



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM**

Mirelson Martins Freitas

**Atratores para sistemas dinâmicos deterministas, não
autônomos e estocásticos em dimensão infinita: Aplicações à
modelos de EDPs**

BELÉM-PA
Março/2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Mirelson Martins Freitas

**Atratores para sistemas dinâmicos deterministas, não
autônomos e estocásticos em dimensão infinita: Aplicações à
modelos de EDPs**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA-UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo - Universidade Federal do Pará

Co-orientador: Prof. Dr. José Antonio Langa Rosado - Universidad de Sevilla

BELÉM-PA

Março/2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central - UFPA

Freitas, Mirelson Martins

Atratores para sistemas dinâmicos deterministas, não autônomos e estocásticos em dimensão infinita: aplicações a modelos de EDPs / Mirelson Martins Freitas. — 2017

Orientador, Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo

Co-orientador, Prof. Dr. José Antonio Langa Rosado

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM, Belém, 2017.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Equações diferenciais parciais. I.

Título.

CDD 23 ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Mirelson Martins Freitas

**Atratores para sistemas dinâmicos deterministas, não
autônomos e estocásticos em dimensão infinita: Aplicações à
modelos de EDPs**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

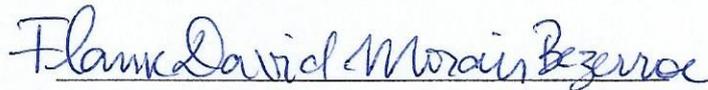
Data da defesa: 09 de março de 2017.

Resultado: APROVADO



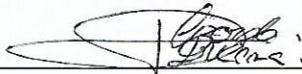
Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo (Orientador)

PDM - UFPA



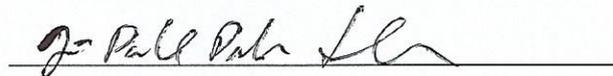
Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (Membro Externo)

Universidade Federal da Paraíba - UFPB



Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena (Membro Externo)

Campus Bragança - UFPA



Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva

PDM - UFPA

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para realizar este trabalho.

À minha família sempre presente durante toda minha jornada acadêmica e, em especial a minha mãe Maria Justina, pelo apoio incondicional nos momentos mais difíceis.

À minha esposa Elisangela, por estar sempre ao meu lado me dando força, carinho e incentivo nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo, pela orientação eficiente, especialmente pelo interesse, dedicação, apoio e valiosas sugestões em todas as fases de preparação deste trabalho.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. José Antonio Langa Rosado, pela orientação durante minha estadia de doutorado sanduíche na Universidad de Sevilla, España, e pelo incentivo a pesquisa nas diversas áreas dos sistemas dinâmicos.

À colaboração do Prof. Dr. Flank Bezerra com suas valiosas sugestões pertinentes a este trabalho.

Aos amigos, pelo companheirismo nos bons e maus momentos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, pelo apoio financeiro e ao Programa de Doutorado em Matemática-PDM.

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica assintótica de algumas EDPs por meio de sistemas dinâmicos deterministas, não autônomos e estocásticos, mais especificamente, estudamos o atrator global para o sistema dinâmico gerado pelo fluxo bidimensional de um fluido micropolar não-Newtoniano, em seguida, estudamos o sistema dinâmico não autônomo dado por uma equação hiperbólica singularmente perturbada, provamos a continuidade de atratores pullback, uniforme e cociclo, também estudamos atratores cociclo para sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos (SDAN) com universos de atração autônomos, estabelecemos resultados teóricos e aplicamos às equações estocásticas de Navier-Stokes 2D com ruído branco aditivo escalar e força externa não autônoma de translação limitada, finalmente, introduzimos as noções de flattening e contração para SDAN, mostramos que a propriedade de contração generalizada implica um resultado de modos determinantes e dimensão fractal finita de atratores cociclo aleatórios, aplicamos esta análise teórica às equações estocásticas de Navier-Stokes 2D.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Atratores, Equações diferenciais parciais.

Abstract

In this work we study the asymptotic dynamics of some PDEs by deterministic, non-autonomous and stochastic dynamical systems, more specifically, we study the global attractor for the dynamical system generated by two-dimensional flow of a non-Newtonian micropolar fluid, and then we study the non-autonomous dynamical system given by a singularly perturbed hyperbolic equation, we prove the continuity of pullback, uniform and cocycle attractors, we also study cocycle attractors for non-autonomous random dynamical systems (NRDS) with autonomous attraction universes, we establish theoretical results and application to stochastic 2D Navier-Stokes equations with additive white noise and translation bounded non-autonomous external force, finally, we introduce the notions of flattening and squeezing for NRDS, we show that the generalized squeezing property implies a result of determining modes and finite fractal dimension of random cocycle attractors, we apply this theoretical analysis to stochastic 2D Navier-Stokes equations.

Key-words: Dynamical systems, Attractors, Partial differential equations.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 4 |
| 1.1 Atratores globais para sistemas dinâmicos autônomos | 4 |
| 1.2 Atratores para sistemas dinâmicos não autônomos | 7 |
| 2 Sobre atratores globais para um sistema de equações 2D de um fluido micropolar não-Newtoniano | 12 |
| 2.1 Formulação do problema | 14 |
| 2.2 Existência de atrator global | 17 |
| 2.3 Semicontinuidade superior | 24 |
| 2.4 Dimensão fractal | 29 |
| 3 Continuidade de atratores para uma equação hiperbólica não autônoma singularmente perturbada | 39 |
| 3.1 Motivação do problema | 39 |
| 3.2 Formulação do problema e resultado principal | 40 |
| 3.3 Semicontinuidade superior | 45 |
| 3.4 Existência e continuidade de soluções globais limitadas | 48 |
| 3.5 Existência de variedades instáveis como gráfico | 54 |
| 3.6 Continuidade de variedades instáveis | 63 |
| 3.7 Semicontinuidade inferior de atratores | 67 |
| 4 Sobre atratores cociclo aleatórios com universos de atração autônomos | 71 |
| 4.1 Sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos (SDAN) | 71 |
| 4.2 Equivalência das definições $\Sigma = \mathcal{H}(g)$ e $\Sigma = \mathbb{R}$ | 75 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.3 | Uma comparação com \hat{D} -atratores cociclo aleatórios | 77 |
| 4.4 | CrITÉrios de existÊncia e caracterizaÇão por trajetÓrias completas | 80 |
| 4.4.1 | CrITÉrio de existÊncia | 80 |
| 4.4.2 | CaracterizaÇão por trajetÓrias completas | 85 |
| 4.5 | Continuidade em sÍmbolos determinÍsticos nÃo autÃnomos | 87 |
| 4.5.1 | Semicontinuidade superior em sÍmbolos | 88 |
| 4.5.2 | Semicontinuidade inferior em sÍmbolos | 89 |
| 4.6 | AplicaÇão às equaçÕes de Navier-Stokes 2D | 94 |
| 4.6.1 | ForÇas externas de translaÇão limitada e espaço de sÍmbolo | 94 |
| 4.6.2 | Preliminares sobre equaçÕes de Navier-Stokes 2D | 95 |
| 4.6.3 | Estimativas uniformes de soluÇÕes | 98 |
| 4.6.4 | Atratores cociclo temperados | 103 |
| 5 | Propriedades flattening e de contraÇão para um SDAN | 107 |
| 5.1 | Flattening para SDAN | 107 |
| 5.2 | A propriedade de contraÇão cociclo aleatÓria (PCCA) | 114 |
| 5.3 | DimensÃo finita de conjuntos aleatÓrios invariantes | 118 |
| 5.4 | AplicaÇão às equaçÕes de Navier-Stokes | 121 |
| 5.4.1 | Limitação do raio do atrator cociclo aleatÓrio | 121 |
| 5.5 | Propriedade de contraÇão cociclo aleatÓria | 128 |
| 5.5.1 | Modos determinantes e dimensÃo finita de atratores cociclo aleatÓrios | 132 |
| 6 | ConclusÕes e problemas em aberto | 134 |
| A | Estimativas a priori | 136 |
| A.1 | A primeira estimativa | 136 |
| A.2 | A segunda estimativa | 138 |
| A.3 | A terceira estimativa | 148 |
| A.4 | A quarta estimativa | 151 |
| A.4.1 | Comparação das trajetÓrias | 152 |
| | Bibliografia | 159 |

Introdução

Sistemas dinâmicos em dimensão infinita são modelos para numerosos problemas que aparecem na física, biologia, economia, engenharia entre outros. Estes sistemas dinâmicos são frequentemente gerados por uma equação diferencial parcial ou uma equação diferencial funcional. Analisar as propriedades assintóticas de um sistema dinâmico significa compreender seu comportamento no futuro, a existência de um atrator nos proporciona informação precisa sobre a dinâmica assintótica destes sistemas dinâmicos. Neste trabalho estudamos a dinâmica assintótica de sistemas dinâmicos associados às equações diferenciais parciais (EDPs).

Quando uma equação diferencial possui somente termos autônomos (independentes do tempo) estudamos seu comportamento assintótico por meio da teoria de semigrupos (sistemas dinâmicos autônomos). Neste caso existem inúmeras referências sobre a teoria de atratores globais para semigrupos, por exemplo [5, 39, 4, 69, 47, 66]. Quando tal equação possui termos não autônomos (dependentes do tempo) analisamos seu comportamento assintótico através da teoria de sistemas dinâmicos não autônomos. O estudo de atratores pullback para sistema dinâmicos não autônomos foi abordado em [13, 43, 46, 9].

Por outro lado, um sistema dinâmico aleatório (SDA) é geralmente associado a uma equação que leva em consideração uma perturbação estocástica. Quando tal equação possui termos dependentes do tempo, chamado o símbolo determinista (não autônomo) da equação é conveniente estudar seu comportamento dinâmico por sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos (SDAN). Recentemente, Wang [72, 73], estabeleceu uma estrutura, em que o conceito de SDAN foi introduzido como uma generalização de sistemas dinâmicos determinísticos não autônomos e SDA autônomos, pela qual a teoria de atrator pullback abrange agora SDAN.

Neste presente texto, em um primeiro momento, estudamos a dinâmica assintótica de duas EDPs. Mais precisamente, estudamos a dinâmica assintótica do semigrupo dado pelo fluxo bidimensional de um fluido micropolar não-Newtoniano. Usamos a equação da energia para provar a existência e semicontinuidade superior de atratores globais. Além disso, mostramos a finitude da dimensão fractal destes atratores usando o método das trajetórias curtas. Em seguida, estudamos o sistema dinâmico não autônomo dado por uma equação hiperbólica sin-

gularmente perturbada, provamos um resultado importante sobre semicontinuidade superior e inferior de atratores cociclo, pullback e uniforme associados à este sistema dinâmico não autônomo. Estes dois problemas constituem a parte determinista deste trabalho.

Por outro lado, em um segundo momento, para SDAN, estudamos o atrator cociclo para o qual o universo de atração contém apenas conjuntos aleatórios *autônomos*. Aqui, por conjuntos aleatórios autônomos queremos dizer conjuntos aleatórios independentes de símbolos não autônomos, e por atrator cociclo, enfatizamos que o espaço de símbolo não é a reta real. Claramente, uma vez que o atrator cociclo aleatório estudado neste trabalho não mais pertence ao universo de atração, este é em geral diferente do estudado em [72], onde o universo de atração é não autônomo. Além disso, notando que no estudo de atratores cociclo não aleatórios é mais frequente considerar a coleção de conjuntos limitados/compactos como universo de atração, ou seja, os universos de atração para atratores cociclo não aleatórios são muitas vezes autônomos, concluimos que vale a pena ter um estudo independente sobre atratores cociclo aleatórios com universo de atração autônomo. A diferença e a relação entre universos de atração autônomos e não autônomos são destacadas neste texto.

Inspirado nos trabalhos de [28, 36, 44, 72], para um SDAN definimos a pullback flattening e a *propriedade de contração cociclo aleatória* (PCCA) como uma generalização da *propriedade de contração aleatória* (do inglês random squeezing property) para um SDA introduzida por Flandoli e Langa em [36]. Mostramos que em espaços de Banach uniformemente convexos a pullback flattening é equivalente às compacidade assintótica e omega limite do SDAN, e que sob certas hipóteses esses conceitos implicam a existência de atrator cociclo aleatório. Similarmente à Flandoli e Langa [36] e Langa [49] aqui mostramos que a PCCA é uma condição suficiente para provar um resultado de modos determinantes e a dimensionalidade finita de atratores cociclo aleatórios.

O presente texto está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos básicos e resultados que serão úteis para a compreensão deste texto. Mais precisamente, fizemos um resumo das teorias de atratores globais e não autônomos. Além disso, enunciamos alguns resultados importantes que serão utilizados nas demonstrações dos resultados presentes nos demais capítulos.

No Capítulo 2, investigamos a existência, semicontinuidade superior e dimensionalidade fractal de atratores globais para um sistema bidimensional de equações que modela o movimento de um fluido micropolar não-Newtoniano.

No Capítulo 3, estudamos uma equação hiperbólica não autônoma singularmente perturbada. Provamos que os atratores não autônomos gerado por essa equação, isto é, os atratores pullback, cociclo e uniforme são semicontínuos superiormente e inferiormente com relação a

semidistância de Hausdorff. A semicontinuidade superior é provada usando estimativas a priori sobre as soluções e resultados de composição do processo em dois componentes, o que decai para zero exponencialmente e o suave. A prova da semicontinuidade inferior é mais fina, uma vez que partimos de pressupostos estruturais do atrator global para o problema não perturbado, primeiro mostramos que perto de uma solução de equilíbrio hiperbólica do problema não perturbado existe uma solução global limitada do problema perturbado. Então provamos que as variedades instáveis destas soluções globais são dadas por gráficos de funções Lipschitz. Além disso, provamos que estas variedades instáveis são contínuas relativamente a perturbações. Finalmente, concluímos a semicontinuidade inferior destes atratores.

No Capítulo 4, estudamos atratores cociclo para SDAN com universos de atração autônomos, isto é, atraindo pullback conjuntos aleatórios autônomos, em vez de os não autônomos. Iniciamos este capítulo introduzindo alguns conceitos básicos da recente teoria de SDAN introduzida em [72, 6], e depois comparamos atratores cociclo com universos de atração autônomos e não autônomos, em seguida para os autônomos estabelecemos alguns critérios de existência e caracterização. Estudamos também para atratores cociclo a continuidade das seções indexadas por símbolos não autônomos, mostramos que a semicontinuidade superior é equivalente a compacidade uniforme do atrator, enquanto que a semicontinuidade inferior é equivalente a uma propriedade de equi-atração sob algumas condições. Aplicamos estes resultados teóricos às equações estocásticas de Navier-Stokes bidimensional com ruído aditivo branco e força externa não autônoma de translação limitada. Os resultados desse capítulo deram origem a um artigo intitulado “On random cocycle attractors with autonomous attraction universes” feito em colaboração por H. Cui, M. M. Freitas e José A. Langa, o qual foi aceito para publicação na revista “Discrete and Continuous Dynamical Systems” (veja [25]).

No Capítulo 5, inspirado nos trabalhos de [28, 36, 44, 72], estendemos a idéia de propriedade flattening e de contração para um SDAN. As propriedades flattening e de contração generalizadas são chamadas pullback flattening e propriedade de contração cociclo aleatória (PCCA), respectivamente. Mostramos que em espaços de Banach uniformemente convexos a pullback flattening é equivalente as compacidades assintótica e ômega-limite do SDAN, e todos esses conceitos implicam a existência de atrator cociclo. Além disso, provamos que a PCCA é uma condição suficiente para provar um resultado de modos determinantes e a dimensionalidade fractal finita de conjuntos aleatórios não autônomos invariantes sob um SDAN. Também provamos que a PCCA é uma condição mais fraca que pullback flattening em espaços de Banach uniformemente convexos. Finalmente, aplicamos estes resultados teóricos às equações estocásticas de Navier-Stokes bidimensional com ruído aditivo branco e força externa não autônoma de translação limitada.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos básicos e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho.

1.1 Atratores globais para sistemas dinâmicos autônomos

Nesta seção, introduzimos alguns conceitos básicos e resultados da teoria de atratores globais para semigrupos. Para mais detalhes indicamos as referências [5, 39, 4, 69, 47, 66, 9].

Seja X um espaço métrico com métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ o espaço das aplicações contínuas de X em si mesmo.

Definição 1.1. *Uma família de aplicações $\{T(t) : t \geq 0\}$ em $\mathcal{C}(X)$ é dita um **semigrupo (sistema dinâmico autônomo)** em X quando verificam-se as seguintes condições:*

- (i) $T(0) = I$ (a aplicação identidade em X),
- (ii) $T(t)T(\tau) = T(t + \tau)$ para todo $t, \tau \geq 0$,
- (iii) A aplicação $[0, +\infty) \times X \ni (t, u_0) \mapsto T(t)u_0 \in X$ é contínua.

Neste contexto o espaço métrico X também é chamado **espaço de fase** do semigrupo.

A noção de invariância, dada a seguir, desempenha um papel importante no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

Definição 1.2. *Um subconjunto A de X é **invariante** pelo semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, se $T(t)A = A$ para todo $t \geq 0$.*

Para definir um atrator global é necessário dar um significado para o termo **atração**. Isso é feito definindo-se semidistância de Hausdorff entre dois conjuntos.

Dados A e B dois subconjuntos não vazios de X , a **semidistância de Hausdorff** entre A e B é definida por

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{a \in A} \text{dist}(a, B), \quad \text{com} \quad \text{dist}(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Pode-se facilmente verificar que $\text{dist}(A, B) = 0$ se, e somente se, $A \subset \overline{B}$.

Dado um subconjunto B de X , denotamos por $\mathcal{N}_\epsilon(B)$ e $\overline{\mathcal{N}}_\epsilon(B)$ as ϵ -vizinhanças aberta e fechada de B , respectivamente, isto é,

$$\mathcal{N}_\epsilon(B) = \{x \in X : \text{dist}(x, B) < \epsilon\},$$

$$\overline{\mathcal{N}}_\epsilon(B) = \{x \in X : \text{dist}(x, B) \leq \epsilon\}.$$

A **distância de Hausdorff** entre dois subconjuntos A e B de X é definida por

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \{ \text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A) \}.$$

Definição 1.3. *Sejam A e B subconjuntos de X . Dizemos que A **atrai** B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, quando*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)B, A) = 0,$$

ou equivalentemente, quando para todo $\epsilon > 0$ existe $T = T(B, \epsilon) > 0$ tal que

$$T(t)B \subset \mathcal{N}_\epsilon(A), \quad \forall t \geq T.$$

Definição 1.4. *Um conjunto $A \subset X$ é dito **atraente** sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ se A atrai cada conjunto limitado de X .*

Para um semigrupo gerado por uma equação de evolução, as soluções que começam em conjuntos limitados estão a partir de um certo tempo próximas (isto é, numa vizinhança) de A .

A noção de dissipação permite reduzir o estudo da dinâmica de um semigrupo em um subconjunto do espaço de fase. O conceito matemático que traduz a idéia dissipação é a absorção, a qual definiremos a seguir.

Definição 1.5. *Um conjunto $B \subset X$ é chamado **absorvente** se para cada conjunto $D \subset X$ limitado existe um $T = T(D) > 0$ tal que*

$$T(t)D \subset B, \quad \forall t \geq T.$$

*Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é chamado **dissipativo**, quando possui um conjunto absorvente.*

Se tomarmos como exemplo semigrupos que são gerados por equações diferenciais, a dissipação significa que as soluções que começam em conjuntos limitados do espaço de fase estão a partir de um certo tempo no interior do conjunto B . Portanto, a dinâmica será concentrada em torno deste conjunto e a dinâmica no exterior B é transitória. Na verdade, existe um conjunto menor em que ocorre a dinâmica assintótica dos semigrupos, este conjunto é chamado um *atrator global*.

Definição 1.6. Um subconjunto A de X é chamado um **atrator global** para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se

- (i) A é compacto,
- (ii) A é atraente,
- (iii) A é invariante.

Claramente, se existe um atrator global para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, é único.

Definição 1.7. O conjunto ω -limite de um conjunto $B \subset X$ é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} T(s)B}.$$

Conjuntos ω -limites são importantes na teoria de atratores. É fácil ver a seguinte caracterização.

Lema 1.1. Seja B um subconjunto de X . Então, $\omega(B)$ é fechado e

$$\omega(B) = \left\{ x \in X : \text{existem sequências } t_n \rightarrow \infty \text{ e } x_n \in B \text{ com } x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n \right\}.$$

O teorema a seguir nos diz que a existência de um conjunto compacto absorvente é uma condição suficiente para a existência de um atrator global (consulte [66]).

Teorema 1.1. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo em X possuindo um conjunto compacto absorvente B . Então $\{T(t) : t \geq 0\}$ possui um único atrator global A dado por

$$A = \omega(B).$$

Objetos importantes para a dinâmica de semigrupos são as soluções globais que definimos a seguir.

Definição 1.8. Uma aplicação contínua $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma **solução global** para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $T(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$ para todo $t \geq 0$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada uma **solução estacionária** ou um **ponto (ou solução) de equilíbrio** de $\{T(t) : t \geq 0\}$, quando é uma aplicação constante, ou seja, quando $\xi(t) = e^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum $e^* \in X$.

Atratores globais para *semigrupos gradientes* (veja [40]) podem ser caracterizados por meio das variedades instáveis das soluções de equilíbrio hiperbólicas. O conhecimento dessa estrutura nos permite obter a semicontinuidade inferior de atratores como veremos mais adiante.

1.2 Atratores para sistemas dinâmicos não autônomos

Nesta seção introduzimos alguns conceitos básicos sobre sistemas dinâmicos não autônomos e seus atratores (veja [16, 9, 7]).

Definição 1.9. Um **processo de evolução** (ou simplesmente um **processo**) em X é uma família de aplicações $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ em $\mathcal{C}(X)$ satisfazendo

- (a) $S(t, t) = I$, (aplicação identidade),
- (b) $S(t, \tau) = S(t, s)S(s, \tau)$, para todo $t \geq s \geq \tau$ e
- (c) $(t, \tau, x) \mapsto S(t, \tau)x$ é contínua para $t \geq \tau$, $x \in X$,

Quando X é um espaço vetorial normado e $S(t, \tau)$ é linear para cada $t \geq \tau$, dizemos que $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ é um **processo linear**.

Um processo de evolução $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ em X para o qual $S(t, \tau) = S(t - \tau, 0)$ para todo $t \geq \tau$ é chamado **autônomo**. Se escrevemos $T(t) := S(t, 0)$ para $t \geq 0$ então a família $\{T(t) : t \geq 0\}$ define um semigrupo em X . Reciprocamente, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em X e definimos $S(t, \tau) = T(t - \tau)$ para todo $t \geq \tau$, então $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ é um processo de evolução em X .

Definição 1.10. Uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é chamada uma **solução global** para o processo $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ se $S(t, \tau)\phi(\tau) = \phi(t)$ para todo $t \geq \tau$.

A seguir introduzimos a noção de atração no sentido pullback e invariância de famílias.

Definição 1.11. Sejam $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ um processo de evolução e $A = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ uma família de subconjuntos de X . Dizemos que A **atrai pullback** um conjunto $B \subset X$ sob $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ se

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \text{dist}(S(t, \tau)B, A(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.12. Uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de X é dita **invariante** sob $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ se

$$S(t, \tau)A(\tau) = A(t), \quad \forall t \geq \tau \in \mathbb{R}.$$

Agora introduzimos o conceito de atrator pullback para um processo de evolução.

Definição 1.13. Uma família $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de subconjuntos de X é chamada um **atrator pullback** para o processo $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $A(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ atrai pullback cada conjunto limitado de X e
- (iii) $\{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante.
- (iv) Se $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é uma família de subconjuntos fechados de X que atrai pullback cada conjunto limitado de X , então $A(t) \subset B(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

A condição de minimalidade (iv) é para garantir a unicidade do atrator pullback. Notemos também que se $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ é o processo de evolução associado a um semigrupo, então o conceito de atrator pullback coincide com o clássico de atrator global (para mais detalhes indicamos o excelente livro de Carvalho Langa e Robinson [9]).

Definimos agora o conceito de sistema dinâmico não autônomo e seus atratores uniforme e cociclo.

Definição 1.14. Sejam (X, d) e (Σ, ρ) espaços métricos. Um **sistema dinâmico não autônomo** (SDN), denotado por $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$, consiste de dois ingredientes:

- (a) Um grupo **diretor** $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ de aplicações contínuas de Σ em si mesmo.
- (b) Um **cociclo** sobre θ_t , isto é, uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \Sigma \times X \rightarrow X$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $\varphi(0, p) = I$, para todo $p \in \Sigma$,
- (2) a aplicação $\mathbb{R}^+ \times \Sigma \ni (t, p) \mapsto \varphi(t, p)x \in X$ é contínua para cada $x \in X$,

(3) φ satisfaz a propriedade do cociclo, isto é,

$$\varphi(t + s, p) = \varphi(t, \theta_s p) \varphi(s, p), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+, p \in \Sigma.$$

Definição 1.15. Um *atrator uniforme* $\mathcal{A} \subset X$ para o SDN $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ é o conjunto compacto minimal de X tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{p \in \Sigma} \text{dist}(\varphi(t, p)B, \mathcal{A}) = 0,$$

para cada subconjunto limitado B de X .

Definição 1.16. Um *conjunto não autônomo* é uma família $\{D(p)\}_{p \in \Sigma}$ de subconjuntos de X indexados em Σ . Dizemos que $\{D(p)\}_{p \in \Sigma}$ é um aberto (fechado, compacto, não vazio) se cada fibra $D(p)$ é aberta (fechada, compacta, não vazia), respectivamente.

Definição 1.17. Um conjunto não autônomo compacto $\{A(p)\}_{p \in \Sigma}$ é chamado um *atrator cociclo* para o SDN $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ se

(a) $\{A(p)\}_{p \in \Sigma}$ é invariante sob o SDN $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$, isto é,

$$\varphi(t, p)A(p) = A(\theta_t p), \quad \forall p \in \Sigma, t \geq 0,$$

(b) $\{A(p)\}_{p \in \Sigma}$ atrai pullback cada limitado de X , isto é, para cada $B \subset X$ limitado, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t, \theta_{-t} p)B, A(p)) = 0.$$

Definição 1.18. Um SDN $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ é *uniformemente assintoticamente compacto* se existe um conjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{p \in \Sigma} \text{dist}(\varphi(t, p)B, K) = 0,$$

para todo subconjunto limitado B de X .

Claramente, se $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ é uniformemente assintoticamente compacto, então $\mathcal{A} \subset K$. O resultado seguinte (veja [7, Teorema 3.12]) estabelece a relação entre atrator uniforme e atrator cociclo.

Teorema 1.2. Suponha que o SDN $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ é uniformemente assintoticamente compacto. Então $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ possui um atrator uniforme \mathcal{A} e um atrator cociclo $\{A(p)\}_{p \in \Sigma}$ e vale

$$\mathcal{A} = \bigcup_{p \in \Sigma} A(p).$$

Também usaremos a propriedade de invariância levantada do atrator uniforme dada na próxima definição.

Definição 1.19. *Seja $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ um SDN. Um conjunto $\mathcal{M} \subset X$ é dito **levantado invariante** se para cada $x \in \mathcal{M}$ existe $p \in \Sigma$ e uma solução global $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ passando por x e p em \mathcal{M} , isto é, $\xi(t) \in \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $\xi(0) = x$, e*

$$\varphi(t, \theta_{sp})\xi(s) = \xi(s + t)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

*Se existe um $\epsilon > 0$ tal que \mathcal{M} é o conjunto levantado invariante maximal em $\mathcal{N}_\epsilon(\mathcal{M})$, então dizemos que \mathcal{M} é um **conjunto levantado invariante isolado**.*

Teorema 1.3. [7, Proposição 3.21] *O atrator uniforme \mathcal{A} para o SDN $(\varphi, \theta)_{(X, \Sigma)}$ é o conjunto levantado invariante limitado maximal de X .*

Tipicamente, para um problema governado por uma EDP não autônoma, o espaço Σ é o fecho numa métrica apropriada ρ do conjunto de todos os tempos transladados da expressão dependente do tempo que aparece na definição do problema. Se denotarmos essa expressão por f , o espaço Σ é formado por todas as funções $f(\cdot + t)$, onde $t \in \mathbb{R}$, e os operadores θ_t são os operadores de translação definidos por $\theta_t(f) = f(\cdot + t)$. Supomos normalmente que a expressão f é uma função de *translação compacta*, isto é, as sequências $f(\cdot + t_n)$ são relativamente compactas em ρ para $t_n \rightarrow \pm\infty$. Então tomamos $\Sigma = \alpha(f) \cup \{f(t + \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}} \cup \omega(f)$, em que $\alpha(f)$ é o conjunto de todos os pontos de acumulação de $f(\cdot + t_n)$ onde $t_n \rightarrow -\infty$ e $\omega(f)$ é o conjunto de todos os pontos de acumulação de $f(\cdot + t_n)$ onde $t_n \rightarrow +\infty$. Nesse caso, o espaço Σ é compacto e invariante, sendo ele próprio um atrator global para o semigrupo diretor $\{\theta_t\}_{t \geq 0}$. Se existir um atrator cociclo $\{A(p)\}_{p \in \Sigma}$, então também existe um atrator pullback $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e podemos recuperá-lo tomando as fibras do atrator cociclo que são dados pelas translações do termo original f , isto é,

$$A(f(\cdot + t)) = A(t).$$

Para estudarmos a estabilidade sob perturbações dos atratores é necessário introduzir os conceitos de semicontinuidade superior e inferior.

Definição 1.20. *Seja $\{A_\epsilon : \epsilon \in [0, 1]\}$ uma família de subconjuntos X dizemos que*

1. $\{A_\epsilon : \epsilon \in [0, 1]\}$ é **semicontínua superiormente** em $\epsilon = 0$ se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}(A_\epsilon, A_0) = 0.$$

2. $\{A_\epsilon : \epsilon \in [0, 1]\}$ é *semicontínua inferiormente* em $\epsilon = 0$ se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}(A_0, A_\epsilon) = 0. \quad (1.1)$$

3. $\{A_\epsilon : \epsilon \in [0, 1]\}$ é *contínua* em $\epsilon = 0$ se é *semicontínua superiormente e inferiormente* em $\epsilon = 0$, ou seja,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}_{\mathcal{H}}(A_\epsilon, A_0) = 0.$$

A Definição 1.20 pode ser estendida naturalmente a conjuntos não autônomos, ou seja, a família $\{A_\epsilon(p)\}_{p \in \Sigma}$, $\epsilon \in [0, 1]$ de conjuntos não autônomos de X é *semicontínua superiormente* (resp. *inferiormente*) em $\epsilon = 0$ se for *semicontínua superiormente* (resp. *inferiormente*) para cada $p \in \Sigma$ fixo. A definição é válida para os atratores cociclo ou para atratores pullback se tomarmos \mathbb{R} em vez de Σ e o conjunto não autônomo é indexado pelo tempo t .

A semicontinuidade superior é tipicamente mais fácil de obter do que a semicontinuidade inferior e o ingrediente chave da prova são as estimativas a priori no atrator, nenhum conhecimento da estrutura do atrator é necessário. Por outro lado, a semicontinuidade inferior é mais difícil, uma vez que é necessário partir de pressupostos estruturais sobre o processo não perturbado e seu atrator, portanto devemos ter um conhecimento detalhado da estrutura do atrator não perturbado.

Capítulo 2

Sobre atratores globais para um sistema de equações 2D de um fluido micropolar não-Newtoniano

Neste capítulo investigamos a existência, semicontinuidade superior e dimensão fractal de atratores globais para a seguinte equação de um fluido micropolar não-Newtoniano

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot \tau(\epsilon(u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} w + f, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \partial_t w - \nu_1 \Delta w + (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, \end{cases} \quad (2.1)$$

associado a condição inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathcal{O}, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \mathcal{O}, \end{cases} \quad (2.2)$$

e a condição de fronteira

$$\begin{cases} u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\mathcal{O} \times (0, T), \\ w(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\mathcal{O} \times (0, T), \end{cases} \quad (2.3)$$

sobre um domínio suave $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, em que $T > 0$, $u = (u_1, u_2)$ é o campo velocidade, p é a pressão, e w é o campo microrrotacional escalar, geralmente interpretado como o campo de velocidade angular de rotação das partículas, os campos $f = (f_1, f_2)$ e g são as forças externas e momentos, respectivamente. Aqui

$$\operatorname{rot} u = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1, \quad \nabla \cdot u = \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2, \quad \operatorname{rot} w = (\partial_{x_2} w, -\partial_{x_1} w),$$

a aplicação $\tau : \mathbb{R}_{sym}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^2$ denota o tensor extra de estresse do fluido dado por

$$\tau(e(u)) = 2(\nu + \nu_r + M(|e(u)|^2))e(u), \quad (2.4)$$

em que \mathbb{R}_{sym}^2 representa o conjunto de todas as matrizes simétricas 2×2 , isto é,

$$\mathbb{R}_{sym}^2 = \{\eta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \eta_{ij} = \eta_{ji}, i, j = 1, 2\},$$

ν, ν_1, ν_r são constantes positivas, ν e ν_r representa os coeficientes de viscosidade, a saber, ν é a viscosidade Newtoniana e ν_r é a viscosidade microrrotacional. Aqui, assume-se que a densidade do fluido é constante e igual a 1, $M : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função continuamente diferenciável que denota a função viscosidade generalizada, e $e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^2$ denota a parte simétrica do gradiente da velocidade, isto é, a matriz 2×2 dada por

$$e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T),$$

cujas componentes são definidas como em [59] por

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j), \quad i, j = 1, 2,$$

e $|e(u)|$ denota a norma usual de matrix, ou seja,

$$|e(u)|^2 = \sum_{i,j=1}^2 |e_{ij}(u)|^2.$$

Assumimos que existem constantes positivas c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1(1 + \sqrt{t})^2 \leq M(t) \leq c_2(1 + \sqrt{t})^2, \quad (2.5)$$

e

$$0 \leq M'(t) \leq c_3 \frac{(1 + \sqrt{t})}{\sqrt{t}}, \quad (2.6)$$

para todo $t \in (0, \infty)$.

Em geral, se $\tau(e(u))$ depende linearmente de $e(u)$ então dizemos que o fluido correspondente é um fluido Newtoniano. De um modo geral, os gases, água, óleos, álcoois e compostos de hidrocarbonetos simples tendem a ser fluidos Newtonianos e os seus movimentos podem ser descrito pelas equações de Navier-Stokes. Se a relação entre $\tau(e(u))$ e $e(u)$ é não linear, então o fluido é chamado não-Newtoniano, por exemplo, o fluxo de sangue, tintas, produtos fundidos de polímeros, soluções biológicas e colas tendem a ser fluidos não-Newtonianos.

No caso particular em que M é uma função constante, o sistema (2.1) reduz-se a um sistema de fluido micropolar, o qual foi introduzido por Eringen em [33]. Neste caso há uma vasta

literatura sobre a teoria matemática para o modelo autônomo, não-autônomo e estocástico, no sentido de existência, unicidade, a regularidade e estabilidade de soluções, veja, por exemplo [8, 14, 30, 33, 37, 47] e [54], e no sentido de atratores, veja, por exemplo [8, 14, 30, 47, 54, 58] e [67].

O sistema (2.1) foi investigado em [1] sobre um domínio suave de \mathbb{R}^d , os autores provaram a existência de solução fraca para $d \leq 3$ e unicidade para $d = 2$ nas mesmas condições de M . Em certo sentido, a nossa análise aqui completa o estudo iniciado em [1].

2.1 Formulação do problema

Para melhor apresentar nossos resultados introduzimos algumas terminologias. Para cada $p \geq 1$, denotamos por $L^p(\mathcal{O})$ os espaços de Lebesgue das funções de \mathcal{O} em \mathbb{R} com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{O})} = \left(\int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

A norma dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathcal{O})$ é denotada por $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})}$. O conjunto $W_0^{1,p}(\mathcal{O})$ representa o subespaço das funções de $W^{1,p}(\mathcal{O})$ com traço zero.

A seguinte desigualdade de Korn é provada em [64] ela será utilizada várias vezes neste capítulo: seja $\varphi \in (W_0^{1,p}(\mathcal{O}))^2$, então

$$\left(\int_{\mathcal{O}} |e(\varphi)|^p dx \right)^{1/p} \geq K_p \|\varphi\|_{(W^{1,p}(\mathcal{O}))^2}, \quad K_p > 0. \quad (2.7)$$

Também usaremos as seguintes notações

$$\mathcal{V} = \{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (C_0^\infty(\mathcal{O}))^2 : \nabla \cdot \varphi = 0 \}.$$

O espaço V_p é o fecho de \mathcal{V} no espaço $(W^{1,p}(\mathcal{O}))^2$ com a norma do gradiente, isto é,

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathcal{O})} = \left(\int_{\mathcal{O}} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Para $p = 2$, denotamos $V = V_2$ e o produto interno e norma em V são denotados respectivamente por

$$((u, v)) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathcal{O}} \partial_{x_j} u_i \partial_{x_j} v_i dx, \quad \|u\| = ((u, u))^{1/2}.$$

O espaço H é o fecho de \mathcal{V} no espaço $(L^2(\mathcal{O}))^2$ com produto interno e norma definidos respectivamente por

$$(u, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\mathcal{O}} u_i v_i dx, \quad |u| = (u, u)^{1/2}.$$

Note que V e H são espaços de Hilbert, e temos as seguintes imersões $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, sendo a primeira delas compacta.

De agora em diante, também denotamos $\mathcal{H} = H \times L^2(\mathcal{O})$ e $\mathcal{V} = V \times H_0^1(\mathcal{O})$ com as normas produtos standard.

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $L^p(0, T; X)$ o espaço das funções fortemente mensuráveis sobre o intervalo $(0, T)$ com valores em X , com a seguinte norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X, & p = \infty, \end{cases}$$

e $C(0, T; X)$ é o espaço das funções contínuas sobre o intervalo $(0, T)$ com valores no espaço de Banach X , com a norma

$$\|u\|_{C(0, T; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Definição 2.1. *Seja \mathcal{P} a projeção ortogonal $\mathcal{P} : (L^2(\mathcal{O}))^2 \rightarrow H$. O operador de Stokes $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é definido por $A = -\mathcal{P}\Delta$, com domínio $D(A) = (H^2(\mathcal{O}))^2 \cap V \subset H$.*

Por conveniência de notação, substituiremos o somatório $\sum_{i, j=1}^2 \alpha_i \beta_j$ simplesmente por $\alpha_i \beta_i$.

Introduzimos as seguintes formas bilinear e trilineares

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(u, v) \mapsto a(u, v) = \int_{\mathcal{O}} \partial_{x_j} u_i \partial_{x_j} v_i dx,$$

$$b : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(u, v, w) \mapsto b(u, v, w) = \int_{\mathcal{O}} u_i (\partial_{x_i} v_j) w_j dx,$$

e

$$b_1 : V \times H_0^1(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(u, \omega, \psi) \mapsto b_1(u, \omega, \psi) = \int_{\mathcal{O}} u_i (\partial_{x_i} \omega) \psi dx,$$

Temos as seguintes propriedades

$$a(u, v) = ((u, v)), \quad u, v \in V,$$

e

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v), \quad \forall u \in V, v, w \in (H_0^1(\mathcal{O}))^2,$$

$$b_1(u, \omega, \psi) = -b_1(u, \psi, \omega), \quad \forall u \in V, \omega, \psi \in H_0^1(\mathcal{O}),$$

donde resulta que

$$b(u, v, v) = 0, \quad b_1(u, \omega, \omega) = 0, \quad \forall u \in V, v \in (H_0^1(\mathcal{O}))^2, \omega \in H_0^1(\mathcal{O}). \quad (2.8)$$

Também introduzimos as seguintes notações

$$B : V \times V \rightarrow V',$$

$$(u, v) \mapsto B(u, v) = (u \cdot \nabla)v = u_i \partial_{x_i} v,$$

$$B_1 : V \times H_0^1(\mathcal{O}) \rightarrow H^{-1}(\mathcal{O}),$$

$$(u, \omega) \mapsto B_1(u, \omega) = (u \cdot \nabla)\omega = u_i \partial_{x_i} \omega,$$

e

$$\mathcal{K} : V_4 \rightarrow V_4',$$

$$u \mapsto \mathcal{K}u = -\nabla \cdot (2M(|e(u)|^2)e(u)).$$

Consequentemente,

$$\langle B(u, v), w \rangle = b(u, v, w), \quad \forall u, v, w \in V, \quad (2.9)$$

$$\langle B_1(u, \omega), \psi \rangle = b_1(u, \omega, \psi), \quad \forall u \in V, \omega, \psi \in H_0^1(\mathcal{O}), \quad (2.10)$$

$$\langle \mathcal{K}u, v \rangle = \int_{\Omega} 2M(|e(u)|^2)e_{ij}(u)e_{ij}(v) \, dx, \quad \forall u, v \in V_4. \quad (2.11)$$

Observação 2.1. Usando as condições sobre a função M podemos verificar que o operador $\mathcal{K} : V_4 \rightarrow V_4'$ é monótono, isto é,

$$\langle \mathcal{K}u - \mathcal{K}v, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V_4.$$

A seguir introduzimos a noção de solução fraca para o problema (2.1)-(2.3).

Definição 2.2. Sejam $f \in L^2(0, T; H)$, $g \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$, $u_0 \in H$ e $w_0 \in L^2(\mathcal{O})$. Uma solução fraca do problema (2.1)-(2.3) é um par de funções (u, w) tal que

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V_4),$$

$$w \in L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{O})) \cap L^2(0, T; H_0^1(\mathcal{O})),$$

com

$$u' \in L^{4/3}(0, T; V_4'), \quad w' \in L^2(0, T; H^{-1}(\mathcal{O})), \quad (2.12)$$

e $u(0) = u_0, w(0) = w_0$ satisfazendo as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), \varphi) + (\nu + \nu_r)a(u(t), \varphi) + (\mathcal{K}u, \varphi) + (B(u(t), u(t)), \varphi) \\ = 2\nu_r(\text{rot } w(t), \varphi) + (f(t), \varphi) \end{aligned} \quad (2.13)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(w(t), \phi) + \nu_1(\nabla w(t), \nabla \phi) + (B_1(u(t), w(t)), \phi) + 4\nu_r(w(t), \phi) \\ = 2\nu_r(\text{rot } u(t), \phi) + (g(t), \phi) \end{aligned} \quad (2.14)$$

para todo $\varphi \in V_4$ e $\phi \in H_0^1(\mathcal{O})$ no sentido das distribuições escalares em $(0, \infty)$.

Temos o seguinte resultado de existência e unicidade de soluções fracas (veja [1]).

Teorema 2.1. *Existe uma única solução para o problema (2.1)-(2.3) no sentido da Definição 2.2. Além disso, para cada $t > 0$ a aplicação $(u_0, w_0) \mapsto (u(t), w(t))$ é contínua como uma aplicação em \mathcal{H} .*

2.2 Existência de atrator global

Nesta seção, mostraremos a existência de atrator global para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ associado ao problema (2.1)-(2.3) no espaço de fase \mathcal{H} .

Pelo Teorema 2.1, podemos definir um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em \mathcal{H} como

$$T(t)(u_0, w_0) = (u(t), w(t)), \quad t \geq 0, \quad (2.15)$$

em que $(u(t), w(t))$ é a única solução fraca do problema (2.1)-(2.3) com condição inicial $(u_0, w_0) \in \mathcal{H}$ e $(f, g) \in \mathcal{H}$.

Agora, lembramos o Lema de Gronwall, que será utilizado na sequência, a sua prova pode ser encontrada em [69].

Lema 2.1. *Sejam ξ, β, θ três funções localmente integráveis em (t_0, ∞) tais que $\frac{d\xi}{dt}$ é localmente integrável em (t_0, ∞) e satisfaz*

$$\frac{d\xi}{dt} \leq \theta\xi + \beta.$$

Então

$$\xi(t) \leq \xi(t_0)e^{\int_{t_0}^t \theta(\tau) d\tau} + \int_{t_0}^t \beta(s)e^{\int_s^t \theta(\tau) d\tau} ds, \quad \forall t \geq t_0.$$

A partir de agora, assumiremos que as forças externas e momentos independem do tempo. Sejam X um espaço de Banach e $x_0 \in X$, denotamos por $B_r^X(x_0)$ uma bola em X centrada em x_0 com raio r . Em seguida, provaremos a existência de bolas absorventes para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em \mathcal{H} e \mathcal{V} , respectivamente.

Teorema 2.2. *Suponhamos que $(f, g) \in \mathcal{H}$, então existe um conjunto limitado absorvente em \mathcal{H} para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ definido por (2.15).*

Demonstração: Observemos que por (2.13)-(2.14) com $\varphi = u$ e $\psi = w$ e levando em conta (2.8) temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + (\nu + \nu_r) \|u\|^2 + 2 \int_{\mathcal{O}} M(|e(u)|^2) |e_{ij}(u)|^2 dx = 2\nu_r (\text{rot } w, u) + (f, u), \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \nu_1 \|w\|^2 + 4\nu_r |w|^2 = 2\nu_r (\text{rot } u, w) + (g, w). \quad (2.17)$$

Usando que

$$\int_{\mathcal{O}} \text{rot } u \cdot w dx = \int_{\mathcal{O}} u \cdot \text{rot } w dx \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{O}} |\text{rot } u|^2 dx = \|u\|^2, \quad (2.18)$$

para todo $u \in V$ e $w \in H_0^1(\mathcal{O})$ e a desigualdade de Schwarz, também deduzimos que

$$2\nu_r (\text{rot } w, u) = 2\nu_r (w, \text{rot } u) \leq 2\nu_r |w|^2 + \frac{\nu_r}{2} \|u\|^2.$$

De (2.5) e (2.7) segue-se que

$$\int_{\mathcal{O}} M(|e(u)|^2) |e_{ij}(u)|^2 dx \geq c_1 \int_{\mathcal{O}} |e(u)|^4 dx \geq c_1 K_4^4 \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))}^4, \quad (2.19)$$

e pela desigualdade de Poincaré

$$(f, u) \leq |f| \|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|u\| |f| \leq \frac{\nu}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1} |f|^2, \quad (2.20)$$

em que $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor do operador Stokes A . Assim, de (2.16), (2.19) e (2.20) obtemos

$$\frac{d}{dt} |u|^2 + (\nu + \nu_r) \|u\|^2 + 4c_1 K_4^4 \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))}^4 \leq 4\nu_r |w|^2 + \frac{1}{\nu\lambda_1} |f|^2. \quad (2.21)$$

Por outro lado, temos que

$$2\nu_r (\text{rot } u, w) \leq 2\nu_r \|u\| |w| \leq 2\nu_r |w|^2 + \frac{\nu_r}{2} \|u\|^2. \quad (2.22)$$

Usando novamente a desigualdade de Poincaré obtemos

$$(g, w) \leq |g| \|w\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |g| \|w\| \leq \frac{\nu_1}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2\nu_1\lambda} |g|^2, \quad (2.23)$$

em que $\lambda > 0$ é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $L^2(\mathcal{O})$ com domínio $D(-\Delta) = H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$. Usando as estimativas acima em (2.17) concluímos que

$$\frac{d}{dt} |w|^2 + \nu_1 \|w\|^2 + 4\nu_r |w|^2 \leq \nu_r \|u\|^2 + \frac{1}{\nu_1\lambda} |g|^2. \quad (2.24)$$

De (2.21) e (2.24) resulta que

$$\frac{d}{dt}(|u|^2 + |w|^2) + \nu \|u\|^2 + \nu_1 \|w\|^2 + 4c_1 K_4^4 \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^4 \leq \frac{1}{\nu \lambda_1} |f|^2 + \frac{1}{\nu_1 \lambda} |g|^2. \quad (2.25)$$

Definindo

$$\alpha_1 = \min\{\nu, \nu_1\}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 \min(\lambda_1, \lambda), \quad \alpha_3 = \max\left(\frac{1}{\nu \lambda_1}, \frac{1}{\nu_1 \lambda}\right),$$

e levando em conta (2.25) segue-se que

$$\frac{d}{dt}(|u|^2 + |w|^2) + \alpha_1 (\|u\|^2 + \|w\|^2) + 4c_1 K_4^4 \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^4 \leq \alpha_3 (|f|^2 + |g|^2). \quad (2.26)$$

e pela desigualdade de Poincaré resulta que

$$\frac{d}{dt}(|u|^2 + |w|^2) + \alpha_2 (|u|^2 + |w|^2) \leq \alpha_3 (|f|^2 + |g|^2). \quad (2.27)$$

Aplicando o Lema 2.1 em (2.27) obtemos

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq e^{-\alpha_2 t} \left\{ (|u_0|^2 + |w_0|^2) + \alpha_3 \int_0^t e^{\alpha_2 s} (|f(s)|^2 + |g(s)|^2) ds \right\}. \quad (2.28)$$

Se as forças externas e momentos independem do tempo $(f, g) \in \mathcal{H}$, então pela desigualdade (2.28) segue-se que

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq e^{-\alpha_2 t} \left\{ (|u_0|^2 + |w_0|^2) + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (|f|^2 + |g|^2) (e^{\alpha_2 t} - 1) \right\}. \quad (2.29)$$

Portanto,

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq e^{-\alpha_2 t} (|u_0|^2 + |w_0|^2) + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (|f|^2 + |g|^2), \quad (2.30)$$

para todo $t \geq 0$, assim

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (|u(t)|^2 + |w(t)|^2) \leq \frac{\alpha_3}{\alpha_2} (|f|^2 + |g|^2).$$

Denotando $r_0 = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} (|f|^2 + |g|^2)}$, podemos facilmente ver que para cada $r > r_0$ fixo a bola

$$B_r^{\mathcal{H}}(0) = \{(u, v) \in \mathcal{H} : |u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq r^2\}$$

em \mathcal{H} é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Mais precisamente, para cada $B \subset \mathcal{H}$ limitado existe $t_0 = t_0(B) > 0$ tal que para todo $(u_0, v_0) \in B$

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq r^2, \quad \forall t \geq t_0.$$

A prova está completa. ■

Agora, relembremos o lema uniforme de Gronwall que utilizaremos na sequência, a sua prova pode ser encontrada em [69].

