiro problema é

$$(P)_\lambda \qquad \begin{cases} -\mathfrak{A}(x,u)\Delta u = \lambda f(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

estudado em [31] por Chipot-Corrêa, em que $f \in C^1([0,\theta],\mathbb{R})$, $f(0) = 0 = f(\theta)$, $f'(0) > 0$, $f(t) > 0$ em $(0,\theta)$, a função $\mathfrak{A} : \Omega \times L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ é tal que a função $x \mapsto \mathfrak{A}(x,u)$ é mensurável, a função $u \mapsto \mathfrak{A}(x,u)$ é contínua e existem constantes $a_0, a_\infty > 0$, tais que

$$(A_{0,\infty}) \qquad a_0 \leq \mathfrak{A}(x,u) \leq a_\infty \text{ q.t.p. em } \Omega, \ \forall \ u \in L^p(\Omega).$$

Neste trabalho, os autores usaram o teorema do ponto fixo de Schauder, aplicado a um conjunto convexo adequado, para mostrar a existência de solução positiva para $(P)_\lambda$.

O problema $(P)_\lambda$ foi estudado novamente em [36] por Chipot-Roy, onde os autores estudaram a questão de multiplicidade de solução para $(P)_\lambda$. Eles provaram que se f possui n zeros distintos, então $(P)_\lambda$ possui n soluções positivas distintas. Nesse trabalho eles usaram o método variacional (de modo indireto), o teorema do ponto fixo de Schauder, simples argumentos de comparação e alguns argumentos contidos em [31]. Nos dois trabalhos os autores também estudaram o comportamento assintótico da solução quando λ tende a ∞.

Motivados por esses problemas e pelas aplicações nós estudaremos o problema (P).

Destacamos algumas diferenças entre o problema (P) e o nosso trabalho para os três citados anteriormente. Em primeiro lugar, notamos que na maioria dos trabalhos sobre problemas não locais aparece a limitação

$$(A_0') \qquad a_0 \leq \mathcal{A}(x,t) \leq a_\infty \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times [0,\infty) \ \text{ com } \ a_\infty, a_0 > 0$$

ou a limitação inferior glabal

$$(A_0) \qquad \mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \times [0,\infty),$$

veja, por exemplo, [10], [31], [36] e [46].

A limitação em (A_0) não permite estudar problemas em que ocorrem as situações

$$\mathcal{A}(x,0) = 0, \ \lim_{t\to 0^+} \mathcal{A}(x,t) = \pm\infty,$$

e no caso de (A_0'), além dessas situações não podemos estudar problemas em que

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = \pm\infty.$$

Do ponto de vista matemático, o problema (P) torna-se também interessante quando a função $\mathcal{A}$ satisfaz uma das situações anteriores, pois surgem dificuldades técnicas adicionais no estudo de tais problemas.

Nossa proposta é estudar o problema (P) sem exigir a limitação inferior global acima, isto é, em $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$. Isso nos permite estudar o problema (P) para classes de funções $\mathcal{A}$ em que (A_0) ocorre e também para classes de funções $\mathcal{A}$ que satisfazem as outras situações acima.

É claro que a presença em (P) dos termos não locais $\mathcal{A}(.,|u|_{L^{r(x)}})$, $|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(.)}$, $|u|_{L^{s(x)}}^{\gamma(.)}$ e das funções f_1 e f_2 mostram que o problema (P) generaliza os problemas $(P)_p$ (com $p=2$) e $(P)_\lambda$ (quando $\mathfrak{A}(x,u) = \mathcal{A}(x,|u|_{L^{r(x)}})$). Outra diferença do problema (P) para o $(P)_\lambda$ é que nós estudaremos o problema (P) sem a limitação $(A_{0,\infty})$ e com o termo não local $\mathcal{A}(.,|u|_{L^{r(x)}})$, enquanto que em [31], Chipot-Corrêa estudaram $(P)_\lambda$ com a limitação $(A_{0,\infty})$, mas com o termo não local $\mathfrak{A}(x,u)$.

Em [10], Alves-Covei assumem que $f, g \in L^\infty([0,\infty))$ e $f(t), g(t) \geq a_0 > 0, \ \forall\, t \geq 0$. No problema (P) não há essa limitação. Por exemplo, no caso particular de $\alpha(x) = \alpha$ e $\beta(x) = \beta$ serem constantes, as funções $f(t) = t^\alpha$ e $g(t) = t^\beta$ não verificam essas condições. Também não exigiremos a limitação inferior global (a_0') para $\mathcal{A}$ como em [10]. Além disso, no problema (P) aparece a norma de Luxemburg $|.|_{L^{p(x)}}$ do espaço de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$, em vez da norma $|.|_{L^p}$ do espaço $L^p(\Omega)$. A definição da norma $|.|_{L^{p(x)}}$ de Luxemburg é diferente da norma $|.|_{L^p}$ do espaço $L^p(\Omega)$, mas se $p(x) = p$ é constante $|.|_{L^p} = |.|_{L^{p(x)}}$, veja o Apêndice A.

Nossa contribuição ao estudo do problema (P) é um teorema de sub e supersolução em que a condição (A_0) não é necessária. Também faremos três aplicações deste teorema. Na demonstração desse teorema usaremos técnicas de truncamento e o teorema do ponto fixo de Schaefer. Nossa definição de sub e supersolução (veja a seção 1.1) foi inspirada na definição feita em [73] por Figueiredo-Suárez quando estudaram um outro problema não local, a saber, um problema de Kirchhoff.

Nosso teorema de sub e supersolução, que está na Seção 1.1, é

Teorema 1.1 *Suponha que* $r(x), q(x), s(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha(x), \gamma(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $(\underline{u}, \overline{u})$ *é um par de sub e supersolução para o problema* (P) *com* $\underline{u} > 0$ *em* Ω *e* $f_1(x,t), f_2(x,t) \geq 0$ *em* $\overline{\Omega} \times [0, |\overline{u}|_{L^\infty}]$. *Suponha ainda que a função* $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua e*

$$\mathcal{A}(x,t) > 0 \ \ \textit{em} \ \ \overline{\Omega} \times \left[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, \ |\overline{u}|_{L^{r(x)}}\right].$$

Então, o problema (P) *possui uma solução fraca positiva* u *com*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Veja a Seção 1.1 para a definição de subsolução, supersolução e solução fraca positiva para o problema (P).

Faremos três aplicações do Teorema 1.1 que estão nas Seções 1.2, 1.3 e 1.4. Para facilitar a leitura do nosso trabalho resumiremos essas aplicações.

Para simplificar o enunciado dos próximos teoremas, usaremos as seguintes notações que aparecerão ao longo deste capítulo

$$w^- = \min_{\overline{\Omega}} w(x) \quad \text{e} \quad w^+ = \max_{\overline{\Omega}} w(x),$$

onde $w(x) \in C^0(\overline{\Omega})$.

Na Seção 1.2 faremos a primeira aplicação do Teorema 1.1. Estudaremos o problema não local

$$(Ps) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = u^{\beta(x)}|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

para duas classes distintas de funções $\mathcal{A}$. Na primeira classe supomos que ocorre a condição $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ em $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ que aparece em [10], [31] e [46]. Note que nesta classe a função $\mathcal{A}(x,t)$ não se aproxima de zero quando $t \to 0^+$. Na segunda classe de funções, estudaremos um caso em que $\mathcal{A}(x,0) = 0$. Mostraremos o seguinte

Teorema 1.2 *Suponha que $r(x), q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \alpha(x), \beta(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ tais que*

$$0 < \alpha^+ + \beta^+ < 1.$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua e pelo menos uma das condições abaixo ocorra:

(A_1) *Existe uma constante $a_0 > 0$, tal que*

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \times [0,\infty).$$

(A_2) *Existem constantes $a_1, a_\infty > 0$, tais que*

$$\mathcal{A}(x,0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \text{ em } \overline{\Omega} \times (0,\infty) \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Então, o problema (Ps) possui uma solução fraca positiva.

O Teorema 1.2 acima, generaliza o Teoremas 4.1 em [46] de Corrêa-Figueiredo-Lopes (associado ao problema $(P)_p$). Ressaltamos que o problema $(P)_p$ estudado em [46], foi uma das principais motivações do nosso estudo do problema (P).

Na Seção 1.3 faremos a segunda aplicação do Teorema 1.1. Estudaremos o problema não local côncavo e convexo

$$(P)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r(x)}})\Delta u = \lambda|u|^{\beta(x)-1}u|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + \mu|u|^{\eta(x)-1}u|u|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} \ \text{em} \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{sobre} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

para duas classes distintas de funções $\mathcal{A}$. Para a primeira classe de funções $\mathcal{A}$ supomos que $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ em $\overline{\Omega} \times [0, b_0]$, para alguma constante $b_0 > 0$.

Na segunda classe estudamos um caso em que $\mathcal{A}(x, 0) = 0$.

A versão local de $(P)_{\lambda,\mu}$ foi estudada em [15] por Ambrosseti-Brezis-Cerami e em [17] por Bartsch-Willem. Já um variante de $(P)_{\lambda,\mu}$ que combina um termo local com um não local foi estudada em [49] por Corrêa-Suárez. Para mais informação destes estudos veja a seção 1.3.

Nosso resultado relativo ao problema $(P)_{\lambda,\mu}$ é o seguinte

Teorema 1.3 *Suponha que $r(x)$, $q(x)$, $s(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \alpha(x)$, $\gamma(x)$, $\beta(x)$, $\eta(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ tais que*

$$0 < \alpha^- + \beta^- \leq \alpha^+ + \beta^+ < 1.$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua. Temos as seguintes situações:
(A_1) Suponha que $1 < \eta^- + \gamma^-$ e existem constantes $a_0, b_0 > 0$, tais que

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \ \ em \ \ \overline{\Omega} \times [0, b_0].$$

Então, dado $\mu > 0$ existe $\lambda_0 > 0$, tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$ o problema $(P)_{\lambda,\mu}$ possui uma solução fraca positiva $u_{\lambda,\mu}$.
(A_2) Suponha que $1 < \eta^+ + \gamma^+$ e existem constantes $a_1, a_\infty > 0$, tais que

$$\mathcal{A}(x, 0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \ em \ \overline{\Omega} \times (0, \infty) \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \ \ uniformemente\ em \ \overline{\Omega}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ existe $\mu_0 > 0$, tal que para cada $\mu \in (0, \mu_0)$ o problema $(P)_{\lambda,\mu}$ possui uma solução fraca positiva $u_{\lambda,\mu}$.

Na Seção 1.4 faremos a terceira e última aplicação do Teorema 1.1. Nesta aplicação podemos ter

$$\mathcal{A}(x,0) \geq 0, \quad \lim_{t\to 0^+} \mathcal{A}(x,t) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = \pm\infty.$$

Nesta seção estudaremos o problema (P) com uma classe de funções f que nos fornece uma generalização da equação logística clássica. A classe de funções f é a estudada em [31], mas sem exigir a limitação $(A_{0,\infty})$ para a função $\mathcal{A}$ e que $f \in C^1$ como em [31]. Mais precisamente estudaremos o problema

$$(P')_\lambda \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = \lambda f(u)|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

que generaliza a equação logística clássica

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\gamma - u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Assumiremos que existe uma constante $\theta > 0$ tal que a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz:

(f_1) $f \in C^0([0,\theta],\mathbb{R})$,

(f_2) $f(0) = f(\theta) = 0$, $f'(0) > 0$ ($f'(0) \in \mathbb{R}$ ou $f'(0) = \infty$) e $f(s) > 0 \ \forall s \in (0,\theta)$.

Mostraremos o seguinte

Teorema 1.4 *Suponha que $r(x), q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ e a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz (f_1) e (f_2). Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua e*

$$\mathcal{A}(x,t) > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times \big(0, |\theta|_{L^{r(x)}}\big].$$

Então, existe $\lambda_0 > 0$, tal que, para cada $\lambda \geq \lambda_0$, o problema $(P')_\lambda$ possui uma solução fraca positiva u_λ com

$$0 < u_\lambda \leq \theta \ \text{ em } \ \Omega.$$

1.1 Teorema de sub e supersolução para o caso escalar

Nesta seção, enunciaremos e demonstraremos um teorema de sub e supersolução, relacionado ao problema não local (P). Neste teorema não há a necessidade da condição $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ em $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ que frequentemente aparece no estudo de problemas não locais, como, por exemplo, em [10] e [31]. Este teorema nos permitirá estudar o problema (P) para classes de funções $\mathcal{A}$ com a limitação inferior acima e também para outras classes de funções $\mathcal{A}$, por exemplo, para classes de funções $\mathcal{A}$ em que $\mathcal{A}(x,0) = 0$, que gera uma dificuldade adicional no estudo de problemas não locais.

Em cada uma das três seções seguintes faremos uma aplicação deste teorema.

Começamos com algumas definições para enunciarmos o nosso teorema de sub e supersolução para o caso escalar.

Definição 1.1 *Dizemos que uma função $u \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ é uma solução fraca positiva do problema (P) quando $u > 0$ em Ω e*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left(\frac{f_1(x,u)|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r(x)}})} + \frac{f_2(x,u)|u|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r(x)}})} \right) \varphi, \ \ \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Definição 1.2 *Dizemos que um par $(\underline{u}, \overline{u})$ é uma sub e uma supersolução para o problema (P), respectivamente, quando $\underline{u} \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$, $\overline{u} \in H^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ com*

a) $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{u} = 0 \leq \overline{u}$ sobre $\partial\Omega$.

b) Para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \varphi \leq \int_\Omega \left(\frac{f_1(x,\underline{u})|\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})} + \frac{f_2(x,\underline{u})|\underline{u}|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})} \right) \varphi, \ \ \forall\ w \in [\underline{u}, \overline{u}] \tag{1.1}$$

e

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \varphi \geq \int_\Omega \left(\frac{f_1(x,\overline{u})|\overline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})} + \frac{f_2(x,\overline{u})|\overline{u}|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})} \right) \varphi, \ \ \forall\ w \in [\underline{u}, \overline{u}], \tag{1.2}$$

onde $[\underline{u}, \overline{u}] := \big\{ w \in L^\infty(\Omega) : \underline{u}(x) \leq w(x) \leq \overline{u}(x) \ q.t.p \ em\ \Omega \big\}$.

Neste capítulo usaremos as notações

$$w^- = \min_{\overline{\Omega}} w(x) \quad \text{e} \quad w^+ = \max_{\overline{\Omega}} w(x),$$

onde $w(x) \in C^0(\overline{\Omega})$.

Observação 1.1 *Para facilitar a leitura, vamos enunciar novamente o Teorema 1.1 já enunciado na introdução. Agora, ele passará a ser chamado de Teorema 1.5. Também vamos enunciar novamente os outros teoremas nas respectivas seções.*

Observação 1.2 *Na definição acima, podemos ter $\mathcal{A}(x,t) \equiv 1$ e $\alpha \equiv \gamma \equiv 0$. Neste caso, temos a definição usual de sub e supersolução para um problema local.*

Nosso principal resultado neste capítulo é o

Teorema 1.5 *Suponha que $r(x), q(x), s(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha(x), \gamma(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub e supersolução para o problema (P) com $\underline{u} > 0$ em Ω e $f_1(x,t), f_2(x,t) \geq 0$ em $\overline{\Omega} \times [0, |\overline{u}|_{L^\infty}]$. Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua e*

$$\mathcal{A}(x,t) > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times \left[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, \ |\overline{u}|_{L^{r(x)}}\right].$$

Então, o problema (P) possui uma solução fraca positiva u com

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Demonstração: Considere o operador truncamento associado a $\underline{u}$ e $\overline{u}$, isto é,

$$T : L^2(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$$

$$Tu(x) = \begin{cases} \underline{u}(x) & \text{se} \qquad u(x) \leq \underline{u}(x), \\ u(x) & \text{se} \ \ \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \\ \overline{u}(x) & \text{se} \qquad u(x) \geq \overline{u}(x). \end{cases}$$

Como $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$ e $\underline{u} \leq Tu \leq \overline{u}$, segue que o operador T está bem definido.

Agora, considere o operador

$$H : [\underline{u}, \overline{u}] \to L^2(\Omega)$$

$$H(v)(x) = \frac{f_1(x, v(x))|v|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r(x)}})} + \frac{f_2(x, v(x))|v|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r(x)}})},$$

onde $|.|_{L^{m(x)}}$ denota a norma de Luxemburg do espaço $L^{m(x)}(\Omega)$, veja o Apêndice A.

Note que $|.|_{L^{m(x)}}$ é um termo não local que, apesar da notação, não depende de x. Note também que dada $v \in [\underline{u}, \overline{u}]$, estão definidas as funções

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(., |v|_{L^{r(x)}}), |v|_{L^{q(x)}}^{\alpha(.)}, |v|_{L^{s(x)}}^{\gamma(.)} \quad \overline{\Omega} : \ & \to \mathbb{R} \\ x \ & \mapsto \mathcal{A}(x, |v|_{L^{r(x)}}), |v|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}, |v|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}. \end{aligned}$$

Afirmamos que H está bem definido e o operador $u \mapsto H(Tu);\ u \in L^2(\Omega)$ é contínuo de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

De fato, dada $u \in L^2(\Omega)$, como $Tu \in [\underline{u}, \overline{u}] \subset L^\infty(\Omega)$ e $\underline{u} > 0$ em Ω,

$$|\underline{u}|_{L^\infty} \leq |Tu|_{L^\infty} \leq |\overline{u}|_{L^\infty}, \ \ \forall\, u \in L^2(\Omega).$$

Além disso, usando a definição da norma $|.|_{L^{m(x)}}$, temos

$$|\underline{u}|_{L^{m(x)}} \leq |Tu|_{L^{m(x)}} \leq |\overline{u}|_{L^{m(x)}}, \ \forall \ u \in L^2(\Omega),\ m(x) \in C_+(\overline{\Omega}).$$

Como $\mathcal{A}(x,t)$ é positiva e contínua no compacto $\overline{\Omega} \times \big[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, |\overline{u}|_{L^{r(x)}}\big]$, existem constantes $k, K > 0$ tais que

$$k \leq \mathcal{A}(x,t) \leq K,\ \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times \big[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, |\overline{u}|_{L^{r(x)}}\big].$$

Desde que $|Tu|_{L^{r(x)}} \in \big[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, |\overline{u}|_{L^{r(x)}}\big]$, temos

$$0 < k \leq \mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}}) \leq K \ \text{ em } \ \Omega,\ \forall\, u \in L^2(\Omega).$$

Pela continuidade das funções $f_1(x,t)$ e $f_2(x,t)$ em $\overline{\Omega}\times\big[0,|\overline{u}|_{L^\infty}\big]$, existem constantes $c_1,c_2>0$ tais que

$$|H(v)|\leq \frac{c_1|v|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}+c_2|v|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}}}{k} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \forall\, v\in[\underline{u},\overline{u}],$$

logo,

$$|H(v)|\leq \frac{c_1|\overline{u}|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}+c_2|\overline{u}|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}}}{k} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \forall\, v\in[\underline{u},\overline{u}].$$

Desde que $|\overline{u}|_{L^{m(x)}}$ é um número real positivo (que não depende de x), temos $|\overline{u}|^{\tau(x)}_{L^{m(x)}}\leq|\overline{u}|^{\tau^-}_{L^{m(x)}}+|\overline{u}|^{\tau^+}_{L^{m(x)}}$, $\forall\, m(x)\in C_+(\overline{\Omega}),\ \tau(x)\in C^0(\overline{\Omega})$. Assim,

$$|H(v)|\leq \frac{c_1(|\overline{u}|^{\alpha^-}_{L^{q(x)}}+|\overline{u}|^{\alpha^+}_{L^{q(x)}})+c_2(|\overline{u}|^{\gamma^-}_{L^{s(x)}}+|\overline{u}|^{\gamma^+}_{L^{s(x)}})}{k} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \forall\, v\in[\underline{u},\overline{u}].$$

Definindo a constante

$$K_0=\frac{c_1(|\overline{u}|^{\alpha^-}_{L^{q(x)}}+|\overline{u}|^{\alpha^+}_{L^{q(x)}})+c_2(|\overline{u}|^{\gamma^-}_{L^{s(x)}}+|\overline{u}|^{\gamma^+}_{L^{s(x)}})}{k},$$

temos

$$|H(v)|\leq K_0 \ \text{ em } \ \Omega, \ \forall \ \ v\in[\underline{u},\overline{u}].$$

Como Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, o operador H está bem definido.

Desde que $Tu\in[\underline{u},\overline{u}]$, temos

$$|H(Tu)|\leq K_0 \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall\, u\in L^2(\Omega). \tag{1.3}$$

A seguir, provaremos a continuidade do operador $u\mapsto H(Tu)$ de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Seja $u_n\to u$ em $L^2(\Omega)$, então, a menos de subsequência,

$$u_n(x)\to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

logo,

$$Tu_n(x)\to Tu(x) \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Assim, dada $m(x) \in C_+(\overline{\Omega})$,

$$|Tu_n(x) - Tu(x)|^{m(x)} \to 0 \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega$$

e

$$|Tu_n(x) - Tu(x)|^{m(x)} \leq 2|\overline{u}|_{L^\infty}^{m(x)} \leq 2(|\overline{u}|_{L^\infty}^{m^-} + |\overline{u}|_{L^\infty}^{m^+}) \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega,$$

como $2(|\overline{u}|_{L^\infty}^{m^-} + |\overline{u}|_{L^\infty}^{m^+}) \in \mathbb{R}$ e Ω é um domínio limitado, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_\Omega |Tu_n - Tu|^{m(x)} \to 0.$$

Pela Proposição A.3, item v), veja o Apêndice A,

$$Tu_n \to Tu \;\text{ em }\; L^{m(x)}(\Omega),\; \forall\, m(x) \in C_+(\overline{\Omega}).$$

Pela continuidade das funções $f_1(x,t),\; f_2(x,t)$ e $\mathcal{A}(x,t)$ obtemos

$$H(Tu_n)(x) \to H(Tu)(x) \;\text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Usando (1.3) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$H(Tu_n) \to H(Tu) \text{ em }\; L^2(\Omega),$$

o que mostra a continuidade do operador $u \mapsto H(Tu)$ de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Agora, dada $v \in L^2(\Omega)$, como $H(Tv) \in L^2(\Omega)$, segue do teorema de Riesz–Fréchet, veja o Teorema B.2 no Apêndice B, que o problema linear

$$(P_L) \qquad \begin{cases} -\Delta u = H(Tv) \;\text{ em }\; \Omega, \\ \qquad u = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$. Assim, está bem definido o operador

$$S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

$$v \mapsto S(v) = u,$$

onde $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P_L).

Note que um ponto fixo u do operador S é solução fraca do problema truncado

$$(P_T) \qquad \begin{cases} -\Delta u = H(Tu) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Provaremos que S possui um ponto fixo usando o Teorema do ponto fixo de Schaefer.

O operador S tem as seguintes propriedades

i) S é compacto.

De fato, sejam $(v_n) \subset L^2(\Omega)$ limitada e $u_n = S(v_n)$. Pela definição do operador S,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega H(Tv_n)\varphi, \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u_n$ e usando (1.3) temos

$$\|u_n\|^2 \leq K_0 |u_n|_{L^1}, \ \forall \ n \in N,$$

o que mostra que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. Logo, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Pelas imersões compactas dos Espaços de Sobolev, a menos de subsequência,

$$S(v_n) = u_n \to u \text{ em } L^2(\Omega),$$

o que mostra que S é compacto.

ii) S é contínuo.

De fato, sejam $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$, $u_n = S(v_n)$ e $u = S(v)$. Pela definição de S,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega H(Tv_n)\varphi, \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega H(Tv)\varphi,\ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u_n$ em ambas as equações e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u)\Big| &= \Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n - \int_\Omega \nabla u \nabla u_n\Big| \\
&= \Big|\int_\Omega H(Tv_n)u_n - \int_\Omega H(Tv)u_n\Big| \\
&\leq \int_\Omega |H(Tv_n) - H(Tv)||u_n| \\
&\leq |H(Tv_n) - H(Tv)|_{L^2}|u_n|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como no caso anterior (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, logo, também é limitada em $L^2(\Omega)$. Usando a continuidade do operador $u \mapsto H(Tu)$ e o fato de $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) \to 0.$$

Da mesma forma, fazendo $\varphi = u$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u \to \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Como

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n = \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) + \int_\Omega \nabla u_n \nabla u,$$

obtemos das duas últimas convergências que

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2.$$

Desde que

$$\|u_n - u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + \int_\Omega |\nabla u|^2$$

temos

$$S(v_n) = u_n \to u = S(v) \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

logo,

$$S(v_n) \to S(v) \text{ em } L^2(\Omega),$$

o que mostra que S é contínuo.

iii) Existe $R > 0$ tal que se $u = \theta S(u)$, com $\theta \in [0,1]$, temos $|u|_{L^2} < R$.

De fato, se $\theta = 0$, temos $u = 0$. Se $\theta \neq 0$, temos

$$S(u) = \frac{u}{\theta},$$

pela definição do operador S

$$\int_\Omega \nabla\left(\frac{u}{\theta}\right)\nabla\varphi = \int_\Omega H(Tv)\varphi,\ \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u$ e usando (1.3), temos

$$\|u\|^2 \leq \theta K_0 |u|_{L^1}.$$

Pela desigualdade de Poincaré e a imersão contínua de $L^2(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, existe $R > 0$ tal que

$$|u|_{L^2} < R.$$

Portanto, pelo Teorema do ponto fixo de Schaefer, veja o Teorema B.6 no Apêndice B, existe $u \in L^2(\Omega)$ com $u = S(u)$. Logo,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega H(Tu)\varphi,\ \forall\ \ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega \left(\frac{f_1(x,Tu)|Tu|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r(x)}})} + \frac{f_2(x,Tu)|Tu|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r(x)}})} \right)\varphi,\ \forall\ \ \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Afirmação:

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

De fato, como $Tu \in [\underline{u}, \overline{u}]$, usando $w = Tu$ em (1.1) (definição da subsolução $\underline{u}$) e subtraindo (1.4), para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\underline{u} - u)\nabla\varphi &\leq \int_\Omega \Big(\frac{f_1(x, \underline{u}(x))|\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} - f_1(x, Tu(x))|Tu|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)\varphi \\ &+ \int_\Omega \Big(\frac{f_2(x, \underline{u}(x))|\underline{u}|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} - f_2(x, Tu(x))|Tu|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)\varphi.\end{aligned}$$

Como $\underline{u}, u \in H_0^1(\Omega)$, pelo Corolário B.1, veja o Apêndice B, $(\underline{u} - u)_+ = \max\{(\underline{u} - u), 0\} \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $\varphi = (\underline{u} - u)_+$ e recordando que $f_i(x,t) \geq 0$ em $[0, |\overline{u}|_{L^\infty}]$, $Tu = \underline{u}$ em $\big\{x \in \Omega : \underline{u}(x) \geq u(x)\big\}$ e $Tu \in [\underline{u}, \overline{u}]$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\underline{u} - u)\nabla(\underline{u} - u)_+ &\leq \int_\Omega \Big(\frac{f_1(x, \underline{u}(x))|\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} - f_1(x, Tu(x))|Tu|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)(\underline{u} - u)_+ \\ &+ \int_\Omega \Big(\frac{f_2(x, \underline{u}(x))|\underline{u}|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} - f_2(x, Tu(x))|Tu|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)(\underline{u} - u)_+ \\ &= \int_{\{x\in\Omega \,:\, \underline{u}(x) \geq u(x)\}} f_1(x, \underline{u}(x))\frac{(|\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} - |Tu|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)})}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}(\underline{u} - u) \\ &+ \int_{\{x\in\Omega \,:\, \underline{u}(x) \geq u(x)\}} f_2(x, \underline{u}(x))\frac{(|\underline{u}|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} - |Tu|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)})}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}(\underline{u} - u) \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

pelo Lema B.1, veja o Apêndice B, $\|(\underline{u} - u)_+\|^2 \leq 0$, logo, $(\underline{u} - u)_+ = 0$. Assim, $\underline{u} \leq u$.

Agora, usando $w = Tu$ em (1.2) (definição da supersolução $\overline{u}$) e combinando com (1.4), para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(u - \overline{u})\nabla\varphi &\leq \int_\Omega \Big(\frac{f_1(x, Tu(x))|Tu|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} - f_1(x, \overline{u}(x))|\overline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)\varphi \\ &+ \int_\Omega \Big(\frac{f_2(x, Tu(x))|Tu|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} - f_2(x, \overline{u}(x))|\overline{u}|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}}{\mathcal{A}(x, |Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)\varphi.\end{aligned}$$

Como $\overline{u} > 0$ em Ω e $u \in H_0^1(\Omega)$, pelo Lema B.2, veja o Apêndice A, $(u - \overline{u})_+ = \max\{(u - \overline{u}), 0\} \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $\varphi = (u - \overline{u})_+$ e recordando que $f_i(x,t) \geq 0$ em $[0, |\overline{u}|_{L^\infty}]$,

$Tu = \overline{u}$ em $\{x \in \Omega : u(x) \geq \overline{u}(x)\}$ e $Tu \in [\underline{u}, \overline{u}]$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(u-\overline{u})\nabla(u-\overline{u})_+ &\leq \int_\Omega \Big(\frac{f_1(x,Tu(x))|Tu|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} - f_1(x,\overline{u}(x))|\overline{u}|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)(u-\overline{u})_+ \\
&+ \int_\Omega \Big(\frac{f_2(x,Tu(x))|Tu|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} - f_2(x,\overline{u}(x))|\overline{u}|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}}}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r(x)}})}\Big)(u-\overline{u})_+ \\
&= \int_{\{x\in\Omega\,:\,u(x)\geq\overline{u}(x)\}} f_1(x,\overline{u}(x))\frac{(|Tu|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} - |\overline{u}|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}})}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r(x)}})}(u-\overline{u}) \\
&+ \int_{\{x\in\Omega\,:\,u(x)\geq\overline{u}(x)\}} f_2(x,\overline{u}(x))\frac{(|Tu|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} - |\overline{u}|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}})}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r(x)}})}(u-\overline{u}) \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

pelo Lema B.1, veja o Apêndice B, $\|(u-\overline{u})_+\|^2 \leq 0$, logo, $(u-\overline{u})_+ = 0$, de onde concluímos que $u \leq \overline{u}$.

Portanto, pela definição do operador T, $Tu = u$. Como u satisfaz (1.4), concluímos que u é uma solução fraca positiva do problema (P). □

Observação 1.3 *A solução fraca positiva* $u \in H^1_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *do problema* (P) *encontrada no teorema anterior é uma solução forte. Além disso,* $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}),\ 0 < \beta < 1$.

De fato, por (1.3), $H(Tu) \in L^\infty(\Omega)$. *Como* $Tu = u$, $H(u) \in L^\infty(\Omega)$ *e* u *é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = H(u) \ \ \textit{em} \ \ \Omega, \\ \quad\ \ u = 0 \ \ \textit{sobre} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Agmon-Douglas-Nirenberg, veja o Teorema B.7 no Apêndice B, $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall\, p \geq 1$. *Tomando* $p > N$, $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega}),\ \ 0 < \beta < 1$, *logo,* $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$.

Usando a fórmula de Green, veja o Teorema B.11 no Apêndice B,

$$\int_\Omega \big[-\Delta u - H(u)\big]\varphi = 0,\ \forall\ \ \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Pelo Teorema B.10, veja o Apêndice B,

$$-\Delta u = H(u) \ \ \textit{q.t.p em} \ \ \ \Omega,$$

ou seja, $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), \ \forall\, p \geq 1$ *e* u *satisfaz*

$$\begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = f_1(x,u)|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + f_2(x,u)|u|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} \ \ q.t.p \ em \ \ \Omega, \\ \hfill u > 0 \ \ em \ \ \Omega, \\ \hfill u = 0 \ \ sobre \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

1.2 Aplicação 1.1 do Teorema 1.5: O problema sublinear

Nesta seção, faremos nossa primeira aplicação do Teorema 1.5. Estudaremos o problema

$$(P)_s \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = u^{\beta(x)}|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

O problema $(P)_s$ é uma generalização (a menos de operador) do problema

$$(P)_p \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = |u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

estudado em [46]. Utilizando o método de sub e supersolução combinado com a iteração monotônica os autores mostraram a existência de solução positiva para o problema $(P)_p$.

Estudaremos $(P)_s$ para duas classes de funções $\mathcal{A}$. Na primeira classe vamos considerar $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$. Na segunda classe vamos estudar um caso em que $\mathcal{A}(x, 0) = 0$.

Na demonstração dos dois próximos teoremas denotaremos por $e \in H_0^1(\Omega) \cap C^{2,\tau}(\overline{\Omega})$ a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 \text{ em } \Omega, \\ e = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Pelo princípio do Máximo $e > 0$ em Ω, veja [61], Teorema 3.1.

O próximo teorema generaliza o Teorema 4.1 em [46] para $(P)_p$, pois, trabalharmos com o termo $\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})$ e não exigimos a restrição $1 \leq q(x) < \frac{Np}{N-p} = p^*$ de [46].

Teorema 1.6 *Suponha que $r(x), q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \alpha(x), \beta(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ tais que*

$$0 < \alpha^+ + \beta^+ < 1.$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua e pelo menos uma das condições abaixo ocorra:

(A_1) *Existe uma constante* $a_0 > 0$, *tal que*

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \ \ em \ \overline{\Omega} \times [0,\infty).$$

(A_2) *Existem constantes* $a_1, a_\infty > 0$, *tais que*

$$\mathcal{A}(x,0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \ em \ \overline{\Omega} \times (0,\infty) \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \ \ uniformemente \ em \ \overline{\Omega}.$$

Então, o problema $(P)_s$ *possui uma solução fraca positiva.*

Demonstração: Supondo inicialmente que (A_1) ocorre, demonstraremos este teorema aplicando o Teorema 1.5. A demonstração será dividida em três etapas que são necessárias para aplicarmos o Teorema 1.5.

1ª Etapa: Construção de $\overline{u}$.

Seja $e \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\tau}(\overline{\Omega})$ a única solução do problema (1.5). Como $e \in L^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$, $|e|_{L^{q(x)}}$ e $|e|_{L^\infty}$ são números reais positivos. Desde que $\alpha(x), \beta(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, as funções

$$\begin{array}{rcl} |e|^{\alpha(.)}_{L^{q(x)}}, \ |e|^{\beta(.)}_{L^\infty} \quad \overline{\Omega}: & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |e|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}, \ |e|^{\beta(x)}_{L^\infty}, \end{array}$$

são contínuas. Logo, existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$|e|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \leq C_1 \quad \text{e} \quad |e|^{\beta(x)}_{L^\infty} \leq C_2, \ \ \forall \ \ x \in \overline{\Omega}.$$

Por hipótese $0 < \alpha^+ + \beta^+ < 1$. Escolhendo uma constante

$$R \geq \max\left\{ \left(\frac{C_1 C_2}{a_0}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha^+ + \beta^+)}}, 1 \right\},$$

obtemos

$$-\Delta(Re) \geq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} (Re)^{\beta(x)} |Re|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall \ \ w \in L^\infty(\Omega). \tag{1.6}$$

De fato, basta notar que para essa escolha de R,

$$R^{1-(\alpha^+ + \beta^+)} \geq \frac{C_1 C_2}{a_0} \geq \frac{|e|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} |e|_{L^\infty}^{\beta(x)}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \text{ em } \Omega, \ \forall \ w \in L^\infty(\Omega).$$

Assim,

$$R \geq \frac{R^{\alpha^+} |e|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} R^{\beta^+} e(x)^{\beta(x)}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \text{ em } \Omega, \ \forall \ w \in L^\infty(\Omega),$$

como $R \geq 1$ e $-\Delta e = 1$ em Ω, obtemos (1.6).

Definindo $\overline{u} = Re$, para cada $w \in L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \overline{u}^{\beta(x)} |\overline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} > 0 \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

2ª Etapa: Construção de $\underline{u}$.