Lema 2.2. *Sejam g, h e y três funções localmente integráveis em (t_0, ∞) tais que $\frac{dy}{dt}$ é localmente integrável em (t_0, ∞) e satisfaz a desigualdade diferencial*

$$\frac{dy}{dt} \leq gy + h.$$

Além disso, se

$$\int_t^{t+r} g(s) ds \leq \xi_1, \quad \int_t^{t+r} h(s) ds \leq \xi_2, \quad \int_t^{t+r} y(s) ds \leq \xi_3, \quad \forall t \geq t_0,$$

em que r, ξ_1, ξ_2, ξ_3 são constantes positivas. Então

$$y(t+r) \leq \left(\frac{\xi_3}{r} + \xi_2 \right) e^{\xi_1}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Teorema 2.3. *Suponhamos que $(f, g) \in \mathcal{H}$, então existe um conjunto absorvente em \mathcal{V} para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ definido por (2.15).*

Demonstração: Usaremos formalmente $\partial_t u$ como uma função teste em (2.13). (Como $\partial_t u$ não é regular o suficiente para ser usada como uma função teste em (2.13) devemos trabalhar com as derivadas da aproximação de Galerkin $\partial_t u_m$. Notemos que para a solução (u_m, w_m) a mesma desigualdade (2.29) é válida. Portanto, usando a semicontinuidade inferior sequencial fraca da norma obtemos a mesma desigualdade de antes). Então usando $\partial_t u$ como uma função teste em (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} |\partial_t u|^2 + \frac{\nu + \nu_r}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \tau_{ij}(e(u)) e_{ij}(\partial_t u) dx \\ = - \int_{\mathcal{O}} u_i (\partial_{x_i} u_j) \partial_t u_j dx + 2\nu_r (\text{rot } w, \partial_t u) + (f, \partial_t u). \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que τ_{ij} é um tensor dado por

$$\tau_{ij}(e) = 2M(|e|^2) e_{ij}.$$

Usando o potencial correspondente, isto é,

$$\Phi(e) = \int_0^{|e|^2} M(t) dt, \quad (2.32)$$

segue-se que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) dx = \int_{\mathcal{O}} \tau_{ij}(e(u)) e_{ij}(\partial_t u) dx. \quad (2.33)$$

Usando (2.18) e a desigualdade de Young temos que

$$2\nu_r (\text{rot } w, \partial_t u) \leq 4\nu_r^2 \|w\|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t u|^2, \quad (2.34)$$

e

$$(f, \partial_t u) \leq |f|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t u|^2. \quad (2.35)$$

De (2.33)-(2.35) e (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\partial_t u|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu + \nu_r}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) \, dx \right) \\ & \leq \int_{\mathcal{O}} |u_i| |\partial_{x_i} u_j| |\partial_t u_j| \, dx + 4\nu_r^2 \|w\|^2 + |f|^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Note que

$$\int_{\mathcal{O}} |u_i| |\partial_{x_i} u_j| |\partial_t u_j| \, dx \leq \|u\|_{(L^\infty(\mathcal{O}))^2}^2 \|u\|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t u|^2. \quad (2.37)$$

Como $W^{1,q}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{O})$ para $q > n = 2$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_{\mathcal{O}} |u_i| |\partial_{x_i} u_j| |\partial_t u_j| \, dx \leq c \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \|u\|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t u|^2, \quad (2.38)$$

segue-se de (2.36) e (2.38) que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} |\partial_t u|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu + \nu_r}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) \, dx \right) \\ & \leq c \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \|u\|^2 + 4\nu_r^2 \|w\|^2 + |f|^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

De (2.5), (2.32) e (2.7) temos

$$\int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) \, dx \geq c_1 \int_{\mathcal{O}} |e(u)|^2 \, dx \geq c_1 K_2^2 \|u\|^2. \quad (2.40)$$

Assim,

$$\|u\|^2 \leq k_0 \left(\frac{\nu + \nu_r}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) \, dx \right), \quad (2.41)$$

em que $k_0 = (c_1 K_2^2)^{-1}$. Usando (2.41) em (2.39) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu + \nu_r}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) \, dx \right) \\ & \leq ck_0 \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \left(\frac{\nu + \nu_r}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) \, dx \right) + 4\nu_r^2 \|w\|^2 + |f|^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Sejam

$$y(t) = \frac{\nu + \nu_r}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) \, dx, \quad g(t) = ck_0 \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2$$

e

$$h(t) = 4\nu_r^2 \|w\|^2 + |f|^2$$

concluimos de (2.42) que

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq g(t)y(t) + h(t). \quad (2.43)$$

Agora, usaremos o Lema 2.2 em (2.43). Integrando a desigualdade (2.26) com relação a t no intervalo $(t, t + 1)$, e com $t \geq t_0$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_t^{t+1} (\|u(s)\|^2 + \|w(s)\|^2) ds + 4c_1 K_4^4 \int_t^{t+1} \|u(s)\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^4 ds \\ \leq \alpha_3(|f|^2 + |g|^2) + (|u(t)|^2 + |w(t)|^2) \\ \leq \alpha_3(|f|^2 + |g|^2) + r^2 \equiv \rho. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Usando (2.32) e (2.5) vemos que

$$\begin{aligned} \Phi(e(u)) &\leq c_2 \int_0^{|e(u)|^2} (1 + \sqrt{t})^2 dt \\ &\leq 2c_2 \int_0^{|e(u)|} (1 + t)^3 dt \\ &= \frac{c_2}{2} ((1 + |e(u)|)^4 - 1) \\ &\leq \frac{c_2}{2} (1 + |e(u)|)^4, \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde resulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) dx &\leq \frac{c_2}{2} \int_{\mathcal{O}} (1 + |e(u)|)^4 dx \\ &\leq \frac{c_2 k_1}{2} \int_{\mathcal{O}} (1 + |e(u)|^4) dx \\ &\leq \frac{c_2 k_1}{2} |\mathcal{O}| + \frac{c_2 k_1}{2} \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^4, \end{aligned} \quad (2.46)$$

em que $|\mathcal{O}|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto \mathcal{O} . Assim, para todo $t \geq t_0$, levando em conta (2.44) e (2.46) temos

$$\int_t^{t+1} y(s) ds \leq \frac{(\nu + \nu_r)\rho}{2\alpha_1} + \frac{c_2 k_1}{2} |\mathcal{O}| + \frac{c_2 k_1 \rho}{8c_1 K_4^4} \equiv \xi_3,$$

$$\int_t^{t+1} g(s) ds \leq ck_0 \left(\int_t^{t+1} \|u(s)\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^4 ds \right)^{1/2} \leq \frac{ck_0}{2K_4^2} \sqrt{\frac{\rho}{c_1}} \equiv \xi_1$$

e

$$\int_t^{t+1} h(s) ds \leq \frac{4\nu_r^2 \rho}{\alpha_1} + |f|^2 \equiv \xi_2.$$

Pelo Lema 2.2 e as considerações acima segue que

$$y(t) = \frac{\nu + \nu_r}{2} \|u\|^2 + \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) dx \leq (\xi_3 + \xi_2) e^{\xi_1}, \quad \forall t \geq t_0 + 1. \quad (2.47)$$

Como (2.40) implica

$$\|u\|^2 \leq k_0 \int_{\mathcal{O}} \Phi(e(u)) dx, \quad (2.48)$$

então, de (2.47) concluímos que

$$\|u(t)\|^2 \leq k_0 (\xi_3 + \xi_2) e^{\xi_1} \equiv r_1^2, \quad \forall t \geq t_0 + 1. \quad (2.49)$$

Agora, usando $\partial_t w$ como uma função teste em (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} |\partial_t w|^2 + \frac{\nu_1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + 2\nu_r \frac{d}{dt} |w|^2 \\ = - \int_{\mathcal{O}} u_i \partial_{x_i} w \partial_t w \, dx + 2\nu_r (\operatorname{rot} u, \partial_t w) + (g, \partial_t w). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pela desigualdade de Young temos

$$2\nu_r (\operatorname{rot} u, \partial_t w) \leq 4\nu_r^2 \|u\|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t w|^2, \quad (2.51)$$

$$(g, \partial_t w) \leq |g|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t w|^2, \quad (2.52)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} |u_i| |\partial_{x_i} w| |\partial_t w| \, dx &\leq \|u\|_{(L^\infty(\mathcal{O}))^2}^2 \|w\|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t w|^2 \\ &\leq c \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \|w\|^2 + \frac{1}{4} |\partial_t w|^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Usando (2.51)-(2.53) em (2.50) segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} |\partial_t w|^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\nu_1}{2} \|w\|^2 + 2\nu_r |w|^2 \right) \\ \leq c \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \|w\|^2 + 4\nu_r^2 \|u\|^2 + |g|^2 \\ \leq c \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \|w\|^2 + \frac{4c\nu_r}{\nu_1} \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 |w|^2 + 4\nu_r^2 \|u\|^2 + |g|^2 \\ = \frac{2c}{\nu_1} \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \left(\frac{\nu_1}{2} \|w\|^2 + 2\nu_r |w|^2 \right) + 4\nu_r^2 \|u\|^2 + |g|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Y}(t) \leq \mathcal{Y}(t) \mathcal{G}(t) + \mathcal{H}(t), \quad (2.54)$$

em que

$$\mathcal{Y}(t) = \frac{\nu_1}{2} \|w\|^2 + 2\nu_r |w|^2, \quad \mathcal{G}(t) = \frac{2c}{\nu_1} \|u\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(t) = 4\nu_r^2 \|u\|^2 + |g|^2. \quad (2.55)$$

Usando (2.44) com $t \geq t_0$ temos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \mathcal{Y}(s) \, ds &\leq \frac{\nu_1 \rho}{2\alpha_1} + 2\nu_r r^2 \equiv \zeta_3, \\ \int_t^{t+1} \mathcal{G}(s) \, ds &\leq \frac{2c}{\nu_1} \left(\int_t^{t+1} \|u(s)\|_{(W^{1,4}(\mathcal{O}))^2}^4 \, ds \right)^{1/2} \leq \frac{c}{\nu_1 K_4^2} \sqrt{\frac{\rho}{c_1}} \equiv \zeta_1 \end{aligned}$$

e

$$\int_t^{t+1} \mathcal{H}(s) ds \leq \frac{4\nu_r^2 \rho}{\alpha_1} + |g|^2 \equiv \zeta_2.$$

Pelo Lema 2.2 obtemos

$$\|w(t)\|^2 \leq \frac{2}{\nu_1} (\zeta_3 + \zeta_2) e^{\zeta_1} \equiv r_2^2, \quad \forall t \geq t_0 + 1. \quad (2.56)$$

Então, de (2.49) e (2.56) concluimos que

$$B^{\mathcal{V}} = B_{r_1}^V(0) \times B_{r_2}^{H_0^1(\mathcal{O})}(0) \subset \mathcal{V} \quad (2.57)$$

é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em \mathcal{V} . ■

Podemos resumir os resultados acima no seguinte teorema

Teorema 2.4. *O semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ gerado pelo sistema de equações 2D de um fluido micropolar não-Newtoniano (2.15) possui um único atrator global \mathcal{A} em \mathcal{H} dado por*

$$\mathcal{A} = \omega(B^{\mathcal{V}}), \quad (2.58)$$

em que $B^{\mathcal{V}}$ é definido em (2.57).

Demonstração: Como o conjunto $B^{\mathcal{V}}$ definido em (2.57) é limitado em \mathcal{V} , e \mathcal{V} é compactamente imerso em \mathcal{H} , segue que $B^{\mathcal{V}}$ é um conjunto compacto de \mathcal{H} . Além disso, pela prova do Teorema 2.3 o conjunto $B^{\mathcal{V}}$ é de fato um conjunto absorvente de \mathcal{H} . Portanto, $B^{\mathcal{V}}$ é um conjunto compacto absorvente de \mathcal{H} , pelo Teorema 1.1 o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ definido em (2.15) possui um único atrator global \mathcal{A} em \mathcal{H} dado pela caracterização (2.58). A prova está completa. ■

2.3 Semicontinuidade superior

Nesta seção, provaremos a semicontinuidade superior dos atratores globais em $\nu_r = 0$. Inicialmente, estimamos a diferença entre as soluções (u, w) e (v, z) dos seguintes problemas, respectivamente, em termos de ν_r

$$\begin{cases} u' - \nabla \cdot \tau(e(u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} w + f, & \text{em } \mathcal{O}, \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } \mathcal{O}, \\ w' - \nu_1 \Delta w + (u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, & \text{em } \mathcal{O}, \\ u(x, 0) = u_0(x), w(x, 0) = w_0(x), & \text{em } \mathcal{O}, \end{cases} \quad (2.59)$$

e

$$\begin{cases} v' - \nabla \cdot \tau_1(e(v)) + (v \cdot \nabla)v + \nabla q = f, & \text{em } \mathcal{O}, \\ \nabla \cdot v = 0, & \text{em } \mathcal{O}, \\ z' - \nu_1 \Delta z + (v \cdot \nabla)z = g, & \text{em } \mathcal{O}, \\ v(x, 0) = v_0(x), z(x, 0) = z_0(x), & \text{em } \mathcal{O}, \end{cases} \quad (2.60)$$

ambos com condições de fronteira (2.3).

O sistema (2.60) é obtido através do sistema (2.59) fazendo $\nu_r = 0$. Se a viscosidade microrrotacional ν_r tende a zero então o sistema (2.59) reduz-se a um sistema de equações de fluidos não-Newtonianos (veja [58, 59]) e o campo velocidade u torna-se independente da microrotação w . É conhecido (veja [61, 60, 58]) que o problema (2.60) possui um atrator global.

Teorema 2.5. *Sejam $(u_0, w_0), (f, g) \in \mathcal{H}$ e ν suficientemente grande. Seja (u, w) uma solução do problema (2.59), e seja (v, z) uma solução do problema (2.60), ambas com condições iniciais u_0, w_0 . Então, existe uma constante $c > 0$ independente de t , tal que*

$$|u(t) - v(t)| \leq c\nu_r \quad e \quad |w(t) - z(t)| \leq c(\nu_r + \nu_r^{1/2})$$

para todo $t \geq 0$.

Em particular, a solução do problema (2.59) converge para a solução do problema (2.60) em \mathcal{H} , uniformemente com relação a $t \in [0, \infty)$ quando $\nu_r \rightarrow 0$.

Demonstração: Primeiro, estimamos a diferença entre as velocidades em termos de ν_r . Seja $U(t) = u(t) - v(t)$, então

$$\begin{cases} U' - (\nu + \nu_r)\Delta U - \nu_r \Delta v + \mathcal{K}u - \mathcal{K}v + (u \cdot \nabla)u - (v \cdot \nabla)v + \nabla(p - q) = 2\nu_r \operatorname{rot} w, & \text{em } \mathcal{O}, \\ \nabla \cdot U = 0, & \text{em } \mathcal{O}, \end{cases}$$

assim

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |U|^2 + (\nu + \nu_r) \|U\|^2 + (\mathcal{K}u - \mathcal{K}v, U) = 2\nu_r (\operatorname{rot} w, U) - \nu_r (\nabla v, \nabla U) - b(U, v, U).$$

Como \mathcal{K} é um operador monótono temos que

$$(\mathcal{K}u - \mathcal{K}v, U) \geq 0,$$

portanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |U|^2 + (\nu + \nu_r) \|U\|^2 \leq 2\nu_r (\operatorname{rot} w, U) - \nu_r (\nabla v, \nabla U) - b(U, v, U).$$

Estimamos os termos do lado direito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 2\nu_r(\operatorname{rot} w, U) &= 2\nu_r(w, \operatorname{rot} U) \leq 2\nu_r|w|^2 + \frac{\nu_r}{2}\|U\|^2, \\ |\nu_r(\nabla v, \nabla U)| &\leq \frac{\nu_r}{2}\|v\|^2 + \frac{\nu_r}{2}\|U\|^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

e

$$|b(U, v, U)| \leq \frac{c}{\nu}\|v\|^2|U|^2 + \frac{\nu}{2}\|U\|^2.$$

Assim, obtemos que

$$\frac{d}{dt}|U|^2 + \nu\|U\|^2 \leq \frac{2c}{\nu}\|v\|^2|U|^2 + 4\nu_r(|w|^2 + \|v\|^2),$$

e

$$\frac{d}{dt}|U|^2 + \left(\lambda_1\nu - \frac{2c}{\nu}\|v\|^2\right)|U|^2 \leq 4\nu_r(|w|^2 + \|v\|^2). \quad (2.62)$$

Sejam

$$\theta(t) = \lambda_1\nu - \frac{2c}{\nu}\|v(t)\|^2, \quad \beta^2(t) = |w(t)|^2 + \|v(t)\|^2.$$

Pelos resultados da Seção 2.2, existem constantes positivas c_1 , c_2 e t_1 tais que

$$\begin{aligned} \|v(t)\|^2 &\leq c_1^2, \quad \forall t \geq t_1, \\ \beta^2(t) &\leq c_2^2, \quad \forall t \geq t_1. \end{aligned}$$

Seja ν suficientemente grande, de modo que para $t \geq t_1$

$$\theta(t) \geq \lambda_1\nu - \frac{2c}{\nu}c_1^2 \equiv \delta > 0.$$

Então, de (2.62) temos

$$|U(t)|^2 \leq e^{-\delta(t-t_1)}|U(t_1)|^2 + \frac{4\nu_r c_2^2}{\delta} \{1 - e^{-\delta(t-t_1)}\}, \quad \forall t \geq t_1. \quad (2.63)$$

Vamos estimar $|U(t)|$ sobre o intervalo $[0, t_1]$. Como

$$\frac{d}{dt}|U|^2 + \theta(t)|U|^2 \leq 4\nu_r\beta^2(t), \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

com $U(0) = 0$, e as funções θ e β^2 são integráveis em $[0, t_1]$, pelo Lema de Gronwall obtemos

$$|U(t)|^2 \leq 4\nu_r \int_0^t \beta^2(s) e^{-\int_s^t \theta(\mu) d\mu} ds \leq c_3(t_1)\nu_r, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (2.64)$$

Segue-se de (2.63) e (2.64) que existe uma constante $c_3 > 0$ tal que

$$|U(t)| \leq c_3\nu_r, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.65)$$

Agora estimamos a diferença entre as microrotações w e z em termos de ν_r . Seja $W = w - z$, então

$$W' - \nu_1 \Delta W = 2\nu_r \operatorname{rot} u - 4\nu_r w + (v \cdot \nabla)z - (u \cdot \nabla)w. \quad (2.66)$$

Multiplicando a equação (2.66) por W e integrando sobre \mathcal{O} obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |W|^2 + \nu_1 \|W\|^2 = 2\nu_r (\operatorname{rot} u, W) - 4\nu_r (w, W) + b_1(U, W, z). \quad (2.67)$$

Estimamos os termos do lado direito. Note que

$$2\nu_r (\operatorname{rot} u, W) = 2\nu_r (u, \operatorname{rot} W) \leq \frac{8\nu_r^2}{\nu_1} |u|^2 + \frac{\nu_1}{8} \|W\|^2$$

e

$$4\nu_r (w, W) \leq \frac{4\nu_r}{\lambda} |w| \|W\| \leq \frac{16\nu_r^2}{\lambda\nu_1} |w|^2 + \frac{\nu_1}{4} \|W\|^2.$$

Finalmente, da desigualdade de Hölder e da seguinte desigualdade

$$\|u\|_{L^4(\mathcal{O})} \leq c_1 |u|^{1/2} \|u\|^{1/2}, \quad \forall u \in H_0^1(\mathcal{O}) \quad (2.68)$$

(veja [47]), segue-se que

$$\begin{aligned} b_1(U, W, z) &\leq \|U\|_{L^4(\mathcal{O})} \|W\| \|z\|_{L^4(\mathcal{O})} \\ &\leq c |U|^{1/2} \|U\|^{1/2} \|W\| \|z\|^{1/2} \|z\|^{1/2} \\ &\leq \frac{\nu_1}{8} \|W\|^2 + c_4 |U| \|z\| \|U\| \|z\|. \end{aligned}$$

Usando as estimativas acima em (2.67) concluímos que

$$\frac{d}{dt} |W|^2 + \lambda\nu_1 |W|^2 \leq c_5 \nu_r^2 (|u|^2 + |w|^2) + c_4 |U| \|z\| \|U\| \|z\|. \quad (2.69)$$

Para estimar o lado direito de (2.69), usaremos (2.65) e os resultados da Seção 2.2. Em particular, temos

$$|z(t)| \leq c_6, \quad \forall t \geq 0,$$

e para algum $t_1 > 0$ e $c_7 > 0$

$$\|U(t)\| + \|z(t)\| \leq c_7, \quad \forall t \geq t_1.$$

Aplicando as estimativas acima em (2.69) obtemos

$$\frac{d}{dt} |W|^2 + \lambda\nu_1 |W|^2 \leq c_5 \nu_r^2 (|u|^2 + |w|^2) + c_8 \nu_r^{1/2} \|U\| \|z\|, \quad (2.70)$$

e assim,

$$\frac{d}{dt} |W|^2 + \lambda\nu_1 |W|^2 \leq c_5 \nu_r^2 (|u|^2 + |w|^2) + c_9 \nu_r^{1/2}, \quad \forall t \geq t_1. \quad (2.71)$$

Como $|u|^2 + |w|^2 \leq c_{10}$ para algum $c_{10} > 0$, concluímos de (2.71) que

$$|W(t)|^2 \leq e^{-\lambda\nu_1(t-t_1)} |W(t_1)|^2 + c_{11} (\nu_r + \nu_r^{1/2}) (1 - e^{-\lambda\nu_1(t-t_1)}), \quad \forall t \geq t_1. \quad (2.72)$$

Agora estimamos $|W(t)|$ sobre o intervalo $[0, t_1]$. Temos

$$\int_0^{t_1} \|U(s)\| \|z(s)\| ds \leq \|U\|_{L^2(0,t_1;V)} \|z\|_{L^2(0,t_1;H_0^1(\mathcal{O}))} < \infty.$$

Aplicando o Lema de Gronwall em (2.70), obtemos

$$|W(t)|^2 \leq ce^{-\lambda\nu_1 t} \int_0^t (\nu_r^2 + \nu_r^{1/2} \|U(s)\| \|z(s)\|) e^{\lambda\nu_1 s} ds \leq c_{12} (\nu_r^2 + \nu_r^{1/2}), \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.73)$$

Combinando (2.72) e (2.73) concluímos que existe uma constante $c_{13} > 0$, tal que

$$|W(t)|^2 \leq c_{13} (\nu_r^2 + \nu_r^{1/2}), \quad \forall t \geq 0,$$

e a prova está completa. ■

Agora, provaremos a semicontinuidade superior de atratores. Para cada $\nu_r > 0$ denotamos por \mathcal{A}_{ν_r} o atrator global para o problema (2.59), e por \mathcal{A}_0 o atrator global gerado pelo problema (2.60).

Teorema 2.6. *Sob as hipóteses do Teorema 2.5, a família de atratores globais $\{\mathcal{A}_{\nu_r} : \nu_r \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\nu_r = 0$, isto é,*

$$\lim_{\nu_r \rightarrow 0} \text{dist}(\mathcal{A}_{\nu_r}, \mathcal{A}_0) = 0.$$

Demonstração: Sejam $\{T_{\nu_r}(t); t \geq 0\}$ e $\{T_0(t); t \geq 0\}$ os semigrupos associados aos sistemas (2.59) e (2.60), respectivamente. Tendo em vista [12] é suficiente provar que

(i) Para cada $t \geq 0$, $T_{\nu_r}(t)(u_0, w_0) \rightarrow T_0(t)(u_0, w_0)$, quando $\nu_r \rightarrow 0$, uniformemente sobre subconjuntos limitados de \mathcal{H} ,

(ii) $\overline{\bigcup_{\nu_r \in [0,1]} \mathcal{A}_{\nu_r}}$ é um subconjunto compacto de \mathcal{H} .

A propriedade (i) segue-se pelo Teorema 2.5. Como \mathcal{A}_{ν_r} é o conjunto fechado atraente minimal, então

$$\bigcup_{\nu_r \in [0,1]} \mathcal{A}_{\nu_r} \subset B^{\mathcal{V}}.$$

Portanto, $\bigcup_{\nu_r \in [0,1]} \mathcal{A}_{\nu_r}$ é um conjunto limitado em \mathcal{V} , e como \mathcal{V} é compactamente imerso em \mathcal{H} concluímos (ii). A prova está completa. ■

2.4 Dimensão fractal

Sabemos que todas as soluções do problema (2.1)-(2.3) são atraídas para um conjunto invariante compacto \mathcal{A} , é razoável perguntar se o comportamento dessas soluções, no infinito, pode ser caracterizado por um número finito de graus de liberdade. É conhecido na literatura que a resposta é sim se a dimensão fractal de \mathcal{A} , denotada por $d_f(\mathcal{A})$ é finita.

Definição 2.3. *Sejam X um espaço de Banach e K um subconjunto compacto de X . A **dimensão fractal** de K é definida por*

$$d_f(K) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(K)}{\ln(1/\epsilon)},$$

sendo $N_\epsilon(K)$ o número mínimo de bolas de raio ϵ necessário para cobrir K .

Existem dois métodos clássicos para a estimativa da dimensão fractal. A teoria dos expoentes de Lyapunov, esse método baseia-se na regularidade das soluções fracas para um sistema linearizado (veja [19]). No entanto, em nosso caso esta regularidade necessária da solução não é conhecida. Consequentemente, não conseguimos controlar a diferença

$$\|T(t)U_0 - T(t)V_0 - T'(t)(V_0)(U_0 - V_0)\|_{\mathcal{H}},$$

em que $T'(t)(V_0)(U_0 - V_0)$ representa a solução do sistema linearizado de (2.1) condição inicial $U_0 - V_0$.

O outro método para estimar a dimensão de conjuntos invariantes foi desenvolvido em [48] e baseia-se no teorema que diz que um conjunto invariante \mathcal{A} tem dimensão fractal (Hausdorff) finita se para todo $U_0, V_0 \in \mathcal{A}$ existem $k > 0$ e $\delta \in (0, 1)$ tais que

$$\|T(t)U_0 - T(t)V_0\|_{\mathcal{H}} \leq k\|U_0 - V_0\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.74)$$

$$\|(I - P_n)(T(t)U_0 - T(t)V_0)\|_{\mathcal{H}} \leq \delta\|U_0 - V_0\|_{\mathcal{H}}, \quad (2.75)$$

em que I denota a aplicação identidade e P_n denota a projeção ortogonal sobre o espaço gerado pelos n primeiros autovalores do operador de Stokes. Em nosso caso, infelizmente não conseguimos estabelecer a condição (2.75), por este motivo utilizamos o método das trajetórias curtas desenvolvido em [58].

Definição 2.4. *Sejam $\delta > 0$ e \mathcal{A} o atrator global para o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ definido em (2.15), então o conjunto*

$$\mathcal{A}_\delta = \{\chi : [0, \delta] \rightarrow \mathcal{H} : \chi \text{ resolve (2.1) em } (0, \delta) \text{ e } \chi(0) \in \mathcal{A}\}$$

é chamado o conjunto das **trajetórias curtas**.

Observe que essas definições fazem sentido, uma vez que soluções fracas possuem representantes contínuos.

O seguinte lema é provado em [58, Lema 3.21].

Lema 2.3. *O conjunto \mathcal{A}_δ é invariante com relação ao semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, isto é, $T(t)\mathcal{A}_\delta = \mathcal{A}_\delta$, para todo $t \geq 0$.*

Para a conveniência do leitor formulamos o lema de Aubin-Lions, uma vez que desempenha um papel fundamental na prova dos próximos teoremas deste capítulo, a sua prova pode ser encontrada em [57].

Lema 2.4. *Sejam $p_1 \in (1, \infty]$ e $p_2 \in [1, \infty)$. Sejam \mathcal{X} um espaço de Banach e \mathcal{Y}, \mathcal{Z} espaços de Banach separáveis e reflexivos de tal forma que $\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Z}$. Então para todo $\tau \in (0, \infty)$*

$$\{u \in L^{p_1}(0, \tau; \mathcal{Y}); u' \in L^{p_2}(0, \tau; \mathcal{Z})\} \hookrightarrow L^{p_1}(0, \tau; \mathcal{X}).$$

Agora estimaremos a dimensão fractal de \mathcal{A}_δ no espaço $X_\delta = L^2(0, \delta; H) \times L^2(0, \delta; L^2(\mathcal{O}))$. Seja $X = V \cap (W^{3,2}(\mathcal{O}))^2$, então pelo Lema 2.4 temos

$$\mathcal{W}_\delta^1 = \{u \in L^2(0, \delta; V) : u' \in L^1(0, \delta; X')\} \hookrightarrow L^2(0, \delta; H),$$

e

$$\mathcal{W}_\delta^2 = \{w \in L^2(0, \delta; H_0^1(\mathcal{O})) : w' \in L^1(0, \delta; H^{-1}(\mathcal{O}))\} \hookrightarrow L^2(0, \delta; L^2(\mathcal{O})).$$

Denotando $\mathcal{W}_\delta = \mathcal{W}_\delta^1 \times \mathcal{W}_\delta^2$ temos

$$\mathcal{W}_\delta \hookrightarrow X_\delta. \quad (2.76)$$

O resultado a seguir nos dá uma estimativa sobre a diferença das soluções.

Proposição 2.1. *Sejam (u_1, w_1) e (u_2, w_2) duas soluções fracas para o problema (2.1)-(2.3), definimos $u = u_1 - u_2$ e $w = w_1 - w_2$. Então, existe uma constante $k_3 > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(|u|^2 + |w|^2) + \alpha_1(\|u\|^2 + \|w\|^2) \\ & + \int_{\Omega} 2(\tau_{ij}(e(u_1)) - \tau_{ij}(e(u_2)))(e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)) dx \\ & \leq k_3(\|u_1\|^2 + \|w_1\|^2)(|u|^2 + |w|^2). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Demonstração: Como (u_1, u_2) e (w_1, w_2) são soluções fracas para o problema (2.1)-(2.3). Então u e w satisfazem as seguintes identidades

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(u, \varphi) + (\nu + \nu_r)a(u, \varphi) + (\mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, \varphi) + (B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2), \varphi) \\ & = 2\nu_r(\text{rot } w, \varphi), \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dt}(w, \phi) + \nu_1(\nabla w, \nabla \phi) + (B_1(u_1, w_1) - B_1(u_2, w_2), \phi) + 4\nu_r w = 2\nu_r(\text{rot } u, \phi), \quad (2.79)$$

para todo $\varphi \in V_4$ e $\phi \in H_0^1(\mathcal{O})$. Assim, por (2.78) e (2.79) com $\varphi = u$ e $\phi = w$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u|^2 + (\nu + \nu_r) \|u\|^2 + (\mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u) + (B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2), u) &= 2\nu_r(\text{rot } w, u), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|^2 + \nu_1 \|w\|^2 + (B_1(u_1, w_1) - B_1(u_2, w_2), w) + 4\nu_r |w|^2 &= 2\nu_r(\text{rot } u, w). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2), u) &= b(u, u_1, u), \\ (B_1(u_1, w_1) - B_1(u_2, w_2), w) &= b_1(u, w_1, w). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u|^2 + |w|^2) + (\nu + \nu_r) \|u\|^2 + \nu_1 \|w\|^2 + 4\nu_r |w|^2 \\ + \int_{\mathcal{O}} (\tau_{ij}(e(u_1)) - \tau_{ij}(e(u_2)))(e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)) \, dx \\ \leq 2\nu_r |w| \|u\| + 2\nu_r \|u\| |w| + |b(u, u_1, u)| + |b_1(u, w_1, w)|, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u|^2 + |w|^2) + \nu \|u\|^2 + \nu_1 \|w\|^2 \\ + \int_{\mathcal{O}} (\tau_{ij}(e(u_1)) - \tau_{ij}(e(u_2)))(e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)) \, dx \\ \leq |b(u, u_1, u)| + |b_1(u, w_1, w)| \\ \leq c \|u\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2 \|u_1\| + c \|u\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2} \|w_1\| \|w\|_{L^4(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Usando (5.47) e a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u|^2 + |w|^2) + \nu \|u\|^2 + \nu_1 \|w\|^2 + \int_{\mathcal{O}} (\tau_{ij}(e(u_1)) - \tau_{ij}(e(u_2)))(e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)) \, dx \\ \leq c \|u_1\| \|u\| \|u\| + c \|w_1\| \|u\|^{1/2} \|u\|^{1/2} |w|^{1/2} \|w\|^{1/2} \\ \leq \frac{\nu}{4} \|u\|^2 + c \|u_1\|^2 |u|^2 + \sqrt{\frac{\nu}{2}} \|u\| \sqrt{\nu_1} \|w\| + c \|u\| |w| \|w_1\|^2 \\ \leq \frac{\nu}{4} \|u\|^2 + c \|u_1\|^2 |u|^2 + \frac{\nu}{4} \|u\| + \frac{\nu_1}{2} \|w\|^2 + c \|w_1\|^2 |u|^2 + c \|w_1\|^2 |w|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (|u|^2 + |w|^2) + \alpha_1 (\|u\|^2 + \|w\|^2) \\ + \int_{\mathcal{O}} 2(\tau_{ij}(e(u_1)) - \tau_{ij}(e(u_2)))(e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)) \, dx \\ \leq k_3 (\|u_1\|^2 + \|w_1\|^2) (|u|^2 + |w|^2), \end{aligned}$$

com $\alpha_1 = \min(\nu, \nu_1)$ e a prova está completa. ■

Corolário 2.1. *Sob as hipóteses da Proposição 2.1, temos para $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq c_0(|u(s)|^2 + |w(s)|^2), \quad (2.80)$$

com c_0 uma constante dependendo da norma de (u_1, w_1) em $L^2(0, T, \mathcal{V})$. Em particular, o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente Lipschitz em $t \in [0, T]$ sobre o atrator global \mathcal{A} , isto é, para todo $U_0, W_0 \in \mathcal{A}$ e $t \in [0, T]$ existe $c_1 > 0$, tal que

$$\|T(t)U_0 - T(t)W_0\|_{\mathcal{H}} \leq c_1\|U_0 - W_0\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.81)$$

Demonstração: Aplicando o lema de Gronwall em (2.77), para $0 \leq s \leq t \leq T$ temos que

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 + |w(t)|^2 &\leq e^{\int_s^t k_3(\|u_1(\tau)\|^2 + \|w_1(\tau)\|^2) d\tau} (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) \\ &\leq e^{\int_0^T k_3(\|u_1(\tau)\|^2 + \|w_1(\tau)\|^2) d\tau} (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) \\ &= e^{k_3\|(u_1, w_1)\|_{L^2(0, T, \mathcal{H})}} (|u(s)|^2 + |w(s)|^2). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Isto mostra (2.80).

Agora, para mostrar (2.81) tomamos $(u_1(0), w_1(0)) = (u_1^0, w_1^0) \in \mathcal{A}$. Como \mathcal{A} é limitado e invariante existe uma constante $M_0 > 0$ tal que

$$\|u_1(\tau)\|^2 + \|w_1(\tau)\|^2 \leq M_0, \quad \forall \tau \geq 0.$$

Assim, levando em conta (2.82) vemos que

$$|u(t)|^2 + |w(t)|^2 \leq c_1|u(s)|^2 + |w(s)|^2,$$

com $c_1 = e^{k_3 M_0 T}$. A prova está completa. ■

As seguintes desigualdades (veja [59, p. 198-199]) serão utilizadas na sequência.

$$\begin{aligned} &(\tau(e(u)) - \tau(e(v))) \cdot (e(u) - e(v)) \\ &\geq k_1|e(u) - e(v)|^2 \int_0^1 (1 + |\lambda e(u) + (1 - \lambda)e(v)|)^2 d\lambda \end{aligned} \quad (2.83)$$

e

$$|\tau(e(u)) - \tau(e(v))| \leq k_2|e(u) - e(v)| \int_0^1 (1 + |\lambda e(u) + (1 - \lambda)e(v)|)^2 d\lambda. \quad (2.84)$$

Teorema 2.7. *Sejam $\chi^1 = (u_1, w_1)$, $\chi^2 = (u_2, w_2) \in \mathcal{A}_\delta$, $u = u_1 - u_2$ e $w = w_1 - w_2$. Se $\delta > 0$ satisfaz (2.93), então existem constantes $c, \hat{c} > 0$, tais que para todo $t \geq \delta$*

$$\left(\int_0^\delta (\|u(t + \tau)\|^2 + \|w(t + \tau)\|^2) d\tau \right)^{1/2} \leq c \left(\int_0^\delta (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) ds \right)^{1/2}, \quad (2.85)$$

$$\int_0^\delta (\|u'(t + \tau)\|_{X'} + \|w'(t + \tau)\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}) ds \leq \hat{c} \left(\int_0^\delta (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) ds \right)^{1/2}. \quad (2.86)$$

Demonstração: Integrando (2.77) entre $t - s$ e $t + r$, $s \in [0, \delta/2]$, $r \in [0, \delta]$ com $t \geq \delta$, obtemos

$$\begin{aligned}
& |u(t+r)|^2 + |w(t+r)|^2 + \alpha_1 \int_{-s}^r (\|u(t+\tau)\|^2 + \|w(t+\tau)\|^2) d\tau \\
& + \int_{-s}^r \int_{\mathcal{O}} 2(\tau_{ij}(e(u_1)) - \tau_{ij}(e(u_2)))(e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)) dx d\tau \\
& \leq k_3 \int_{-s}^r (\|u_1(t+\tau)\|^2 + \|w_1(t+\tau)\|^2)(|u(t+\tau)|^2 \\
& \quad + |w(t+\tau)|^2) d\tau + (|u(t-s)|^2 + |w(t-s)|^2).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Definimos

$$\mathcal{I}(u_1, u_2) := 2k_1 \int_{\mathcal{O}} |e(u)|^2 \int_0^1 (1 + |\lambda e(u_1) + (1-\lambda)e(u_2)|)^2 d\lambda dx.$$

Então de (2.83) segue que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{O}} 2(\tau_{ij}(e(u_1)) - \tau_{ij}(e(u_2)))(e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)) dx \\
& \geq 2k_1 \int_{\mathcal{O}} |e(u)|^2 \int_0^1 (1 + |\lambda e(u_1) + (1-\lambda)e(u_2)|)^2 d\lambda dx \\
& = \mathcal{I}(u_1, u_2).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Usando (2.87) e (2.88) tem-se

$$\begin{aligned}
& |u(t+r)|^2 + |w(t+r)|^2 + \alpha_1 \int_{-s}^r (\|u(t+\tau)\|^2 + \|w(t+\tau)\|^2) d\tau \\
& + \int_{-s}^r \mathcal{I}(u_1(t+\tau), u_2(t+\tau)) d\tau \\
& \leq k_3 \int_{-s}^r (\|u_1(t+\tau)\|^2 + \|w_1(t+\tau)\|^2)(|u(t+\tau)|^2 \\
& \quad + |w(t+\tau)|^2) d\tau + (|u(t-s)|^2 + |w(t-s)|^2).
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Denotando

$$\zeta(t) = \sup_{r \in [-\delta/2, \delta]} (|u(t+r)|^2 + |w(t+r)|^2),$$

e tomando o supremo sobre r , obtemos

$$\begin{aligned}
& \zeta(t) + \alpha_1 \int_0^\delta (\|u(t+\tau)\|^2 + \|w(t+\tau)\|^2) d\tau + \int_0^\delta \mathcal{I}(u_1(t+\tau), u_2(t+\tau)) d\tau \\
& \leq 2k_3 \zeta(t) \int_{-\delta/2}^\delta (\|u_1(t+\tau)\|^2 + \|w_1(t+\tau)\|^2) d\tau + 2(|u(t-s)|^2 + |w(t-s)|^2).
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Além disso, usando (2.49), (2.56) e o fato que o atrator global \mathcal{A} é um conjunto limitado invariante, obtemos

$$\|u_1(t+\tau)\|^2 + \|w_1(t+\tau)\|^2 \leq r_1^2 + r_2^2 \equiv \alpha. \tag{2.91}$$

Portanto, de (2.90) e (2.91), concluímos que

$$\begin{aligned} \zeta(t) + \alpha_1 \int_0^\delta (\|u(t+\tau)\|^2 + \|w(t+\tau)\|^2) d\tau + \int_0^\delta \mathcal{I}(u_1(t+\tau), u_2(t+\tau)) d\tau \\ \leq 3k_3\alpha\delta\zeta(t) + 2(|u(t-s)|^2 + |w(t-s)|^2). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Agora, se

$$1 - 3k_3\alpha\delta > 0, \quad (2.93)$$

então segue-se de (2.92) a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^\delta (\|u(t+\tau)\|^2 + \|w(t+\tau)\|^2) d\tau + \int_0^\delta \mathcal{I}(u_1(t+\tau), u_2(t+\tau)) d\tau \\ \leq 2(|u(t-s)|^2 + |w(t-s)|^2), \end{aligned} \quad (2.94)$$

e integrando (2.94) com relação a s entre 0 e $\delta/2$, concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \int_0^\delta (\|u(t+\tau)\|^2 + \|w(t+\tau)\|^2) d\tau + \int_0^\delta \mathcal{I}(u_1(t+\tau), u_2(t+\tau)) d\tau \\ \leq k_4 \int_0^\delta (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) ds, \end{aligned} \quad (2.95)$$

e assim, (2.85) é provado.

A fim de provar (2.86), tomamos $\varphi \in L^\infty(t, t+\delta; X) = (L^1(t, t+\delta; X'))'$ em (2.78) tal que

$$\|\varphi\|_{L^\infty(t, t+\delta; X)} \leq 1,$$

e integrando (2.78) entre t e $t+\delta$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\delta \left(\frac{d}{dt} u(t+\tau), \varphi(t+\tau) \right) d\tau \right| \\ & \leq 2\nu_r \int_0^\delta |(\text{rot } w(t+\tau), \varphi(t+\tau))| d\tau + (\nu + \nu_r) \int_0^\delta |a(u(t+\tau), \varphi(t+\tau))| d\tau \\ & + \int_0^\delta \int_{\mathcal{O}} |\tau_{ij}(e(u_1(t+\tau))) - \tau_{ij}(e(u_2(t+\tau)))| |e_{ij}(\varphi(t+\tau))| dx d\tau \\ & + \int_0^\delta |b(u_1(t+\tau), u_1(t+\tau), \varphi(t+\tau)) - b(u_2(t+\tau), u_2(t+\tau), \varphi(t+\tau))| d\tau. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Vamos estimar os termos a direita de (2.96). Usando (2.84) e o fato que $\nabla\varphi \in (W^{2,2}(\mathcal{O}))^2$ e a

imersão $W^{2,2}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^\infty(\mathcal{O})$, temos que

$$\begin{aligned}
& \int_0^\delta \int_{\mathcal{O}} |\tau_{ij}(e(u_1(t+\tau))) - \tau_{ij}(e(u_2(t+\tau)))| |e_{ij}(\varphi(t+\tau))| \, dx \, d\tau \\
& \leq k_5 \int_0^\delta \int_{\mathcal{O}} |\tau_{ij}(e(u_1(t+\tau))) - \tau_{ij}(e(u_2(t+\tau)))| \, dx \, d\tau \\
& \leq k_6 \int_0^\delta \int_{\mathcal{O}} |e(u(t+\tau))| \int_0^1 (1 + |\lambda e(u_1(t+\tau)) + (1-\lambda)e(u_2(t+\tau))|)^2 \, d\lambda \, dx \, d\tau \\
& \leq k_7 \left(\int_0^\delta \mathcal{I}(u_1(t+\tau), u_2(t+\tau)) \, d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^\delta \int_{\mathcal{O}} (1 + |\nabla u_1(t+\tau)| + |\nabla u_2(t+\tau)|)^2 \, dx \, d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Usando (2.97), (2.91) e (2.95) obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^\delta \int_{\mathcal{O}} |\tau_{ij}(e(u_1(t+\tau))) - \tau_{ij}(e(u_2(t+\tau)))| |e_{ij}(\varphi(t+\tau))| \, dx \, d\tau \\
& \leq k_8 \left(\int_0^\delta (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) \, ds \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Como $H_0^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^4(\mathcal{O})$, segue-se que

$$\begin{aligned}
& \int_0^\delta |b(u_1(t+\tau), u_1(t+\tau), \varphi(t+\tau)) - b(u_2(t+\tau), u_2(t+\tau), \varphi(t+\tau))| \, d\tau \\
& = \int_0^\delta |b(u(t+\tau), u_1(t+\tau), \varphi(t+\tau)) + b(u_2(t+\tau), u(t+\tau), \varphi(t+\tau))| \, d\tau \\
& \leq k_9 \int_0^\delta (\|u(t+\tau)\| \|u_1(t+\tau)\| \|\varphi(t+\tau)\| + \|u_2(t+\tau)\| \|u(t+\tau)\| \|\varphi(t+\tau)\|) \, d\tau \\
& \leq k_{10} \int_0^\delta (\|u(t+\tau)\| \|u_1(t+\tau)\| \|\varphi(t+\tau)\|_X + \|u_2(t+\tau)\| \|u(t+\tau)\| \|\varphi(t+\tau)\|_X) \, d\tau \\
& \leq k_{11} \left(\int_0^\delta (\|u_1(t+\tau)\| + \|u_2(t+\tau)\|)^2 \, d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^\delta \|u(t+\tau)\|^2 \, d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Então, de (2.49), (2.85), (2.99) e pelo fato do atrator global \mathcal{A} ser um conjunto limitado invariante, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^\delta |b(u_1(t+\tau), u_1(t+\tau), \varphi(t+\tau)) - b(u_2(t+\tau), u_2(t+\tau), \varphi(t+\tau))| \, d\tau \\
& \leq k_{12} \left(\int_0^\delta (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) \, ds \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Usando (2.18) e (2.85), temos

$$\begin{aligned}
2\nu_r \int_0^\delta |(\operatorname{rot} w(t + \tau), \varphi(t + \tau))| \, d\tau &= 2\nu_r \int_0^\delta |(w(t + \tau), \operatorname{rot} \varphi(t + \tau))| \, d\tau \\
&\leq k_{13} \int_0^\delta |w(t + \tau)| |\varphi(t + \tau)| \, d\tau \\
&\leq k_{14} \int_0^\delta \|w(t + \tau)\| \|\varphi(t + \tau)\|_X \, d\tau \\
&\leq k_{15} \left(\int_0^\delta \|w(t + \tau)\|^2 \, d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq k_{16} \left(\int_0^\delta (|w(s)|^2 + |u(s)|^2) \, ds \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Finalmente, de (2.85) obtém-se

$$\begin{aligned}
(\nu + \nu_r) \int_0^\delta |a(u(t + \tau), \varphi(t + \tau))| \, d\tau &\leq k_{17} \int_0^\delta \|u(t + \tau)\| |\varphi(t + \tau)| \, d\tau \\
&\leq k_{18} \int_0^\delta \|u(t + \tau)\| \|\varphi(t + \tau)\|_X \, d\tau \\
&\leq k_{19} \left(\int_0^\delta \|u(t + \tau)\|^2 \, d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq k_{20} \left(\int_0^\delta (|w(s)|^2 + |u(s)|^2) \, ds \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Tomando o supremo sobre toda φ , concluimos que

$$\|u'\|_{L^1(t, t+\delta; X')} \leq k_{21} \left(\int_0^\delta (|u(s)|^2 + |w(s)|^2) \, ds \right)^{1/2}. \tag{2.103}$$

Analogamente, tomando $\phi \in L^\infty(t, t + \delta; H_0^1(\mathcal{O})) = (L^1(t, t + \delta; H^{-1}(\mathcal{O})))'$ em (2.79) com

$$\|\phi\|_{L^\infty(t, t+\delta; H_0^1(\mathcal{O}))} \leq 1,$$

concluimos que existe $k_{22} > 0$ tal que

$$\|w'\|_{L^1(t, t+\delta; H^{-1}(\mathcal{O}))} \leq k_{22} \left(\int_0^\delta |u(s)|^2 + |w(s)|^2 \, ds \right)^{1/2},$$

e a prova está completa. ■

Teorema 2.8. *Seja $\delta > 0$ satisfazendo (2.93), então o conjunto das trajetória curtas \mathcal{A}_δ possui dimensão fractal finita.*

Demonstração: Como \mathcal{A}_δ é limitado existe $R > 0$ tal que

$$\mathcal{A}_\delta \subset B_R^{X_\delta}(0).$$

Note que, pelo Teorema 2.7 existe uma constante $k = k(c, \hat{c}) > 0$ tal que

$$\|T(t)\chi^1 - T(t)\chi^2\|_{\mathcal{W}_\delta} \leq k\|\chi^1 - \chi^2\|_{X_\delta}, \quad \forall \chi^1, \chi^2 \in \mathcal{A}_\delta. \quad (2.104)$$

Pelo Lema 2.3 e (2.104), obtemos

$$\mathcal{A}_\delta = T(t)\mathcal{A}_\delta \subset T(t)B_R^{X_\delta}(0) \subset B_{kR}^{\mathcal{W}_\delta}(T(t)0), \quad (2.105)$$

Mas devido (2.76), este último conjunto é relativamente compacto em X_δ , e conseqüentemente, pode ser coberto por um número finito N de bolas de raio $R/2$ centradas em x_i . Assim

$$\mathcal{A}_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{k_0} B_{R/2}^{X_\delta}(x_i). \quad (2.106)$$

Agora, usando (2.104), (2.106) e o Lema 2.3, obtemos

$$\mathcal{A}_\delta = T(t)\mathcal{A}_\delta \subset \bigcup_{i=1}^{k_0} T(t)B_{R/2}^{X_\delta}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{k_0} B_{kR/2}^{\mathcal{W}_\delta}(T(t)x_i).$$

Usando novamente (2.76) cada bola $B_{kR/2}^{\mathcal{W}_\delta}(T(t)x_i)$ pode ser coberta por N bolas de raio $R/4$, assim

$$\mathcal{A}_\delta \subset \bigcup_{i,j=1}^{k_0} B_{R/4}^{X_\delta}(x_{ij}), \quad x_{ij} \in X_\delta,$$

e continuamos este processo iterativamente com $\epsilon_n = R/2^n$, então segue-se que

$$d_f(\mathcal{A}_\delta) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(\mathcal{A}_\delta)}{\ln(1/\epsilon)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(k_0^n)}{\ln(2^n/R)} = \frac{\ln(k_0)}{\ln 2} < \infty.$$

A prova está completa. ■

Como as trajetórias em \mathcal{A}_δ são \mathcal{H} -contínuas, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{A}_\delta &\rightarrow \mathcal{H} \\ \chi &\mapsto \mathcal{F}(\chi) = \chi(\delta). \end{aligned}$$

Proposição 2.2. *A aplicação \mathcal{F} possui as seguintes propriedades:*

(i) $\mathcal{F}(\mathcal{A}_\delta) = \mathcal{A}$,

(ii) \mathcal{F} é Lipschitz contínua.

Demonstração: Dado $\chi \in \mathcal{A}_\delta$ temos que $\chi(0) \in \mathcal{A}$, então da invariância de \mathcal{A} segue que $\mathcal{F}(\chi) = \chi(\delta) = T(\delta)\chi(0) \in \mathcal{A}$. Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{A}$, pela invariância de \mathcal{A} temos $T(\delta)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, portanto existe $u \in \mathcal{A}$ tal que $T(\delta)u = x$, assim $\chi(t) = T(t)u$ é uma trajetória curta tal que $x = \mathcal{F}(\chi)$, donde segue que $x \in \mathcal{F}(\mathcal{A}_\delta)$, provando (i).

Para provar (ii) escolhemos $\chi^1, \chi^2 \in \mathcal{A}_\delta$ e $t \in (0, \delta)$. Usando (2.81), temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\chi^1) - \mathcal{F}(\chi^2)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\chi^1(\delta) - \chi^2(\delta)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|T(\delta - t)\chi^1(t) - T(\delta - t)\chi^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq c_1 \|\chi^1(t) - \chi^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Integrando (2.107) com relação a t entre 0 e δ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\chi^1) - \mathcal{F}(\chi^2)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{c_1}{\delta} \int_0^\delta \|\chi^1(t) - \chi^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt \\ &= \frac{c_1}{\delta} \|\chi^1 - \chi^2\|_{X_\delta}^2, \end{aligned}$$

e a prova está completa. ■

Como $d_f(\mathcal{A}_\delta) < \infty$ e a dimensão fractal não cresce sob aplicações Lipschitz contínuas, (veja [66, Proposição 13.2]) concluímos que $d_f(\mathcal{A}) < \infty$. Podemos resumir o resultado no seguinte teorema.

Teorema 2.9. *O atrator global \mathcal{A} gerado pelo sistema (2.1) possui dimensão fractal finita.*

Agora, analisemos o caso particular quando a função M é constante. Neste caso, o sistema (2.1) é reduzido ao clássico sistema 2D de fluido micropolar introduzido por Eringen em [33]. Em [55] a dimensão fractal do atrator global para essa equação é estimada usando a teoria dos expoentes de Lyapunov. Portanto, chegamos ao mesmo resultado, mas por um método diferente, o método das trajetórias curtas. Assim, também está provado o seguinte resultado.

Corolário 2.2. *O atrator global gerado pelo sistema 2D de fluido micropolar possui dimensão fractal finita.*

Capítulo 3

Continuidade de atratores para uma equação hiperbólica não autônoma singularmente perturbada

Neste capítulo, estudamos o sistema dinâmico não autônomo dado pela equação hiperbólica sobre um domínio limitado $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$

$$\epsilon u_{tt} + u_t - \Delta u = f_\epsilon(t, u). \quad (3.1)$$

Este sistema dinâmico possui atratores pullback, uniforme e cociclo em $H_0^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})$. Para $\epsilon = 0$ a equação parabólica limite

$$u_t - \Delta u = f_0(u) \quad (3.2)$$

possui um atrator global A_0 em $H_0^1(\mathcal{O})$ que pode ser naturalmente imerso em um conjunto compacto \mathcal{A}_0 de $H_0^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})$. Provamos que estes três tipos de atratores não autônomos convergem, tanto superiormente quanto inferiormente para \mathcal{A}_0 quando $\epsilon \rightarrow 0$.

3.1 Motivação do problema

Nossa análise é motivada pela observação de que a lei clássica de condução de calor de Fourier

$$q = -K \nabla u,$$

em que q é o fluxo térmico, u é a temperatura e K é a constante de condutividade térmica, leva ao paradoxo (que talvez tenha sido observado pela primeira vez por Nernst em 1917, ver [17]),

que os sinais térmicos se propagam com velocidade infinita. Para corrigir esta característica irrealista a seguinte lei Maxwell-Cattaneo foi proposta, ver [17].

$$\left(1 + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) q = -K \nabla u.$$

Esta lei acrescenta efeitos de relaxamento no fluxo de calor. Tomando a divergência em ambas as leis acima e substituindo nelas a equação de conservação

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0,$$

em que ρ é a densidade do material e c_p seu calor específico, obtemos, respectivamente, as duas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{K}{\rho c_p} \Delta u &= 0, \\ \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{K}{\rho c_p} \Delta u &= 0. \end{aligned}$$

Experimentos físicos demonstram que, embora para alguns materiais (como areia ou tecido humano) o parâmetro ϵ pode ser grande, para metais ϵ é muito pequeno, tem ordem de picosegundos [17]. É, portanto, uma questão natural perguntar se a dinâmica dos problemas descritos pela lei de Maxwell-Cattaneo está próxima da dinâmica descrita pela lei de Fourier quando o parâmetro ϵ é pequeno. Para casos autônomos, com o termo semilinear extra $f(u)$, a resposta positiva, dada em termos da convergência de atratores globais com relação a distância de Hausdorff para ambos os problemas, foi dada por Hale e Raugel em seus dois artigos [41, 42]. O trabalho de Hale e Raugel foi posteriormente estendido em [10, 32, 34, 63], no entanto, resultados correspondentes para versões não autônomas de problemas governados pelas equações do tipo acima estão segundo nosso conhecimento, ausentes. Este presente texto visa preencher esta lacuna.