Seja $K = \max\{\mathcal{A}(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, |\overline{u}|_{L^{r(x)}}]\}$. Dada $w \in [0, \overline{u}]$, onde $[0, \overline{u}] := \{w \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq w(x) \leq \overline{u}(x) \text{ q.t.p em } \Omega\}$, temos $|w|_{L^{r(x)}} \leq |\overline{u}|_{L^{r(x)}}$, e assim,

$$a_0 \leq \mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}}) \leq K \text{ em } \Omega, \ \forall \ w \in [0, \overline{u}].$$

Seja $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma autofunção associado ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Como λ_1 é simples e isolado podemos supor que $\varphi_1 > 0$ em Ω, $|\varphi_1|_{L^\infty} \leq 1$ e $|\varphi_1|_{L^{q(x)}} \leq 1$. Escolhendo

$$0 < \epsilon \leq \min\left\{ \left(\frac{|\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha^+}}{\lambda_1 |\varphi_1|_{L^\infty}^{1-\beta^+} K} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha^+ + \beta^+)}}, 1 \right\},$$

teremos

$$-\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} (\epsilon\varphi_1)^{\beta(x)} |\epsilon\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall \ w \in [0, \overline{u}]. \tag{1.7}$$

De fato, para essa escolha de ϵ,

$$\lambda_1 \epsilon^{1-(\alpha^+ + \beta^+)} |\varphi_1|_{L^\infty}^{1-\beta^+} \leq \frac{1}{K} |\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha^+} \text{ em } \Omega.$$

Para obter (1.7), observemos que para cada $w \in [0, \overline{u}]$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \epsilon \varphi_1(x) &\leq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \epsilon^{\beta^+} \varphi_1(x)^{\beta^+} \epsilon^{\alpha^+} |\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha^+} \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} (\epsilon \varphi_1(x))^{\beta(x)} |\epsilon \varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)}.
\end{aligned}$$

Definindo $\underline{u} = \epsilon \varphi_1$, para cada $w \in [0, \overline{u}]$

$$\begin{cases}
-\Delta \underline{u} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \underline{u}^{\beta(x)} |\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\
\underline{u} > 0 \text{ em } \Omega, \\
\underline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.
\end{cases}$$

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Diminuindo ϵ se necessário, tal que $\lambda_1 \epsilon |\varphi_1|_{L^\infty} \leq R$, temos $-\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq -\Delta(Re)$ em Ω e, pelo Princípio de Comparação,

$$\underline{u} := \epsilon \varphi_1 \leq Re =: \overline{u}.$$

Portanto, $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub e supersolução para o problema $(P)_s$. Pelo Teorema 1.5, o problema (Ps) possui uma solução fraca positiva $u \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ com

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

Demonstração do Teorema 1.6 no caso em que (A_2) ocorre

Suponhamos que (A_2) ocorra. Seguiremos um argumento análogo ao caso (A_1). Mas trocaremos a 1ª etapa pela 2ª etapa, ou seja, primeiro construiremos uma subsolução e depois uma supersolução.

1ª Etapa: Construção de $\underline{u}$.

Seja $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)\bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a autofunção associado a λ_1 como na 2ª etapa do caso (A_1). Seja $\epsilon > 0$, tal que

$$0 < \epsilon \leq \min\left\{\left(\frac{|\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha^+}}{\lambda_1|\varphi_1|_{L^\infty}^{1-\beta^+}a_1}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha^++\beta^+)}}, 1\right\}.$$

Como em (1.7),

$$-\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq \frac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})}(\epsilon\varphi_1)^{\beta(x)}|\epsilon\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall\, w \in L^\infty(\Omega). \tag{1.8}$$

De fato, para essa escolha de ϵ,

$$\lambda_1\epsilon^{1-(\alpha^++\beta^+)}|\varphi_1|_{L^\infty}^{1-\beta^+} \leq \frac{1}{a_1}|\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha^+} \ \text{ em } \ \Omega.$$

Para obter (1.8), basta notar que para cada $w \in L^\infty(\Omega)$,

$$\lambda_1\epsilon\varphi_1(x) \leq \frac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})}\epsilon^{\beta^+}\varphi_1(x)^{\beta^+}\epsilon^{\alpha^+}|\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha^+} \ \text{ em } \ \Omega.$$

Definindo $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$, para cada $w \in L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})}\underline{u}^{\beta(x)}|\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \underline{u} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \underline{u} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

2ª Etapa: Construção de $\overline{u}$.

Como $\lim_{t\to\infty}\mathcal{A}(x,t) = a_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, tomando $\tau = \dfrac{a_\infty}{2}$, existe $M = M(\tau) > 0$ suficientemente grande, tal que

$$|\mathcal{A}(x,t) - a_\infty| \leq \frac{a_\infty}{2} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}\times[M,\infty)$$

e assim

$$\mathcal{A}(x,t) \geq \frac{a_\infty}{2} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}\times[M,\infty).$$

Seja $m = \min\Big\{\mathcal{A}(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times \big[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, M\big]\Big\} > 0$. Tomando $k = \min\left\{m, \frac{a_\infty}{2}\right\}$,

$$\mathcal{A}(x,t) \geq k > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \times \big[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, \infty\big).$$

Sejam $e(x)$, C_1 e C_2 como na 1ª etapa do caso (A_1). Definindo $\overline{u} = Re$, com

$$R \geq \max\left\{\left(\frac{C_1 C_2}{k}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha^+ + \beta^+)}}, 1\right\},$$

$$-\Delta(Re) \geq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})}(Re)^{\beta(x)}|Re|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in L^\infty(\Omega);\ \underline{u} \leq w,$$

ou seja, para cada $w \in L^\infty(\Omega)$; $\underline{u} \leq w$

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})}\overline{u}^{\beta(x)}|\overline{u}|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} > 0 \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Escolhendo $R > 0$, tal que $\lambda_1 \epsilon |\varphi_1|_{L^\infty} \leq R$, obtemos $-\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq -\Delta(Re)$ em Ω. Pelo Princípio de Comparação

$$\underline{u} := \epsilon\varphi_1 \leq Re =: \overline{u}.$$

Portanto, $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub e supersolução para (Ps). Pelo Teorema 1.5, $(P)_s$ possui uma solução fraca positiva $u \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ com

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

$\square$

1.3 Aplicação 1.2 do Teorema 1.5: O problema côncavo e convexo

Nesta seção faremos nossa segunda aplicação do Teorema 1.5. Estudaremos o problema não local côncavo e convexo

$$(P)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r(x)}})\Delta u = \lambda|u|^{\beta(x)-1}u|u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + \mu|u|^{\eta(x)-1}u|u|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Um caso particular e importante do problema $(P)_{\lambda,\mu}$ é o problema

$$(P_0)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{\beta-1}u + \mu|u|^{\eta-1}u \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda, \mu, \beta, \eta \in \mathbb{R}$ e $0 < \beta < 1 < \eta$. Quando $1 < \eta \leq \frac{N+2}{N-2}$, o funcional associado a $(P_0)_{\lambda,\mu}$ é

$$I_{\lambda,\mu} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$I_{\lambda,\mu}(u) = \int_\Omega \Big[\frac{|\nabla u|^2}{2} - \frac{\lambda|u|^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{\mu|u|^{\eta+1}}{\eta+1}\Big]dx.$$

O problema $(P_0)_{\lambda,\mu}$ foi estudado por vários pesquisadores, veja por exemplo [15], [17].

Em [15], Ambrosetti-Brezis-Cerami mostraram que existe uma constante $\Lambda > 0$, tal que $(P_0)_{\lambda,1}$ (com $\mu = 1$) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (0, \Lambda]$. Para encontrar uma solução positiva eles usaram a técnica de sub e supersolução, via iteração monotônica. Neste caso, os parâmetros $0 < \beta < 1 < \eta$ são arbitrários. Uma segunda solução positiva foi obtida por argumentos variacionais (via Teorema do Passo da Montanha), mas com a restrição $1 < \eta \leq \frac{N+2}{N-2}$. Ambrosetti-Brezis-Cerami também mostraram que quando $1 < \eta \leq \frac{N+2}{N-2}$ existe uma constante $\lambda^* > 0$ suficientemente pequeno $(0 < \lambda << \mu = 1)$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, $(P_0)_{\lambda,1}$ possui infinitas soluções (não necessariamente positivas) com energia negativa. E quando $1 < \eta < \frac{N+2}{N-2}$, eles também provaram que existe $\lambda^* > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$, $(P_0)_{\lambda,1}$ possui infinitas soluções com energia positiva.

Em [17], Bartsch-Willem mostraram que para cada $\lambda > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$, $(P_0)_{\lambda,\mu}$ possui uma sequência de soluções (u_k) tal que $I_{\lambda,\mu}(u_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$. E para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu > 0$,

$(P_0)_{\lambda,\mu}$ possui uma sequência de soluções (v_k) tal que $I_{\lambda,\mu}(v_k) < 0$ quando $k \to \infty$.

Outro caso particular e interessante de $(P)_{\lambda,\mu}$ é o problema

$$(P_1)_{\lambda,1} \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u^{\beta} + \int_{\Omega} u^s \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}, \beta \geq 1$ e $s > 0$, que combina um termo local e um não local. Este problema foi estudado em alguns trabalhos, veja por exemplo [49] e algumas de suas referências. Em [49], os autores fizeram uma revisão dos estudos anteriores de $(P_1)_{\lambda,1}$ e apresentaram novos resultados relativos a existência de solução positiva para $(P_1)_{\lambda,1}$ fazendo várias hipóteses sobre os parâmetros λ, β e s. Nesse trabalho, eles utilizaram basicamente argumento de ponto fixo, sub e supersolução e teoria de bifurcação.

Note que $(P)_{\lambda,\mu}$ não é, em geral, variacional. Vamos estudar $(P)_{\lambda,\mu}$ para duas classes distintas de funções $\mathcal{A}$. Na primeira classe $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ em $\overline{\Omega} \times [0, b_0]$, para alguma constante $b_0 > 0$. Na segunda classe estudaremos um caso em que $\mathcal{A}(x, 0) = 0$.

Nosso resultado relativo ao problema $(P)_{\lambda,\mu}$ é o seguinte

Teorema 1.7 *Suponha que $r(x)$, $q(x)$, $s(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \alpha(x)$, $\gamma(x)$, $\beta(x)$, $\eta(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ tais que*

$$0 < \alpha^- + \beta^- \leq \alpha^+ + \beta^+ < 1.$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua. Temos as seguintes situações:

(A_1) Suponha que $1 < \eta^- + \gamma^-$ e existem constantes $a_0, b_0 > 0$, tais que

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times [0, b_0].$$

Então, dado $\mu > 0$ existe $\lambda_0 > 0$, tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$ o problema $(P)_{\lambda,\mu}$ possui uma solução fraca positiva $u_{\lambda,\mu}$.

(A_2) Suponha que $1 < \eta^+ + \gamma^+$ e existem constantes $a_1, a_\infty > 0$, tais que

$$\mathcal{A}(x, 0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times (0, \infty) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to \infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \ \text{ uniformemente em } \ \overline{\Omega}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ existe $\mu_0 > 0$, tal que para cada $\mu \in (0, \mu_0)$ o problema $(P)_{\lambda,\mu}$ possui uma solução fraca positiva $u_{\lambda,\mu}$.

Demonstração: Suponha inicialmente que (A_1) ocorre. A demonstração será feita usando o Teorema 1.5. Para isso, dividiremos a demonstração em três etapas.

1ª Etapa: Construção de $\overline{u}$.

Seja $e \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a única solução de (1.5). Para cada constante $M > 0$

$$-\Delta(Me) = M \text{ em } \Omega.$$

Vamos obter $M > 0$, tal que

$$M \geq \frac{1}{a_0}\left(\lambda(Me)^{\beta(x)}|Me|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + \mu(Me)^{\eta(x)}|Me|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}}\right) \text{ em } \Omega. \tag{1.9}$$

Para $0 < M \leq 1$, a relação (1.9) ocorre quando

$$M \geq \frac{1}{a_0}\left(\lambda M^{\beta^- + \alpha^-}|e|^{\beta(x)}_{L^\infty}|e|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + \mu M^{\eta^- + \gamma^-}|e|^{\eta(x)}_{L^\infty}|e|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}}\right) \text{ em } \Omega. \tag{1.10}$$

Agora, observe que tomando

$$R = \max\left\{|e|_{L^\infty},\ |e|_{L^{q(x)}},\ |e|_{L^{s(x)}},\ 1\right\}, \tag{1.11}$$

a relação (1.10) ocorre quando

$$M \geq \frac{1}{a_0}\left(\lambda M^{\beta^- + \alpha^-}R^{\eta^+ + \gamma^+} + \mu M^{\eta^- + \gamma^-}R^{\eta^+ + \gamma^+}\right),$$

ou ainda,

$$1 \geq \frac{1}{a_0}\left(\lambda M^{\beta^- + \alpha^- - 1}R^{\eta^+ + \gamma^+} + \mu M^{\eta^- + \gamma^- - 1}R^{\eta^+ + \gamma^+}\right). \tag{1.12}$$

Logo, se (1.12) ocorre para $0 < M \leq 1$, a relação (1.9) também ocorre. Provaremos que a relação (1.12) ocorre.

De fato, defina a função $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(M) = \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+}\lambda}{a_0} M^{\beta^- + \alpha^- - 1} + \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+}\mu}{a_0} M^{\eta^- + \gamma^- - 1},$$

como φ é de classe C^1 e por hipótese $0 < \alpha^- + \beta^- < 1 < \eta^- + \gamma^-$, então

$$\lim_{M \to 0^+} \varphi(M) = \lim_{M \to \infty} \varphi(M) = \infty.$$

Assim, φ possui um ponto de mínimo $M_{\lambda,\mu} = M(\lambda, \mu) > 0$, que satisfaz $\varphi'(M_{\lambda,\mu}) = 0$. Mas

$$\varphi'(M_{\lambda,\mu}) = 0 \Leftrightarrow M_{\lambda,\mu} = c_1 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{(\eta^- + \gamma^-) - (\beta^- + \alpha^-)}},$$

onde $c_1 = \left(\frac{1 - (\beta^- + \alpha^-)}{(\eta^- + \gamma^-) - 1} \right)^{\frac{1}{(\eta^- + \gamma^-) - (\beta^- + \alpha^-)}}$.

Recorde que desejamos obter $0 < M \leq 1$ que satisfaça (1.10). Observe que

$$0 < M_{\lambda,\mu} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq \mu \left[\frac{(\eta^- + \gamma^-) - 1}{1 - (\beta^- + \alpha^-)} \right]. \tag{1.13}$$

Também precisamos que M satisfaça $\varphi(M) \leq 1$ para obtermos (1.12). Note que

$$\varphi(M_{\lambda,\mu}) = \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+}\lambda}{a_0} \left[c_1 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{(\eta^- + \gamma^-) - (\beta^- + \alpha^-)}} \right]^{\beta^- + \alpha^- - 1} + \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+}\mu}{a_0} \left[c_1 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{(\eta^- + \gamma^-) - (\beta^- + \alpha^-)}} \right]^{\eta^- + \gamma^- - 1},$$

ou seja,

$$\varphi(M_{\lambda,\mu}) = \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+} c_2}{a_0} \left[\frac{\lambda^{(\eta^- + \gamma^-) - 1}}{\mu^{(\beta^- + \alpha^-) - 1}} \right]^{\frac{1}{(\eta^- + \gamma^-) - (\beta^- + \alpha^-)}},$$

onde $c_2 = c_1^{(\beta^- + \alpha^-) - 1} + c_1^{(\eta^- + \gamma^-) - 1}$.

Assim,

$$\varphi(M_{\lambda,\mu}) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+} c_2}{a_0} \left[\frac{\lambda^{(\eta^- + \gamma^-) - 1}}{\mu^{(\beta^- + \alpha^-) - 1}} \right]^{\frac{1}{(\eta^- + \gamma^-) - (\beta^- + \alpha^-)}} \leq 1. \tag{1.14}$$

Como $0 < \alpha^- + \beta^- < 1 < \eta^- + \gamma^-$, dado $\mu > 0$, segue das relações (1.13) e (1.14), que existe $\lambda_0 = \lambda_0(\mu) > 0$, tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$ o par (λ, μ) satisfaz

$$0 < M_{\lambda,\mu} \leq 1 \quad \text{e} \quad \varphi(M_{\lambda,\mu}) \leq 1, \quad \forall \ \lambda \in (0, \lambda_0].$$

Portanto, pelos argumentos anteriores, $M_{\lambda,\mu}$ satisfaz (1.12). Assim, $M_{\lambda,\mu}$ satisfaz (1.9).

Desde que

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times [0, b_0],$$

podemos escolher $\lambda_0 > 0$ pequeno, tal que para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$,

$$\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}}) \geq a_0 > 0, \ \ \forall \ w \in [0, M_{\lambda,\mu}e],$$

onde $\big[0, M_{\lambda,\mu}e\big] := \big\{w \in L^\infty(\Omega) : 0 \leq w(x) \leq M_{\lambda,\mu}e(x) \ \text{ q.t.p em } \ \Omega\big\}$.

De fato, como $M_{\lambda,\mu} \to 0$ quando $\lambda \to 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que $|M_{\lambda_0,\mu}e|_{L^{r(x)}} \leq b_0$. Desde que a função $\lambda \mapsto M_{\lambda,\mu}$ é crescente,

$$|M_{\lambda,\mu}e|_{L^{r(x)}} \leq |M_{\lambda_0,\mu}e|_{L^{r(x)}} \leq b_0, \ \ \forall \ \lambda \in (0, \lambda_0).$$

Assim, dado $w \in \big[0, M_{\lambda,\mu}e\big]$, temos $|w|_{L^{r(x)}} \leq b_0$. Logo, $\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}}) \geq a_0 > 0$.

Usando esse fato e (1.9) com $M = M_{\lambda,\mu}$, obtemos para cada $w \in \big[0, M_{\lambda,\mu}e\big]$,

$$M_{\lambda,\mu} \geq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \left(\lambda (M_{\lambda,\mu}e)^{\beta(x)} |M_{\lambda,\mu}e|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + \mu (M_{\lambda,\mu}e)^{\eta(x)} |M_{\lambda,\mu}e|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} \right) \ \text{em } \Omega.$$

Portanto, definindo $\overline{u} = \overline{u}(\lambda, \mu) := M_{\lambda,\mu}e$, temos para cada $w \in [0, \overline{u}]$,

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \lambda \overline{u}^{\beta(x)} |\overline{u}|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} + \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \mu \overline{u}^{\eta(x)} |\overline{u}|^{\gamma(x)}_{L^{s(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \overline{u} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \overline{u} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

2ª Etapa: Construção de $\underline{u}$.

Seja $K = \max\big\{\mathcal{A}(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times \big[0, |\overline{u}|_{L^{r(x)}}\big]\big\}$. Para cada $w \in [0, \overline{u}]$, temos

$|w|_{L^{r(x)}} \leq |\overline{u}|_{L^{r(x)}}$, logo,

$$a_0 \leq \mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}}) \leq K \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [0, \overline{u}].$$

Seja $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma autofunção associado ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Como λ_1 é simples e isolado podemos supor que $\varphi_1 > 0$ em Ω, $|\varphi_1|_{L^\infty} \leq 1$ e $|\varphi_1|_{L^{q(x)}} \leq 1$. Por hipótese $0 < \alpha^+ + \beta^+ < 1$. Seja $\epsilon = \epsilon(\lambda) > 0$, tal que

$$0 < \epsilon \leq \min \left\{ \left(\frac{\lambda |\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha^+}}{\lambda_1 |\varphi_1|_{L^\infty}^{1-\beta^+} K} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha^+ + \beta^+)}}, 1 \right\}.$$

Como em (1.7),

$$-\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \lambda (\epsilon\varphi_1)^{\beta(x)} |\epsilon\varphi_1|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall\ w \in [0, \overline{u}].$$

Assim, definindo $\underline{u} = \underline{u}(\lambda) = \epsilon\varphi_1$, para cada $w \in [0, \overline{u}]$,

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \lambda \underline{u}^{\beta(x)} |\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \mu \underline{u}^{\eta(x)} |\underline{u}|_{L^{q(x)}}^{\gamma(x)} \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} > 0 \text{ em } \Omega. \\ \underline{u} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Dado $\lambda \in (0, \lambda_0]$, diminuindo $\epsilon = \epsilon(\lambda)$, se necessário, de modo que $\lambda_1 \epsilon |\varphi_1|_{L^\infty} \leq M_{\lambda,\mu}$, temos $-\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq -\Delta(M_{\lambda,\mu} e)$ em Ω. Pelo Princípio de Comparação

$$\underline{u} := \epsilon\varphi_1 \leq M_{\lambda,\mu} e =: \overline{u}.$$

Portanto, $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub e supersolução para $(P)_{\lambda,\mu}$. Pelo Teorema 1.5, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0]$, existe uma solução fraca positiva $u_{\lambda,\mu} \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ para $(P)_{\lambda,\mu}$ com

$$\underline{u} \leq u_{\lambda,\mu} \leq \overline{u}.$$

Demonstração do Teorema 1.7 no caso em que (A_2) ocorre

Agora, suponha que (A_2) ocorre. Neste caso, como $\mathcal{A}(x,0)=0$, não temos a limitação da função $\mathcal{A}$ próximo de 0, isso requer uma atenção a mais quando tentarmos construir uma supersolução para $(P)_{\lambda,\mu}$. Vamos adaptar os argumentos anteriores e usar o parâmetro μ para construírmos uma supersolução. Primeiro vamos construir a subsolução.

1ª Etapa: Construção de $\underline{u}$.

Seja $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)\bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma autofunção associado a λ_1 como na 2ª etapa do caso (A_1). Dado $\lambda>0$, escolhendo $\epsilon=\epsilon(\lambda)>0$, tal que

$$0<\epsilon\leq \min\left\{\left(\frac{\lambda|\varphi_1|^{\alpha^+}_{L^{q(x)}}}{\lambda_1|\varphi_1|^{1-\beta^+}_{L^\infty}a_1}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha^++\beta^+)}},1\right\},$$

obtemos

$$-\Delta(\epsilon\varphi_1)\leq \frac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})}\lambda(\epsilon\varphi_1)^{\beta(x)}|\epsilon\varphi_1|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \text{ em } \Omega,\ \ \forall\, w\in L^\infty(\Omega).$$

Definindo $\underline{u}=\underline{u}(\lambda):=\epsilon\varphi_1$, para cada $w\in L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u}\leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})}\lambda\underline{u}^{\beta(x)}|\underline{u}|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}+\dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r(x)}})}\mu\underline{u}^{\eta(x)}|\underline{u}|^{\gamma(x)}_{L^{q(x)}} \text{ em } \Omega,\\ \underline{u}>0 \text{ em } \Omega,\\ \underline{u}=0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{cases}$$

2ª Etapa: Construção de $\overline{u}$.

Como $\lim_{t\to\infty}\mathcal{A}(x,t)=a_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, tomando $\tau=\dfrac{a_\infty}{2}$, existe $M=M(\tau)>0$ suficientemente grande, tal que

$$|\mathcal{A}(x,t)-a_\infty|\leq\frac{a_\infty}{2} \text{ em } \overline{\Omega}\times[M,\infty),$$

assim,

$$\mathcal{A}(x,t)\geq\frac{a_\infty}{2}, \text{ em } \overline{\Omega}\times[M,\infty).$$

Seja $m_\lambda=\min\big\{\mathcal{A}(x,t):(x,t)\in\overline{\Omega}\times\big[|\underline{u}|_{L^{r(x)}},M\big]\big\}>0$. Tomando $k_\lambda=\min\left\{m_\lambda,\frac{a_\infty}{2}\right\}$, temos

$$\mathcal{A}(x,t) \geq k_\lambda > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times \big[|\underline{u}|_{L^{r(x)}}, \infty\big).$$

Sejam $e(x) \in H_0^1(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a única solução de (1.5). Desejamos obter uma constante $T > 0$, tal que, para cada $w \in L^\infty(\Omega)$ com $\underline{u} \leq w$,

$$T \geq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \left(\lambda (Te)^{\beta(x)} |Te|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + \mu (Te)^{\eta(x)} |Te|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)}\right) \text{ em } \Omega. \tag{1.15}$$

Esta relação ocorre quando $T \geq 1$ e

$$1 \geq \frac{1}{k_\lambda} \left(\lambda T^{\beta^+ + \alpha^+ - 1} R^{\eta^+ + \gamma^+} + \mu T^{\eta^+ + \gamma^+ - 1} R^{\eta^+ + \gamma^+}\right), \tag{1.16}$$

onde $R = \max\big\{|e|_{L^\infty}, |e|_{L^{q(x)}}, |e|_{L^{s(x)}}, 1\big\}$.

Defina a função $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(t) = \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+} \lambda}{k_\lambda} t^{\beta^+ + \alpha^+ - 1} + \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+} \mu}{k_\lambda} t^{\eta^+ + \gamma^+ - 1}.$$

Por hipótese $0 < \alpha^+ + \beta^+ < 1 < \eta^+ + \gamma^+$. Seguindo os mesmos argumentos feitos no caso (A_1) para a função φ, concluímos que ψ possui um ponto de mínimo $T_{\lambda,\mu}$ dado por

$$T_{\lambda,\mu} = c_3 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{(\eta^+ + \gamma^+) - (\beta^+ + \alpha^+)}},$$

onde $c_3 = \left(\frac{1 - (\beta^+ + \alpha^+)}{(\eta^+ + \gamma^+) - 1}\right)^{\frac{1}{(\eta^+ + \gamma^+) - (\beta^+ + \alpha^+)}}$. Recorde que neste caso, por (1.16), desejamos obter

$$T \geq 1 \ \text{ e } \ \psi(T) \leq 1.$$

Note que

$$T_{\lambda,\mu} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq \mu \left[\frac{(\eta^+ + \gamma^+) - 1}{1 - (\beta^+ + \alpha^+)}\right] > 0 \tag{1.17}$$

e

$$\psi(T_{\lambda,\mu}) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{R^{\eta^+ + \gamma^+} c_4}{k_\lambda} \left[\frac{\lambda^{(\eta^+ + \gamma^+) - 1}}{\mu^{(\beta^+ + \alpha^+) - 1}}\right]^{\frac{1}{(\eta^+ + \gamma^+) - (\beta^+ + \alpha^+)}} \leq 1. \tag{1.18}$$

Pelas relações (1.17) e (1.18) concluímos que dado $\lambda > 0$ existe $\mu_0 = \mu_0(\lambda) > 0$, tal que para cada $\mu \in (0, \mu_0)$, o par (λ, μ) satisfaz

$$T_{\lambda,\mu} \geq 1 \ \text{ e } \ \psi(T_{\lambda,\mu}) \leq 1.$$

Pelos argumentos anteriores, $T_{\lambda,\mu}$ satisfaz (1.15). Logo, dada $w \in L^{\infty}(\Omega)$ com $\underline{u}_{\lambda} \leq w$

$$T_{\lambda,\mu} \geq \frac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \left(\lambda (T_{\lambda,\mu} e)^{\beta(x)} |T_{\lambda,\mu} e|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + \mu (T_{\lambda,\mu} e)^{\eta(x)} |T_{\lambda,\mu} e|_{L^{s(x)}}^{\gamma(x)} \right) \text{ em } \Omega.$$

Definindo $\overline{u} = \overline{u}(\lambda, \mu) := T_{\lambda,\mu} e$, para cada $w \in L^{\infty}(\Omega)$ com $\underline{u} \leq w$,

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \lambda \overline{u}^{\beta(x)} |\overline{u}|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} + \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} \mu \overline{u}^{\eta(x)} |\overline{u}|_{L^{q(x)}}^{\gamma(x)} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill \overline{u} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill \overline{u} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Como $T_{\lambda,\mu} \to \infty$ quando $\mu \to 0^+$, podemos escolher $\mu_0 = \mu_0(\lambda) > 0$, tal que, $\lambda_1 \epsilon |\varphi_1|_{L^{\infty}} \leq T_{\lambda,\mu_0}$, logo, $-\Delta(\epsilon\varphi_1) \leq -\Delta(T_{\lambda,\mu_0} e)$ em Ω. Pelo Princípio de Comparação

$$\underline{u} := \epsilon\varphi_1 \leq T_{\lambda,\mu_0} e.$$

Desde que a função $\mu \to T_{\lambda,\mu}$ é decrescente, temos

$$\underline{u} \leq T_{\lambda,\mu_0} e \leq T_{\lambda,\mu} e := \overline{u}, \ \ \forall \, \mu \in (0, \mu_0).$$

Portanto, $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub e supersolução para $(P)_{\lambda,\mu}$. Pelo Teorema 1.5, existe uma solução fraca positiva $u_{\lambda,\mu} \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^{\infty}(\Omega)$ para $(P)_{\lambda,\mu}$, com

$$\underline{u} \leq u_{\lambda,\mu} \leq \overline{u},$$

o que prova o teorema no caso em que (A_2) ocorre. $\square$

Observação 1.4 *Na relação* (1.14), *como* a_0 *não depende de* λ, *dado* $\mu > 0$ *existe* $\lambda_0 > 0$, *tal que para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0]$ *o par* (λ, μ) *satisfaz* (1.14). *Já na relação* (1.18), *como* k_λ *depende de* λ, *não podemos garantir a existência de tal* λ_0, *com o par* (λ, μ) *satisfazendo* (1.18). *Mas dado* $\lambda > 0$ *existe* $\mu_0 > 0$, *tal que para cada* $\mu \in (0, \mu_0]$ *o par* (λ, μ) *satisfaz* (1.18).

No caso (A_1) *a limitação* $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ *em* $\overline{\Omega} \times [0, b_0]$, *nos permite diminuir* $\epsilon = \epsilon(\lambda)$ *de modo que* $\underline{u} := \epsilon\varphi_1 \leq M_{\lambda,\mu} e =: \overline{u}$, *mas, exige que a supersolução* $\overline{u}$ *verifique* $|\overline{u}|_{L^{r(x)}} \leq b_0$, *já que podemos ter* $\mathcal{A}(x,t) = 0$ *para* $t > 0$ *suficientemente grande. Por esse motivo encontramos* $M_{\lambda,\mu} \in (0,1]$. *Como* $M_{\lambda,\mu} \to 0$ *quando* $\lambda \to 0$, *temos a solução* $u_{\lambda,\mu}$ *de* $(P)_{\lambda,\mu}$ *satisfaz* $|u_{\lambda,\mu}|_{L^\infty} \to 0$ *quando* $\lambda \to 0$ *como acontece no caso local, veja [15].*

No caso (A_2) *para* $\lambda > 0$ *pequeno, como* $\epsilon = \epsilon(\lambda)$ *e* $\mathcal{A}(x,0) = 0$, *não podemos diminuir* ϵ *de modo* $\underline{u} := \epsilon\varphi_1 \leq T_{\lambda,\mu} e =: \overline{u}$, *pois* $\mathcal{A}(x,t) \geq k_\lambda$ *em* $\overline{\Omega} \times [|\underline{u}_\lambda|_{L^{r(x)}}, \infty)$ *e* $T_{\lambda,\mu}$ *depende de* λ *como mostra a relação (1.18). Para conseguirmos a comparação entre a sub e a supersolução tomamos* $T_{\lambda,\mu}$ *suficientemente grande.*

Os argumentos das demonstrações dos casos (A_1) *e* (A_2) *do Teorema 1.7, mostram que se tivermos* $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ *em* $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$ *e* $1 < \eta^+ + \gamma^+$, *então, dado* $\lambda > 0$ *existe* $\mu_0 > 0$ *suficientemente pequeno, tal que, para cada* $\mu \in (0, \mu_0)$ *o problema* $(P)_{\lambda,\mu}$ *possui uma solução fraca positiva* $u_{\lambda,\mu}$. *Note que nessa situação, podemos ter* $0 \leq \eta^- + \gamma^- \leq 1$.

1.4 Aplicação 1.3 do Teorema 1.5: Uma generalização da equação logística clássica

Nas duas aplicações anteriores do nosso Teorema 1.5, consideramos pelo menos uma das condições $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ ou $0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_\infty$. Nesta seção faremos a terceira e última aplicação do Teorema 1.5 em que não há a necessidade da limitação inferior ou superior para a função $\mathcal{A}(x,t)$. Nesta aplicação podemos ter

$$\mathcal{A}(x,0) \geq 0, \quad \lim_{t\to 0^+} \mathcal{A}(x,t) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = \pm\infty.$$

Além disso, estudaremos uma versão de (P) que generaliza a equação logística clássica

$$(P)_1 \qquad \begin{cases} -\Delta u = u(\gamma - u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Mais precisamente, estudaremos o problema não local

$$(P')_\lambda \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r(x)}})\Delta u = \lambda f(u)|u|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

com a classe de funções f estudada em [31], mas sem exigir a limitação global para a função $\mathcal{A}$ e que $f \in C^1$ como em [31].

Assumiremos que existe uma constante $\theta > 0$ tal que a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz

(f_1) $f \in C^0([0,\theta],\mathbb{R})$.

(f_2) $f(0) = f(\theta) = 0$, $f'(0) > 0$ ($f'(0) \in (0,\infty]$ e $f(s) > 0\ \forall s \in (0,\theta)$.

Exemplo 1.1 *As funções* $f_1(t) = t(\gamma - t)$ *e* $f_2(t) = \mu t^q - t^p$; $0 < q < 1 < p$ *e* $\gamma,\mu > 0$ *pertencem a classe de funções* f *considerada acima e fornecem equações logísticas. Para* f_1 *temos* $\theta = \gamma$ *e* $f_1'(0) = \gamma$. *Para* f_2 *temos* $\theta = \mu^{\frac{1}{p-q}}$ *e* $f_2'(0) = \infty$.

É conhecido, veja por exemplo [20] ou [27] (Teorema 11.3) que o problema $(P)_1$ possui uma solução positiva u se, e somente se, $\gamma > \lambda_1$. Além disso, u é única e

$$0 < u \leq \gamma \text{ em } \Omega,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Em [31], Chipot-Corrêa estudaram o seguinte problema não local

$$(P)_\lambda \qquad \begin{cases} -\mathfrak{A}(x,u)\Delta u = \lambda f(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

assumindo que existem constantes $a_0, a_\infty > 0$, tais que

$$a_0 \leq \mathfrak{A}(x,u) \leq a_\infty, \ \forall\, u \in L^p(\Omega) \text{ q.t.p em } \Omega,$$

onde a função $x \mapsto \mathfrak{A}(x,u); x \in \Omega$, é mensurável e a função $u \mapsto \mathfrak{A}(x,u); u \in L^p(\Omega)$, é contínua. Eles mostraram, usando o Teorema do ponto fixo de Schauder, que se $\lambda > \dfrac{\lambda_1 a_\infty}{f'(0)}$ o problema $(P)_\lambda$ possui uma solução positiva $0 < u(x) \leq \theta$ em Ω, veja o Teorema 2.1 em [31].

Nosso resultado relativo ao problema $(P')_\lambda$ é o seguinte

Teorema 1.8 *Suponha que* $r(x), q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ *e a função* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *satisfaz* (f_1) *e* (f_2). *Suponha ainda que a função* $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua e*

$$\mathcal{A}(x,t) > 0 \ \text{ em } \ \overline{\Omega} \times \big(0, |\theta|_{L^{r(x)}}\big].$$

Então, existe $\lambda_0 > 0$, *tal que, para cada* $\lambda \geq \lambda_0$, *o problema* $(P')_\lambda$ *possui uma solução fraca positiva* u_λ *com*

$$0 < u_\lambda \leq \theta.$$

Demonstração: Faremos a demonstração aplicando o Teorema 1.5. Assim, precisamos construir $\underline{u}$ e $\overline{u}$ e, em seguida, ordená-las.

1ª Etapa: Construção de $\underline{u}$.

Provaremos que um problema local possui solução positiva aplicando o Teorema 1.5. Em seguida, usaremos a solução deste problema local para construirmos a subsolução do problema não local $(P')_\lambda$.

Dado $\delta > 0$ defina $\underline{\lambda} := \dfrac{\lambda_1}{f'(0)} + \delta$ quando $f'(0) \in \mathbb{R}$ e $\underline{\lambda} := \delta$ quando $f'(0) = \infty$.

Afirmamos que o problema

$$(P_2)_{\underline{\lambda}} \qquad \begin{cases} -\Delta u = \underline{\lambda} f(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \quad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma solução fraca $\varphi = \varphi_{\underline{\lambda}}$, tal que

$$0 < \varphi \leq \theta \text{ em } \Omega. \tag{1.19}$$

De fato, observe que $\theta > 0$ é uma supersolução de $(P_2)_{\underline{\lambda}}$, pois $f(\theta) = 0$. Observe também que como $f'(0) > \dfrac{\lambda_1}{\underline{\lambda}}$ e $f(0) = 0$, existe $\tau > 0$, tal que

$$\frac{f(t)}{t} \geq \frac{\lambda_1}{\underline{\lambda}}, \ \ \forall\, t \in (0, \tau].$$

Tomando $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon|\varphi_1|_{L^\infty} \leq \tau$, onde φ_1 é a autofunção associada a λ_1, temos

$$\frac{f(\epsilon\varphi_1)}{\epsilon\varphi_1} \geq \frac{\lambda_1}{\underline{\lambda}} \ \text{ em } \ \Omega,$$

logo,

$$-\Delta(\epsilon\varphi_1) = \lambda_1(\epsilon\varphi_1) \leq \underline{\lambda} f(\epsilon\varphi_1) \ \text{ em } \ \Omega,$$

assim, $\epsilon\varphi_1$ é uma subsolução de $(P_2)_{\underline{\lambda}}$.