3.2 Formulação do problema e resultado principal

Seja $\|\cdot\|_{L^2(\mathcal{O})}$ a norma usual de $L^2(\mathcal{O})$ e definimos a norma em $H_0^1(\mathcal{O})$ por

$$\|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})} = \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{O})}, \quad u \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Denotamos $\mathcal{Z} = H_0^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O})$ com a norma produto

$$\|(u, v)\|_{\mathcal{Z}}^2 = \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2, \quad (u, v) \in \mathcal{Z}.$$

A seguir fornecemos hipóteses necessárias sobre o termo não autônomo f_ϵ . Listamos estas hipóteses e provamos algumas propriedades adicionais de f_ϵ .

Assumimos que $f_\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável em relação à primeira variável t e duas vezes diferenciável na segunda variável u e satisfaz as seguintes condições:

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{é uma função contínua,}$$

$$\left| \frac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial u^2}(t, u) \right| \leq c(1 + |u|), \quad \forall t, u \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

para alguma constante $c > 0$ independente de $\epsilon \in [0, 1]$ (no caso de f_0 assumimos que $|f_0''(u)| \leq c(1 + |u|)$),

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|f_\epsilon(t, u) - f_0(u)| + \left| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial u}(t, u) - f_0'(u) \right| \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

$$\sup_{\epsilon \in [0, 1]} \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(|f_\epsilon(t, u) - f_0(u)| + \left| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial u}(t, u) - f_0'(u) \right| \right) < \infty, \quad (3.5)$$

e

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f_0(u)}{u} < \epsilon_0 < \lambda_1, \quad (3.6)$$

em que λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Dirichlet estritamente positivo $-\Delta$ com domínio $D(-\Delta) = H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) \subset L^2(\mathcal{O})$.

Além disso, assumimos que

$$\left| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t, u) \right| \leq c(1 + |u|^{13/3}) \quad \forall t, u \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

sendo que a constante c não depende de ϵ , e

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t, u) \in \mathbb{R} \quad \text{é uniformemente contínua, } \forall u \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Também assumimos que a aplicação $u \rightarrow \frac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial u^2}(t, u)$ é uniformemente contínua seja qual for $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial u^2}(t, u_n) - \frac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial u^2}(t, u) \right| = 0. \quad (3.9)$$

A última hipótese que precisamos fazer é que todos os equilíbrios da equação parabólica sejam **hiperbólicos**. Em nosso caso, isto significa que para todas as soluções $e^* \in H_0^1(\mathcal{O})$ (na verdade, elas pertencem a $H^2(\mathcal{O})$, uma vez que pertencem ao atrator A_0) do problema

$$-\Delta u = f_0(u), \quad (3.10)$$

o espectro do operador linearizado $\Delta + f'_0(e^*)I$ não contém zero.

Ao longo deste capítulo denotamos por C várias constantes que dependem apenas dos dados do problema (isto é, o conjunto \mathcal{O} e as constantes presentes nas hipóteses sobre f_ϵ). Observamos que a condição de crescimento (3.3) implica

$$|f_\epsilon(t, u + v) - f_\epsilon(t, u)| \leq C(1 + |u|^2 + |v|^2)|v|, \quad \forall u, v, t \in \mathbb{R}, \epsilon \in [0, 1], \quad (3.11)$$

$$\left| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial u}(t, u + v) - \frac{\partial f_\epsilon}{\partial u}(t, u) \right| \leq C(1 + |u| + |v|)|v|, \quad \forall u, v, t \in \mathbb{R}, \epsilon \in [0, 1]. \quad (3.12)$$

Trataremos f_ϵ como uma função que associa a cada tempo t uma função real na variável $u \in \mathbb{R}$. Então temos $f_\epsilon \in \mathcal{C}_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathcal{C}_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$, sendo este último um espaço métrico com a métrica da convergência uniforme em conjuntos compactos dada por

$$\varrho(f, g) = \sum_{T \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^T} \frac{\max_{t \in [-T, T]} d(f(t), g(t))}{1 + \max_{t \in [-T, T]} d(f(t), g(t))},$$

sendo $d(\phi, \psi)$ uma métrica em $\mathcal{C}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ dada por

$$d(\phi, \psi) = \sum_{R \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^R} \frac{\max_{u \in [-R, R]} |\phi(u) - \psi(u)|}{1 + \max_{u \in [-R, R]} |\phi(u) - \psi(u)|},$$

Para $\epsilon \in (0, 1]$, definimos $\Sigma_\epsilon = \overline{\{\theta_t f_\epsilon : t \in \mathbb{R}\}}^\varrho$, em que $\theta_t : \Sigma_\epsilon \rightarrow \Sigma_\epsilon$ é operador de translação definido por $\theta_t f(\cdot) = f(t + \cdot)$. Note que se $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$, então $\frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u)$ existe. De fato, para $s \neq 0$ temos

$$\frac{p_\epsilon(t, u + s) - p_\epsilon(t, u)}{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\epsilon(t + t_n, u + s) - f_\epsilon(t + t_n, u)}{s},$$

sendo $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ uma sequência, e

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial u}(t + t_n, u) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_\epsilon(t + t_n, u + s) - f_\epsilon(t + t_n, u)}{s}.$$

Por (3.12) este limite é uniforme com relação a n . Assim

$$\frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u) \quad \text{existe, e} \quad \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_\epsilon}{\partial u}(t + t_n, u). \quad (3.13)$$

Um argumento similar que usa a hipótese (3.9) implica que

$$\frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial u^2}(t, u) \quad \text{existe, e} \quad \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial u^2}(t, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 f_\epsilon}{\partial u^2}(t + t_n, u). \quad (3.14)$$

Seque-se que (3.11) e (3.12) são satisfeitas para p_ϵ substituindo f_ϵ , e que

$$\left| \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial u^2}(t, u) \right| \leq c(1 + |u|). \quad (3.15)$$

Observamos também que a hipótese (3.4) permanece válida se substituirmos f_ϵ por $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$. Notemos que (3.7) implica que

$$|f_\epsilon(t_1, u) - f_\epsilon(t_2, u)| \leq C(1 + |u|^{13/3})|t_1 - t_2|, \quad \forall t_1, t_2, u \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

donde segue que f_ϵ é uniformemente contínua em relação a t para u pertencente a conjuntos limitados, e assim, por [16, Proposição V.2.5] segue-se que f_ϵ é uma função de translação compacta em $\mathcal{C}_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathcal{C}_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$. Concluimos que Σ_ϵ é compacto neste espaço métrico e invariante em relação ao grupo de translação.

A continuidade uniforme de $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}$ em relação ao tempo na condição (3.8) é necessária para que (3.7) continue valendo se substituirmos f_ϵ por qualquer $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$. De fato, seja $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$, o que significa que para uma certa sequência t_n temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\epsilon(t + t_n + s, u) - f_\epsilon(t + t_n, u)}{s} = \frac{p_\epsilon(t + s, u) - p_\epsilon(t, u)}{s},$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_\epsilon(t + t_n + s, u) - f_\epsilon(t + t_n, u)}{s} = \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t + t_n, u).$$

Este último limite é uniforme com relação a n . De fato, usando o Teorema do valor médio temos

$$\left| \frac{f_\epsilon(t + t_n + s, u) - f_\epsilon(t + t_n, u)}{s} - \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t + t_n, u) \right| = \left| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t + t_n + \theta s, u) - \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t + t_n, u) \right|,$$

e a continuidade uniforme de $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}$ implica que esta última expressão converge uniformemente para zero com relação a n quando $s \rightarrow 0$. Segue-se que, p_ϵ é diferenciável com relação a t , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t + t_n, u) = \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u),$$

portanto (3.7) continua valendo para p_ϵ .

Finalmente, é claro que em (3.5) f_ϵ pode ser substituído por qualquer $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$ e de fato pode-se substituir o supremo sobre o tempo em (3.5) pelo supremo sobre Σ_ϵ .

No próximo corolário obtemos uma propriedade útil de p_ϵ .

Corolário 3.1. *Para todo $R > 0$ e todo $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$, temos*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{|s| \leq R} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|p_\epsilon(t, s) - f_0(s)| + \left| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial s}(t, s) - f'_0(s) \right| \right) = 0.$$

Demonstração: Suponha que a afirmação não seja correta, então existem $\delta > 0$ e uma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$ tais que

$$\sup_{|s| \leq R} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|p_{\epsilon_n}(t, s) - f_0(s)| + \left| \frac{\partial p_{\epsilon_n}}{\partial s}(t, s) - f'_0(s) \right| \right) \geq \delta.$$

Assim existe uma sequência s_n com $|s_n| \leq R$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|p_{\epsilon_n}(t, s_n) - f_0(s_n)| + \left| \frac{\partial p_{\epsilon_n}}{\partial s}(t, s_n) - f'_0(s_n) \right| \right) \geq \frac{\delta}{2}.$$

Portanto para uma subsequência de s_n , a qual denotaremos novamente por s_n temos $s_n \rightarrow s_0$ com $|s_0| \leq R$. Além disso, existe uma sequência t_n tal que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{4} &\leq |p_{\epsilon_n}(t, s_n) - f_0(s_n)| + \left| \frac{\partial p_{\epsilon_n}}{\partial s}(t, s_n) - f'_0(s_n) \right| \\ &\leq |p_{\epsilon_n}(t_n, s_n) - p_{\epsilon_n}(t_n, s_0)| + \left| \frac{\partial p_{\epsilon_n}}{\partial s}(t_n, s_n) - \frac{\partial p_{\epsilon_n}}{\partial s}(t_n, s_0) \right| \\ &\quad + |p_{\epsilon_n}(t_n, s_0) - f_0(s_0)| + \left| \frac{\partial p_{\epsilon_n}}{\partial s}(t_n, s_0) - f'_0(s_0) \right| + |f_0(s_0) - f_0(s_n)| + |f'_0(s_0) - f'_0(s_n)| \\ &\leq 4C(R)|s_n - s_0| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|p_{\epsilon_n}(t, s_0) - f_0(s_0)| + \left| \frac{\partial p_{\epsilon_n}}{\partial s}(t, s_0) - f'_0(s_0) \right| \right), \end{aligned}$$

onde usamos (3.11) e (3.12). De (3.4) resulta que a última expressão tende a zero quando $n \rightarrow \infty$, uma contradição. \blacksquare

A equação (3.1) define um processo não linear $\{S_\epsilon(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ em \mathcal{Z} , com

$$S_\epsilon(t, \tau)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)), \quad t \geq \tau,$$

sendo $(u(t), u_t(t))$ a solução do problema (3.1) tal que $u(\tau) = u_0$ e $u_t(\tau) = u_1$. É conhecido (veja [3]) que $\{S_\epsilon(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ possui um atrator pullback $\{A_\epsilon(t) : t \in \mathbb{R}\}$ em \mathcal{Z} . Se $\{T_0(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo em $H_0^1(\mathcal{O})$, definido por $T_0(t)u_0 = u(t)$, onde $u(t)$ é solução de (3.1), denotamos por A_0 seu atrator global. Para comparar esses dois atratores devemos encontrar uma maneira de ver A_0 como um subconjunto de \mathcal{Z} . Isso é feito simplesmente definindo a imersão natural do atrator global $A_0 \subset H_0^1(\mathcal{O})$ em \mathcal{Z} , isto é,

$$A_0 = \{(\phi, \psi) \in \mathcal{Z} : \psi = \Delta\phi + f_0(\phi), \phi \in A_0\}.$$

Pela propriedade de regularidade de A_0 , a saber, $A_0 \subset H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$ segue-se que A_0 é bem definido. Além disso, este conjunto é limitado em $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})$ (veja [41]) e portanto compacto em \mathcal{Z} .

Sabe-se, (veja, por exemplo, [41, Teorema 3.8.5]) que o fato de que todos os equilíbrios de (3.2) são hiperbólicos implica que o número desses equilíbrios é finito, podemos denotá-los por $\mathcal{E} = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ e o atrator global possui a caracterização

$$A_0 = \bigcup_{i=1}^n W^u(e_i^*), \quad (3.17)$$

em que $W^u(e_i^*)$ é a **variedade instável** do ponto de equilíbrio e_i^* dado por

$$W^u(e_i^*) = \{y \in H_0^1(\mathcal{O}) : \text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow H_0^1(\mathcal{O}) \text{ de (3.2) tal que} \\ \xi(0) = y \text{ e } \xi(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} e_i^*\}.$$

O seguinte teorema é o resultado principal desse capítulo.

Teorema 3.1. *Os atratores uniformes, pullback e cociclo são contínuos em $\epsilon = 0$. Mais precisamente, temos*

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}_{\mathcal{H}}(\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_0) &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}_{\mathcal{H}}(A_\epsilon(t), \mathcal{A}_0) &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon} \text{dist}_{\mathcal{H}}(A_\epsilon(p_\epsilon), \mathcal{A}_0) &= 0. \end{aligned}$$

A prova será apresentada na parte seguinte do capítulo. Primeiro, na Seção 3.3 demonstramos a semicontinuidade superior usando as estimativas a priori do Apêndice A. Em seguida, na Seção 3.7, provamos a semicontinuidade inferior usando as estimativas da Seção A.4.1 e os resultados auxiliares das Seções 3.4, 3.5 e 3.6.

3.3 Semicontinuidade superior

Nesta seção provamos a semicontinuidade superior de atratores. Para isso, usaremos as estimativas a priori e os resultados da decomposição do processo em dois componentes, o suave, e o que decai a zero. Esses resultados auxiliares são provados no Apêndice A. Claramente, o atrator uniforme contém todas as fibras dos atratores cociclo (e pullback) e, portanto, é suficiente obter o resultado de semicontinuidade superior para atratores uniformes e o resultado correspondente para os atratores pullback e cociclo seguirá trivialmente.

Primeiro observamos que o problema (3.1) define um SDN $(\varphi_\epsilon, \theta)_{(\mathcal{Z}, \Sigma_\epsilon)}$ em \mathcal{Z} , em que θ_t são os operadores de translação em Σ_ϵ e $\varphi_\epsilon : \mathbb{R}^+ \times \Sigma_\epsilon \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ é a aplicação dada por

$$\varphi(t, p_\epsilon)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)), \quad t \geq 0, p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon,$$

em que $(u(t), u_t(t))$ é a solução da equação (3.1) com f_ϵ substituída por p_ϵ e condição inicial $(u_0, u_1) \in \mathcal{Z}$.

Lema 3.1. *Para todo $\epsilon \in (0, 1]$ o SDN definido pelas soluções de (3.1) é uniformemente assintoticamente compacto.*

Demonstração: A afirmação resulta da decomposição do SDN no termo que decai a zero e o que é compacto, veja (A.9)–(A.10) e (A.11)–(A.12) abaixo, e Lemas A.1, A.4, Corolário A.1 abaixo. A uniformidade com relação a Σ_ϵ segue-se do fato de que as estimativas dos Lemas A.1, A.4, e Corolário A.1 possuem constantes inalteradas quando substituimos f_ϵ por todo $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$, veja Observações A.1 e A.3. ■

O próximo resultado resume as estimativas a priori do Apêndice A.

Lema 3.2. *O conjunto $B := \bigcup_{\epsilon \in [0,1]} \mathcal{A}_\epsilon$ é limitado em $(H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})) \times H_0^1(\mathcal{O})$. Para todo $\epsilon \in (0, 1]$ as trajetórias completas $(u(\cdot), u_t(\cdot))$ em \mathcal{A}_ϵ satisfazem $u \in C_b(\mathbb{R}; H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}))$, $u_t \in C_b(\mathbb{R}; H_0^1(\mathcal{O}))$ e $u_{tt} \in C_b(\mathbb{R}; L^2(\mathcal{O}))$. Além disso, temos a estimativa*

$$\epsilon \|u_{tt}(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

com a constante C independente de ϵ .

Demonstração: As estimativas são obtidas dos Lemas A.11 e A.12 no Apêndice A. ■

Tendo em vista as estimativas do Lema 3.2, podemos provar o resultado de semicontinuidade superior de atratores uniformes. A prova é inspirada nos argumentos de [41, Seção 3].

Teorema 3.2. *A família de atratores uniformes $\{\mathcal{A}_\epsilon : \epsilon \in [0, 1]\}$ é semicontínua superiormente em $\epsilon = 0$, isto é,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}(\mathcal{A}_\epsilon, \mathcal{A}_0) = 0.$$

Demonstração: Com efeito, seja $(u_0^n, u_1^n) \in \mathcal{A}_{\epsilon_n}$ com $\epsilon_n \rightarrow 0$. É suficiente mostrar que existe uma subsequência de (u_0^n, u_1^n) , a qual denotaremos novamente por (u_0^n, u_1^n) e um $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}_0$ tal que

$$(u_0^n, u_1^n) \rightarrow (u_0, u_1),$$

sendo que a convergência é em \mathcal{Z} , isto é, $u_0^n \rightarrow u_0$ em $H_0^1(\mathcal{O})$ e $u_1^n \rightarrow u_1$ em $L^2(\mathcal{O})$. Como $(u_0^n, u_1^n) \in \mathcal{A}_{\epsilon_n}$, pela invariância levantada de \mathcal{A}_{ϵ_n} existem $p_{\epsilon_n} \in \Sigma_{\epsilon_n}$ e funções $(u^n(\cdot), u_t^n(\cdot))$ com $(u^n(t), u_t^n(t)) \in \mathcal{A}_{\epsilon_n}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tais que $(u^n(0), u_t^n(0)) = (u_0^n, u_1^n)$ e

$$\epsilon_n u_{tt}^n(t) + u_t^n(t) - \Delta u^n(t) = p_{\epsilon_n}(t, u^n(t)). \quad (3.18)$$

Passaremos o limite com n tendendo ao infinito na equação (3.18) e mostraremos que, para uma subsequência,

$$(u^n(t), u_t^n(t)) \rightarrow (\bar{u}(t), \bar{u}_t(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

com $\|\bar{u}(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C$ para todo $t \in \mathbb{R}$, \bar{u} resolve a equação parabólica (3.2). O resultado seguirá, pois teremos $\bar{u}(t) \in A_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\bar{u}_t(t) = \Delta \bar{u}(t) + f_0(\bar{u}(t))$.

Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto. As estimativas do Lema 3.2 e o Teorema de Arzelá–Ascoli implicam que existe $\bar{u} \in C(J; H_0^1(\mathcal{O}))$ tal que para uma subsequência, $u^n \rightarrow \bar{u}$ em $C(J; H_0^1(\mathcal{O}))$. Como J é arbitrário, usando um argumento diagonal podemos construir $\bar{u} \in C(\mathbb{R}; H_0^1(\mathcal{O}))$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\bar{u}(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C \quad \text{e} \quad u^n \rightarrow \bar{u} \quad \text{em} \quad C(J; H_0^1(\mathcal{O})), \quad (3.19)$$

para todo intervalo compacto $J \subset \mathbb{R}$. Além disso, o Lema 3.2 implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\epsilon_n \|u_{tt}^n(t)\|_{L^2(\mathcal{O})} \right) = 0.$$

Passaremos o limite no termo não autônomo. Para todo n existe uma sequência t_k tal que

$$\varrho(\theta_{t_k} f_{\epsilon_n}, p_{\epsilon_n}) \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty.$$

Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto, temos

$$\begin{aligned} \sup_{t \in J} \|p_{\epsilon_n}(t, u^n(t)) - f_0(u^n(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} &\leq \sup_{t \in J} \|p_{\epsilon_n}(t, u^n(t)) - f_{\epsilon_n}(t + t_k, u^n(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ &+ \sup_{t \in J} \|f_{\epsilon_n}(t + t_k, u^n(t)) - f_0(u^n(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} + \sup_{t \in J} \|f_0(u^n(t)) - f_0(\bar{u}(t))\|_{L^2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

O Lema 3.2 implica a limitação do termo $u^n(t)$ em $H^2(\mathcal{O})$, o qual nos dá uma limitação uniforme de $|u^n(x, t)|$. Assim, para todo $\delta > 0$ podemos encontrar k (dependendo de n e δ) tal que

$$\sup_{t \in J} \|p_{\epsilon_n}(t, u^n(t)) - f_{\epsilon_n}(t + t_k, u^n(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \frac{\delta}{3}.$$

Para passar para o limite no segundo termo de (3.20), note que (3.11) implica

$$|f_{\epsilon_n}(t + t_k, u^n(x, t)) - f_0(u^n(x, t))| \leq \sup_{|v| \leq R} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_{\epsilon_n}(t, v) - f_0(v)|,$$

em que R é uma limitação uniforme de $|u^n(x, t)|$. Pelo Corolário 3.1 esta última expressão tende a zero, e logo, podemos encontrar N_0 tal que o segundo termo em (3.20) é menor ou igual a $\delta/3$ para todo $n \geq N_0$, onde N_0 depende de δ , mas independe de k . Para o último termo em (3.20) usamos (3.11), o qual implica

$$\|f_0(u^n(t)) - f_0(\bar{u}(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C(1 + \|u^n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{u}(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2) \|u^n(t) - \bar{u}(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2,$$

e a convergência exigida segue de (3.19). Assim, provamos que

$$\sup_{t \in J} \|p_{\epsilon_n}(t, u^n(t)) - f_0(\bar{u}(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

E por um argumento diagonal podemos construir uma subsequência tal que a convergência se mantenha em todos os intervalos compactos $J \subset \mathbb{R}$.

Reescrevemos (3.18) como

$$u_t^n(t) = p_{\epsilon_n}(t, u^n(t)) + \Delta u^n(t) - \epsilon_n u_{tt}^n(t).$$

O lado direito converge para $f_0(\bar{u}(\cdot)) + \Delta \bar{u}$ em $C(J; H^{-1}(\mathcal{O}))$ sobre cada intervalo compacto J , e assim, u_t^n também converge para esta função que deve ser igual a \bar{u}_t . Como $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u_t^n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}$ é limitado, segue-se que $u_t^n \rightarrow \bar{u}_t$ em $C(J; L^2(\mathcal{O}))$ para cada intervalo compacto J . Podemos passar o limite em todos os termos em (3.18) resultando que \bar{u} é uma trajetória completa limitada para a equação parabólica (3.2). A prova está completa. ■

Como uma simples consequência, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *As famílias de atratores cociclo e pullback $\{A_\epsilon(p_\epsilon)\}_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon}$, e $\{A_\epsilon(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ para o processo definido por (3.1) são semicontínuas superiormente em $\epsilon = 0$, isto é,*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon} \text{dist}(A_\epsilon(p_\epsilon), \mathcal{A}_0) = 0,$$

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(A_\epsilon(t), \mathcal{A}_0) = 0.$$

3.4 Existência e continuidade de soluções globais limitadas

Nesta seção, provamos que perto de um ponto de equilíbrio hiperbólico de (3.2) existe uma única solução global limitada de (3.1). Em todas as demonstrações C e D representarão constantes positivas e $K(\epsilon)$ para $\epsilon \in (0, 1]$ denotará uma função positiva, monótona e contínua tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K(\epsilon) = 0$.

Seja e^* um ponto de equilíbrio hiperbólico de (3.2). Por (3.3) segue que $f_0'(e^*)$ está bem definido, pertence a $\mathcal{L}(H_0^1(\mathcal{O}); L^2(\mathcal{O}))$ e é auto-adjunto.

Denotamos $A = \Delta + f_0'(e^*)$, o espectro $\sigma(-A)$, consiste em autovalores reais $\sigma(-A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. Se os ordenarmos de maneira não decrescente, os primeiros autovalores podem ser negativos, 0 não é um autovalor, e os restantes devem ser positivos. Considere a seguinte equação linear em \mathcal{Z} .

$$\epsilon w_{tt} + w_t - Aw = 0,$$

que pode ser reescrita equivalentemente como

$$z_t = A_\epsilon z$$

em que

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \epsilon w_t \end{pmatrix}, \quad A_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & I/\epsilon \\ A & -I/\epsilon \end{pmatrix}.$$

Podemos facilmente verificar que o espectro $\sigma(A_\epsilon)$ de A_ϵ é dado por

$$\sigma(A_\epsilon) = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon\lambda_j}}{2\epsilon} : j = 1, 2, \dots \right\}$$

e

$$\mu_i^+ := \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\epsilon\lambda_j}}{2\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\lambda_j, \quad \mu_i^- := \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\epsilon\lambda_j}}{2\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\infty.$$

Denotamos por $\rho(A_\epsilon)$ o conjunto resolvente do operador A_ϵ . Seja N_ϵ o maior índice i para o qual $4\epsilon\lambda_i < 1$. Denotamos $S = \{\mu_1^+, \dots, \mu_{N_\epsilon}^+, \mu_1^-, \dots, \mu_{N_\epsilon}^-\}$ (se $4\epsilon\lambda_i \geq 1$ para todo λ_i , então o conjunto S é vazio). Todos os autovalores em S são reais, dividimos S em dois conjuntos disjuntos S_1 e S_2 em que $S_1 = \{\mu \in S : \mu > 0\}$ e $S_2 = S \setminus S_1$. Também denotamos $S_3 = \sigma(A_\epsilon) \setminus S$. Se $\lambda = 1/4\epsilon$ é autovalor de $-A$, então o correspondente $\mu_i^+ = \mu_i^- = -1/2\epsilon$ é assumido pertencer a S_3 . O resultado seguinte fornece as propriedades assintóticas do semigrupo governado pela equação acima em três subespaços de \mathcal{Z} (veja [4, Capítulo 4, Seções 2 e 4] e [42, Seção 4.1]).

Lema 3.3. *Existem $\epsilon_0, M_0, \beta > 0$, tais que para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, temos*

$$\|e^{A_\epsilon t} Q_\epsilon\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq e^{\beta t}, \quad t \leq 0, \quad (3.21)$$

$$\|e^{A_\epsilon t} R_\epsilon\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq M_0 e^{-\beta t}, \quad t \geq 0, \quad (3.22)$$

$$\|e^{A_\epsilon t} (I - Q_\epsilon - R_\epsilon)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{M_0}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{4\epsilon}}, \quad t \geq 0. \quad (3.23)$$

em que

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda I - A_\epsilon)^{-1} d\lambda,$$

$$R_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta (\lambda I - A_\epsilon)^{-1} d\lambda,$$

e γ é uma curva suave fechada simples com traço em $\rho(A_\epsilon) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$ orientada no sentido anti-horário contendo S_1 e δ é uma curva suave fechada simples com traço em $\rho(A_\epsilon) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : -1/2\epsilon < \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ orientada no sentido anti-horário contendo S_2 .

Demonstração: Verifiquemos como o semigrupo $e^{A_\epsilon t}$ age sobre o espaço gerado pelas autofunções do operador $-A$. Denotamos por u_i o autovetor unitário (em $L^2(\mathcal{O})$) de $-A$ associado com λ_i . Consideramos três casos separadamente.

Caso 1. $1 - 4\epsilon\lambda_i > 0$. Neste caso μ_i^+ e μ_i^- pertencem a S . Como o sinal de μ_i^- é sempre negativo, devemos ter $\mu_i^- \in S_2$ e o sinal de μ_i^+ pode ser positivo ou negativo, dependendo do sinal de λ_i . Se $\lambda_i < 0$ então o correspondente μ_i^+ é positivo, portanto $\mu_i^+ \in S_1$, por outro lado,

se $\lambda_i > 0$ então μ_i^+ é negativo e consequentemente $\mu_i^+ \in S_2$. Os autovetores associados a μ_i^+ e μ_i^- são dados respectivamente, por

$$u_i^+ := \left(u_i, \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\epsilon\lambda_i}}{2\sqrt{\epsilon}} u_i \right) \quad \text{e} \quad u_i^- := \left(u_i, \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\epsilon\lambda_i}}{2\sqrt{\epsilon}} u_i \right).$$

O operador Q_ϵ é a projeção sobre o espaço gerado pelos u_i^+ para os quais μ_i^+ é positivo R_ϵ é a projeção sobre o espaço gerado pelos u_i^- e aqueles u_i^+ para os quais μ_i^+ é negativo.

Notemos que

$$e^{A_\epsilon t} u_i^+ = e^{\mu_i^+ t} u_i^+ \quad \text{e} \quad e^{A_\epsilon t} u_i^- = e^{\mu_i^- t} u_i^-,$$

assim

$$\|e^{A_\epsilon t} u_i^+\|_{\mathcal{Z}} = e^{\mu_i^+ t} \|u_i^+\|_{\mathcal{Z}} \quad \text{e} \quad \|e^{A_\epsilon t} u_i^-\|_{\mathcal{Z}} = e^{\mu_i^- t} \|u_i^-\|_{\mathcal{Z}}.$$

Se $\lambda_i < 0$ e $t \leq 0$, então é fácil verificar que

$$e^{\mu_i^+ t} \leq e^{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4\lambda_i}-1)t} \leq e^{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4\lambda_K}-1)t},$$

em que λ_K é o maior autovalor negativo (próximo de zero) de $-A$. Se, por sua vez, $\lambda_i > 0$ e $t \geq 0$, então, da mesma forma

$$e^{\mu_i^+ t} \leq e^{-\lambda_i t} \leq e^{-\lambda_{K+1} t},$$

em que λ_{K+1} é o menor autovalor positivo de $-A$. Para μ_i^- todas as direções u_i^- são instáveis e temos para $t \geq 0$ e todo λ_i

$$e^{\mu_i^- t} \leq e^{-t/(2\epsilon)} \leq e^{-t/2}.$$

Caso 2. $1 - 4\epsilon\lambda_i = 0$. Esta situação pode ocorrer somente para ϵ num conjunto discreto, isto é, $\epsilon = \frac{1}{4\lambda_i}$. Depois de alguns cálculos obtemos

$$e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \\ -\frac{1}{4\epsilon\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{2\epsilon} t} \end{pmatrix} u_i \quad \text{e} \quad e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{2\epsilon} t} \\ e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 - \frac{t}{2\epsilon}\right) \end{pmatrix} u_i.$$

Usando a desigualdade $e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \frac{t}{2\epsilon} \leq \frac{2}{e}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + \frac{t}{4\epsilon} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ &\leq e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + \frac{Ct}{4\epsilon} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \left\| \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}}, \end{aligned}$$

Como u_i é um autovetor de $-A$ e o correspondente λ_i é positivo, temos

$$\|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_i}} \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \quad \text{e} \quad \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq (\sqrt{\lambda_i} + C) \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})}, \quad (3.24)$$

portanto

$$\begin{aligned}
\left\| e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq \frac{t}{\epsilon} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
&\leq C e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + C e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
&\leq C \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}}.
\end{aligned}$$

A prova está completa para o caso 2.

Caso 3. $1 - 4\epsilon\lambda_i < 0$. Como no caso 2 analisamos como $e^{A_\epsilon t}$ age sobre os vetores $(0, u_i)$ e $(u_i, 0)$. Novamente, depois de alguns cálculos obtemos

$$\begin{aligned}
e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) + \frac{1}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \right) \\ -e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \frac{1}{2} \left(\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1} + \frac{1}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \end{pmatrix} u_i \\
e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \\ e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) - \frac{1}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \right) \end{pmatrix} u_i.
\end{aligned}$$

Usando (3.24) e as propriedades das funções sen e cos, bem como a desigualdade $e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \frac{t}{2\epsilon} \leq \frac{2}{e}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1} + \frac{t}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
&\leq e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{Ct}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + \frac{C}{2} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{\sqrt{\lambda_i}} \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \left\| \begin{pmatrix} u_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
\left\| e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}} &\leq \frac{2}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \right| \|u_i\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} \\
&\leq \frac{2\sqrt{\lambda_i} + 2C}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \right| \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})} + e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \|u_i\|_{L^2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Consideramos dois casos. Se $4\epsilon\lambda_i - 1 \leq 1$, então

$$\frac{2\sqrt{\lambda_i} + 2C}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \right| \leq \frac{2\sqrt{\lambda_i} + 2C}{2\epsilon} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} t \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \frac{t}{2\epsilon}.$$

Caso contrário

$$\frac{2\sqrt{\lambda_i} + 2C}{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4\epsilon\lambda_i-1}}{2\epsilon}t\right) \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{4\epsilon\lambda_i}{4\epsilon\lambda_i-1}} + C \right) e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}}.$$

Portanto, obtemos

$$\left\| e^{A_\epsilon t} \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{2\epsilon}} \left(1 + \frac{t}{2\epsilon}\right) \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t}{4\epsilon}} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{Z}},$$

e a prova está completa. ■

Teorema 3.4. *Seja e^* uma solução de equilíbrio hiperbólica para (3.2) e suponhamos que (3.4) seja satisfeita. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$ existe uma solução global limitada de (3.1) com p_ϵ substituindo f_ϵ*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \xi_{p_\epsilon}^*(t) \in \mathcal{Z}.$$

Além disso,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \in \mathbb{R}} \|\xi_{p_\epsilon}^*(t) - (e^*, 0)\|_{\mathcal{Z}} = 0.$$

Demonstração: O argumento segue as idéias da prova do Teorema 2.1 em [11]. Se u é uma solução para (3.1), então $w = u - e^*$ satisfaz a equação

$$\epsilon w_{tt} + w_t - Aw = h_{p_\epsilon}(t, w), \quad (3.25)$$

em que

$$h_\epsilon(t, w) = p_\epsilon(t, e^* + w) - f_0(e^*) - f'_0(e^*)w.$$

Podemos reescrever a equação (3.25) equivalentemente ao seguinte sistema

$$z_t = A_\epsilon z + H_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z), \quad (3.26)$$

com

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \epsilon w_t \end{pmatrix}, \quad H_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_\epsilon(t, z_1) \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Denotamos por $z(t)$ a solução de (3.26), que pode ser expressa pela seguinte fórmula da variação das constantes

$$z(t) = e^{A_\epsilon(t-\tau)} z(\tau) + \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)} H_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z(s)) ds. \quad (3.28)$$

Aplicando as projeções Q_ϵ e $I - Q_\epsilon$ na última expressão e tomando os limites quando $\tau \rightarrow +\infty$ e $\tau \rightarrow -\infty$, respectivamente, obtemos

$$Q_\epsilon z(t) = \int_{-\infty}^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon H_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z(s)) ds,$$

e

$$(I - Q_\epsilon)z(t) = \int_{-\infty}^t e^{A_\epsilon(t-s)}(R_\epsilon + I - Q_\epsilon - R_\epsilon)H_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z(s)) ds.$$

Consequentemente, uma solução para (3.26) existe em uma vizinhança pequena de $z = 0$ se, e somente se, a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(z)(t) &= \int_{-\infty}^t e^{A_\epsilon(t-s)}Q_\epsilon H_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z(s)) ds + \int_{-\infty}^t e^{A_\epsilon(t-s)}R_\epsilon H_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z(s)) ds \\ &+ \int_{-\infty}^t e^{A_\epsilon(t-s)}(I - Q_\epsilon - R_\epsilon)H_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z(s)) ds \end{aligned}$$

possui um único ponto fixo no conjunto

$$X_\eta = \left\{ z \in C(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \eta \right\}$$

com η pequeno adequadamente escolhido. Este conjunto é um espaço métrico completo com a topologia uniforme. Mostraremos que a aplicação \mathcal{S} é uma contração que leva X_η em si mesmo, e portanto, possui um único ponto fixo em X_η .

A hipótese (3.12) escrita para p_ϵ implica

$$\begin{aligned} \|H_\epsilon(t, z(t))\|_{\mathcal{Z}} &= \|h_\epsilon(t, z_1(t))\|_{L^2(\mathcal{O})}, \\ |h_\epsilon(t, z_1(x, t))| &\leq |p_\epsilon(t, e^*(x)) - f_0(e^*(x))| \\ &+ \left| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, e^*(x)) - f'_0(e^*(x)) \right| |z_1(x, t)| + C(1 + |e^*(x)| + |z_1(x, t)|) |z_1(x, t)|^2. \end{aligned}$$

De (3.4) escrita para p_ϵ segue-se que

$$\|H_{\epsilon,p_\epsilon}(t, z(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq K(\epsilon) + K(\epsilon)\|z_1(t)\|_{L^2(\mathcal{O})} + C(\|z_1(t)\|_{L^4(\mathcal{O})}^2 + \|z_1(t)\|_{L^6(\mathcal{O})}^3),$$

em que $K(\epsilon)$ é uma função contínua e monótona com $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K(\epsilon) = 0$, logo

$$\|H_{\epsilon,p_\epsilon}(t, z(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq K(\epsilon) + K(\epsilon)\eta + C\eta^2(1 + \eta).$$

Pelo Lema 3.3 temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}(z)(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \int_t^\infty e^{\beta(t-s)} \|H_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z(s))\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &+ M_0 \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \|H_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z(s))\|_{\mathcal{Z}} ds + \frac{M_0}{\sqrt{\epsilon}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \|H_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z(s))\|_{\mathcal{Z}} ds \end{aligned} \quad (3.29)$$

e

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathcal{S}(z)(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \left(\frac{M_0 + 1}{\beta} + 4M_0\sqrt{\epsilon} \right) (K(\epsilon) + K(\epsilon)\eta + C\eta^2(1 + \eta)) \\ &\leq K(\epsilon) + K(\epsilon)\eta + C\eta^2(1 + \eta). \end{aligned}$$

Precisamos também que \mathcal{S} seja uma contração. Não é difícil verificar que

$$|h_{p_\epsilon}(t, z_1(x, t)) - h_{p_\epsilon}(t, \bar{z}_1(x, t))| \leq K(\epsilon)|z_1(x, t) - \bar{z}_1(x, t)| \\ + D(1 + |z_1(x, t)| + |\bar{z}_1(x, t)|)(|z_1(x, t)| + |\bar{z}_1(x, t)|)|z_1(x, t) - \bar{z}_1(x, t)|,$$

donde segue que

$$\|H_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z(t)) - H_{\epsilon, p_\epsilon}(t, \bar{z}(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq (K(\epsilon) + D(1 + \eta)\eta) \|z(t) - \bar{z}(t)\|_{\mathcal{Z}},$$

e

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathcal{S}(z)(t) - \mathcal{S}(\bar{z})(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \left(2 \frac{M_0}{\beta} + 4M_0\sqrt{\epsilon}\right) (K(\epsilon) + D(1 + \eta)\eta) \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t) - \bar{z}(t)\|_{\mathcal{Z}} \\ \leq (K(\epsilon) + D(1 + \eta)\eta) \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t) - \bar{z}(t)\|_{\mathcal{Z}}.$$

Escolhemos $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$K(\epsilon) \leq \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{18C}, \frac{1}{12D} \right\}, \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Assim, se escolhermos $\eta = 3K(\epsilon)$ com $\epsilon \leq \epsilon_0$, é fácil verificar que para tal escolha de η a aplicação \mathcal{S} leva X_η em si mesmo e é uma contração sobre X_η . Assim, obtemos que $\xi_\epsilon^*(\cdot)$ é uniformemente próximo de $(e^*, 0)$ e tende para $(e^*, 0)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. ■

Seja $\xi_{p_\epsilon}^*(t) = (\psi^{p_\epsilon}(t), \psi_t^{p_\epsilon}(t))$ a solução do problema (3.1) com $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$ substituindo f_ϵ que é uniformemente próxima de $(e^*, 0)$. Fazendo $w(t) = u(t) - \psi^{p_\epsilon}(t)$, reescrevemos (3.1) como

$$\epsilon w_{tt} + w_t = Aw + g_{p_\epsilon}(t, w), \quad (3.30)$$

em que $g_{p_\epsilon}(t, w) = p_\epsilon(t, \psi^{p_\epsilon}(t) + w) - p_\epsilon(t, \psi^{p_\epsilon}(t)) - f'_0(e^*)w$.

A equação (3.30) é equivalente ao sistema

$$\dot{z} = A_\epsilon z + G_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z) \quad (3.31)$$

com

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \epsilon w_t \end{pmatrix}, \quad G_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_{p_\epsilon}(t, z_1) \end{pmatrix}.$$

Assim, 0 é uma solução limitada globalmente definida para (3.31).

3.5 Existência de variedades instáveis como gráfico

Nesta seção mostraremos a existência de variedades instáveis locais para a solução global limitada $\xi_{p_\epsilon}^*(\cdot)$ de (3.30).

Começamos citando uma versão do lema de Gronwall que será usada nesta seção.

Lema 3.4. [31, Teorema 15] Seja $x(t)$ uma função real, contínua e não negativa tal que para $t > t_0$

$$x(t) \leq c + \int_{t_0}^t k(t, s)x(s) ds, \quad c > 0$$

em que $k(t, s)$ é uma função continuamente diferenciável em t e contínua em s com $k(t, s) \geq 0$ para $t \geq s \geq t_0$. Então

$$x(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t (k(s, s) + \int_{t_0}^s \frac{\partial k}{\partial s}(s, r) dr) ds}.$$

Lembramos o conceito de variedade instável de uma solução global.

Definição 3.1. Sejam $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$ um processo de evolução em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ e $\xi^* : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global de $\{S(t, \tau) : t \geq \tau \in \mathbb{R}\}$. A **variedade instável** $W^u(\xi^*)$ de $\xi^* : \mathbb{R} \rightarrow X$ é definida por

$$W^u(\xi^*) = \{(t, \zeta) \in \mathbb{R} \times X : \text{existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ de} \\ \{S(t, \tau) : t \geq \tau\} \text{ tal que } \xi(t) = \zeta \text{ e } \|\xi(s) - \xi^*(s)\| \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} 0\}.$$

A δ -variedade instável local de ξ^* é definida por

$$W_{loc}^u(\xi^*, \delta) = \{(t, \zeta) \in \mathbb{R} \times X : \|\zeta - \xi^*(t)\| \leq \delta, \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X \text{ de} \\ \{S(t, \tau) : t \geq \tau\}, \text{ com } \xi(t) = \zeta, \|\xi(s) - \xi^*(s)\| \leq \delta, \forall s \leq t \text{ e } \|\xi(s) - \xi^*(s)\| \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} 0\}.$$

A seção da variedade instável de ξ^* no instante t é definida por

$$W^u(\xi^*)(t) = \{\zeta \in X : (t, \zeta) \in W^u(\xi^*)\}.$$

Finalmente, definimos a seção da δ -variedade instável local de ξ^* no instante t por

$$W_{loc}^u(\xi^*, \delta)(t) = \{\zeta \in X : (t, \zeta) \in W_{loc}^u(\xi^*, \delta)\}.$$

Note que, escrevendo (3.1) como em (3.31), é suficiente concentrar-se na existência de variedades instáveis em torno da solução zero, isto é, consideramos soluções da equação

$$\dot{z} = A_\epsilon z + G_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z). \quad (3.32)$$

Podemos facilmente verificar que dado $\rho > 0$ existe $\delta > 0$ independente de t, ϵ, p_ϵ tal que se $\|z\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$, então

$$\begin{aligned} \|G_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \rho, \\ \|G_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z) - G_{\epsilon, p_\epsilon}(t, \tilde{z})\|_{\mathcal{Z}} &\leq (\rho + K(\epsilon))\|z - \tilde{z}\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

De fato,

$$\begin{aligned} |g_{\epsilon, p_\epsilon}(t, w)| &\leq \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial u^2}(t, \psi^{p_\epsilon}(t) + \theta_1(w - \psi^{p_\epsilon}(t))) \right| w^2 + \left| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, \psi^{p_\epsilon}(t)) - f'_0(e^*) \right| |w| \\ &\leq C((1 + |w|)|w| + 1)|w|, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &|g_{\epsilon, p_\epsilon}(t, w) - g_{\epsilon, p_\epsilon}(t, \tilde{w})| \\ &\leq \left| \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial u^2}(t, \psi^{p_\epsilon}(t) + \theta_2 \tilde{w}) \tilde{w} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_\epsilon}{\partial u^2}(t, \psi^{p_\epsilon}(t) + w + \theta_3(\tilde{w} - w))(w + \tilde{w}) \right| |w - \tilde{w}| \\ &\quad + \left(\left| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, \psi^{p_\epsilon}(t)) - f'_0(\psi^{p_\epsilon}(t)) \right| + |f'_0(\psi^{p_\epsilon}(t)) - f'_0(e^*)| \right) |w - \tilde{w}| \\ &\leq (C(1 + |w| + |\tilde{w}|)(|w| + |\tilde{w}|) + K(\epsilon)) |w - \tilde{w}|, \end{aligned}$$

em que $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, 1)$, e a afirmação segue.

Observação 3.1. *É possível estender a função G_{ϵ, p_ϵ} fora de uma bola de raio δ de tal forma que a condição (3.33) continue valendo para todo $z \in \mathcal{Z}$. De fato, definimos $\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon} : \mathbb{R} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$*

$$\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z) = \begin{cases} G_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z), & \|z\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta \\ G_{\epsilon, p_\epsilon}\left(t, \delta \frac{z}{\|z\|_{\mathcal{Z}}}\right), & \|z\|_{\mathcal{Z}} > \delta. \end{cases}$$

A extensão $\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}$ é globalmente Lipschitz e sua constante Lipschitz é a de G_{ϵ, p_ϵ} restrita a bola de raio δ .

Sob a hipótese de que (3.33) é satisfeita para todo $z \in \mathcal{Z}$ com algum $\rho > 0$ adequadamente escolhido, nesta seção provamos que a variedade instável de uma solução global hiperbólica limitada $\xi_\epsilon^*(\cdot)$ é dada como um gráfico de uma função apropriada. Usando este fato, provaremos na próxima seção a continuidade das variedades instáveis locais para o caso quando G_{ϵ, p_ϵ} satisfaz (3.33) apenas para $\|z\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$ com $\delta > 0$ adequadamente pequeno.

Portanto, daqui em diante substituímos G_{ϵ, p_ϵ} em (3.32) por $\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}$ que se supõe satisfazer (3.33) para todo z e para um ρ apropriado (que será especificado abaixo), isto é,

$$\dot{z} = A_\epsilon z + \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(t, z). \quad (3.34)$$

Seja $W_{\epsilon, p_\epsilon}^u(0)$ a variedade instável da solução 0 de (3.34). Mostraremos que existe uma função limitada e Lipschitz contínua $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, \cdot) : \mathcal{Z} \rightarrow (I - Q_\epsilon)\mathcal{Z}$ tal que $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z) = \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, Q_\epsilon z)$

e

$$W_{\epsilon, p_\epsilon}^u(0) = \{(t, z) : z = Q_\epsilon z + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, Q_\epsilon z), z \in \mathcal{Z}\}$$

A continuidade das variedades instáveis seguirá da continuidade das funções $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, \cdot)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Observação 3.2. Se $z(t)$ é uma solução de (3.34) definida para $t \geq t_0$, escrevemos $z^+(t) = Q_\epsilon z(t)$ e $z^-(t) = z(t) - z^+(t)$. Então

$$\begin{aligned} z^+(t) &= e^{A_\epsilon(t-t_0)} Q_\epsilon z^+(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + z^-(s)) ds, \\ z^-(t) &= e^{A_\epsilon(t-t_0)} (I - Q_\epsilon) z^-(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + z^-(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Observe que estamos procurando uma função $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t)$ tal que se $\tau \in \mathbb{R}$ e $\zeta \in R(Q_\epsilon)$, então a solução $z(t)$ de (3.34) com $Q_\epsilon z(\tau) = \zeta$, $(I - Q_\epsilon)z(\tau) = \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(\zeta)$ é tal que $z(t)$ está no gráfico de $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, \cdot)$ para todo t . Isto significa que, $z^-(t) = \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t))$ para todo t , assim (3.35) torna-se

$$z^+(t) = e^{A_\epsilon(t-t_0)} Q_\epsilon z^+(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds, \quad (3.36)$$

$$z^-(t) = e^{A_\epsilon(t-t_0)} (I - Q_\epsilon) z^-(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds. \quad (3.37)$$

Além disso a solução, $z(t)$ deve tender a zero quando $t \rightarrow -\infty$ (em particular, deve ficar limitada quando $t \rightarrow -\infty$). Fazendo $t_0 \rightarrow -\infty$ em (3.37) temos

$$z^-(t) = \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t)) = \int_{-\infty}^t e^{A_\epsilon(t-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds,$$

em particular, para $t = \tau$,

$$\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(\tau, \zeta) = z^-(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{A_\epsilon(\tau-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds,$$

em que $z^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Z}$ é uma solução global de (3.36) tal que $z^+(\tau) = \zeta$.

Observe que a equação para z^+ em (3.36) é desacoplada da equação para z^- e que a última equação integral acima pode ser vista como problema de ponto fixo para $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(\tau, \cdot)$.

Para mostrar a existência da função $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(\tau, \cdot)$, usaremos o princípio da contração de Banach. Para isto fixemos $D > 0$, $L > 0$, $0 < \vartheta < 1$ e escolhemos $\rho > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\rho M_0(1+4\beta)}{\beta} &\leq D, & \rho(1+L) &< \frac{\beta}{2}, \\ \frac{\rho M_0(1+L)(1+4\beta)}{\beta} &\leq \frac{L}{2}, & \frac{2\rho M_0(1+4\beta)}{\beta} &\leq \frac{\vartheta}{2}, \\ \rho M_0(3+4\beta) &< \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Também escolhemos ϵ_0 tal que $\epsilon_0 < \frac{1}{4\beta}$ e para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ temos

$$\begin{aligned} \frac{K(\epsilon)M_0(1+L)(1+4\beta)}{\beta} &\leq \frac{L}{2}, & \frac{2K(\epsilon)M_0(1+4\beta)}{\beta} &\leq \frac{\vartheta}{2}, \\ K(\epsilon)(1+L) &< \frac{\beta}{2}, & K(\epsilon)M_0(3+4\beta) &< \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Definição 3.2. Dado $\epsilon > 0$, denotaremos por $\mathcal{BL}(D, L)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\Sigma : \mathbb{R} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \Sigma(t, z) &= \Sigma(t, Q_\epsilon z), \quad \text{para todo } (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}, \\ \Sigma(\tau, z) &\in (I - Q_\epsilon z)\mathcal{Z}, \quad \text{para todo } (\tau, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}, \\ \sup_{(\tau, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}} \|\Sigma(\tau, Q_\epsilon z)\|_{\mathcal{Z}} &\leq D, \\ \|\Sigma(\tau, Q_\epsilon z) - \Sigma(\tau, Q_\epsilon \tilde{z})\|_{\mathcal{Z}} &\leq L\|Q_\epsilon(\tau)z - Q_\epsilon(\tau)\tilde{z}\|_{\mathcal{Z}}, \quad \text{para todo } (\tau, z, \tilde{z}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \end{aligned}$$

e a distância entre Σ e $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{BL}(D, L)$ é definida por

$$\|\Sigma(\cdot, \cdot) - \tilde{\Sigma}(\cdot, \cdot)\|_\infty = \sup_{(\tau, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}} \|\Sigma(\tau, Q_\epsilon z) - \tilde{\Sigma}(\tau, Q_\epsilon z)\|_{\mathcal{Z}}$$

O resultado seguinte é provado de forma semelhante à [11].

Teorema 3.5. Suponhamos que as condições acima são satisfeitas e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, então existe uma função $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*, u}(\cdot, \cdot) \in \mathcal{BL}(D, L)$, tal que a variedade instável $W_{\epsilon, p_\epsilon}^u(0)$ de (3.34) é dada por

$$W_{\epsilon, p_\epsilon}^u(0) = \{(\tau, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z} : w = Q_\epsilon w + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*, u}(\tau, Q_\epsilon w)\}.$$

Demonstração: Para $\tau \in \mathbb{R}$ e arbitrário $\zeta \in Q_\epsilon \mathcal{Z}$ e $\Sigma \in \mathcal{BL}(D, L)$ denotamos por $z^+(t) = \psi(t, \tau, \zeta, \Sigma)$ a solução de

$$z^+(t) = e^{A_\epsilon(t-\tau)}\zeta + \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)}Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma(s, z^+(s))) ds \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (3.40)$$

Em seguida, definimos

$$\Phi(\Sigma)(\tau, \zeta) = \int_{-\infty}^\tau e^{A_\epsilon(\tau-s)}(I - Q_\epsilon)\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma(s, z^+(s))) ds. \quad (3.41)$$

Mostraremos que, para $\rho > 0$ satisfazendo (3.38), a aplicação Φ leva $\mathcal{BL}(D, L)$ em si mesmo, é uma contração e, portanto possui um único ponto fixo em $\mathcal{BL}(D, L)$.