Portanto, diminuindo ϵ se necessário de modo que $\epsilon\varphi_1 \leq \theta$, podemos aplicar o Teorema 1.5 no caso particular em que $\mathcal{A}(x, u) \equiv 1$, $\alpha(x) \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$ e $f_1 \equiv \underline{\lambda} f$ para obtermos uma solução fraca $\varphi = \varphi_{\underline{\lambda}}$ de $(P_2)_{\underline{\lambda}}$ verificando (1.19).

Agora, como $|\varphi|_{L^{q(x)}}$ é um número real positivo e a função $\alpha(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, a função

$$\begin{aligned} |\varphi|_{L^{q(x)}}^{\alpha(.)} : \ \overline{\Omega} \ &\to \ \mathbb{R}^+ \\ x \ &\mapsto |\varphi|_{L^{q(x)}}^{\alpha(x)} \end{aligned}$$

é contínua. Logo, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|\varphi|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} \geq C \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Sejam $K = \max\left\{\mathcal{A}(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times [|\varphi|_{L^{r(x)}}, |\theta|_{L^{r(x)}}]\right\}$, $\mu = \frac{K}{C}$ e $\varphi = \varphi_{\underline{\lambda}}$ a solução de $(P_2)_{\underline{\lambda}}$. Note que

$$-\Delta\varphi = \underline{\lambda} f(\varphi) = \frac{\underline{\lambda}\mu f(\varphi)|\varphi|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}}{K} \frac{K}{\mu|\varphi|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}}.$$

Como $\mu = \frac{K}{C}$, temos $\frac{K}{\mu|\varphi|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}} \leq 1$. Logo,

$$-\Delta\varphi \leq \underline{\lambda}\mu \frac{f(\varphi)|\varphi|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}}{K}.$$

Assim, para cada $\lambda \geq \underline{\lambda}\mu$, temos

$$-\Delta\varphi \leq \lambda \frac{f(\varphi)|\varphi|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})}, \quad \forall\, w \in [\varphi, \theta].$$

Definindo $\underline{u} := \varphi = \varphi_{\underline{\lambda}}$, a função $\underline{u}$ é uma subsolução de $(P')_\lambda$, para cada $\lambda \geq \underline{\lambda}\mu$.

2ª Etapa: Construção de $\overline{u}$.

Como $f(\theta) = 0$ segue que $\overline{u} := \theta$ é uma supersolução de $(P')_\lambda$, pois

$$-\Delta\overline{u} = 0 = \lambda \frac{f(\overline{u})}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r(x)}})} |\overline{u}|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}}, \quad \forall\, w \in [\varphi, \theta].$$

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Por (1.19),

$$\underline{u} := \varphi_{\underline{\lambda}} \leq \theta =: \overline{u}.$$

Portanto, $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub e supersolução para o problema $(P')_\lambda$. Pelo Teorema 1.5, para cada $\lambda \geq \lambda_0 := \underline{\lambda}\mu$, existe uma solução fraca positiva $u_\lambda \in H^1_0(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ do problema $(P')_\lambda$ com

$$\varphi_{\underline{\lambda}} \leq u_\lambda \leq \theta.$$

□

Capítulo

2

Solução positiva para uma classe de problemas elípticos não locais envolvendo os espaços generalizados de Lebesgue: O sistema

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução positiva para a seguinte classe de sistemas elípticos não locais associado ao problema (P)

$$(S) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = f_1(x,u,v)|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + f_2(x,u,v)|v|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = g_1(x,u,v)|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + g_2(x,u,v)|u|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, $N \geq 1$, $|.|_{L^{m(x)}}$ é a norma de Luxemburg no espaço generalizado de Lebesgue $L^{m(x)}(\Omega)$ e as funções $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1, f_2, g_1, g_2 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $r_i, q_i, s_i, \alpha_i, \gamma_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Como comentamos no Capítulo I, nas últimas décadas, muitos fenômenos da Física, Biologia, Química e da Engenharia foram formuladas em modelos matemáticos não locais, veja [18], [19], [23], [32], [33], [35], [57], [58], [60], [74] e suas referências.

Assim como o caso escalar (uma simples equação), os sistemas não locais vem sendo bastante estudados, veja [22], [26], [46], [47] e [58]. Por exemplo, o seguinte sistema parabólico não local

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a|v|_{L^p}^{\alpha} & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ v_t = \Delta v^n + b|u|_{L^q}^{\beta} & \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = v(x,t) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $m,n > 1$, $p,q \geq 1$, $\alpha,\beta,a,b > 0$ e u_0, v_0 são funções não negativas e limitadas, foi estudado em [58] por Deng-Lie-Xie. A versão estacionária desse sistema, isto é, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u^m = a|v|_{L^p}^{\alpha} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v^n = b|u|_{L^q}^{\beta} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

foi estudado em [47] por Corrêa-Lopes, via um teorema de Rabinowitz, veja o Teorema B.12 no Apêndice B.

Em [26], Chen-Gao estudaram, via método de Galerkin e sub e supersolução com a iteração monotônica, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = f_1(x,u)|v|_{L^{\alpha_1}}^{p_1} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v = f_2(x,v)|u|_{L^{\alpha_2}}^{p_2} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < p_i < 1 < \alpha_i < \frac{2N}{N-1}$ quando $N \geq 3$ e $1 \leq \alpha_i < \infty$ quando $N = 1,2$. Eles também estudaram o caso em que $p_i = \alpha_i = 1,\ i = 1,2$.

Uma da motivações para estudarmos o sistema (S) foi o sistema não local

$$(S)_{p_1,p_2} \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u = |v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta_{p_2} v = |u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

que está associado ao problema escalar

$$
(P_p) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{\alpha(x)}_{L^{q(x)}} & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad\quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

Ambos, (P_p) e $(S)_{p_1,p_2}$, foram estudados em [46] por Corrêa-Figueiredo-Lopes, onde eles utilizaram o método de sub e supersolução com a iteração monotônica, para provar um resultado de existência para o caso escalar e um teorema de Rabinowitz, veja o Teorema B.12 no Apêndice B, para o sistema $(S)_{p_1,p_2}$.

Neste capítulo vamos enunciar e demonstrar um teorema de sub e supersolução para o sistema (S) que nos fornece solução positiva para (S). Faremos três aplicações desse teorema.

Para enunciarmos o principal resultado deste capítulo, precisamos definir solução positiva para o sistema (S).

Diremos que um par de funções (u, v) é uma solução fraca positiva para o sistema (S) quando $u, v \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ com $u, v > 0$ em Ω e

$$
\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left(\frac{f_1(x,u,v)|v|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{\mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_1(x)}})} + \frac{f_2(x,u,v)|v|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}}{\mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_1(x)}})} \right) \varphi, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)
$$

e

$$
\int_\Omega \nabla v \nabla \psi = \int_\Omega \left(\frac{g_1(x,u,v)|u|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}}}{\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})} + \frac{g_2(x,u,v)|u|^{\gamma_2(x)}_{L^{s_2(x)}}}{\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})} \right) \psi, \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega).
$$

Nosso principal resultado neste capítulo é o teorema

Teorema 2.1 *Suponha que $r_i(x), q_i(x), s_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, $0 \le \alpha_i(x), \gamma_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, os pares $(\underline{u}, \underline{v}), (\overline{u}, \overline{v})$ formam um par de sub e supersolução para o sistema (S) com $\underline{u}, \underline{v} > 0$ em Ω e $f_i(x,t,s), g_i(x,t,s) \ge 0$ em $\overline{\Omega} \times [0, |\overline{u}|_{L^\infty}] \times [0, |\overline{v}|_{L^\infty}]$. Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua e*

$$
\mathcal{A}(x,t) > 0 \ em\ \overline{\Omega} \times \big[\underline{\sigma}, \overline{\sigma}\big],
$$

onde $\underline{\sigma} := \min\big\{|\underline{w}|_{L^{r_1(x)}}, |\underline{w}|_{L^{r_2(x)}}\big\}$ e $\overline{\sigma} := \max\big\{|\overline{w}|_{L^{r_1(x)}}, |\overline{w}|_{L^{r_2(x)}}\big\}$. Então, o sistema (S)

possui uma solução fraca positiva (u, v) *com*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad e \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

Para a definição de subsolução e supersolução para o sistema (S) veja a Seção 2.1.

Faremos três aplicações do teorema 2.1 que estão nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4. Para facilitar a leitura do nosso trabalho faremos um pequeno resumo dessas aplicações do Teorema 2.1.

Para simplificar o enunciado dos próximos teoremas usaremos as seguintes natações

$$w^- = \min_{\overline{\Omega}} w(x) \quad \text{e} \quad w^+ = \max_{\overline{\Omega}} w(x),$$

onde $w(x) \in C^0(\overline{\Omega})$.

Na Seção 2.2 faremos nossa primeira aplicação do Teorema 2.1. Estudaremos um sistema que está associado ao sistema $(S)_{p_1,p_2}$ estudado em [46]. Nós estudaremos o sistema

$$(Ss) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = (u^{\beta_1(x)} + v^{\gamma_1(x)})|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = (u^{\beta_2(x)} + v^{\gamma_2(x)})|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

para duas classes distintas de funções $\mathcal{A}$.

Nosso resultado relativo ao sistema (Ss) é o seguinte

Teorema 2.2 *Suponha que* $r_i(x), q_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ *e* $0 \leq \alpha_i(x), \beta_i(x), \gamma_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ *tais que*

$$0 < \alpha_i^+ + \beta_i^+, \alpha_i^+ + \gamma_i^+ < 1, \quad i = 1, 2.$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua e que pelos menos uma das condições abaixo ocorra:*

(A_1) *Existe uma constante* $a_0 > 0$*, tal que*

$$\mathcal{A}(x, t) \geq a_0 > 0 \quad em \quad \overline{\Omega} \times [0, \infty).$$

(A_2) *Existem constantes* $a_1, a_\infty > 0$, *tais que*

$$\mathcal{A}(x,0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \text{ em } \overline{\Omega} \times (0,\infty) \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Então, o sistema (Ss) *possui uma solução fraca positiva* (u, v).

Na Seção 2.3 faremos nossa segunda aplicação do Teorema 2.1. Estudaremos um sistema associado ao problema $(P)_{\lambda,\mu}$ estudado na Seção 1.3. Estudaremos o sistema

$$(S)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = \lambda u^{\beta_1(x)-1}u|v|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} + \mu v^{\eta_1(x)-1}v|v|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}} \text{ em } \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = \lambda v^{\beta_2(x)-1}v|u|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} + \mu u^{\eta_2(x)-1}u|u|^{\gamma_2(x)}_{L^{s_2(x)}} \text{ em } \Omega, \\ u, v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

também para duas classes distintas de funções $\mathcal{A}$.

Nosso resultado relativo ao sistema $(S)_{\lambda,\mu}$ é o seguinte

Teorema 2.3 *Suponha que* $r_i(x)$, $q_i(x)$, $s_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ *e* $0 \leq \alpha_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\eta_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, *tais que*

$$0 < \alpha_i^- + \beta_i^- \leq \alpha_i^+ + \beta_i^+ < 1.$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua. Temos as seguintes situações:*

(A_1) *Suponha que* $1 < \eta_i^- + \gamma_i^-$ *e existem constantes* $a_0, b_0 > 0$, *tais que*

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \text{ em } \overline{\Omega} \times [0, b_0].$$

Então, dado $\mu > 0$ *existe* $\lambda_0 > 0$, *tal que para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *o sistema* $(S)_{\lambda,\mu}$ *possui uma solução fraca positiva* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$.

(A_2) *Suponha que* $1 < (\eta_1^+ + \gamma_1^+)(\eta_2^+ + \gamma_2^+)$ *e existem constantes* $a_1, a_\infty > 0$, *tais que*

$$\mathcal{A}(x,0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \text{ em } \overline{\Omega} \times (0,\infty) \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ *existe* $\mu_0 > 0$, *tal que para cada* $\mu \in (0, \mu_0)$ *o sistema* $(S)_{\lambda,\mu}$ *possui uma solução fraca positiva* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$.

Na Seção 2.4 faremos nossa terceira e última aplicação do Teorema 2.1. Estudaremos um sistema associado ao problema $(P')_\lambda$, estudado na Seção 1.4. Estudaremos o sistema de equações logísticas

$$(S')_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = \lambda f_1(u)|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} \text{ em } \Omega, \\ -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = \mu f_2(v)|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} \text{ em } \Omega, \\ \qquad u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nesta aplicação podemos ter

$$\mathcal{A}(x,0) \geq 0, \ \lim_{t\to 0}\mathcal{A}(x,t) = \infty \text{ e } \lim_{t\to 0}\mathcal{A}(x,t) = \pm\infty.$$

Assumiremos que existem constantes $\theta_i > 0$, tais que as funções $f_i : [0,\infty) \to \mathbb{R}, i = 1,2$ satisfazem

(H_1) $f_i \in C^0([0,\theta_i],\mathbb{R})$

(H_2) $f_i(0) = f_i(\theta) = 0$, $f_i'(0) > 0$ ($f_i'(0) \in \mathbb{R}$ ou $f_i'(0) = \infty$) e $f_i(s) > 0\ \forall s \in (0,\theta_i)$,

onde $i = 1,2$.

Nosso resultado relativo ao sistema $(S')_{\lambda,\mu}$ é o seguinte

Teorema 2.4 *Suponha que* $r_i(x), q_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ $0 \leq \alpha_i \in C^0(\overline{\Omega})$, *as funções* $f_i : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *satisfazem* (H_1) *e* (H_2). *Suponha ainda que a função* $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua e*

$$\mathcal{A}(x,t) > 0 \ \textit{ em } \ \overline{\Omega} \times (0,\overline{\sigma}],$$

onde $\overline{\sigma} = \max\{|\theta_i|_{L^{r_i(x)}} : i = 1,2\}$. *Então, existem* $\lambda_0, \mu_0 > 0$ *tais que, para cada* $\lambda \geq \lambda_0$ *e* $\mu \geq \mu_0$ *o sistema* $(S')_{\lambda,\mu}$ *possui uma solução fraca positiva* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$, *tal que*

$$0 < u_{\lambda,\mu} \leq \theta_1 \ \textit{ e } \ 0 < v_{\lambda,\mu} \leq \theta_2 \ \textit{ em } \ \Omega.$$

2.1 Teorema de sub e supersolução para o sistema

Nesta seção, enunciaremos e demonstraremos um teorema de sub e supersolução para o sistema (S). Na demonstração desse teorema, usaremos novamente o Teorema do ponto fixo de Schaefer adaptando os argumentos da demonstração do Teorema 1.5 para o sistema. Para isso, definiremos um operador adequado associado a um sistema linear, de modo que ponto fixo desse operador seja solução fraca do sistema (S).

Iniciaremos com algumas definições.

Definição 2.1 *Dizemos que o par de funções (u, v) é uma solução fraca positiva para o sistema (S) quando $u, v \in H_0^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ com $u, v > 0$ em Ω e*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left(\frac{f_1(x, u, v)|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)}}{\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})} + \frac{f_2(x, u, v)|v|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}}{\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})} \right) \varphi, \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi = \int_\Omega \left(\frac{g_1(x, u, v)|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)}}{\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})} + \frac{g_2(x, u, v)|u|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}}{\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})} \right) \psi, \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Definição 2.2 *Dadas $z, \theta \in L^\infty(\Omega)$, com $z \leq \theta$, definimos*

$$[z, \theta] := \big\{ w \in L^\infty(\Omega) : \ z(x) \leq w(x) \leq \theta(x) \ \ q.t.p \ em \ \Omega \big\}$$

e

$$[z, \infty) := \big\{ w \in L^\infty(\Omega) : \ z(x) \leq w(x) \ \ q.t.p \ em \ \Omega \big\}.$$

Definição 2.3 *Dizemos que $\big[(\underline{u}, \underline{v}), (\overline{u}, \overline{v})\big]$ é um par de sub e supersolução para o sistema (S), respectivamente, quando $\underline{u}, \underline{v} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\overline{u}, \overline{v} \in H^1(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ com*

a) $\underline{u} \leq \overline{u}$, $\ \underline{v} \leq \overline{v}$ *e* $\ \underline{u} = 0 \leq \overline{u}$, $\underline{v} = 0 \leq \overline{v}$ *sobre* $\partial\Omega$,

b) *Dadas $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ com $\varphi, \psi \geq 0$, temos*

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \varphi \leq \int_\Omega \left(\frac{f_1(x, \underline{u}, w)|\underline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})} + \frac{f_2(x, \underline{u}, w)|\underline{v}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})} \right) \varphi, \quad \forall\, w \in [\underline{v}, \overline{v}], \\ \\ \int_\Omega \nabla \underline{v} \nabla \psi \leq \int_\Omega \left(\frac{g_1(x, w, \underline{v})|\underline{u}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})} + \frac{g_2(x, w, \underline{v})|\underline{u}|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})} \right) \psi, \quad \forall\, w \in [\underline{u}, \overline{u}] \end{cases} \tag{2.1}$$

e

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi \geq \int_\Omega \left(\frac{f_1(x,\overline{u},w)|\overline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_1(x)}})} + \frac{f_2(x,\overline{u},w)|\overline{v}|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_1(x)}})} \right)\varphi, \quad \forall\, w \in [\underline{v},\overline{v}], \\ \\ \int_\Omega \nabla\overline{v}\nabla\psi \geq \int_\Omega \left(\frac{g_1(x,w,\overline{v})|\overline{u}|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_2(x)}})} + \frac{g_2(x,w,\overline{v})|\overline{u}|^{\gamma_2(x)}_{L^{s_2(x)}}}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_2(x)}})} \right)\psi, \quad \forall\, w \in [\underline{u},\overline{u}]. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Observação 2.1 *Para facilitar a leitura, vamos enunciar novamente o Teorema 2.1 já enunciado na introdução. Agora ele passará a ser chamado de Teorema 2.5. Também vamos enunciar novamente os outros teoremas nas respectivas seções.*

Neste capítulo usaremos as notações

$$w^- = \min_{\overline{\Omega}} w(x) \ \text{ e } \ w^+ = \max_{\overline{\Omega}} w(x),$$

onde $w(x) \in C^0(\overline{\Omega})$. E denotaremos por

$$\underline{w}(x) = \min\{\underline{u}(x), \underline{v}(x)\} \ \text{ e } \ \overline{w}(x) = \max\{\overline{u}(x), \overline{v}(x)\}.$$

Nosso principal resultado neste capítulo é o seguinte

Teorema 2.5 *Suponha que* $r_i(x), q_i(x), s_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha_i(x), \gamma_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, *os pares* $(\underline{u},\underline{v}), (\overline{u},\overline{v})$ *formam um par de sub e supersolução para o sistema* (S) *com* $\underline{u},\underline{v} > 0$ *em* Ω *e* $f_i(x,t,s), g_i(x,t,s) \geq 0$ *em* $\overline{\Omega} \times [0,|\overline{u}|_{L^\infty}] \times [0,|\overline{v}|_{L^\infty}]$. *Suponha ainda que a função* $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua e*

$$\mathcal{A}(x,t) > 0 \ \textit{em}\ \overline{\Omega} \times \left[\underline{\sigma}, \overline{\sigma}\right],$$

onde $\underline{\sigma} := \min\left\{|\underline{w}|_{L^{r_1(x)}}, |\underline{w}|_{L^{r_2(x)}}\right\}$ *e* $\overline{\sigma} := \max\left\{|\overline{w}|_{L^{r_1(x)}}, |\overline{w}|_{L^{r_2(x)}}\right\}$. *Então, o sistema* (S) *possui uma solução fraca positiva* (u,v) *com*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad e \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

Demonstração: Consideremos os operadores truncamentos

$$T, S : L^2(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$$

$$Tz(x) = \begin{cases} \underline{u}(x) & \text{se} \quad z(x) \leq \underline{u}(x), \\ z(x) & \text{se} \quad \underline{u}(x) \leq z(x) \leq \overline{u}(x), \\ \overline{u}(x) & \text{se} \quad z(x) \geq \overline{u}(x) \end{cases}$$

e

$$Sw(x) = \begin{cases} \underline{v}(x) & \text{se} \quad w(x) \leq \underline{v}(x), \\ w(x) & \text{se} \quad \underline{v}(x) \leq w(x) \leq \overline{v}(x), \\ \overline{v}(x) & \text{se} \quad w(x) \geq \overline{v}(x). \end{cases}$$

Pela definição de T e S,

$$\underline{u} \leq Tz \leq \overline{u} \quad \text{e} \quad \underline{v} \leq Sw \leq \overline{v} \ \text{ em } \Omega, \ \ \forall\, z, w \in L^2(\Omega).$$

Como $\underline{w} = \min\{\underline{u}, \underline{v}\}$ e $\overline{w} = \max\{\overline{u}, \overline{v}\}$, então,

$$\underline{w} \leq Tz, Sw \leq \overline{w} \ \text{ em } \Omega, \ \ \forall\, z, w \in L^2(\Omega)$$

e desde que $\underline{w}, \overline{w} \in L^\infty(\Omega)$, temos $Tz, Sw \in L^\infty(\Omega)$. Logo, os operadores T e S estão bem definidos. Como $\underline{w} > 0$ em Ω

$$|\underline{w}|_{L^\infty} \leq |Tz|_{L^\infty}, |Sw|_{L^\infty} \leq |\overline{w}|_{L^\infty}, \ \ \forall\, z, w \in L^2(\Omega).$$

Além disso, usando a definição da norma $|.|_{L^{m(x)}}$, temos

$$|\underline{w}|_{L^{m(x)}} \leq |Tz|_{L^{m(x)}}, |Sw|_{L^{m(x)}} \leq |\overline{w}|_{L^{m(x)}}, \ \forall \ \ z, w \in L^2(\Omega), \ m(x) \in C_+(\overline{\Omega}).$$

Sejam os operadores $H_1, H_2 : [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}] \to L^2(\Omega)$ definidos por

$$H_1(u,v)(x) = \frac{f_1(x, u(x), v(x))|v|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})} + \frac{f_2(x, u(x), v(x))|v|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}}{\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})}$$

e

$$H_2(u,v)(x) = \frac{g_1(x,u(x),v(x))|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)}}{\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})} + \frac{g_2(x,u(x),v(x))|u|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}}{\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})}.$$

Afirmamos que os operadores $H_i, i = 1,2$ estão bem definidos e os operadores $(z,w) \mapsto H_i(Tz, Sw);\ (z,w) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ são contínuos de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

De fato, como $\mathcal{A}(x,t) > 0$ no compacto $\overline{\Omega} \times [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}]$ e a função $\mathcal{A}$ é contínua, existem constantes $k, K > 0$, tais que

$$k \leq \mathcal{A}(x,t) \leq K,\ \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}].$$

Dado $(u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, temos $u, v \in [\underline{w}, \overline{w}]$, logo, $|u|_{L^{r_i(x)}}, |v|_{L^{r_i(x)}} \in [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}]$, onde na hipótese do teorema $\underline{\sigma} := \min\{|\underline{w}|_{L^{r_i(x)}} : i = 1,2\}$ e $\overline{\sigma} := \max\{|\overline{w}|_{L^{r_i(x)}} : i = 1,2\}$. Assim,

$$0 < k \leq \mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_i(x)}}), \mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_i(x)}}) \leq K \ \text{ em } \overline{\Omega},\ \ \forall\ (u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}], i = 1,2.$$

Pela continuidade das funções $f_i(x,t,s), g_i(x,t,s)$ em $\overline{\Omega} \times [0, |\overline{u}|_{L^\infty}] \times [0, |\overline{v}|_{L^\infty}]$, existem constantes $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, tais que

$$|H_1(u,v)| \leq \frac{c_1|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + c_2|v|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}}{k} \ \text{ em } \overline{\Omega},\ \ \forall\ (u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$$

e

$$|H_2(u,v)| \leq \frac{c_3|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + c_4|u|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}}{k} \ \text{ em } \overline{\Omega},\ \ \forall\ (u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}],$$

logo,

$$|H_1(u,v)| \leq \frac{c_1|\overline{w}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + c_2|\overline{w}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}}{k} \ \text{ em } \overline{\Omega},\ \ \forall\ (u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$$

e

$$|H_2(u,v)| \leq \frac{c_3|\overline{w}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + c_4|\overline{w}|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}}{k} \ \text{ em } \overline{\Omega},\ \ \forall\ (u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}].$$

Como $|\overline{w}|_{L^{m(x)}}^{\tau(x)} \leq |\overline{w}|_{L^{m(x)}}^{\tau^-} + |\overline{w}|_{L^{m(x)}}^{\tau^+},\ \forall\ m(x) \in C_+(\overline{\Omega}), \tau(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, obtemos

$$|H_1(u,v)| \leq \frac{c_1(|\overline{w}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1^-} + |\overline{w}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1^+}) + c_2(|\overline{w}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1^-} + |\overline{w}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1^+})}{k} \ \text{ em } \overline{\Omega},\ \ \forall\ (u,v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$$

e

$$|H_2(u,v)| \le \frac{c_3(|\overline{w}|^{\alpha_2^-}_{L^{q_2(x)}} + |\overline{w}|^{\alpha_2^+}_{L^{q_2(x)}}) + c_4(|\overline{w}|^{\gamma_2^-}_{L^{s_2(x)}} + |\overline{w}|^{\gamma_2^+}_{L^{s_2(x)}})}{k} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \ \forall\,(u,v) \in [\underline{u},\overline{u}]\times[\underline{v},\overline{v}].$$

Definindo as constantes

$$K_1 = \frac{c_1(|\overline{w}|^{\alpha_1^-}_{L^{q_1(x)}} + |\overline{w}|^{\alpha_1^+}_{L^{q_1(x)}}) + c_2(|\overline{w}|^{\gamma_1^-}_{L^{s_1(x)}} + |\overline{w}|^{\gamma_1^+}_{L^{s_1(x)}})}{k}$$

e

$$K_2 = \frac{c_3(|\overline{w}|^{\alpha_2^-}_{L^{q_2(x)}} + |\overline{w}|^{\alpha_2^+}_{L^{q_2(x)}}) + c_4(|\overline{w}|^{\gamma_2^-}_{L^{s_2(x)}} + |\overline{w}|^{\gamma_2^+}_{L^{s_2(x)}})}{k},$$

temos

$$|H_1(u,v)| \le K_1 \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \ \forall\,(u,v) \in [\underline{u},\overline{u}]\times[\underline{v},\overline{v}]$$

e

$$|H_2(u,v)| \le K_2 \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \ \forall\,(u,v) \in [\underline{u},\overline{u}]\times[\underline{v},\overline{v}].$$

Como Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, os operadores H_i estão bem definidos.

Dado $(z,w) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, como $Tz \in [\underline{u},\overline{u}]$ e $Sw \in [\underline{v},\overline{v}]$, temos

$$|H_1(Tu,Sw)| \le K_1 \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \ \forall\,(u,v) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega) \tag{2.3}$$

e

$$|H_2(Tu,Sw)| \le K_2 \ \text{ em } \ \overline{\Omega}, \ \ \forall\,(u,v) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{2.4}$$

Agora, provaremos a continuidade dos operadores $(z,w) \mapsto H_i(Tz,Sw)$ de $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Vamos considerar o espaço $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ munido da norma

$$|(u,v)|_{L^2\times L^2} = |u|_{L^2} + |v|_{L^2},$$

com a qual ele é um espaço de Banach separável e reflexivo.

Sejam $(z_n,w_n) \to (z,w)$ em $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, então $z_n \to z$ em $L^2(\Omega)$ e

$w_n \to w$ em $L^2(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência

$$z_n(x) \to z(x) \text{ e } w_n(x) \to w(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Logo,

$$Tz_n(x) \to Tz(x) \text{ e } Sw_n(x) \to Sw(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Dada $m(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, temos

$$|Tz_n(x) - Tz(x)|^{m(x)},\ |Sw_n(x) - Sw(x)|^{m(x)} \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|Tz_n(x) - Tz(x)|^{m(x)} \leq 2|\overline{u}|_{L^\infty}^{m(x)} \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$|Sw_n(x) - Sw(x)|^{m(x)} \leq 2|\overline{v}|_{L^\infty}^{m(x)} \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\int_\Omega |Tz_n - Tz|^{m(x)},\ \int_\Omega |Sw_n - Sw|^{m(x)} \to 0.$$

Pela Proposição A.3 item v), veja o Apêndice A, temos

$$Tz_n \to Tz \text{ e } Sw_n \to Sw \text{ em } L^{m(x)}(\Omega),\ \forall\ m(x) \in C_+(\overline{\Omega}).$$

Pela continuidade das funções $f_i(x,t)$, $g_i(x,t)$ e $\mathcal{A}(x,t)$, $i = 1, 2$,

$$H_i(Tz_n, Sw_n) \to H_i(Tz, Sw) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Usando (2.3), (2.4) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$H_i(Tu_n, Sw_n) \to H_i(Tu, Sw) \text{ em } L^2(\Omega),$$

o que mostra a continuidade dos operadores $H_i(Tu, Sw)$ de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

Agora, dados $(z,w) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, considere o problema linear truncado

$$(S_L) \qquad \begin{cases} -\Delta u = H_1(Tz, Sw) \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = H_2(Tz, Sw) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Para cada $(z,w) \in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, por (2.3) e (2.4), $H_i(Tz, Sw) \in L^2(\Omega)$. Pelo Teorema de Riesz–Fréchet, veja o Teorema B.2 no Apêndice B, cada equação de (S_L) possui uma única solução fraca em $H_0^1(\Omega)$. Assim, esta bem definido o operador

$$\Phi : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$(z,w) \mapsto \Phi(z,w) = (u,v),$$

onde $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (S_L).

Note que um ponto fixo (u,v) do operador Φ é solução fraca do sistema truncado

$$(S_T) \qquad \begin{cases} -\Delta u = H_1(Tu, Sv) \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = H_2(Tu, Sv) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Provaremos que Φ possui um ponto fixo usando o teorema do ponto fixo de Schaefer.

O operador Φ tem as seguintes propriedades:

i) O operador Φ é compacto.

De fato, sejam $(z_n, w_n) \subset L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ uma sequência limitada e $(u_n, v_n) = \Phi(z_n, w_n)$. Pela definição de Φ,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega H_1(Tz_n, Sw_n)\varphi, \ \forall \, \varphi \in \ H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla \psi = \int_\Omega H_2(Tz_n, Sw_n)\psi, \ \forall \, \psi \in \ H_0^1(\Omega).$$

Tomando $\varphi = u_n$ e $\psi = v_n$, concluímos das estimativas de H_1 e H_2, isto é, de (2.3) e

(2.4), respectivamente, que

$$\|u_n\|^2 \leq K_1 |u_n|_{L^1} \quad e \quad \|v_n\|^2 \leq K_2 |v_n|_{L^1}, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

logo, as sequências (u_n) e (v_n) são limitadas em $H_0^1(\Omega)$. Assim a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Por imersão compacta,

$$u_n \to u \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \to v \text{ em } L^2(\Omega).$$

Logo,

$$\Phi(z_n, w_n) = (u_n, v_n) \to (u, v) \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o que mostra que Φ é compacto.

ii) O operador Φ é contínuo.

De fato, sejam $(z_n, w_n) \to (z, w)$ em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $(u_n, v_n) = \Phi(z_n, w_n)$ e $(u, v) = \Phi(z, w)$, então,

$$z_n \to z \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad w_n \to w \text{ em } L^2(\Omega).$$

Pela definição do operador Φ,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi = \int_\Omega H_1(Tz_n, Sw_n)\varphi, \ \forall\, \varphi \ \in \ H_0^1(\Omega),$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega H_1(Tz, Sw)\varphi, \ \forall\, \varphi \ \in \ H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla \psi = \int_\Omega H_2(Tz_n, Sw_n)\psi, \ \forall\, \psi \ \in \ H_0^1(\Omega),$$

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi = \int_\Omega H_2(Tz, Sw)\psi, \ \forall\, \psi \ \in \ H_0^1(\Omega).$$

Como na demonstração do Teorema 1.5, fazendo $\varphi = u_n$, $\psi = v_n$ e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\Big|\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n-u)\Big| \leq |H_1(Tz_n,Sw_n)-H_1(Tz,Sw)|_{L^2}|u_n|_{L^2}$$

e

$$\Big|\int_\Omega \nabla v_n \nabla(v_n-v)\Big| \leq |H_2(Tz_n,Sw_n)-H_2(Tz,Sw)|_{L^2}|v_n|_{L^2}.$$

Como no caso anterior (u_n) e (v_n) são limitadas em $H_0^1(\Omega)$, logo, também são limitadas em $L^2(\Omega)$. Pela continuidade dos operadores $(z,w)\mapsto H_i(Tz,Sw)$ de $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e as convergências de $z_n\to z$ e $w_n\to w$ em $L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u_n\nabla(u_n-u)\to 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla v_n\nabla(v_n-u)\to 0.$$

Da mesma forma, fazendo $\varphi=u$ e $\psi=v$,

$$\int_\Omega \nabla u_n\nabla u\to 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla v_n\nabla v\to 0.$$

Como

$$||u_n||^2=\int_\Omega \nabla u_n\nabla(u_n-u)+\int_\Omega \nabla u_n\nabla u \ \text{ e } \ ||v_n||^2=\int_\Omega \nabla v_n\nabla(v_n-v)+\int_\Omega \nabla v_n\nabla v$$

obtemos

$$||u_n||^2\to||u||^2 \quad \text{e} \quad ||v_n||^2\to||v||^2.$$

Portanto, concluimos que

$$u_n\to u \text{ em } H_0^1(\Omega) \ \text{ e } \ v_n\to v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$\Phi(z_n,u_n)=(u_n,v_n)\to(u,v)=\Phi(z,u) \text{ em } L^2(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

o que mostra que Φ é contínuo.

iii) Existe $R > 0$ tal que se

$$(u, v) = \theta\Phi(u, v) \ \text{ com } \ \theta \in [0, 1],$$

temos

$$|(u, v)|_{L^2 \times L^2} < R.$$

De fato, se $\theta = 0$, temos $(u, v) = (0, 0)$, se $\theta \neq 0$, temos

$$\Phi(u, v) = \Big(\frac{u}{\theta}, \frac{v}{\theta}\Big),$$

pela definição do operador Φ,

$$\int_\Omega \nabla\Big(\frac{u}{\theta}\Big)\nabla\varphi = \int_\Omega H_1(Su, Tv)\varphi, \ \forall\, \varphi \ \in \ H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega \nabla\Big(\frac{v}{\theta}\Big)\nabla\psi = \int_\Omega H_2(Su, Tv)\psi, \ \forall\, \psi \ \in \ H_0^1(\Omega).$$

Tomando $\varphi = u$ e $\psi = v$, obtemos

$$\|u\|^2 \leq \theta K_1 |u|_{L^1} \quad \text{e} \quad \|v\|^2 \leq \theta K_1 |v|_{L^1},$$

usando a desigualdade de Poincaré, concluímos que existe $R > 0$, tal que

$$|u|_{L^2} + |v|_{L^2} < R.$$

Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Schaefer, veja o Teorema B.6 no Apêndice B, existe $(u, v) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, tal que

$$\Phi(u, v) = (u, v) \quad \text{e} \quad |(u, v)|_{L^2 \times L^2} < R.$$

Pela definição do operador Φ, o par (u,v) satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = H_1(Tu,Sv) \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = H_2(Tu,Sv) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega \left(\frac{f_1(x,Tu,Sv)|Sv|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)}}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})} + \frac{f_2(x,Tu,Sv)|Sv|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})} \right) \varphi, \ \ \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.5)$$

e

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi = \int_\Omega \left(\frac{g_1(x,Tu,Sv)|Tu|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)}}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r_2(x)}})} + \frac{g_2(x,Tu,Sv)|Tu|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}}{\mathcal{A}(x,|Tu|_{L^{r_2(x)}})} \right) \psi, \ \ \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (2.6)$$

Afirmação:

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{e} \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

Para provar que $u \in [\underline{u},\overline{u}]$, vamos usar (2.5) e as definições de sub e supersolução para o sistema (S). De fato, como $Sv \in [\underline{v},\overline{v}]$, usando (2.5) e a primeira desigualdade na definição de subsolução com $w = Sv$, veja as relações em (2.1), para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega); \varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(\underline{u} - u)\nabla\varphi \ \ &\leq \ \ \int_\Omega \Big(\frac{f_1(x,\underline{u}(x),Sv(x))|\underline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} - f_1(x,Tu(x),Sv(x))|Sv|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)}}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})} \Big) \varphi \\ &+ \ \ \int_\Omega \Big(\frac{f_2(x,\underline{u}(x),Sv(x))|\underline{v}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)} - f_2(x,Tu(x),Sv(x))|Sv|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})} \Big) \varphi. \end{aligned}$$

Como $\underline{u}, u \in H_0^1(\Omega)$, pelo Corolário B.1, veja o Apêndice B, $(\underline{u} - u)_+ := \max\{(\underline{u} - u), 0\} \in H_0^1(\Omega)$. Tomando $\varphi = (\underline{u} - u)_+$, recordando que $f_i(x,t,s) \geq 0$ em $\overline{\Omega} \times [0, |\overline{u}|_{L^\infty}] \times$

$[0,|\overline{v}|_{L^\infty}]$, $Tu=\underline{u}$ em $\{x\in\Omega:\underline{u}(x)\geq u(x)\}$ e $Sv\in[\underline{v},\overline{v}]$, temos

$$\begin{aligned}
\|(\underline{u}-u)_+\|^2 &\leq \int_{\{x\in\Omega:\,\underline{u}(x)\geq u(x)\}} f_1(x,\underline{u}(x),Sv(x))\frac{(|\underline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}-|Sv|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}})}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})}(\underline{u}-u)\\
&+ \int_{\{x\in\Omega:\,\underline{u}(x)\geq u(x)\}} f_2(x,\underline{u}(x),Sv(x))\frac{(|\underline{v}|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}-|Sv|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}})}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})}(\underline{u}-u)\\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

logo, $(\underline{u}-u)_+=0$. Assim,

$$\underline{u}\leq u.$$

Novamente, como $Sv\in[\underline{v},\overline{v}]$, usando (2.5) e a primeira desigualdade da definição de supersolução, com $w=Sv$, veja as relações em (2.2), para cada $\varphi\in H_0^1(\Omega);\varphi\geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(u-\overline{u})\nabla\varphi &\leq \int_\Omega\Big(\frac{f_1(x,Tu(x),Sv(x))|Sv|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}-f_1(x,\overline{u}(x),Sv(x))|\overline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})}\Big)\varphi\\
&+ \int_\Omega\Big(\frac{f_2(x,Tu(x),Sv(x))|Sv|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}-f_2(x,\overline{u}(x),Sv(x))|\overline{v}|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})}\Big)\varphi.
\end{aligned}$$

Como $\overline{u}>0$ em Ω e $u\in H_0^1(\Omega)$, pelo Lema B.2, veja o Apêndice B, $(u-\overline{u})_+:=\max\{(u-\overline{u}),0\}\in H_0^1(\Omega)$. Tomando $\varphi=(u-\overline{u})_+$, recordando que $f_i(x,t,s)\geq 0$ em $\overline{\Omega}\times[0,|\overline{u}|_{L^\infty}]\times[0,|\overline{v}|_{L^\infty}]$, $Tu=\overline{u}$ em $\{x\in\Omega:u(x)\geq\overline{u}(x)\}$ e $Sv\in[\underline{v},\overline{v}]$, temos

$$\begin{aligned}
\|(u-\overline{u})_+\|^2 &\leq \int_{\{x\in\Omega:\,u(x)\geq\overline{u}(x)\}} f_1(x,\overline{u}(x),Sv(x))\frac{(|Sv|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}-|\overline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}})}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})}(u-\overline{u})\\
&+ \int_{\{x\in\Omega:\,u(x)\geq\overline{u}(x)\}} f_2(x,\overline{u}(x),Sv(x))\frac{(|Sv|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}-|\overline{v}|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}})}{\mathcal{A}(x,|Sv|_{L^{r_1(x)}})}(u-\overline{u})\\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

com isso, $(u-\overline{u})_+=0$. Logo,

$$u\leq\overline{u}.$$

Portanto,

$$\underline{u}\leq u\leq\overline{u}.$$

De modo análogo, usando (2.6) e as definições de sub e supersolução para o sistema

(S), mostra-se que

$$\underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

Pelas definições dos operadores T e S, $Tu = u$ e $Sv = v$. Portanto, o par (u, v) é solução fraca positiva do sistema (S) com

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \text{ e } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

$\square$

Observação 2.2 *Os mesmos argumentos feitos na Observação 1.3, relativa ao problema (P) (uma simples equação), mostram que a solução fraca positiva* (u, v) *do sistema* (S)*, encontrada no Teorema 2.5, é uma solução forte e que* $u, v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$.