Primeiro note que, pelo Lema 3.3, segue que

$$\|\Phi(\Sigma)(\tau, \zeta)\|_{\mathcal{Z}} \leq \int_{-\infty}^\tau \rho \left(M_0 e^{-\beta(\tau-s)} + \frac{M_0}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{\tau-s}{4\epsilon}} \right) ds \leq \rho \left(\frac{M_0}{\beta} + 4M_0 \right) \quad (3.42)$$

e de (3.38) temos que

$$\sup_{(\tau, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}} \|\Phi(\Sigma)(\tau, z)\|_{\mathcal{Z}} \leq D.$$

A seguir, suponhamos que Σ e $\tilde{\Sigma}$ são funções em $\mathcal{BL}(D, L)$, $\zeta, \tilde{\zeta} \in Q_\epsilon(\tau)\mathcal{Z}$ e denotemos $z^+(t) = \psi(t, \tau, \zeta, \Sigma)$, $\tilde{z}^+(t) = \psi(t, \tau, \tilde{\zeta}, \tilde{\Sigma})$ como em (3.40). Então

$$\begin{aligned} z^+(t) - \tilde{z}^+(t) &= e^{A_\epsilon(t-\tau)} Q_\epsilon(\zeta - \tilde{\zeta}) \\ &+ \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon[\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma(s, z^+(s))) - \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, \tilde{z}^+(s) + \tilde{\Sigma}(s, \tilde{z}^+(s)))] ds, \end{aligned}$$

usando o Lema 3.3 e (3.33) obtemos

$$\begin{aligned} \|z^+(t) - \tilde{z}^+(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq e^{\beta(t-\tau)} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}} \\ &+ \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma(s, z^+(s))) - \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, \tilde{z}^+(s) + \tilde{\Sigma}(s, \tilde{z}^+(s)))\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &\leq e^{\beta(t-\tau)} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}} + (\rho + K(\epsilon)) \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_\infty \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} ds \\ &+ (\rho + K(\epsilon))(1 + L) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|z^+(s) - \tilde{z}^+(s)\|_{\mathcal{Z}} ds. \end{aligned}$$

Se $\phi(t) = e^{-\omega(t-\tau)} \|z^+(t) - \tilde{z}^+(t)\|_{\mathcal{Z}}$, então para $t \leq \tau$, temos

$$\phi(t) \leq \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}} + \frac{(\rho + K(\epsilon))}{\beta} \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_\infty + (\rho + K(\epsilon))(1 + L) \int_t^\tau \phi(s) ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall, para $t \leq \tau$, obtemos

$$\|z^+(t) - \tilde{z}^+(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \left[\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}} + \frac{(\rho + K(\epsilon))}{\beta} \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_\infty \right] e^{(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1 + L))(t-\tau)}. \quad (3.43)$$

Assim

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\Sigma)(\tau, \zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tau, \tilde{\zeta})\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq M_0 \int_{-\infty}^\tau \left(e^{-\beta(\tau-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{\tau-s}{4\epsilon}} \right) \|\tilde{G}_\epsilon(s, z^+(s) + \Sigma(s, z^+(s))) \\ &\quad - \tilde{G}_\epsilon(s, \tilde{z}^+(s) + \tilde{\Sigma}(s, \tilde{z}^+(s)))\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &\leq (\rho + K(\epsilon)) M_0 \int_{-\infty}^\tau \left(e^{-\beta(\tau-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{\tau-s}{4\epsilon}} \right) \left[(1 + L) \|z^+(s) - \tilde{z}^+(s)\|_{\mathcal{Z}} + \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_\infty \right] ds. \end{aligned}$$

Agora usando (3.43), (3.38) e (3.39) obtemos

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\Sigma)(\tau, \zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tau, \tilde{\zeta})\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq (\rho + K(\epsilon)) \frac{M_0}{\beta} \left[1 + 4\beta + (\rho + K(\epsilon))(1 + L) \left(4 + \frac{1}{2\beta - \rho(1 + L)} \right) \right] \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_\infty \\ &\quad + (\rho + K(\epsilon)) M_0 (1 + L) \frac{1 + 4\beta}{\beta} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq (\rho + K(\epsilon)) 2M_0 \frac{1 + 4\beta}{\beta} \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_\infty + (\rho + K(\epsilon)) M_0 (1 + L) \frac{1 + 4\beta}{\beta} \|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Segue-se de (3.38) e (3.39) que

$$\|\Phi(\Sigma)(\tau, \zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tau, \tilde{\zeta})\|_{\mathcal{Z}} \leq L\|\zeta - \tilde{\zeta}\|_{\mathcal{Z}} + \vartheta\|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_{\infty}. \quad (3.45)$$

A desigualdade (3.45) com $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ juntamente com (3.42) implicam que Φ leva $\mathcal{BL}(D, L)$ em $\mathcal{BL}(D, L)$. De (3.38) a estimativa (3.45) com $\zeta = \tilde{\zeta}$ mostra que Φ é uma contração. Portanto, existe um único ponto fixo $\Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u} = \Phi(\Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u})$ em $\mathcal{BL}(D, L)$.

No que se segue provaremos que, se $z(t) = z^+(t) + z^-(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução global de (3.34) que fica limitada quando $t \rightarrow -\infty$, então existem constantes $M \geq 1$ e $\nu > 0$ tais que para todo $t_0 \leq t$

$$\|z^-(t) - \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq Me^{-\nu(t-t_0)}\|z^-(t_0) - \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t_0))\|_{\mathcal{Z}}. \quad (3.46)$$

Fazendo $t_0 \rightarrow -\infty$ em (3.46) obtemos que $z^-(t) = \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t))$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Isto também garante que $\Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(t, 0) = 0$, pois 0 é solução de (3.34).

Sejam $z(t)$ solução de (3.34), $\zeta(t) = z^-(t) - \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t))$, e $y^+(s, t)$, para $s \leq t$ a solução de

$$\begin{aligned} y^+(s, t) &= e^{A_\epsilon(s-t)}Q_\epsilon z^+(t) \\ &+ \int_t^s e^{A_\epsilon(s-\theta)}Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon, p\epsilon}(\theta, y^+(\theta, t) + \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(\theta, y^+(\theta, t))) d\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\|y^+(s, t) - z^+(s)\|_{\mathcal{Z}} \\ &= \left\| \int_t^s e^{A_\epsilon(s-\theta)}Q_\epsilon \left[\tilde{G}_{\epsilon, p\epsilon}(\theta, y^+(\theta, t) + \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(\theta, y^+(\theta, t))) - \tilde{G}_{\epsilon, p\epsilon}(\theta, z^+(\theta) + z^-(\theta)) \right] d\theta \right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq (\rho + K(\epsilon)) \int_s^t e^{\beta(s-\theta)} [(1+L)\|y^+(\theta, t) - z^+(\theta)\|_{\mathcal{Z}} + \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}}] d\theta. \end{aligned}$$

Se $\psi(s) = e^{-\beta s}\|y^+(s, t) - z^+(s)\|_{\mathcal{Z}}$, então

$$\psi(s) \leq (\rho + K(\epsilon))(1+L) \int_s^t \psi(\theta) d\theta + (\rho + K(\epsilon)) \int_s^t e^{-\beta\theta} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta, \quad s \leq t.$$

Usando a desigualdade de Gronwall segue-se que

$$\|y^+(s, t) - z^+(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq (\rho + K(\epsilon)) \int_s^t e^{-(\beta - (\rho + K(\epsilon))M_0(1+L))(\theta-s)} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta. \quad (3.47)$$

Se $s \leq t_0 \leq t$, então

$$\begin{aligned} &\|y^+(s, t) - y^+(s, t_0)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|e^{A_\epsilon(s-t_0)}Q_\epsilon [y^+(t_0, t) - z^+(t_0)]\|_{\mathcal{Z}} \\ &+ \left\| \int_{t_0}^s e^{A_\epsilon(s-\theta)}Q_\epsilon \left[\tilde{G}_{\epsilon, p\epsilon}(\theta, y^+(\theta, t) + \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(\theta, y^+(\theta, t))) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \tilde{G}_{\epsilon, p\epsilon}(\theta, y^+(\theta, t_0) + \Sigma_{\epsilon, p\epsilon}^{*,u}(\theta, y^+(\theta, t_0))) \right] d\theta \right\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned}$$

De (3.47) obtemos

$$\begin{aligned} \|y^+(s, t) - y^+(s, t_0)\|_{\mathcal{Z}} &\leq (\rho + K(\epsilon))e^{\beta(s-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\beta-(\rho+K(\epsilon))(1+L))(\theta-t_0)} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta \\ &\quad + (\rho + K(\epsilon)) \int_s^{t_0} e^{\beta(s-\theta)} (1+L) \|y^+(\theta, t) - y^+(\theta, t_0)\|_{\mathcal{Z}} d\theta. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall segue-se que, para $s \leq t_0 \leq t$,

$$\|y^+(s, t) - y^+(s, t_0)\|_{\mathcal{Z}} \leq (\rho + K(\epsilon)) \int_{t_0}^t e^{-(\beta-(\rho+K(\epsilon))(1+L))(\theta-s)} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta. \quad (3.48)$$

Usaremos isto para estimar $\zeta(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned} &\zeta(t) - e^{A_\epsilon(t-t_0)}(I - Q_\epsilon)\zeta(t_0) \\ &= z^-(t) - \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t)) - e^{A_\epsilon(t-t_0)}(I - Q_\epsilon)[z^-(t_0) - \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t_0))] \\ &= \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)}(I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + z^-(s)) ds \\ &\quad - \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t)) + e^{A_\epsilon(t-t_0)}(I - Q_\epsilon) \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t_0, z^+(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)}(I - Q_\epsilon) [\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + z^-(s)) - \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, y^+(s, t) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, y^+(s, t)))] ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^{t_0} e^{A_\epsilon(t-s)}(I - Q_\epsilon) [\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, y^+(s, t) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, y^+(s, t))) \\ &\quad - \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, y^+(s, t_0) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, y^+(s, t_0)))] ds. \end{aligned}$$

Assim, de (3.47) e (3.48), obtemos que

$$\begin{aligned} &\|\zeta(t) - e^{A_\epsilon(t-t_0)}(I - Q_\epsilon)\zeta(t_0)\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leq (\rho + K(\epsilon))M_0 \int_{t_0}^t \left(e^{-\beta(t-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \right) \times \\ &\quad \times [\|z^+(s) - y^+(s, t)\|_{\mathcal{Z}} + \|z^-(s) - \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, y^+(s, t))\|_{\mathcal{Z}}] ds \\ &+ (\rho + K(\epsilon))M_0(1+L) \int_{-\infty}^{t_0} \left(e^{-\beta(t-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \right) \|y^+(s, t) - y^+(s, t_0)\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &\leq (\rho + K(\epsilon))M_0 \int_{t_0}^t \left(e^{-\beta(t-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \right) \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\ &+ (\rho + K(\epsilon))^2 M_0(1+L) \int_{t_0}^t \left(e^{-\beta(t-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \right) \int_s^t e^{-(\beta-(\rho+K(\epsilon))(1+L))(\theta-s)} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta ds \\ &+ (\rho + K(\epsilon))^2 M_0(1+L) \int_{-\infty}^{t_0} \left(e^{-\beta(t-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \right) \int_{t_0}^t e^{-(\beta-(\rho+K(\epsilon))(1+L))(\theta-s)} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta ds, \end{aligned}$$

e levando em conta $(\rho + K(\epsilon))(1 + L) \leq \beta$ segue que

$$\begin{aligned}
& \|\zeta(t) - e^{A_\epsilon(t-t_0)}(I - Q_\epsilon)\zeta(t_0)\|_{\mathcal{Z}} \\
& \leq (\rho + K(\epsilon))M_0 \int_{t_0}^t \left(e^{-\beta(t-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \right) \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\
& \quad + (\rho + K(\epsilon))^2 M_0 (1 + L) \int_{t_0}^t \frac{1}{\beta} e^{-\beta(t-\theta)} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} + 4e^{-\frac{t-\theta}{4\epsilon}} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta \\
& \quad + (\rho + K(\epsilon))^2 M_0 (1 + L) \left(\frac{1}{\beta} e^{-\beta(t-t_0)} + 4e^{-\frac{t-t_0}{4\epsilon}} \right) \int_{t_0}^t e^{-(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1+L))(\theta-t_0)} \|\zeta(\theta)\|_{\mathcal{Z}} d\theta \\
& \leq 2(\rho + K(\epsilon))M_0 \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds + (\rho + K(\epsilon))M_0 \frac{1 + 4\beta}{\sqrt{\epsilon}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\
& \quad + (\rho + K(\epsilon))M_0 \left(e^{-\beta(t-t_0)} + 4\beta e^{-\frac{t-t_0}{4\epsilon}} \right) \int_{t_0}^t e^{-(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1+L))(s-t_0)} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds,
\end{aligned}$$

portanto, tendo em vista que $\epsilon < \frac{1}{4\beta}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\zeta(t)\|_{\mathcal{Z}} & \leq M_0 \left(e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{t-t_0}{4\epsilon}} \right) \|\zeta(t_0)\|_{\mathcal{Z}} \\
& \quad + 2(\rho + K(\epsilon))M_0 \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-s)} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds + (\rho + K(\epsilon))M_0 \frac{1 + 4\beta}{\sqrt{\epsilon}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\
& \quad + (\rho + K(\epsilon))M_0 \left(e^{-\beta(t-t_0)} + 4\beta e^{-\frac{t-t_0}{4\epsilon}} \right) \int_{t_0}^t e^{-(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1+L))(s-t_0)} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\
& \leq \frac{2M_0}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\beta(t-t_0)} \|\zeta(t_0)\|_{\mathcal{Z}} + (\rho + K(\epsilon))M_0 \frac{1 + 4\beta}{\sqrt{\epsilon}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-s}{4\epsilon}} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\
& \quad + (\rho + K(\epsilon))M_0 (3 + 4\beta) e^{-\beta(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\beta(s-t_0)} \|\zeta(s)\|_{\mathcal{Z}} ds.
\end{aligned}$$

Seja $w(t) = \|\zeta(t)\|_{\mathcal{Z}} e^{\beta(t-t_0)}$, então

$$\begin{aligned}
w(t) & \leq \frac{2M_0}{\sqrt{\epsilon}} \|\zeta(t_0)\|_{\mathcal{Z}} + (\rho + K(\epsilon))M_0 \frac{1 + 4\beta}{\sqrt{\epsilon}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{1-4\epsilon\beta}{4\epsilon}(t-s)} w(s) ds \\
& \quad + (\rho + K(\epsilon))M_0 (3 + 4\beta) \int_{t_0}^t w(s) ds.
\end{aligned}$$

Estamos em condições de usar o Lema 3.4 para obter a limitação

$$\|\zeta(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq e^{-\beta(t-t_0)} \frac{2M_0}{\sqrt{\epsilon}} \|\zeta(t_0)\|_{\mathcal{Z}} e^{(\rho + K(\epsilon))M_0(3+4\beta)(t-t_0)} e^{\frac{4(\rho + K(\epsilon))M_0(1+4\beta)}{1-4\epsilon\beta}},$$

portanto

$$\|\zeta(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\zeta(t_0)\|_{\mathcal{Z}} C e^{-\nu(t-t_0)}, \tag{3.49}$$

em que $C = C(M_0, \beta, \epsilon, \rho)$ e

$$\nu = \beta - (\rho + K(\epsilon))M_0(3 + 4\beta).$$

Levando em conta (3.38) e (3.39) obtemos (3.46) e conseqüentemente

$$W_{\epsilon, p_\epsilon}^u(0) \subset \{(\tau, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z} : w = Q_\epsilon w + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(\tau, Q_\epsilon w)\}.$$

Devemos provar a recíproca, isto é, que

$$\{(\tau, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z} : w = Q_\epsilon w + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(\tau, Q_\epsilon w)\} \subset W_{\epsilon, p_\epsilon}^u(0).$$

Consideremos $z_0^+ \in Q_\epsilon \mathcal{Z}$ e $z_*^+(t)$ satisfazendo

$$z^+(t) = e^{A_\epsilon(t-\tau)} z_0^+ + \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

A equação acima define uma curva $z_*^+(t) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z_*^+(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Lembrando (3.41) pode-se verificar que

$$\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z_*^+(t)) = \int_{-\infty}^t e^{A_\epsilon(t-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z_*^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z_*^+(s))) ds \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Assim $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z_*^+(t))$ é igual a $z^-(t)$, a solução de

$$\begin{aligned} z^-(t) &= e^{A_\epsilon(t-t_0)} (I - Q_\epsilon) z^-(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds \quad \text{para } t \geq t_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e concluímos que $z_*^+(t) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z_*^+(t))$ para $t \in \mathbb{R}$ é uma solução global de (3.34), passando por $z_0^+ + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(\tau, z_0^+)$ no instante τ com $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z_*^+(t)) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$. Como $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, 0) = 0$, o argumento que nos levou a (3.43) (com $\tilde{\Sigma} = \Sigma = \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}$ e $\tilde{\zeta} = 0$) pode ser usado para garantir que

$$\|z_*^+(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|z_0^+\|_{\mathcal{Z}} e^{(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1+L))(t-\tau)}. \quad (3.50)$$

Assim, $z_*^+(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ e a prova está completa. ■

3.6 Continuidade de variedades instáveis

Nesta seção, analisamos a continuidade de variedades instáveis em relação ao parâmetro ϵ .

Recordemos que podemos decompor uma solução $z_\epsilon(t)$ de (3.34) como $z_\epsilon^+(t) = Q_\epsilon z_\epsilon(t)$ e $z_\epsilon^-(t) = (I - Q_\epsilon) z_\epsilon(t)$, então

$$\begin{aligned} z^+(t) &= e^{A_\epsilon(t-t_0)} Q_\epsilon z^+(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z_\epsilon^+(s) + z_\epsilon^-(s)) ds, \\ z^-(t) &= e^{A_\epsilon(t-t_0)} (I - Q_\epsilon) z^-(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z_\epsilon^+(s) + z_\epsilon^-(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Consideramos a seguinte equação em \mathcal{Z}

$$\dot{z} = A_\epsilon z + \tilde{G}_0(z), \quad (3.52)$$

em que

$$G_0(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0(z_1) \end{pmatrix}$$

e \tilde{G}_0 é construída como na Observação 3.1.

Seja $z_{\epsilon,0}(t)$ uma solução de (3.52), portanto se escrevermos $z_{\epsilon,0}^+(t) = Q_\epsilon z_{\epsilon,0}(t)$ e $z_{\epsilon,0}^-(t) = (I - Q_\epsilon)z_{\epsilon,0}(t)$ temos

$$\begin{aligned} z_{\epsilon,0}^+(t) &= e^{A_\epsilon(t-t_0)} Q_\epsilon z_{\epsilon,0}^+(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon G_0(z_{\epsilon,0}^+(s) + z_{\epsilon,0}^-(s)) ds, \\ z_{\epsilon,0}^-(t) &= e^{A_\epsilon(t-t_0)} (I - Q_\epsilon) z_{\epsilon,0}^-(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_0(z_{\epsilon,0}^+(s) + z_{\epsilon,0}^-(s)) ds, \end{aligned}$$

e

$$\Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{A_\epsilon(\tau-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_0(z_{\epsilon,0}^+(s) + \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(z_{\epsilon,0}^+(s))) ds,$$

com $\zeta \in Q_\epsilon \mathcal{Z}$, em que $z_{\epsilon,0}(t) = z_{\epsilon,0}^+(t) + \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(z_{\epsilon,0}^+(t))$ para $t \in \mathbb{R}$ é a solução de (3.52) tal que $z_{\epsilon,0}^+(\tau) = Q_\epsilon z_{\epsilon,0}(\tau) = \zeta$.

Teorema 3.6. *Suponhamos que as condições acima e (3.38) sejam satisfeitas, então existe uma função $\Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u} \in \mathcal{BL}(D; L)$, tal que a variedade instável $W_{\epsilon,p_\epsilon}^u(0)$ da solução de equilíbrio 0 de (3.34) é dada por*

$$W_{\epsilon,p_\epsilon}^u(0) = \{(\tau, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z} : w = Q_\epsilon w + \Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(\tau, Q_\epsilon w)\},$$

também, para todo $\zeta \in Q_\epsilon \mathcal{Z}$ e $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$,

$$\Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(\tau, \zeta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{A_\epsilon(\tau-s)} (I - Q_\epsilon) \tilde{G}_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds.$$

Além disso,

$$\sup_{t \leq \tau} \sup_{\substack{z \in \mathcal{Z} \\ \|z\|_{\mathcal{Z}} \leq r}} \|\Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(t, Q_\epsilon z) - \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(Q_\epsilon z)\|_{\mathcal{Z}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Demonstração: Seja $z \in \mathcal{Z}$ com $\|z\|_{\mathcal{Z}} \leq r$, então

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(\tau, Q_\epsilon z) - \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(Q_\epsilon z) \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} e^{A_\epsilon(\tau-s)} (I - Q_\epsilon) [\tilde{G}_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z_\epsilon^+(s) + \Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(s, z_\epsilon^+(s))) - \tilde{G}_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z_{\epsilon,0}^+(s) + \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(z_{\epsilon,0}^+(s)))] ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\tau} e^{A_\epsilon(\tau-s)} (I - Q_\epsilon) [\tilde{G}_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z_{\epsilon,0}^+(s) + \Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(s, z_{\epsilon,0}^+(s))) - \tilde{G}_0(z_{\epsilon,0}^+(s) + \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(z_{\epsilon,0}^+(s)))] ds \\ &:= I_1(z, \tau, \epsilon) + I_2(z, \tau, \epsilon). \end{aligned}$$

Primeiro estimamos $I_2(z, \tau, \epsilon)$. Podemos repetir o argumento usado na prova do Teorema 3.5 para o sistema autônomo com \tilde{G}_0 , que em particular implica que a trajetória $z_{\epsilon,0}(s) = z_{\epsilon,0}^+(s) + \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(s, z_{\epsilon,0}^+(s))$ para $s \leq \tau$ é limitada em \mathcal{Z} por uma constante dependente de r e, portanto, sua primeira componente denotada por $z_{\epsilon,0}^1(s)$ é limitada em $H_0^1(\mathcal{O})$ pela mesma constante.

Notemos que

$$\begin{aligned} & \|\tilde{G}_{\epsilon,p_\epsilon}(t, z_{\epsilon,0}(t)) - \tilde{G}_0(z_{\epsilon,0}(t))\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq \|p_\epsilon(t, \psi^{p_\epsilon}(t) + z_{0,\epsilon}^1(t)) - f_0(\psi^{p_\epsilon}(t) + z_{0,\epsilon}^1(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ & \quad + \|f_0(\psi^{p_\epsilon}(t) + z_{0,\epsilon}^1(t)) - f_0(e + z_{0,\epsilon}^1(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \\ & \quad + \|p_\epsilon(t, \psi^{p_\epsilon}(t)) - f_0(\psi^{p_\epsilon}(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|f_0(\psi^{p_\epsilon}(t)) - f_0(e)\|_{L^2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Um cálculo simples que usa (3.4) e (3.5) para p_ϵ , (3.11) para f_0 , Corolário 3.1, Lema 3.3, Teorema 3.4 e o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos permite concluir que

$$\sup_{t \leq \tau} \sup_{\substack{z \in \mathcal{Z} \\ \|z\|_{\mathcal{Z}} \leq r}} \|I_2(z, t, \epsilon)\|_{\mathcal{Z}} = o(1),$$

em que $o(1)$ represente a expressão que tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ e pode depender de r e constantes que aparecem em nossos argumentos (enquanto que $K(\epsilon)$ também tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$, mas depende apenas de ϵ).

A seguir, estimaremos $I_1(z, \tau, \epsilon)$. Recordemos que

$$z_\epsilon^+(t) = e^{A_\epsilon(t-\tau)} z_\epsilon^+(\tau) + \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon,p_\epsilon}(s, z_\epsilon^+(s) + z_\epsilon^-(s)) ds. \quad (3.53)$$

Procedendo como no caso de (3.43) pode-se obter a expressão análoga para (3.50)

$$\|z_\epsilon^+(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq e^{(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1+L))(t-\tau)} \|z_\epsilon^+(\tau)\|_{\mathcal{Z}}, \quad t \leq \tau, \quad (3.54)$$

em que β é a constante dada no Lema 3.3 e $\rho, L, K(\epsilon)$ são dadas no Teorema 3.5. As mesmas estimativas permanecem válidas para $z_{\epsilon,0}^+(t)$, em particular temos $\|z_{\epsilon,0}^+(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|z_{\epsilon,0}^+(\tau)\|_{\mathcal{Z}}$ para $t \leq \tau$. Temos

$$\begin{aligned} & \|I_1(z, \tau, \epsilon)\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq (\rho + K(\epsilon)) M_0 \int_{-\infty}^{\tau} \left(e^{-\beta(\tau-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{\tau-s}{4\epsilon}} \right) \left[\|z_\epsilon^+(s) - z_{\epsilon,0}^+(s)\|_{\mathcal{Z}} \right. \\ & \quad \left. + \|\Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u}(z_\epsilon^+(s)) - \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}(z_{\epsilon,0}^+(s))\|_{\mathcal{Z}} \right] ds \\ & \leq (\rho + K(\epsilon)) M_0 (1+L) \int_{-\infty}^{\tau} \left(e^{-\beta(\tau-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{\tau-s}{4\epsilon}} \right) \|z_\epsilon^+(s) - z_{\epsilon,0}^+(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \\ & \quad + (\rho + K(\epsilon)) M_0 \frac{1+4\beta}{\beta} \|\Sigma_{\epsilon,p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon,0}^{*,u}\|_r, \end{aligned} \quad (3.55)$$

em que

$$\left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r = \sup_{s \leq \tau} \sup_{\substack{z_{\epsilon, 0}^+ \in Q_\epsilon \mathcal{Z} \\ \|z_{\epsilon, 0}^+\|_{\mathcal{Z}} \leq r}} \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z_{\epsilon, 0}^+) - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u}(z_{\epsilon, 0}^+) \right\|_{\mathcal{Z}}.$$

Em seguida, temos

$$\begin{aligned} & \|z_\epsilon^+(t) - z_{\epsilon, 0}^+(t)\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq \left\| \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon [\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z_\epsilon^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z_\epsilon^+(s))) - \tilde{G}_0(z_{\epsilon, 0}^+(s) + \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u}(s, z_{\epsilon, 0}^+(s)))] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq \left\| \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon [\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z_{\epsilon, 0}(s)) - \tilde{G}_0(z_{\epsilon, 0}(s))] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \\ & + \left\| \int_\tau^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon [\tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z_\epsilon^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z_\epsilon^+(s))) - \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z_{\epsilon, 0}^+(s) + \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u}(s, z_{\epsilon, 0}^+(s)))] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \\ & \leq o(1)e^{-\beta(\tau-t)} + (\rho + K(\epsilon)) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} [\|z_\epsilon^+(s) - z_{\epsilon, 0}^+(s)\|_{\mathcal{Z}} + \|\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z_\epsilon^+(s)) - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u}(z_{\epsilon, 0}^+(s))\|_{\mathcal{Z}}] ds \\ & \leq o(1)e^{-\beta(\tau-t)} + \frac{\rho + K(\epsilon)}{\beta} e^{-\beta(\tau-t)} \left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r \\ & \quad + (\rho + K(\epsilon))(1 + L) \int_t^\tau e^{\beta(t-s)} \|z_\epsilon^+(s) - z_{\epsilon, 0}^+(s)\|_{\mathcal{Z}} ds, \end{aligned}$$

e a desigualdade de Gronwall implica que

$$\|z_\epsilon^+(t) - z_{\epsilon, 0}^+(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \left(o(1) + \frac{\rho + K(\epsilon)}{\beta} \left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r \right) e^{(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1 + L))(t - \tau)}. \quad (3.56)$$

Aplicando (3.56) em (3.55) obtemos que

$$\begin{aligned} \|I_1(z, \tau, \epsilon)\|_{\mathcal{Z}} & \leq (\rho + K(\epsilon)) M_0 \frac{1 + 4\beta}{\beta} \left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r \\ & \quad + (\rho + K(\epsilon)) M_0 (1 + L) \left(o(1) + \frac{\rho + K(\epsilon)}{\beta} \left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r \right) \times \\ & \quad \times \int_{-\infty}^\tau \left(e^{-\beta(\tau-s)} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\frac{\tau-s}{4\epsilon}} \right) e^{(\beta - (\rho + K(\epsilon))(1 + L))(s - \tau)} ds \\ & \leq o(1) + \left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r \times \\ & \quad \times \left[(\rho + K(\epsilon)) M_0 \frac{1 + 4\beta}{\beta} + \frac{(\rho + K(\epsilon))^2 M_0 (1 + L)}{\beta} \left(4 + \frac{1}{2\beta - (\rho + K(\epsilon))(1 + L)} \right) \right]. \end{aligned}$$

De (3.38) e (3.39) segue-se que $(\rho + K(\epsilon))(1 + L) \leq \beta$ e $2(\rho + K(\epsilon)) M_0 \frac{1 + 4\beta}{\beta} \leq \vartheta < 1$, assim

$$\|I_1(z, \tau, \epsilon)\|_{\mathcal{Z}} \leq o(1) + \left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r 2(\rho + K(\epsilon)) M_0 \frac{1 + 4\beta}{\beta} \leq o(1) + \vartheta \left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r.$$

Donde resulta que $\left\| \left\| \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u} - \Sigma_{\epsilon, 0}^{*,u} \right\| \right\|_r \leq o(1)$. A prova está completa. ■

Agora estamos preparados para enunciar o seguinte resultado.

Teorema 3.7. *Assumimos as mesmas hipóteses do Teorema 3.4. Então, existem $\epsilon_0, \delta > 0$, tais que para todo $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ e $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$ existe uma δ -variedade instável local $W_{loc}^u(\xi_\epsilon^*, \delta)$ para (3.32) e uma δ -variedade instável local $W_{loc}^u((e^*, 0), \delta)$ para (3.52). Além disso, estas δ -variedades instáveis locais se comportam continuamente em \mathcal{Z} quando $\epsilon \rightarrow 0$, isto é, dado $\tau \in \mathbb{R}$*

$$\sup_{t \leq \tau} \text{dist}_{\mathcal{H}}(W_{loc}^u(\xi_\epsilon^*, \delta)(t), W_{loc}^u((e^*, 0), \delta)) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Demonstração: O Teorema 3.6 garante que o resultado é válido para as δ -variedades instáveis locais das equações (3.34) e (3.52), ambas transladadas de modo que zero seja seu equilíbrio. Uma vez que, pelo Teorema 3.4 $(e^*, 0)$ e $\xi_{p_\epsilon}^*$ são uniformemente próximos uns dos outros, os resultados permanecem válidos para δ -variedades instáveis locais dos problemas originais transladados. De acordo com a Observação 3.1, só precisamos garantir que, dado $\delta > 0$, existe $0 < \delta' \leq \delta$ tal que para toda solução $z^+(t) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t))$ sobre a variedade instável de (3.34) que satisfaz

$$\|z^+(t_0) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t_0, z^+(t_0))\|_{\mathcal{Z}} < \delta'$$

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$\|z^+(t) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t))\|_{\mathcal{Z}} < \delta, \quad \forall t \leq t_0.$$

Como $z^+(t)$ é a solução de

$$z^+(t) = e^{A_\epsilon(t-t_0)} Q_\epsilon z^+(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_\epsilon(t-s)} Q_\epsilon \tilde{G}_{\epsilon, p_\epsilon}(s, z^+(s) + \Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(s, z^+(s))) ds, \quad t \leq t_0,$$

segue-se por (3.50) que

$$\|z^+(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq e^{(\beta - (\rho + K(\epsilon)(1+L))(t-t_0))} \|z^+(t_0)\|_{\mathcal{Z}}, \quad t \leq t_0.$$

Assim, usando que $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}$ é Lipschitz contínua (com uma constante de Lipschitz L independente de ϵ) e $\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, 0) = 0$, temos que

$$\|\Sigma_{\epsilon, p_\epsilon}^{*,u}(t, z^+(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq L e^{(\beta - (\rho + K(\epsilon)(1+L))(t-t_0))} \|z^+(t_0)\|_{\mathcal{Z}} \quad \text{para } t \leq t_0,$$

e a prova segue-se facilmente. ■

3.7 Semicontinuidade inferior de atratores

Nesta seção, provamos a semicontinuidade inferior de atratores cociclo. Como consequência, segue-se também a semicontinuidade inferior de atratores pullback e uniformes. Partimos de um lema que fornece a condição suficiente.

Lema 3.5. *Suponhamos que para todo $u \in A_0$, toda sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$ e $p_{\epsilon_n} \in \Sigma_n$ existe uma sequência $(x_n, y_n) \in A_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})$ tal que $x_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\mathcal{O})$. Então*

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon} \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_\epsilon(p_\epsilon)) = 0,$$

isto é, a família $\{A_\epsilon(p_\epsilon)\}_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon}$ é semicontinua inferiormente em $\epsilon = 0$.

Demonstração: Como \mathcal{A}_0 é um conjunto compacto em \mathcal{Z} denotamos por

$$b(\epsilon, p_\epsilon) = (c(\epsilon, p_\epsilon), d(\epsilon, p_\epsilon)) \in \mathcal{A}_0$$

os elementos tais que

$$\text{dist}(\mathcal{A}_0, A_\epsilon(p_\epsilon)) = \text{dist}(b(\epsilon, p_\epsilon), A_\epsilon(p_\epsilon)).$$

Pela definição de \mathcal{A}_0 temos $d(\epsilon, p_\epsilon) = \Delta c(\epsilon, p_\epsilon) + f_0(c(\epsilon, p_\epsilon))$. Seja $\epsilon_n \rightarrow 0$, para todo $\delta > 0$ existe $q_{\epsilon_n} \in \Sigma_{\epsilon_n}$ tal que

$$\sup_{p_{\epsilon_n} \in \Sigma_{\epsilon_n}} \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_{\epsilon_n}(p_{\epsilon_n})) \leq \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_{\epsilon_n}(q_{\epsilon_n})) + \delta \quad (3.57)$$

Denotamos $b(\epsilon_n, q_{\epsilon_n}) := b_n = (c_n, d_n)$. Pela compacidade de \mathcal{A}_0 existem subsequências de c_n e d_n , as quais representaremos novamente por c_n e d_n tais que

$$c_n \rightarrow c \quad \text{em} \quad H_0^1(\mathcal{O}) \quad \text{e} \quad d_n \rightarrow d \quad \text{em} \quad L^2(\mathcal{O}),$$

e pela unicidade do limite devemos ter $d = \Delta c + f_0(c)$. Como $c \in A_0$, pela hipótese existe $(x_n, y_n) \in A_{\epsilon_n}(q_{\epsilon_n})$, tal que $x_n \rightarrow c$ em $H_0^1(\mathcal{O})$. O argumento usado na prova do Teorema 3.2 mostra também que temos a convergência $y_n \rightarrow \Delta c + f_0(c)$ em $L^2(\mathcal{O})$. Assim

$$[\text{dist}(b_n, A_{\epsilon_n}(q_{\epsilon_n}))]^2 \leq \|b_n - (x_n, y_n)\|_H^2 = \|c_n - x_n\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|d_n - y_n\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \rightarrow 0. \quad (3.58)$$

Como ϵ_n é uma sequência arbitrária convergindo para zero então de (3.57) e (3.58) obtemos o resultado, pois δ é arbitrário. ■

Considere o problema auxiliar governado pela equação

$$\epsilon u_{tt} + u_t - \Delta u = f_0(u). \quad (3.59)$$

Seja $\tilde{\mathcal{E}} = \{(e^*, 0) : e^* \in \mathcal{E}\}$, em que \mathcal{E} é o conjunto finito dos equilíbrios da equação parabólica (3.2), então $\tilde{\mathcal{E}}$ é o conjunto dos equilíbrios da equação (3.59) e

$$\mathcal{A}_\epsilon = \sum_{e^* \in \mathcal{E}} W^u((e^*, 0)),$$

em que $W^u((e^*, 0))$ é a variedade instável local do equilíbrio $(e^*, 0)$ no sistema dinâmico gerado pelas soluções de (3.59) (confira [42, Seção 5]). Além disso, temos

$$A_0 = \sum_{e^* \in E} W^u(e^*),$$

em que $W^u(e^*)$ é a variedade instável do equilíbrio e^* no sistema dinâmico gerado pelas soluções do problema parabólico (3.2) (confira [42, Seção 5]). Estamos em condição de formular e provar o resultado de semicontinuidade inferior de atratores cociclo. O argumento segue as linhas da prova de [50, Teorema 3.3], veja também [9, Teorema 3.8].

Teorema 3.8. *A família de atratores cociclo $\{A_\epsilon(p_\epsilon)\}_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon, \epsilon \in [0, 1]}$ é semicontínua inferior em $\epsilon = 0$, isto é,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon} \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_\epsilon(p_\epsilon)) = 0.$$

Demonstração: Usaremos o Lema 3.5. Para isto, tomamos $w \in A_0$, uma sequência de números positivos $\epsilon_n \rightarrow 0$ e uma sequência $p_{\epsilon_n} \in \Sigma_{\epsilon_n}$. Devemos provar que existe uma sequência $(x_n, y_n) \in A_{\epsilon_n}(p_n)$ tal que $\|x_n - w\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Como $w \in W^u(e^*)$ para algum equilíbrio $e^* \in \mathcal{E}$, então para todo $\mu > 0$ existe $t > 0$ e $u \in W^u(e^*)$ com $\|u - e^*\|_{H_0^1(\mathcal{O})} < \mu$ (isto é, $u \in W_{loc}^u(e^*, \mu) := W^u(e^*) \cap B(e^*, \mu)$) tal que $w = T_0(t)u$. Usando [42, Corolário 4.9] segue-se que se tomarmos μ suficientemente pequeno existe uma sequência (\bar{u}_n, \bar{v}_n) na η -variedade instável local $W_{loc}^u((e^*, 0), \eta) := W^u((e^*, 0)) \cap B((e^*, 0), \eta)$ do equilíbrio $(e^*, 0)$ de (3.59) tal que $\|\bar{u}_n - u\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, em que η depende de μ mas não de ϵ e podemos fazê-lo tão pequeno quanto queremos, tomando μ apropriadamente pequeno. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\eta = \delta$, em que δ é o raio da variedade instável dado no Teorema 3.7. Os Teoremas 3.4 e 3.7 nos garante que para cada n existe uma trajetória completa ξ_n^* de (3.1) com ϵ_n e p_n substituindo f_ϵ e um elemento $(u_n, v_n) \in W_{loc}^u(\xi_n^*, \mu)(-t)$ tal que $\|u_n - \bar{u}_n\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Definindo $(x_n, y_n) = \varphi_{\epsilon_n}(t, \theta_{-t} p_n)(u_n, v_n)$, pela invariância do atrator cociclo temos $(x_n, y_n) \in A_{\epsilon_n}(p_n)$. Além disso, usando o Lema A.13 obtemos

$$\begin{aligned} \|x_n - w\|_{H_0^1(\mathcal{O})} &\leq \|x_n - T_0(t)u_n\|_{H_0^1(\mathcal{O})} + \|T_0(t)u_n - T_0(t)u\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \\ &\leq \eta(\epsilon_n)te^{Ct} + \|T_0(t)u_n - T_0(t)u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Assim, dado $\gamma > 0$ existe um N_0 suficientemente grande tal que $\eta(\epsilon_n)te^{Ct} \leq \gamma/2$ e pela continuidade de $T_0(t)$, $\|T_0(t)u_n - T_0(t)u\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq \gamma/2$ para todo $n \geq N_0$. A prova está completa. ■

A semicontinuidade inferior de atratores uniformes e pullback segue pelo Teorema 3.8.

Teorema 3.9. *As famílias de atratores uniformes $\{\mathcal{A}_\epsilon\}_{\epsilon \in [0,1]}$ e pullback $\{A_\epsilon(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ geradas pela equação (3.1) são semicontínuas inferiormente em $\epsilon = 0$, isto é,*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\epsilon) = 0,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_\epsilon(t)) = 0.$$

Demonstração: Note que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_\epsilon(t)) \leq \sup_{p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon} \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_\epsilon(p_\epsilon)),$$

portanto a semicontinuidade inferior de atratores pullback segue-se pelo Teorema 3.8. Além disso,

$$\text{dist}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\epsilon) \leq \text{dist}(\mathcal{A}_0, A_\epsilon(p_\epsilon)), \quad \forall p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon,$$

e o Teorema 3.8 também implica a semicontinuidade inferior de atratores uniformes. A prova está completa. ■

Capítulo 4

Sobre atratores cociclo aleatórios com universos de atração autônomos

Neste capítulo, estudamos atratores cociclo para SDAN com universos de atração autônomos, isto é, atraindo pullback alguns conjuntos aleatórios autônomos, em vez de os não autônomos. Em primeiro lugar, comparamos atratores cociclo com universos de atração autônomos e não autônomos, e depois para os autônomos estabelecemos alguns critérios de existência e caracterização. Também estudamos para atratores cociclo a continuidade das seções indexadas por símbolos não autônomos e mostramos que a semicontinuidade superior é equivalente a compacidade uniforme do atrator, enquanto que a semicontinuidade inferior é equivalente a uma propriedade de equi-atração sob algumas condições. Finalmente, aplicamos estes resultados teóricos às equações estocásticas de Navier-Stokes 2D com ruído branco aditivo e força externa não autônoma de translação limitada.

4.1 Sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos (SDAN)

Nesta seção, introduzimos alguns conceitos e resultados básicos sobre sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos que serão utilizados ao longo deste texto. O conceito de sistema dinâmico aleatório não autônomo é bem recente [72, 73]. Estes sistemas dinâmicos são geralmente associados às equações que possuem termos determinísticos não autônomos e estocásticos.

Sejam (X, d) um espaço métrico completo separável e Σ um espaço topológico. De modo geral, não exigiremos compacidade ou limitação (sob alguma métrica) de Σ exceto quando indicado, mas sempre supomos que existe um grupo $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de operadores em Σ satisfazendo

- $\theta_0 =$ operador identidade sobre Σ ;

- $\theta_t \Sigma = \Sigma, \quad \forall t \in \mathbb{R};$
- $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R};$
- $\sigma \mapsto \theta_t \sigma$ é contínua para cada t fixo.

Em aplicações, Σ é chamado o **espaço de símbolo** de uma equação de evolução. Um exemplo bem conhecido é o espaço $\Sigma = \{g(\cdot + s) : s \in \mathbb{R}\}$ ou de seu fecho sob alguma topologia para alguma função g dependente do tempo que toma valores em algum espaço topológico, e θ_t é o operador de translação $\theta_t g = g(\cdot + t)$ sobre Σ .

Ao longo deste trabalho, para qualquer espaço métrico M denotamos por $\mathcal{B}(M)$ a sigma-álgebra de Borel de M .

Para definir sistemas dinâmicos aleatórios não autônomos estudados neste trabalho, consideramos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade não necessariamente \mathbb{P} -completo, dotado com um fluxo $\{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfazendo

- $\vartheta_0 =$ operador identidade sobre Ω ;
- $\vartheta_t \Omega = \Omega; \quad \forall t \in \mathbb{R};$
- $\vartheta_s \circ \vartheta_t = \vartheta_{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R};$
- $(t, \omega) \mapsto \vartheta_t \omega$ is $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}, \mathcal{F})$ -mensurável;
- $\mathbb{P}(\vartheta_t F) = \mathbb{P}(F), \quad \forall t \leq 0, F \in \mathcal{F}.$

Os dois grupos $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ em Σ e Ω respectivamente são chamados **fluxos de base**. Para a facilidade de notações, muitas vezes usamos θ (ou ϑ), em vez de θ_t (ou ϑ_t), ao descrever propriedades gerais válidas para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definição 4.1. *Um sistema dinâmico aleatório não autônomo (SDAN) em X com fluxos de base $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é definido como uma aplicação*

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \Sigma \times X \mapsto X$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) ϕ é $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\Sigma) \times \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(X))$ -mensurável,
- (2) $\phi(0, \omega, \sigma, \cdot)$ é a identidade sobre X para cada $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$,

(3) ϕ satisfaz a propriedade do cociclo, isto é,

$$\phi(t + s, \omega, \sigma, x) = \phi(t, \vartheta_s \omega, \theta_s \sigma) \circ \phi(s, \omega, \sigma, x), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma.$$

Além disso, um SDAN ϕ é dito **contínuo** se a aplicação $\phi(t, \omega, \sigma, \cdot)$ é contínua para cada t, ω, σ fixos. Diz-se que ϕ é **conjuntamente contínuo** (em σ e x) se a aplicação $\phi(t, \omega, \cdot, \cdot)$ é contínua para cada t e ω fixos.

Para simplificar, a seguir falaremos de um SDAN sem mencionar os seus fluxos de base. Em seguida, definimos o assim chamado conjunto aleatório, que desempenha um papel central no estudo de sistemas dinâmicos aleatórios.

Definição 4.2. Uma aplicação $D: \Omega \mapsto 2^X \setminus \emptyset, \omega \mapsto D(\omega)$ é chamada um **conjunto aleatório** de X se é mensurável no sentido de que a aplicação $\omega \mapsto \text{dist}(x, D(\omega))$ é $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mensurável para cada $x \in X$. Se cada $D(\omega)$ é um conjunto fechado (ou limitado, compacto, etc.) em X , então D é chamado um **conjunto aleatório fechado** (limitado, compacto, etc.) em X .

O seguinte lema sobre mensurabilidade será útil.

Lema 4.1. [23, Capítulo 2] (1) Uma aplicação $D: \Omega \mapsto 2^X$ é um conjunto mensurável se, e somente se, seu fecho $\omega \mapsto \overline{D(\omega)}$ é um conjunto aleatório fechado.

(2) Uma aplicação $D: \Omega \mapsto 2^X$ tomando valores em subconjuntos fechados de X é mensurável se, e somente se, satisfaz uma das seguintes afirmações:

- para cada $\epsilon > 0$, $\text{Graph}(\mathcal{N}_\epsilon(D))$ é um subconjunto mensurável de $X \times \Omega$, em que $\text{Graph}(\mathcal{N}_\epsilon(D))$ denota o gráfico da ϵ -vizinhança aberta $\omega \mapsto \mathcal{N}_\epsilon(\omega)$ de D ;
- $\text{Graph}(D)$ é um subconjunto mensurável de $X \times \Omega$.

Definição 4.3. Uma aplicação $\hat{D}: \Sigma \times \Omega \rightarrow 2^X \setminus \emptyset, (\sigma, \omega) \mapsto \hat{D}_\sigma(\omega)$ é chamada um **conjunto aleatório não autônomo** de X se para cada $\sigma \in \Sigma, \hat{D}_\sigma(\cdot)$ é um conjunto aleatório no sentido da Definição 4.2. Um conjunto aleatório não autônomo é dito **fechado** (ou limitado, compacto, etc) se cada \hat{D}_σ é um conjunto fechado (ou limitado, compacto, etc).

Note que cada conjunto aleatório pode ser considerado como um conjunto aleatório não autônomo. Quando necessário enfatizar a independência de σ , um conjunto aleatório satisfazendo a Definição 4.2 será dito **autônomo**. Dado dois conjuntos aleatórios não autônomos \hat{D}^1, \hat{D}^2 , escrevemos $\hat{D}^1 \subset \hat{D}^2$ se, e somente se, $\hat{D}_\sigma^1(\omega) \subset \hat{D}_\sigma^2(\omega)$ para todo $\sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega$, e então dizemos que \hat{D}^1 é **menor** que \hat{D}^2 .

Denotamos por \mathcal{D} alguma classe de conjuntos aleatórios autônomos em X satisfazendo

- \mathcal{D} é vizinhança fechada, isto é, para cada $D \in \mathcal{D}$ existe um $\epsilon > 0$ tal que a ϵ -vizinhança fechada $\overline{\mathcal{N}}_\epsilon(D)$ pertence a \mathcal{D} ;
- \mathcal{D} é inclusão fechada, isto é, se $D \in \mathcal{D}$ então cada conjunto aleatório menor que D pertence a \mathcal{D} .

Denotamos por $\hat{\mathcal{D}}$ alguma classe de conjuntos aleatórios não autônomos em X que também é vizinhança fechada e inclusão fechada e tal que $\mathcal{D} \subset \hat{\mathcal{D}}$. Aqui, enfatizamos que $\hat{\mathcal{D}}$ é somente alguma classe de conjuntos aleatórios não autônomos. Assim quando um conjunto aleatório não autônomo é mencionado não necessariamente pertence a $\hat{\mathcal{D}}$. Da mesma forma, um conjunto aleatório autônomo pode não pertencer a \mathcal{D} .

A seguir introduzimos o conceito de \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório para um SDAN.

Definição 4.4. Um conjunto aleatório não autônomo $\hat{K} = \{\hat{K}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ é dito **\mathcal{D} -pullback atraente** sob ϕ se para cada $D \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist} \left(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), \hat{K}_\sigma(\omega) \right) = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega,$$

e este conjunto é dito **\mathcal{D} -pullback absorvente** se para cada $D \in \mathcal{D}$, $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T_D(\omega, \sigma) > 0$ tal que

$$\bigcup_{t \geq T_D(\omega, \sigma)} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \hat{K}_\sigma(\omega).$$

Definição 4.5. Um conjunto aleatório não autônomo $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ chama-se um **\mathcal{D} -atrator cociclo aleatório** (ou **\mathcal{D} -atrator pullback**) para o SDAN ϕ se

- (1) A é compacto,
- (2) A é \mathcal{D} -pullback atraente,
- (3) A é invariante sob ϕ , isto é,

$$\phi(t, \omega, \sigma, A_\sigma(\omega)) = A_{\theta_t\sigma}(\vartheta_t\omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma,$$

- (4) A é o minimal entre todos os conjuntos aleatórios não autônomos fechados que satisfazem (2).

Além disso, o atrator A é dito **uniformemente compacto** se $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ é compacto para cada $\omega \in \Omega$.

Note que em geral um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório não pertence a \mathcal{D} , e assim, a condição de minimalidade aqui é necessária para garantir a unicidade do atrator.

Para cada conjunto aleatório não autônomo não vazio \hat{D} e $\sigma \in \Sigma$, definimos o conjunto *ômega-limite aleatório* $\mathcal{W}(\cdot, \sigma, \hat{D})$ de \hat{D} por

$$\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{D}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{D}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Em particular, para um conjunto aleatório autônomo $D \in \mathcal{D}$ e $\sigma \in \Sigma$,

$$\mathcal{W}(\omega, \sigma, D) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega))}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Conjuntos ômega-limites são importantes na teoria de atratores. É fácil ver a seguinte caracterização.

Lema 4.2. *Para cada $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ e $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$, $y \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{D})$ se, e somente se, existem seqüências $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in \hat{D}_{\theta_{-t_n}\sigma}(\vartheta_{-t_n}\omega)$ tais que $\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n) \rightarrow y$.*

Analogamente temos a seguinte caracterização

Lema 4.3. *Para cada $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ e $D \in \mathcal{D}$, $y \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$ se, e somente se, existem seqüências $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in D(\vartheta_{-t_n}\omega)$ tais que $\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n) \rightarrow y$.*

4.2 Equivalência das definições $\Sigma = \mathring{\mathcal{H}}(g)$ e $\Sigma = \mathbb{R}$

Na seção anterior introduzimos o conceito de SDAN sobre os fluxos de base $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sobre o espaço de símbolo Σ e $\{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sobre o espaço de probabilidade Ω . Um exemplo comum de $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é a família de operadores de translação na reta real, isto é, $\theta.r = r + \cdot$ e $\Sigma = \mathbb{R}$. Outro exemplo comum é a translação de uma função dependente do tempo $g(\cdot)$, isto é, $\theta_t g(\cdot) = g(\cdot + t)$, formando um espaço de símbolo $\Sigma = \mathring{\mathcal{H}}(g) := \{\theta_t g : t \in \mathbb{R}\}$, onde g denota todos os termos determinísticos não autônomos em uma equação de evolução, chamado de *símbolo (determinístico) não autônomo* da equação. Estes dois exemplos foram mostrados ser equivalentes no trabalho de Wang [72], desde que a função g não seja periódica. Nesta seção mostraremos que quando o universo de atração \mathcal{D} é autônomo, os dois exemplos são equivalentes mesmo para g periódica.

A seguir, denotamos os operadores translações sobre \mathbb{R} e sobre $\mathring{\mathcal{H}}(g)$ com a mesma notação θ , o que não irá causar quaisquer confusões. Seja g uma função dependente do tempo tomando valores em algum espaço topológico de tal forma que os operadores translação θ formam um

fluxo sobre $\mathring{\mathcal{H}}(g)$. A fim de distinguir, particularmente nesta seção, chamamos de *cociclo* o SDAN ϕ satisfazendo a Definição 4.1 com $\Sigma = \mathring{\mathcal{H}}(g)$, e por *processo-cociclo* o SDAN ψ satisfazendo a Definição 4.1 com $\Sigma = \mathbb{R}$, e seus \mathcal{D} -atratores aleatórios satisfazendo a Definição 4.5 são chamados de *\mathcal{D} -atrator cociclo aleatório* e *\mathcal{D} -atrator pullback aleatório*, respectivamente.

O seguinte argumento de equivalência é simples de provar.

Teorema 4.1. *Se ϕ é um cociclo, então a aplicação $\psi_g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \Omega \times X \mapsto X$ definida por*

$$\psi_g(t, \tau, \omega, x) = \phi(t, \omega, \theta_\tau g, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, x \in X, \quad (4.1)$$

é um processo-cociclo. Reciprocamente, se ψ_g é um processo-cociclo (com símbolo g), então

$$\phi(t, \omega, \theta_r g, x) = \psi_g(t, r, \omega, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega, \theta_r g \in \Sigma, x \in X, \quad (4.2)$$

define um cociclo com $\Sigma = \mathring{\mathcal{H}}(g)$.

Um cociclo ϕ e um processo-cociclo ψ são ditos *equivalentes* se (4.1) e (4.2) são satisfeitos.

Teorema 4.2. *Suponha que o cociclo ϕ e o processo-cociclo ψ são equivalentes. Então ϕ possui um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório \mathcal{A} se, e somente se, ψ possui um \mathcal{D} -atrator pullback aleatório \mathfrak{A} . Além disso, eles possuem a seguinte relação*

$$\mathfrak{A}(t, \omega) = \mathcal{A}_{\theta_t g}(\omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega. \quad (4.3)$$

Demonstração: Provaremos apenas a condição necessária, uma vez que a recíproca é totalmente análogo. Dado um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório \mathcal{A} de ϕ , provaremos que o conjunto \mathfrak{A} dado por (4.3) é o \mathcal{D} -atrator pullback aleatório de ψ . De fato, a compacidade e mensurabilidade de \mathfrak{A} segue-se diretamente de \mathcal{A} . Pela atração \mathcal{D} -pullback de \mathcal{A} para cada $D \in \mathcal{D}$ temos

$$\begin{aligned} & \text{dist}(\psi_g(t, \tau - t, \vartheta_{-t}\omega, D(\vartheta_{-t}\omega)), \mathfrak{A}(\tau, \omega)) \\ &= \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\theta_\tau g, D(\vartheta_{-t}\omega)), \mathcal{A}_{\theta_\tau g}(\omega)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde segue a atração \mathcal{D} -pullback de \mathfrak{A} . Similarmente, temos a invariância de \mathfrak{A} . Para provar a minimalidade, suponha que é dado outro conjunto aleatório não autônomo \mathfrak{A}' , o qual é \mathcal{D} -pullback atraente sob ψ_g . Então por (4.3) podemos definir um \mathcal{D} -conjunto aleatório não autônomo \mathcal{A}' que devido a (4.4) é \mathcal{D} -pullback atraente sob ϕ . Assim pela propriedade minimal de \mathcal{A} segue que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, e portanto $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ como desejado. ■

O teorema acima estabelece não somente a equivalência entre os dois atratores, mas também uma relação direta entre a dependência do tempo de um atrator e do símbolo não autônomo, tal como a seguinte periodicidade de \mathcal{D} -atratores pullback aleatórios para processo-cociclos, que também foi estudado por Wang [72].

Corolário 4.1. *Suponha que ψ é um processo-cociclo com símbolo não autônomo g , e \mathfrak{A} seu \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório. Se g é tempo periódico, então \mathfrak{A} é tempo periódico, isto é, para algum $T > 0$,*

$$\mathfrak{A}(t, \omega) = \mathfrak{A}(t + T, \omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega.$$

Embora tenhamos mostrado a equivalência entre cociclo e processo-cociclo e entre seus atratores, aqui observamos que é mais intuitivo usar cociclos em aplicações. De fato, dada uma equação de evolução o cociclo é geralmente definido como a solução da equação com tempo inicial fixado em 0, enquanto a definição de um processo-cociclo é um pouco mais confusa. Isto pode ser visto a partir do exemplo da equação estocástica de Navier-Stokes com símbolo não autônomo g estudado na Seção 4.6: se denotarmos por $u_\sigma(t, \tau, \omega, x)$ a solução da equação em t , $\sigma \in \mathring{\mathcal{H}}(g)$ e $\omega \in \Omega$ com dado inicial x tomado em τ , em seguida, o cociclo associado ϕ e o processo-cociclo ψ_g são (comumente mas não unicamente) definidos por

$$\begin{aligned} \phi(t, \omega, \sigma, x) &= u_\sigma(t, 0, \omega, x), \quad \forall t \geq 0, \omega \in \Omega, \sigma \in \mathring{\mathcal{H}}(g), x \in X, \\ \psi_g(s, \tau, \omega, x) &= u_g(s + \tau, \tau, \theta_{-\tau}\omega, x), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, x \in X, \end{aligned}$$

respectivamente, a partir dos quais fica claro que cociclo ϕ tem uma ligação mais direta com as soluções.

4.3 Uma comparação com $\hat{\mathcal{D}}$ -atratores cociclo aleatórios

Nesta seção, comparamos atratores cociclo aleatórios com universos de atração autônomos e não autônomos \mathcal{D} e $\hat{\mathcal{D}}$, respectivamente. Tal assunto para atratores pullback de sistemas dinâmicos deterministas não autônomos foi estudado por Marín-Rubio e Real [62]. Note que para SDA autônomos, Crauel em [22] compara atratores aleatórios com determinísticos e universos de atração aleatórios.

Para começar, definimos $\hat{\mathcal{D}}$ -atratores cociclo aleatórios como se segue. Veja a Definição 4.5 para comparar com \mathcal{D} -atratores cociclo aleatórios.

Definição 4.6. *Um conjunto aleatório não autônomo $\hat{K} = \{\hat{K}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ é chamado **positivamente invariante** sob ϕ se para cada $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$,*

$$\phi(t, \omega, \sigma, \hat{K}_\sigma(\omega)) \subseteq \hat{K}_{\theta_t\sigma}(\vartheta_t\omega), \quad \forall t \geq 0,$$

*e este conjunto é chamado **invariante** sob ϕ se para cada $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$,*

$$\phi(t, \omega, \sigma, \hat{K}_\sigma(\omega)) = \hat{K}_{\theta_t\sigma}(\vartheta_t\omega), \quad \forall t \geq 0.$$

Definição 4.7. Um conjunto aleatório não autônomo $\hat{K} = \{\hat{K}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ chamado \hat{D} -pullback atraente sob ϕ se para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist} \left(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{D}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)), \hat{K}_\sigma(\omega) \right) = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega,$$

e este conjunto é chamado \hat{D} -pullback absorvente se, para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$, $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T_{\hat{D}}(\omega, \sigma) > 0$ tal que

$$\bigcup_{t \geq T_{\hat{D}}(\omega, \sigma)} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{D}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \hat{K}_\sigma(\omega).$$

Definição 4.8. Um conjunto aleatório não autônomo $\hat{A} = \{\hat{A}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma} \in \hat{\mathcal{D}}$ é chamado um \hat{D} -atrator cociclo aleatório (ou \hat{D} -atrator pullback aleatório) para o SDAN ϕ se

- (1) cada $\hat{A}_\sigma(\cdot)$ é um conjunto aleatório compacto,
- (2) \hat{A} é \hat{D} -pullback atraente,
- (3) \hat{A} é invariante sob ϕ .

Como \hat{A} atrai pullback a si mesmo, pois pertence a $\hat{\mathcal{D}}$, a propriedade minimal segue-se diretamente da invariância de \hat{A} , e assim, um \hat{D} -atrator quando existe é único.

Para \hat{D} -atratores cociclo aleatórios, Wang [72, 73] estudou a existência e caracterização por trajetórias completas. O seguinte resultado de existência é bem conhecido.

Lema 4.4. [72, 73] Seja ϕ um SDAN contínuo com um conjunto compacto \hat{D} -pullback atraente $\hat{K} \in \hat{\mathcal{D}}$ e um conjunto fechado \hat{D} -pullback absorvente $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$. Então ϕ possui um único \hat{D} -atrator cociclo aleatório $\hat{A} \in \hat{\mathcal{D}}$ dado por

$$\hat{A}_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B}).$$

Para critério de existência, temos o seguinte teorema, o qual melhora o Lema 4.4 e é conveniente para a análise da relação entre atratores com universos de atrações diferentes.

Teorema 4.3. Seja ϕ um SDAN contínuo com um conjunto compacto \hat{D} -pullback atraente $\hat{K} \in \hat{\mathcal{D}}$. Então ϕ possui um único \hat{D} -atrator cociclo aleatório $\hat{A} \in \hat{\mathcal{D}}$ dado por

$$\hat{A}_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{K}). \quad (4.5)$$

Demonstração: Como \hat{K} é um conjunto compacto \hat{D} -pullback atraente, então a ϵ -vizinhança fechada \hat{K}^ϵ de \hat{K} , isto é,

$$\hat{K}_\sigma^\epsilon(\omega) := \{x \in X : \text{dist}(x, \hat{K}_\sigma(\omega)) \leq \epsilon\}, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega,$$

para algum $\epsilon > 0$, é um conjunto mensurável fechado $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback absorvente para ϕ pertencente a $\hat{\mathcal{D}}$. Assim, pelo Lema 4.4 ϕ possui um único $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório \hat{A} dado por

$$\hat{A}_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{K}^\epsilon).$$

Como $\hat{K} \subset \hat{K}^\epsilon$, segue-se que $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{K}) \subset \hat{A}_\sigma(\omega)$, assim para mostrar (4.5) provaremos que $\hat{A}_\sigma(\omega) \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{K})$. Pela propriedade minimal de \hat{A} temos $\hat{A} \subset \hat{K}$, logo $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{A}) \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{K})$. Portanto, pela invariância de \hat{A} temos que

$$\begin{aligned} \hat{A}_\sigma(\omega) &= \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \hat{A}_\sigma(\omega)} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{A}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))} \\ &= \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{A}) \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{K}), \end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Agora estamos em condições de provar a relação entre \mathcal{D} - e $\hat{\mathcal{D}}$ -atratores cociclo aleatórios. Notemos que sem condições adicionais, os dois atratores não são idênticos, mesmo para sistemas dinâmicos deterministas não autônomos, consulte [62, Exemplo 11].

Proposição 4.1. *Sejam A e \hat{A} respectivamente \mathcal{D} - e $\hat{\mathcal{D}}$ -atratores cociclo aleatórios para um SDAN ϕ . Se $A \in \hat{\mathcal{D}}$, então*

$$A_\sigma(\omega) \subset \hat{A}_\sigma(\omega), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Além disso, se existir algum conjunto aleatório (autônomo) $E \in \mathcal{D}$ tal que para cada $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$ existe um tempo $T_* = T_*(\sigma, \omega) \in \mathbb{R}$ com

$$\hat{A}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega) \subset E(\vartheta_{-t}\omega), \quad \forall t \geq T_*, \quad (4.6)$$

então

$$A_\sigma(\omega) = \hat{A}_\sigma(\omega), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Demonstração: Como $A \in \hat{\mathcal{D}}$ é atraído por \hat{A} , pela invariância de A segue que

$$\text{dist}(A_\sigma(\omega), \hat{A}_\sigma(\omega)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, A_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega), \hat{A}_\sigma(\omega)) = 0.$$

Portanto, $A_\sigma(\omega) \subset \hat{A}_\sigma(\omega)$.

Como $\mathcal{D} \subset \hat{\mathcal{D}}$ segue que \hat{A} é um conjunto \mathcal{D} -pullback atraente bem definido. O Teorema 4.5 (o qual não irá causar prova recorrente) garante que

$$A_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, E), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Por outro lado, pelo Teorema 4.3 e (4.6) temos

$$\hat{A}_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{A}) \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, E) = A_\sigma(\omega), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Portanto, $A_\sigma(\omega) = \hat{A}_\sigma(\omega)$ como desejado. ■

A Proposição 4.1 estabelece que $\hat{\mathcal{D}}$ -atratores cociclo aleatórios podem ser determinados pela atração de conjuntos aleatórios autônomos em \mathcal{D} .

4.4 Critérios de existência e caracterização por trajetórias completas

Nesta seção, estabelecemos alguns critérios de existência e caracterização para \mathcal{D} -atratores. Embora o estudo análogo para $\hat{\mathcal{D}}$ -atratores cociclo aleatórios foi feito por Wang [72, 73], \mathcal{D} -atratores merece um estudo independente desde que nós vimos que um \mathcal{D} -atrator não é em geral um $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator embora $\mathcal{D} \subset \hat{\mathcal{D}}$.

4.4.1 Critério de existência

A seguinte proposição mostra a importância dos conjuntos ômega-limites no estudo de atratores. Observe que o resultado de invariância melhora [72, Lemma 2.17], onde é exigido que o conjunto aleatório D absorva a si mesmo. Inspirado no trabalho de Crauel [22], removemos esta condição aqui.

Proposição 4.2. *Seja \hat{K} um conjunto aleatório não autônomo compacto \mathcal{D} -pullback atraente para um SDAN contínuo ϕ . Então para cada $D \in \mathcal{D}$, $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$ o conjunto ômega-limite $\mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$ é não vazio, compacto e atrai pullback D , isto é,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)) = 0.$$

Além disso, o conjunto ômega-limite é invariante sob ϕ no seguinte sentido

$$\mathcal{W}(\vartheta_t\omega, \theta_t\sigma, D) = \phi(t, \omega, \sigma, \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)), \quad \forall t \geq 0, \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma.$$

Também, para cada conjunto aleatório não autônomo fechado \hat{B} atraindo pullback D temos

$$\mathcal{W}(\omega, \sigma, D) \subset \hat{B}_\sigma(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma.$$

(Note que o conjunto ômega-limite não é necessariamente mensurável, e portanto, não é necessariamente um conjunto aleatório.)

Demonstração: Sejam $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in D(\vartheta_{-t_n}\omega)$, como \hat{K} é \mathcal{D} -pullback atraente temos

$$\text{dist}(\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n), \hat{K}_\sigma(\omega)) \leq \text{dist}(\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, D(\vartheta_{-t_n}\omega)), \hat{K}_\sigma(\omega)) \rightarrow 0.$$

Usando isto e a compacidade de $\hat{K}_\sigma(\omega)$ podemos facilmente ver que existe uma subsequência de $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente e o Lema 4.3 garante que este limite pertence a $\mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$, portanto $\mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$ é não vazio.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$. Pelo Lema 4.3 existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $y_n \in D(\vartheta_{-t_n}\omega)$ tais que

$$d(x_n, \phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, y_n)) \leq \frac{1}{n}. \quad (4.7)$$

Pela atração pullback e a compacidade de \hat{K} deve existir um $x \in X$ e uma subsequência de $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, a qual denotaremos novamente por $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, y_n) \rightarrow x. \quad (4.8)$$

Combinando (4.7), (4.8) e o Lema 4.3 segue-se que $x \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$ e $x_n \rightarrow x$. Portanto $\mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$ é compacto.

Agora provaremos a atração pullback de $\mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$, isto é, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)) = 0.$$

Suponhamos que isto não seja satisfeito. Então existem $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$, $\epsilon > 0$ $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in D(\vartheta_{-t_n}\omega)$ tais que

$$\text{dist}(\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n), \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)) > \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Usando novamente a atração pullback, Lema 4.3 e a compacidade de \hat{K} segue que existe $x \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$ e uma subsequência de $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, a qual é denotada também por $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n) \rightarrow x.$$

Por outro lado, usando esta convergência e (4.9) obtemos que $\text{dist}(x, \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)) \geq \epsilon$, o que é uma contradição pois $x \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$.

Agora provaremos a propriedade de invariância. Notemos que

$$\begin{aligned}
\phi(t, \omega, \sigma, \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)) &= \phi(t, \omega, \sigma, \overline{\cap_{s \geq 0} \cup_{\eta \geq s} \phi(\eta, \vartheta_{-\eta}\omega, \theta_{-\eta}\sigma, D(\vartheta_{-\eta}\omega))}) \\
&\subset \cap_{s \geq 0} \overline{\phi(t, \omega, \sigma, \cup_{\eta \geq s} \phi(\eta, \vartheta_{-\eta}\omega, \theta_{-\eta}\sigma, D(\vartheta_{-\eta}\omega))}) \\
&\subset \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{\eta \geq s} \phi(t, \omega, \sigma, \phi(\eta, \vartheta_{-\eta}\omega, \theta_{-\eta}\sigma, D(\vartheta_{-\eta}\omega))}) \\
&= \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{\eta \geq s} \phi(t + \eta, \vartheta_{-\eta}\omega, \theta_{-\eta}\sigma, D(\vartheta_{-\eta}\omega))} \\
&= \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{\eta \geq s} \phi(t + \eta, \vartheta_{-(t+\eta)} \circ \vartheta_t \omega, \theta_{-(t+\eta)} \circ \theta_t \sigma, D(\vartheta_{-(t+\eta)} \circ \vartheta_t \omega))} \\
&= \cap_{s \geq t} \overline{\cup_{\eta \geq s} \phi(\eta, \vartheta_{-\eta} \circ \vartheta_t \omega, \theta_{-\eta} \circ \theta_t \sigma, D(\vartheta_{-\eta} \circ \vartheta_t \omega))} \\
&= \mathcal{W}(\vartheta_t \omega, \theta_t \sigma, D), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma,
\end{aligned}$$

onde usamos $f(\cap_{\alpha} A_{\alpha}) \subset \cap_{\alpha} f(A_{\alpha})$ para f arbitrária e $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ para f contínua. Reciprocamente, seja $y \in \mathcal{W}(\vartheta_t \omega, \theta_t \sigma, D)$. Então pelo Lema 4.3 existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in D(\vartheta_{t-t_n} \omega)$ tais que

$$\phi(t_n, \vartheta_{-t_n} \vartheta_t \omega, \theta_{-t_n} \theta_t \sigma, x_n) = \phi(t, \omega, \sigma, \phi(t_n - t, \vartheta_{t-t_n} \omega, \theta_{t-t_n} \sigma, x_n)) \rightarrow y$$

Como $t_n - t \rightarrow \infty$ e $x_n \in D(\vartheta_{t-t_n} \omega)$, pela atração pullback e compacidade de \hat{K} existe um $z \in \hat{K}_{\sigma}(\omega)$ e uma subsequência de $\{\phi(t_n - t, \vartheta_{t-t_n} \omega, \theta_{t-t_n} \sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, a qual denotaremos novamente por $\{\phi(t_n - t, \vartheta_{t-t_n} \omega, \theta_{t-t_n} \sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\phi(t_n - t, \vartheta_{t-t_n} \omega, \theta_{t-t_n} \sigma, x_n) \rightarrow z,$$

o que implica que $z \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$ pelo Lema 4.3. Então da continuidade de ϕ segue-se que

$$\phi(t, \omega, \sigma, \phi(t_n - t, \vartheta_{t-t_n} \omega, \theta_{t-t_n} \sigma, x_n)) \rightarrow \phi(t, \omega, \sigma, z).$$

Assim, pela unicidade do limite, temos que $y = \phi(t, \omega, \sigma, z) \in \phi(t, \omega, \sigma, \mathcal{W}(\omega, \sigma, D))$, portanto $\mathcal{W}(\vartheta_t \omega, \theta_t \sigma, D) \subset \phi(t, \omega, \sigma, \mathcal{W}(\omega, \sigma, D))$, e concluímos a invariância.

Suponha que existe um conjunto aleatório não autônomo fechado \hat{B} atraindo pullback D . Então para cada $y \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, D)$, $\forall \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma$, pelo Lema 4.3 existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in D(\vartheta_{-t_n} \omega)$ tais que

$$\phi(t_n, \vartheta_{-t_n} \omega, \theta_{-t_n} \sigma, x_n) \rightarrow y.$$

Por outro lado, pela atração pullback de \hat{B} segue-se que

$$\text{dist}(\phi(t_n, \vartheta_{-t_n} \omega, \theta_{-t_n} \sigma, x_n), \hat{B}_{\sigma}(\omega)) \leq \text{dist}(\phi(t_n, \vartheta_{-t_n} \omega, \theta_{-t_n} \sigma, D(\vartheta_{-t_n} \omega)), \hat{B}_{\sigma}(\omega)) \rightarrow 0,$$

o que implica que $y \in \hat{B}_{\sigma}(\omega)$, pois \hat{B} é fechado. Portanto $\mathcal{W}(\omega, \sigma, D) \subset \hat{B}_{\sigma}(\omega)$ e a prova está completa. ■

Agora estamos em condições de estabelecer o seguinte resultado de existência para D -atratores cociclo.

Teorema 4.4. *Seja ϕ um SDAN contínuo com um conjunto compacto \mathcal{D} -pullback atraente \hat{K} e um conjunto fechado \mathcal{D} -pullback absorvente \hat{B} . Se existe um conjunto aleatório (autônomo) $E \in \mathcal{D}$ tal que para cada $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$ existe um $T_\star = T_\star(\sigma, \omega) \in \mathbb{R}$ com*

$$\hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega) \subset E(\vartheta_{-t}\omega), \quad \forall t \geq T_\star, \quad (4.10)$$

então ϕ possui um único \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ dado por

$$A_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, E), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega. \quad (4.11)$$

Demonstração: Pela Proposição 4.2 segue-se que o conjunto aleatório não autônomo A definido por (4.11) é não vazio, compacto e invariante. Para ver a mensurabilidade, tendo em vista [73, Teorema 2.14] é suficiente provar que

$$A_\sigma(\omega) = \overline{\bigcap_{s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=s}^{\infty} \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, E(\vartheta_{-n}\omega))}, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (4.12)$$

Pela definição de $\mathcal{W}(\omega, \sigma, E)$ segue-se que

$$\overline{\bigcap_{s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=s}^{\infty} \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, E(\vartheta_{-n}\omega))} \subset A_\sigma(\omega).$$

Reciprocamente, como \hat{B} é um conjunto fechado \mathcal{D} -pullback absorvente, pela invariância de A , Proposição 4.2 e (4.10) segue-se que

$$\begin{aligned} A_\sigma(\omega) &= \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, A_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega)) \\ &\subset \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega)) \\ &\subset \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, E(\vartheta_{-n}\omega)), \quad \forall n \geq T_\star. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_\sigma(\omega) \subset \overline{\bigcap_{s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=s}^{\infty} \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, E(\vartheta_{-n}\omega))},$$

donde resulta (4.12).

Agora provaremos que A atrai pullback cada $D \in \mathcal{D}$. Como \hat{B} é \mathcal{D} -pullback absorvente, então para cada $D \in \mathcal{D}$ e $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ existe um $T_D(\omega, \sigma) \geq T_\star$ tal que

$$\bigcup_{t \geq T_D(\omega, \sigma)} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \hat{B}_\sigma(\omega).$$

Por outro lado, pela Proposição 4.2 A atrai pullback E , então para cada $\varepsilon > 0$, $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$ fixos, existe um $\bar{s} = \bar{s}_D(\omega, \sigma) \geq T_D(\omega, \sigma) \geq T_\star$ tal que

$$\text{dist}\left(\phi(\bar{s}, \vartheta_{-\bar{s}}\omega, \theta_{-\bar{s}}\sigma, E(\vartheta_{-\bar{s}}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \text{dist}\left(\phi(t + \bar{s}, \vartheta_{-t-\bar{s}}\omega, \theta_{-t-\bar{s}}\sigma, D(\vartheta_{-t-\bar{s}}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) \\
&= \text{dist}\left(\phi(\bar{s}, \vartheta_{-\bar{s}}\omega, \theta_{-\bar{s}}\sigma, \phi(t, \vartheta_{-t}\vartheta_{-\bar{s}}\omega, \theta_{-t}\theta_{-\bar{s}}\sigma, D(\vartheta_{-t}\vartheta_{-\bar{s}}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) \\
&\leq \text{dist}\left(\phi(\bar{s}, \vartheta_{-\bar{s}}\omega, \theta_{-\bar{s}}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-\bar{s}}\sigma}(\vartheta_{-\bar{s}}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) \\
&\leq \text{dist}\left(\phi(\bar{s}, \vartheta_{-\bar{s}}\omega, \theta_{-\bar{s}}\sigma, E(\vartheta_{-\bar{s}}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) \\
&< \varepsilon, \quad \forall t \geq T_D(\vartheta_{-\bar{s}}\omega, \theta_{-\bar{s}}\sigma),
\end{aligned}$$

assim A atrai pullback D . A propriedade minimal segue da Proposição 4.2. ■

O seguinte teorema estabelece que o conjunto \mathcal{D} -absorvente não é essencial para garantir a existência de um \mathcal{D} -atrator. Os leitores podem compará-lo com o Teorema 4.3 para $\hat{\mathcal{D}}$ -atratores.

Teorema 4.5. *Seja ϕ um SDAN com um conjunto compacto \mathcal{D} -pullback atraente \hat{K} . Se existe um conjunto aleatório (autônomo) $E \in \mathcal{D}$ tal que para cada $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$ existe um $T_\star = T_\star(\sigma, \omega) \in \mathbb{R}$ com*

$$\hat{K}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega) \subset E(\vartheta_{-t}\omega), \quad \forall t \geq T_\star, \quad (4.13)$$

então ϕ possui um único \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ dado por

$$A_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, E), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega. \quad (4.14)$$

Demonstração: Como \mathcal{D} e $\hat{\mathcal{D}}$ são ambos vizinhança fechada e inclusão fechada, existe $\varepsilon > 0$ tal que a ε -vizinhança fechada de $\overline{\mathcal{N}_\varepsilon(E)}$ de E é um conjunto aleatório fechado pertencente a \mathcal{D} e que $\overline{\mathcal{N}_\varepsilon(\hat{K})}$ de \hat{K} pertence a $\hat{\mathcal{D}}$. Além disso, segue de (4.13) que

$$\overline{\mathcal{N}_\varepsilon}(\hat{K}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \overline{\mathcal{N}_\varepsilon}(E(\vartheta_{-t}\omega)), \quad \forall t \geq T_\star.$$

Assim, $\overline{\mathcal{N}_\varepsilon}(\hat{K}) \in \hat{\mathcal{D}}$ é um conjunto \mathcal{D} -pullback absorvente e o Teorema 4.4 implica que ϕ possui um único \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório A dado por

$$A_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, \overline{\mathcal{N}_\varepsilon}(E)).$$

Agora provaremos que $A_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, E)$. Como $E \subset \overline{\mathcal{N}_\varepsilon}(E)$ então $\mathcal{W}(\omega, \sigma, E) \subset A_\sigma(\omega)$. Reciprocamente, pela Proposição 4.2, A é o conjunto não autônomo fechado minimal \mathcal{D} -pullback atraente, então $A \subset \hat{K}$. Consequentemente, $\mathcal{W}(\omega, \sigma, A) \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{K}) \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, E)$, onde a segunda é a inclusão devido à propriedade (4.13) de \hat{K} . Portanto, pela invariância de A temos

$$\begin{aligned}
A_\sigma(\omega) &= \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} A_\sigma(\omega)} = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, A_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))} \\
&= \mathcal{W}(\omega, \sigma, A) \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, E),
\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Observação 4.1. *O Teorema 4.5 mostra uma relação direta entre atratores e conjuntos compactos atraentes (veja também Teorema 4.3). No entanto, a existência de um conjunto compacto atraente é muitas vezes um problema em aberto. Assim, existem outras compacidade dinâmicas na literatura, como a compacidade assintótica, as propriedades flattening e squeezing [56, 45, 27, 21], o que garante que o conjunto ômega-limite de um conjunto \mathcal{D} -pullback absorvente é um conjunto compacto \mathcal{D} -pullback atraente. Trataremos destas propriedades no próximo capítulo.*

4.4.2 Caracterização por trajetórias completas

Nesta seção, caracterizamos \mathcal{D} -atratores cociclo aleatórios por trajetórias \mathcal{D} -completas.

Definição 4.9. *Dado $\sigma \in \Sigma$, uma aplicação $\xi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow X$ é dita uma **trajetória completa** (aleatória) para o SDAN ϕ se $\xi(\vartheta_t\omega, t) = \phi(t - s, \vartheta_s\omega, \theta_s\sigma, \xi(\vartheta_s\omega, s))$ para todo $t \geq s$ e $\omega \in \Omega$. Se existe um conjunto aleatório $B \in \mathcal{D}$ tal que $\cup_{t \in \mathbb{R}} \xi(\cdot, t) \subset B(\cdot)$, então ξ chama-se uma **trajetória \mathcal{D} -completa** (aleatória) para ϕ .*

O seguinte resultado mostra que trajetórias \mathcal{D} -completas estão contidas em \mathcal{D} -atratores cociclo.

Teorema 4.6. *Seja $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ o \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório para um SDAN ϕ , então*

$$\left\{ \xi(\omega, 0) : \xi \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\} \subset A_\sigma(\omega), \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Demonstração: Seja ξ uma trajetória \mathcal{D} -completa para ϕ , suponha que $B \in \mathcal{D}$ é um conjunto aleatório tal que $\cup_{t \in \mathbb{R}} \xi(\cdot, t) \subset B(\cdot)$. Então pela atração pullback de A temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(\xi(\omega, 0), A_\sigma(\omega)) &= \text{dist}\left(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \xi(\vartheta_{-t}\omega, -t)), A_\sigma(\omega)\right) \\ &\leq \text{dist}\left(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \cup_{s \in \mathbb{R}} \xi(\vartheta_{-t}\omega, s)), A_\sigma(\omega)\right) \\ &\leq \text{dist}\left(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, B(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Assim, $\xi(\omega, 0) \in A_\sigma(\omega)$ e a prova está completa. ■

Lema 4.5. *Seja $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ o \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório para um SDAN ϕ , então*

$$A_\sigma(\omega) \subset \left\{ \xi(\omega, 0) : \xi \text{ é uma trajetória completa para } \phi \right\}, \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Demonstração: Seja $y \in A_\sigma(\omega)$, então devemos mostrar que existe uma trajetória completa $\xi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow X$ para ϕ tal que $\xi(\omega, 0) = y$. Pela invariância de A temos

$$A_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\omega}) = \phi(t, \vartheta_{-t}\tilde{\omega}, \theta_{-t}\sigma, A_{\theta_{-t}\tilde{\sigma}}(\vartheta_{-t}\tilde{\omega})), \quad \forall t \geq 0, \tilde{\omega} \in \Omega, \tilde{\sigma} \in \Sigma. \quad (4.15)$$

Como $y \in A_\sigma(\omega)$, então de (4.15) com $t = 1$ segue que existe um $z_1 \in A_{\theta_{-1}\sigma}(\vartheta_{-1}\omega)$ tal que

$$y = \phi(1, \vartheta_{-1}\omega, \theta_{-1}\sigma, z_1),$$

e além disso, pela propriedade do cociclo obtemos

$$\phi(t, \vartheta_{-1}\omega, \theta_{-1}\sigma, z_1) = \phi(t-1, \omega, \sigma, \phi(1, \vartheta_{-1}\omega, \theta_{-1}\sigma, z_1)) = \phi(t-1, \omega, \sigma, y), \quad \forall t \geq 1.$$

Note também que pela invariância de A temos $\phi(t, \vartheta_{-1}\omega, \theta_{-1}\sigma, z_1) \in A_{\theta_{t-1}\sigma}(\vartheta_{t-1}\omega)$.

Substituindo $\tilde{\omega}$ por $\vartheta_{-1}\omega$ e $\tilde{\sigma}$ por $\theta_{-1}\sigma$ em (4.15) obtemos

$$A_{\theta_{-1}\sigma}(\vartheta_{-1}\omega) = \phi(t, \vartheta_{-t-1}\omega, \theta_{-t-1}\sigma, A_{\theta_{-t-1}\sigma}(\vartheta_{-t-1}\omega)), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.16)$$

Como $z_1 \in A_{\theta_{-1}\sigma}(\vartheta_{-1}\omega)$, então usando (4.16) com $t = 1$ existe $z_2 \in A_{\theta_{-2}\sigma}(\vartheta_{-2}\omega)$ tal que

$$z_1 = \phi(1, \vartheta_{-2}\omega, \theta_{-2}\sigma, z_2),$$

e, além disso, pela a propriedade do cociclo segue que

$$\phi(t, \vartheta_{-2}\omega, \theta_{-2}\sigma, z_2) = \phi(t-1, \vartheta_{-1}\omega, \theta_{-1}\sigma, z_1), \quad \forall t \geq 1.$$

Usando novamente a invariância de A temos que $\phi(t, \vartheta_{-2}\omega, \theta_{-2}\sigma, z_2) \in A_{\theta_{t-2}\sigma}(\vartheta_{t-2}\omega)$.

Continuando esse processo, obteremos uma sequência $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $z_n \in A_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega)$ tal que

$$y = \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, z_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\phi(t, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, z_n) \in A_{\theta_{t-n}\sigma}(\vartheta_{t-n}\omega), \quad \forall t \geq 0,$$

e com

$$\phi(t, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, z_n) = \phi(t-1, \vartheta_{1-n}\omega, \theta_{1-n}\sigma, z_{n-1}), \quad \forall t \geq 1. \quad (4.17)$$

Defina a aplicação $\xi(\vartheta_\cdot\omega, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\xi(\vartheta_t\omega, t)$ é o valor comum de $\phi(t+n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, z_n)$ para todo $n \geq -t$. Então $\xi(\omega, 0) = y$, e (4.17) implica que $\xi(\vartheta_t\omega, t) \in A_{\theta_t\sigma}(\vartheta_t\omega)$, além disso, ξ é uma trajetória completa para ϕ . De fato, para todo $t \geq s \in \mathbb{R}$ e $n \geq -s \geq -t$ vemos que

$$\begin{aligned} \phi(t-s, \vartheta_s\omega, \theta_s\sigma, \xi(\vartheta_s\omega, s)) &= \phi(t-s, \vartheta_s\omega, \theta_s\sigma, \phi(s+n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, z_n)) \\ &= \phi(t+n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma, z_n) = \xi(\vartheta_t\omega, t). \end{aligned}$$

A prova está completa. ■

Corolário 4.2. *Seja $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ o \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório para um SDAN ϕ . Se existe um conjunto aleatório $B \in \mathcal{D}$ tal que $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\cdot) \subset B(\cdot)$. Então*

$$A_\sigma(\omega) = \left\{ \xi(\omega, 0) : \xi \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\}, \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Demonstração: Seja $y \in A_\sigma(\omega)$, pelo Lema 4.5 existe uma trajetória completa ξ de ϕ tal que $\xi(\omega, 0) = y$ e $\xi(\vartheta_t \omega, t) \in A_{\theta_t \sigma}(\vartheta_t \omega)$. Como

$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \xi(\omega, t) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \xi(\vartheta_t \vartheta_{-t} \omega, t) \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_{\theta_t \sigma}(\omega) \subset B(\omega),$$

então ξ é uma trajetória \mathcal{D} -completa, logo

$$A_\sigma(\omega) \subset \left\{ \xi(\omega, 0) : \xi \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\}, \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

A inclusão inversa segue-se pelo Teorema 4.6. ■

Na verdade, provamos o seguinte resultado um pouco mais forte.

Teorema 4.7. *Seja $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ o \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório para um SDAN contínuo ϕ . Se existe um conjunto aleatório $B \in \mathcal{D}$ tal que $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\cdot) \subset B(\cdot)$. Então*

$$A_{\theta_t \sigma}(\vartheta_t \omega) = \left\{ \xi(\vartheta_t \omega, t) : \xi \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\}, \forall t \in \mathbb{R}, \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Demonstração: Para cada $T \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \Sigma$ e $\omega \in \Omega$ fixos, seja $\sigma' = \theta_T \sigma$ e $\omega' = \vartheta_T \omega$. Então pelo Corolário 4.2,

$$A_{\theta_T \sigma}(\vartheta_T \omega) = A_{\sigma'}(\omega') = \left\{ \xi'(\omega', 0) : \xi' \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\}.$$

Como ξ' é uma trajetória \mathcal{D} -completa para ϕ se, e somente se, ξ definida por

$$\xi(\omega, t) := \xi'(\vartheta_{-T} \omega, t - T), \quad \forall \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R},$$

é uma trajetória \mathcal{D} -completa para ϕ , temos

$$A_{\theta_T \sigma}(\vartheta_T \omega) = \left\{ \xi(\vartheta_T \omega, T) : \xi \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\}.$$

A prova está completa. ■

4.5 Continuidade em símbolos determinísticos não autônomos

A característica não autônoma de um atrator cociclo para um SDAN é representada pela σ -dependência. Neste seção, estudamos a continuidade em σ para \mathcal{D} -atratores cociclo aleatórios, isto é, a continuidade da aplicação $\sigma \mapsto A_\sigma(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

4.5.1 Semicontinuidade superior em símbolos

Definição 4.10. Um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ é *semicontínuo superiormente em símbolos (determinísticos)* se para cada $\omega \in \Omega$,

$$\text{dist}(A_\sigma(\omega), A_{\sigma_0}(\omega)) \rightarrow 0, \quad \text{sempre que } \sigma \rightarrow \sigma_0 \text{ em } \Sigma.$$

Teorema 4.8. Seja $A = \{A_\sigma(\omega)\}_{\sigma \in \Sigma}$ um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório para um SDAN ϕ . Então

- (1) Se a aplicação $\phi(t, \omega, \cdot, \cdot)$ é conjuntamente contínua para cada t e ω fixos, além disso, se existe um conjunto aleatório compacto $D \in \mathcal{D}$ tal que $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\cdot) \subseteq D(\cdot)$, então A é semicontínuo superiormente.
- (2) Se A é semicontínuo superiormente e Σ é compacto, então $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ é compacto para cada ω .

Demonstração: (1) Provaremos por contradição. Se a aplicação $\sigma \rightarrow A_\sigma(\omega)$ não é semicontínua superiormente em σ , deve existir um $\delta > 0$ e uma sequência $\sigma_n \rightarrow \sigma$ tal que

$$\text{dist}(A_{\sigma_n}(\omega), A_\sigma(\omega)) \geq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela compacidade do atrator existe uma sequência $x_n \in A_{\sigma_n}(\omega)$ tal que

$$\text{dist}(x_n, A_\sigma(\omega)) = \text{dist}(A_{\sigma_n}(\omega), A_\sigma(\omega)) \geq \delta, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.18)$$

Por outro lado, pela atração pullback de A existe um $T \geq 0$ tal que

$$\text{dist}\left(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, D(\vartheta_{-T}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) \leq \delta/3.$$

Além disso, pela invariância de A existe uma sequência $y_n \in A_{\theta_{-T}\sigma_n}(\vartheta_{-T}\omega) \subset D(\vartheta_{-T}\omega)$ tal que

$$x_n = \phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma_n, y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Como D é compacto existe uma subsequência de y_n , a qual denotaremos também por y_n tal que $y_n \rightarrow y$ para algum $y \in D(\vartheta_{-T}\omega)$. Assim, como as aplicações $(\sigma, x) \mapsto \phi(T, \omega, \sigma, x)$ e $\sigma \mapsto \theta_{-T}\sigma$ são ambas contínuas, existe um N suficientemente grande tal que

$$\text{dist}\left(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma_n, y_n), \phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, y)\right) \leq \delta/3, \quad \forall n \geq N.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_n, A_\sigma(\omega)) &= \text{dist}\left(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma_n, y_n), A_\sigma(\omega)\right) \\ &\leq \text{dist}\left(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma_n, y_n), \phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, y)\right) \\ &\quad + \text{dist}\left(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, D(\vartheta_{-T}\omega)), A_\sigma(\omega)\right) \\ &\leq 2\delta/3, \quad \forall n \geq N, \end{aligned}$$

o que contradiz (4.18).

(2) Para provar a compacidade do conjunto $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ tomamos uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ e, sem perda de generalidade seja $x_n \in A_{\sigma_n}(\omega)$. Como Σ é compacto, existe uma subsequência de σ_n , a qual denotaremos ainda por σ_n tal que $\sigma_n \rightarrow \sigma$ para algum $\sigma \in \Sigma$. Portanto, pela semicontinuidade superior de A temos

$$\text{dist}(x_n, A_\sigma(\omega)) \leq \text{dist}(A_{\sigma_n}(\omega), A_\sigma(\omega)) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $A_\sigma(\omega)$ é compacto, existe uma subsequência de x_n , a qual denotaremos novamente por x_n tal que $x_n \rightarrow x$ para algum $x \in A_\sigma(\omega)$. Portanto, $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ é um conjunto compacto e a prova está completa. ■

Observação 4.2. *É importante observar que, embora sob a semicontinuidade superior de A termos provado a compacidade de $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$, no entanto, não podemos considerar a aplicação $\omega \mapsto \cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ como um conjunto aleatório compacto, visto que a $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(X))$ -mensurabilidade em geral não é válida.*

Quando Ω é um singleton, (isto é, Ω contém apenas um elemento) então o SDAN ϕ reduz-se a um sistema dinâmico determinístico não autônomo. Para este caso determinístico, temos o seguinte corolário que melhora [46, Teorema 3.34].

Corolário 4.3. *Suponhamos que Σ é compacto, Ω é um singleton e $A = \{A_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ é o \mathcal{D} -atrator cociclo para um sistema dinâmico (determinístico) não autônomo contínuo ϕ , o qual também é contínuo em símbolos. Então A é semicontínuo superiormente em σ se, e somente se, $\cup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma$ é compacto.*

4.5.2 Semicontinuidade inferior em símbolos

Relembramos pelo Teorema 4.7 que um atrator cociclo A para um SDAN pode ser caracterizado por trajetórias completas

$$A_{\theta_t \sigma}(\vartheta_t \omega) = \left\{ \xi(\vartheta_t \omega, t) : \xi \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Assim, quando o SDAN gera trajetórias completas contínuas (isto ocorre quando o SDAN é contínuo com relação ao tempo), isto é, cada aplicação $t \mapsto \xi(\vartheta_t \omega, t)$ é contínua, a semicontinuidade da aplicação $t \mapsto A_{\theta_t \sigma}(\vartheta_t \omega)$ torna-se simples. Agora estamos interessados na semicontinuidade inferior da aplicação $\sigma \mapsto A_\sigma(\omega)$.

Definição 4.11. Um conjunto aleatório não autônomo $\hat{D} = \{\hat{D}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ é **semicontínuo inferiormente em símbolos** se para toda sequência $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ com $\sigma_n \rightarrow \sigma_0$ tivermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\hat{D}_{\sigma_0}(\omega), \hat{D}_{\sigma_n}(\omega)) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Lembramos que dado $\sigma \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, $\overline{\mathcal{N}_\varepsilon}(\sigma)$ denota a ε -vizinhança fechada de σ em Σ .

Definição 4.12. [26] Um conjunto aleatório autônomo B é dito **uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente** sob ϕ se para cada $D \in \mathcal{D}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), B(\omega)) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Note-se que pela propriedade minimal de um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório vemos que, para qualquer conjunto aleatório autônomo fechado uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega) \subset B(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Além disso, se B é compacto, então pelo Teorema 4.8 segue-se que o atrator cociclo A de um SDAN conjuntamente contínuo é semicontínuo superiormente. Portanto, neste caso a semicontinuidade inferior em símbolos, na verdade, significa a continuidade com relação a distância de Hausdorff.

A seguir veremos a relação entre a semicontinuidade inferior em símbolos e a propriedade equi-atraente do atrator cociclo. A idéia de equi-atração é inspirada por [26, 51–53], no qual a semicontinuidade inferior de uma sequência de atratores foi estudada.

Teorema 4.9. Suponhamos que um SDAN ϕ é conjuntamente contínuo em Σ e X , e que ϕ possui um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente $B \in \mathcal{D}$ e um \mathcal{D} -atrator cociclo A . Então para todo $r > 0$, o conjunto $A^{[r]} = \{A_\sigma^{[r]}(\omega)\}_{\sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega}$ definido por

$$A_\sigma^{[r]}(\omega) := \bigcup_{\sigma' \in \overline{\mathcal{N}_r}(\sigma)} A_{\sigma'}(\omega), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega,$$

possui a propriedade **\mathcal{D} -equi-atraente**: para todo $D \in \mathcal{D}$, $\omega \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$, existe $T = T(D, \omega, \varepsilon) \geq 0$ tal que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma^{[r]}(\omega)) < \varepsilon, \quad \forall t \geq T. \quad (4.19)$$

Demonstração: Seja $\varepsilon < r$, e seja $\mathbb{X} = \Sigma \times X$ munido com a métrica $d_{\mathbb{X}}$ dada por

$$d_{\mathbb{X}}((\sigma, x), (\sigma', x')) = d(x, x') + d_\Sigma(\sigma, \sigma').$$

Então $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ é um espaço métrico completo. Considere a aplicação $\pi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ (a qual é chamada cociclo skew-product) dada por

$$\pi(t, \omega, (\sigma, x)) = (\theta_t \sigma, \phi(t, \omega, \sigma, x)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \Omega, (\sigma, x) \in \mathbb{X}.$$

Usando o fato de que ϕ é um SDAN conjuntamente contínuo em σ e x segue-se que π define um SDA em \mathbb{X} .

Como $B \in \mathcal{D}$ é um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente, pela propriedade de inclusão fechada do universo \mathcal{D} , existe um $\delta > 0$ tal que a δ -vizinhança fechada $\overline{\mathcal{N}}_{\delta}(B)$ pertence a \mathcal{D} e é um conjunto uniformemente \mathcal{D} -pullback absorvente, isto é, para cada $D \in \mathcal{D}$ e $\omega \in \Omega$ existe $T_0 = T_0(D, \omega) > 0$ tal que

$$\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \overline{\mathcal{N}}_{\delta}(B(\omega)), \quad \forall t \geq T_0, \sigma \in \Sigma. \quad (4.20)$$

Além disso, segue-se de [26, Teorema 4.16] que o SDAN ϕ possui um \mathcal{D} -atrator uniforme aleatório, e de [26, Proposições 4.3 e 4.14] o conjunto aleatório compacto \mathbb{A} em \mathbb{X} dado por

$$\mathbb{A}(\omega) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \{\sigma\} \times A_{\sigma}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

atrai pullback $\mathbb{D} := \Sigma \times \overline{\mathcal{N}}_{\delta}(B)$ sob π . (Na verdade, \mathbb{A} é o atrator aleatório para π que atrai pullback todos os conjuntos aleatórios próprios de \mathbb{X} [26].) Assim, para $\omega \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ fixos, existe $T_1 = T_1(\mathbb{D}, \omega, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\text{dist}_{\mathbb{X}}(\pi(t, \vartheta_{-t}\omega, \mathbb{D}(\vartheta_{-t}\omega)), \mathbb{A}(\omega)) < \varepsilon/2, \quad t \geq T_1. \quad (4.21)$$

Dado $\sigma \in \Sigma$, podemos escrever $\mathbb{A}(\omega)$ como

$$\mathbb{A}(\omega) = \left(\bigcup_{\sigma' \in \overline{\mathcal{N}}_r(\sigma)} \{\sigma'\} \times A_{\sigma'}(\omega) \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma' \notin \overline{\mathcal{N}}_r(\sigma)} \{\sigma'\} \times A_{\sigma'}(\omega) \right) =: \mathbb{A}^{[\text{r}]}(\omega) \cup \mathbb{A}^{\text{H}}(\omega).$$

Tomamos arbitrariamente $x \in \overline{\mathcal{N}}_{\delta}(B(\omega))$ e $\sigma \in \Sigma$. De (4.21) segue-se que

$$\text{dist}_{\mathbb{X}}(\pi(t, \vartheta_{-t}\omega, (\theta_{-t}\sigma, x)), \mathbb{A}(\omega)) < \varepsilon/2, \quad \forall t \geq T_1.$$

Portanto existe um $\chi = (\sigma', y) \in \mathbb{A}^{[\text{r}]}(\omega) \cup \mathbb{A}^{\text{H}}(\omega)$ (dependendo de x e σ) tal que

$$d_{\mathbb{X}}((\sigma, \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, x)), \chi) < 3\varepsilon/4, \quad \forall t \geq T_1. \quad (4.22)$$

Note que se $\chi \in \mathbb{A}^{\text{H}}(\omega)$ então pela definição de $d_{\mathbb{X}}$

$$d_{\mathbb{X}}((\sigma, \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, x)), \chi) > d_{\Sigma}(\sigma, \sigma') \geq r > \varepsilon, \quad \forall t \geq T_1, \quad (4.23)$$

contradizendo (4.22), donde resulta que $\chi \in \mathbb{A}^{[r]}(\omega)$, e conseqüentemente temos $\sigma' \in \overline{\mathcal{N}_r(\sigma)}$ e $y \in A_{\sigma'}(\omega) \subset A_\sigma^{[r]}(\omega)$. Portanto, de (4.22) segue-se que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, x), A_\sigma^{[r]}(\omega)) &\leq \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, x), y) \\ &\leq d_{\mathbb{X}}((\sigma, \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, x)), \chi) \\ &< 3\varepsilon/4, \quad \forall t \geq T_1. \end{aligned}$$

Como x e σ são arbitrários segue-se que

$$\text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \overline{\mathcal{N}_\delta(B(\vartheta_{-t}\omega))}), A_\sigma^{[r]}(\omega)) < 3\varepsilon/4 < \varepsilon, \quad \forall t \geq T_1, \sigma \in \Sigma.$$

Combinando isto com (4.20) obtemos (4.19). A prova está completa. \blacksquare

Teorema 4.10. *Seja Σ compacto e suponhamos que um SDAN ϕ é conjuntamente contínuo em Σ e X , e que ϕ possui um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente $B \in \mathcal{D}$ e um \mathcal{D} -atrator cociclo A . Se o atrator cociclo A é contínuo em símbolos, então A é \mathcal{D} -equi-atraente, isto é, para todo $D \in \mathcal{D}$, $\omega \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$, existe um $T = T(D, \omega, \varepsilon) \geq 0$ tal que*

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma(\omega)) < \varepsilon, \quad \forall t \geq T. \quad (4.24)$$

Demonstração: Como Σ é compacto, a aplicação $\sigma \mapsto A_\sigma(\omega)$ é uniformemente contínua. Portanto, para todo $\omega \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ existe um $r > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A_{\sigma'}(\omega), A_\sigma(\omega)) < \varepsilon/2, \quad \forall \sigma', \sigma \in \Sigma, d_\Sigma(\sigma', \sigma) \leq r,$$

o que implica que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A_\sigma^{[r]}(\omega), A_\sigma(\omega)) < \varepsilon/2, \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (4.25)$$

Por outro lado, para todo $D \in \mathcal{D}$, pelo Teorema 4.9 vemos que $\{A_\sigma^{[r]}(\omega)\}_{\sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega}$ equi-atrai D . Portanto, existe um $T = T(D, \omega, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma^{[r]}(\omega)) < \varepsilon/2, \quad \forall t \geq T. \quad (4.26)$$

Assim, de (4.25) e (4.26) concluímos que

$$\begin{aligned} &\text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma(\omega)) \\ &\leq \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma^{[r]}(\omega)) + \text{dist}(A_\sigma^{[r]}(\omega), A_\sigma(\omega)) \\ &< \varepsilon, \quad \forall t \geq T, \sigma \in \Sigma. \end{aligned}$$

A prova está completa. \blacksquare

Definição 4.13. Um SDAN ϕ é dito **uniformemente fortemente contínuo em símbolos** se para todo conjunto compacto $B \subset X$, $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x \in B} d(\phi(t, \omega, \sigma_1, x), \phi(t, \omega, \sigma_2, x)) < \varepsilon, \quad \text{sempre que } d_\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) < \delta.$$

Teorema 4.11. Seja Σ compacto e suponhamos que um SDAN ϕ é conjuntamente contínuo em Σ e X , e que ϕ possui um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente $B \in \mathcal{D}$ e um \mathcal{D} -atrator cociclo A . Se o SDAN ϕ é uniformemente fortemente contínuo em símbolos, então A é \mathcal{D} -equi-atraente (isto é, satisfazendo (4.24)) se, e somente se, a aplicação $\sigma \mapsto A_\sigma(\omega)$ é contínua com relação a distância de Hausdorff.