2.2 Aplicação 2.1 do Teorema 2.5: O sistema sublinear

Neste seção, faremos nossa primeira aplicação do Teorema 2.5. Estudaremos o sistema

$$
(Ss) \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = (u^{\beta_1(x)} + v^{\gamma_1(x)})|v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = (u^{\beta_2(x)} + v^{\gamma_2(x)})|u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}
$$

Este sistema é uma generalização, para o operador Laplaciano $-\Delta$, do sistema

$$
(S_2) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u = |v|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta_{p_2} v = |u|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}
$$

estudado em [46]. Usando um teorema de Rabinowitz, veja o Teorema B.12 no Apêndice B, os autores mostraram a existência de solução positiva para (S_2), veja o Teorema 5.2 em [46].

Em [73], os autores estudaram, via sub e supersolução, um sistema de Kirchhoff semelhante a (Ss), com $\alpha_i \equiv 0$ e $\beta_i(x), \gamma_i(x)$ constantes.

Nas demonstrações dos dois teoremas a seguir, vamos denotar por $e \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a única solução de

$$
\begin{cases} -\Delta e = 1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ e = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}
$$

Note que pelo Princípio do Máximo $e > 0$ em Ω, veja [61], Teorema 3.1.

Nosso resultado relativo ao sistema (Ss) é o seguinte

Teorema 2.6 *Suponha que $r_i(x), q_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \alpha_i(x), \beta_i(x), \gamma_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ tais que*

$$
0 < \alpha_i^+ + \beta_i^+, \alpha_i^+ + \gamma_i^+ < 1, \ \ i = 1, 2.
$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ seja contínua e que pelos menos uma das condições abaixo ocorra:

(A_1) *Existe uma constante* $a_0 > 0$, *tal que*

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \ \ em \ \overline{\Omega} \times [0,\infty).$$

(A_2) *Existem constantes* $a_1, a_\infty > 0$, *tais que*

$$\mathcal{A}(x,0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \ em\, \overline{\Omega} \times (0,\infty) \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \ \ uniformemente\ em\ \overline{\Omega}.$$

Então, o sistema (Ss) *possui uma solução fraca positiva* (u,v).

Demonstração: Supondo inicialmente que (A_1) ocorra, demonstraremos este teorema aplicando o Teorema 2.5. A demonstração será dividida em três etapas.

1ª Etapa: Construção de $(\overline{u},\overline{v})$.

Seja $e \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a única solução de (2.7). Como $e \in L^{q_i(x)}(\Omega), L^\infty(\Omega), i = 1,2$, $|e|_{L^{q_1(x)}}, |e|_{L^{q_2(x)}}$ e $|e|_{L^\infty}$ são números reais positivos. Como as funções

$$\begin{array}{rcl} |e|_{L^{q_i(x)}}^{\alpha_i(.)},\ |e|_{L^\infty}^{\beta_i(.)},\ |e|_{L^\infty}^{\gamma_i(.)} :\ \overline{\Omega} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |e|_{L^{q_i(x)}}^{\alpha_i(x)},\ |e|_{L^\infty}^{\beta_i(x)},\ |e|_{L^\infty}^{\gamma_i(x)} \end{array}$$

são contínuas, existem constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$, tais que

$$|e|_{L^{q_i(x)}}^{\alpha_i(x)} \leq C_1, \ \ |e|_{L^\infty}^{\beta_i(x)} \leq C_2 \ \ \text{e} \ \ |e|_{L^\infty}^{\gamma_i(x)} \leq C_3, \ \ \forall \ x \in \overline{\Omega},\ i = 1,2.$$

Como por hipótese $0 < \alpha_i^+ + \beta_i^+, \alpha_i^+ + \gamma_i^+ < 1$, com $i = 1,2$,

$$\lim_{R\to\infty} R^{\alpha_i^+ + \beta_i^+ - 1} = 0 = \lim_{R\to\infty} R^{\alpha_i^+ + \gamma_i^+ - 1}, i = 1,2.$$

Assim, podemos escolher $R > 0$, suficientemente grande, tal que

$$1 \geq \frac{C_1 C_2}{a_0} R^{\alpha_i^+ + \beta_i^+ - 1} + \frac{C_1 C_3}{a_0} R^{\alpha_i^+ + \gamma_i^+ - 1},\ i = 1,2,$$

com isso, para cada $w \in L^{\infty}(\Omega)$,

$$\begin{cases} R \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_1(x)}})}\big((Re)^{\beta_1(x)} + (Re)^{\gamma_1(x)}\big)|Re|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ R \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_2(x)}})}\big((Re)^{\beta_2(x)} + (Re)^{\gamma_2(x)}\big)|Re|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases}$$

Definindo $\overline{u} = Re$ e $\overline{v} = Re$, temos

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_1(x)}})}(\overline{u}^{\beta_1(x)} + w^{\gamma_1(x)})|\overline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall\, w \in [0,\overline{v}], \\ \\ -\Delta\overline{v} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_2(x)}})}(w^{\beta_2(x)} + \overline{v}^{\gamma_2(x)})|\overline{u}|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall\, w \in [0,\overline{u}], \\ \hfill \overline{u},\overline{v} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill \overline{u} = \overline{v} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

2ª Etapa: Construção de $(\underline{u},\underline{v})$.

Note que $\overline{w} = Re$, onde nas hipóteses do Teorema 2.5 $\overline{w} = \max\{\overline{u},\overline{v}\}$. Seja $K = \max\left\{\mathcal{A}(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,\ \overline{\sigma}]\right\}$, onde $\overline{\sigma} = \max\{|\overline{w}|_{L^{r_i(x)}} : i = 1,2\}$. Dado $w \in [0,\overline{w}]$, temos $|w|_{L^{r_i(x)}} \leq \overline{\sigma}$. Logo,

$$a_0 \leq \mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_i(x)}}) \leq K \ \text{ em } \Omega,\ \forall\, w \in [0,\overline{w}], \ \ i = 1,2.$$

Seja $\varphi \in H^1_0(\Omega)\bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma autofunção associado ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$, tal que, $\varphi > 0$ em Ω, $|\varphi|_{L^\infty} \leq 1$ e $|\varphi|_{L^{q(x)}} \leq 1$. Escolhendo

$$0 < \epsilon \leq \min\left\{ \left(\frac{|\varphi|^{\alpha_1^+}_{L^{q_1(x)}}}{\lambda_1|\varphi|^{1-\beta_1^+}_{L^\infty}K}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha_1^+ + \beta_1^+)}}, \left(\frac{|\varphi|^{\alpha_2^+}_{L^{q_2(x)}}}{\lambda_1|\varphi|^{1-\gamma_2^+}_{L^\infty}K}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha_2^+ + \gamma_2^+)}}, 1\right\};\ i = 1,2,$$

para cada $w \in [0, \overline{w}]$,

$$\begin{cases} \lambda_1 \epsilon\varphi(x) \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})}(\epsilon\varphi(x))^{\beta_1(x)}|\epsilon\varphi|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} \text{ em } \Omega, \\ \\ \lambda_1 \epsilon\varphi(x) \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})}(\epsilon\varphi(x))^{\gamma_2(x)}|\epsilon\varphi|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Definindo $\underline{u} = \epsilon\varphi$ e $\underline{v} = \epsilon\varphi$, temos

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})}(\underline{u}^{\beta_1(x)} + w^{\gamma_1(x)})|\underline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [0, \overline{v}], \\ \\ -\Delta \underline{v} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})}(w^{\beta_2(x)} + \underline{v}^{\gamma_2(x)})|\underline{u}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [0, \overline{u}], \\ \hfill \underline{u}, \underline{v} > 0 \text{ em } \Omega, \\ \hfill \underline{u}, \underline{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que neste caso $\underline{w} = \epsilon\varphi$, onde nas hipóteses do Teorema 2.5, $\underline{w} = \min\{\underline{u}, \underline{v}\}$.

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Diminuindo ϵ se necessário, tal que, $\lambda_1 \epsilon |\varphi|_{L^\infty} \leq R$, temos, $-\Delta(\epsilon\varphi) \leq -\Delta(Re)$ em Ω. Pelo Princípio de Comparação $\underline{u} := \epsilon\varphi \leq Re =: \overline{u}$ e $\underline{v} := \epsilon\varphi \leq Re =: \overline{v}$.

Portanto, no caso (A_1), $(\underline{u}, \underline{v})$ e $(\overline{u}, \overline{v})$ formam um par de sub e supersolução para (Ss). Pelo Teorema 2.5, existe uma solução fraca positiva (u, v) para (Ss) com

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \ \text{ e } \ \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

Demonstração do Teorema 2.6 no caso em que (A_2) ocorre.

No caso (A_2) seguiremos o mesmo argumento do (A_1), mas trocaremos a 1ª e 2ª etapas.

1ª Etapa: Construção de $(\underline{u}, \underline{v})$.

Seja φ a autofunção associado a λ_1 considerada na 2ª etapa do caso (A_1). Escolhamos

$$0 < \epsilon \leq \min\left\{ \left(\frac{|\varphi|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1^+}}{\lambda_1 |\varphi|_{L^\infty}^{1-\beta_1^+} a_1} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha_1^+ + \beta_1^+)}}, \left(\frac{|\varphi|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2^+}}{\lambda_1 |\varphi|_{L^\infty}^{1-\gamma_2^+} a_1} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha_2^+ + \gamma_2^+)}}, 1 \right\};\ i = 1, 2,$$

Definindo $\underline{u} = \epsilon\varphi$ e $\underline{v} = \epsilon\varphi$, temos

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \le \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})}(\underline{u}^{\beta_1(x)} + w^{\gamma_1(x)})|\underline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [\underline{v}, \infty), \\ \\ -\Delta \underline{v} \le \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})}(w^{\beta_1(x)} + \underline{v}^{\gamma_2(x)})|\underline{u}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [\underline{u}, \infty), \\ \underline{u}, \underline{v} > 0 \text{ em } \Omega, \\ \underline{u}, \underline{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Note que neste caso $\underline{w} = \epsilon\varphi$, onde nas hipóteses do Teorema 2.5, $\underline{w} = \min\{\underline{u}, \underline{v}\}$.

2ª Etapa: Construção de $(\overline{u}, \overline{v})$.

Seja $\underline{\sigma} := \min\{|\underline{w}|_{r_i} : i = 1, 2\}$. Pelas condições sobre a função $\mathcal{A}$ no caso (A_2),

$$k := \min\left\{\mathcal{A}(x, t) : \ (x, t) \in \overline{\Omega} \times [\underline{\sigma}, \infty)\right\} > 0.$$

Escolhendo $R > 0$ tal que

$$1 \ge \frac{C_1C_2}{k} R^{\alpha_i^+ + \beta_i^+ - 1} + \frac{C_1C_3}{k} R^{\alpha_i^+ + \gamma_i^+ - 1}, \ \ i = 1, 2,$$

e definindo $\overline{u} = \overline{v} := Re$, onde $e(x)$, C_1, C_2 e C_3 são como na 1ª etapa do caso (A_1), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \ge \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})}(\overline{u}^{\beta_1(x)} + w^{\gamma_1(x)})|\overline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [\underline{v}, \overline{v}], \\ \\ -\Delta \overline{v} \ge \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})}(w^{\beta_2(x)} + \overline{v}^{\gamma_2(x)})|\overline{u}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [\underline{u}, \overline{u}], \\ \overline{u}, \overline{v} > 0 \text{ em } \Omega, \\ \overline{u}, \overline{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que $\overline{w} = Re$, onde nas hipótese do Teorema 2.5 $\overline{w} = \max\{\overline{u}, \overline{v}\}$. Assim, usando o Teorema 2.5, o teorema estará provado, no caso (A_2), se provarmos a próxima etapa.

3ª Etapa: $\underline{u} \le \overline{u}$ e $\underline{v} \le \overline{v}$.

De fato, escolhendo $R > 0$, tal que $\lambda_1 \epsilon |\varphi|_{L^\infty} \le R$, temos $-\Delta(\epsilon\varphi) \le -\Delta(Re)$ em Ω. Pelo Princípio de Comparação $\underline{u} := \epsilon\varphi \le Re =: \overline{u}$ e $\underline{v} := \epsilon\varphi \le Re =: \overline{v}$. $\square$

2.3 Aplicação 2.2 do Teorema 2.5: O sistema côncavo e convexo

Para a segunda aplicação do Teorema 2.5, estudaremos o sistema côncavo convexo

$$(S)_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x,|v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = \lambda u^{\beta_1(x)-1}u|v|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} + \mu v^{\eta_1(x)-1}v|v|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}} \text{ em } \Omega, \\ -\mathcal{A}(x,|u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = \lambda v^{\beta_2(x)-1}v|u|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} + \mu u^{\eta_2(x)-1}u|u|^{\gamma_2(x)}_{L^{s_2(x)}} \text{ em } \Omega, \\ \hfill u, v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este sistema está associado ao problema $(P)_{\lambda,\mu}$ estudado na Seção 1.3.

Teorema 2.7 *Suponha que* $r_i(x)$, $q_i(x)$, $s_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ *e* $0 \leq \alpha_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\eta_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, *tais que*

$$0 < \alpha_i^- + \beta_i^- \leq \alpha_i^+ + \beta_i^+ < 1.$$

Suponha ainda que a função $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua. Temos as seguintes situações:*
(A_1) *Suponha que* $1 < \eta_i^- + \gamma_i^-$ *e existem constantes* $a_0, b_0 > 0$, *tais que*

$$\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0 \ \ em \ \ \overline{\Omega} \times [0, b_0].$$

Então, dado $\mu > 0$ *existe* $\lambda_0 > 0$, *tal que para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *o sistema* $(S)_{\lambda,\mu}$ *possui uma solução fraca positiva* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$.
(A_2) *Suponha que* $1 < (\eta_1^+ + \gamma_1^+)(\eta_2^+ + \gamma_2^+)$ *e existem constantes* $a_1, a_\infty > 0$, *tais que*

$$\mathcal{A}(x,0) = 0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_1 \ \ em \ \ \overline{\Omega} \times (0,\infty) \quad e \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty \ \ uniformemente\ em\ \overline{\Omega}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ *existe* $\mu_0 > 0$, *tal que para cada* $\mu \in (0, \mu_0)$ *o sistema* $(S)_{\lambda,\mu}$ *possui uma solução fraca positiva* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$.

Demonstração: Supondo inicialmente que (A_1) ocorre. A demonstração será feita usando o Teorema 2.5. Dividiremos a demonstração em três etapas.
1ª Etapa: Construção de $(\overline{u}, \overline{v})$.

Para a construção de $(\overline{u}, \overline{v})$ seguiremos argumentos semelhantes ao da construção de $\overline{u}$ na segunda aplicação do Teorema 1.5 presente na Seção 1.3. Seja $e \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ a única solução de (2.7).

Mostraremos que podemos tomar $\overline{u} = M_{\lambda,\mu}e$ e $\overline{v} = M_{\lambda,\mu}e$, para uma constante $M = M_{\lambda,\mu}$ adequada.

De fato, para cada constante $M > 0$, observe que

$$-\Delta(Me) = M \ \text{ em } \ \Omega.$$

Afirmamos que existe uma constante $M > 0$, tal que, M é solução do sistema

$$(S)_{a_0} \qquad \begin{cases} M \geq \dfrac{1}{a_0}\left(\lambda(Me)^{\beta_1(x)}|Me|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + \mu(Me)^{\eta_1(x)}|Me|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}\right) \text{ em } \Omega, \\ \\ M \geq \dfrac{1}{a_0}\left(\lambda(Me)^{\beta_2(x)}|Me|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + \mu(Me)^{\eta_2(x)}|Me|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}\right) \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

De fato, observe que para $0 < M \leq 1$, o sistema $(S)_{a_0}$ tem solução quando

$$\begin{cases} M \geq \dfrac{1}{a_0}\left(\lambda M^{(\beta_1^- + \alpha_1^-)}R^{(\eta_1^+ + \gamma_1^+)} + \mu M^{(\eta_1^- + \gamma_1^-)}R^{(\eta_1^+ + \gamma_1^+)}\right), \\ \\ M \geq \dfrac{1}{a_0}\left(\lambda M^{(\beta_2^- + \alpha_2^-)}R^{(\eta_2^+ + \gamma_2^+)} + \mu M^{(\eta_2^- + \gamma_2^-)}R^{(\eta_2^+ + \gamma_2^+)}\right), \end{cases}$$

onde

$$R = \max\left\{|e|_{L^\infty},\ |e|_{L^{q_i(x)}},\ |e|_{L^{s_i(x)}},\ 1\right\},\ i = 1, 2.$$

Sejam $\varrho = \min\{(\beta_i^- + \alpha_i^-) : i = 1, 2\}$, $\tau = \min\{(\eta_i^- + \gamma_i^-) : i = 1, 2\}$ e $p = \max\{(\eta_i^+ + \gamma_i^+) : i = 1, 2\}$. Segue da hipótese que $0 < \varrho < 1 < \tau$.

Notamos que como $R \geq 1$ e desejamos $0 < M \leq 1$, o último sistema tem solução quando M satisfaz

$$M \geq \frac{1}{a_0}\left(\lambda M^{\varrho}R^p + \mu M^{\tau}R^p\right) \quad \text{e} \quad 0 < M \leq 1,$$

ou seja,

$$1 \geq \frac{1}{a_0}\left(\lambda M^{\varrho - 1}R^p + \mu M^{\tau - 1}R^p\right) \quad \text{e} \quad 0 < M \leq 1.$$

Como $0 < \varrho < 1 < \tau$, podemos usar os mesmos argumentos da prova da relação (1.12) para concluir que dado $\mu > 0$ existe $\lambda_0 > 0$, tal que, para cada $\lambda \in (0, \lambda_0)$, existe uma constante $M_{\lambda,\mu} > 0$, dada por

$$M_{\lambda,\mu} = c_1\Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^{\frac{1}{\tau-\varrho}},$$

tal que

$$0 < M_{\lambda,\mu} \leq 1 \;\text{ e }\; 1 \geq \frac{1}{a_0}\left(\lambda M_{\lambda,\mu}^{\varrho-1}R^p + \mu M_{\lambda,\mu}^{\tau-1}R^p\right).$$

Assim, $M_{\lambda,\mu}$ é solução do sistema $(S)_{a_0}$. Agora, como $M_{\lambda,\mu} \to 0$ quando $\lambda \to 0$, podemos escolher $\lambda_0 > 0$, tal que

$$\sigma_0 := \max\{|M_{\lambda_0,\mu}e|_{L^{r_i(x)}} : i = 1,2\} \leq b_0.$$

Como a função $\lambda \mapsto M_{\lambda,\mu}$ é crescente, $|M_{\lambda,\mu}e|_{L^{r_i(x)}} \leq \sigma_0 \leq b_0, \;\; \forall\, \lambda \in (0,\lambda_0)$.

Por hipótese $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ em $\overline{\Omega} \times [0,b_0]$, logo,

$$\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_i(x)}}) \geq a_0 > 0, \;\; \forall\;\; w \in [0, M_{\lambda,\mu}e].$$

Dessa relação e do fato de $M_{\lambda,\mu}$ ser solução do sistema $(S)_{a_0}$, obtemos, para cada $w \in [0, M_{\lambda,\mu}e]$, que $M_{\lambda,\mu}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} M \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_1(x)}})}\Big(\lambda(Me)^{\beta_1(x)}|Me|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + \mu(Me)^{\eta_1(x)}|Me|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}\Big) \text{ em } \Omega, \\ \\ M \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_2(x)}})}\Big(\lambda(Me)^{\beta_2(x)}|Me|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + \mu(Me)^{\eta_2(x)}|Me|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}\Big) \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Portanto, definindo $\overline{u} = \overline{v} := M_{\lambda,\mu}e$, temos

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_1(x)}})}\Big(\lambda\overline{u}^{\beta_1(x)}|\overline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + \mu w^{\eta_1(x)}|\overline{v}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}\Big) \text{ em } \Omega, \;\; \forall\, w \in [0,\overline{v}], \\ \\ -\Delta\overline{v} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_2(x)}})}\Big(\lambda\overline{v}^{\beta_2(x)}|\overline{u}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + \mu w^{\eta_2(x)}|\overline{u}|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}\Big) \text{ em } \Omega, \;\; \forall\, w \in [0,\overline{u}], \\ \hfill \overline{u},\overline{v} > 0 \;\text{ em }\; \Omega, \\ \hfill \overline{u},\overline{v} = 0 \;\text{ sobre }\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que neste caso, $\overline{w} = M_{\lambda,\mu}e$, onde nas hipóteses do Teorema 2.5, $\overline{w} = \max\{\overline{u},\overline{v}\}$.

2ª Etapa: Construção de $(\underline{u}, \underline{v})$.

Sejam $\overline{\sigma} = \max\{|\overline{w}|_{L^{r_i(x)}} : i = 1,2\}$, $K := \max\left\{\mathcal{A}(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0, \overline{\sigma}]\right\}$, e $\varphi \in H_0^1(\Omega) \bigcap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma autofunção associado ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Podemos supor que $\varphi > 0$ em Ω, $|\varphi|_{L^\infty} \leq 1$ e $|\varphi|_{L^{q(x)}} \leq 1$. Escolhendo

$$0 < \epsilon \leq \min\left\{\left(\frac{\lambda|\varphi|^{\alpha_i^+}_{L^{q_i(x)}}}{\lambda_1|\varphi|^{1-\beta_i^+}_{L^\infty} K}\right)^{\frac{1}{1-(\alpha_i^+ + \beta_i^+)}}, 1\right\};\ i = 1,2.$$

temos para cada $w \in [0, M_{\lambda,\mu} e]$,

$$\begin{cases} \lambda_1 \epsilon\varphi(x) \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})} (\epsilon\varphi(x))^{\beta_1(x)} |\epsilon\varphi|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} \text{ em } \Omega, \\ \\ \lambda_1 \epsilon\varphi(x) \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})} (\epsilon\varphi(x))^{\beta_2(x)} |\epsilon\varphi|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Definindo $\underline{u} = \epsilon\varphi$ e $\underline{v} = \epsilon\varphi$, temos

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})} \left(\lambda \underline{u}^{\beta_1(x)} |\underline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} + \mu w^{\eta_1(x)} |\underline{v}|^{\gamma_1(x)}_{L^{s_1(x)}}\right) \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [0, \overline{v}], \\ \\ -\Delta \underline{v} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})} \left(\lambda \underline{v}^{\beta_2(x)} |\underline{u}|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} + \mu w^{\eta_2(x)} |\underline{v}|^{\gamma_2(x)}_{L^{s_2(x)}}\right) \text{ em } \Omega, \ \forall\, w \in [0, \overline{u}], \\ \hfill \underline{u}, \underline{v} > 0 \text{ em } \Omega, \\ \hfill \underline{u}, \underline{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que neste caso $\underline{w} = \epsilon\varphi$, onde nas hipóteses do Teorema 2.5, $\underline{w} = \min\{\underline{u}, \underline{v}\}$.

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Dado $\lambda \in (0, \lambda_0]$, podemos diminuir ϵ se necessário, de modo que $\lambda_1 \epsilon |\varphi|_{L^\infty} \leq M_{\lambda,\mu}$, assim, $-\Delta(\epsilon\varphi) \leq -\Delta(M_{\lambda,\mu} e)$ em Ω. Pelo Princípio de Comparação $\underline{u} = \underline{v} := \epsilon\varphi \leq M_{\lambda,\mu} e =: \overline{v} = \overline{u}$.

Portanto, $(\underline{u}, \underline{v})$ e $(\overline{u}, \overline{v})$ formam um par de sub e supersolução para o sistema $(S)_{\lambda,\mu}$.

Pelo Teorema 2.5, para cada $\lambda \in (0,\lambda_0)$, existe uma solução fraca $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ para $(S)_{\lambda,\mu}$ com

$$\underline{u} \leq u_{\lambda,\mu} \leq \overline{u} \quad \text{e} \quad \underline{v} \leq v_{\lambda,\mu} \leq \overline{v},$$

o que demonstra o teorema no caso em que (A_1) ocorre.

Demonstração do Teorema 2.7 no caso em que (A_2) ocorre

1ª Etapa: Construção de $(\underline{u}, \underline{v})$.

Seja φ a autofunção associado a λ_1 considerada na 2ª etapa do caso (A_1). Escolhamos

$$0 < \epsilon \leq \min\left\{ \left(\frac{\lambda |\varphi|_{L^{q_i(x)}}^{\alpha_i^+}}{\lambda_1 |\varphi|_{L^\infty}^{1-\beta_i^+} a_1} \right)^{\frac{1}{1-(\alpha^+ + \beta^+)}}, 1 \right\};\ i = 1, 2.$$

Definindo $\underline{u} = \underline{u}(\lambda) := \epsilon\varphi$ e $\underline{v} = \underline{v}(\lambda) =: \epsilon\varphi$ temos

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})} \left(\lambda \underline{u}^{\beta_1(x)} |\underline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + \mu w^{\eta_1(x)} |\underline{v}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)} \right) \ \ em \ \ \Omega, \ \ \forall\, w \in [\underline{v}, \infty), \\ \\ -\Delta \underline{v} \leq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})} \left(\lambda \underline{v}^{\beta_2(x)} |\underline{u}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + \mu w^{\eta_2(x)} |\underline{v}|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)} \right) \ \ em \ \ \Omega, \ \ \forall\, w \in [\underline{u}, \infty), \\ \hfill \underline{u}, \underline{v} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill \underline{u} = \underline{v} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que neste caso $\underline{w} = \epsilon\varphi$, onde nas hipóteses do Teorema 2.5, $\underline{w} = \min\{\underline{u}, \underline{v}\}$.

2ª Etapa: Construção de $(\overline{u}, \overline{v})$

Como $\mathcal{A}(x,t) > 0$ em $\overline{\Omega} \times [\underline{\sigma}, \infty)$ e $\lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = a_\infty$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, temos

$$k_\lambda := \min\big\{\mathcal{A}(x,t) : \ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\underline{\sigma}, \infty)\big\} > 0,$$

onde $\underline{\sigma} := \min\{|\underline{w}|_{r_i} : i = 1, 2\}$.

Desejamos obter uma constante $T \geq 1$, tal que para cada $w \in [\epsilon\varphi, \infty)$, T satisfaça

$$(S)_{a_\infty} \qquad \begin{cases} T \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})} \left(\lambda (Te)^{\beta_1(x)} |Te|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)} + \mu (Te)^{\eta_1(x)} |Te|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}\right) \text{ em } \Omega, \\ \\ T \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})} \left(\lambda (Te)^{\beta_2(x)} |Te|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)} + \mu (Te)^{\eta_2(x)} |Te|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}\right) \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Note que para $T \geq 1$, o sistema $(S)_{a_\infty}$ tem solução quando

$$\begin{cases} T \geq \dfrac{1}{k_\lambda} \left(\lambda T^{(\beta_1^+ + \alpha_1^+)} R^{(\eta_1^+ + \gamma_1^+)} + \mu T^{(\eta_1^+ + \gamma_1^+)} R^{(\eta_1^+ + \gamma_1^+)}\right), \\ \\ T \geq \dfrac{1}{k_\lambda} \left(\lambda T^{(\beta_2^+ + \alpha_2^+)} R^{(\eta_2^+ + \gamma_2^+)} + \mu T^{(\eta_2^+ + \gamma_2^+)} R^{(\eta_2^+ + \gamma_2^+)}\right), \end{cases}$$

onde

$$R = \max\left\{|e|_{L^\infty},\ |e|_{L^{q_i(x)}},\ |e|_{L^{s_i(x)}},\ 1\right\},\ i = 1, 2.$$

Sejam $\zeta = \max\{(\beta_i^+ + \alpha_i^+) : i = 1, 2\}$ e $p = \max\{(\eta_i^+ + \gamma_i^+) : i = 1, 2\}$. Segue da nossa hipótese que $0 < \zeta < 1 < p$.

Observe que como $R \geq 1$ e desejamos $T \geq 1$, o último sistema tem solução quando T satisfaz

$$T \geq \frac{1}{k_\lambda} \left(\lambda T^\zeta R^p + \mu T^p R^p\right) \quad \text{e} \quad T \geq 1,$$

ou seja,

$$1 \geq \frac{1}{k_\lambda} \left(\lambda T^{\zeta - 1} R^p + \mu T^{p-1} R^p\right) \quad \text{e} \quad T \geq 1.$$

Como $0 < \zeta < 1 < p$, podemos usar os mesmos argumentos da prova da relação (1.15) para concluir que dado $\lambda > 0$ existe $\mu_0 > 0$, tal que para cada $\mu \in (0, \mu_0)$, existe uma constante $T_{\lambda,\mu} > 0$, dada por

$$T_{\lambda,\mu} = c_3 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{p - \zeta}},$$

tal que

$$T_{\lambda,\mu} \geq 1 \ \text{ e } \ 1 \geq \frac{1}{k_\lambda} \left(\lambda T_{\lambda,\mu}^{\zeta - 1} R^p + \mu T_{\lambda,\mu}^{p-1} R^p\right).$$

Além disso, a função $\mu \mapsto T_{\lambda,\mu},\ \mu \in (0, \mu_0]$ é decrescente com $T_{\lambda,\mu} \to \infty$ quando $\mu \to 0^+$.

Assim, $T_{\lambda,\mu}$ é solução do sistema $(S)_{a_\infty}$. Como consequência podemos tomar $\overline{u}=\overline{v}:=T_{\lambda,\mu}e$, ou seja, o par $(\overline{u},\overline{v})$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_1(x)}})}\left(\lambda\overline{u}^{\beta_1(x)}|\overline{v}|_{L^{q_1(x)}}^{\alpha_1(x)}+\mu w^{\eta_1(x)}|\overline{v}|_{L^{s_1(x)}}^{\gamma_1(x)}\right) \text{ em } \Omega, \ \ \forall\, w\in[\underline{v},\overline{v}], \\ \\ -\Delta\overline{v} \geq \dfrac{1}{\mathcal{A}(x,|w|_{L^{r_2(x)}})}\left(\lambda\overline{v}^{\beta_2(x)}|\overline{u}|_{L^{q_2(x)}}^{\alpha_2(x)}+\mu \overline{v}^{\eta_2(x)}|\overline{u}|_{L^{s_2(x)}}^{\gamma_2(x)}\right) \text{ em } \Omega, \ \ \forall\, w\in[\underline{u},\overline{u}], \\ \hfill \overline{u},\overline{v}>0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill \overline{u},\overline{v}=0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que neste caso, $\overline{w}=T_{\lambda,\mu}e$, onde nas hipóteses do Teorema 2.5, $\overline{w}=\max\{\overline{u},\overline{v}\}$.

3ª Etapa: $\underline{u}\leq\overline{u}$ e $\underline{v}\leq\overline{v}$.

Como $T_{\lambda,\mu}\to\infty$ quando $\mu\to 0^+$, podemos escolher $\mu_0>0$, tal que, $\lambda_1\epsilon|\varphi|_{L^\infty}\leq T_{\lambda,\mu_0}$. Logo, $-\Delta(\epsilon\varphi)\leq-\Delta(T_{\lambda,\mu_0}e)$ em Ω. Pelo Princípio de Comparação $\epsilon\varphi\leq T_{\lambda,\mu_0}e$.