Demonstração: Pelo Teorema 4.10 precisamos somente para provar a condição suficiente. Suponhamos que o atrator cociclo A é \mathcal{D} -equi-atraente, como $B \in \mathcal{D}$ é um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente, então a minimalidade de atrator cociclo A implica que

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega) \subset B(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Assim, como A equi-atraí B , para cada $\varepsilon > 0$, $\omega \in \Omega$, existe um $T = T(B, \omega, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, B(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma(\omega)) < \varepsilon/2, \quad \forall t \geq T,$$

donde resulta que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, A_{\theta_{-T}\sigma'}(\vartheta_{-T}\omega)), A_\sigma(\omega)) < \varepsilon/2, \quad \forall \sigma' \in \Sigma. \quad (4.27)$$

Por outro lado, levando em conta que ϕ é uniformemente fortemente contínuo, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{x \in B(\vartheta_{-T}\omega)} d(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma', x), \phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, x)) < \varepsilon/2, \quad \forall \sigma', \sigma \text{ com } d_\Sigma(\sigma', \sigma) < \delta.$$

Assim, para todo $\sigma', \sigma \in \Sigma$ com $d_\Sigma(\sigma', \sigma) < \delta$ segue-se que

$$\text{dist}(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma', A_{\theta_{-T}\sigma'}(\vartheta_{-T}\omega)), \phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, A_{\theta_{-T}\sigma'}(\vartheta_{-T}\omega))) < \varepsilon/2. \quad (4.28)$$

Portanto, de (4.27) e (4.28), para todo $\sigma', \sigma \in \Sigma$ com $d_\Sigma(\sigma', \sigma) < \delta$ temos

$$\begin{aligned} \text{dist}(A_{\sigma'}(\omega), A_\sigma(\omega)) &= \text{dist}(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma', A_{\theta_{-T}\sigma'}(\vartheta_{-T}\omega)), A_\sigma(\omega)) \\ &\leq \text{dist}(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma', A_{\theta_{-T}\sigma'}(\vartheta_{-T}\omega)), \phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, A_{\theta_{-T}\sigma'}(\vartheta_{-T}\omega))) \\ &\quad + \text{dist}(\phi(T, \vartheta_{-T}\omega, \theta_{-T}\sigma, A_{\theta_{-T}\sigma'}(\vartheta_{-T}\omega)), A_\sigma(\omega)) < \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.29)$$

e assim

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(A_{\sigma'}(\omega), A_\sigma(\omega)) = \max\{\text{dist}(A_{\sigma'}(\omega), A_\sigma(\omega)), \text{dist}(A_\sigma(\omega), A_{\sigma'}(\omega))\} < \varepsilon$$

como desejado. A prova está completa. ■

Observação 4.3. Nos teoremas 4.9-4.11 usamos a hipótese de um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente. Podemos modificar ligeiramente a prova substituindo essa hipótese assumindo um conjunto uniformemente \mathcal{D} -absorvente $D \in \mathcal{D}$ e um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -atraente K (não necessariamente pertence a \mathcal{D}). Além disso, seguindo a mesma idéia como na Observação 4.1, a hipótese sobre o compacto uniformemente \mathcal{D} -atraente K pode ser substituído pela compacidade assintótica, flattening e squeezing uniforme, etc, de ϕ . Veja também [26, Teorema 3.11].

4.6 Aplicação às equações de Navier-Stokes 2D

Neste capítulo, estudamos uma equação de Navier-Stokes 2D como um exemplo concreto para aplicar nossa análise teórica. Primeiro, introduzimos as funções de translação compacta e limitada, as quais desempenham um papel fundamental no estudo de atratores uniformes [16, 26].

4.6.1 Forças externas de translação limitada e espaço de símbolo

Seja \mathcal{O} um conjunto aberto limitado de \mathbb{R}^2 com fronteira suave $\partial\mathcal{O}$. Tomamos uma função $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; (L^2(\mathcal{O}))^2)$, e definimos o *espaço de símbolo* Σ como o envoltório fraco da força externa g , isto é,

$$\Sigma = \mathcal{H}(g) = \overline{\{g(\cdot + s) : s \in \mathbb{R}\}},$$

onde o fecho acima é tomado sob a topologia da convergência fraca local, isto é, $\sigma_n \rightarrow \sigma$ em Σ se, e somente se, para todo $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$ limitado,

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v(s), \sigma_n(s) - \sigma(s) \rangle_{(L^2(\mathcal{O}))^2} ds \rightarrow 0, \quad \forall v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; (L^2(\mathcal{O}))^2).$$

Definimos um fluxo $\{\theta_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ em Σ por

$$\theta_s \sigma(\cdot) := \sigma(\cdot + s).$$

Definição 4.14. Dizemos que $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; (L^2(\mathcal{O}))^2)$ é uma função de *translação limitada* se

$$\eta(g) := \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} |g(s)|^2 ds < \infty. \quad (4.30)$$

Para as funções de translação limitada temos a seguinte proposição.

Proposição 4.3. [26, Proposições 6.1 e 6.2]. *Suponha que $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; (L^2(\mathcal{O}))^2)$ é uma função de translação limitada. Então*

(i) g é uma função de **translação compacta**, isto é, o espaço de símbolo Σ definido acima é compacto;

(ii) Σ é invariante sob θ_t , isto é, $\theta_t \Sigma = \Sigma, \forall t \in \mathbb{R}$;

(iii) toda $\sigma \in \mathcal{H}(g)$ é uma função de translação limitada, e $\eta(\sigma) \leq \eta(g)$;

(iv) para toda constante positiva ε tem-se que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon s} |\sigma(s)|^2 ds \leq \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\varepsilon}}. \quad (4.31)$$

A partir de agora, assumiremos que $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; (L^2(\mathcal{O}))^2)$ é uma função de translação limitada. Pela proposição acima segue-se que a família $\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ define um fluxo de base sobre o compacto Σ . Além disso, similarmente a [26, Seção 6.1] podemos ver que Σ é de fato um espaço métrico completo separável, e a aplicação $t \mapsto \theta_t \sigma$ é (\mathbb{R}, Σ) -contínua.

4.6.2 Preliminares sobre equações de Navier-Stokes 2D

Sejam $(H, |\cdot|)$ e $(V, \|\cdot\|)$ espaços de Hilbert definidos na Seção 2.1 (para mais detalhes sobre esses espaços consulte Temam [68] e suas referências).

Consideramos a equação estocástica de Navier-Stokes bidimensional sobre \mathcal{O} com força externa de translação limitada e ruído aditivo escalar

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = \sigma(t) + \psi \frac{\partial W(t)}{\partial t}, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (4.32)$$

com a condição inicial-fronteira

$$\begin{cases} u(t, x)|_{t=0} = u_0(x), \\ u(t, x)|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \end{cases} \quad (4.33)$$

em que $\nu > 0$ é uma constante positiva, $\sigma \in \Sigma$ e Σ é o espaço de símbolo definido previamente como o envoltório fraco da função de translação limitada g . O termo $W(t)$ é um movimento Browniano escalar em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ especificado mais adiante.

Definimos o operador de Stokes $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ como $Au = -\mathcal{P} \Delta u$, sendo \mathcal{P} a projeção ortogonal em $(L^2(\mathcal{O}))^2$ sobre H e $D(A) = (H^2(\mathcal{O}))^2 \cap V$. O operador A é um operador positivo auto-adjunto em H com inversa compacta (veja Temam [70]), é conhecido pela teoria espectral que existe uma sequência $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ satisfazendo

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$$

e uma sequência de vetores $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \subset D(A)$, a qual é ortonormal em H e tal que

$$Ae_j = \lambda_j e_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Observamos que

$$\|v\|^2 \geq \lambda_1 |v|^2, \quad \forall v \in V. \quad (4.34)$$

Além disso, definimos o operador bilinear B como

$$\begin{aligned} \langle B(u, v), w \rangle &= \int_{\mathcal{O}} w(x) \cdot (u \cdot \nabla) v \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\mathcal{O}} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx, \quad \forall u \in H, v \in V, w \in H. \end{aligned}$$

Pela condição de incompressibilidade, temos que

$$\langle B(u, v), v \rangle = 0, \quad \langle B(u, v), w \rangle = -\langle B(u, w), v \rangle, \quad \forall u \in V, v, w \in (H_0^1(\mathcal{O}))^2.$$

Assumimos que

$$\psi \in (W^{1,\infty}(\mathcal{O}))^2 \cap D(A).$$

Com estas preliminares, a equação (4.32) pode ser escrita na seguinte forma abstrata

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = \sigma(t) + \psi \frac{dW(t)}{dt}. \quad (4.35)$$

Para descrever o espaço de probabilidade que será utilizado neste trabalho, escrevemos

$$\Omega = \{\omega \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \omega(0) = 0\}.$$

Seja \mathcal{F} a σ -álgebra de Borel induzida pela topologia compacto-aberta de Ω , e \mathbb{P} a medida de Wiener correspondente em (Ω, \mathcal{F}) . Definimos um grupo $\{\vartheta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ agindo sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ por

$$\vartheta_t \omega(\cdot) = \omega(\cdot + t) - \omega(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \Omega. \quad (4.36)$$

Inspirado por [24], para algum $\alpha > 0$ (especificado mais adiante), consideremos

$$z(\omega) = - \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} dW(\tau), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Então $z(\omega)$ é uma solução estacionária da equação unidimensional de Ornstein-Uhlenbeck

$$dz(\vartheta_t \omega) + \alpha z(\vartheta_t \omega) dt = dW(t). \quad (4.37)$$

Sabe-se a partir de [2, 18, 35] que existe um subconjunto ϑ -invariante $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de medida completa tal que $z(\vartheta_t \omega)$ é contínua em t para todo $\omega \in \tilde{\Omega}$ e, além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{|z(\vartheta_t \omega)|}{|t|} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} |z(\vartheta_{-t} \omega)| = 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (4.38)$$

$$\mathbb{E} \left(e^{\epsilon \int_s^{s+t} |z(\vartheta_r \omega)| dr} \right) \leq e^{\frac{\epsilon t}{\sqrt{\alpha}}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \alpha^3 \geq \epsilon^2 \geq 0, \forall t \geq 0, \quad (4.39)$$

e

$$\mathbb{E} (|z(\vartheta_s \omega)|^r) = \frac{\Gamma \left(\frac{1+r}{2} \right)}{\sqrt{\pi \alpha^r}}, \quad \forall r > 0, \forall s \in \mathbb{R}, \quad (4.40)$$

em que \mathbb{E} denota a esperança e Γ é a função Gamma. Daqui em diante, não distinguiremos $\tilde{\Omega}$ e Ω .

Considere o seguinte problema determinístico com coeficientes aleatórios

$$\frac{dv}{dt} + \nu Av + B(v + z(\vartheta_t \omega)\psi, v + z(\vartheta_t \omega)\psi) = \sigma(t) + \alpha z(\vartheta_t \omega)\psi - \nu z(\vartheta_t \omega)A\psi \quad (4.41)$$

com condição inicial

$$v(0) = v_0, \quad (4.42)$$

O seguinte resultado é standard, veja [16, Capítulo VI.1] e suas referências.

Lema 4.6. *Para cada $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$, e $v_0 \in H$, o problema (4.41)-(4.42) possui uma única solução $v(t, \omega, \sigma, v_0) \in C(\mathbb{R}^+; H) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; V)$ e $\partial_t v \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; V')$. Além disso, a aplicação $v(t, \omega, \cdot, \cdot)$ é $(\Sigma \times H, H)$ -contínua.*

Agora, definimos um SDAN $\phi : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \Sigma \times H \rightarrow H$ para o problema estocástico (4.32). Dados $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ e $u_0 \in H$, definimos

$$\phi(t, \omega, \sigma, u_0) = u(t, \omega, \sigma, u_0) := v(t, \omega, \sigma, u_0 - z(\omega)\psi) + z(\vartheta_t \omega)\psi, \quad (4.43)$$

em que v é a solução de (4.41)-(4.42). Então, levando em conta (4.37) e $\psi \in D(A)$ vemos que $u(t)$ é uma solução de (4.32)-(4.33). Além disso, a aplicação ϕ define um SDAN conjuntamente contínuo.

A seguir, estudamos atratores cociclo aleatórios temperados para a equação de Navier-Stokes. Lembramos que um conjunto aleatório não autônomo \hat{D} de H é dito temperado, quando é limitado e para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\epsilon t} |\hat{D}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)|^2 = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega. \quad (4.44)$$

Da mesma forma, para uma variável aleatória não autônoma r , ou seja, um conjunto aleatório não autônomo com valor real de $\Omega \times \Sigma$ em \mathbb{R} é dita temperada, se para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\epsilon t} |r_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)| = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Conjuntos aleatórios temperados autônomos e variáveis aleatórias temperadas são definidos de forma análoga. Sejam

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \left\{ D : D \text{ é um conjunto aleatório autônomo temperado de } H \right\}, \\ \hat{\mathcal{D}} &= \left\{ \hat{D} : \hat{D} \text{ é um conjunto aleatório não autônomo temperado de } H \right\}.\end{aligned}$$

Então os dois universos \mathcal{D} e $\hat{\mathcal{D}}$ são ambos vizinhança e inclusão fechada.

4.6.3 Estimativas uniformes de soluções

Nesta seção, estabelecemos estimativas uniformes para as soluções da equação de Navier-Stokes. Observe que, como $\mathcal{D} \subset \hat{\mathcal{D}}$, todas as estimativas contidas nesta seção são válidas para soluções com dados iniciais em \mathcal{D} , embora trabalhamos somente em $\hat{\mathcal{D}}$.

Lema 4.7. *Para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T = T(\hat{D}, \omega) > 0$, tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, a estimativa*

$$\begin{aligned}|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|^2 &\leq R_1(\omega, \sigma) \\ &:= 1 + c \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + |\sigma(s)|^2 + 1) ds\end{aligned}\quad (4.45)$$

é uniforme em $v_0 \in \hat{D}$ e $t \geq T$, em que $c_0 = (|\psi| + 1)\|\nabla\psi\|_{(L^\infty)^2}$ e c é uma constante positiva.

Demonstração: Tomando o produto interno da equação (4.41) e v em H obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v|^2 + \nu \|v\|^2 &\leq |\langle B(v + z(\vartheta_t\omega)\psi), v + z(\vartheta_t\omega)\psi \rangle, v \rangle| + |\sigma(t)| |v| \\ &\quad + \alpha |z(\vartheta_t\omega)| |\psi| |v| + \nu |z(\vartheta_t\omega)| |\psi| |v|.\end{aligned}$$

Como $\langle B(\xi, \eta), \eta \rangle = 0$ e $\psi \in (W^{1,\infty}(\mathcal{O}))^2$, temos

$$\begin{aligned}|\langle B(v + z(\vartheta_t\omega)\psi), v + z(\vartheta_t\omega)\psi \rangle, v \rangle| &= |\langle B(v + z(\vartheta_t\omega)\psi), z(\vartheta_t\omega)\psi \rangle, v \rangle| \\ &\leq \|\nabla\psi\|_{(L^\infty)^2} |z(\vartheta_t\omega)| |v|^2 + |\psi| \|\nabla\psi\|_{(L^\infty)^2} |z(\vartheta_t\omega)|^2 |v|.\end{aligned}$$

Denotamos $c_0 = (|\psi| + 1)\|\nabla\psi\|_{(L^\infty)^2}$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v|^2 + \nu \|v\|^2 &\leq c_0 |z(\vartheta_t\omega)| |v|^2 + c_0 |z(\vartheta_t\omega)|^2 |v| + |\sigma(t)| |v| \\ &\quad + \alpha c_0 |z(\vartheta_t\omega)| |v| + c |z(\vartheta_t\omega)| |v|,\end{aligned}\quad (4.46)$$

sendo que daqui em diante c denotará uma constante positiva que depende somente de ψ e ν e pode mudar seu valor caso necessário. Usando (4.34) e a desigualdade de Young, temos

$$\frac{d}{dt} |v|^2 + \nu \|v\|^2 \leq c_0 |z(\vartheta_t\omega)| |v|^2 + c |z(\vartheta_t\omega)|^4 + c |\sigma(t)|^2 + c, \quad (4.47)$$

e assim,

$$\frac{d}{dt}|v|^2 + \nu\lambda_1|v|^2 \leq c_0|z(\vartheta_t\omega)||v|^2 + c|z(\vartheta_t\omega)|^4 + c|\sigma(t)|^2 + c. \quad (4.48)$$

Aplicando o lema de Gronwall em (4.48) obtemos

$$\begin{aligned} |v(t, \omega, \sigma, v_0)|^2 &\leq e^{\int_0^t (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} |v_0|^2 \\ &\quad + c \int_0^t e^{\int_s^t (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + |\sigma(s)|^2 + 1) ds. \end{aligned}$$

Substituindo ω por $\vartheta_{-t}\omega$ e σ por $\theta_{-t}\sigma$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} |v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|^2 &\leq e^{\int_0^t (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)|) dr} |v_0|^2 \\ &\quad + c \int_0^t e^{\int_s^t (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_{r-t}\omega)|) dr} (|z(\vartheta_{s-t}\omega)|^4 + |\sigma(s-t)|^2 + 1) ds \\ &\leq e^{\int_{-t}^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} |v_0|^2 \\ &\quad + c \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + |\sigma(s)|^2 + 1) ds. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Como $|z(\vartheta_t\omega)|$ é um processo estacionário e ergódico, pelo Teorema ergódico tem-se que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_{-s}^0 |z(\vartheta_t\omega)| dt = E(|z(\omega)|).$$

Portanto, existe $s_0(\omega) > 0$ tal que

$$\frac{1}{s} \int_{-s}^0 |z(\vartheta_t\omega)| dt \leq 2E(|z(\omega)|) \leq \frac{2}{\sqrt{2\alpha}}, \quad \forall s \geq s_0(\omega). \quad (4.50)$$

Seja $\alpha > 0$ suficientemente grande para que

$$\frac{2}{\sqrt{2\alpha}} \leq \frac{\nu\lambda_1}{2c_0}, \quad (4.51)$$

de modo que (4.50) implica

$$e^{\int_{-s}^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} \leq e^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}s}, \quad \forall s \geq s_0(\omega). \quad (4.52)$$

Como $v_0 \in \hat{D}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)$ e \hat{D} é temperado, levando em conta (4.52), (4.44) e (4.49) segue-se que existe $T = T(\omega, \hat{D}) > 0$ tal que

$$|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|^2 \leq 1 + c \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + |\sigma(s)|^2 + 1) ds,$$

para todo $t \geq T$. A prova está completa. ■

Lema 4.8. Para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T = T(\hat{D}, \omega) > 0$ dado pelo Lema 4.7 tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, a estimativa

$$\int_{t-1}^t \|v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 ds \leq cR_2(\omega, \sigma) \quad (4.53)$$

é uniforme para $v_0 \in \hat{D}$ e $t \geq T + 1$, em que c é uma constante positiva e $R_2(\omega, \sigma)$ é uma variável aleatória não autônoma dada por (4.54).

Demonstração: Integrando (4.47) sobre o intervalo $(t - 1, t)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t-1}^t \|v(s, \omega, \sigma, v_0)\|^2 ds &\leq c \int_{t-1}^t |z(\vartheta_s\omega)| |v(s, \omega, \sigma, v_0)|^2 ds \\ &+ c \int_{t-1}^t (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + |\sigma(s)|^2 + 1) ds + |v(t-1, \omega, \sigma, v_0)|^2. \end{aligned}$$

Substituindo ω por $\vartheta_{-t}\omega$ e σ por $\theta_{-t}\sigma$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{t-1}^t \|v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 ds &\leq c \int_{t-1}^t |z(\vartheta_{s-t}\omega)| |v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|^2 ds \\ &+ c \int_{t-1}^t (|z(\vartheta_{s-t}\omega)|^4 + |\sigma(s-t)|^2) ds + |v(t-1, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|^2 + c. \end{aligned}$$

Assim, para todo $t \geq T + 1$, e levando em conta o Lema 4.7, concluímos que

$$\int_{t-1}^t \|v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 ds \leq cR_2(\omega, \sigma)$$

com

$$\begin{aligned} R_2(\omega, \sigma) &:= \int_{-1}^0 |z(\vartheta_s\omega)| R_1(\vartheta_s\omega, \theta_s\sigma) ds \\ &+ \int_{-1}^0 (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + |\sigma(s)|^2) ds + R_1(\vartheta_{-1}\omega, \theta_{-1}\sigma). \end{aligned} \quad (4.54)$$

A prova está completa. ■

Lema 4.9. Para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$ e $\omega \in \Omega$, existe um $T = T(\hat{D}, \omega) > 0$ dado pelo Lema 4.7 e uma variável aleatória não autônoma $R_3(\omega, \sigma)$ tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, a estimativa

$$\|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 \leq R_3(\omega, \sigma)$$

é uniforme em $v_0 \in \hat{D}$ e $t \geq T + 1$, em que c é uma constante positiva.

Demonstração: Tomando o produto interno de (4.41) com Av em H e usando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \nu |Av|^2 &= (\sigma(t), Av) + \alpha(z(\vartheta_t(\omega))\psi, Av) - \nu(z(\vartheta_t(\omega))A\psi, Av) \\
&\quad - (B(v + z(\vartheta_t\omega)\psi), v + z(\vartheta_t\omega)\psi), Av) \\
&\leq \frac{\nu}{2} |Av|^2 + c|\sigma(t)|^2 + c|z(\vartheta_t\omega)\psi|^2 + c|z(\vartheta_t\omega)A\psi|^2 \\
&\quad + |(B(v + z(\vartheta_t\omega)\psi), v + z(\vartheta_t\omega)\psi), Av)|.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Como $|\langle B(\eta, \xi, \varrho) \rangle| \leq |\eta|^{1/2} |A\eta|^{1/2} \|\xi\| |\varrho|$ para cada $\eta \in D(A)$, $\xi \in V$ e $\varrho \in H$, (veja [70, p. 106]), temos

$$\begin{aligned}
&|(B(v + z(\vartheta_t\omega)\psi), v + z(\vartheta_t\omega)\psi), Av)| \\
&\leq |v + z(\vartheta_t\omega)\psi|^{1/2} |Av + z(\vartheta_t\omega)A\psi|^{1/2} \|v + z(\vartheta_t\omega)\psi\| |Av| \\
&\leq \frac{\nu}{4} |Av|^2 + c|v + z(\vartheta_t\omega)\psi| |Av + z(\vartheta_t\omega)A\psi| \|v + z(\vartheta_t\omega)\psi\|^2 \\
&\leq \frac{\nu}{2} |Av|^2 + c|v + z(\vartheta_t\omega)\psi|^2 \|v\|^4 + c|v + z(\vartheta_t\omega)\psi|^2 \|z(\vartheta_t\omega)\psi\|^4 \\
&\quad + c|v + z(\vartheta_t\omega)\psi| \|z(\vartheta_t\omega)A\psi\| \|v + z(\vartheta_t\omega)\psi\|^2.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|v(t, \omega, \sigma, v_0)\|^2 \leq c\mathcal{M}(t, \omega, \sigma, v_0) + c\mathcal{N}(t, \omega, \sigma, v_0) \|v\|^2,$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(t, \omega, \sigma, v_0) &= c|\sigma(t)|^2 + c|z(\vartheta_t\omega)\psi|^2 + c|z(\vartheta_t\omega)A\psi|^2 + c|v + z(\vartheta_t\omega)\psi|^2 \|z(\vartheta_t\omega)\psi\|^4 \\
&\quad + c|v + z(\vartheta_t\omega)\psi| \|z(\vartheta_t\omega)A\psi\| \|v + z(\vartheta_t\omega)\psi\|^2, \\
\mathcal{N}(t, \omega, \sigma, v_0) &= c|v + z(\vartheta_t\omega)\psi|^2 \|v\|^2.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Pela desigualdade de Gronwall para $s \in (t-1, t)$, obtemos

$$\|v(t, \omega, \sigma, v_0)\|^2 \leq ce^{\int_{t-1}^t c\mathcal{N}(r, \omega, \sigma, v_0) dr} \left(\|v(s, \omega, \sigma, v_0)\|^2 + \int_{t-1}^t \mathcal{M}(r, \omega, \sigma, v_0) dr \right). \tag{4.58}$$

Agora integrando (4.58) com respeito a s sobre $(t-1, t)$ e substituindo ω e σ por $\vartheta_{-t}\omega$ e $\theta_{-t}\sigma$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
&\|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 \leq ce^{\int_{t-1}^t c\mathcal{N}(r, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0) dr} \times \\
&\quad \times \left(\int_{t-1}^t \|v(s, \vartheta_{s-t}\omega, \theta_{s-t}\sigma, v_0)\|^2 ds + \int_{t-1}^t \mathcal{M}(r, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0) dr \right).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Notamos que pelos Lemas 4.7 e 4.8, para todo $t \geq T + 1$

$$\begin{aligned} & \int_{t-1}^t \mathcal{N}(r, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0) dr \\ & \leq c \int_{t-1}^t (R_1(\vartheta_{s-t}\omega, \theta_{s-t}\sigma) + |z(\vartheta_{s-t}\omega)\psi|^2) \|v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 ds \\ & \leq c \sup_{s \in (-1, 0)} (R_1(\vartheta_s\omega, \theta_s\sigma) + |z(\vartheta_s\omega)\psi|^2) R_2(\omega, \sigma), \end{aligned} \quad (4.60)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{t-1}^t \mathcal{M}(r, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0) dr \leq c \int_{-1}^0 (|\sigma(s)|^2 + |z(\vartheta_s\omega)\psi|^2 + |z(\vartheta_s\omega)A\psi|^2) ds \\ & + c \sup_{s \in (-1, 0)} (R_1(\vartheta_s\omega, \theta_s\sigma) + |z(\vartheta_s\omega)\psi|^2) \|z(\vartheta_s\omega)\psi\|^4 \\ & + c \sup_{s \in (-1, 0)} (\sqrt{R_1(\vartheta_s\omega, \theta_s\sigma)} + |z(\vartheta_s\omega)\psi|) |z(\vartheta_s\omega)A\psi| (R_2(\omega, \sigma) + \|z(\vartheta_s\omega)\psi\|^2). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Levando em conta (4.59)-(4.61) tem-se que

$$\|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 \leq R_3(\omega, \sigma), \quad t \geq T + 1, \quad (4.62)$$

com $R_3(\omega, \sigma)$ dado por

$$\begin{aligned} R_3(\omega, \sigma) & := e^{c \sup_{s \in (-1, 0)} (R_1(\vartheta_s\omega, \theta_s\sigma) + |z(\vartheta_s\omega)\psi|^2) R_2(\omega, \sigma)} \left(R_2(\omega, \sigma) \right. \\ & + c \int_{-1}^0 (|\sigma(s)|^2 + |z(\vartheta_s\omega)\psi|^2 + |z(\vartheta_s\omega)A\psi|^2) ds \\ & + c \sup_{s \in (-1, 0)} (R_1(\vartheta_s\omega, \theta_s\sigma) + |z(\vartheta_s\omega)\psi|^2) \|z(\vartheta_s\omega)\psi\|^4 \\ & \left. + c \sup_{s \in (-1, 0)} (\sqrt{R_1(\vartheta_s\omega, \theta_s\sigma)} + |z(\vartheta_s\omega)\psi|) |z(\vartheta_s\omega)A\psi| (R_2(\omega, \sigma) + \|z(\vartheta_s\omega)\psi\|^2) \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

A prova está completa. ■

Tendo em vista (4.43) e os Lemas 4.7 e 4.9 temos as seguintes estimativas para as soluções de (4.43).

Corolário 4.4. *Para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T = T(\hat{D}, \omega) > 1$ tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, a solução u da equação estocástica de Navier-Stokes (4.35) satisfaz*

$$\begin{aligned} |u(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, u_0)|^2 & \leq cR_1(\omega, \sigma) + c|z(\omega)|^2, \\ \|u(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, u_0)\|^2 & \leq cR_3(\omega, \sigma) + c|z(\omega)|^2, \end{aligned}$$

uniformemente em $u_0 \in \hat{D}$ e $t \geq T$, em que $R_1(\omega, \sigma)$ é dado por (4.45), isto é,

$$R_1(\omega, \sigma) := 1 + c \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + |\sigma(s)|^2 + 1) ds, \quad (4.64)$$

é uma variável aleatória não autônoma temperada, $R_3(\omega, \sigma)$ é uma variável aleatória não autônoma dada por (4.63) e c é uma constante positiva.

4.6.4 Atratores cociclo temperados

Para cada $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$, definimos

$$\begin{aligned}\hat{B}_\sigma(\omega) &= \{u \in H : |u|^2 \leq cR_1(\omega, \sigma) + c|z(\omega)|^2\}, \\ \hat{K}_\sigma(\omega) &= \{u \in V : \|u\|^2 \leq cR_3(\omega, \sigma) + c|z(\omega)|^2\},\end{aligned}\tag{4.65}$$

sendo que as variáveis aleatórias não autônomas $R_1(\omega, \sigma)$ e $R_3(\omega, \sigma)$ e a constante positiva c são especificadas no Corolário 4.4. Claramente, \hat{B} é um conjunto aleatório não autônomo temperado pertencente a $\hat{\mathcal{D}}$, e como V é compactamente imerso em H , então \hat{K} é um conjunto aleatório não autônomo compacto de H . O Corolário 4.4 estabelece que \hat{B} e \hat{K} são ambos conjuntos $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback absorventes. Mas, não é claro que R_3 é temperada, e assim \hat{K} possivelmente não pertence a $\hat{\mathcal{D}}$. Este fato faz com que seja complexo de analisar a existência do \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório para a equação de Navier-stokes. No entanto, para $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório, é simples obter o seguinte resultado de existência pelo Lema 4.4.

Teorema 4.12. *O SDAN ϕ gerado pela equação estocástica de Navier-Stokes (4.43) com força externa de translação limitada possui um $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório $\hat{A} = \{\hat{A}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ em H dado por*

$$\hat{A}_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B}), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.\tag{4.66}$$

Para ver a existência de um atrator de \mathcal{D} -atrator cociclo, considere o termo dependente de σ envolvido em $R_1(\omega, \sigma)$ dado por (4.64)

$$\int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} |\sigma(s)|^2 ds = \int_{-s_0}^0 + \int_{-\infty}^{-s_0},$$

o qual foi dividido em duas partes em $s_0 = s_0(\omega) > 0$ dado por (4.50). Por (4.52) e pela Proposição 4.3 (iv), As duas partes são limitadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\int_{-s_0}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} |\sigma(s)|^2 ds &\leq e^{\int_{-s_0}^0 (-\frac{3\nu\lambda_1}{4} + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} \int_{-s_0}^0 e^{-\int_s^0 \frac{\nu\lambda_1}{4}dr} |\sigma(s)|^2 ds \\ &\leq e^{\int_{-\infty}^0 (-\frac{3\nu\lambda_1}{4} + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{\nu\lambda_1}{4}s} |\sigma(s)|^2 ds \\ &\leq e^{\int_{-\infty}^0 (-\frac{3\nu\lambda_1}{4} + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{4}}},\end{aligned}$$

e

$$\int_{-\infty}^{-s_0} e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} |\sigma(s)|^2 ds \leq \int_{-\infty}^{-s_0} e^{\frac{\nu\lambda_1}{2}s} |\sigma(s)|^2 ds \leq \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}}},$$

em que $\eta(g)$ é uma constante positiva dada em (4.30). Portanto, se definirmos

$$G(\omega) = e^{\int_{-\infty}^0 (-\frac{3\nu\lambda_1}{4} + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{4}}} + \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}}},\tag{4.67}$$

então G é uma variável aleatória (autônoma) temperada tal que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} |\sigma(s)|^2 ds \leq G(\omega).$$

Portanto, para a variável aleatória não autônoma R_1 definida por (4.64), obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in \Sigma} R_1(\omega, \sigma) &\leq cG(\omega) + c \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + 1) ds \\ &=: R(\omega). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Isto significa que o conjunto aleatório autônomo E definido por

$$E(\omega) := \{u \in H : |u|^2 \leq R(\omega) + c|z(\omega)|^2\} \quad (4.69)$$

é temperado, e portanto, pertence a \mathcal{D} , e é tal que $\cup_{\sigma \in \Sigma} \hat{B}_\sigma(\omega) \subset E(\omega)$.

Desta forma, podemos provar o seguinte resultado de existência sobre \mathcal{D} -atratores cociclo para a equação de Navier-Stokes.

Teorema 4.13. *O SDAN ϕ gerado pela equação estocástica de Navier-Stokes (4.43) com força externa de translação limitada possui um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ em H dado por*

$$A_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, E) \quad (4.70)$$

$$= \left\{ \xi(\omega, 0) : \xi \text{ é uma trajetória } \mathcal{D}\text{-completa para } \phi \right\}, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega. \quad (4.71)$$

Além disso, o \mathcal{D} -atrator A e o $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator \hat{A} dado pelo Teorema 5.6 são iguais, isto é,

$$A_\sigma(\omega) = \hat{A}_\sigma(\omega), \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Demonstração: Uma vez que temos mostrado que $E(\omega)$ é um conjunto aleatório fechado temperado pertencente a \mathcal{D} e $\cup_{\sigma \in \Sigma} \hat{B}_\sigma(\cdot) \subset E(\cdot)$, pelo Teorema 4.5 segue-se que o SDAN ϕ gerado pela equação (4.43) possui um \mathcal{D} -atrator cociclo aleatório $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ com a caracterização (4.70). Como o $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório \hat{A} é menor que o conjunto $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback absorvente \hat{B} , então \hat{A} é tal que $\cup_{\sigma \in \Sigma} \hat{A}_\sigma(\cdot) \subset \cup_{\sigma \in \Sigma} \hat{B}_\sigma(\cdot) \subset E(\cdot)$, portanto pelo Corolário 4.2 obtemos a caracterização (4.71). Finalmente, pela Proposição 4.1 os dois atratores são iguais. A prova está completa. ■

Observação 4.4. *O resultado $A = \hat{A}$ mostra que o atrator cociclo temperado é completamente determinado pela atração pullback de conjuntos aleatórios autônomos temperados.*

Para provar outras propriedades do \mathcal{D} -atrator cociclo A , fazemos uso da teoria de atratores uniformes aleatórios estabelecida em [26]. Primeiro, observe que o conjunto aleatório temperado E definido por (4.69) é um conjunto uniformemente \mathcal{D} -absorvente, isto é, para todo $\omega \in \Omega$ e $D \in \mathcal{D}$ existe um $T = T(\omega, D) > 0$ (aqui pode ser escolhido como aquele dado no Lema 4.7) tal que

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)) \subset E(\omega), \quad \forall t \geq T.$$

Note-se também que, $\sup_{\sigma \in \Sigma} R_3(\omega, \sigma)$ é limitado por R_1 e R_2 , assim, é simples ver que existe um conjunto aleatório autônomo K de V contendo $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \hat{K}_\sigma(\omega)$ (em que \hat{K} é dado por (4.65)). Além disso, pela imersão compacta de Sobolev e pela propriedade de absorção de \hat{K} , segue que K é um conjunto aleatório compacto (mas não temperado) o qual é uniformemente \mathcal{D} -absorbing, e portanto, uniformemente \mathcal{D} -atraente, isto é, para cada $D \in \mathcal{D}$ e $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), K(\omega)) = 0. \quad (4.72)$$

Portanto, o seguinte lema é aplicável.

Lema 4.10. [26, Teoremas 3.5 e 4.15] *Sejam Σ um espaço métrico compacto separável e ϕ um SDAN conjuntamente contínuo em Σ e X . Se ϕ possui um conjunto compacto uniformemente \mathcal{D} -atraente K e um conjunto fechado uniformemente \mathcal{D} -absorvente $E \in \mathcal{D}$, então ϕ possui um único atrator uniforme aleatório $A \in \mathcal{D}$, o qual é o conjunto aleatório compacto (autônomo) minimal de H uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente. Além disso, o atrator uniforme aleatório A e o \mathcal{D} -atrator cociclo $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ possuem a relação*

$$A(\omega) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Teorema 4.14. *O atrator cociclo $A = \{A_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ dado no Teorema 4.13 para o SDAN ϕ gerado pela equação estocástica de Navier-Stokes (4.43) com força externa de translação limitada possui as seguintes propriedades:*

- (i) a aplicação $\omega \mapsto \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ é mensurável, e é um conjunto aleatório compacto de H ;
- (ii) a aplicação $\omega \mapsto \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\omega)$ é uniformemente \mathcal{D} -pullback atraente no sentido de (4.72);
- (iii) A é semicontínuo superiormente em $\sigma \in \Sigma$, isto é, para cada $\omega \in \Omega$,

$$\text{dist}(A_\sigma(\omega), A_{\sigma_0}(\omega)) \rightarrow 0, \quad \text{sempre que } \sigma \rightarrow \sigma_0 \text{ em } \Sigma;$$

(iv) para todo $\omega \in \Omega$ e $r > 0$, o conjunto $\{A_\sigma^{[r]}(\omega)\}_{\sigma \in \Sigma}$ definido por $A_\sigma^{[r]}(\omega) := \bigcup_{d_\Sigma(\sigma', \sigma) \leq r} A_{\sigma'}(\omega)$ possui a propriedade equi-atraente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\sigma \in \Sigma} \text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, D(\vartheta_{-t}\omega)), A_\sigma^{[r]}(\omega)) = 0, \quad \forall D \in \mathcal{D}.$$

Demonstração: Os itens (i) e (ii) seguem do Lema 4.10, (iii) segue-se pelo Teorema 4.8, finalmente (iv) segue-se pelo Teorema 4.9 e observação 4.3. ■

Observação 4.5. As propriedades do \mathcal{D} -atrator cociclo A no Teorema 4.14 são válidas para o $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo \hat{A} dado por (4.66), uma vez que são iguais pelo Teorema 4.13.

Observação 4.6. Através da teoria de atrator uniforme aleatório, provamos a mensurabilidade e compacidade da união $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma(\cdot)$ de todas as seções de um atrator cociclo, o que parece novo na literatura. Na verdade, uma vez que Σ é um espaço métrico completo separável, essas propriedades seriam diretas se tivéssemos a semicontinuidade inferior de $\sigma \mapsto A_\sigma(\omega)$. No entanto, embora na Seção 4.5.2 termos uma condição equi-atraente equivalente a essa semicontinuidade inferior, parece ainda ser difícil de verificar em aplicações usuais.

Capítulo 5

Propriedades flattening e de contração para um SDAN

Neste capítulo, introduzimos a noção de propriedade flattening e de contração (do inglês “squeezing” property) para um SDAN. Tais propriedades são chamadas pullback flattening e propriedade de contração cociclo aleatória (PCCA), respectivamente. Provamos que a PCCA é uma condição suficiente para provar um resultado de modos determinantes e a dimensionalidade finita de conjuntos aleatórios invariantes de um SDAN. Também provamos que em espaços de Banach uniformemente convexos a pullback flattening é equivalente as compacidade assintótica e ômega-limite de um SDAN. Além disso, provamos que a pullback flattening é implicada pela PCCA nestes espaços. Finalmente, aplicamos estes resultados teóricos às equações de Navier-Stokes 2D.

5.1 Flattening para SDAN

Iniciamos esta seção definindo a medida de não-compacidade que será utilizada neste texto.

Definição 5.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico e B um subconjunto limitado de X . A **medida de não-compacidade de Kuratowski** $\kappa(B)$ de B é definida por*

$$\kappa(B) = \inf\{\delta > 0 : B \text{ possui uma cobertura finita por conjuntos de diâmetro } \leq \delta\}.$$

O seguinte lema resume algumas das propriedades básicas desta medida de não-compacidade que serão utilizadas neste trabalho (veja [29]).

Lema 5.1. *A medida de não-compacidade de Kuratowski κ em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\kappa(B) = 0$ se, e somente se, \bar{B} é compacto;
 - (ii) $\kappa(B_1 + B_2) \leq \kappa(B_1) + \kappa(B_2)$;
 - (iii) Se $B_1 \subset B_2$, então $\kappa(B_1) \leq \kappa(B_2)$;
 - (iv) $\kappa(B_1 \cup B_2) \leq \max \{ \kappa(B_1), \kappa(B_2) \}$;
 - (v) $\kappa(\bar{B}) = \kappa(B)$;
 - (vi) Se $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ são subconjuntos não vazios, fechados e limitados de X tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(F_n) = 0$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ é um conjunto não vazio e compacto de X .
- Além disso, se X admite a decomposição $X = X_1 \oplus X_2$ com $\dim X_1 < \infty$ e $P : X \rightarrow X_1$, $Q : X \rightarrow X_2$ projeções. Então
- (vii) $\kappa(B(\epsilon)) = 2\epsilon$, em que $B(\epsilon)$ é uma bola de raio ϵ ;
 - (viii) $\kappa(B) < \epsilon$ para todo subconjunto B de X para o qual o diâmetro de $Q(B)$ é menor que ϵ .

Definição 5.2. Um conjunto aleatório não autônomo \hat{D} de um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é dito **temperado**, quando é limitado e para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\epsilon t} \|\hat{D}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)\| = 0, \forall \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma,$$

em que $\|\hat{D}_\sigma(\omega)\| = \sup_{x \in \hat{D}_\sigma(\omega)} \|x\|$.

Definição 5.3. Uma variável aleatória não autônoma \hat{r} , a saber, um conjunto aleatório não autônomo com valores em \mathbb{R} é dita **temperada**, se para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\epsilon t} |\hat{r}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)| = 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma.$$

Conjuntos aleatórios temperados autônomos e variáveis aleatórias são definidos de forma análoga. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, neste capítulo consideramos a seguinte classe

$$\hat{\mathcal{D}} = \left\{ \hat{D} : \hat{D} \text{ é um conjunto aleatório não autônomo temperado de } X \right\}.$$

Portanto, $\hat{\mathcal{D}}$ é vizinhança fechada e inclusão fechada.

Sabemos que a existência de um conjunto fechado \hat{D} -pullback absorvente e de um conjunto compacto \hat{D} -pullback atraente garante a existência de um atrator cociclo aleatório (veja Teorema 4.4). No entanto, para sistemas dinâmicos em dimensão infinita é tarefa difícil mostrar

a existência de um conjunto compacto atraente. Este motivo nos leva a definir outros tipos de compacidades.

Inspirados nas idéias de Kloeden e Langa em [45] introduzimos o conceito de flattening para um SDAN.

Definição 5.4. Um SDAN ϕ em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é chamado $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening se para cada $\epsilon > 0$, $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ e para todo conjunto aleatório não autônomo $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$, existe $T_0 = T_0(\epsilon, \omega, \sigma, \hat{B}) > 0$ e um subespaço de dimensão finita X_1 de X tal que

$$(i) \bigcup_{t \geq T_0} P\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \text{ é limitado, e}$$

$$(ii) \left\| (I - P) \left(\bigcup_{t \geq T_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) \right\| < \epsilon,$$

em que $P : X \rightarrow X_1$ é uma projeção limitada.

Definição 5.5. Um SDAN ϕ em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é dito $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback ômega-limite compacto se para cada $\epsilon > 0$, $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ e para todo conjunto aleatório não autônomo $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$, existe $T_1 = T_1(\epsilon, \omega, \sigma, \hat{B}) > 0$ tal que

$$\kappa \left(\bigcup_{t \geq T_1} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) < \epsilon.$$

Definição 5.6. Um SDAN ϕ em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ é dito $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback assintoticamente compacto se para cada $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$, $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$, cada sequência $t_n \rightarrow \infty$, e cada sequência $x_n \in \hat{D}_{\theta_{-t_n}\sigma}(\vartheta_{-t_n}\omega)$ a sequência $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente em X .

O seguinte teorema mostra a equivalência entre esses conceitos.

Teorema 5.1. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach uniformemente convexo. As seguintes propriedades de um SDAN ϕ em X são equivalentes

- (i) $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening;
- (ii) $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback ômega-limite compacto;
- (iii) $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback assintoticamente compacto,

sendo que a convexidade uniforme de X é somente para a relação (iii) \Rightarrow (i).

Demonstração: Mostraremos que (i) \Rightarrow (ii), então (ii) \Rightarrow (iii) e finalmente que (iii) \Rightarrow (i).

(i) \Rightarrow (ii)

Suponhamos que o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening. Tomemos $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$ e $\epsilon > 0$. Então para cada $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Omega$ existe um $T_0(\epsilon, \omega, \sigma, \hat{B}) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \kappa \left(\bigcup_{t \geq T_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) \\ & \leq \kappa \left(\bigcup_{t \geq T_0} P\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) + \kappa \left(\bigcup_{t \geq T_0} (I-P)\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) \\ & \leq 0 + \kappa(B(0, \epsilon)) = 2\epsilon. \end{aligned}$$

em que $B(0, \epsilon)$ é a bola aberta em X com centro em 0 e raio ϵ . Assim, o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback ômega-limite compacto.

(ii) \Rightarrow (iii)

Suponhamos que o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback ômega-limite compacto e seja $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$, para cada $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ e $\epsilon > 0$ existe $T_1(\epsilon, \omega, \sigma, \hat{B}) > 0$ tal que

$$\kappa \left(\bigcup_{t \geq T_1} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) < \epsilon.$$

Portanto, se escolhermos $\epsilon_n := 1/n$ e definir $\tau_n := T_1(1/n, \omega, \sigma, \hat{B})$ para $n = 1, 2, \dots$ com $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ temos que

$$\kappa \left(\bigcup_{t \geq \tau_n} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pelo Lema 5.1 (v) segue-se que

$$\kappa \left(\overline{\bigcup_{t \geq \tau_n} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))} \right) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Os conjuntos fechados e limitados

$$A_n(\omega, \sigma, \hat{B}) = \overline{\bigcup_{t \geq \tau_n} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))}$$

são encaixados, isto é, $A_{n+1}(\omega, \sigma, \hat{B}) \subset A_n(\omega, \sigma, \hat{B})$ para $n = 1, 2, \dots$, assim pelo Lema 5.1 (vi) sua interseção é um subconjunto não vazio e compacto de X e é o conjunto ômega-limite $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ de \hat{B} , isto é,

$$\emptyset \neq \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B}) = \bigcap_{n \geq 1} A_n(\omega, \sigma, \hat{B}) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{t \geq \tau_n} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))}. \quad (5.1)$$

Agora consideremos seqüências arbitrárias $t_k \rightarrow \infty$ e $x_k \in \hat{B}_{\theta_{-t_k}\sigma}(\vartheta_{-t_k}\omega)$. Seja

$$F_j(\omega, \sigma) = \{\phi(t_k, \vartheta_{-t_k}\omega, \theta_{-t_k}\sigma, x_k), k \geq j\}$$

e (descartando um número finito de k se necessário) definimos

$$n_j := \max\{n \in \mathbb{N} : \tau_n \leq t_j\},$$

assim $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Como

$$\phi(t_k, \vartheta_{-t_k}\omega, \theta_{-t_k}\sigma, x_k) \in \phi(t_k, \vartheta_{-t_k}\omega, \theta_{-t_k}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t_k}\sigma}(\vartheta_{-t_k}\omega)) \subset A_{n_j}(\omega, \sigma, \hat{B}),$$

para todo $k \geq j$ e $j = 1, 2, \dots$. Então, $F_j(\omega, \sigma) \subset \overline{F_j(\omega, \sigma)} \subset A_{n_j}(\omega, \sigma, \hat{B})$ para todo $j \geq k$ e $j = 1, 2, \dots$, assim

$$\kappa\left(\overline{F_j(\omega, \sigma)}\right) \leq \frac{1}{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Mas, $F_{j+1}(\omega, \sigma) \subset F_j(\omega, \sigma)$ para $j = 1, 2, \dots$, isto é os conjuntos são encaixados, portanto sua interseção é um subconjunto não vazio e compacto

$$\emptyset \neq \overline{F(\omega, \sigma)} := \bigcap_{j \geq 1} \overline{F_j(\omega, \sigma)} \subset \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B}).$$

Dessa forma, concluímos que o conjunto $F_1(\omega, \sigma) = \{\phi(t_k, \vartheta_{-t_k}\omega, \theta_{-t_k}\sigma, x_k), k \geq 1\}$ é precompacto, portanto o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback assintoticamente compacto.

(iii) \Rightarrow (i)

Suponhamos que o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback assintoticamente compacto e seja $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$. Primeiro provaremos que para todo $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$ o conjunto ômega-limite $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ é não vazio.

De fato, sejam $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in \hat{B}_{\theta_{-t_n}\sigma}(\vartheta_{-t_n}\omega)$. Então a compacidade assintótica $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback de ϕ implica que $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente e o Lema 4.2 garante que este limite pertence a $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$, e portanto, $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ é não vazio para todo $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$.

Agora mostraremos que $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ é compacto. De fato, seja $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$. Então existem seqüências $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in \hat{B}_{\theta_{-t_n}\sigma}(\vartheta_{-t_n}\omega)$, tais que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n) - y_n\| \leq \frac{1}{n}. \quad (5.2)$$

Pela compacidade assintótica $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback de ϕ , existem $y \in X$ e uma subsequência de

$$\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}},$$

a qual denotaremos também por $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n) \rightarrow y.$$

O Lema 4.2 e a desigualdade (5.2) implicam que $y \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ e $y_n \rightarrow y$. Assim, $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ é compacto para todo $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$.

Agora provaremos que o conjunto ômega-limite $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ atrai \hat{B} , isto é, que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}\left(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)), \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})\right) = 0, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \omega \in \Omega.$$

Suponhamos que isto não é satisfeito. Então existem $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$, $\epsilon_0 > 0$, $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n \in \hat{B}_{\theta_{-t_n}\sigma}(\vartheta_{-t_n}\omega)$, tais que

$$\text{dist}(\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n), \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})) > \epsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Pela compacidade assintótica de ϕ e Lema 4.2, existem $y \in \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ e uma subsequência de $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, a qual denotaremos novamente por $\{\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que

$$\phi(t_n, \vartheta_{-t_n}\omega, \theta_{-t_n}\sigma, x_n) \rightarrow y.$$

Mas isto contradiz (5.3), assim $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ atrai \hat{B} . Em particular para todo $\epsilon > 0$ existe um $T_0(\epsilon, \omega, \sigma, \hat{B}) > 0$ tal que

$$\text{dist}(\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)), \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})) < \epsilon/4, \quad \forall t \geq T_0,$$

em termos de ϵ -vizinhança isto significa que

$$\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \mathcal{N}_{\epsilon/4}\left(\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})\right), \quad \forall t \geq T_0.$$

Como $\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})$ é um subconjunto compacto de X , existe um número finito de pontos x_1, x_2, \dots, x_n em X tais que

$$\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B}) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{N}_{\epsilon/4}(x_i),$$

do qual resulta que

$$\phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \mathcal{N}_{\epsilon/4}\left(\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B})\right) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{N}_{\epsilon/2}(x_i), \quad \forall t \geq T_0, \quad (5.4)$$

assim

$$\bigcup_{t \geq T_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{N}_{\epsilon/2}(x_i).$$

Seja $X_1 = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, como X é uniformemente convexo, existe uma projeção $P : X \rightarrow X_1$ tal que para todo $x \in X$, $\|x - Px\| = \text{dist}(x, X_1)$. Assim,

$$\left\| (I - P) \left(\bigcup_{t \geq T_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) \right\| \leq \epsilon/2 < \epsilon.$$

Além disso,

$$P \left(\bigcup_{t \geq T_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right)$$

é um subconjunto limitado de X , pois

$$\bigcup_{t \geq T_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega))$$

é um subconjunto limitado de X . Portanto, o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening.

Na verdade, podemos facilmente provar que (iii) \Rightarrow (ii), isto é, se o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback assintoticamente compacto, então ele é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback ômega-limite compacto. De fato, por (5.4) temos que

$$\kappa \left(\bigcup_{t \geq T_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, \hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega)) \right) \leq \kappa \left(\mathcal{N}_{\epsilon/4} \left(\mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B}) \right) \right) \leq \epsilon.$$

que significa que o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback ômega-limite compacto. ■

Note que, de fato usamos somente a convexidade uniforme do espaço de Banach X para provar que (iii) \Rightarrow (i). Portanto, se X é um espaço de Banach geral, então também provamos que

$$\hat{\mathcal{D}}\text{-pullback ômega-limite compacto} \iff \hat{\mathcal{D}}\text{-pullback assintoticamente compacto}$$

e

$$\hat{\mathcal{D}}\text{-pullback flattening} \implies \hat{\mathcal{D}}\text{-pullback assintoticamente compacto}.$$

Teorema 5.2. *Seja ϕ um SDAN $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening com um conjunto $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback absorvente $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$. Então ϕ possui um único $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório $\hat{A} \in \hat{\mathcal{D}}$ dado por*

$$\hat{A}_\sigma(\omega) = \mathcal{W}(\omega, \sigma, \hat{B}). \quad (5.5)$$

Demonstração: Como o SDAN ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening, então o Teorema 5.1 implica que ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback assintoticamente compacto. Assim, por [72, Lema 2.21] existe um único $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório $\hat{A} \in \hat{\mathcal{D}}$ para ϕ com a caracterização (5.5). ■

Observemos também, que a $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening é uma condição necessária para a existência de um $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório. Porque, se \hat{A} é um $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório, então a ϵ -vizinhança de \hat{A} é um conjunto $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback absorvente, e temos a relação (5.4).

Corolário 5.1. *Seja ϕ um SDAN em um espaço de Banach uniformemente convexo X . Se ϕ possui um \hat{D} -atrator cociclo aleatório \hat{A} , então o SDAN é \hat{D} -pullback flattening.*

Observação 5.1. *O Teorema 4.3 mostra que um atrator cociclo aleatório existe se, e somente se, existe um conjunto compacto pullback atraente. Note que o corolário anterior não dá a equivalência entre pullback flattening e existência de atrator, pois no Teorema 5.2 também precisamos assumir a existência de um conjunto pullback absorvente.*

5.2 A propriedade de contração cociclo aleatória (PCCA)

Nesta seção, inspirado nas idéias de Flandoli e Langa em [36] introduzimos a importante propriedade de contração para um SDAN. Mostramos, que essa é uma condição suficiente para provar um resultado de modos determinantes e a dimensão fractal finita de conjunto aleatórios invariantes. Também mostramos que em espaços de Banach uniformemente convexo a PCCA implica a pullback flattening.