Desde que a função $\mu\to T_{\lambda,\mu}$ é decrescente, para cada $\mu\in(0,\mu_0)$, $\epsilon\varphi\leq T_{\lambda,\mu_0}e\leq T_{\lambda,\mu}e$, logo,

$$\underline{u}:=\epsilon\varphi\leq T_{\lambda,\mu}e=:\overline{u} \ \ \text{ e } \ \underline{v}:=\epsilon\varphi\leq T_{\lambda,\mu}e=:\overline{v}.$$

Portanto, $(\underline{u},\underline{v})$ e $(\overline{u},\overline{v})$ formam um par de sub e supersolução para o sistema $(S)_{\lambda,\mu}$. Pelo Teorema 2.5, existe uma solução fraca positiva $(u_{\lambda,\mu},v_{\lambda,\mu})$ para $(S)_{\lambda,\mu}$ com

$$\underline{u}\leq u_{\lambda,\mu}\leq\overline{u} \ \text{ e } \ \underline{v}\leq v_{\lambda,\mu}\leq\overline{v},$$

o que prova o teorema no caso em que (A_2) ocorre. □

Observação 2.3 *Os argumentos das demonstrações dos casos (A_1) e (A_2) do Teorema 2.7, mostram que se tivermos $\mathcal{A}(x,t)\geq a_0>0$ em $\overline{\Omega}\times[0,\infty)$ e $1<(\eta_1^+ +\gamma_1^+)(\eta_2^+ +\gamma_2^+)$, então, dado $\lambda>0$ existe $\mu_0>0$ suficientemente pequeno, tal que, para cada $\mu\in(0,\mu_0)$ o sistema $(S)_{\lambda,\mu}$ possui uma solução fraca positiva $(u_{\lambda,\mu},v_{\lambda,\mu})$. Note que nesta situação, podemos ter em uma das equações do sistema que $(\eta_1^+ +\gamma_1^+)\leq 1$ ou $(\eta_2^+ +\gamma_2^+)\leq 1$.*

2.4 Aplicação 1.3 do Teorema 2.5: Uma generalização do sistema de equações logísticas

Nesta seção faremos uma aplicação do Teorema 2.5 em que não há a necessidade da limitação inferior $\mathcal{A}(x,t) \geq a_0 > 0$ ou superior $0 < \mathcal{A}(x,t) \leq a_\infty$ em $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ para a função $\mathcal{A}$. Nessa aplicação podemos ter

$$\mathcal{A}(x,0) \geq 0, \quad \lim_{t\to 0^+} \mathcal{A}(x,t) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} \mathcal{A}(x,t) = \pm\infty.$$

Para esse propósito estudaremos um sistema associado ao problema (P'_λ), estudado na Seção 1.4. Mais precisamente, estudaremos o sistema

$$(S')_{\lambda,\mu} \qquad \begin{cases} -\mathcal{A}(x, |v|_{L^{r_1(x)}})\Delta u = \lambda f_1(u)|v|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\mathcal{A}(x, |u|_{L^{r_2(x)}})\Delta v = \mu f_2(v)|u|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}} \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Assumiremos que existem $\theta_i \in (0,\infty)$, com $f_i : [0,\infty) \to \mathbb{R}, i = 1,2$ satisfazendo

(H_1) $f_i \in C^0([0,\theta_i], \mathbb{R})$

(H_2) $f_i(0) = f_i(\theta) = 0, \ \ f'_i(0) > 0 \ (f'_i(0) \in \mathbb{R}$ ou $f'_i(0) = \infty)$ e $f_i(s) > 0 \ \forall s \in (0,\theta_i)$.

Nosso resultado relativo ao sistema $(S')_{\lambda,\mu}$ é o seguinte

Teorema 2.8 *Suponha que* $r_i(x), q_i(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ $0 \leq \alpha_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$*, as funções* f_i *satisfazem* (H_1) *e* (H_2)*. Suponha ainda que a função* $\mathcal{A} : \overline{\Omega} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *seja contínua e*

$$\mathcal{A}(x,t) > 0 \ \ \text{em} \ \ \overline{\Omega} \times (0, \overline{\sigma}],$$

onde $\overline{\sigma} = \max\{|\theta_i|_{L^{r_i(x)}} : i = 1,2\}$*. Então, existem* $\lambda_0, \mu_0 > 0$ *tais que, para cada* $\lambda \geq \lambda_0$ *e* $\mu \geq \mu_0$*, o sistema* $(S')_{\lambda,\mu}$ *possui uma solução fraca positiva* $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$*, tal que*

$$0 < u_{\lambda,\mu} \leq \theta_1 \ \ \text{e} \ \ 0 < v_{\lambda,\mu} \leq \theta_2 \ \ \text{em} \ \ \Omega.$$

Demonstração: Aplicaremos o Teorema 2.5, para isso seguiremos três etapas.

1ª Etapa: Construção de $(\underline{u}, \underline{v})$.

Como $f_i(0) = f_i(\theta_i) = 0$ e $f_i'(0) > 0$, pelo Teorema 1.8 (ou sua demonstração) existem $\eta_0, \nu_0 > 0$, tais que, para cada $\eta \geq \eta_0$ e $\nu \geq \nu_0$ os problemas

$$(P)_\eta \qquad \begin{cases} -\Delta u = \eta f_1(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$(P)_\nu \qquad \begin{cases} -\Delta v = \nu f_2(v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ \qquad v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

possuem soluções φ_η e φ_ν, respectivamente, com

$$0 < \varphi_\eta \leq \theta_1 \ \text{ e } \ 0 < \varphi_\nu \leq \theta_2 \ \text{ em } \ \Omega. \tag{2.8}$$

Definamos $\varphi_1 := \varphi_{\eta_0}$ e $\varphi_2 := \varphi_{\nu_0}$ como as soluções de $(P)_{\eta_0}$ e $(P)_{\nu_0}$, respectivamente.

Sejam $\overline{w} := \max\{\theta_i : i = 1, 2\}$, $\underline{w} := \min\{\varphi_i : i = 1, 2\}$ e $K := \max\big\{\mathcal{A}(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}]\big\}$, onde $\underline{\sigma} = \min\{|\underline{w}|_{L^{r_i(x)}} : i = 1, 2\}$ e $\overline{\sigma} = \max\{|\overline{w}|_{L^{r_i(x)}} : i = 1, 2\}$.

Como $|\varphi_1|_{L^{q_2(x)}}, |\varphi_2|_{L^{q_1(x)}}$ são números reais positivos as funções

$$\begin{aligned} |\varphi_1|^{\alpha_2(.)}_{L^{q_2(x)}}, |\varphi_2|^{\alpha_1(.)}_{L^{q_1(x)}} : \ \overline{\Omega} \ &\to \ \mathbb{R}^+ \\ x \ &\mapsto |\varphi_1|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}}, |\varphi_2|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} \end{aligned}$$

são contínuas. Logo, existe uma constante $C > 0$, verificando

$$|\varphi_1|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}}, |\varphi_2|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}} \geq C \quad \text{em } \ \overline{\Omega}.$$

Agora, considere $\tau = \frac{K}{C}$. Note que

$$-\Delta\varphi_1 = \eta_0 f_1(\varphi_1) = \frac{\eta_0 \tau f_1(\varphi_1)|\varphi_2|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{K} \frac{K}{\tau|\varphi_2|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}} \leq \frac{\eta_0 \tau f_1(\varphi_1)|\varphi_2|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{K},$$

pois como $\tau = \frac{K}{C}$, $\dfrac{K}{\tau|\varphi_2|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}} \leq 1$. Agora, pela definição de K,

$$-\Delta\varphi_1 \leq \frac{\eta_0 \tau f_1(\varphi_1)|\varphi_2|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})}, \ \ \forall \ w \in [\underline{w}, \overline{w}].$$

Da mesma forma,

$$-\Delta\varphi_2 \leq \frac{\nu_0 \tau f_2(\varphi_2)|\varphi_1|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})}, \ \ \forall \ w \in [\underline{w}, \overline{w}].$$

Definindo $\underline{u} := \varphi_1$ e $\underline{v} := \varphi_2$, para cada $\lambda \geq \lambda_0 := \eta_0\tau$ e cada $\mu \geq \mu_0 := \nu_0\tau$,

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} \leq \lambda \dfrac{f_1(\underline{u})|\underline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})} \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall \ w \in [\underline{w}, \overline{w}], \\ \\ -\Delta\underline{v} \leq \mu \dfrac{f_2(\underline{v})|\underline{u}|^{\alpha_2(x)}_{L^{q_2(x)}}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_2(x)}})} \ \text{ em } \ \Omega, \ \ \forall \ w \in [\underline{w}, \overline{w}], \\ \hfill \underline{u}, \underline{v} > 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \hfill \underline{u}, \underline{v} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

2ª Etapa: Construção de $(\overline{u}, \overline{v})$.

Como $f_i(\theta_i) = 0$ segue que o par $(\overline{u}, \overline{v})$, onde $\overline{u} := \theta_1$ e $\overline{v} := \theta_2$ é uma supersolução para o sistema $(S')_{\lambda,\mu}$. De fato, observe por exemplo que $-\Delta\overline{u} = 0 = \lambda \frac{f_1(\overline{u})|\overline{v}|^{\alpha_1(x)}_{L^{q_1(x)}}}{\mathcal{A}(x, |w|_{L^{r_1(x)}})}, \ \ \forall \ w \in [\underline{w}, \overline{w}]$.

3ª Etapa: $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Desde que $\underline{u} := \varphi_1 := \varphi_{\eta_0}$ e $\underline{v} := \varphi_2 := \varphi_{\nu_0}$, por (2.8), $\underline{u} \leq \overline{u}$ e $\underline{v} \leq \overline{v}$. Pelo Teorema 2.5, para cada $\lambda \geq \lambda_0$ e $\mu \geq \mu_0$, existe uma solução fraca positiva $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ para o sistema $(S')_{\lambda,\mu}$ com

$$\varphi_1 \leq u_{\lambda,\mu} \leq \theta_1 \ \text{ e } \ \varphi_2 \leq v_{\lambda,\mu} \leq \theta_2 \ \text{ em } \ \Omega.$$

$\square$

Capítulo

3

Solução positiva para uma classe de problemas elípticos envolvendo não linearidade descontínua

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução para a seguinte classe de problemas

$$(P'_{\epsilon,\beta})\qquad \begin{cases} -\epsilon^2\Delta u + V(x)u = H(u-\beta)f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

que por uma mudança de variável é equivalente ao problema

$$(P_{\epsilon,\beta})\qquad \begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u = H(u-\beta)f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde ϵ, β são parâmetros positivos, H é a função de Heaviside, isto é,

$$H(s) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ s > 0, \\ 0 \ \text{ se } \ s \leq 0, \end{cases}$$

$1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$ ou $p \in (1, \infty)$ se $N = 1, 2$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Em [69], Rabinowitz estudou o problema

$$
(P'_\epsilon) \qquad \begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}
$$

com a classe de potencial V satisfazendo a condição

$$
(V_0) \qquad V_\infty = \liminf_{|x| \to \infty} V(x) > \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = \gamma > 0.
$$

Rabinowitz usou a força do parâmetro ϵ e as geometrias do potencial V combinada com argumentos envolvendo o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha para mostrar que o problema (P'_ϵ) possui solução u_ϵ. Posteriormente Wang em [77], provou que essas soluções concentram em um ponto de mínimo global de V quando $\epsilon \to 0$.

Em [50], del Pino e Felmer também estudaram (P'_ϵ), com V satisfazendo

$$
(V_1) \qquad 0 < \gamma = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) \leq V_0 = \inf_\Omega V(x) < \min_{\partial\Omega} V(x).
$$

Neste trabalho eles introduziram um novo método, que hoje é conhecido como "método de penalização de del Pino e Felmer", e provaram que se V satisfaz (V_1), o problema (P'_ϵ) possui solução u_ϵ que concentram em um mínimo de V.

De modo geral, nas últimas décadas, o problema (P'_ϵ) tem atraído o interesse de vários pesquisadores, como, por exemplo, Ackermann e Szulkin [1], Alves [3], Alves, Carrião e Miyagaki [7], Alves, do Ó e Souto [12], Bartsch, Pankov e Wang [16], Coti-Zelati e Rabinowitz [44], del Pino e Felmer [50] e [51], del Pino, Felmer e Miyagaki [52], do Ó e Souto [54], Floer e Weinstein [55], Oh [56], Kryszewski e Szulkin [64], Pankov [67], Pankov e Pflger [68], Rabinowitz [69], Wang [77] e suas referências.

Motivados pelo trabalho de del Pino e Felmer [50], Alves, do Ó e Souto [12] e do Ó e Souto [54], estudaram o mesmo tipo de problema estudado em [50] com f tendo crescimento crítico para $N \geq 3$ e crescimento exponencial crítico para $N = 2$, respectivamente.

Em [44], [64], [67] e [68], os autores estudaram (P'_ϵ) com V periódico. O caso em que V é assintoticamente periódico foi estudado em [7].

Em [52], del Pino, Felmer e Miyagaki consideraram o caso onde o potencial V possui a geometria do ponto de sela, essencialmente eles asssumem a seguinte condição sobre V. Primeiro, eles consideram a existência de dois subespaços $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\mathbb{R}^N = X \oplus Y$, o potencial V é limitado e existem $c_0, c_1 > 0$, satisfazendo

$$c_0 = \inf_{z \in \mathbb{R}^N} V(z) \quad \text{e} \quad c_1 = \sup_{x \in X} V(x),$$

além disso, eles assumem que o potencial $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as seguintes hipótese

(V_1)

$$c_0 = \inf_{R>0} \sup_{\partial B_R(0) \cap X} V(x) < \inf_{y \in Y} V(y).$$

(V_2) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $V, \frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^N$, $i, j \in \{1, 2..., N\}$.

(V_3) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, é tal que $(V(x_n))$ é limitada e $\nabla V(x_n) \to 0$, então, (x_n) possui uma subsequência convergente.

Assumindo essas hipóteses sobre V e supondo que $c_1 < 2^{\frac{2(p-1)}{N+2-p(N-2)}} c_0$, del Pino, Felmer e Miyagaki usaram método variacional para mostrar a existência de solução positiva para

$$(P_p)_\epsilon \qquad \begin{cases} -\epsilon^2 \Delta u + V(x)u = |u|^{p-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ \hfill u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $p \in (2, 2^*)$ se $N \geq 3$, $p \in (2, \infty)$ se $N = 1, 2$, e $\epsilon > 0$ pequeno.

Em todos os trabalhos citados anteriormente a não linearidade f envolvida é contínua. A versão de (P'_ϵ), com V satisfazendo (V_0) e a não linearidade descontínua, aparece em [11]. Mais precisamente, em [11] Alves e Nascimento estudaram a existência e concentração de solução para o problema

$$(P_{\epsilon,\beta})_p \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u = H(u-\beta)u^p \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

para V satisfazendo (V_0) e $p \in (1, \frac{N+2}{N-2})$ se $N \geq 3$ ou $p \in (1, +\infty)$ se $N = 1, 2$. Em [11] os autores provaram o mesmo resultado de [69] e [77], isto é, $(P_{\epsilon,\beta})_p$ possui uma solução positiva $u_{\epsilon,\beta}$ para $\epsilon, \beta > 0$ pequenos. Além disso, se $\epsilon_n, \beta_n \to 0$ e z_n denota o ponto de máximo de u_{ϵ_n,β_n}, então

$$\lim_{n\to\infty} V(\epsilon_n z_n) = V_0.$$

Em [8], Alves, Figueiredo e Nascimento estudaram a existência e concentração de solução para $(P_{\epsilon,\beta})_p$. Mas com V satisfazendo (V_1). Eles provaram o mesmo resultado de [11].

A versão de [7] para o caso de não linearidade descontínua foi estudado em [9].

Outras trabalhos interessantes envolvendo a não linearidade descontínua são [4] e [5], [6], [13], [14] e suas referências.

Neste capítulo, estudaremos $(P_{\epsilon,\beta})$ com a não linearidade f e as duas classes novas de potenciais V consideradas por Alves [3]. Neste trabalho o autor estudou (P'_ϵ). Alves introduziu as seguintes classes de potenciais.

Classe 1: O potencial V satisfazendo a condição Palais-Smale.

(A_0) Existe $V_0 > 0$, tal que $V(x) \geq V_0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$.

(A_1) $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e V, $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ são limitadas em $\mathbb{R}^N$, $i, j = 1, 2..., N$.

(A_2) V satisfaz a condição Palais-Smale, isto é, se $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, é tal que

$$(V(x_n)) \text{ é limitada e } \nabla V(x_n) \to 0,$$

então (x_n) possui uma subsequência convergente.

Classe 2: O potencial V não possui ponto crítico na fronteira de algum domínio limitado.

Nesta classe de potenciais, V satisfaz (A_0), (A_1) e a hipótese adicional

(A_3) Existe um domínio $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$, tal que, $\nabla V(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \partial\Lambda$.

A não linearidade f é contínua satisfazendo

(f_1) $\limsup_{s\to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0$.

(f_2) Existe $p \in (1, 2^* - 1)$, tal que, $\limsup_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^p} = 0$.

(f_3) Existe $\theta > 2$, tal que $0 < \theta F(s) := int_0^s f(t)dt \leq sf(s), \;\; \forall\, s > 0$.

Em [3], Alves provou que se V pertence a Classe 1 ou 2 e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$, então, $(P)'_\epsilon$ possui uma solução positiva para $\epsilon > 0$ pequeno. Para provar este resultado Alves usou o Teorema do Passo da Montanha (para funcionais de classe C^1), uma adaptação do Método de penalização de del Pino e Felmer [50] e explorou as hipóteses sobre o potencial V.

Motivados por esses trabalhos, principalmente por [3], [8], [11] e [50], estudaremos $(P_{\epsilon,\beta})$ com a classe de funções f e as duas classes de potencias V introduzida por Alves.

Exemplo 3.1 *A função $f(s) = s^p$ satisfaz as condições $(f_1) - (f_3)$ e a condição adicional que aparece nos teoremas a seguir. Portanto, o problema $(P_{\epsilon,\beta})$ que estudaremos é mais geral que o caso potência $f(u) = u^p$ estudados em [8] e [11].*

Nossos resultados relativos ao problema $(P_{\epsilon,\beta})$ são os seguintes:

Teorema 3.1 *Suponha que V satisfaz $(A_0), (A_1), (A_2)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$. Então, existe $a > 0$, tal que, para cada $\beta \in (0, a)$, obtemos $\epsilon_0 > 0$, tal que, $(P_{\epsilon,\beta})$ possui uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Além disso, se a função $s \mapsto \frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$, temos*

(i) *O conjunto $\Gamma_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) = \beta\}$ tem medida de Lebesgue nula.*

(ii) $-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) = H(u_{\epsilon,\beta}(x) - \beta)f(u_{\epsilon,\beta}(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) *O conjunto $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > a\}$ tem medida de Lebesgue positiva.*

e

Teorema 3.2 *Suponha que V satisfaz $(A_0), (A_1), (A_3)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$. Então, existe $a > 0$, tal que, para cada $\beta \in (0, a)$, obtemos $\epsilon_0 > 0$, tal que, $(P_{\epsilon,\beta})$ possui uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Além disso, se a função $s \mapsto \frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$, temos*

(i) *O conjunto $\Gamma_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) = \beta\}$ tem medida de Lebesgue nula.*

(ii) $-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) = H(u_{\epsilon,\beta}(x) - \beta)f(u_{\epsilon,\beta}(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) *O conjunto $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > a\}$ tem medida de Lebesgue positiva.*

Em alguns trabalhos que tratam de problemas envolvendo uma não linearidade descontínua, encontra-se uma solução u_β, tal que o conjunto $\Gamma_\beta = \{x \in \mathbb{R}^N : u_\beta(x) > \beta\}$, tem medida de Lebesgue positiva, veja, por exemplo, [4] e [5]. Nos teoremas anteriores é imediato que quando (ii) ocorre temos $|\Gamma^\beta_{\epsilon,\beta}| > 0$, onde $\Gamma^\beta_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > \beta\}$. De fato, seja $u_{\epsilon,\beta}$ uma solução de $(P_{\epsilon,\beta})$ verificando (ii). Suponha, por contradição, que $|\Gamma^\beta_{\epsilon,\beta}| = 0$, então, $u_{\epsilon,\beta}(x) \leq \beta$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Por (ii), temos

$$\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} H(u_{\epsilon,\beta} - \beta) f(u_{\epsilon,\beta}) u_{\epsilon,\beta} = 0,$$

assim, $u_{\epsilon,\beta} = 0$, contradizendo o fato de $u_{\epsilon,\beta} > 0$. Agora, o fato de o conjunto $\Gamma^a_{\epsilon,\beta}$ ter medida positiva não é imediato. Isso será obtido com o método de penalização.

Para facilitar a leitura, vamos enunciar novamente os dois teoremas acima nas suas respectivas seções.

3.1 Definição de solução para $(P_{\epsilon,\beta})$ e o T.P.M para funcionais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$

Nesta seção definiremos solução fraca e forte para o problema $(P_{\epsilon,\beta})$ e apresentaremos o Teorema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ que nos permitirá provar um resultado de existência de solução positiva (fraca e forte) para um problema auxiliar. O passo seguinte é provar que a solução deste problema auxiliar é solução do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$. Note que como a nossa não linearidade é descontínua, não podemos usar a teoria de pontos críticos para funcionais de classe C^1. Neste caso, vamos usar a teoria de pontos críticos para funcionais localmente Lipschitz contínuo desenvolvida por Chang [25], Clarke [43] e Grossinho e Tersian [63]. Para mais detalhes veja o Apêndice C. Uma excelente fonte de informação sobre aplicação e teoria dos funcionais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ é a dissertação de Santos [72], que seguiu o livro de Grossinho e Tersian, veja [63] e o artigo do Chang, veja [25].

Definição 3.1 *Uma solução fraca para* $(P_{\epsilon,\beta})$ *é uma função* $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, *satisfazendo* $u > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$-\Delta u(x) + V(\epsilon x)u(x) \in \left[\underline{f}_H(u(x)), \overline{f}_H(u(x))\right] \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N,$$

onde $f_H(s) = H(s-\beta)f(s)$,

$$\underline{f}_H(s) = \liminf_{t \to s} f_H(t) \ \ e \ \ \overline{f}_H(s) = \limsup_{t \to s} f_H(t). \tag{3.1}$$

Definição 3.2 *Uma solução forte para* $(P_{\epsilon,\beta})$ *é uma função* $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, *satisfazendo* $u > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$-\Delta u(x) + V(\epsilon x)u(x) = H(u(x) - \beta)f(u(x)) \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N,$$

É claro que toda solução forte é uma solução fraca para $(P_{\epsilon,\beta})$.

Teorema 3.3 (Teorema do Passo da Montanha) *(Veja [63] e [71])*

Sejam X *um espaço de Banach e* $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, *satisfazendo* $I(0) = 0$,

(i) *existem* $r, \rho > 0$, *tais que* $I(u) \geq \rho$, $||u|| = r$, $u \in X$,

(ii) *existe* $e \in B_r(0)^c$ *com* $I(e) < 0$.

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\right\}$.

Suponha que o funcional I *satisfaz a condição* (PS), *então* $c \geq \rho$ *e existe* $u \in X$, *tal que*

$$I(u) = c \ \ e \ \ 0 \in \partial I(u),$$

ou seja, o nível do passo da montanha é valor crítico do funcional I.

Para a definição de um funcional $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, da condição (PS) e de ponto crítico de um funcional $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, veja o Apêndice C.

Vamos considerar $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da norma

$$\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)|u|^2)\right]^{\frac{1}{2}};\ u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

que provém de produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(\epsilon x)uv).$$

Esta norma é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$ pois, por (A_1) e (A_2), existem constantes $V_\infty, V_0 > 0$ tais que $V_0 \leq V(x) \leq V_\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Note que as constantes de equivalência das normas não dependem de ϵ, só dependem de V_0 e V_∞.

3.2 Um problema auxiliar

Para mostrar que $(P_{\epsilon,\beta})$ possui solução vamos adaptar ao nosso caso, como foi feito em [8], o Método de penalização de del Pino & Felmer [50], que consiste em estudar inicialmente um problema auxiliar, o problema penalizado, e depois mostrar que a solução deste problema auxiliar é solução do problema original. A principal ferramenta utilizada para provar que o problema auxiliar possui solução é o Torema do Passo da Montanha para funcionais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$. Em seguida, vamos usar algumas estimativas envolvendo o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha associado ao problema auxiliar e um lema técnico, a saber Lema 3.9, quando V pertence a Classe 1 e o Lema 3.10, quando V pertence a Classe 2, para mostrar que a solução do problema auxiliar é solução do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$.

Vamos fixar mais algumas notações para usarmos o Método de penalização de del Pino e Felmer. Fixemos as constantes $\beta, a, k > 0$ satisfazendo

$$k > 1,\ \ a > \beta \ \text{ e } \ \frac{f(a)}{a} = \frac{V_0}{k},$$

onde a é a constante que será usada na definição de $\widetilde{f}$, veja (3.2) abaixo, e que apareceu nos enunciados dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Note que as condições (f_1) e (f_3) combinadas com o Teorema do Valor Intermediário garantem a existência da constante a. De fato, basta notar que por (f_3), $F(s) \geq F(1)s^{\theta}, \forall s \geq 1$. Novamente por (f_3), $\frac{f(s)}{s} \geq F(1)\theta s^{\theta-2}, \forall s \geq 1$. Assim, por (f_1) existe $s_1 \in (0,1)$ e por (f_3) existe $s_2 \in (1,\infty)$, tais que $\frac{f(s_1)}{s_1} < \frac{V_0}{k} < \frac{f(s_2)}{s_2}$.

Como nosso interesse é obter solução positiva para $(P_{\epsilon,\beta})$ vamos assumir que $f(s) = 0, \ \forall \ s \leq 0$.

Usando as constantes k, a e V_0 definamos a função truncada

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) \ \text{ se } \ s \leq a, \\ \frac{V_0}{k}s \ \text{ se } \ s > a \end{cases} \tag{3.2}$$

e a função penalizada

$$g(x,s) = \chi_\Omega(x)f(s) + (1-\chi_\Omega(x))\widetilde{f}(s), \ \ \forall \ \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

onde

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ x \in \Omega \\ 0 \ \text{ se } \ x \in \Omega^c, \end{cases}$$

para algum conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Seja a função $g_H(x,s) = H(s-\beta)g(x,s), \ \forall \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Estudaremos o problema auxiliar penalizado

$$(P_{\epsilon,\beta})_a \qquad \begin{cases} -\Delta u + V(\epsilon x)u = g_H(\epsilon x, u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

As hipóteses $(f_1) - (f_3)$ mostram que a função g está bem definida, é uma função de Caratheodory e satisfaz

(g_1) $g(x,s) = 0, \ \ \forall \ s < 0$.

(g_2) $\limsup_{|s|\to 0} \dfrac{g(x,s)}{|s|} = 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

(g_3) $\limsup_{|s|\to \infty} \dfrac{g(x,s)}{|s|^p} = 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$.

$(g_4)_i$ $0 < \theta G(x,s) = \theta \int_0^s g(x,t)dt \leq g(x,s)s, \ \ \forall \ x \in \Omega, s > 0$.

$(g_4)_{ii}$ $0 < 2G(x,s) \leq g(x,s)s \leq \frac{1}{k}V_0|s|^2, \ \ \forall\, x \in \Omega^c, s > 0.$

Definiremos solução para o problema auxiliar penalizado $(P_{\epsilon,\beta})_a$ e veremos a relação desta solução com a solução do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$.

Definição 3.3 *Uma solução fraca de* $(P_{\epsilon,\beta})_a$ *é uma função* $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, *satisfazendo* $u > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$-\Delta u(x) + V(\epsilon x)u(x) \in \left[\underline{g}_H(\epsilon x, u(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u(x))\right] \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N,$$

onde

$$\underline{g}_H(\epsilon x, s) = \liminf_{t \to s} g_H(\epsilon x, t) \ \ e \ \ \overline{g}_H(\epsilon x, s) = \limsup_{t \to s} g_H(\epsilon x, t). \tag{3.3}$$

Definição 3.4 *Uma solução forte de* $(P_{\epsilon,\beta})_a$ *é uma função* $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, *satisfazendo* $u > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *e*

$$-\Delta u(x) + V(\epsilon x)u(x) = g_H(\epsilon x, u(x)) \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Observação 3.1 *É claro que se* u *é solução forte de* $(P_{\epsilon,\beta})_a$, *então* u *é solução fraca.*

Observação 3.2 *Usando as definições das funções* $\widetilde{f}$ *e* g, *concluímos que* $g(\epsilon x, s)$ *e* $f(s)$ *são iguais quando* $x \in \Omega_\epsilon$ *ou* $s \leq a$. *Como consequência, pelas definições de* $\underline{f}_H, \overline{f}_H, \underline{g}_H$ *e* $\overline{g}_H$, *temos* $\underline{f}_H(\epsilon x, s) = \underline{g}_H(\epsilon x, s)$ *e* $\overline{f}_H(\epsilon x, s) = \overline{g}_H(\epsilon x, s)$ *quando* $x \in \Omega_\epsilon$ *ou* $s \leq a$. *Assim, se* u *é solução fraca (forte) do problema truncado* $(P_{\epsilon,\beta})_a$ *com* $u(x) \leq a$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon$, *onde* $\Omega_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\Omega$, *então,* u *é solução fraca (forte) de* $(P_{\epsilon,\beta})$.

Portanto, o nosso objetivo é mostar que o problema auxiliar $(P_{\epsilon,\beta})_a$ *possui uma solução fraca* u *e que* $u(x) \leq a$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon$. *Para mostrar que* $(P_{\epsilon,\beta})_a$ *possui solução fraca, vamos usar o Teorema do Passo da Montanha para funcionais* $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *e para mostrar que* $u(x) \leq a, \ x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon$, *vamos usar algumas estimativas sobre o nível minimax e um lema técnico, a saber, Lema 3.9 quando* V *pertence a Classe 1 e Lema 3.10 quando* V *pertence a Classe 2.*

3.3 Existência de Solução para $(P_{\epsilon,\beta})_a$ com V satisfazendo (A_0) e (A_1).

Nesta seção provaremos que $(P_{\epsilon,\beta})_a$ possui uma solução fraca positiva quando V satisfaz (A_0) e (A_1) e f satisfaz $(f_1)-(f_3)$. Além disso, se a função $\frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0,a]$, mostraremos que, como consequência do método de penalização, essa solução fraca é forte. Em toda essa seção admitiremos que V satisfaz somente (A_0) e (A_1).

Antes de tratarmos do funcional associado a $(P_{\epsilon,\beta})_a$, vamos enunciar e demonstrar a Proposição 3.1, que é uma versão do Teorema 2.1 de Chang em [25] no caso em que $\Omega=\mathbb{R}^N$ e $\phi(x,s)=g_H(\epsilon x,s)$. Em [25], Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$. Essa proposição nos ajudará a provar que o funcional associado a $(P_{\epsilon,\beta})_a$ está bem definido e nos dará informações sobre o gradiente generalizado deste funcional.

Primeiro, vamos enunciar e demonstrar alguns lemas que serão utilizados na demonstração da proposição citada acima. Nosso próximo lema nos fornece informação sobre a derivada direcional de G_H, onde

$$G_H(x,s)=\int_0^s g_H(x,t)dt,\ (x,s)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}.$$

Recorde que

$$\underline{g}_H(\epsilon x,s)=\liminf_{t\to s} g_H(\epsilon x,t)\ \text{ e }\ \overline{g}_H(\epsilon x,s)=\limsup_{t\to s} g_H(\epsilon x,t).$$

Lema 3.1 *Sejam as funções G_H, g_H, $\overline{g}_H$ e $\underline{g}_H$, definidas anteriormente, temos*

$$G_H^0((\epsilon x,t),v)\le\begin{cases}\overline{g}_H(\epsilon x,t)v & se\ \ v>0,\\ \underline{g}_H(\epsilon x,t)v & se\ \ v<0,\end{cases}$$

onde

$$G_H^0((\epsilon x,t),v):=\limsup_{\substack{h\to 0\\ \lambda\downarrow 0}}\frac{G_H(\epsilon x,t+h+\lambda v)-G_H(\epsilon x,t+h)}{\lambda}.$$

Demonstração: Definamos as funções $\underline{g}_{H,\delta}$ e $\overline{g}_{H,\delta}$, onde

$$\underline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t)=\inf\{g_H(\epsilon x,s):|s-t|<\delta\} \text{ e } \overline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t)=\sup\{g_H(\epsilon x,s):|s-t|<\delta\}.$$

Note que

$$\underline{g}_H(\epsilon x,t)=\lim_{\delta\to 0^+}\underline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t) \text{ e } \overline{g}_H(\epsilon x,t)=\lim_{\delta\to 0^+}\overline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t).$$

Agora, observe que pela definição de G_H,

$$G_H^0((\epsilon x,t),v)=\lim_{h\to 0}\sup_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^{t+h+\lambda v} g_H(\epsilon x,s)ds-\int_0^{t+h} g_H(\epsilon x,s)ds\right].$$

Para $v>0$,

$$\begin{aligned} G_H^0((\epsilon x,t),v) &= \lim_{h\to 0}\sup_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} g_H(\epsilon x,s)ds \le \lim_{h\to 0}\sup_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\overline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t)\int_{t+h}^{t+h+\lambda v} ds \\ &\le \overline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t)v,\ \forall\ \delta>0, \end{aligned}$$

fazendo $\delta\to 0^+$, obtemos

$$G_H^0((\epsilon x,t),v)\le \overline{g}_H(\epsilon x,t)v,\ \forall\ v>0.$$

Agora, observe que para $v<0$,

$$\begin{aligned} G_H^0((\epsilon x,t),v) &= \lim_{h\to 0}\sup_{\lambda\to 0}-\frac{1}{\lambda}\int_{t+h+\lambda v}^{t+h} g_H(\epsilon x,s)ds = -\lim_{h\to 0}\inf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\int_{t+h+\lambda v}^{t+h} g_H(\epsilon x,s)ds \\ &\le -\lim_{h\to 0}\inf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\underline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t)\int_{t+h+\lambda v}^{t+h} ds \\ &= -\underline{g}_{H,\delta}(\epsilon x,t)(-v),\ \forall\ \delta>0, \end{aligned}$$

fazendo $\delta\to 0^+$, temos

$$G_H^0((\epsilon x,t),v)\le \underline{g}_H(\epsilon x,t)v,\ \forall\ v<0.$$

$\square$

Observação 3.3 *Como estamos trabalhando com uma não linearidade f mais geral que o caso potência $f(t) = t^p$ e estamos trabalhando no $\mathbb{R}^N$ no lugar de um domínio limitado Ω, precisamos, adaptar os argumentos de alguns resultados do artigo do Chang [25] e do artigo de Alves, Figueiredo e Nascimento [8]. O próximo lema tem essa finalidade. Antes de enunciá-lo, vamos verificar que as funções $\underline{g}_H(\epsilon x, s)$ e $\overline{g}_H(\epsilon x, s)$ são N-mensuráveis. Recorde que uma função $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de N-mensurável quando a composição $h(., v(.)) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, para cada função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável, veja [24].*

Desde que $g_H(\epsilon x, s)$ é uma função de Caratheodory, as funções $\underline{g}_H(\epsilon x, s)$ e $\overline{g}_H(\epsilon x, s)$ também são. Assim, $\underline{g}_H(\epsilon x, s)$ e $\overline{g}_H(\epsilon x, s)$ são funções N-mensuráveis.

No próximo lema, para simplificar a notação e enfatizar a dependência com relação a β, designaremos por C_β uma constante que depende de β, V_0, k, e p.

Lema 3.2 **(i)** *Dado $\beta \in (0, a)$ existe uma constante $C_\beta = C(\beta, V_0, k, p) > 0$, tal que*

$$\frac{V_0}{k} \leq C_\beta |s|^{p-1} \quad e \quad |f(s)| \leq C_\beta |s|^p, \ \forall\ s \geq \beta.$$

(ii) *Existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que*

$$F(s) \geq C_1 |s|^\theta - C_2, \ \forall\ s \geq 0.$$

Demonstração: Pela condição (f_2), tomando $\xi = 1$, existe uma constante $M > 0$, suficientemente grande, tal que

$$|f(s)| \leq |s|^p, \ \forall\ s \geq M.$$

Como $[\beta, M]$ é compacto e a função f contínua, existe $M_\beta = \max_{[\beta,M]} f(s)$. Escolhendo uma constante $\widetilde{C}_\beta$, tal que $\widetilde{C}_\beta \beta^p \geq 1$, temos

$$|f(s)| \leq \widetilde{C}_\beta \beta^p M_\beta, \ \forall\ s \in [\beta, M].$$

Desde que $\beta^{p-1} \leq s^{p-1}, \ \forall\ s \geq \beta$. Tomando a constante $C_\beta = \max\{1, \widetilde{C}_\beta M_\beta, \frac{V_0}{k\beta^{p-1}}\}$, temos

$$\frac{V_0}{k} \leq C_\beta |s|^{p-1} \ \text{ e } \ |f(s)| \leq C_\beta |s|^p, \ \forall s \geq \beta.$$

o que prova o item (i).

Agora, observe que por $(f)_3$, temos

$$\frac{\theta}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)}, \ \forall \ s > 0,$$

integrando de 1 a s, temos

$$\ln s^\theta \leq \ln \frac{F(s)}{F(1)}, \ \forall \ s \geq 1,$$

como a função ln é crescente

$$F(s) \geq F(1)s^\theta, \forall \ s \geq 1.$$

Usando a continuidade de F no compacto [0,1], temos o item (ii). $\square$

Proposição 3.1 *O funcional*

$$\Psi_{\epsilon,\beta} : L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

$$\Psi_{\epsilon,\beta}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G_H(\epsilon x, u)dx, \quad \textit{onde} \quad G_H(\epsilon x, s) = \int_0^s g_H(\epsilon x, t)dt$$

está bem definido e satisfaz

(i) $\Psi_{\epsilon,\beta} \in Lip_{loc}(L^{p+1}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$

(ii) *Dada* $u \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, $\partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u) \subset L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ *e se* $\rho \in \partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u)$, *temos*

$$\rho(x) \in \left[\underline{g}_H(\epsilon x, u(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u(x))\right] \ q.t.p \ em \, \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Como consequência do Lema 3.2, item (i), a função $g(x,s)$ satisfaz

$$|g(x,s)| \leq C_\beta |s|^p, \ \forall \ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \ s \geq \beta. \tag{3.4}$$

De fato, seja $s \geq \beta$, então se $x \in \Omega$, temos $g(x,s) = f(s)$. E se $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, temos $g_H(x,s) = \widetilde{f}(s)$. Neste último caso, pela definição de $\widetilde{f}$, se $s \in [\beta, a]$, temos $g(x,s) = f(s)$. Nesses dois casos (3.4) segue do Lema 3.2. Agora, se $s > a$, temos $g(x,s) = \frac{V_0}{k}s$. Como a constante C_β foi tomada no Lema 3.2 de modo que $\frac{V_0}{k} \leq C_\beta s^{p-1}$, $\forall\ s \geq \beta$ temos $\frac{V_0}{k} s \leq C_\beta s^p$, $\forall\ s \geq \beta$. Assim, (3.4) está provada.

Desde que $g_H(x,s) = H(s-\beta)g(x,s)$, usando o fato de $g_H(x,s) = 0$, $\forall\ s \leq \beta$ e (3.4), temos

$$|g_H(x,s)| \leq C_\beta |s|^p,\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Assim,

$$|G_H(x,s)| \leq \frac{C_\beta}{p+1}|s|^{p+1},\ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

o que mostra que o funcional $\Psi_{\epsilon,\beta}$ está bem definido.

Dada $w \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, fixemos $R > 0$. Dados $u, v \in B_R(w) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$,

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u) - \Psi_{\epsilon,\beta}(v)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{u(x)} g_H(\epsilon x, s)dsdx - \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{v(x)} g_H(\epsilon x, s)dsdx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |g_H(\epsilon x, s)|dsdx,$$

onde $\theta(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $\eta(x) = \min\{u(x), v(x)\}$.

Por (3.4),

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u) - \Psi_{\epsilon,\beta}(v)| \leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\eta(x)}^{\theta(x)} |s|^p dsdx.$$

Para cada $p > 1$, a função $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $L(s) = \frac{s|s|^p}{p+1}$ é de classe C^1 com $L'(s) = |s|^p$. Como

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u) - \Psi_{\epsilon,\beta}(v)| \leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\eta(x)}^{\theta(x)} L'(s) dsdx,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u) - \Psi_{\epsilon,\beta}(v)| \leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} L(\theta) - L(\eta) dx,$$

agora, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi(x) \in (\eta(x), \theta(x))$, tal que

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u) - \Psi_{\epsilon,\beta}(v)| \leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} L'(\xi)(\theta - \eta) dx.$$

Como $\theta(x) - \eta(x) = |u(x) - v(x)|$,

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u) - \Psi_{\epsilon,\beta}(v)| \leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^p |u-v| dx \leq C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} (|u|+|v|)^p |u-v| dx \leq C_{\beta,p} \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p + |v|^p)|u-v| dx$$

ou seja,

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u)-\Psi_{\epsilon,\beta}(v)|\leq C_{\beta,p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p|u-v|dx+C_{\beta,p}\int_{\mathbb{R}^N}|v|^p|u-v|dx.$$

Como $u\in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, $|u|^p\in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{p+1}{p}$ e $p+1$,

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u)-\Psi_{\epsilon,\beta}(v)|\leq C_{\beta,p}|u|^p_{L^{p+1}}|u-v|_{L^{p+1}}+C_{\beta,p}|v|^p_{L^{p+1}}|u-v|_{L^{p+1}}.$$

Desde que $u,v\in B_R(w)$, pela desigualdade triangular,

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u)-\Psi_{\epsilon,\beta}(v)|\leq 2C_{\beta,p}(R+|w|_{L^{p+1}})^p|u-v|_{L^{p+1}}.$$

Definindo a constante $K_{\beta,w}=2C_{\beta,p}(R+|w|_{L^{p+1}})^p$,

$$|\Psi_{\epsilon,\beta}(u)-\Psi_{\epsilon,\beta}(v)|\leq K_{\beta,w}|u-v|_{L^{p+1}},$$

o que mostra que $\Psi_{\epsilon,\beta}\in Lip_{loc}(L^{p+1}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$.

Agora, provaremos o item (ii). Seja $u\in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ e $\rho\in\partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u)$, vamos provar que

$$\rho(x)\in[\underline{g}_H(\epsilon x,u(x)),\overline{g}_H(\epsilon x,u(x))]\text{ q.t.p em }\mathbb{R}^N.$$

De fato, observe inicialmente que dado $u\in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, $\partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u)\subset L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, pois pela definição do gradiente generalizado e o Teorema de Representação de Riesz,

$$\partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u):=\left\{\xi\in(L^{p+1}(\mathbb{R}^N))^*=L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N):\ \Psi^0_{\epsilon,\beta}(u,v)\geq\left\langle\xi,v\right\rangle,\ \forall\, v\in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)\right\},$$

onde $\Psi^0_{\epsilon,\beta}(u,v)$ é a derivada direcional generalizada de $\Psi_{\epsilon,\beta}$ no ponto u na direção de v, isto é,

$$\Psi^0_{\epsilon,\beta}(u,v)=\limsup_{\substack{h\to0\\ \lambda\to0}}\frac{\Psi_{\epsilon,\beta}(u+h+\lambda v)-\Psi_{\epsilon,\beta}(u+h)}{\lambda}.$$

Seja $(h_n)\subset L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ e $(\lambda_n)\subset\mathbb{R}^+$, tais que $h_n\to0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda_n\to0$ em $\mathbb{R}$, então, a menos de subsequência,

$$h_n(x) \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N \text{ e } |h_n(x)| \leq k(x) \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\Psi^0_{\epsilon,\beta}(u,v) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\Psi_{\epsilon,\beta}(u+h_n+\lambda_n v)-\Psi_{\epsilon,\beta}(u+h_n)}{\lambda_n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G_H(\epsilon x, u+h_n+\lambda_n v)-G_H(\epsilon x, u+h_n)}{\lambda_n} dx.
\end{aligned}$$

Por simplicidade de notação, definindo

$$G_{H,n}(v(x)) := \frac{G_H(\epsilon x, u(x)+h_n(x)+\lambda_n v(x))-G_H(\epsilon x, u(x)+h_n(x))}{\lambda_n}.$$

Observe que

$$\Psi^0_{\epsilon,\beta}(u,v) = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_{H,n}(v)dx \quad \text{e} \quad G^0_H((\epsilon x, v), u) = \limsup_{n\to\infty} G_{H,n}(v). \tag{3.6}$$

Afirmamos que por (3.6) e o Lema da Fatou

$$\Psi^0_{\epsilon,\beta}(u,v) \leq \int_{\mathbb{R}^N} G^0_H((\epsilon x, u), v)dx, \ \forall v \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N). \tag{3.7}$$

De fato, dado $x \in \{v > 0\} := \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) > 0\}$, pela definição de $G_{H,n}$ e G_H,

$$\begin{aligned}
G_{H,n}(v) &= \frac{1}{\lambda_n}\left[\int_0^{u+h_n+\lambda_n v} g_H(\epsilon x, s)ds - \int_0^{u+h_n} g_H(\epsilon x, s)ds\right] = \frac{1}{\lambda_n}\int_{u+h_n}^{u+h_n+\lambda_n v} g_H(\epsilon x, s)ds \\
&\leq \frac{C_\beta}{\lambda_n}\int_{u+h_n}^{u+h_n+\lambda_n v} |s|^p ds = \frac{C_\beta}{\lambda_n}\int_{u+h_n}^{u+h_n+\lambda_n v} L'(s)ds,
\end{aligned}$$

onde a função $L(s) = \frac{1}{p+1}s|s|^p, \ \ s \in \mathbb{R}$. Usando o fato de L ser de classe C^1 e argumentando como no item (i) obtemos pelo Teorema do Valor Médio, a existência de

$\theta_n \in (u+h_n, u+h_n+\lambda_n v)$, tal que

$$\begin{aligned} G_{H,n}(v) &\leq \frac{C_\beta}{\lambda_n}|\theta_n|^p \lambda_n v \ \leq\ C_\beta\big(|u+h_n| + |u+h_n+\lambda_n v|\big)^p |v| \\ &\leq C_{\beta,p}\big(|u|^p|v| + k^p|v| + |v|^{p+1}\big) \text{ q.t.p em } \{v>0\}. \end{aligned}$$

Seguindo um argumento análogo, obtemos

$$G_{H,n}(v) \leq C_{\beta,p}\big(|u|^p|v| + k^p|v| + |v|^{p+1}\big) \text{ q.t.p em } \{v<0\}.$$

Pela definição de $G_{H,n}$, temos $G_{H,n}(v(x)) = 0$ quando $v(x) = 0$. Logo

$$G_{H,n}(v) \leq C_{\beta,p}\big(|u|^p|v| + k^p|v| + |v|^{p+1}\big) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Pela desigualdade de Hölder $C_{\beta,p}\big(|u|^p|v| + k^p|v| + |v|^{p+1}\big) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, pelo Lema de Fatou

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_{H,n}(v)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \limsup_{n\to\infty} G_{H,n}(v)dx, \ \ \forall\, v \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N),$$

usando este fato e (3.6), temos a nossa afirmação em (3.7).

Pelo Lema 3.1, sabemos que

$$G_H^0(\epsilon x, u), v) \leq \begin{cases} \overline{g}_H(\epsilon x, u)v \ \text{ se } \ v>0, \\ \underline{g}_H(\epsilon x, u)v \ \text{ se } \ v<0. \end{cases}$$

Usando (3.7), obtemos

$$\Psi^0_{\epsilon,\beta}(u,v) \leq \int_{\{v<0\}} \underline{g}_H((\epsilon x, u), v)dx + \int_{\{v>0\}} \overline{g}_H((\epsilon x, u), v)dx, \ \forall v \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N). \tag{3.8}$$

Recorde que o nosso objetivo é provar que dada $\rho \in \partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u)$, temos

$$\underline{g}_H(\epsilon x, u(x)) \leq \rho(x) \leq \overline{g}_H(\epsilon x, u(x)) \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Suponha, por contradição, que existe um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, tal que, $|A| > 0$ e

$$\rho(x) < \underline{g}_H(\epsilon x, u(x)) \text{ q.t.p em } A.$$

Assim, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que o conjunto $A_0 = A \cap B_{n_0}(0)$, satisfaz

$$0 < |A_0| < \infty \text{ e } \rho(x) < \underline{g}_H(\epsilon x, u(x)) \text{ q.t.p em } A_0. \tag{3.9}$$

A função $w(x) = -\chi_{A_0}(x) \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, onde $\chi_{A_0}(x)$ é a função característica do conjunto A_0. Assim,

$$-\int_{A_0} \rho dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(-\chi_{A_0}(x))dx = \left\langle \rho, (-\chi_{A_0})\right\rangle \leq \Psi^0_{\epsilon,\beta}(u, (-\chi_{A_0})),$$

por (3.8), temos

$$-\int_{A_0} \rho dx \leq \int_{A_0} \underline{g}_H(\epsilon x, u)(-\chi_{A_0}(x))dx = -\int_{A_0} \underline{g}_H(\epsilon x, u)dx,$$

ou seja,

$$\int_{A_0} \rho dx \geq \int_{A_0} \underline{g}_H(\epsilon x, u)dx$$

o que contradiz (3.9). Assim,

$$\underline{g}_H(\epsilon x, u(x)) \leq \rho(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

De modo análogo, prova-se que

$$\rho(x) \leq \overline{g}_H(\epsilon x, u(x)) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,$$

o que conclui a demonstração do item (ii). □

Observação 3.4 *Segue do Teorema 2.2 de [25], veja o Teorema C.1 no Apêndice C, que se*

$\widehat{\Psi}_{\epsilon,\beta} = \Psi_{\epsilon,\beta}\big|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$, *temos*

$$\partial\widehat{\Psi}_{\epsilon,\beta}(u) \subset \partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u), \;\; u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

além disso, se $\rho \in \partial\widehat{\Psi}_{\epsilon,\beta}(u)$,

$$\rho(x) \in \left[\underline{g}_H(\epsilon x, u(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u(x))\right] \; q.t.p \; em \, \mathbb{R}^N, \; \forall \, u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Por simplicidade de notação continuaremos a denotar $\Psi_{\epsilon,\beta}$ *por* $\widehat{\Psi}_{\epsilon,\beta}$.

Consideremos o funcional penalizado associado ao problema $(P_{\epsilon,\beta})_a$

$$J_{\epsilon,\beta} : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$$

$$J_{\epsilon,\beta}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G_H(\epsilon x, u),$$

onde $G_H(x,t) = \int_0^t g_H(x,s)ds$.

Denotando

$$Q_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(\epsilon x)|u|^2\right), \; u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

temos $Q_\epsilon \in C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Portanto, $J_{\epsilon,\beta}$ está bem definido e $J_{\epsilon,\beta} \in Lip_{loc}(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Como $J_{\epsilon,\beta}(u) = Q_\epsilon(u) - \Psi_{\epsilon,\beta}(u)$, temos

$$\partial J_{\epsilon,\beta}(u) = \{Q'_\epsilon(u)\} - \partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u), \; \forall \, u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Veremos que uma das vantagens de trabalharmos com o funcional penalizado é que ele satisfaz a condição (PS). Além disso, veremos que pelo Lema 3.2, item (ii), $J_{\epsilon,\beta}$ satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha o que nos permitirá obter uma solução para $(P_{\epsilon,\beta})_a$.

Lema 3.3 *O funcional* $J_{\epsilon,\beta}$ *satisfaz*

(i) *Existem* $r, \rho > 0$, *tais que* $J_{\epsilon,\beta}(u) \geq \rho > 0 \;\; \forall \, u \in H^1(\mathbb{R}^N); \|u\| = r$.

(ii) *Existe* $e \in B_r(0)^c$ *com* $J_{\epsilon,\beta}(e) < 0$.

Demonstração: Note que $J_{\epsilon,\beta}(0) = 0$ e

$$J_{\epsilon,\beta}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G_H(\epsilon x, u).$$

Por (3.5), sabemos que

$$|G_H(x,s)| \leq \frac{C_\beta}{p+1}|s|^{p+1}, \ \forall\ (x,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Assim,

$$J_{\epsilon,\beta}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_\beta}{p+1}\|u\|^{p+1}.$$

Logo, tomando $r = r_\beta > 0$, tal que

$$\frac{1}{2}r^2 - \frac{C_\beta}{p+1}r^{p+1} := \rho > 0,$$

temos

$$J_{\epsilon,\beta}(u) \geq \rho > 0 \ \ \forall\ u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ \|u\| = r.$$

Agora, para cada $\epsilon, \beta > 0$, considere uma função $\psi = \psi(\epsilon,\beta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, isto é, ψ é uma função teste que depende de ϵ e β, tal que $\psi \geq 0$ e $K =: supp\, \psi$, com

$$K \subset \Omega_\epsilon \quad \text{ e } \quad K \cap \big\{\psi > \beta\big\} \neq \emptyset,$$

onde $\Omega_\epsilon := \big\{x \in \mathbb{R}^N : \epsilon x \in \Omega\big\}$ e $\big\{\psi > \theta\big\} := \big\{x \in \mathbb{R}^N : \psi(x) > \theta\big\}$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Temos

$$J_{\epsilon,\beta}(t\psi) \leq \frac{t^2}{2}\|\psi\|^2 - \int_{K\cap\{\psi>\beta\}} G_H(\epsilon x, t\psi).$$

Note que se $s > 0$ e $x \in K \subset \Omega_\epsilon$,

$$G_H(\epsilon x, s) = \int_0^t g_H(\epsilon x, s)ds = \int_0^t H(s-\beta)f(s)ds,$$

logo,

$$G_H(\epsilon x, s) = \begin{cases} 0 \text{ se } s \leq \beta \\ F(s) - F(\beta) \text{ se } s > \beta \text{ e } x \in \Omega_\epsilon. \end{cases}$$

Note que dado $x \in K \cap \{\psi > \beta\}$ e $t \geq 1$, temos $t\psi(x) > \beta$. Logo, $G_H(\epsilon x, t\psi) = F(t\psi) - F(\beta)$ em $K \cap \{\psi > \beta\}$. Assim,

$$\int_{K\cap\{\psi>\beta\}} G_H(\epsilon x, t\psi)dx = \int_{K\cap\{\psi>\beta\}} F(t\psi)dx - F(\beta)\big|K \cap \{\psi > \beta\}\big|.$$

Pelo Lema 3.2, item (ii),

$$\int_{K\cap\{\psi>\beta\}} G_H(\epsilon x, t\psi)dx \geq C_1 t^\theta \int_{K\cap\{\psi>\beta\}} \psi^\theta dx - C_2\big|K\cap\{\psi > \beta\}\big| - F(\beta)\big|K\cap\{\psi > \beta\}\big|, \ \forall\, t \geq 1.$$

Assim,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\psi) \leq \frac{t^2}{2}\|\psi\|^2 - C_1 t^\theta \int_{K\cap\{\psi>\beta\}} \psi^\theta dx + (F(\beta) + C_2)\big|K \cap \{\psi > \beta\}\big|, \ \forall\, t \geq 1.$$

Como $\theta > 2$, tomando $t_0 = t_0(\epsilon, \beta) > 0$ suficientemente grande e $e = t_0\psi$, $J_{\epsilon,\beta}(e) < 0$.

□

Com o objetivo de mostrar que $J_{\epsilon,\beta}$ satisfaz a condição (PS), vamos provar dois lemas.

Lema 3.4 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para $J_{\epsilon,\beta}$, então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para $J_{\epsilon,\beta}$, isto é,

$$J_{\epsilon,\beta}(u_n) \to d \text{ e } \lambda_{\epsilon,\beta}(u_n) \to 0.$$

Seja $(w_n) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, tal que, $\lambda_{\epsilon,\beta}(u_n) = \|w_n\|_* = o_n(1)$. Como $w_n \in \partial J_{\epsilon,\beta}(u_n)$, existe $\rho_n \in \partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u_n)$, tal que

$$w_n = Q'_\epsilon(u_n) - \rho_n,$$

logo,

$$\big\langle w_n, \varphi\big\rangle = \big\langle Q'_\epsilon(u_n), \varphi\big\rangle - \big\langle \rho_n, \varphi\big\rangle, \ \ \forall\, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.10}$$

Note que a sequência $\big(J_{\epsilon,\beta}(u_n)\big)$ é limitada e

$$-\frac{1}{\theta}\big\langle w_n, u_n\big\rangle \leq \frac{1}{\theta}\|w_n\|_*\|u_n\| \leq C\|u_n\|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Agora, observe que como

$$J_{\epsilon,\beta}(u_n) \leq C \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\theta}\big\langle w_n, u_n\big\rangle \leq C\|u_n\|, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

fazendo $\varphi = u_n$ em (3.10), temos

$$\begin{aligned} C + C\|u_n\| &\geq J_{\epsilon,\beta}(u_n) - \frac{1}{\theta}\big\langle w_n, u_n\big\rangle \\ &= \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\big)\|u_n\|^2 - \int_{\{u_n>\beta\}} G(\epsilon x, u_n) + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n. \end{aligned}$$

Como $\rho_n \in \partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u_n)$, pela Proposição 3.1,

$$\rho_n(x) \in \big[\underline{g}_H(\epsilon x, u_n(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u_n(x))\big].$$

Sendo $g_H, \underline{g}_H \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n \geq \int_{\mathbb{R}^N} \underline{g}_H(\epsilon x, u_n)u_n = \int_{\{u_n>\beta\}} g_H(\epsilon x, u_n)u_n \geq \int_{\{u_n>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} g_H(\epsilon x, u_n)u_n,$$

por $(g_4)_{ii}$,

$$\frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n \geq \frac{2}{\theta}\int_{\{u_n>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} G_H(\epsilon x, u_n),$$

assim,

$$C + C\|u_n\| \geq \Big(\frac{\theta-2}{2\theta}\Big)\|u_n\|^2 + \frac{2-\theta}{\theta}\int_{\{u_n>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} G(\epsilon x, u_n).$$

Novamente, por $(g_4)_{ii}$,

$$\int_{\{u_n>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} G(\epsilon x, u) \leq \frac{1}{2k}\int_{\{u_n>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} V(\epsilon x)|u_n|^2 \leq \frac{1}{2k}\|u_n\|^2.$$

Como $\theta > 2$, tem-se $\left(\frac{2-\theta}{\theta}\right) < 0$. Assim,

$$C + C\|u_n\| \geq \Big(\frac{\theta-2}{2\theta}\Big)\|u_n\|^2 + \frac{1}{2k}\Big(\frac{2-\theta}{\theta}\Big)\|u_n\|^2,$$

ou seja,

$$C + C\|u_n\| \geq \Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\frac{\theta-2}{2\theta}\|u_n\|^2.$$

Como $k > 1$ e $\theta > 2$ concluimos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

A demonstração do próximo lema usa a Proposição 3.1 e os argumentos do Lema 3.3 em [8]. Para a comodidade do leitor faremos a demonstração.

Lema 3.5 *Seja* (u_n) *uma sequência* $(PS)_d$ *para* $J_{\epsilon,\beta}$. *Então, dado* $\xi > 0$, *existe* $R = R(\xi) > 0$, *tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x)|u_n|^2 < \xi.$$

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para $J_{\epsilon,\beta}$, isto é,

$$J_{\epsilon,\beta}(u_n) \to d \;\text{ e }\; \lambda_{\epsilon,\beta}(u_n) \to 0.$$

Seja $(w_n) \subset \partial J_{\epsilon,\beta}(u_n)$, tal que $\lambda_{\epsilon,\beta}(u_n) = \|w_n\|_* = o_n(1)$. Como $w_n \in \partial J_{\epsilon,\beta}(u_n)$, existe $\rho_n \in \partial \Phi_{\epsilon,\beta}(u_n)$, tal que

$$\big\langle w_n, \varphi \big\rangle = \big\langle Q'_\epsilon(u_n), \varphi \big\rangle - \big\langle \rho, \varphi \big\rangle, \;\; \forall\, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.11}$$

Seja $\eta_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } B_{\frac{R}{2}}(0) \\ 1 & \text{em } B_R(0)^c, \end{cases} \tag{3.12}$$

com

$$0 \leq \eta_R(x) \leq 1 \;\text{ e }\; |\nabla \eta_R(x)| \leq \frac{C}{R}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende de R.

Observe que $(\eta_R u_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois pelo lema anterior (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla(\eta_R u_n) = \eta_R \nabla u_n + u_n \nabla \eta_R$.

Por (3.11),

$$\left\langle Q'_\epsilon(u_n), (\eta_R u_n)\right\rangle = \left\langle w_n + \rho_n, \eta_R u_n\right\rangle = \left\langle \rho_n, \eta_R u_n\right\rangle + o_n(1),$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R |\nabla u_n|^2 + \eta_R V(\epsilon x) u_n^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \eta_R u_n + \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla \eta_R \nabla u_n + o_n(1).$$

Pela Proposição 3.1,

$$\rho_n(x) \in [\underline{g}_H(\epsilon x, u_n(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u_n(x))],$$

usando este fato e as definições de $\underline{g}_H$ e $\overline{g}_H$, temos $\rho_n \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \eta_R u_n &= \int_{\{u_n \geq \beta\}} \rho_n \eta_R u_n \leq \int_{\{u_n \geq \beta\}} \overline{g}_H(\epsilon x, u_n) u_n \eta_R = \int_{\{u_n \geq \beta\}} g(\epsilon x, u_n) u_n \eta_R \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n) u_n \eta_R,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do fato de $g(x, s) = 0, \forall\, s < 0$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R |\nabla u_n|^2 + \eta_R V(\epsilon x) u_n^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} g(\epsilon x, u_n) u_n \eta_R + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n||\nabla \eta_R \nabla u_n| + o_n(1).$$

Fixemos $R > 0$, tal que $\Omega_\epsilon \subset B_{\frac{R}{2}}(0)$ e usando $(g_4)_{ii}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x) u_n^2) \leq \frac{1}{k} \int_{B_{\frac{R}{2}}(0)^c} V(\epsilon x)|u_n|^2 \eta_R + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n||\nabla u_n \nabla \eta_R| + o_n(1),$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_R (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x) u_n^2) \leq \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R |\nabla \eta_R|^2 + \eta_R V(\epsilon x)|u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n||\nabla u_n \nabla \eta_R| + o_n(1),$$

pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\eta_R(|\nabla u_n|^2+V(\epsilon x)u_n^2) &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|u_n||\nabla u_n\nabla\eta_R|+o_n(1)\\ &\leq |u_n|_{L^2}|\nabla u_n\nabla\eta_R|_{L^2}+o_n(1).\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.4, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, logo também é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\eta_R(|\nabla u_n|^2+V(\epsilon x)u_n^2)\leq\frac{MC}{R}+o_n(1).$$

Fixado $\xi>0$ e fazendo $n\to\infty$,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}(|\nabla u_n|^2+V(\epsilon x)u_n^2)\leq\frac{\widetilde{C}}{R}<\xi,$$

para $R>0$ suficientemente grande. □

Combinando o Lema 3.2 com a Proposição 3.1 e adaptando o argumento utilizado na prova da Proposição 3.1 em [8] provaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.2 *O funcional $J_{\epsilon,\beta}$ satisfaz a condição (PS) em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Seja $(u_n)\subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência $(PS)_d$ para $J_{\epsilon,\beta}$, isto é,

$$J_{\epsilon,\beta}(u_n)\to d\ \text{ e }\ \lambda_{\epsilon,\beta}(u_n)\to 0.$$

Sejam $w_n\in\partial J_{\epsilon,\beta}(u_n)$ e $\rho_n\in\partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u_n)$ tais que $\|w_n\|_*=\lambda_{\epsilon,\beta}(u_n)=o_n(1)$ e $w_n=Q'_\epsilon(u_n)-\rho_n$, ou seja,

$$\big\langle w_n,\varphi\big\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla\varphi+V(\epsilon x)u_n\varphi-\int_{\mathbb{R}^N}\rho_n\varphi,\ \ \forall\,\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.13}$$

Como $\|w_n\|_*=o_n(1)$, $\big|\big\langle w_n,u_n\big\rangle\big|\leq\|w_n\|_*\|u_n\|$ e pelo Lema 3.4, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, então, $\big\langle w_n,u_n\big\rangle=o_n(1)$. Assim,

$$\|u_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}\rho_nu_n=\big\langle w_n,u_n\big\rangle=o_n(1)$$

ou seja,

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n + o_n(1). \tag{3.14}$$

Pela Proposição 3.1,

$$\rho_n(x) \in [\underline{g}_H(\epsilon x, u_n(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u_n(x))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{3.15}$$

Como $\underline{g}_H \geq 0$,

$$0 \leq \rho_n(x) \leq \overline{g}_H(\epsilon x, u_n(x)).$$

Usando (3.4) e a imersão contínua de $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n|^{\frac{p+1}{p}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{g}_H(\epsilon x, u_n)|^{\frac{p+1}{p}} = \int_{\{u_n \geq \beta\}} |g(\epsilon x, u_n)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C_\beta \int_{\{u_n \geq \beta\}} |u_n|^{p+1} \leq C_\beta C \|u_n\|^{p+1},$$

ou seja,

$$|\rho_n|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \leq C_\beta C \|u_n\|^p.$$

Pela limitação de (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$, (ρ_n) é limitada em $L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Logo, a menos de subsequência,

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \text{ em } L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad u_n \rightharpoonup u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.16}$$

Afirmação:

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \rho u. \tag{3.17}$$

De fato, como $\|w_n\|_* = o_n(1)$ e $\left|\langle w_n, u\rangle\right| \leq \|w_n\|_* \|u\|$, então, $\langle w_n, u\rangle = o_n(1)$. Note que por (3.16),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u \to \int_{\mathbb{R}^N} \rho u \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u + V(\epsilon x) u_n u \to \|u\|^2.$$

Assim, tomando $\varphi = u$ em (3.13) e fazendo $n \to \infty$, obtemos (3.17).

Agora, afirmamos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \rho_n u_n\right| = o_R(1). \tag{3.18}$$

De fato, observe que por (3.15) e o fato de $\rho_n \geq 0$,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \rho_n u_n\Big| = \int_{\{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)\} \cap \{u_n \geq \beta\}} \rho_n u_n \leq \int_{\{u_n \geq \beta\}} \rho_n u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n,$$

como $(\eta_R u_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $\big\langle w_n, (\eta_R u_n)\big\rangle = o_n(1)$. Por (3.13)

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \rho_n u_n\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla(\eta_R u_n) + V(\epsilon x) u_n (\eta_R u_n) + o_n(1) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_R (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x) u_n^2) + \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla u_n \nabla \eta_R + o_n(1) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0))} \eta_R (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x) u_n^2) + |u_n|_{L^2} |\nabla u_n \nabla \eta_R|_{L^2} + o_n(1), \end{aligned}$$

onde a função η_R é a função definida na demonstração do lema anterior.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e a limitação de (u_n) em $L^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \rho_n u_n\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} (|\nabla u_n|^2 + V(\epsilon x)|u_n|^2) + \frac{M}{R} + o_n(1),$$

para $R > 0$ suficientemente grande.

Assim, pelo Lema 3.5, segue nossa afirmação em (3.18).

Agora, observe que

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n - \int_{\mathbb{R}^N} \rho u\Big| \leq \Big|\int_{B_R(0)} \rho_n u_n - \int_{B_R(0)} \rho u\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \rho_n u_n\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \rho u\Big|.$$

Usando o fato de que ρu é integrável e (3.18), obtemos

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n - \int_{\mathbb{R}^N} \rho u\Big| \leq \Big|\int_{B_R(0)} \rho_n u_n - \int_{B_R(0)} \rho u\Big| + o_R(1). \tag{3.19}$$

Note que para cada $R > 0$,

$$\int_{B_R(0)} \rho_n u_n \to \int_{B_R(0)} \rho u. \tag{3.20}$$

De fato, observe que como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, por imersão compacta,

$$u_n \to u \text{ em } L^{\frac{p+1}{p}}(B_R(0)),$$

desde que

$$u_n \to u \text{ em } L^{\frac{p+1}{p}}(B_R(0)) \qquad \text{e} \qquad \rho_n \rightharpoonup^* \rho \text{ em } L^{p+1}(B_R(0)) = \left(L^{\frac{p+1}{p}}(B_R(0))\right)^*$$

obtemos dessas duas convergências a relação (3.20).

Por (3.19) e (3.20),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n \to \int_{\mathbb{R}^N} \rho u. \tag{3.21}$$

Por (3.21) e (3.17),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n = \|u\|^2 + o_n(1). \tag{3.22}$$

Por (3.14) e (3.22),

$$\|u_n\|^2 = \|u\|^2 + o_n(1).$$

Assim,

$$u_n \to u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N).$$

$\square$

Os itens (i) e (ii) do próximo teorema é uma versão, para a não linearidade f, do Teorema 3.1 de [8], onde $f(s) = s^p$. Nosso próximo teorema fornece a existência de solução para $(P_{\epsilon,\beta})_a$ e traz propriedades dos conjuntos $\Gamma_{\epsilon,\beta}$ e $\Gamma^a_{\epsilon,\beta}$.

Teorema 3.4 *Suponha que V satisfaz $(A_0), (A_1)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$. Para cada $\epsilon > 0$ e $\beta \in (0, a)$, o problema auxiliar $(P_{\epsilon,\beta})_a$ possui uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$, onde a é a constante usada na definição de $\widetilde{f}$. Além disso, se a função $s \mapsto \frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$, temos*

(i) O conjunto $\Gamma_{\epsilon,\beta} := \left\{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) = \beta\right\}$ tem medida de Lebesgue nula.

(ii) $-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x)+V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x)=H(u_{\epsilon,\beta}(x)-\beta)g(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta}(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) O conjunto $\Gamma^a_{\epsilon,\beta}:=\left\{x\in\mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x)>a\right\}$ *tem medida de Lebesgue positiva.*

Demonstração: Pelo Lema 3.3 e a Proposição 3.2 o funcional $J_{\epsilon,\beta}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Portanto, existe $u_{\epsilon,\beta}\in H^1(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$J_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta})=c_{\epsilon,\beta}>0 \ \text{ e } \ 0\in\partial J_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta}),$$

onde

$$c_{\epsilon,\beta}=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J_{\epsilon,\beta}(\gamma(t)) \ \text{ e } \ \Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^N)):\gamma(0)=0 \ \text{ e } \ J_{\epsilon,\beta}(\gamma(1))<0\}.$$

Assim, existe $\rho_{\epsilon,\beta}\in\partial\Psi_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta})$, tal que

$$0=Q'_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta})-\rho_{\epsilon,\beta},$$

ou seja, $u_{\epsilon,\beta}$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon,\beta}+V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}=\rho_{\epsilon,\beta} \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u_{\epsilon,\beta}\in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Recorde que pela Proposição 3.1,

$$\rho_{\epsilon,\beta}(x)\in[\underline{g}_H(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta}(x)),\overline{g}_H(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta}(x))] \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N. \tag{3.23}$$

Como $\rho_{\epsilon,\beta}\in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, por regularidade elíptica $u_{\epsilon,\beta}\in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)\cap H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x)+V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x)\in[\underline{g}_H(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta}(x)),\overline{g}_H(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta}(x))] \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N. \tag{3.24}$$

Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_{\epsilon,\beta}\nabla\varphi+\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}\varphi=\int_{\mathbb{R}^N}\rho_{\epsilon,\beta}\varphi, \ \ \forall\,\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N),$$

tomando $\varphi = u_{\epsilon,\beta}^{-} = \min\{u_{\epsilon,\beta}, 0\}$ e lembrando que $u_{\epsilon,\beta} = u_{\epsilon,\beta}^{+} + u_{\epsilon,\beta}^{-}$, temos

$$\|u_{\epsilon,\beta}^{-}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_{\epsilon,\beta} \nabla u_{\epsilon,\beta}^{-} + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x) u_{\epsilon,\beta} u_{\epsilon,\beta}^{-} = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{\epsilon,\beta} u_{\epsilon,\beta}^{-} \leq 0,$$

assim, $u_{\epsilon,\beta}^{-} = 0$, logo, $u_{\epsilon,\beta} = u_{\epsilon,\beta}^{+} \geq 0$. Pela desigualdade de Harnack, veja [61], Teorema 8.20,

$$u_{\epsilon,\beta} > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Portanto, $u_{\epsilon,\beta}$ é solução fraca do problema auxiliar truncado $(P_{\epsilon,\beta})_a$.

Agora, supondo que a função $\frac{f(s)}{s}$ seja não decrescente em $[0, a]$, o conjunto

$$\Gamma_{\epsilon,\beta} := \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) = \beta\}$$

tem medida de Lebesgue nula, $\forall\ \epsilon > 0$ e $\beta \in (0, a)$.

De fato, suponha por contradição que $|\Gamma_{\epsilon,\beta}| > 0$, pelo Teorema de Stampacchia, veja [65], temos $-\Delta u_{\epsilon,\beta} = 0$ q.t.p em $\Gamma_{\epsilon,\beta}$. Por (3.24), segue que

$$V(\epsilon x) u_{\epsilon,\beta}(x) \in [\underline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x))] \ \text{ q.t.p em } \ \Gamma_{\epsilon,\beta}. \tag{3.25}$$

Como $g(x, s) = \chi_\Omega(x) f(s) + (1 - \chi_\Omega(x)) \widetilde{f}(s),\ \forall\ (x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ e

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} f(s), & \text{se} \quad s \leq a, \\ \frac{V_0}{k} s, & \text{se} \quad s \geq a, \end{cases}$$

onde $a > \beta > 0$ e $k > 1$ são tais que $\frac{f(a)}{a} = \frac{V_0}{k}$. Então, para $s = \beta$

$$g(\epsilon x, \beta) = \chi_\Omega(\epsilon x) f(\beta) + (1 - \chi_\Omega(\epsilon x)) f(\beta) = f(\beta) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Usando as definições de $\underline{g}_H$ e $\overline{g}_H$, veja (3.3), temos para $s = \beta$,

$$[\underline{g}_H(\epsilon x, s), \overline{g}_H(\epsilon x, s)] = [0, f(\beta)].$$

Assim, por (3.25),

$$V(\epsilon x)\beta \in [0, f(\beta)] \text{ q.t.p em } \Gamma_{\epsilon,\beta}.$$

Desde que $0 < \beta < a$, $1 < k$ e a função $\frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$,

$$V(\epsilon x) \leq \frac{f(\beta)}{\beta} \leq \frac{f(a)}{a} = \frac{V_0}{k} < V_0 \text{ q.t.p em } \Gamma_{\epsilon,\beta},$$

o que contradiz o fato de $V(x) \geq V_0$. Logo,

$$|\Gamma_{\epsilon,\beta}| = 0,$$

onde $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável A.