Definição 5.7. *Seja ϕ um SDAN em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ possuindo um conjunto invariante $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$. Diremos que ϕ satisfaz a **propriedade de contração cociclo aleatória (PCCA)** sobre \hat{B} se existe um $\delta \in (0, 1/2)$, um projetor ortogonal m -dimensional $P : X \rightarrow PX$ ($\dim PX = m$) e uma variável aleatória autônoma $C : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com esperança finita $\mathbb{E}(C(\omega)) < \ln(1/2\delta)$, tal que para cada $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$*

$$\|P(\phi(1, \omega, \sigma, x) - \phi(1, \omega, \sigma, y))\| \leq e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} \|x - y\|$$

e

$$\|Q(\phi(1, \omega, \sigma, x) - \phi(1, \omega, \sigma, y))\| \leq \delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in \hat{B}_\sigma(\omega)$ com $Q = I - P$.

Observação 5.2. *É importante notar que a PCCA nos dá a seguinte alternativa: ou os modos superiores são limitados pelos modos inferiores*

$$\|Q(\phi(1, \omega, \sigma, x) - \phi(1, \omega, \sigma, y))\| \leq \|P(\phi(1, \omega, \sigma, x) - \phi(1, \omega, \sigma, y))\|$$

ou existe uma contração (squeezing) na diferença de duas trajetórias

$$\|\phi(1, \omega, \sigma, x) - \phi(1, \omega, \sigma, y)\| \leq 2\delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} \|x - y\|.$$

A contração das trajetórias é devido à condição na esperança de $C(\omega)$, a qual é importante para provar a propriedade de modos determinantes.

Teorema 5.3 (Modos determinantes). *Seja ϕ um SDAN em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ Lipschitz na variável $x \in X$, uniformemente em $t \in [0, 1]$ sobre o \hat{D} -atrator cociclo aleatório \hat{A} , isto é, para cada $\omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma$ temos*

$$\|\phi(t, \omega, \sigma, x) - \phi(t, \omega, \sigma, y)\| \leq L(\omega)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \hat{A}_\sigma(\omega), \quad (5.6)$$

com $L(\omega) > 0$ satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln L(\vartheta_m \omega) = 0. \quad (5.7)$$

Suponhamos que ϕ satisfaz a PCCA sobre \hat{A} . Então, para cada $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$ temos o seguinte resultado de modos determinantes: Seja $k \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\mathbb{E}(C(\omega)) < k < \ln(1/2\delta),$$

e sejam $x, y \in \hat{A}_\sigma(\omega)$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{kt} \|P(\phi(t, \omega, \sigma, x) - \phi(t, \omega, \sigma, y))\| = 0.$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\tilde{k}t} \|\phi(t, \omega, \sigma, x) - \phi(t, \omega, \sigma, y)\| = 0,$$

para $0 < \tilde{k} < k - \mathbb{E}(C(\omega))$.

Demonstração: Devida à condição de Lipschitz do SDAN, é suficiente provar que o resultado para o caso discreto, isto é, que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} e^{\tilde{k}m} \|\phi(m, \omega, \sigma, x) - \phi(m, \omega, \sigma, y)\| = 0.$$

De fato, se $t = m + s, s \in [0, 1]$, pela propriedade do cociclo temos

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{k}t} \|\phi(t, \omega, \sigma, x) - \phi(t, \omega, \sigma, y)\| \\ &= e^{\tilde{k}m} e^{\tilde{k}s} \|\phi(m + s, \omega, \sigma, x) - \phi(m + s, \omega, \sigma, y)\| \\ &= e^{\tilde{k}m} e^{\tilde{k}s} \|\phi(s, \vartheta_m \omega, \theta_m \sigma, \phi(m, \omega, \sigma, x)) - \phi(s, \vartheta_m \omega, \theta_m \sigma, \phi(m, \omega, \sigma, y))\| \\ &\leq e^{\tilde{k}} e^{\tilde{k}m} L(\vartheta_m \omega) \|\phi(m, \omega, \sigma, x) - \phi(m, \omega, \sigma, y)\|. \end{aligned}$$

Agora podemos escrever para $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{k}} e^{\tilde{k}m} L(\vartheta_m \omega) \|\phi(m, \omega, \sigma, x) - \phi(m, \omega, \sigma, y)\| \\ &= e^{\tilde{k}} e^{(\tilde{k} + \epsilon_0)m} e^{-\epsilon_0 m} L(\vartheta_m \omega) \|\phi(m, \omega, \sigma, x) - \phi(m, \omega, \sigma, y)\|. \end{aligned}$$

e para $e^{-\epsilon_0 m} L(\vartheta_m \omega)$ obtemos por (5.7) e para todo m suficientemente grande e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\epsilon - \epsilon_0 < 0$

$$e^{-\epsilon_0 m} L(\vartheta_m \omega) \leq e^{(\epsilon - \epsilon_0)m},$$

e isto implica que

$$e^{\tilde{k}} e^{\tilde{k}m} L(\vartheta_m \omega) \|\phi(m, \omega, \sigma, x) - \phi(m, \omega, \sigma, y)\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Voltando ao caso discreto, argumentamos por contradição como em Flandoli e Langa [36]. Suponhamos que existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $m_j \rightarrow \infty$ tal que

$$e^{\tilde{k}m_j} \|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \geq \epsilon > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Denotamos $Q = I - P$, afirmamos que existe um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$ temos

$$e^{\tilde{k}m_j} \|Q(\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y))\| \geq e^{\tilde{k}m_j} \|P(\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y))\|. \quad (5.9)$$

De fato, suponhamos que isto não é verdade, por hipótese temos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{kt} \|P(\phi(t, \omega, \sigma, x) - \phi(t, \omega, \sigma, y))\| = 0,$$

e assim, se (5.9) não é verdade, podemos usar a desigualdade triangular para mostrar que existe uma subsequência de $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, a qual denotaremos novamente por $\{m_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que

$$e^{\tilde{k}m_j} \|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \leq 2e^{\tilde{k}m_j} \|P(\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y))\|,$$

e o último termo tende a zero quanto $j \rightarrow \infty$, o que contradiz (5.8). Assim, por (5.9) e pela PCCA,

$$\|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \leq \tilde{C}(\vartheta_{m_j-1} \omega) \|\phi(m_j - 1, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - 1, \omega, \sigma, y)\|,$$

com

$$\tilde{C}(\omega) = 2\delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds}.$$

Agora consideramos, $\phi(m_j - 1, \omega, \sigma, x)$, $\phi(m_j - 1, \omega, \sigma, y)$. Usando novamente a PCCA, ou estes satisfazem

$$\begin{aligned} & \|Q(\phi(m_j - 1, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - 1, \omega, \sigma, y))\| \\ & \leq \|P(\phi(m_j - 1, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - 1, \omega, \sigma, y))\| \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \|\phi(m_j - 1, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - 1, \omega, \sigma, y)\| \\ & \leq \tilde{C}(\vartheta_{m_j-2} \omega) \|\phi(m_j - 2, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - 2, \omega, \sigma, y)\|, \end{aligned}$$

Continuamos assim até chegar a M_j com $M_j = m_j$ ou para o qual ($M_j < m_j$)

$$\begin{aligned} & \|Q(\phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, y))\| \\ & \leq \|P(\phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, y))\| \end{aligned}$$

Aplicando a PCCA M_j vezes, temos

$$\begin{aligned}
& \|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \\
& \leq \sqrt{2} \tilde{C}(\vartheta_{m_j-1}\omega) \dots \tilde{C}(\vartheta_{m_j-M_j}\omega) \|P(\phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, y))\| \\
& = \sqrt{2} (2\delta)^{M_j} e^{\int_{m_j-M_j}^{m_j} C(\vartheta_s\omega) ds} \|P(\phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, x) \\
& \quad - \phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, y))\|.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Observemos que agora temos duas possibilidades para a sequência M_j .

Caso 1: Suponha que $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada, isto é,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} M_j = M < \infty.$$

Então, multiplicando ambos os lados da desigualdade (5.10) por $e^{\tilde{k}m_j}$ e levando em conta que $2\delta < 1$, podemos facilmente obter que

$$\begin{aligned}
& e^{\tilde{k}m_j} \|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \\
& \leq \sqrt{2} e^{\tilde{k}m_j} e^{\int_{m_j-M_j}^{m_j} C(\vartheta_s\omega) ds} \sup_{1 \leq m \leq M} \|P(\phi(m_j - m, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - m, \omega, \sigma, y))\| \\
& \leq \sqrt{2} e^{-(k-\tilde{k})m_j} e^{\int_{m_j-M_j}^{m_j} C(\vartheta_s\omega) ds} e^{kM} \sup_{1 \leq m \leq M} e^{k(m_j-m)} \|P(\phi(m_j - m, \omega, \sigma, x) \\
& \quad - \phi(m_j - m, \omega, \sigma, y))\|.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Por outro lado, sabemos que pela ergodicidade do operador shift ϑ_t , segue-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t C(\vartheta_s\omega) ds = \mathbb{E}(C(\omega)),$$

e portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^{m_j} C(\vartheta_s\omega) ds \leq (\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)))m_j, \quad \forall j \geq j_0.$$

Assim, usando este fato e (5.11) obtemos

$$\begin{aligned}
& e^{\tilde{k}m_j} |\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)| \\
& \leq \sqrt{2} e^{-(k-\tilde{k})m_j} e^{(\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)))m_j} e^{kM} \sup_{1 \leq m \leq M} e^{k(m_j-m)} \|P(\phi(m_j - m, \omega, \sigma, x) \\
& \quad - \phi(m_j - m, \omega, \sigma, y))\|.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Mas como, para ϵ suficientemente pequeno $\tilde{k} < k - (\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)))$, isto é, $k - \tilde{k} > (\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)))$ e por hipótese temos a convergência exponencial (com expoente k) dos m primeiros modos da solução, é claro que esta última expressão tende a zero quando $j \rightarrow \infty$, o que contradiz (5.8).

Caso 2: Suponha que existe uma subsequência de M_j , a qual denotaremos novamente por M_j , tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} M_j = \infty$. Nesta situação, temos novamente duas possibilidades:

Caso 2.1: Suponhamos que $\lim_{j \rightarrow \infty} (m_j - M_j)$ é limitado. Então, por (5.10)

$$\begin{aligned} & \|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \\ & \leq \sqrt{2}(2\delta)^{m_j} e^{\int_0^{m_j} C(\vartheta_s \omega) ds} \|P(\phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, y))\| \quad (5.13) \\ & \leq \sqrt{2}(2\delta)^{m_j} e^{(\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)))m_j} K, \end{aligned}$$

em que K é uma limitação para o último termo em (5.13). Então, multiplicando ambos os lados de (5.13) por $e^{\tilde{k}m_j}$, temos

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{k}m_j} \|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \\ & \leq \sqrt{2}(2\delta)^{m_j} e^{\tilde{k}m_j} e^{(\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)))m_j} K \quad (5.14) \\ & = \sqrt{2} e^{(\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)) + \tilde{k} - \ln(1/2\delta))m_j} K, \end{aligned}$$

e levando em conta que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)) + \tilde{k} < k < \ln(1/2\delta)$$

obtemos a convergência para zero da expressão direita em (5.14).

Caso 2.2: Se $\lim_{j \rightarrow \infty} (m_j - M_j) = \infty$ então

$$\begin{aligned} & e^{\tilde{k}m_j} \|\phi(m_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j, \omega, \sigma, y)\| \\ & \leq \sqrt{2}(2\delta)^{M_j} e^{\tilde{k}m_j} e^{(\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)))m_j} \|P(\phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, x) - \phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, y))\|. \\ & = \sqrt{2} e^{(\epsilon + \mathbb{E}(C(\omega)) + \tilde{k} - k)m_j} e^{(k - \ln(1/2\delta))M_j} e^{k(m_j - M_j)} \|P(\phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, x) \\ & \quad - \phi(m_j - M_j, \omega, \sigma, y))\| \end{aligned}$$

e note que esta última expressão tende a zero pelas condições que temos para as constantes \tilde{k} e k .

Isto termina todos os casos possíveis, e assim, a prova está completa. ■

5.3 Dimensão finita de conjuntos aleatórios invariantes

É bem conhecido que a finita dimensionalidade é um dos tópicos mais importantes no estudo do comportamento assintótico de sistemas dinâmicos em dimensão infinita.

Nesta seção, mostraremos que a PCCA é uma condição suficiente para mostrar a dimensão fractal finita de conjuntos invariantes aleatórios.

Teorema 5.4. *Suponhamos que um SDAN contínuo ϕ em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ possui um conjunto invariante $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$. Além disso, suponha que existe uma variável aleatória temperada autônoma $R(\omega)$ tal que $\|\hat{B}_\sigma(\omega)\| \leq R(\omega)$. Se ϕ satisfaz a PCCA sobre \hat{B} , então para cada $\omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma$*

$$d_f(\hat{B}_\sigma(\omega)) < \infty.$$

Demonstração: Por conveniência de notação, escrevemos $\phi(1, \omega, \sigma)x$ para $\phi(1, \omega, \sigma, x)$. Seja $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$, por hipótese existe um $u_0 \in \hat{B}_\sigma(\omega)$ tal que

$$\hat{B}_\sigma(\omega) \subseteq B(u_0, R(\omega)). \quad (5.15)$$

Para todo $u \in \hat{B}_\sigma(\omega) = \hat{B}_\sigma(\omega) \cap B(u_0, R(\omega))$, pela PCCA temos

$$\|P(\phi(1, \omega, \sigma)u - \phi(1, \omega, \sigma)u_0)\| \leq e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega),$$

e

$$\|Q(\phi(1, \omega, \sigma)u - \phi(1, \omega, \sigma)u_0)\| \leq \delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega).$$

Como $\dim PX = m$, então pelo Lema 1.2 em [28] existem $y_1^1, \dots, y_1^{k_0} \in PX$ tais que

$$B_{PX}(P\phi(1, \omega, \sigma)u_0, e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k_0} B_{PX}\left(y_1^j, \delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega)\right),$$

com

$$k_0 \leq \left(\frac{\sqrt{m}}{\delta} + 1\right)^m,$$

em que $B_{PX}(v, r)$ denota a bola em PX de raio r e centro v . Para $j = 1, \dots, k_0$, definimos

$$x_1^j = y_1^j + Q\phi(1, \sigma, \omega)u_0.$$

Então existe um j tal que

$$\begin{aligned} \|\phi(1, \omega, \sigma)u - x_1^j\| &\leq \|P\phi(1, \omega, \sigma)u - y_1^j\| + \|Q\phi(1, \omega, \sigma)u - Q\phi(1, \omega, \sigma)u_0\| \\ &\leq \delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega) + \delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega) \\ &= 2\delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega). \end{aligned} \quad (5.16)$$

De (5.16) resulta que

$$\phi(1, \omega, \sigma)(\hat{B}_\sigma(\omega) \cap B(u_0, R(\omega))) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k_0} B\left(x_1^j, 2\delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_s \omega) ds} R(\omega)\right). \quad (5.17)$$

Em particular, para $n \in \mathbb{N}$ fixado

$$\begin{aligned} &\phi(1, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma)\hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega) \\ &= \phi(1, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma)(\hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega) \cap B(u_0, R(\vartheta_{-n}\omega))) \end{aligned} \quad (5.18)$$

pode ser coberto por k_0 bolas de raio

$$2\delta e^{\int_0^1 C(\vartheta_{s-n}\omega) ds} R(\vartheta_{-n}\omega) = 2\delta e^{\int_{-n}^{-n+1} C(\vartheta_s\omega) ds} R(\vartheta_{-n}\omega).$$

Pela invariância de \hat{B} , temos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma) \hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega) = \hat{B}_\sigma(\omega),$$

por outro lado, temos

$$\begin{aligned} & \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma) \hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega) \\ &= \phi(1, \vartheta_{-1}\omega, \theta_{-1}\sigma) \circ \phi(1, \vartheta_{-2}\omega, \theta_{-2}\sigma) \circ \cdots \circ \phi(1, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma) \hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega). \end{aligned}$$

Em seguida, aplicando iterativamente as coberturas acima, obtemos que $\hat{B}_\sigma(\omega)$ pode ser coberto por k_0^n bolas de raio

$$(2\delta)^n e^{\int_{-n}^0 C(\vartheta_s\omega) ds} R(\vartheta_{-n}\omega).$$

Assim, por ergodicidade de ϑ_t e tendo em vista que $R(\omega)$ é temperada, obtemos para n suficientemente grande que

$$\begin{aligned} & (2\delta)^n e^{\int_{-n}^0 C(\vartheta_s\omega) ds} R(\vartheta_{-n}\omega) \\ & \leq (2\delta)^n e^{(\mathbb{E}(C(\omega)) + \gamma)n} R(\vartheta_{-n}\omega) \\ & = e^{(\mathbb{E}(C(\omega)) + \gamma + \rho - \ln(1/2\delta))n} e^{(-\rho/2)n} e^{(-\rho/2)n} R(\vartheta_{-n}\omega) \\ & \leq e^{(-\rho/2)n}, \end{aligned} \tag{5.19}$$

em que γ e ρ são tomadas tais que

$$\mathbb{E}(C(\omega)) + \gamma + \rho < \ln(1/2\delta).$$

Então segue-se que

$$d_f(\hat{B}_\sigma(\omega)) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(\hat{B}_\sigma(\omega))}{\ln(1/\epsilon)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(k_0^n)}{\ln(e^{(\rho/2)n})} = \frac{2 \ln(k_0)}{\rho} < \infty.$$

A prova está completa. ■

O seguinte teorema estabelece que a PCCA é uma condição suficiente para a compacidade ômega-limite de um SDAN. Assim, para espaços de Banach uniformemente convexos $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening é um conceito mais fraco do que a PCCA.

Teorema 5.5. *Suponhamos que um SDAN ϕ contínuo em um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$ possui um conjunto positivamente invariante $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback absorvente $\hat{B} \in \hat{\mathcal{D}}$. Suponha ainda que existe uma variável aleatória temperada autônoma $R(\omega)$ tal que $\|\hat{B}_\sigma(\omega)\| \leq R(\omega)$. Se ϕ satisfaz a PCCA, então é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback ômega-limite compacto, portanto possui um $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório. Além disso, se X é um espaço de Banach uniformemente convexo, então ϕ é $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback flattening.*

Demonstração: Seguindo a prova do Teorema 5.4 temos que $\phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma)\hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega)$ pode ser coberto por k_0^n bolas de raio

$$(2\delta)^n e^{\int_{-n}^0 C(\vartheta_s\omega) ds} R(\vartheta_{-n}\omega).$$

Levando em conta (5.19), dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(2\delta)^n e^{\int_{-n}^0 C(\vartheta_s\omega) ds} R(\vartheta_{-n}\omega) < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

portanto $\phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma)\hat{B}_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega)$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio menor que ϵ .

Mas, para $t = n + \tau, \tau \geq 0$, pela invariância positiva de $\hat{B}_\sigma(\omega)$ e a propriedade do cociclo segue-se que

$$\begin{aligned} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma)\hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega) &= \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma) \circ \phi(\tau, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma)\hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega) \\ &\subseteq \phi(n, \vartheta_{-n}\omega, \theta_{-n}\sigma)B_{\theta_{-n}\sigma}(\vartheta_{-n}\omega), \end{aligned}$$

para todo $t \geq n_0$. Assim

$$\kappa \left(\bigcup_{t \geq n_0} \phi(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma)\hat{B}_{\theta_{-t}\sigma}(\vartheta_{-t}\omega) \right) < \epsilon, \quad (5.20)$$

e portanto o SDAN é \hat{D} -pullback ômega-limite compacto.

Finalmente, se X é um espaço de Banach uniformemente convexo, então o Teorema 5.1 implica que o SDAN é \hat{D} -pullback flattening. ■

5.4 Aplicação às equações de Navier-Stokes

Nesta seção aplicamos os resultados teóricos desenvolvido neste capítulo às equações de Navier-Stokes introduzida na Seção 4.6. Primeiro, provamos que o raio aleatório não autônomo do atrator cociclo é limitado por um raio aleatório autônomo com esperança finita.

5.4.1 Limitação do raio do atrator cociclo aleatório

Aqui estabelecemos uma limitação para o raio do \hat{D} -atrator cociclo aleatório \hat{A} gerado pela equação estocásticas de Navier-Stokes (4.32).

Lema 5.2. *Para cada $\omega \in \Omega$, existe uma variável aleatória autônoma temperada $R^0(\omega)$ tal que*

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} R_1(\omega, \sigma) \leq R^0(\omega),$$

em que $R_1(\omega, \sigma)$ é a variável aleatória não autônoma temperada definida em (4.64).

Além disso, para todo $p \geq 1$ satisfazendo

$$\alpha \geq (2pc_0)^{2/3}, \quad (5.21)$$

a esperança

$$\mathbb{E}(R^0(\omega)^p) < \infty.$$

Demonstração: Primeiro limitamos o termo dependente de σ em $R_1(\omega, \sigma)$. Escrevemos

$$\int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} |\sigma(s)|^2 ds = \int_{-s_0}^0 + \int_{-\infty}^{-s_0},$$

sendo $s_0 = s_0(\omega) > 0$ dado em (4.50). Levando em conta (4.52), temos

$$\begin{aligned} \int_{-s_0}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} |\sigma(s)|^2 ds &\leq e^{\int_{-s_0}^0 (-\frac{3\nu\lambda_1}{4} + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} \int_{-s_0}^0 e^{-\int_s^0 \frac{\nu\lambda_1}{4}dr} |\sigma(s)|^2 ds \\ &\leq e^{\int_{-s_0}^0 \frac{\nu\lambda_1}{4} dr} e^{\int_{-s_0}^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{\nu\lambda_1}{4}s} |\sigma(s)|^2 ds \\ &\leq e^{\frac{\nu\lambda_1}{4}s_0} e^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}s_0} \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{4}}} \\ &\leq \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{4}}} \end{aligned}$$

e

$$\int_{-\infty}^{-s_0} e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} |\sigma(s)|^2 ds \leq \int_{-\infty}^{-s_0} e^{\frac{\nu\lambda_1}{2}s} |\sigma(s)|^2 ds \leq \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}}},$$

em que $\eta(g)$ é uma constante positiva dada em (4.30). Portanto, se definirmos

$$\rho = \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{4}}} + \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\frac{\nu\lambda_1}{2}}}, \quad (5.22)$$

então ρ é uma constante tal que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} |\sigma(s)|^2 ds \leq \rho.$$

Portanto, para a variável aleatória não autônoma R_1 definida por (4.64), obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in \Sigma} R_1(\omega, \sigma) &\leq c\rho + c \int_{-\infty}^0 e^{\int_s^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|)dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + 1) ds \\ &=: R^0(\omega). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R^0(\omega)^p) &\leq c(p)\rho^p + c(p)\mathbb{E}\left(\left(\int_0^{+\infty} e^{\int_{-s}^0 (-\nu\lambda_1 + c_0|z(\vartheta_r\omega)|) dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + 1) ds\right)^p\right) \\
&\leq c(p)\rho^p + c(p)\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p\nu\lambda_1}{2(p-1)}s} ds\right)^{p-1} \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p\nu\lambda_1}{2}s + pc_0 \int_{-s}^0 |z(\vartheta_r\omega)| dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + 1)^p ds\right) \\
&= c(p)\rho^p + c(p)\left(\frac{2(p-1)}{p\nu\lambda_1}\right)^{p-1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p\nu\lambda_1}{2}s} \mathbb{E}\left(e^{pc_0 \int_{-s}^0 |z(\vartheta_r\omega)| dr} (|z(\vartheta_s\omega)|^4 + 1)^p\right) ds \\
&\leq c(p)\rho^p + \tilde{c}(p) \int_0^{+\infty} e^{-\frac{p\nu\lambda_1}{2}s} \left(\mathbb{E}e^{2pc_0 \int_{-s}^0 |z(\vartheta_r\omega)| dr}\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}(|z(\vartheta_s\omega)|^4 + 1)^{2p}\right)^{1/2} ds.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

De (4.39), (4.40) e (5.21) segue-se que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|z(\vartheta_s\omega)|^4 + 1)^{2p} &\leq c_1(p)\mathbb{E}(|z(\vartheta_s\omega)|^{8p}) + c_1(p) \\
&= c_1(p) \frac{\Gamma\left(\frac{1+8p}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\alpha^{4p}} + c_1(p),
\end{aligned} \tag{5.25}$$

e

$$\mathbb{E}\left(e^{2pc_0 \int_{-s}^0 |z(\vartheta_r\omega)| dr}\right) = \mathbb{E}\left(e^{2pc_0 \int_{-s}^{-s+s} |z(\vartheta_r\omega)| dr}\right) \leq e^{\frac{2pc_0}{\sqrt{\alpha}}s}, \quad \forall s \geq 0. \tag{5.26}$$

Aplicando (5.25) e (5.26) em (5.24) obtemos que

$$\mathbb{E}(R^0(\omega)^p) \leq c(p)\rho^p + \tilde{c}(p)c_1(p) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+8p}{2}\right) + \sqrt{\pi}\alpha^{4p}}{\sqrt{\pi}\alpha^{4p}}\right)^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{\frac{p}{2}\left(\frac{2c_0}{\sqrt{\alpha}} - \nu\lambda_1\right)s} ds. \tag{5.27}$$

Como $\alpha > 0$ satisfaz (4.51), então

$$\frac{2c_0}{\sqrt{\alpha}} - \nu\lambda_1 < 0. \tag{5.28}$$

Portanto, de (5.27) e (5.28) resulta que

$$\mathbb{E}(R^0(\omega)^p) \leq c(p)\rho^p + \tilde{c}(p)c_1(p) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+8p}{2}\right) + \sqrt{\pi}\alpha^{4p}}{\sqrt{\pi}\alpha^{4p}}\right)^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{p\nu\lambda_1\sqrt{\alpha} - 2pc_0}\right) = k_0 < \infty.$$

A prova está completa. ■

Lema 5.3. *Para cada $\omega \in \Omega$, existe uma variável aleatória autônoma temperada $R_1^0(\omega)$ tal que*

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} R_2(\omega, \sigma) \leq R_1^0(\omega),$$

em que $R_2(\omega, \sigma)$ é a variável aleatória não autônoma temperada definida em (4.54).

Além disso, para todo $p \geq 1$ satisfazendo

$$\alpha \geq (4pc_0)^{2/3}, \tag{5.29}$$

a esperança

$$\mathbb{E}(R_1^0(\omega)^p) < \infty.$$

Demonstração: Como $\sup_{\sigma \in \Sigma} R_1(\sigma, \omega) \leq R^0(\omega)$, então é simples ver que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} R_2(\sigma, \omega) \leq \int_{-1}^0 |z(\vartheta_s \omega)| R^0(\vartheta_s \omega) ds + \int_{-1}^0 (|z(\vartheta_s \omega)|^4 + |\sigma(s)|^2) ds + R^0(\vartheta_{-1} \omega),$$

e assim,

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in \Sigma} R_2(\sigma, \omega) &\leq e^\alpha \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\alpha}} + \int_{-1}^0 |z(\vartheta_s \omega)| R^0(\vartheta_s \omega) ds + \int_{-1}^0 |z(\vartheta_s \omega)|^4 ds + R^0(\vartheta_{-1} \omega) \\ &:= R_1^0(\omega). \end{aligned}$$

Na última desigualdade utilizamos a relação $\int_{-1}^0 |\sigma(s)|^2 ds \leq e^\alpha \int_{-1}^0 e^{\alpha s} |\sigma(s)|^2 ds$ e a Proposição 4.3 (iv).

Agora, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_1^0(\omega)^p) &\leq c(p) e^{p\alpha} \frac{\eta(g)^p}{(1 - e^{-\alpha})^p} + c(p) \mathbb{E} \left(\left(\int_{-1}^0 |z(\vartheta_s \omega)| R^0(\vartheta_s \omega) ds \right)^p \right) \\ &\quad + c(p) \mathbb{E} \left(\left(\int_{-1}^0 |z(\vartheta_s \omega)|^4 ds \right)^p \right) + c(p) \mathbb{E}(R^0(\vartheta_{-1} \omega)^p) \\ &\leq c(p) e^{p\alpha} \frac{\eta(g)^p}{(1 - e^{-\alpha})^p} + c(p) \int_{-1}^0 (\mathbb{E}(|z(\vartheta_s \omega)|^{2p}))^{1/2} (\mathbb{E}(R^0(\vartheta_s \omega)^{2p}))^{1/2} ds \\ &\quad + c(p) \int_{-1}^0 \mathbb{E}(|z(\vartheta_s \omega)|^{4p}) ds + c(p) \mathbb{E}(R^0(\vartheta_{-1} \omega)^p). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Usando a condição (5.29) e o Lema 5.2 obtemos que

$$\mathbb{E}(R^0(\omega)^{2p}) < \infty.$$

Como ϑ_t preserva medida e é ergódica sobre o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pelo Teorema ergódico de Birkhoff [71], temos que

$$\mathbb{E}(R^0(\vartheta_s \omega)^{2p}) = \mathbb{E}(R^0(\omega)^{2p}) < \infty, \quad (\text{independente de } s \text{ e } \omega). \tag{5.31}$$

Agora, usando (4.40) segue-se que

$$\mathbb{E}(|z(\vartheta_s \omega)|^{2p}) = c_3 < \infty, \quad (\text{independente de } s \text{ e } \omega) \tag{5.32}$$

e

$$\mathbb{E}(|z(\vartheta_s \omega)|^{4p}) = c_4 < \infty, \quad (\text{independente de } s \text{ e } \omega). \tag{5.33}$$

Assim, aplicando (5.31)-(5.33) em (5.30), concluímos que

$$\mathbb{E}(R_1^0(\omega)^p) < \infty.$$

A prova está completa. ■

Lema 5.4. Para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T = T(\hat{D}, \omega) > 0$ dado pelo Lema 4.7 e uma variável aleatória não autônoma $R_4(\omega, \sigma)$, tal que para todo $\sigma \in \Sigma$,

$$\|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 \leq R_4(\omega, \sigma) \quad (5.34)$$

uniformemente em $v_0 \in \hat{D}$ e $t \geq T + 1$, em que c é uma constante positiva. Além disso, existe uma variável aleatória autônoma $R_2^0(\omega)$ tal que

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} R_4(\omega, \sigma) \leq R_2^0(\omega),$$

com esperança

$$\mathbb{E}(R_2^0(\omega)^p) < \infty,$$

para todo $p \geq 1$ satisfazendo (5.29).

Demonstração: Seja u solução de (4.32)-(4.33), denotamos $\xi = \text{rot } u = \partial_{x_2} u_1 - \partial_{x_1} u_2$. Usando a condição $\text{div } u = 0$ temos que

$$\text{rot}((u \cdot \nabla)u) = (u \cdot \nabla)\xi.$$

Assim, ξ satisfaz a equação

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \nu \Delta \xi + (u \cdot \nabla)\xi = \text{rot } \sigma + \text{rot } \psi \frac{\partial W(t)}{\partial t},$$

com condição de fronteira (4.33). Podemos provar que a seminorma $|\text{rot } \varphi|_{L^2(\mathcal{O})}$ é equivalente a norma clássica $\|\varphi\|_{H^1(\mathcal{O})}$.

Seja $\tilde{v} = \text{rot } v = \xi - z(\vartheta_t \omega) \text{rot } \psi$, então \tilde{v} satisfaz a equação

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}}{dt} - \nu \Delta \tilde{v} + (u \cdot \nabla)\tilde{v} \\ = \text{rot } \sigma + \alpha z(\vartheta_t \omega) \text{rot } \psi - z(\vartheta_t \omega)(u \cdot \nabla) \text{rot } \psi + \nu z(\vartheta_t \omega) \Delta \text{rot } \psi. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Usando as condições de fronteira, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\tilde{v}|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + 2\nu \|\tilde{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 \\ = 2 \langle \text{rot } \sigma + \alpha z(\vartheta_t \omega) \text{rot } \psi - z(\vartheta_t \omega)(u \cdot \nabla) \text{rot } \psi + \nu z(\vartheta_t \omega) \Delta \text{rot } \psi, \tilde{v} \rangle \\ \leq \nu \|\tilde{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 + c(|\text{rot } \sigma|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |z(\vartheta_t \omega)|^2 |\text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |z(\vartheta_t \omega)|^2 |(v \cdot \nabla) \text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 \\ + |z(\vartheta_t \omega)|^4 |(\psi \cdot \nabla) \text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |z(\vartheta_t \omega)|^2 |\Delta \text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(t, \omega, \sigma, v_0)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 &\leq |\tilde{v}(s, \omega, \sigma, v_0)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \\ &+ c \int_s^t (|\text{rot } \sigma|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |z(\vartheta_\tau \omega)|^2 |\text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |z(\vartheta_\tau \omega)|^2 |(v(\tau, \omega, \sigma, v_0) \cdot \nabla) \text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 \\ &+ |z(\vartheta_\tau \omega)|^4 |(\psi \cdot \nabla) \text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2 + |z(\vartheta_\tau \omega)|^2 |\Delta \text{rot } \psi|_{H^{-1}(\mathcal{O})}^2) d\tau. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima com relação a s sobre $(t-1, t)$ e usando algumas desigualdades elementares, obtemos

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(t, \omega, \sigma, v_0)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 &\leq \int_{t-1}^t |\tilde{v}(s, \omega, \sigma, v_0)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 ds \\ &+ c \int_{t-1}^t (|\sigma(s)|^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 |\psi|^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 |v(s, \omega, \sigma, v_0)|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 \\ &+ |z(\vartheta_s \omega)|^4 |\psi|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 \|\operatorname{rot} \psi\|_{H^1(\mathcal{O})}^2) ds \end{aligned}$$

Substituindo ω por $\vartheta_{-t}\omega$ e σ por $\theta_{-t}\sigma$, vemos que

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 &\leq \int_{t-1}^t |\tilde{v}(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|_{L^2(\mathcal{O})}^2 ds \\ &+ c \int_{t-1}^t (|\sigma(s-t)|^2 + |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2 |\psi|^2 + |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2 |v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 \\ &+ |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^4 |\psi|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 + |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2 \|\operatorname{rot} \psi\|_{H^1(\mathcal{O})}^2) ds. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Como $\|\operatorname{rot} \varphi\|_{L^2(\mathcal{O})}$ é equivalente a norma clássica $\|\varphi\|_{H^1(\mathcal{O})}$, existem constantes $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} c_1 \|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 &\leq c_2 \int_{t-1}^t \|v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 ds \\ &+ c \int_{t-1}^t (|\sigma(s-t)|^2 + |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2 |\psi|^2 + |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2 |v(s, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 \\ &+ |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^4 |\psi|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 + |z(\vartheta_{s-t}\omega)|^2 \|\operatorname{rot} \psi\|_{H^1(\mathcal{O})}^2) ds. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para todo $t \geq T+1$, levando em conta os Lemas 4.7 e 4.8, concluímos que

$$\|v(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, v_0)\|^2 \leq R_4(\sigma, \omega),$$

com

$$\begin{aligned} R_4(\sigma, \omega) &:= \frac{cc_2}{c_1} R_2(\sigma, \omega) \\ &+ \frac{c}{c_1} \int_{-1}^0 (|\sigma(s)|^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 |\psi|^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 R_1(\vartheta_s \omega, \theta_s \sigma) \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 \\ &+ |z(\vartheta_s \omega)|^4 |\psi|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 \|\operatorname{rot} \psi\|_{H^1(\mathcal{O})}^2) ds. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Como $\sup_{\sigma \in \Sigma} R_1(\sigma, \omega) \leq R^0(\omega)$ e $\sup_{\sigma \in \Sigma} R_2(\sigma, \omega) \leq R_1^0(\omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in \Sigma} R_4(\sigma, \omega) &\leq R_2^0(\omega) := \frac{cc_2}{c_1} R_1^0(\omega) + e^\alpha \frac{c}{c_1} \frac{\eta(g)}{1 - e^{-\alpha}} \\ &+ \frac{c}{c_1} \int_{-1}^0 (|z(\vartheta_s \omega)|^2 |\psi|^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 R^0(\vartheta_s \omega) \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 \\ &+ |z(\vartheta_s \omega)|^4 |\psi|^2 \|\psi\|_{W^{1,\infty}}^2 + |z(\vartheta_s \omega)|^2 \|\operatorname{rot} \psi\|_{H^1(\mathcal{O})}^2) ds. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Na desigualdade acima utilizamos a relação $\int_{-1}^0 |\sigma(s)|^2 ds \leq e^\alpha \int_{-1}^0 e^{\alpha s} |\sigma(s)|^2 ds$ e a Proposição 4.3 (iv). É claro que pela definição de $R_2^0(\omega)$ e pelos Lemas 5.2 e 5.3, temos para todo $p \geq 1$ satisfazendo (5.29) que

$$\mathbb{E}(R_2^0(\omega)^p) < \infty. \quad (5.40)$$

Aprova está completa. ■

Corolário 5.2. *Para cada $\hat{D} \in \hat{\mathcal{D}}$ e $\omega \in \Omega$, existe um tempo $T = T(\hat{D}, \omega) > 1$, tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, a solução u da equação de Navier-stokes (4.35) satisfaz*

$$\|u(t, \vartheta_{-t}\omega, \theta_{-t}\sigma, u_0)\|^2 \leq cR_2^0(\omega) + c|z(\omega)|^2,$$

uniformemente em $u_0 \in \hat{D}$ e $t \geq T$, em que c é uma constante positiva e $R_2^0(\omega)$ é uma variável aleatória dada por (5.39).

Agora, para cada $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$, definimos

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma(\omega) = \{u \in V : \|u\|^2 \leq cR_2^0(\omega) + c|z(\omega)|^2\}. \quad (5.41)$$

O Corolário 5.2 indica que $\hat{\mathcal{H}}$ é um conjunto $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback absorvente.

Teorema 5.6. *Seja \hat{A} o $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório gerado pela equação de Navier-Stokes, então existe uma variável aleatória autônoma $R_3^0(\omega)$ tal que*

$$\|\hat{A}_\sigma(\omega)\|^2 = \sup_{u_0 \in \hat{A}_\sigma(\omega)} \|u_0\|^2 \leq R_3^0(\omega). \quad (5.42)$$

Além disso, para todo $p \geq 1$ satisfazendo (5.29), a esperança

$$\mathbb{E}(R_3^0(\omega)^p) < \infty. \quad (5.43)$$

Demonstração: Como o $\hat{\mathcal{D}}$ -atrator cociclo aleatório \hat{A} é menor que o conjunto $\hat{\mathcal{D}}$ -pullback atraente $\hat{\mathcal{H}}$, então $\hat{A}_\sigma(\omega) \subset \hat{\mathcal{H}}_\sigma(\omega)$. Assim, pela definição de $\hat{\mathcal{H}}$ temos

$$\|\hat{A}_\sigma(\omega)\|^2 \leq cR_2^0(\omega) + c|z(\omega)|^2 := R_3^0(\omega).$$

Além disso, usando o Lema 5.4 e (4.40), obtemos

$$\mathbb{E}(R_3^0(\omega)^p) \leq c(p)\mathbb{E}(R_2^0(\omega)^p) + c(p)\mathbb{E}(|z(\omega)|^{2p}) < \infty.$$

A prova está completa. ■

5.5 Propriedade de contração cociclo aleatória

Nesta seção, provamos que o SDAN gerado pela equação estocástica de Navier-Stokes satisfaz a PCCA sobre o \hat{D} -atrator cociclo aleatório \hat{A} . Finalizamos, provando um resultado de modos determinantes e a dimensão fractal finita de atratores.

Teorema 5.7. *Suponhamos que*

$$\alpha \geq (8c_0)^{2/3}, \quad (5.44)$$

então o SDAN ϕ gerado pela equação estocástica de Navier-Stokes (4.32) com força externa de translação limitada satisfaz a PCCA sobre o \hat{D} -atrator cociclo aleatório $\hat{A} = \{\hat{A}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$.

Demonstração: Sejam u e v soluções de (4.35), então

$$\frac{d(u-v)}{dt} + \nu A(u-v) + B(u, u-v) + B(u-v, v) = 0. \quad (5.45)$$

Denotamos P o projetor ortogonal sobre o subespaço de H gerado pelas m primeiras autofunções associadas ao operador de Stokes A e $Q = I - P$. Tomando o produto interno de (5.45) com $Q(u-v)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Q(u-v)|^2 + \nu \|Q(u-v)\|^2 \\ & \leq (B(u, u-v), Q(u-v)) + |(B(u-v, v), Q(u-v))| \\ & \leq \|u\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2} \|Q(u-v)\| \|u-v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2} + \|v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2} \|Q(u-v)\| \|u-v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2} \\ & = (\|u\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2} + \|v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}) \|Q(u-v)\| \|u-v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2} \\ & \leq \frac{\nu}{2} \|Q(u-v)\|^2 + c \left(\|u\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2 + \|v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2 \right) \|u-v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2, \end{aligned}$$

e assim

$$\frac{d}{dt} |Q(u-v)|^2 + \nu \|Q(u-v)\|^2 \leq c \left(\|u\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2 + \|v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2 \right) \|u-v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2.$$

Como $H_0^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^4(\mathcal{O})$ para $n = 2$ e $\|Q(u-v)\|^2 \geq \lambda_{m+1} |Q(u-v)|^2$, segue-se que

$$\frac{d}{dt} |Q(u-v)|^2 + \nu \lambda_{m+1} |Q(u-v)|^2 \leq c (\|u\|^2 + \|v\|^2) \|u-v\|^2.$$

Pelo lema de Gronwall temos

$$\begin{aligned} |Q(u(t) - v(t))|^2 & \leq e^{-\nu \lambda_{m+1} t} |Q(u_0 - v_0)|^2 \\ & + \int_0^t e^{-\nu \lambda_{m+1} (t-s)} (\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2) \|u(s) - v(s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Agora, estimamos a norma $\|u-v\|^2$ por $|\operatorname{rot}(u-v)|^2$, e esta última por $|u_0-v_0|^2$. Tomando o produto interno de (5.45) com $u-v$ em H , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u-v|^2 + \nu \|u-v\|^2 &\leq |(B(u-v, v), u-v)| \\ &\leq \|u-v\|_{(L^4(\mathcal{O}))^2}^2 \|v\|. \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte desigualdade (veja Temam [70])

$$\|u\|_{L^4(\mathcal{O})} \leq c \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}^{1/2} \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^{1/2}, \quad \forall u \in H_0^1(\mathcal{O}), \quad (5.47)$$

e a desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u-v|^2 + \nu \|u-v\|^2 &\leq c |u-v| \|u-v\| \|v\| \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|u-v\|^2 + c |u-v|^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} |u-v|^2 + \nu \|u-v\|^2 \leq c |u-v|^2 \|v\|^2. \quad (5.48)$$

Aplicando o lema de Gronwall em (5.48), vemos que

$$|u(t) - v(t)|^2 \leq e^{\int_0^t c \|v(s)\|^2 ds} |u_0 - v_0|^2. \quad (5.49)$$

Assim integrando (5.48) com relação a t no intervalo $(t-1, t)$, com $t \geq 1$ e usando (5.49), temos que

$$\begin{aligned} \nu \int_{t-1}^t \|u(s) - v(s)\|^2 ds &\leq |u(t-1) - v(t-1)|^2 + c \int_{t-1}^t \|v(s)\|^2 |u(s) - v(s)|^2 ds \\ &\leq \left(e^{\int_0^{t-1} c \|v(r)\|^2 dr} + c \int_{t-1}^t \|v(s)\|^2 e^{\int_0^s c \|v(r)\|^2 dr} ds \right) |u_0 - v_0|^2 \\ &\leq e^{\int_0^t c \|v(r)\|^2 dr} \left(1 + c \int_{t-1}^t \|v(s)\|^2 ds \right) |u_0 - v_0|^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Escrevendo $\xi_u = \operatorname{rot} u$ e $\xi_v = \operatorname{rot} v$, resulta

$$\frac{d(\xi_u - \xi_v)}{dt} + ((u-v) \cdot \nabla) \xi_u + (v \cdot \nabla) (\xi_u - \xi_v) = \nu \Delta (\xi_u - \xi_v), \quad (5.51)$$

Tomando o produto interno de (5.51) com $\xi_u - \xi_v$ em H e usando a desigualdade de Agmon, (veja Temam [70]) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\xi_u - \xi_v|^2 + \nu \|\xi_u - \xi_v\|^2 \\ \leq \frac{\nu}{2} \|\xi_u - \xi_v\|^2 + c |\xi_u|^4 |\xi_u - \xi_v|^2, \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{d}{dt}|\xi_u - \xi_v|^2 + \nu\|\xi_u - \xi_v\|^2 \leq c|\xi_u|^4|\xi_u - \xi_v|^2.$$

Pelo lema de Gronwall obtém-se

$$|\xi_u(t) - \xi_v(t)|^2 \leq e^{\int_s^t c|\xi_u(r)|^4 dr} |\xi_u(s) - \xi_v(s)|^2, \quad \forall t \geq s.$$

Integrando a desigualdade acima com relação a s sobre $(t-1, t)$ com $t \geq 1$ resulta

$$|\xi_u(t) - \xi_v(t)|^2 \leq e^{\int_{t-1}^t c|\xi_u(r)|^4 dr} \int_{t-1}^t |\xi_u(s) - \xi_v(s)|^2 ds. \quad (5.52)$$

Assim, para todo $t \geq 1$, levando em conta (5.50) e (5.52), segue-se que

$$\begin{aligned} & |\xi_u(t) - \xi_v(t)|^2 \\ & \leq e^{\int_{t-1}^t c|\xi_u(r)|^4 dr} \int_{t-1}^t |\xi_u(s) - \xi_v(s)|^2 ds \\ & \leq c e^{\int_{t-1}^t c|\xi_u(r)|^4 dr} \left(1 + \int_{t-1}^t \|v(s)\|^2 ds\right) e^{\int_{t-1}^t c\|v(s)\|^2 ds} |u_0 - v_0|^2 \\ & \leq c \left(1 + \int_{t-1}^t \|v(s)\|^2 ds\right) e^{\int_0^t c(\|u(r)\|^4 + \|v(r)\|^2) dr} |u_0 - v_0|^2. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Usando essa desigualdade em (5.46) obtemos

$$\begin{aligned} |Q(u(t) - v(t))|^2 & \leq e^{-\nu\lambda_{m+1}t} |u_0 - v_0|^2 + \int_0^t e^{-\nu\lambda_{m+1}(t-s)} (\|u(s)\|^2 \\ & + \|v(s)\|^2) c \left(1 + \int_{t-1}^t \|v(r)\|^2 dr\right) e^{\int_0^s c(\|u(r)\|^4 + \|v(r)\|^2) dr} |u_0 - v_0|^2 ds. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Levando em conta (5.49), para cada $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ e para todo $u_0, v_0 \in \hat{A}_\sigma(\omega)$ temos

$$|P(\phi(t, \omega, \sigma, u_0) - \phi(t, \omega, \sigma, v_0))|^2 \leq e^{\int_0^t c\|v(s)\|^2 ds} |u_0 - v_0|^2.$$

Pela invariância de \hat{A} vemos que $v(s, \omega, \sigma, v_0) = \phi(s, \omega, \sigma, v_0) \in \hat{A}_{\theta_s \sigma}(\vartheta_s \omega)$, e por (5.42) concluimos que

$$|P(\phi(t, \omega, \sigma, u_0) - \phi(t, \omega, \sigma, v_0))| \leq e^{\int_0^t \frac{c}{2} R_3^0(\vartheta_s \omega) ds} |u_0 - v_0|. \quad (5.55)$$

Agora, levando em conta (5.54) e (5.42) temos

$$\begin{aligned}
|Q(u(t) - v(t))|^2 &\leq e^{-\nu\lambda_{m+1}t} |u_0 - v_0|^2 \\
&+ \int_0^t e^{-\nu\lambda_{m+1}(t-s)} R_3^0(\vartheta_s\omega) ds \int_{t-1}^t c(1 + R_3^0(\vartheta_s\omega)) ds e^{\int_0^t (R_3^0(\vartheta_s\omega)^2 + R_3^0(\vartheta_s\omega)) ds} |u_0 - v_0|^2 \\
&\leq e^{-\nu\lambda_{m+1}t} |u_0 - v_0|^2 + \left(\int_0^t e^{-2\nu\lambda_{m+1}(t-s)} ds \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left(\int_0^t R_3^0(\vartheta_s\omega)^2 ds \right)^{1/2} \int_0^t c(1 + R_3^0(\vartheta_s\omega)) ds e^{\int_0^t (R_3^0(\vartheta_s\omega)^2 + R_3^0(\vartheta_s\omega)) ds} |u_0 - v_0|^2 \quad (5.56) \\
&\leq |Q(u(t) - v(t))|^2 \leq e^{-\nu\lambda_{m+1}t} |u_0 - v_0|^2 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\nu\lambda_{m+1}}} \left(\int_0^t R_3^0(\vartheta_s\omega)^2 ds \right)^{1/2} \int_0^t c(1 + R_3^0(\vartheta_s\omega)) ds \times \\
&\quad \times e^{\int_0^t (R_3^0(\vartheta_s\omega)^2 + R_3^0(\vartheta_s\omega)) ds} |u_0 - v_0|^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\sqrt{x} \leq e^x, \quad \forall x \geq 0,$$

então de (5.56) segue-se que

$$\begin{aligned}
|Q(\phi(t, \omega, \sigma, u_0) - \phi(t, \omega, \sigma, v_0))|^2 \\
\leq \left(e^{-\nu\lambda_{m+1}t} + \frac{1}{\sqrt{2\nu\lambda_{m+1}}} \right) e^{\int_0^t c(R_3^0(\vartheta_s\omega)^2 + R_3^0(\vartheta_s\omega) + 1) ds} |u_0 - v_0|^2,
\end{aligned}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned}
|Q(\phi(t, \omega, \sigma, u_0) - \phi(t, \omega, \sigma, v_0))| \\
\leq \left(e^{-\frac{\nu\lambda_{m+1}}{2}t} + \frac{1}{(2\nu\lambda_{m+1})^{1/4}} \right) e^{\int_0^t \frac{c}{2}(R_3^0(\vartheta_s\omega)^2 + R_3^0(\vartheta_s\omega) + 1) ds} |u_0 - v_0|. \quad (5.57)
\end{aligned}$$

Definindo

$$C(\omega) = \frac{c}{2}(R_3^0(\omega)^2 + R_3^0(\omega) + 1).$$

Então, para cada $\omega \in \Omega$ e $\sigma \in \Sigma$, segue-se de (5.55) e (5.57) com $t = 1$ que

$$|P(\phi(1, \omega, \sigma, u_0) - \phi(1, \omega, \sigma, v_0))| \leq e^{\int_0^1 C(\vartheta_s\omega) ds} |u_0 - v_0| \quad (5.58)$$

e

$$|Q(\phi(1, \omega, \sigma, u_0) - \phi(1, \omega, \sigma, v_0))| \leq \left(e^{-\frac{\nu\lambda_{m+1}}{2}} + \frac{1}{(2\nu\lambda_{m+1})^{1/4}} \right) e^{\int_0^1 C(\vartheta_s\omega) ds} |u_0 - v_0| \quad (5.59)$$

para todo $u_0, v_0 \in \hat{A}_\sigma(\omega)$. Utilizando (5.43) concluímos que

$$\mathbb{E}(C(\omega)) < \infty$$

para α satisfazendo (5.44).

Escolhemos m suficientemente grande tal que

$$\delta := \left(e^{-\frac{\nu\lambda_{m+1}}{2}} + \frac{1}{(2\nu\lambda_{m+1})^{1/4}} \right) < \frac{1}{2} \quad (5.60)$$

e

$$\mathbb{E}(C(\omega)) < \ln(1/2\delta).$$

A prova está completa. ■

5.5.1 Modos determinantes e dimensão finita de atratores cociclo aleatórios

Nesta parte, mostramos um resultado de modos determinantes e a dimensão fractal finita do \hat{D} -atrator cociclo aleatório para a equação de Navier-Stokes.

Teorema 5.8 (Modos determinantes). *Suponhamos que $\alpha > 0$ satisfaz (5.44). Seja $k \in \mathbb{R}^+$ satisfazendo*

$$\mathbb{E}(C(\omega)) < k < \ln(1/2\delta), \quad (5.61)$$

e para cada $\omega \in \Omega$, $\sigma \in \Sigma$ sejam $u_0, v_0 \in \hat{A}_\sigma(\omega)$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{kt} |P(\phi(t, \omega, \sigma, u_0) - \phi(t, \omega, \sigma, v_0))| = 0.$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\hat{k}t} |\phi(t, \omega, \sigma, u_0) - \phi(t, \omega, \sigma, v_0)| = 0,$$

para $0 < \hat{k} < k - \mathbb{E}(C(\omega))$.