Como para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, a função $s \mapsto g_H(\epsilon x, s)$ é contínua quando $s \neq \beta$, usando as definições de $\underline{g}_H$ e $\overline{g}_H$, veja (3.3), temos $\underline{g}_H(\epsilon x, s) = \overline{g}_H(\epsilon x, s)$ quando $s \neq \beta$. Pela relação em (3.24) e o fato de $|\Gamma_{\epsilon,\beta}| = 0$, concluímos que $u_{\epsilon,\beta}$ é uma solução forte de $(P_{\epsilon,\beta})_a$, isto é,

$$-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) = H(u_{\epsilon,\beta}(x) - \beta)g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x)) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Agora, considere o conjunto $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} := \left\{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > a\right\}$. Suponha, por contradição, que $|\Gamma^a_{\epsilon,\beta}| = 0$, então,

$$u_{\epsilon,\beta}(x) \leq a \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Observe que

$$\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} g_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})u_{\epsilon,\beta} = \int_{\{u_{\epsilon,\beta} > \beta\}} \frac{g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})}{u_{\epsilon,\beta}} u^2_{\epsilon,\beta} = \int_{\{\beta < u_{\epsilon,\beta} \leq a\}} \frac{g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})}{u_{\epsilon,\beta}} u^2_{\epsilon,\beta}.$$

Desde que $g(\epsilon x, s)$ e $f(s)$ são iguais quando $s \leq a$, $\frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$ e $\frac{f(a)}{a} = \frac{V_0}{k}$,

$$\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 = \int_{\{\beta < u_{\epsilon,\beta} \leq a\}} \frac{f(u_{\epsilon,\beta})}{u_{\epsilon,\beta}} u^2_{\epsilon,\beta} \leq \int_{\{\beta < u_{\epsilon,\beta} \leq a\}} \frac{f(a)}{a} u^2_{\epsilon,\beta} = \frac{1}{k} \int_{\{\beta < u_{\epsilon,\beta} \leq a\}} V_0 u^2_{\epsilon,\beta} \leq \frac{1}{k}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2,$$

ou seja,

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 \leq 0,$$

como $k>1$, concluímos que $u_{\epsilon,\beta}\equiv 0$, o que gera uma contradição. Portanto, $|\Gamma^a_{\epsilon,\beta}|>0$. $\square$

Observação 3.5 *Como feito na introdução, um simples argumento de contradição e o item (ii) mostram que* $|\Gamma^\beta_{\epsilon,\beta}|>0$, *onde* $\Gamma^\beta_{\epsilon,\beta}=\{x\in\mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x)>\beta\}$. *Mas o item (iii), do Teorema 3.4, mostra que além de* $|\Gamma^\beta_{\epsilon,\beta}|>0$, *também* $|\Gamma^a_{\epsilon,\beta}|>0$. *Um fato importante é que como consequência do Lema 3.9 e 3.10 veremos que* $u_{\epsilon,\beta}\leq a$ *em* $\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\epsilon$. *Portanto,* $\Gamma^a_{\epsilon,\beta}\subset\Omega_\epsilon$.

O próximo lema é importante para garantirmos a limitação da solução fraca $(u_{\epsilon,\beta})$ de $(P_{\epsilon,\beta})_a$, obtida no Teorema 3.4. Isso nos ajudará a provar que $(u_{\epsilon,\beta})$ é solução fraca do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$ para $\epsilon>0$ pequeno e $\beta\in(0,a)$.

Lema 3.6 *Suponha que* V *satisfaz* $(A_0),(A_1)$ *e* f *satisfaz* $(f_1)-(f_3)$. *Então, a solução fraca* $u_{\epsilon,\beta}$ *do problema auxiliar* $(P_{\epsilon,\beta})_a$, *obtida no Teorema 3.4, satisfaz*

$$\left(1-\frac{1}{2K}\right)\frac{\theta-2}{2\theta}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 \leq c_{\epsilon,\beta},\quad \forall\, \epsilon>0 \text{ e } \beta\in(0,a).$$

Demonstração: Seja $u_{\epsilon,\beta}$ a solução fraca de $(P_{\epsilon,\beta})_a$ obtida no teorema anterior. Como vimos na demonstração do Teorema 3.4, $u_{\epsilon,\beta}$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon,\beta}+V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}=\rho_{\epsilon,\beta} \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u_{\epsilon,\beta}\in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde

$$\rho_{\epsilon,\beta}(x)\in[\underline{g}_H(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta}(x)),\overline{g}_H(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta}(x))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{3.26}$$

Como $\underline{g}_H\geq 0$, por (3.26),

$$\int_{\mathbb{R}^N}\underline{g}(\epsilon x,u_{\epsilon,\beta})\varphi \leq \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_{\epsilon,\beta}\nabla\varphi+V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}\varphi,\quad \forall\, 0\leq\varphi\in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Tomando $\varphi = u_{\epsilon,\beta}$ e usando a definição de $\underline{g}$, veja (3.3), obtemos

$$0 \leq \|u_{\epsilon,\beta}\|^2 - \int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}} g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})u_{\epsilon,\beta}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} c_{\epsilon,\beta} = J_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta}) &\geq J_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta}) - \frac{1}{\theta}\left(\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 - \int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}} g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})u_{\epsilon,\beta}\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}} \Big[g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})u_{\epsilon,\beta} - \theta G(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})\Big], \end{aligned}$$

por $(g_4)_i$,

$$c_{\epsilon,\beta} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} \Big[g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})u_{\epsilon,\beta} - \theta G(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})\Big],$$

por $(g_4)_{ii}$,

$$c_{\epsilon,\beta} \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} \Big[2G(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}) - \theta G(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta})\Big],$$

ou seja,

$$c_{\epsilon,\beta} \geq \frac{\theta-2}{2\theta}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 + \frac{2-\theta}{\theta}\int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} G(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}).$$

Novamente por $(g_4)_{ii}$,

$$\int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} G(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}) \leq \frac{1}{2k}\int_{\{u_{\epsilon,\beta}>\beta\}\cap\Omega_\epsilon^c} V(\epsilon x)|u_{\epsilon,\beta}|^2 \leq \frac{1}{2k}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2.$$

Como $\theta > 2$, obtemos

$$c_{\epsilon,\beta} \geq \frac{\theta-2}{2\theta}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 + \frac{2-\theta}{\theta}\frac{1}{2k}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2,$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{1}{2k}\right)\frac{\theta-2}{2\theta}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 \leq c_{\epsilon,\beta},$$

o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.7 *Suponha que V satisfaz $(A_0), (A_1)$ e f satisfaz $(f_1)-(f_3)$. Seja $u_{\epsilon,\beta}$ a solução fraca de $(P_{\epsilon,\beta})_a$ obtida pelo Teorema 3.4. Dado $\epsilon_0 > 0$, existe uma constante $M = M(a, \epsilon_0) > 0$, tal que,*

$$\|u_{\epsilon,\beta}\| \leq M, \ \ \forall\, \epsilon \in (0, \epsilon_0], \ \ \forall \ \ \beta \in (0, a),$$

onde a é a constante usada na definição da função $\widetilde{f}$, veja (3.2).

Demonstração: Dados $\epsilon_0 > 0$ e $\beta \in (0, a)$, fixemos um ponto $x_0 \in \Omega$. Considere uma função teste $\varphi = \varphi(a)$, isto é, φ depende somente a, tal que, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 2a])$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2a & \text{em} \quad B_r(x_0) \\ 0 & \text{em} \quad B_{2r}(x_0)^c, \end{cases}$$

onde $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$.

Note que

$$\begin{aligned} J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) &= \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 + \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x)|\varphi|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G_H(\epsilon x, t\varphi) \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + V_\infty|\varphi|^2) - \int_{\mathbb{R}^N} G_H(\epsilon x, t\varphi). \end{aligned}$$

Seja a constante

$$A_0 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^2 + V_\infty|\varphi|^2).$$

Observe que como $G_H \geq 0$,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq \frac{1}{2}A_0, \ \forall\, t \in [0, 1] \tag{3.27}$$

e

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}A_0 - \int_{\{\varphi > a\} \cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0)} G_H(\epsilon x, t\varphi), \ \ \forall\, t \geq 1.$$

Como $g_H(\epsilon x, s) = H(s-\beta)g(\epsilon x, s)$ e $g(\epsilon x, s) = \chi_\Omega(\epsilon x)f(s) + (1 - \chi_\Omega(\epsilon x))\widetilde{f}(s)$, então,

$$G_H(\epsilon x, s) = \begin{cases} 0 \ \text{ se } \ s \leq \beta, \\ F(s) - F(\beta) \ \text{ se } \ s > \beta \ \text{ e } \ x \in \Omega_\epsilon. \end{cases}$$

Para cada $\epsilon > 0$, $\{\varphi > a\} \cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0) \neq \emptyset$, pois $\varphi \equiv 2a$ em $B_r(x_0)$. Dado $x \in \{\varphi > a\} \cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0)$, temos $\epsilon x \in B_r(x_0) \subset \Omega$, logo, $\{\varphi > a\} \cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0) \subset \Omega_\epsilon$. Desde que $a > \beta$ e $\varphi \equiv 2a$ em $B_r(x_0)$, temos

$$G_H(\epsilon x, t\varphi) = F(t\varphi) - F(\beta) \text{ em } \{\varphi > a\} \cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0), \ \forall\, t \geq 1.$$

Assim,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}A_0 - \int_{\{\varphi>a\}\cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0)} F(t\varphi)dx + F(\beta)|\{\varphi > a\} \cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0)|, \ \forall\, t \geq 1.$$

Pela definição da função φ, o conjunto $\{\varphi > a\} \subset \Omega$, logo,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}A_0 - \int_{\{\varphi>a\}\cap B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0)} F(t\varphi)dx + F(\beta)|\Omega|, \ \forall\, t \geq 1.$$

Agora, fixado $\epsilon_0 > 0$,

$$B_{\frac{r}{\epsilon_0}}(x_0) \subset B_{\frac{r}{\epsilon}}(x_0), \ \forall\, \epsilon \in (0, \epsilon_0],$$

logo,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}A_0 - \int_{\{\varphi>a\}\cap B_{\frac{r}{\epsilon_0}}(x_0)} F(t\varphi)dx + F(\beta)|\Omega|, \ \forall\, t \geq 1, \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

Agora, como $F(t) \geq C_1 t^\theta - C_2$ e F é crescente, pois $f(t) > 0$,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}A_0 - C_1 t^\theta \int_{\{\varphi>a\}\cap B_{\frac{r}{\epsilon_0}}(x_0)} |\varphi|^\theta dx + C_2|\{\varphi > a\} \cap B_{\frac{r}{\epsilon_0}}(x_0)| + F(a)|\Omega|, \ \forall\, t \geq 1, \epsilon \in (0, \epsilon_0],$$

assim,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}A_0 - C_1 t^\theta \int_{\{\varphi>a\}\cap B_{\frac{r}{\epsilon_0}}(x_0)} |\varphi|^\theta dx + (C_2 + F(a))|\Omega|, \ \forall\, t \geq 1, \epsilon \in (0, \epsilon_0]. \quad (3.28)$$

Defina a função

$$h(t)=\frac{t^2}{2}A_0-C_1t^\theta\int_{\{\varphi>a\}\cap B_{\frac{r}{\epsilon_0}}(x_0)}|\varphi|^\theta dx+(C_2+F(a))|\Omega|,\ t\geq 0.$$

Como $h(t)\to-\infty$, quando $t\to\infty$, existe um $t_0=t_0(a,\epsilon_0)\geq 1$, tal que

$$J_{\epsilon,\beta}(t_0\varphi)\leq h(t_0)<0,\ \ \forall\,\epsilon\in(0,\epsilon_0],\ \beta\in(0,a).$$

Defina a curva

$$\gamma_0:[0,1]\to H^1(\mathbb{R}^N)$$

$$\gamma_0(s)=st_0\varphi,$$

a curva γ_0 é contínua e

$$\gamma_0(0)=0\quad\text{e}\ \ J_{\epsilon,\beta}(\gamma_0(1))<0,\ \ \forall\,\epsilon\in(0,\epsilon_0],$$

logo, $\gamma_0\in\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],H^1(\mathbb{R}^N)):\ \gamma(0)=0\ \text{ e }\ J_{\epsilon,\beta}(\gamma_0(1))<0\}$.

Pela definição do nível minimax $c_{\epsilon,\beta}$, obtemos

$$c_{\epsilon,\beta}\leq\max_{s\in[0,1]}J_{\epsilon,\beta}(st_0\varphi)=\max_{t\in[0,t_0]}J_{\epsilon,\beta}(t\varphi).\tag{3.29}$$

Por (3.27), (3.28) e a definição de $h(t)$, temos

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi)\leq\begin{cases}\dfrac{A_0}{2} & \text{se}\ \ t\in[0,1],\\ h(t) & \text{se}\ \ t\in[1,t_0].\end{cases}$$

Sendo h contínua e $[1,t_0]$ compacto, existe $K_0=K_0(a,\epsilon_0)=\max_{t\in[1,t_0]}h(t)$. Seja a constante

$$K=K(a,\epsilon_0)=\max\left\{\frac{A_0}{2},K_0\right\},$$

então,

$$J_{\epsilon,\beta}(t\varphi)\leq K,\ \ \forall\,t\in[0,t_0],\epsilon\in(0,\epsilon_0],\beta\in(0,a),$$

assim,

$$\max_{t\in[0,t_0]} J_{\epsilon,\beta}(t\varphi) \leq K, \ \ \forall\, \epsilon \in (0,\epsilon_0], \beta \in (0,a).$$

Por (3.29),

$$c_{\epsilon,\beta} \leq K, \ \ \forall\, \epsilon \in (0,\epsilon_0], \beta \in (0,a).$$

Pelo Lema 3.6,

$$\left(1-\frac{1}{2k}\right)\frac{\theta-2}{2\theta}\|u_{\epsilon,\beta}\|^2 \leq K, \ \ \forall\, \epsilon \in (0,\epsilon_0], \beta \in (0,a),$$

como $\theta > 2$ e $k > 1$, concluímos que existe uma constante $M = M(a,\epsilon_0)$, tal que

$$\|u_{\epsilon,\beta}\| \leq M, \ \ \forall\, \epsilon \in (0,\epsilon_0], \beta \in (0,a).$$

□

O próximo lema é importante para provarmos que o problema $(P_{\epsilon,\beta})$ possui solução.

Lema 3.8 *Suponha que V satisfaz $(A_0),(A_1)$ e f satisfaz $(f_1)-(f_3)$. Sejam $\beta \in (0,a)$, $(\epsilon_n) \subset (0,\infty)$, tal que $\epsilon_n \to 0$, $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ e*

$$v_n(x) = v_{n,\beta}(x) := u_{\epsilon_n,\beta}(x+x_n),$$

onde $u_{\epsilon_n,\beta}$ é solução fraca do problema auxiliar $(P_{\epsilon_n,\beta})_a$ obtida no Teorema 3.4.

Então, $(v_n) \in C(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e (v_n) possui uma subsequência que converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^N$ para uma função $v \in C(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Para mostrarmos esse resultado vamos usar o Método de iteração de Moser, veja [66], que nos permitirá mostrar que (v_n) é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, em seguida usaremos este fato, as imersões de Sobolev e as de Schauder para concluir a demonstração do lema.

Sejam $\beta \in (0,a)$ e $u_{\epsilon_n,\beta}$ a solução fraca do problema truncado $(P_{\epsilon_n,\beta})_a$, obtida pelo

Teorema 3.4, então, $u_{\epsilon_n,\beta} > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e como na demonstração do Teorema 3.4,

$$(P_{\epsilon_n,\beta}) \qquad \begin{cases} -\Delta u_{\epsilon_n,\beta}(z) + V(\epsilon_n z)u_{\epsilon_n,\beta}(z) = \rho_{\epsilon_n,\beta}(z) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N, \\ u_{\epsilon_n,\beta} \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\rho_{\epsilon_n,\beta} \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\rho_{\epsilon_n,\beta}(z) \in [\underline{g}_H(\epsilon_n z, u_{\epsilon_n,\beta}(z)), \overline{g}_H(\epsilon_n z, u_{\epsilon_n,\beta}(z))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Fazendo a mudança de variável $z = x + x_n$ e definindo $v_n(x) := u_{\epsilon_n,\beta}(x + x_n)$ e $\rho_n(x) := \rho_{\epsilon_n,\beta}(x + x_n)$ temos $v_n > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e

$$(P_n) \qquad \begin{cases} -\Delta v_n(x) + V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)v_n(x) = \rho_n(x + x_n) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N, \\ v_n \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde

$$\rho_n(x + x_n) \in [\underline{g}_H(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n(x)), \overline{g}_H(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n(x))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $L > 0$ defina a função

$$v_{L,n} = \begin{cases} v_n, & \text{se } v_n \leq L \\ L, & \text{se } v_n \geq L, \end{cases}$$

$$z_{L,n} = v_{L,n}^{2(\gamma-1)} v_n \quad \text{e} \quad w_{L,n} = v_n v_{L,n}^{\gamma-1},$$

com $\gamma > 1$ a ser escolhido posteriormente.

Usando $z_{L,n}$ como função teste em (P_n),

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla z_{L,n} + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) v_n z_{L,n} = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x + x_n) z_{L,n}.$$

Observe que

$$\nabla z_{L,n} = 2(\gamma - 1) v_{L,n}^{2\gamma-3} v_n \nabla v_{L,n} + v_{L,n}^{2(\gamma-1)} \nabla v_n,$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla z_{L,n} = \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_n|^2 + 2(\gamma-1) \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2\gamma-3} v_n \nabla v_{L,n} \nabla v_n,$$

assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_n|^2 &= -2(\gamma-1) \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2\gamma-3} v_n \nabla v_{L,n} \nabla v_n + \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x+x_n) z_{L,n} \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n) v_n^2 v_{L,n}^{2(\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Observe que

$$2(\gamma-1) \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2\gamma-3} v_n \nabla v_{L,n} \nabla v_n = 2(\gamma-1) \int_{\{v_n \leq L\}} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_{L,n}|^2 > 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x+x_n) z_{L,n} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \overline{g}_H(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n) z_{L,n}.$$

Pelo Lema 3.2, sabemos que

$$0 \leq \overline{g}_H(x,s) \leq C_\beta |s|^p, \ (x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_n|^2 \leq C C_\beta \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{p+1} v_{L,n}^{2(\gamma-1)}, \tag{3.30}$$

onde C é uma constante positiva.

Por outro lado, pelas imersões contínuas de Sobolev,

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{L,n}|^2 = C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla (v_n v_{L,n}^{\gamma-1})|^2,$$

logo,

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_n|^2 + C C_\beta (\gamma-1)^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-2)} v_n^2 |\nabla v_{L,n}|^2.$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-2)} v_n^2 |\nabla v_{L,n}|^2 = \int_{\{v_n \leq L\}} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_n|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_n|^2,$$

assim,

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq C C_\beta \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{2(\gamma-1)} |\nabla v_n|^2. \tag{3.31}$$

Combinando (3.30) e (3.31),

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq C C_\beta \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_{L,n}^{p+1} v_n^{2(\gamma-1)},$$

assim,

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq C C_\beta \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{p-1} (v_n v_{L,n}^{\gamma-1})^2 = C C_\beta \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{p-1} w_{L,n}^2.$$

Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{2^*}{p-1}$ e $\frac{2^*}{2^*-(p-1)}$, temos

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq C C_\beta \gamma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{2^*} \right)^{\frac{p-1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_{L,n}^{\frac{22^*}{2^*-(p-1)}} \right)^{\frac{2^*-(p-1)}{2^*}},$$

onde $2 < \frac{22^*}{2^*-(p-1)} < 2^*$.

Pelo Lema 3.7, fazendo $\epsilon_0 = 1$ e $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, existe uma constante $M = M(\epsilon_0, a) > 0$, tal que

$$\|u_{n,\beta}\| \leq M, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \beta \in (0, a).$$

Assim, a sequência $(u_{n,\beta})$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $v_n(x) := u_{n,\beta}(x + x_n)$ segue da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação que (v_n) também é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq C C_\beta \gamma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_{L,n}^{\alpha^*} \right)^{\frac{2}{\alpha^*}},$$

ou ainda,

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq CC_\beta \gamma^2 |w_{L,n}|_{L^{\alpha^*}}^2,$$

com $\alpha^* = \frac{22^*}{2^*-(p-1)}$.

Observe que se $v_n^\gamma \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$, tem-se

$$|w_{L,n}|_{L^{2^*}}^2 \leq CC_\beta \gamma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} [v_n v_{L,n}^{\gamma-1}]^{\alpha^*} \right)^{\frac{2}{\alpha^*}} \leq CC_\beta \gamma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\gamma\alpha^*} \right)^{\frac{2}{\alpha^*}} < \infty.$$

Pelo Lema de Fatou na variável L, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\gamma 2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq CC_\beta \gamma^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\gamma\alpha^*} \right)^{\frac{2}{\alpha^*}},$$

isto é,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\gamma 2^*} \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq CC_\beta \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_n^{\gamma\alpha^*} \right)^{\frac{1}{\alpha^*}}.$$

Portanto,

$$|v_n|_{L^{\gamma 2^*}}^\gamma \leq CC_\beta \gamma |v_n|_{L^{\gamma\alpha^*}}^\gamma$$

ou seja,

$$|v_n|_{L^{\gamma 2^*}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} |v_n|_{L^{\gamma\alpha^*}}. \tag{3.32}$$

Além disso, considerando $\lambda = \frac{2^*}{\alpha^*}$, temos $2^* = \lambda\alpha^*$ e $\gamma\lambda\alpha^* = \gamma 2^*$, $\forall\ \gamma > 1$ verificando $v_n^\gamma \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$.

<u>1º Passo:</u> Considere $\gamma = \frac{2^*}{\alpha^*}$. Como $2^* = \gamma\alpha^*$, então, $v_n \in L^{\gamma\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$, logo, $v_n^\gamma \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$.

Note que como $\gamma = \lambda$, $\gamma 2^* = \frac{(2^*)^2}{\alpha^*}$ e $\gamma\alpha^* = 2^*$, por (3.32),

$$|v_n|_{L^{\frac{(2^*)^2}{\alpha^*}}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\gamma}} \gamma^{\frac{1}{\gamma}} |v_n|_{L^{2^*}},$$

o que implica

$$|v_n|_{L^{\frac{(\lambda\alpha^*)^2}{\alpha^*}}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\gamma^{\frac{1}{\gamma}}|v_n|_{L^{2^*}},$$

ou seja,

$$|v_n|_{L^{\lambda^2\alpha^*}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\lambda}}\lambda^{\frac{1}{\lambda}}|v_n|_{L^{2^*}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\lambda}}\lambda^{\frac{1}{\lambda}}K, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.33}$$

onde a última desigualdade segue da limitação de (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Assim,

$$v_n^{(\frac{2^*}{\alpha^*})^2} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N).$$

<u>2º Passo:</u> Considere $\gamma = (\frac{2^*}{\alpha^*})^2$. Observe que pela relação acima,

$$v_n^\gamma \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N).$$

Como $\gamma 2^* = \frac{(2^*)^3}{(\alpha^*)^2}$ e $\gamma\alpha^* = \frac{(2^*)^2}{(\alpha^*)}$, usando (3.32), temos

$$|v_n|_{L^{\frac{(2^*)^3}{(\alpha^*)^2}}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\gamma^{\frac{1}{\gamma}}|v_n|_{L^{\frac{(2^*)^2}{\alpha^*}}},$$

sendo $2^* = \alpha^*\lambda$, obtemos

$$|v_n|_{L^{\frac{(\lambda\alpha^*)^3}{(\alpha^*)^2}}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\gamma^{\frac{1}{\gamma}}|v_n|_{L^{\lambda^2\alpha^*}}$$

por (3.33),

$$|v_n|_{L^{\lambda^3\alpha^*}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\gamma}}\gamma^{\frac{1}{\gamma}}(C_\beta C)^{\frac{1}{\lambda}}\lambda^{\frac{1}{\lambda}}K, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $\gamma = \lambda^2$, temos

$$|v_n|_{L^{\lambda^3\alpha^*}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\lambda^2}}(\lambda^2)^{\frac{1}{\lambda^2}}(CC_\beta)^{\frac{1}{\lambda}}\lambda^{\frac{1}{\lambda}}K, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$|v_n|_{L^{\lambda^3\alpha^*}} \leq (CC_\beta)^{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda}}\lambda^{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{\lambda}}K, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3.34}$$

com

$$v_n^{(\frac{2^*}{\alpha^*})^3} \in L^{\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$$

por (3.33) e (3.34).

Por recorrência, obtemos

$$|v_n|_{L^{\lambda(m+1)\alpha^*}} \leq (CC_\beta)^{\sum_{i=1}^m \lambda^{-i}}\lambda^{\sum_{i=1}^m i\lambda^{-i}}K, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Note que com $\lambda > 1$, as séries $\sum_{i=1}^\infty \lambda^{-i}$ e $\sum_{i=1}^\infty i\lambda^{-i}$ convergem. Fazendo $m \to \infty$, temos

$$|v_n|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \overline{C_\beta}, \ \ \forall\, n \in \overline{N}. \tag{3.35}$$

Agora, para cada n fixado, definindo a função

$$\widetilde{g}_n(x) = \rho_n(x+x_n) - V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)v_n + v_n,$$

temos

$$-\Delta v_n + v_n = \widetilde{g}_n(x) \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema 3.2, temos

$$|\rho_n(x+x_n)| \leq |\overline{g}_H(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n, v_n)| \leq C_\beta |v_n|^p \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N,$$

logo,

$$|\widetilde{g}_n(x)| \leq (V_\infty + 1)v_n + C_\beta v_n^p \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N.$$

Como $v_n \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade de interpolação, veja o Apêndice B, Teorema B.5, $v_n \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall\ q \geq 2$, logo, $\widetilde{g}_n(x) \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Pela Teorema B.8,

$v_n \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N), \forall\ q \geq 2$. Para q suficientemente grande, $W^{2,q}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, logo, $v_n \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Além disso, pelo Teorema B.9 e (3.35), concluímos que $\|v_n\|_{C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. Pelas imersões compactas de Schauder, a menos de subsequência,

$$v_n \to v \text{ uniformemente sobre K}$$

para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N$.

Desse fato e (3.35) temos

$$v \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

o que demonstra o lema. □

Observação 3.6 *Usando os argumentos da demonstração do lema anterior, mais precisamente a limitação de* $(u_{\epsilon,\beta})$ *dada pelo Lema 3.7, a relação em (3.35), a desigualdade de interpolação e as imersões de Sobolev e Schauder, concluímos que a solução fraca* $u_{\epsilon,\beta}$ *de*

$$(P_{\epsilon,\beta}) \qquad \begin{cases} -\Delta u_{\epsilon,\beta} + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta} = H(u_{\epsilon,\beta} - \beta)g(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}) \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u_{\epsilon,\beta} \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \quad u_{\epsilon,\beta} > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

satisfaz $u_{\epsilon,\beta} \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

3.4 Existência de solução para $(P_{\epsilon,\beta})$ com V satisfazendo (A_0), (A_1) e (A_2).

Nesta seção, usaremos a condição (A_2) sobre V para provarmos um lema que é uma versão do Lema 3.1 de Alves, veja [3]. Esse lema nos ajudará a provar que a solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ do problema auxiliar $(P_{\epsilon,\beta})_a$, obtida pelo Teorema 3.4, é solução fraca do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$.

Assumiremos que

$$\Omega = B_{R_\epsilon}(0), \text{ onde } R_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$$

e $u_{\epsilon,\beta}$ é a solução fraca do problema auxiliar truncado $(P_{\epsilon,\beta})_a$ obtida no Teorema 3.4.

Nosso objetivo é provar que dado $\beta \in (0,a)$, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que

$$u_{\epsilon,\beta}(x) \leq a \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0), \ \forall \ \epsilon \in (0,\epsilon_0),$$

pois isso mostra que $u_{\epsilon,\beta}$ é solução fraca do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$.

Para alcançar esse objetivo iniciaremos com um lema que nos formece uma informação do comportamento de $u_{\epsilon,\beta}$ em $\partial\Omega_\epsilon$.

Lema 3.9 *Suponha que V satisfaz $(A_0),(A_1),(A_2)$ e f satisfaz $(f_1)-(f_3)$. Definindo*

$$m_{\epsilon,\beta} = \max_{x\in\partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} u_{\epsilon,\beta}(x) > 0,$$

temos, para cada $\beta \in (0,a)$ fixado,

$$m_{\epsilon,\beta} \to 0 \ \textit{quando} \ \epsilon \to 0.$$

Demonstração: Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existiriam $\beta_0 \in (0,a), \delta_0 > 0$, tal que, para cada $\epsilon'_n = \frac{1}{n}$, existiria $\epsilon_n \in (0,\epsilon'_n)$, tais que

$$m_{\epsilon_n,\beta_0} \geq \delta_0 > 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_n \to 0,$$

ou seja,

$$\max_{x \in \partial B_{\frac{R\epsilon_n}{\epsilon_n}}(0)} u_n(x) \geq \delta_0 > 0,$$

onde $u_n := u_{\epsilon_n, \beta_0} \in W^{2, \frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$.

Pela Observação 3.6, $u_n \in C(\mathbb{R}^N)$, logo, existe $x_n \in \partial B_{\frac{R\epsilon_n}{\epsilon_n}}(0)$ tal que

$$u_n(x_n) = \max_{x \in \partial B_{\frac{R\epsilon_n}{\epsilon_n}}(0)} u_n(x),$$

assim, $u_n(x_n) \geq \delta_0 > 0$. Definindo a função

$$w_n(x) = u_n(x + x_n),$$

temos $w_n \in C(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema 3.7, fazendo $\epsilon_0' = 1$, existe uma constante $M = M(\epsilon_0', a) > 0$, tal que

$$\|u_{\epsilon,\beta}\| \leq M, \;\; \forall\, \epsilon \in (0, \epsilon_0), \; \beta \in (0, a),$$

fazendo $\epsilon = \frac{1}{n}$ e $\beta = \beta_0$, concluimos que a sequência (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando a invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação e a limitação de (u_n) concluímos que (w_n) também é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, a menos de subsequência,

$$w_n \rightharpoonup w \;\text{ em }\; H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Lema 3.8, $w_n \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e (w_n) converge uniformemente sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ para uma função $w \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$w(0) \geq \delta_0 > 0,$$

o que fornece

$$w \neq 0.$$

Como na demonstração do Teorema 3.4, $u_n := u_{\epsilon_n,\beta_0}$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon_n,\beta_0}(z) + V(\epsilon_n z)u_{\epsilon_n,\beta_0}(z) = \rho_{\epsilon_n,\beta_0}(z) \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N, \\ \quad u_{\epsilon_n,\beta_0} \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \quad u_{n,\beta_0} > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $\rho_{\epsilon_n,\beta_0} \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\rho_{\epsilon_n,\beta_0}(z) \in [\underline{g}(\epsilon z, u_{\epsilon_n,\beta_0}(z)), \overline{g}(\epsilon z, u_{\epsilon_n,\beta_0}(z))] \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N.$$

Usando a limitação de (u_{ϵ_n,β_0}), a relação acima e seguindo o argumento feito na prova da Proposição 3.2, concluímos que $\rho_{\epsilon_n,\beta_0}$ é limitada em $L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$.

Fazendo a mudança de variável $z = x + x_n$, as funções $w_n(x) = u_n(x + x_n)$ e $\rho_n(x) = \rho_{\epsilon_n,\beta_0}(x + x_n)$ satisfazem

$$\begin{cases} -\Delta w_n(x) + V(\epsilon_n x + \epsilon_n x_n)w_n(x) = \rho_n(x) \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N, \\ \quad w_n \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N), \quad w_n > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Pela limitação de $\rho_{\epsilon_n,\beta_0}$ e a invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, ρ_n é limitada em $L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$. Assim, existe $\rho \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$, tal que, a menos de subsequência

$$\rho_n \rightharpoonup \rho \ \text{ em } \ L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi \to \int_{\mathbb{R}^N} \rho \varphi, \ \forall \, \varphi \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N).$$

Por (A_1), a sequência $\big(V(\epsilon_n x_n)\big)$ é limitada em $\mathbb{R}$, logo, existe uma subsequência de $(\epsilon_n x_n)$, que ainda denotaremos por $(\epsilon_n x_n)$, tal que

$$V(\epsilon_n x_n) \to \alpha_1$$

para algum $\alpha_1 > 0$.

Para cada $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x_n + \epsilon_n x) w_n \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi = o_n(1). \tag{3.36}$$

Fazendo $n \to \infty$, tem-se que w é solução não trivial de

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha_1 u + \rho = 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{3.37}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, existe $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\|\varphi_j - w\| \leq \frac{1}{j},$$

ou seja,

$$\|\varphi_j - w\| = o_j(1).$$

Usando $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ como função teste em (3.36), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla \big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big) + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon_n x_n + \epsilon_n x) w_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = o_n(1).$$

Agora, usando argumentos bem conhecidos, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_n \nabla \big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla \big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\big) + o_n(1) \tag{3.38}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} \rho \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} + o_n(1). \tag{3.39}$$

Afirmamos que

$$\limsup_{n \to \infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} \big(V(\epsilon_n x_n + \epsilon_n x) - V(\epsilon_n x_n)\big) w_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Big| = 0. \tag{3.40}$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)-V(\epsilon_n x_n)\big)w_n\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} &= \int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)w_n\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}-\int_{\mathbb{R}^N}V(\epsilon_n x_n)w_n\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\\ &= -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w_n\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)+\int_{\mathbb{R}^N}\rho_n\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\alpha_1 w\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+o_n(1).\end{aligned}$$

Como w é solução do problema (3.37), então,

$$-\int_{\mathbb{R}^N}\alpha_1 w\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}=\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)-\int_{\mathbb{R}^N}\rho\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i},$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)-V(\epsilon_n x_n)\big)w_n\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} &= -\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w_n\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)+\int_{\mathbb{R}^N}\nabla w\nabla\big(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big)\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}\rho_n\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}-\int_{\mathbb{R}^N}\rho\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}+o_n(1).\end{aligned}$$

Usando essa igualdade, (3.38) e (3.39), temos a nossa afirmação em (3.40).

Agora, observe que como φ_j tem suporte compacto e $w=(w-w_n)+w_n$, segue de (3.40) que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)-V(\epsilon_n x_n)\big)w\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|=0.$$

Observe também que, como $\varphi_j=(\varphi_j-w)+w$, desta última igualdade obtemos

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)-V(\epsilon_n x_n)\big)\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Big[\big(V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)-V(\epsilon_n x_n)\big)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big]^2\right)^{\frac{1}{2}}|\varphi_j-w|_{L^2}+o_n(1)$$

Assim,

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\big(V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)-V(\epsilon_n x_n)\big)\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big|=o_j(1). \tag{3.41}$$

De (3.41) e usando a fórmula de integração por partes,

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)\varphi_j^2\right|=o_j(1). \tag{3.42}$$

De fato, recordemos a fórmula de integração por partes

$$\int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx=\int_{\partial\Omega}uv\nu_i d\sigma-\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,\ \ \forall\, u,v\in H^1(\Omega),$$

onde ν_i é a i-ésima componente do vetor normal exterior a $\partial\Omega$.

Desde que *supp* φ_j é compacto, existe $r>0$, tal que

$$supp\ \varphi_j\subset B_r(0),$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)\varphi_j^2dx=\int_{B_r(0)}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)\varphi_j^2dx=-\int_{B_r(0)}V(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)2\varphi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,$$

usando (3.41), segue o resultado.

Combinando (A_1) com (3.42), temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\right|=o_j(1). \tag{3.43}$$

De fato, observe que

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)-\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right]|\varphi_j|^2-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n+\epsilon_n x)|\varphi_j|^2\right|$$

Por (A_1), a sequência $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right)$ é limitada em $\mathbb{R}$, assim, existe $\alpha_i'\in\mathbb{R}$, tal que, a menos de subseqência,

$$\alpha_i'=\lim_{n\to\infty}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n),$$

logo,

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n + \epsilon_n x) - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right]|\varphi_j(x)|^2 \to 0 \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R}^N \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Como $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ é limitada em $\mathbb{R}^N$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n + \epsilon_n x) - \frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right]|\varphi_j|^2 = 0.$$

Usando este limite e (3.42) obtemos (3.43).

Como $w > 0$ em $\mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2 \to \int_{\mathbb{R}^N}|w|^2 > 0,$$

assim, existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2 \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|w|^2 \ \ \forall\, j \geq j_0.$$

Desde que

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2}\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\Big),$$

temos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right| \leq \frac{2}{\int_{\mathbb{R}^N}|w|^2}\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi_j|^2\right|, \ \ \forall\, j \geq j_0,$$

por (3.43),

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}(\epsilon_n x_n)\right| = o_j(1). \tag{3.44}$$

Por (3.44),

$$\nabla V(\epsilon_n x_n) \to 0 \ \text{ e } \ V(\epsilon_n x_n) \to \alpha_1. \tag{3.45}$$

Assim, $(\epsilon_n x_n) \subset \mathbb{R}^N$ é uma sequência $(PS)_{\alpha_1}$ para V, o que é um absurdo, pois por

(A_2) a sequência $(\epsilon_n x_n)$ deveria ter uma subsequência convergente, mas

$$|\epsilon_n x_n| = R_{\epsilon_n} = \frac{1}{\epsilon_n} \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, o lema é verdadeiro. $\square$

Teorema 3.5 *Suponha que V satisfaz $(A_0), (A_1), (A_2)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$. Então, existe $a > 0$, tal que, para cada $\beta \in (0, a)$, obtemos $\epsilon_0 > 0$, tal que, $(P_{\epsilon,\beta})$ possui uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Além disso, se a função $s \mapsto \frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$, temos*

(i) *O conjunto $\Gamma_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) = \beta\}$ tem medida de Lebesgue nula.*

(ii) $-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x) u_{\epsilon,\beta}(x) = H(u_{\epsilon,\beta}(x) - \beta) f(u_{\epsilon,\beta}(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) *O conjunto $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > a\}$ tem medida de Lebesgue positiva.*

Demonstração: Seja a constante $a > 0$ usada no método de penalização de del Pino e Felmer, veja (3.2). Supondo que V satisfaz (A_0), (A_1) e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$, dado $\beta \in (0, a)$ e $\epsilon > 0$, pelo Teorema 3.4 existe uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ do problema auxiliar $(P_{\epsilon,\beta})_a$. Supondo que V também satisfaz (A_2), pelo Lema 3.9, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta) > 0$, tal que

$$\max_{x \in \partial B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} u_{\epsilon,\beta}(x) < a, \quad \forall\, \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Definindo a função

$$\widetilde{u}_{\epsilon,\beta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0), \\ (u_{\epsilon,\beta} - a)_+(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0), \end{cases}$$

temos $\widetilde{u}_{\epsilon,\beta} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Como na demonstração do Teorema 3.4,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_{\epsilon,\beta} \nabla \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} V(\epsilon x) u_{\epsilon,\beta} \varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{\epsilon,\beta} \varphi, \quad \forall\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $\rho_{\epsilon,\beta} \in L^{\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\rho_{\epsilon,\beta}(x) \in [\underline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x))].$$

Tomando $\varphi = \widetilde{u}_{\epsilon,\beta}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} \nabla u_{\epsilon,\beta} \nabla (u_{\epsilon,\beta} - a)_+ + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} V(\epsilon x) u_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta} - a)_+ = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} \rho_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta} - a)_+,$$

como

$$\nabla (u_{\epsilon,\beta} - a)_+(x) = \begin{cases} \nabla u_{\epsilon,\beta} & \text{se } \ u_{\epsilon,\beta} > a, \\ 0 & \text{se } \ u_{\epsilon,\beta} \leq a, \end{cases}$$

então,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} V(\epsilon x) u_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta} - a)_+ \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} \rho_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta} - a)_+. \tag{3.46}$$

Desde que, fixado $x \in \mathbb{R}^N$, a função $s \mapsto g(x,s)$ é contínua, exceto quando $s = \beta$, por (3.3)

$$\overline{g}_H(\epsilon x, s) = \begin{cases} 0 \ \text{ se } \ s < \beta, \\ g(\epsilon x, s) \ \text{ se } s \ \geq \beta. \end{cases}$$

Como $\underline{g}_H \geq 0$, $\rho_{\epsilon,\beta} \geq 0$. Desde que $g \geq 0$, da expressão de $\overline{g}_H$, $\overline{g}_H(\epsilon x, s) \leq g(\epsilon x, s)$. Por $(g_4)_{ii}$,

$$0 \leq \rho_{\epsilon,\beta} \leq \overline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}) \leq \frac{1}{k} V_0 u_{\epsilon,\beta} \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0),$$

por (3.46),

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)} \left(V(\epsilon x) - \frac{V_0}{k} \right) u_{\epsilon,\beta}(u_{\epsilon,\beta} - a)_+ \leq 0,$$

como $\left(V(\epsilon x) - \frac{V_0}{k} \right) > 0$ e $u_{\epsilon,\beta} > 0$, temos

$$(u_{\epsilon,\beta} - a)_+(x) = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0),$$

assim,

$$u_{\epsilon,\beta}(x) \leq a \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0).$$

Pelo do Teorema 3.4 sabemos que

$$-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) \in [\underline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Recorde que $g(\epsilon x, s)$ e $f(s)$ são iguais quando $x \in \Omega_\epsilon$ ou $s < a$. Como consequência, usando as definições de $\underline{g}_H, \overline{g}_H, \underline{f}_H, \overline{f}_H$, veja (3.3) e (3.1), temos $\underline{g}_H(\epsilon x, s) = \underline{f}_H(\epsilon x, s)$ e $\overline{g}_H(\epsilon x, s) = \overline{f}_H(\epsilon x, s)$ quando $x \in \Omega_\epsilon$ ou $s < a$.

Como $u_{\epsilon,\beta}(x) \leq a$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)$, concluímos que

$$-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) \in [\underline{f}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x)), \overline{f}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Assim, $u_{\epsilon,\beta}$ é uma solução fraca para o problema $(P_{\epsilon,\beta})$.

Os itens (i) e (iii) seguem dos itens (i) e (iii) do Teorema 3.4 e dos comentários anteriores sobre g e f.

Portanto, a solução $u_{\epsilon,\beta}$ do problema auxiliar truncado $(P_{\epsilon,\beta})_a$, obtida pelo Teorema 3.4, é solução do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e $\beta \in (0, a)$. □

Observação 3.7 *Como observamos no final da demonstração do Teorema 3.4, o conjunto* $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} \subset \Omega_\epsilon$, *pois* $u_{\epsilon,\beta} \leq a$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\epsilon$.

3.5 Existência de solução para $(P_{\epsilon,\beta})$ com V satisfazendo $(A_0), (A_1)$ e (A_3).

Na seção anterior, verificamos que se V satisfaz $(A_0), (A_1), (A_2)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$, a solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ do problema auxiliar $(P_{\epsilon,\beta})_a$, obtida no Teorema 3.4, é solução fraca do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$. Além disso, se a função $s \mapsto \frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$, essa solução fraca é uma solução forte. Nesta seção, vamos mostrar o mesmo resultado quando V satisfaz $(A_0), (A_1)$ e (A_3). Para tal iniciamos com uma versão do Lema 4.1 em [3].

Seja o domínio Λ da condição (A_3). Assumiremos que

$$\Omega = \Lambda$$

e $u_{\epsilon,\beta}$ é a solução do problema auxiliar $(P_{\epsilon,\beta})_a$ obtida no Teorema 3.4.

Como na seção anterior, nosso objetivo é provar que dado $\beta \in (0,a)$, existe $\epsilon_0 > 0$, tal que

$$u_{\epsilon,\beta}(x) \leq a \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\epsilon, \ \forall \ \epsilon \in (0,\epsilon_0),$$

pois isso mostra que $u_{\epsilon,\beta}$ é solução de $(P_{\epsilon,\beta})$. Esse objetivo será alcançado com o seguinte lema.

Lema 3.10 *Suponha que V satisfaz $(A_0),(A_1),(A_3)$ e f satisfaz $(f_1)-(f_3)$. Definindo*

$$m_{\epsilon,\beta} = \max_{x\in\partial\Lambda_\epsilon} u_{\epsilon,\beta}(x) > 0,$$

temos, para cada $\beta \in (0,a)$ fixado,

$$m_{\epsilon,\beta} \to 0 \ \textit{ quando } \ \epsilon \to 0.$$

Demonstração: Suponha, por contradição, que o lema seja falso. Então, existiriam $\beta_0 \in (0,a), \delta_0 > 0$ e uma sequência $(\epsilon_n) \subset (0,1)$, tais que

$$m_{\epsilon_n,\beta_0} \geq \delta_0 > 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_n \to 0,$$

ou seja,

$$\max_{x\in\partial\Lambda_{\epsilon_n}} u_{\epsilon_n}(x) \geq \delta_0 > 0,$$

onde $u_n := u_{\epsilon_n,\beta_0} \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$.

Pela Observação 3.2, $u_n \in C(\mathbb{R}^N)$. Sendo $\partial\Lambda_{\epsilon_n}$ compacto, existe $x_n \in \partial\Lambda_{\epsilon_n}$ tal que

$$u_n(x_n) = \max_{x\in\partial\Lambda_\epsilon} u_n(x).$$

Seguindo os mesmos argumentos da demonstração do Lema 3.9, obtemos, assim como na relação (3.45), uma sequência $(\epsilon_n x_n) \subset \partial\Lambda$, tal que

$$\nabla V(\epsilon_n x_n) \to 0.$$

Como $\partial\Lambda$ é compacto em $\mathbb{R}^N$, existe $x_0 \in \partial\Lambda$, tal que, a menos de subsequência,

$$\epsilon_n x_n \to x_0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N.$$

Sendo V de classe $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, temos

$$x_0 \in \partial\Lambda \ \text{ e } \ \nabla V(x_0) = 0,$$

o que contradiz a condição (A_3), isto é, o fato de V não possui ponto crítico em $\partial\Lambda$. □

Teorema 3.6 *Suponha que V satisfaz $(A_0), (A_1), (A_3)$ e f satisfaz $(f_1) - (f_3)$. Então, existe $a > 0$, tal que, para cada $\beta \in (0, a)$, obtemos $\epsilon_0 > 0$, tal que, $(P_{\epsilon,\beta})$ possui uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. Além disso, se a função $s \mapsto \frac{f(s)}{s}$ é não decrescente em $[0, a]$, temos*

(i) *O conjunto $\Gamma_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) = \beta\}$ tem medida de Lebesgue nula.*

(ii) $-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) = H(u_{\epsilon,\beta}(x) - \beta)f(u_{\epsilon,\beta}(x))$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

(iii) *O conjunto $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^N : u_{\epsilon,\beta}(x) > a\}$ tem medida de Lebesgue positiva.*

Demonstração: Segue os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.5. Por comodidade do leitor faremos um resumo. Seja a constante $a > 0$ usada no método de penalização de del Pino e Felmer, veja (3.2). Supondo (A_1) e (A_2), $(f_1)-(f_3)$, dado $\beta \in (0, a)$ e $\epsilon > 0$, pelo Teorema 3.4 existe uma solução fraca $u_{\epsilon,\beta}$ de $(P_{\epsilon,\beta})_a$. Supondo que (V_3) também ocorre, pelo Lema 3.10, existe $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta) > 0$, tal que

$$\max_{x \in \partial\Lambda_\epsilon} u_{\epsilon,\beta}(x) < a, \ \ \forall\, \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

Definindo a função

$$\widetilde{u}_{\epsilon,\beta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{em } \ \Lambda_\epsilon, \\ (u_{\epsilon,\beta} - a)_+(x) & \text{em } \ \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\epsilon, \end{cases}$$

temos $\widetilde{u}_{\epsilon,\beta} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Seguindo os argumentos da demonstração do teorema anterior concluímos que $\widetilde{u}_{\epsilon,\beta} \equiv 0$. Assim, $u_{\epsilon,\beta}(x) \le a$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\epsilon$.

Pelo do Teorema 3.4 sabemos que

$$-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) \in [\underline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x)), \overline{g}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Como $u_{\epsilon,\beta}(x) \leq a$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R_\epsilon}{\epsilon}}(0)$, concluímos que $\underline{g}_H = \underline{f}_H$ e $\overline{g}_H = \overline{f}_H$. Logo,

$$-\Delta u_{\epsilon,\beta}(x) + V(\epsilon x)u_{\epsilon,\beta}(x) \in [\underline{f}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x)), \overline{f}_H(\epsilon x, u_{\epsilon,\beta}(x))] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Os itens (i) e (iii) seguem dos itens (i) e (iii) do Teorema 3.4.

Portanto, a solução $u_{\epsilon,\beta}$ do problema auxiliar truncado $(P_{\epsilon,\beta})_a$, obtida pelo Teorema 3.4, é solução do problema original $(P_{\epsilon,\beta})$, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e $\beta \in (0, a)$. $\square$

Observação 3.8 *Novamente, como o teorema anterior o conjunto* $\Gamma^a_{\epsilon,\beta} \subset \Lambda_\epsilon$, *pois* $u_{\epsilon,\beta} \leq a$ *em* $\mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\epsilon$.

Apêndice

$\mathcal{A}$

APÊNDICE

Neste Apêndice, faremos um pequeno resumo sobre os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$. Para mais informações consulte Fan-Zhang [59] e suas referências.

1.1 O espaço generalizado de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$

Apresentaremos a definição e propriedades básicas dos espaços $L^{p(x)}(\Omega)$.

Seja $\Omega \subset I\!R^N$ um aberto. Definimos

$$C_+(\overline{\Omega}) = \left\{ h(x) : h \in C^0(\overline{\Omega}), h(x) > 1 \text{ para cada } x \in \overline{\Omega} \right\}.$$

Dada $h(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, definimos

$$h^+ = \sup_{\Omega} h(x) \;\text{ e }\; h^- = \inf_{\Omega} h(x).$$

Dado $p(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ e definimos o espaço

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é uma função mensurável e } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}.$$

Introduzimos a seguinte norma no espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

$$|u|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

chamada de norma de Luxemburg. O espaço $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{L^{p(x)}})$ é um espaço de Banach que é chamado de espaço generalizado de Lebesgue.

Proposição A.1 *Se a função $p(x) = p$ é constante, então*

$$|u|_{L^{p(x)}} = |u|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \ \forall\, u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Demonstração: Se $u = 0$ é imediato. Suponha que $u \neq 0$, então

$$\begin{aligned} |u|_{p(x)} &= \inf\left\{\lambda > 0;\ \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\} = \inf\left\{\lambda > 0;\ \frac{1}{\lambda^p}\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0;\ \frac{1}{\lambda^p}|u|^p_{L^p} \leq 1\right\} = \inf\left\{\lambda > 0;\ |u|_{L^p} \leq \lambda\right\} = |u|_{L^p}. \end{aligned}$$

□

Proposição A.2 (i) *O espaço $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{L^{p(x)}})$ é Banach, separável, uniformemente convexo e seu conjugado é o espaço $(L^{q(x)}(\Omega), |.|_{p(x)})$, onde $\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1$. Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, temos*

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-}\right) |u|_{L^{p(x)}}|v|_{L^{q(x)}}.$$

(ii) *Se $p_1, p_2 \in C_+(\overline{\Omega}), p_1(x) \leq p_2(x)$, para cada $x \in \overline{\Omega}$, então, $L^{p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$.*

Demonstração: Veja [59]. □

Proposição A.3 *Seja $\rho(u) = \int_\Omega |u|^{p(x)}dx$. Para todo $u, u_n \in L^{p(x)}(\Omega)$, temos*

(i) *Para $u \neq 0$ temos $|u|_{L^{p(x)}} = \lambda \Leftrightarrow \rho(\frac{u}{\lambda}) = 1$.*

(ii) *Se $|u|_{L^{p(x)}} < 1\ (= 1;\ > 1)$, então $\rho(u) < 1\ (= 1;\ > 1)$.*

(iii) *Se $|u|_{L^{p(x)}} > 1$, então $|u|^{p^-}_{L^{p(x)}} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^+}_{L^{p(x)}}$.*

(iv) *Se $|u|_{L^{p(x)}} < 1$, então $|u|^{p^+}_{L^{p(x)}} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^-}_{L^{p(x)}}$.*

(v) $|u_n|_{L^{p(x)}} \to 0 \Leftrightarrow \rho(u_n) \to 0$.

(vi) $|u_n|_{L^{p(x)}} \to \infty \Leftrightarrow \rho(u_n) \to \infty$.

Demonstração: Veja [59]. □

Apêndice

$\mathcal{B}$

APÊNDICE

2.1 Resultados usados ao longo do trabalho

Neste Apêndice, vamos enunciar os principais resultados usados ao longo deste trabalho.

Teorema B.1 ***(Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue)*** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para função mensurável* f. *Se existe uma função integrável* g *tal que*

$$|f_n| \leq g \;\forall\;\; n \in \mathbb{N}$$

então f *é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Veja [21], Teorema 4.2. □

Teorema B.2 ***(Teorema de representação de Riesz-Fréchet)*** *Seja* $(H, |.|)$ *um espaço de Hilbert. Dada* $\varphi \in H^*$, *existe uma única função* $u \in H$, *tal que*

$$\varphi(f) = \big\langle u, f \big\rangle, \;\; \forall\; f \in H.$$

Além disso,

$$\|\varphi\|_{H^*} = |u|_H.$$

Demonstração: Veja [21], Teorema 5.5. □

Teorema B.3 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma sequência limitada em X, então existem uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que*

$$x_n \rightharpoonup x \quad em\ X.$$

Demonstração: Veja [21], Teorama 3.18. □

Teorema B.4 *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \to f \ em\ L^p(\Omega).$$

Então, a menos de subsequência,

(1) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω

(2) $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em $\Omega, onde\ g \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Veja [21], Teorema 4.9. □

Teorema B.5 ***(Desigualdade de Interpolação)*** *Seja $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Para todo r, tal que, $p \leq r \leq q$, tem-se $u \in L^r(\Omega)$ e se $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, temos*

$$|u|_{L^r} \leq |u|^{\theta}_{L^p} |u|^{1-\theta}_{L^q}.$$

Demonstração: Veja [21]. □

Teorema B.6 ***(Teorema de Schaefer)*** *Sejam $(E, ||.||)$ um espaço de Banach reflexivo e $S : E \to E$ um operador contínuo e compacto. Suponha que exista $R > 0$, tal que*

$$u = \theta S(u);\ \theta \ \in [0, 1] \Rightarrow ||u|| < R,$$

então, S possui um ponto fixo na bola $B_R(0)$, isto é, existe $u \in E$, tal que

$$S(u) = u \ \ e \ \ ||u|| < R.$$

Demonstração: Veja [61]. □

Teorema B.7 ***(Teorema de Agmon-Douglas-Nirenberg)*** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $f \in L^r(\Omega)$ com $r > 1$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \ \ em \ \ \Omega, \\ \qquad u = 0 \ sobre \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $u \in W^{2,r}(\Omega)$ e existe uma constante $C > 0$ (independente de u) tal que

$$|u|_{W^{2,r}} \leq C|f|_{L^r}.$$

Demonstração: Veja [2]. □

Teorema B.8 *Sejam $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ verifica*

$$-\Delta u + u = f \ \ em \ \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

então, existe uma constante $C > 0$ independente de f, tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C|f|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demonstração: Veja [62], Teorema 11.1. □

Teorema B.9 *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, uma solução forte da equação $-\Delta u = f$ em Ω, onde $f \in L^p(\Omega)$. Então, para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$, temos*

$$\|u\|_{2,p,\Omega'} \leq C(|u|_{p,\Omega} + |f|_{p,\Omega}),$$

onde C é uma constante dependendo de N, p, Ω', Ω.

Demonstração: Veja [61], Teorema 9.11 com $L = -\Delta$. □

Teorema B.10 ***(Du Bois-Reymond)*** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado e* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *tal que*

$$\int_\Omega f\varphi = 0, \ \ \forall \ \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $f = 0$ *q.t.p em* Ω.

Demonstração: Veja [21], Corolário 4.24. □

Teorema B.11 ***(Fórmula de Green)*** *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *localmente lipschitziana. Então, para cada* $u \in H^2(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$, *temos*

$$\int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu},$$

onde ν *é a normal exterior a* Ω.

Demonstração: Veja [75]. □

Teorema B.12 *Sejam* E *um espaço de Banach e* $T : \mathbb{R}^+ \times E \to E$ *um operador contínuo e compacto, tal que* $T(0,u) = 0$. *Então, a equação*

$$u = T(\lambda, u)$$

possui um contínuo ilimitado $C \subset \mathbb{R}^+ \times E$ *de soluções com* $(0,0) \in C$.

Demonstração: veja [70] □

Definição B.1 *(Veja [61]) Definimos a parte positiva e negativa de uma função u por*

$$u_+ = \max\{u, 0\} \quad e \quad u_- = \max\{-u, 0\}.$$

Temos $u = u_+ - u_-$ e $|u| = u_+ + u_-$.

Lema B.1 *Seja* $u \in H^1(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,$ *então* $u_+, u_-, |u| \in H^1(\Omega)$ *e suas derivadas fracas são*

$$\frac{\partial u_+}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), & se\ \ u(x) > 0 \\ 0, & se\ \ u(x) \leq 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0, & se\ \ u(x) \geq 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), & se\ \ u(x) < 0 \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial |u|}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), & se\ \ u(x) > 0 \\ 0, & se\ \ u(x) = 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), & se\ \ u(x) < 0. \end{cases}$$

Demonstração: Veja [61] $\square$

Corolário B.1 *Seja* $u \in H_0^1(\Omega),\ 1 \leq p < \infty,$ *então* $u_+ \in H_0^1(\Omega).$

Demonstração: Veja [27], Corolário 2.14. $\square$

Lema B.2 *Sejam* $u \in H_0^1(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$ *tal que* $v \geq 0$ *em* $\Omega,$ *então* $(u - v)_+ \in H_0^1(\Omega).$

Demonstração: Veja [27]. $\square$

Definição B.2 *(Veja [61]) Sejam* $u \in H^1(\Omega),$ *dizemos que*

$$u \leq 0\ \ sobre\ \ \partial\Omega$$

quando $u_+ \in H_0^1(\Omega)$. *Quando* u *é contínua em uma vizinhança de* $\partial\Omega$, *então* u *satisfaz a desigualdade* $u \leq 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *no sentido clássico. As outras definições de desigualdades na fronteira seguem naturalmente. Por exemplo,* $u \geq 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *se* $-u \leq 0$ *sobre* $\partial\Omega$. *E* $u \leq v$ *sobre* $\partial\Omega$ *se* $(u - v) \leq 0$ *sobre* $\partial\Omega$.

Apêndice

$\mathcal{C}$

APÊNDICE

3.1 Resumo de Funcionais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$

Neste Apêndice, faremos um pequeno resumo da teoria dos funcinais $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$.

Definição C.1 *Seja X um espaço de Banach. Um funcional $I : X \to \mathbb{R}$ é chamado de localmente Lipschitz contínuo, denotado por $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, quando dado $u \in X$, existe uma vizinhança aberta $V := V_u \subset X$ e alguma constante $K_V > 0$, tal que,*

$$|I(v_2) - I(v_1)| \leq K_V \|v_2 - v_1\|, \ \forall \, v_1, v_2 \in V.$$

Definição C.2 *A derivada direcional de um funcional $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ em u na direção v é definida por*

$$I^0(u, v) = \lim_{h \to 0} \sup_{\sigma \downarrow 0} \frac{I(u + h + \sigma v) - I(u + h)}{\sigma}.$$

Portanto, $I^0(u, .)$ é contínuo, convexo e sua subdiferencial em $z \in X$ é dada por

$$\partial I^0(u, z) = \big\{\mu \in X^* : I^0(u, v) \geq I(u, z) + \big\langle \mu, v - z \big\rangle, \ v \in X\big\},$$

onde $\big\langle ., . \big\rangle$ é o par de dualidade entre X^* e X.

Definição C.3 *O gradiente generalizado de I em u é o conjunto*

$$\partial I(u) = \big\{\mu \in X^* : \big\langle \mu, v \big\rangle \leq I^0(u, v), \ v \in X\big\}.$$

Desde que $I^0(u,0) = 0$, $\partial I(u)$ é uma subvariedade de $I^0(u,0)$.

Recordemos também algumas propriedades

$$\partial I(u) \subset X^* \text{ é convexo, não vazio e fraco}^* \text{ compacto,}$$

a função

$$\lambda_I : X \to \mathbb{R},$$

$$\lambda_I(u) := \lambda(u) = \min\big\{\|\mu\|_{X^*} : \mu \in \partial I(u)\big\}$$

está bem definida e

$$\partial I(u) = \big\{I'(u)\big\} \text{ quando } I \in C^1(X,\mathbb{R}).$$

Proposição C.1 *(Veja [25] e [43]) Seja $(u_n) \subset X$ e $(\rho_n) \subset X^*$ com $\rho_n \in \partial I(u_n)$. Suponha que*

$$u_n \to u \;\; em \;\; X \quad e \quad \rho_n \rightharpoonup^* \rho \;\; em \;\; X^*.$$

então $\rho \in \partial I(u)$.

Definição C.4 *Um ponto crítico de um funcional $I \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ é um elemento $u_0 \in X$, tal que $0 \in \partial I(u_0)$. E um valor crítico de I é um número real $c \in \mathbb{R}$, tal que $I(u_0) = c$, para algum ponto crítico $u_0 \in X$ de I.*

Definição C.5 *Um funcional $I \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais Smale (PS), se para cada sequência $(u_n) \subset X$, tal que*

$$I(u_n) \; seja \; convergente \; e \;\; \lambda(u_n) \to 0;$$

existe uma subsequência de (u_n) que converge forte em X.

Teorema C.1 *Suponha que X, Y são dois espaços de Banach, X é reflexixo, $X \hookrightarrow Y$, isto é, X está imerso continuamente em Y e assuma que X é denso em Y. Suponha que $f \in Lip_{loc}(Y,\mathbb{R})$ e seja $\widehat{f} = f|_X$, então,*

$$\partial \widehat{f}(x) \subset \partial f(x), \; \forall \, x \in X.$$

Bibliografia

[1] N. Ackermann & A. Szulkin, *A Concentration Phenomenon for Semilinear Elliptic Equations*. Arch. Ration. Mech. Anal. 207 (2013), 1075-1089.

[2] S. Agmon, A. Douglis & L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I*, Comm. Pure Appl. Math. 12, (1959), 623-727.

[3] C. O. Alves, *Existence of standing waves solutions for a Nonlinear Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, JEPE, vol 1, 2015, 231-241.

[4] C.O. Alves & A.M. Bertone, *A discontinuous problem involving the p-Laplacian*, Electron. J. Differential Equations., 42(2003)1-10.

[5] C.O. Alves, A.M. Bertone & J.V. Gonçalves, *A variational approach to discontinuous problems with critical Sobolev exponents*, J. Math. Anal. App., 265(2002)103-127.

[6] C. O. Alves, J.A. Santos & J. V. Gonçalves, *On multiple solutions for multivalued elliptic equations under Navier boundary conditions*, Journal of Convex Analysis, 03 (2011), 627-644.

[7] C.O. Alves, P.C. Carrião & O.H. Miyagaki, *Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth.* J. Math. Anal. Appl. 260 (2001), 133-146.

[8] C. O. Alves, G. M. Figueiredo & R. G. Nascimento, *On existence and concentration of solutions for an elliptic problem with discontinuous nonlinearity via penalization method* Z. Angew. Math. Phys. 65 (2014), 19–40.

[9] C.O. Alves & R. G. Nascimento, *Nonlinear pertubation of a periodic elliptic problem with discontinuous nonlinearity in* R^N, Z. Angew Math. Phys. 63 (2012), 107-124.

[10] C. O. Alves & D.-P. Covei, *Existence of solutions for a class of nonlacal elliptic problem via sub-supersolution*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 23, (2015), 1–8.

[11] C. O. Alves & R. G. Nascimento, *Existence and concentration of solutions for a class of elliptic problem with discontinuous in $\mathbb{R}^N$,* To apper in Mathematica Scandinavica .

[12] C.O. Alves, J.M. B. do Ó & M.A.S. Souto, *Local mountain-pass for a class of elliptic problems involving critical growth.* Nonlinear Anal. 46 (2001), 495-510.

[13] M. Badiale, *Critical exponent and discontinuous nonlinearities*, Diff. Int. Eq, 6 (1993), 1173-1185.

[14] M. Badiale, *Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 51 (1993), 331-342.

[15] A. Ambrosetti, H. Brezis & G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, Journal of Functional Anal. 122, No 2 (1994), 519-543.

[16] T. Bartsch, A. Pankov & Z.-Q. Wang, *Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well,* Communications in Contemporany Mathematics, 3 (2001), 1-21.

[17] T. Bartsch & M. Willem, *On an elliptic equations with concave and convex nonlinearities*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 123, No. 11, (1995), 3555-3561.

[18] J. W. Bebernes & A. Bressan, *Thermal behaviour for a connned reactive gas*, J. Differential Equations, 44 (1982), 118-133.

[19] J. W. Bebernes & P. Talaga, *Nonlocal problems modelling shear banding*, Nonlinear Anal. 3 (1996), 79-103.

[20] J. Blat & K.J. Brown, *Global bifurcation of positive solutions in some systems of elliptic equations*, SIAM J. Math. Anal. 17, (1986), 1339–1353.

[21] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[22] A. Cabada & F.J.S.A. Corrêa, *Existence of Solutions of a Nonlocal Elliptic System via Galerkin Method*, Abst. and Appl. Anal., Vol. 2012, Article ID 137379, (2012).

[23] G. F. Carrier, *On the Nonlinear Vibration Problema of the Elastic String*, Quart. Appl. Math., Vol. 3 (1945), 157-165.

[24] K.C. Chang, *The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities*, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 117-146.

[25] K. C. Chang, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal., 80 (1981), 102-129

[26] Y. Chen & H. Gao, *Existence of positive solutions for nonlocal and nonvariational elliptic system*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 72 (2005), 271-281.

[27] M. Chipot, *Elements of Analysis*. (2000), Birkhauser.

[28] M. Chipot & N.H. Chang, *On some model diffusion problems with a nonlocal lower order term.* Chin. Ann. Math., 24B:2, (2003), 147-166.

[29] M. Chipot & N.H. Chang, *On some mixed boundary value problems with nonlocal diffusion*, Advances in Math. Sciences and Appl., Vol 14, 1, (2004), 1-24.

[30] M. Chipot & N.H. Chang, *Nonlinear nonlocal evolution problems*, RACSAM, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., Vol 97 (3), (2003), 393-415.

[31] M. Chipot & F.J.S.A. Corrêa, *Boundary layer solutions to functional*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series 40 (2009), 381-393.

[32] M. Chipot & B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Analysis, T.M.A., Vol. 30, No. 7, (1997), 4619-4627.

[33] M. Chipot & B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity (1997), 65-81.

[34] M. Chipot & L. Molinet, *Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems*, Appl. Anal. 80 (2001), no. 3-4, 279-315.

[35] M. Chipot & J.F. Rodrigues, *On a class of nonlinear elliptic problems*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 26, N. 3(1992), 447-468.

[36] M. Chipot & P. Roy, *Existence results for some functional elliptic equations*, Differential and Integral Equations , Vol. 27, n.3/4 (2014), 289-300.

[37] M. Chipot & T. Savitska, *Nonlocal p-Laplace Equations Depending on the L^p Norm of the Gradient.* Advances in Differential Equations, 19, 11/12 (2014), 997-1020

[38] M. Chipot & T. Savitska, *Asymptotic Behaviour of the Solutions of Nonlocal p-Laplace Equations Depending on the L^p Norm of the Gradient.* J. Elliptic Parabol. Equ. 1 (2015), 63-74.

[39] M. Chipot & M. Siegwart, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal mixed boundary value problems.* Nonlinear Analysis and its Applications, to V. Lakshmikantam on his 80th birthday, (2003), 431-450, Kluwer Edt.

[40] M. Chipot & M. Siegwart, *Asymptotic Behaviour of the Solutions of Nonlocal p-Laplace Equations Depending on the L^p Norm of the Gradient.* J. Elliptic Parabol. Equ. 1 (2015), 63-74.

[41] M. Chipot, V. Valente & G. V. Caffarelli, *Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 110, (2003), 199-220.

[42] M. Chipot & S. Zheng, *Asymptotic behavior of solutions to nonlinear parabolic equations with nonlocal terms,* Asymptotic Analysis, Vol 45, (2005), 301-312.

[43] F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1975), 247-262.

[44] V. Coti-Zelati & P.H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on R^N*, Comm. Pure Appl. Math. 45 (10) (1992), 1217-1269.

[45] F.J.S.A. Corrêa, *On positive solutions of nonlocal and nonvariational elliptic problems*, Nonlinear Anal., 59 (2004), 1147-1155.

[46] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo & F.P.M. Lopes, *On the Existence of Positive Solutions for a Nonlocal Elliptic Problem Involving the p-Laplacian and the Generalized Lebesgue Space* $L^{p(x)}(\Omega)$, Differential and Integral Equations , Vol. 21, (2008), 305-324.

[47] F.J.S.A. Corrêa & F.P.M. Lopes, *Positive solutions for a class of nonlocal elliptic systems*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., Vol. 14, N. 2 (2007), 67-77.

[48] F.J.S.A. Corrêa & S.D.B. Menezes, *Positive solutions for a class of nonlocal problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Volume in honor of Djairo G. de Figueiredo, Vol. 66 (2005), 195-206.

[49] F.J.S.A. Corrêa & A. Suárez, *Combining local and nonlocal terms in a nonlinear elliptic problem*, Math. Meth. Appl. Sci. Vol. 35, Issue 5, (2012), 547-563.

[50] M. del Pino & P.L. Felmer, *Local Mountain Pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*. Calc. Var. Partial Differential Equations 4 (1996), 121-137.

[51] M. del Pino & P.L. Felmer, *Semi-classical States for Nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. 149 (1997), 245-265.

[52] M. del Pino, P.L. Felmer & O.H. Miyagaki, *Existence of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations with saddle-like potential*, Nonlinear Anal. 34 (1998), 979-989.

[53] Di Benedetto E., $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations* Nonlinear Analysis 7(1985) 827-850.

[54] J. M. B. do Ó & M.A.S. Souto, *On a class of nonlinear Schrödinger equations in* R^2 *involving critical growth*, J. Differential Equations 174 (2001), 289-311.

[55] A. Floer & A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equations with bounded potential*, J. Funct. Anal. 69 (1986), 397-408.

[56] Y.G. Oh, *Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials on the class* $(V)_a$, Comm. Partial Differential Equations 13 (1988), 1499-1519.

[57] W. Deng, Y. Li & C. Xie, *Existence and nonexistence of global solutions of some nonlocal degenerate parabolic equations*, Appl. Math. Lett., 16 (2003), 803-808.

[58] W. Deng, Y. Lie & C. Xie, *Blow-up and global existence for a nonlocal degenerate parabolic system*, J. Math. Anal. Appl., 227 (2003), 199-217.

[59] X.L. Fan & Q.H. Zhang, *Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems*, Nonlinear Anal., 52 (2003), 1843-1852.

[60] J. Furter & M. Grinfeld, *Local vs. nonlocal interactions in population dynamics*, J. Math. Biol. 27 (1989), 65-80.

[61] D. Gilbarg, & N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[62] Kavian O., *Introduction à la théorie des points critiques et applicatons aux problems elliptiques*, Springer, Heidelberg (1983).

[63] M. R. Grossinho & S. A. Tersian, *An Introduction to Minimax theorems and their Applications to Differential Equations,* 2011.

[64] W. Kryszewski & A. Szulkin, *Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation*, Math. Stockholm Univ. 7 (1996) 127.

[65] C. B. Morrey, *Multiple integrals in calculus of variations*, Springer Verlag, Berlim, 1966.

[66] Moser, J., *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.* Comm. Pure Appl. Math. 13, 457-468 (1960).

[67] A. A. Pankov, *Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals*, Milan J. Math. 73 (2005), 259-287.

[68] A. A. Pankov & K. Pfluger, *On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential*, Nonlinear Anal. 33 (1998), 593-609.

[69] P.H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew Math. Phys. 43 (1992), 270-291.

[70] P.H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. 7(1971), 487-513.

[71] V. Radulescu, *Mountain Pass Theorem for non-differentiable Functions and Applications*, Porc. Japan. Acad.69. Ser. A (1993), 193-198.

[72] J. A. Santos, *Teorema minimax para funcionais localmente lipschitz e aplicações*, dissertação de mestrado, CCT-UFCG, 2007.

[73] A. Suárez & G.M. Figueiredo, *Some remarks on the comparison principle in Kirchhoff equation*, Aceito em Rev. Mat. Iberam., 2016.

[74] P. Souplet, *Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source*, J. Differential Equations, 153(1999), 374-406.

[75] F. Treves, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press. New York. 1975.

[76] B. Yan & D.Wang, *The multiplicity of positive solutions for a class of nonlocal elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. 442(2016), 72–102.

[77] X. Wang, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Physical 53 (1993), 229-244.