Demonstração: Pela invariância de \hat{A} temos que $v(s, \omega, \sigma, v_0) = \phi(s, \omega, \sigma, v_0) \in \hat{A}_{\theta_s \sigma}(\vartheta_s \omega)$, assim levando em conta (5.42) e (5.49) concluímos que

$$|\phi(t, \sigma, \omega, u_0) - \phi(t, \sigma, \omega, v_0)| \leq e^{\int_0^1 \frac{\epsilon}{2} R_3^0(\vartheta_s \omega) ds} |u_0 - v_0|, \quad \forall u_0, v_0 \in \hat{A}_\sigma(\omega), t \in [0, 1].$$

Definimos

$$L(\omega) = e^{\int_0^1 \frac{\epsilon}{2} R_3^0(\vartheta_s \omega) ds},$$

então L satisfaz (5.7). De fato, pela ergodicidade do shift ϑ_t , temos para uma variável aleatória mensurável geral $C_0(\omega)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t C_0(\vartheta_s \omega) ds = \mathbb{E}(C_0(\omega)), \quad (5.62)$$

e assim,

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln(L(\vartheta_m \omega)) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_m^{m+1} \frac{c}{2} R_3^0(\vartheta_s \omega) \, ds \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{m} \frac{1}{m+1} \int_0^{m+1} \frac{c}{2} R_3^0(\vartheta_s \omega) \, ds - \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_0^m \frac{c}{2} R_3^0(\vartheta_s \omega) \, ds \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{c}{2} R_3^0(\omega) \right) - \mathbb{E} \left(\frac{c}{2} R_3^0(\omega) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue do Teorema 5.3. ■

Teorema 5.9. *Suponhamos que $\alpha > 0$ satisfaz (5.44). Então o \hat{D} -atrator cociclo aleatório $\hat{A} = \{\hat{A}_\sigma(\cdot)\}_{\sigma \in \Sigma}$ dado no Teorema 5.6 para o SDAN ϕ gerado pela equação estocástica de Navier-Stokes (4.43) com forças externas de translação limitada possui dimensão fractal finita, isto é, para cada $\omega \in \Omega, \sigma \in \Sigma$*

$$d_f(\hat{A}_\sigma(\omega)) < \infty.$$

Demonstração: É simples ver que pela definição de $\hat{B}_\sigma(\omega)$, Lema 4.7 e propriedade minimal do atrator \hat{A} , que existe uma variável aleatória temperada autônoma $R(\omega)$ tal que

$$|\hat{A}_\sigma(\omega)| \leq R(\omega).$$

Então o resultado segue pelo Teorema 5.4. ■

Capítulo 6

Conclusões e problemas em aberto

Neste trabalho, estudamos o comportamento assintótico de algumas EDPs usando teoria de sistemas dinâmicos deterministas, não autônomos e estocásticos em dimensão infinita, mais precisamente, estabelecemos a existência de atrator global para o sistema dinâmico autônomo associado ao sistema bidimensional de equações que modela o movimento um fluido micropolar não-Newtoniano, além disso provamos a semicontinuidade destes atratores com relação ao parâmetro que representa a viscosidade microrotacional do fluido, também provamos a dimensão fractal finita de atratores. Outro resultado importante que estabelecemos foi a continuidade de atratores pullback, cociclo e uniforme (Teorema 3.1) para uma equação hiperbólica não autônoma singularmente perturbada, que é a generalização do resultado de Hale e Raugel em [41, 42]. É importante ressaltar que o ponto crucial para resolvermos este problema em aberto há 30 anos foi graças ao desenvolvimento da recente teoria de atratores pullback para sistemas dinâmicos não autônomos cujas referências principais utilizadas aqui foram [7, 9]. Estes dois problemas constituem a parte determinista de sistemas dinâmicos abordados neste trabalho.

Em relação ao caso estocástico abordado neste trabalho, primeiro desenvolvemos a teoria de atratores cociclo aleatórios para um SDAN com universos de atração autônomos e comparamos com atratores cociclo aleatórios com universos de atração não autônomos introduzido recentemente por Wang em [72], estabelecemos resultados de existência e caracterização por trajetórias completas, também abordamos a continuidade de atratores cociclo aleatórios, estabelecemos a equivalência entre o conceito de semicontinuidade superior e a compacidade uniforme do atrator dada no Teorema 4.8 e usando resultados da teoria de atratores uniformes aleatórios desenvolvida em [26] estabelecemos a equivalência entre o conceito de semicontinuidade inferior e uma propriedade de equi-atração através do Teorema 4.9. Aplicamos estes resultados abstratos às equações estocásticas de Navier-Stokes 2D.

Também introduzimos as propriedades de contração (do inglês “squeezing property”) e

flattening para um SDAN, o primeira chamamos de propriedade de contração cociclo aleatória (PCCA) e a segunda de pullback flattening, provamos as equivalências entres as compacidades assintótica, ômega-limite e pullback flattening, além disso estabelecemos que em espaços de Banach uniformemente convexo a pullback flattening é um conceito mais fraco que a PCCA, também provamos que a PCCA é uma condição suficiente para a provar um resultado de modos determinantes e a finito dimensionalidade de conjuntos aleatórios invariantes. Aplicamos estes resultados teóricos às equações estocásticas de Navier-Stokes 2D.

Algumas questões ainda se encontram em aberto, como as versões não autônoma e estocástica do problema (2.1)-(2.2). Para um estudo futuro pretendemos também considerar uma perturbação do sistema (2.1) por ruído multiplicativo, ou seja, consideramos a seguinte equação:

$$\begin{cases} du + ((u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nabla \cdot \tau(e(u)) - 2\nu_r \operatorname{rot} w) dt = f(t, x)dt + \epsilon u \circ dW_1(t), \\ \nabla \cdot u = 0, \\ dw + ((u \cdot \nabla)w + 4\nu_r w - \nu_1 \Delta w - 2\nu_r \operatorname{rot} u) dt = g(t, x)dt + \epsilon w \circ dW_2(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

em que $W_1(t)$ e $W_2(t)$ são processos de Winner sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\epsilon \in [0, 1]$ e os termos $\epsilon u \circ dW_1(t)$ e $\epsilon w \circ dW_2(t)$ são no sentido de Stratonovich. Neste caso seria interessante provar a existência de um atrator pullback aleatório $\mathcal{A}_\epsilon = \{\mathcal{A}_\epsilon(t, \omega) : t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ para a equação (6.1), bem como a existência de um atrator pullback $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ para o problema limite ($\epsilon = 0$) e estabelecer a semicontinuidade superior de atratores, isto é,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{dist}(\mathcal{A}_\epsilon(t, \omega), \mathcal{A}(t)) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega.$$

Enfim, podemos lidar com problemas em abertos das três grandes áreas dos sistemas dinâmicos, nesse sentido concluímos que esta tese de doutorado atendeu aos objetivos e certamente abrirá caminhos para vários trabalhos futuros.

Apêndice A

Estimativas a priori

Neste apêndice estabelecemos as estimativas necessárias no Lema 3.2. Ao longo das demonstrações C denotará uma constante independente de u, ϵ, t .

A.1 A primeira estimativa

Definamos

$$F_0(s) = \int_0^s f_0(r) dr.$$

As hipóteses (3.3), (3.5) e (3.6) implicam que existem $0 < \nu < 1$ e $c_1 > 0$ tais que

$$(f_0(u), u) \leq (1 - \nu)\|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + c_1, \quad (\text{A.1})$$

$$2(F_0(u), 1) \leq (1 - \nu)\|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + c_1, \quad (\text{A.2})$$

$$|(F_0(t, u), 1)| \leq c_1(1 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^4), \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\mathcal{O}), \quad (\text{A.3})$$

veja, por exemplo [20, Lema 8.2].

Lema A.1. *Existe uma constante $K > 0$ e um conjunto $B_0 \subset H$ com $\epsilon\|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq K$ para todo $(u, v) \in B_0$ tal que para todo $B \subset H$ com $\epsilon\|v_0\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_0\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C$ para todo $(u_0, v_0) \in B$, existe um $T = T(B)$ tal que $S_\epsilon(\tau + T, \tau)B \subset B_0$ para todo $\epsilon \in (0, 1]$ e $\tau \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(u(t), u_t(t)) = S_\epsilon(t, \tau)(u_0, v_0)$. Multiplicando a equação (3.1) por u_t obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & = (f_\epsilon(t, u(t)) - f_0(u(t)), u_t(t)) + \frac{d}{dt} (F_0(u(t)), 1). \end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{d}{dt} \left(\epsilon \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 - 2(F_0(u(t)), 1) \right) + \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C. \quad (\text{A.4})$$

Se, por sua vez, multiplicarmos (3.1) por u , temos

$$\begin{aligned} & \epsilon \frac{d}{dt} (u_t(t), u(t)) - \epsilon \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & = (f_\epsilon(t, u(t)) - f_0(u(t)), u(t)) + (f_0(u(t)), u(t)). \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt} \left(2\epsilon (u_t(t), u(t)) + \|u(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right) - 2\epsilon \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \nu \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C. \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando (A.5) por uma constante positiva $\delta < 1/(\nu + 2)$ e somando com (A.4), resulta que

$$\frac{d}{dt} E(u_t(t), u(t)) + \delta \nu (\epsilon \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + 1) \leq C, \quad (\text{A.6})$$

em que

$$E(v, u) = \epsilon \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 - 2(F_0(u), 1) + 2\delta \epsilon (v, u) + \delta \|u\|_{L^2(\mathcal{O})}^2.$$

A seguir, estimamos E . Usando (A.2) temos que

$$E(v, u) \geq \epsilon \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \nu \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 - c_1 - \delta \epsilon^2 \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2.$$

Como $\delta \leq 1/2\epsilon$, segue-se que

$$E(v, u) \geq \frac{\epsilon}{2} \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \nu \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 - c_1$$

Devemos estimar a energia acima. Temos

$$0 \leq E(v, u) + c_1 \leq C(\epsilon \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + 1 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^4) \leq C(\epsilon^2 \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^4 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^4 + 1),$$

portanto

$$\sqrt{E(v, u) + c_1} \leq C(\epsilon \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + 1).$$

Usando esta desigualdade em (A.6) e denotando $V(t) = E(u_t(t), u(t)) + c_1$, temos

$$\frac{d}{dt} V(t) + C\sqrt{V(t)} \leq C.$$

Analogamente a [41, Teorema 2.2] segue-se que existe uma constante K tal que para todo $B \subset H$ limitado no sentido de que $\epsilon \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C$ para todo $(u, v) \in B$ existe um instante $T = T(B)$ tal que se $t \geq \tau + T$ e $(u(\tau), u_t(\tau)) \in B$, então

$$\frac{\epsilon}{2} \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \nu \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq V(t) \leq K.$$

A prova está completa. ■

Observação A.1. É fácil verificar que o Lema A.1 continua valendo se substituirmos f_ϵ por $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$. O conjunto B_0 independe de p_ϵ e ϵ .

A.2 A segunda estimativa

Nesta seção, obtemos as estimativas uniformes em relação a ϵ sobre os atratores uniformes em certos espaços de Sobolev fracionários. Essas estimativas são necessárias como um passo intermediário, uma vez que a regularidade de atratores uniformes em espaços fracionários é necessária para obter mais resultados de regularidade e estimativas, veja [3, 4, 16, 74]. Introduzimos uma escala de espaços de Hilbert gerada pelo operador de Laplace com condições de contorno de Dirichlet homogêneas $E^\alpha = D((-\Delta)^{\alpha/2})$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ dotado com a norma $\|u\|_\alpha = \|(-\Delta)^{\alpha/2}u\|_{L^2(\mathcal{O})}$. Com esta notação $E^2 = H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$, $E^1 = H_0^1(\mathcal{O})$, e $E^0 = L^2(\mathcal{O})$, veja [3, 74]. A norma em E^α também pode ser definida por meio do produto escalar $(u, v)_\alpha = ((-\Delta)^{\alpha/2}u, (-\Delta)^{\alpha/2}v)$.

O argumento deste seção funciona para qualquer $\alpha \in (0, 1/2)$. Embora necessitemos somente para o caso particular em que $\alpha = 1/3$. Assumiremos que a condição inicial (u_0, v_0) tomada no instante τ pertence ao conjunto B_0 encontrado no Lema A.1 e que $(u(t), u_t(t)) = S_\epsilon(t, \tau)(u_0, v_0) \in B_0$ para $\tau > t$.

Precisaremos da seguinte versão do lema de Gronwall, que é uma extensão do resultado de Graselli e Pata, veja [38, Lema 2.2], [65, Lema 3].

Lema A.2. *Seja Ψ uma função absolutamente contínua não negativa em $[\tau, \infty)$ satisfazendo a desigualdade*

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} + 2A\Psi(t) \leq B(t)\Psi(t) + C(t), \quad \text{q.s. em } t \in (\tau, \infty), \quad (\text{A.7})$$

em que $A > 0$, e $B, C : [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que

$$\int_s^t |B(r)| dr \leq A(t - s) + \kappa, \quad \text{para todo } \tau \leq s \leq t, \quad (\text{A.8})$$

e

$$\sup_{t \geq \tau} \int_t^{t+1} |C(r)| dr \leq \eta,$$

para alguns $\kappa, \eta \geq 0$. Então

$$\Psi(t) \leq C_1\Psi(\tau)e^{-A(t-\tau)} + C_2,$$

sendo $C_1, C_2 > 0$ constantes dependendo somente de η, κ, A .

Demonstração: Apresentamos um esboço da prova. Multiplicando (A.7) por $e^{\int_\tau^s 2A-B(r) dr}$ obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\Psi(s)e^{\int_\tau^s 2A-B(r) dr} \right) \leq C(s)e^{\int_\tau^s 2A-B(r) dr}.$$

Integrando com relação a s sobre o intervalo (τ, t) e usando (A.8) temos que

$$\Psi(t) \leq e^{\kappa} \psi(\tau) e^{-A(t-\tau)} + e^{\kappa} \int_{\tau}^t C(s) e^{-A(t-s)} ds.$$

O resultado segue da seguinte desigualdade, veja [15, Lema 2.1],

$$\int_{\tau}^t C(s) e^{-A(t-s)} ds \leq \frac{1}{1 - e^{-A}} \sup_{\theta \geq \tau} \int_{\theta}^{\theta+1} C(s) ds.$$

■

Também precisaremos do seguinte resultado de Zelik, veja [74, Lema 1.2].

Lema A.3. *Seja $\alpha \in [0, 1/2)$, então*

$$\|u_1 \cdot (-\Delta)^{\alpha-1} u_2\|_{L^3(\mathcal{O})} \leq C \|u_1\|_{1+\alpha} \|u_2\|_{\alpha-1},$$

$$\|u_3 \cdot (-\Delta)^{\alpha-1} u_2\|_{L^{3/2}(\mathcal{O})} \leq C \|u_3\|_{\alpha} \|u_2\|_{\alpha-1},$$

para todo $u_1 \in E^{\alpha+1}$, $u_2 \in E^{\alpha-1}$ e $u_3 \in E^{\alpha}$ com uma constante $C = C(\alpha)$ independente de u_1, u_2, u_3 .

Seguindo as idéias de [4, 16, 74] decompomos o processo na soma de dois componentes: o para o qual provaremos o decaimento exponencial para zero, denotaremos por v , e o suave, denotaremos por w . Mais precisamente, representamos $u(t) = v(t) + w(t)$, em que as funções v, w resolvem os dois problemas a seguir

$$\epsilon v_{tt}(t) + v_t(t) - \Delta v(t) + Lv(t) = f_0(v(t)) - f_0(0), \quad (\text{A.9})$$

$$v(\tau) = u_0, \quad v_t(\tau) = v_0. \quad (\text{A.10})$$

$$\epsilon w_{tt}(t) + w_t(t) - \Delta w(t) = Lv(t) + f_{\epsilon}(t, u(t)) - f_0(v(t)) + f_0(0), \quad (\text{A.11})$$

$$v(\tau) = 0, \quad v_t(\tau) = 0. \quad (\text{A.12})$$

No problema acima $L > 0$ é uma constante suficientemente grande.

Partimos do estudo do problema autônomo (A.9)–(A.10).

Lema A.4. *Se $(u(t), u_t(t)) \in B_0$ para todo $t \geq \tau$, então*

$$\epsilon \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C e^{-C(t-\tau)}, \quad \text{para todo } t \geq \tau, \quad (\text{A.13})$$

e

$$\int_{\tau}^{\infty} \|v_t(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 ds = C < \infty, \quad (\text{A.14})$$

com C uma constante positiva independente de ϵ, u_0, v_0 .

Demonstração: Defina $\bar{F}_0(s) = F_0(s) - f_0(0)s$, então $\bar{F}'_0(s) = f_0(s) - f_0(0)$. Multiplicando (A.9) por v_t temos

$$\frac{d}{dt} (\epsilon \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + L \|v(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 - 2(\bar{F}_0(v(t)), 1)) + 2\|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 = 0, \quad (\text{A.15})$$

q.s. para $t > \tau$. De (A.2) e (A.3) tem-se

$$2(\bar{F}_0(v), 1) = 2(F_0(v), 1) - 2f_0(0) \int_{\mathcal{O}} v(x) dx \leq (1 - \nu) \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + L \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + C,$$

para $v \in H_0^1(\mathcal{O})$ e

$$|(\bar{F}_0(v), 1)| \leq c_1(1 + \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^4), \quad \text{para } v \in H_0^1(\mathcal{O}),$$

portanto

$$\epsilon \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \int_{\tau}^{\infty} \|v_t(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 ds \leq C, \quad \text{para todo } t \geq \tau, \quad (\text{A.16})$$

isto é, a integral de dissipação para o problema autônomo para v é finita. Agora, multiplicando (A.9) por v obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\epsilon (v_t(t), v(t)) + \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right) - \epsilon \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + L \|v(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \\ & = (f_0(v(t)) - f_0(0), v(t)), \quad \text{q.s. para } t > \tau. \end{aligned}$$

Tendo em vista (3.11), a imersão $H_0^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^6(\mathcal{O})$, a imersão compacta $H_0^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^3(\mathcal{O})$, a desigualdade de Ehrling e a limitação sobre $\|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}$ em (A.16) segue-se que

$$\left. \begin{aligned} |(f_0(v(t)) - f_0(0), v(t))| &\leq K \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ |(\bar{F}_0(v(t)), 1)| &\leq M \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ |2(\bar{F}_0(v(t)), 1)| &\leq \frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + N \|v(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \end{aligned} \right\}, \text{ para todo } t \geq \tau, \quad (\text{A.17})$$

em que as constantes positivas K, M, N dependem somente de B_0 e \mathcal{O} . A constante L é escolhida tal que $L > \max\{K, N\}$, donde resulta que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\epsilon (v_t(t), v(t)) + \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right) - \epsilon \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & + (L - K) \|v(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq 0, \quad \text{q.s. para } t > \tau. \end{aligned}$$

Dividindo esta estimativa por dois e somamos com (A.15), segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E_1(v(t), v_t(t)) + \left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & + \frac{1}{2} (L - K) \|v(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq 0, \quad \text{q.s. para } t > \tau, \end{aligned}$$

em que

$$E_1(v, v_t) = \epsilon \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \left(\frac{1}{4} + L\right) \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2}\epsilon(v, v_t) - 2(\overline{F}_0(v), 1).$$

É fácil verificar que

$$\frac{d}{dt} E_1(v(t), v_t(t)) + C E_1(v(t), v_t(t)) \leq 0.$$

Usando a desigualdade de Gronwall temos

$$E_1(v(t), v_t(t)) \leq E_1(u_0, v_0) e^{-C(t-\tau)}.$$

Aplicando esta última estimativa em (A.17) obtemos que

$$E_1(v(t), v_t(t)) \geq \frac{1}{2}(\epsilon \|v'(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2),$$

e a prova está completa. ■

O estudo de (A.11)–(A.12) é mais fino. Mostramos que as soluções são mais suaves, a saber, $(w(t), w_t(t)) \in E^{1+\alpha} \times E^\alpha$, mas a estimativa nas normas $E^{1+\alpha} \times E^\alpha$ diverge para t crescente. Para obter a estimativa não divergente usaremos o artifício de Zelik [74]. O argumento abaixo é semelhante à prova das Proposições 1.3 e 1.5 em [74], mas, além disso, o tratamento cuidadoso da dependência de ϵ é necessário.

Derivando (A.11) com relação ao tempo e denotando $z = w_t$ obtemos que

$$\epsilon z_{tt}(t) + z_t(t) - \Delta z(t) = L v_t(t) + \frac{\partial f_\epsilon}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial f_\epsilon}{\partial u}(t, u(t)) u_t(t) - f'_0(v(t)) v_t(t). \quad (\text{A.18})$$

A função z satisfaz a condição inicial

$$z(\tau) = w_t(\tau) = 0 \quad \text{e} \quad z_t(\tau) = w_{tt}(\tau) = \frac{1}{\epsilon}(L u_0 + f_\epsilon(\tau, u_0) - f_0(u_0) + f_0(0)). \quad (\text{A.19})$$

No seguinte lema estabelecemos a estimativa auxiliar que não é uniforme no tempo, veja [74, Proposição 1.3].

Lema A.5. *Suponhamos que $(u(t), u_t(t)) \in B_0$ para todo $t \geq \tau$. Se z resolve (A.18)–(A.19), então*

$$\epsilon^2 \|z_t(t)\|_{\alpha-1}^2 + \epsilon \|z(t)\|_\alpha^2 + \|z(t)\|_{\alpha-1}^2 \leq C(1 + t - \tau) e^{C(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau,$$

com $C > 0$ uma constante independente de t, τ, ϵ, z .

Demonstração: Multiplicando (A.18) por $(-\Delta)^{\alpha-1}(z_t + \beta z)$, com β um número apropriadamente escolhido, o qual será especificado mais adiante, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2} \|z\|_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \beta \|z\|_{\alpha-1}^2 + \beta \epsilon (z_t, z)_{\alpha-1} \right) + (1 - \beta \epsilon) \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \beta \|z\|_{\alpha}^2 \\ & \leq ((L - f'_0(0))v_t, (-\Delta)^{\alpha-1}(z_t + \beta z)) + \left(\frac{\partial f_{\epsilon}}{\partial t}(t, u), (-\Delta)^{\alpha-1}(z_t + \beta z) \right) \\ & \quad + \left(\left(\frac{\partial f_{\epsilon}}{\partial u}(t, u) - f'_0(u) + f'_0(0) \right) u_t, (-\Delta)^{\alpha-1}(z_t + \beta z) \right) \\ & \quad + ((f'_0(v + w) - f'_0(v))u_t, (-\Delta)^{\alpha-1}(z_t + \beta z)) + ((f'_0(v) - f'_0(0))z, (-\Delta)^{\alpha-1}(z_t + \beta z)) \\ & := I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Precisamos estimar todas as integrais do lado direito. Em todas as estimativas abaixo $\delta > 0$ denotará uma constante positiva suficientemente pequena. Primeiro estimamos I_1 .

$$I_1 \leq C \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})} (\|z_t\|_{\alpha-1} + \beta \|z\|_{\alpha}) \leq C \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \delta \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\beta \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \delta\beta \|z\|_{\alpha}^2.$$

Para estimar o termo I_2 note que

$$\|(-\Delta)^{\alpha-1}u\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq C \|u\|_{\alpha-1},$$

em que, veja [74],

$$\frac{1}{p} + \frac{1 - \alpha}{3} = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$I_2 \leq C \left\| \frac{\partial f_{\epsilon}}{\partial t}(t, u) \right\|_{L^{p'}(\mathcal{O})} (\|z_t\|_{\alpha-1} + \beta \|z\|_{\alpha-1}).$$

Como $p' = \frac{6}{5-2\alpha}$, segue-se de (3.7) que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f_{\epsilon}}{\partial t}(t, u(x, t)) \right\|_{L^{p'}(\mathcal{O})}^{p'} &= \int_{\mathcal{O}} \left| \frac{\partial f_{\epsilon}}{\partial t}(t, u(x, t)) \right|^{p'} dx \\ &\leq \int_{\mathcal{O}} C(1 + |u(x, t)|^6) dx \\ &\leq C(1 + \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^6), \end{aligned}$$

donde resulta que

$$I_2 \leq C + \delta \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\beta + \delta\beta \|z\|_{\alpha}^2.$$

Passamos ao termo I_3 . Usando (3.5) temos

$$I_3 \leq C \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})} (\|z_t\|_{\alpha-1} + \beta \|z\|_{\alpha-1}) \leq C \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \delta \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\beta \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \delta\beta \|z\|_{\alpha}^2.$$

O termo I_4 é estimado usando (3.12) e a desigualdade de Hölder.

$$I_4 \leq C \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})} (1 + \|u\|_{L^6(\mathcal{O})} + \|v\|_{L^6(\mathcal{O})}) \|w \cdot (-\Delta)^{\alpha-1}(z_t + \beta z)\|_{L^3(\mathcal{O})}.$$

Usando o Lema A.3 obtemos

$$I_4 \leq C \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})} \|w\|_{\alpha+1} (\|z_t\|_{\alpha-1} + \beta \|z\|_{\alpha-1}).$$

Expressando Δw por (A.11) temos

$$\|w\|_{\alpha+1} = \|\Delta w\|_{\alpha-1} \leq C + \epsilon \|w_{tt}\|_{\alpha-1} + \|w_t\|_{\alpha-1} = C + \epsilon \|z_t\|_{\alpha-1} + \|z\|_{\alpha-1}, \quad (\text{A.20})$$

assim

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C + C\epsilon^2 \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z\|_{\alpha-1}^2 + \delta \|z_t\|_{\alpha-1}^2 \\ &\quad + C\beta + C\beta\epsilon^2 \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\beta \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z\|_{\alpha-1}^2 + \delta\beta \|z\|_{\alpha}^2. \end{aligned}$$

Finalmente estimamos I_5 . Usando o Lema A.3 e (3.12) temos

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \|f'_0(v) - f'_0(0)\|_{L^3(\mathcal{O})} \|z \cdot (-\Delta)^{\alpha-1} (z_t + \beta z)\|_{L^{3/2}(\mathcal{O})} \\ &\leq C(1 + \|v\|_{L^6(\mathcal{O})}) \|v\|_{L^6(\mathcal{O})} \|z\|_{\alpha} (\|z_t\|_{\alpha-1} + \beta \|z\|_{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Segue-se que

$$I_5 \leq C \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \|z\|_{\alpha}^2 + \delta \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\beta \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \|z\|_{\alpha-1}^2 + \delta\beta \|z\|_{\alpha}^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, combinamos as estimativas para os termos I_1, \dots, I_5 para obter

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2} \|z\|_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \beta \|z\|_{\alpha-1}^2 + \beta \epsilon (z_t, z)_{\alpha-1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \beta \epsilon \right) \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2} \beta \|z\|_{\alpha}^2 \\ &\leq C(1 + \beta) (1 + \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \epsilon^2 \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z\|_{\alpha-1}^2) \\ &\quad + C \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 (\|z\|_{\alpha}^2 + \beta \|z\|_{\alpha-1}^2). \end{aligned}$$

Escolhemos $\beta = 1/4\epsilon$ e multiplicando esta última estimativa por ϵ , resulta que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2} \epsilon \|z\|_{\alpha}^2 + \frac{1}{8} \|z\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{4} \epsilon (z_t, z)_{\alpha-1} \right) + \frac{1}{4} \epsilon \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{8} \|z\|_{\alpha}^2 \\ &\leq C(1 + \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \epsilon^2 \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \|z\|_{\alpha-1}^2) \\ &\quad + C \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 (\epsilon \|z\|_{\alpha}^2 + \|z\|_{\alpha-1}^2). \end{aligned}$$

Definamos

$$\tilde{E}(z_t, z) = \frac{1}{2} \epsilon^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2} \epsilon \|z\|_{\alpha}^2 + \frac{1}{8} \|z\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{4} \epsilon (z_t, z)_{\alpha-1}. \quad (\text{A.21})$$

Usando (A.16) obtemos

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(z_t(t), z(t)) \leq C(1 + \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) + C(1 + \|u_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) \tilde{E}(z_t(t), z(t)).$$

Usando o lema de Gronwall, as condições iniciais (A.19) a limitação sobre a integral de dissipação em (A.16) e (A.4) temos

$$\int_{\tau}^t \|u_t(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 ds \leq C(1+t-\tau), \quad (\text{A.22})$$

donde resulta que

$$\tilde{E}(z_t(t), z(t)) \leq C(1+t-\tau)e^{C(t-\tau)}.$$

A prova está completa. ■

Observação A.2. *Podemos verificar que (3.5) e (3.7) são verdadeiras quando substituimos f_ϵ por cada $p_\epsilon \in \Sigma_\epsilon$ com as mesmas constantes. Assim, as estimativas do lema acima são uniformes em relação a Σ_ϵ .*

O próximo resultado é a contrapartida de [74, Proposição 1.4].

Lema A.6. *Suponhamos que $(u(t), u_t(t)) \in B_0$ para todo $t \geq \tau$, então para todo $\mu > 0$ existem constantes positivas C_μ e K_μ e uma decomposição*

$$u(t) = \bar{v}(t) + \bar{w}(t), \quad \text{para } t \geq \tau,$$

tal que

$$\|\bar{w}(t)\|_{\alpha+1}^2 + \epsilon \|\bar{w}_t(t)\|_{\alpha}^2 + \|\bar{w}_t(t)\|_{\alpha-1}^2 \leq K_\mu, \quad \text{para todo } t \geq \tau, \quad (\text{A.23})$$

e

$$\int_s^t \|\bar{v}_t(r)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 dr \leq \mu(t-s) + C_\mu, \quad \text{para todo } t \geq s \geq \tau. \quad (\text{A.24})$$

Demonstração: A prova segue as idéias de [74, Proposição 1.4], nós a esboçamos brevemente. Fixamos um $T > 0$ suficientemente grande e definimos

$$\bar{v}(t) = v(t) \quad \text{e} \quad \bar{w}(t) = w(t) \quad \text{para } t \in [\tau + (n-1)T, \tau + nT),$$

em que v, w resolvem as equações (A.9) e (A.11), respectivamente com condições iniciais

$$\begin{aligned} v(\tau + (n-1)T) &= u(\tau + (n-1)T), & v_t(\tau + (n-1)T) &= u_t(\tau + (n-1)T), \\ w(\tau + (n-1)T) &= 0, & w_t(\tau + (n-1)T) &= 0. \end{aligned}$$

A limitação sobre a integral de dissipação em (A.16) implica (A.24) com $\mu \sim 1/T$, e (A.23) segue pelos Lemas A.5 e (A.20). ■

A decomposição acima permite obter a contrapartida uniforme no tempo do Lema A.5.

Lema A.7. *Suponhamos que $(u(t), u_t(t)) \in B_0$ para todo $t \geq \tau$. Se z resolve (A.18)–(A.19), então*

$$\epsilon^2 \|z_t(t)\|_{\alpha-1}^2 + \epsilon \|z(t)\|_{\alpha}^2 + \|z(t)\|_{\alpha-1}^2 \leq C, \quad \forall t \geq \tau,$$

sendo $C > 0$ uma constante independente de t, τ, ϵ, z .

Demonstração: A idéia da prova é a mesma usada no Lema A.5, mas aplicamos a decomposição do Lema A.6 no termo I_4 . Usamos as representações $u_t = v_t + z$, $u_t = \bar{v}_t + \bar{w}_t$ e $z = \bar{v}_t + \bar{w}_t - v_t$. Escrevemos I_4 em quatro termos.

$$\begin{aligned} I_4 &= ((f'_0(v+w) - f'_0(v))\bar{v}_t, (-\Delta)^{\alpha-1}z_t) + ((f'_0(v+w) - f'_0(v))\bar{w}_t, (-\Delta)^{\alpha-1}z_t) \\ &\quad + \beta((f'_0(v+w) - f'_0(v))v_t, (-\Delta)^{\alpha-1}z) + \beta((f'_0(v+w) - f'_0(v))z, (-\Delta)^{\alpha-1}(\bar{v}_t + \bar{w}_t - v_t)) \\ &= I_{4A} + I_{4B} + I_{4C} + I_{4D}. \end{aligned}$$

Estimamos os termos acima usando a desigualdade de Hölder, propriedade (3.12), a imersão de Sobolev, estimativas dos Lemas A.1 e A.4 em $\|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})}$, $\|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}$ e $\|w\|_{H_0^1(\mathcal{O})}$, Lema A.3, e as estimativas (A.20), (A.23).

$$\begin{aligned} I_{4A} &\leq C(\|u\|_{L^6(\mathcal{O})} + \|v\|_{L^6(\mathcal{O})})\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}\|w \cdot (-\Delta)^{\alpha-1}z_t\|_{L^3(\mathcal{O})} \\ &\leq C\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}\|w\|_{\alpha+1}\|z_t\|_{\alpha-1} \leq C\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}(C + \epsilon\|z_t\|_{\alpha-1} + \|z\|_{\alpha-1})\|z_t\|_{\alpha-1} \\ &\leq \delta\|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + C\epsilon^2\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2\|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2\|z\|_{\alpha-1}^2. \\ I_{4B} &\leq C(\|u\|_{L^6(\mathcal{O})} + \|v\|_{L^6(\mathcal{O})})\|w\|_{L^6(\mathcal{O})}\|\bar{w}_t \cdot (-\Delta)^{\alpha-1}z_t\|_{L^{3/2}(\mathcal{O})} \\ &\leq C\|\bar{w}_t\|_{\alpha}\|z_t\|_{\alpha-1} \leq \delta\|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\|\bar{w}_t\|_{\alpha}^2 \leq \delta\|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C/\epsilon. \\ I_{4C} &\leq C\beta(\|u\|_{L^6(\mathcal{O})} + \|v\|_{L^6(\mathcal{O})})\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}\|w \cdot (-\Delta)^{\alpha-1}z\|_{L^3(\mathcal{O})} \\ &\leq \beta\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}\|w\|_{\alpha+1}\|z\|_{\alpha-1} \leq \beta\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}(C + \epsilon\|z_t\|_{\alpha-1} + \|z\|_{\alpha-1})\|z\|_{\alpha-1} \\ &\leq \delta\beta\|z\|_{\alpha}^2 + C\beta\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + C\beta\epsilon^2\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2\|z_t\|_{\alpha-1}^2 + C\beta\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2\|z\|_{\alpha-1}^2. \\ I_{4D} &\leq C\beta(\|u\|_{L^6(\mathcal{O})} + \|v\|_{L^6(\mathcal{O})})\|w\|_{L^6(\mathcal{O})}\|z \cdot (-\Delta)^{\alpha-1}(\bar{v}_t + \bar{w}_t - v_t)\|_{L^{3/2}(\mathcal{O})} \\ &\leq C\beta\|z\|_{\alpha}(\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|\bar{w}_t\|_{\alpha-1} + \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) \\ &\leq \delta\beta\|z\|_{\alpha}^2 + C\beta + C\beta\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + C\beta\|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned}$$

Procedendo como na prova do Lema A.5, mas usando as novas estimativas em I_4 e escolhendo $\delta > 0$ apropriado suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\epsilon\|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2}\|z\|_{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\beta\|z\|_{\alpha-1}^2 + \beta\epsilon(z_t, z)_{\alpha-1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \beta\epsilon \right) \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2}\beta\|z\|_{\alpha}^2 \\ &\leq C(1 + \beta + 1/\epsilon) + C(1 + \beta)(\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) \\ &\quad + C\epsilon^2\|z_t\|_{\alpha-1}^2(1 + \beta)(\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) + C\|z\|_{\alpha}^2\|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ &\quad + \|z\|_{\alpha-1}^2(1 + \beta)(\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2). \end{aligned}$$

Como no Lema A.5, definimos $\beta = \frac{1}{4\epsilon}$ multiplicamos a estimativa acima por ϵ e obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\epsilon^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2}\epsilon \|z\|_{\alpha}^2 + \frac{1}{8}\|z\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{4}\epsilon(z_t, z)_{\alpha-1} \right) + \frac{1}{4}\epsilon \|z_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{8}\|z\|_{\alpha}^2 \\ & \leq C(1 + \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) \\ & \quad + C\epsilon^2 \|z_t\|_{\alpha-1}^2 (\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) + C\epsilon \|z\|_{\alpha}^2 \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & \quad + C\|z\|_{\alpha-1}^2 (\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2). \end{aligned}$$

Usando a energia (A.21) reescrevemos as desigualdades acima

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \tilde{E}(z_t(t), z(t)) + 2A\tilde{E}(z_t(t), z(t)) \\ & \leq C(1 + \|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) \\ & \quad + C\tilde{E}(z_t(t), z(t)) (\|v_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2), \end{aligned}$$

com as constantes positivas A, C .

De (A.14), (A.22) e (A.24) segue-se que

$$C \int_t^{t+1} (1 + \|v_t(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_t(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2) ds \leq \eta, \quad \text{para todo } t \geq \tau,$$

com uma constante $\eta > 0$. Além disso, de (A.13), (A.14) e (A.24) obtemos que

$$C \int_s^t (\|v_t(r)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|\bar{v}_t(r)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|v(r)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2) dr \leq A(t-s) + \kappa, \quad \text{para todo } t \geq s \geq \tau,$$

em que $\kappa > 0$ é uma constante. Estamos nas condições de usar o Lema A.2, de onde, usando as expressões para as condições iniciais (A.19) o resultado segue. ■

Reescrevemos o lema acima em termos de w temos, veja (A.20).

Corolário A.1. *Suponhamos que $(u(t), u_t(t)) \in B_0$ para todo $t \geq \tau$. Se w resolve (A.11)–(A.12), então*

$$\epsilon \|w_t(t)\|_{\alpha}^2 + \|w_t(t)\|_{\alpha-1}^2 + \|w(t)\|_{\alpha+1}^2 \leq C, \quad \text{para todo } t \geq \tau,$$

com uma constante $C > 0$.

Observação A.3. *Analogamente como na Observação A.2 é fácil verificar que para um dado $\epsilon > 0$, as estimativas do lema acima são uniformes em relação a Σ_{ϵ} .*

Seja $C > 0$ a constante no Corolário A.1. Segue-se que o conjunto

$$K_{\epsilon} = \{(w_1, w_2) \in E^{\alpha+1} \times E^{\alpha} : \epsilon \|w_2\|_{\alpha}^2 + \|w_2\|_{\alpha-1}^2 + \|w_1\|_{\alpha+1}^2 \leq C\} \quad (\text{A.25})$$

é uniformemente atraente com relação a Σ_ϵ para todo $\epsilon \in (0, 1]$. Como este é compacto em $H_0^1(\mathcal{O}) \times L^2(\mathcal{O}) = E^1 \times E^0$, devemos ter $\mathcal{A}_\epsilon \subset K_\epsilon$. Isto nos dá a limitação uniforme com relação a ϵ do atrator uniforme \mathcal{A}_ϵ em $E^{\alpha+1} \times E^{\alpha-1} = E^{4/3} \times E^{-2/3}$ (note que fixamos $\alpha = 1/3$). Na próxima seção, usaremos a limitação obtida para $\alpha = 1/3$ para obter uma limitação para $\alpha = 1$.

Finalizamos esta seção com uma estimativa auxiliar.

Lema A.8. *Seja $(u(t), u_t(t))$ para $t \geq \tau$ uma trajetória sobre o trator uniforme \mathcal{A}_ϵ , então*

$$\sup_{t \geq \tau} \int_t^{t+1} \|u_t(s)\|_\alpha^2 ds = C < \infty,$$

em que a constante C independe de ϵ .

Demonstração: Sabemos que para as trajetórias no atrator uniforme, temos $u(t) \in E^{\alpha+1}$ e $u_t(t) \in E^\alpha$, assim, podemos derivar a equação (3.1) e denotar $y = u_t$ para obter

$$\epsilon y_{tt} + y_t - \Delta y = \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u(t))y,$$

com condição inicial

$$y(\tau) = u_t(\tau), \quad y_t(\tau) = \frac{1}{\epsilon}(p_\epsilon(t, u(\tau)) - u_t(\tau) + \Delta u(\tau)).$$

Multiplicando esta equação por $(-\Delta)^{\alpha-1}(y_t + \beta y)$ e procedendo como nas provas dos Lemas A.5 e A.7 resulta

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\epsilon \|y_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2}\|y\|_\alpha^2 + \frac{1}{2}\beta \|y\|_{\alpha-1}^2 + \beta \epsilon (y_t, y)_{\alpha-1} \right) + (1 - \beta \epsilon) \|y_t\|_{\alpha-1}^2 + \beta \|y\|_\alpha^2 \\ & \leq \left(\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u(t)), (-\Delta)^{\alpha-1}(y_t + \beta y) \right) + \left(\frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u(t))y, (-\Delta)^{\alpha-1}(y_t + \beta y) \right) \\ & \leq C(1 + \beta) + C\beta \|y\|_{\alpha-1}^2 + C\|y\|_\alpha^2 + \frac{1}{2}\|y_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2}\beta \|y\|_\alpha^2. \end{aligned}$$

Tomando $\beta = 1/4\epsilon$ e multiplicando a estimativa acima por ϵ obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\epsilon^2 \|y_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2}\epsilon \|y\|_\alpha^2 + \frac{1}{8}\|y\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{4}\epsilon (y_t, y)_{\alpha-1} \right) + \frac{1}{4}\epsilon \|y_t\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{8}\|y\|_\alpha^2 \\ & \leq C(1 + \|y\|_{\alpha-1}^2 + \epsilon \|y\|_\alpha^2) \leq C, \end{aligned}$$

sendo que a última limitação segue do fato de que sobre um atrator uniforme $\|y\|_{\alpha-1}^2 + \epsilon \|y\|_\alpha^2 = \|u_t\|_{\alpha-1}^2 + \epsilon \|u_t\|_\alpha^2$ é uniformemente limitada. Como a expressão sob derivada temporal é não-negativa, obtemos

$$\int_t^{t+1} \|u_t(s)\|_\alpha^2 ds \leq C + \frac{1}{2}\epsilon^2 \|u_{tt}(t)\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{2}\epsilon \|u_t(t)\|_\alpha^2 + \frac{1}{8}\|u_t(t)\|_{\alpha-1}^2 + \frac{1}{4}\epsilon (u_{tt}(t), u_t(t))_{\alpha-1}.$$

A limitações de $\|u_t(t)\|_{\alpha-1}^2$ e $\epsilon\|u_t(t)\|_{\alpha}^2$ resultam do fato que $(u(t), u_t(t)) \in \mathcal{A}_{\epsilon}$ e (A.25). A expressão $\|\epsilon u_{tt}(t)\|_{\alpha-1}$ é limitada devido a estimativa

$$\|\epsilon u_{tt}(t)\|_{\alpha-1} \leq \|u_t(t)\|_{\alpha-1} + C\|p_{\epsilon}(t, u(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|u(t)\|_{\alpha+1},$$

e a prova está completa. ■

A.3 A terceira estimativa

Neste seção, assumiremos que a trajetória $(u(t), u_t(t))$ pertence ao atrator uniforme \mathcal{A}_{ϵ} e usaremos as estimativas para $\alpha = 1/3$ para provar a limitação no Corolário A.1 para $\alpha = 1$. Para isto, precisamos de uma decomposição mais simples do que (A.9)–(A.11), a saber, representamos $u(t) = v(t) + w(t)$, em que as funções v, w são as soluções dos seguintes problemas

$$\epsilon v_{tt}(t) + v_t(t) - \Delta v(t) = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$v(\tau) = u_0, \quad v_t(\tau) = v_0. \quad (\text{A.27})$$

$$\epsilon w_{tt}(t) + w_t(t) - \Delta w(t) = p_{\epsilon}(t, u(t)), \quad (\text{A.28})$$

$$w(\tau) = 0, \quad w_t(\tau) = 0. \quad (\text{A.29})$$

As soluções de (A.26)–(A.27) decaem para zero exponencialmente, enquanto que para as soluções de (A.28)–(A.29) sabemos que $w \in C([\tau, T]; E^2)$, $w_t \in C([\tau, T]; E^1)$, $w_{tt} \in C([\tau, T]; E^0)$ para todo $T > \tau$. De fato, $p_{\epsilon}(\cdot, u(\cdot)) \in H^1(\tau, T; E^0)$, veja as estimativas abaixo na prova do Lema A.10. Omitimos a prova do lema abaixo uma vez que é análoga ao Lema A.4,

Lema A.9. *Seja $(u(t), u_t(t))$ para $t \geq \tau$ uma trajetória sobre o atrator uniforme \mathcal{A}_{ϵ} , então*

$$\epsilon\|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C e^{-C(t-\tau)}, \quad \text{para todo } t \geq \tau. \quad (\text{A.30})$$

em que C denota uma constante positiva independente de ϵ, u_0, v_0 .

Derivando (A.28) com relação ao tempo e denotando $z = w_t$, então z satisfaz o seguinte problema de valor inicial e de fronteira

$$\epsilon z_{tt}(t) + z_t(t) - \Delta z(t) = \frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial t}(t, u(t)) + \frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial u}(t, u(t))u_t(t), \quad (\text{A.31})$$

$$z(\tau) = 0, \quad z_t(\tau) = \frac{1}{\epsilon}p_{\epsilon}(\tau, u_0), \quad (\text{A.32})$$

$$z(\tau) = 0, \quad \text{sobre } \partial\mathcal{O}. \quad (\text{A.33})$$

Lema A.10. *Seja $(u(t), u_t(t))$ para $t \geq \tau$ uma trajetória sobre o atrator uniforme \mathcal{A}_ϵ , então*

$$\epsilon^2 \|z_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \epsilon \|z(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|z(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C, \quad \text{para todo } t \geq \tau, \quad (\text{A.34})$$

e

$$\|w(t)\|_2 \leq C, \quad \text{para todo } t \geq \tau, \quad (\text{A.35})$$

em que C denota uma constante independente de ϵ, u_0, v_0 .

Demonstração: Os cálculos são semelhantes aos da prova do Lema A.5. Multiplicando (A.31) por $z_t + \beta z$, obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \beta \epsilon (z_t, z) + \frac{1}{2} \beta \|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \right) \\ & + (1 - \beta \epsilon) \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \beta \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & = \left(\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u(t)), z_t + \beta z \right) + \left(\frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u(t)) u_t(t), z_t + \beta z \right) := I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Como $(u(t), u_t(t)) \in \mathcal{A}_\epsilon$, segue-se que $\|u(t)\|_{4/3} \leq C$ e pelo teorema de imersão de Sobolev $\|u(t)\|_{L^{18}(\mathcal{O})} \leq C$, levando em conta esta limitação e o fato de $L^{18}(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^{26/3}(\mathcal{O})$ segue também que $\|u(t)\|_{L^{26/3}(\mathcal{O})} \leq C$, assim de (3.7) obtemos

$$\left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u(t)) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C \int_{\mathcal{O}} (1 + |u(x)|^{26/3}) \, dx \leq C \left(1 + \|u(t)\|_{L^{26/3}(\mathcal{O})}^{26/3} \right) \leq C.$$

Como o crescimento de $\frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}$ é quadrático, de (3.3) e (3.13) segue-se que

$$\left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u(t)) \right\|_{L^9(\mathcal{O})}^9 \leq C \int_{\mathcal{O}} (1 + |u(x)|^{18}) \, dx \leq C \left(1 + \|u(t)\|_{L^{18}(\mathcal{O})}^{18} \right) \leq C.$$

Além disso, $u_t(t) \in E^{1/3} \subset L^{18/7}(\mathcal{O})$ e $\|u_t(t)\|_{L^{18/7}(\mathcal{O})} \leq C \|u_t(t)\|_{1/3}$. Estamos em condições de limitar I_1 e I_2 .

$$I_1 \leq \left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u(t)) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 (\|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})} + \beta \|z\|_{L^2(\mathcal{O})}) \leq \frac{1}{4} \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{4} \beta \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + C + C\beta.$$

$$\begin{aligned} I_2 & \leq \left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u(t)) \right\|_{L^9(\mathcal{O})} \|u_t(t)\|_{L^{18/7}(\mathcal{O})} (\|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})} + \beta \|z\|_{L^2(\mathcal{O})}) \\ & \leq \frac{1}{4} \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{4} \beta \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + C \|u_t(t)\|_{1/3}^2 + C\beta \|u_t(t)\|_{1/3}^2. \end{aligned}$$

Usando estas estimativas em (A.36) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \beta \|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \beta \epsilon (z_t, z) \right) \\ & + \left(\frac{1}{2} - \beta \epsilon \right) \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \beta \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & \leq C + C\beta + C \|u_t(t)\|_{1/3}^2 + C\beta \|u_t(t)\|_{1/3}^2. \end{aligned}$$

Escolhemos $\beta = 1/4\epsilon$ e multiplicando a estimativa acima por ϵ temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\epsilon^2 \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2}\epsilon \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{8}\|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{4}\epsilon(z_t, z) \right) + \frac{1}{4}\epsilon \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{8}\|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & \leq C(1 + \|u_t(t)\|_{1/3}^2). \end{aligned}$$

Definindo

$$\bar{E}(z_t, z) = \frac{1}{2}\epsilon^2 \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2}\epsilon \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{8}\|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{4}\epsilon(z_t, z),$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\bar{E}(z_t, z) + C\bar{E}(z_t, z) \leq C(1 + \|u_t(t)\|_{1/3}^2).$$

Como

$$\bar{E}(z_t(\tau), z(\tau)) = \frac{1}{2}\|p_\epsilon(\tau, u(\tau))\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C,$$

a afirmação (A.34) segue-se pelos Lemas A.8 e A.2. A afirmação (A.35) segue-se pela estimativa

$$\|w(t)\|_2 \leq \epsilon \|z_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|z(t)\|_{L^2(\mathcal{O})} + \|p_\epsilon(t, u(t))\|_{L^2(\mathcal{O})},$$

e a prova está completa. ■

Estamos em condições de obter o último resultado desta seção.

Lema A.11. *Seja $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}_\epsilon$, então $(u_0, u_1) \in E^2 \times E^1$ e*

$$\epsilon \|u_1\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|u_1\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u_0\|_2^2 \leq C,$$

sendo que $C > 0$ independente de ϵ .

Demonstração: Como $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}_\epsilon$ pela propriedade de invariância levantada existe uma trajetória $(u(\cdot), u_t(\cdot))$ em \mathcal{A}_ϵ tal que $(u(t), u_t(t)) = (u_0, u_1)$ par algum $t \in \mathbb{R}$. Por v^n e w^n denotamos as decomposições (A.26)–(A.27) e (A.28)–(A.29) com os dados iniciais tomados no instante $t - n$. O Lema A.9 implica que $\|v_t^n(t)\|_{L^2(\mathcal{O})} \rightarrow 0$ e $\|v^n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e o Lema A.10 implica a limitação

$$\|w^n(t)\|_2^2 + \epsilon \|w_t^n(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|w_t^n(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C.$$

Assim,

$$\begin{aligned} w^n(t) & \rightarrow a \quad \text{fraco em } E^2, \\ w_t^n(t) & \rightarrow b \quad \text{fraco em } E^1, \end{aligned}$$

com $a \in E^2$ e $b \in E^1$. Mas, como $u(t) = v^n(t) + w^n(t)$ segue-se que $a = u(t)$ e $b = u_t(t)$. A estimativa segue pela semicontinuidade inferior fraca sequencial da norma. ■

A.4 A quarta estimativa

A estimativa desta seção é inspirada pela prova de [41, Teorema 2.5]. A diferença entre o argumento de [41] e a estimativa a seguir consiste no fato de que, em vez da finitude da integral de dissipação, usamos as estimativas da etapa anterior. Formulamos e provamos o seguinte lema.

Lema A.12. *Para todo $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}_\epsilon$ temos $\|u_1\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C$, com a constante C independente de ϵ . Além disso, se $(u(\cdot), u_t(\cdot))$ é uma trajetória completa em \mathcal{A}_ϵ , então*

$$\epsilon \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

com a constante C independente de ϵ .

Demonstração: Seja $(u(\cdot), u_t(\cdot))$ uma trajetória completa em \mathcal{A}_ϵ tal que $(u(t), u_t(t)) = (u_0, u_1)$. Pelo Lema A.11 temos $(u(s), u_t(s)) \in E^2 \times E^1$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e

$$\epsilon \|u_t(s)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|u_t(s)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|u(s)\|_2^2 \leq C, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.37})$$

com constante independente de ϵ . Derivando (3.1) com relação ao tempo segue-se que $z = u_t$ satisfaz

$$\epsilon z_{tt} + z_t - \Delta z = \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u) + \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u)u_t, \quad (\text{A.38})$$

$$z = 0, \quad \text{sobre } \partial\mathcal{O}, \quad (\text{A.39})$$

$$z(\tau) = u_t(\tau), \quad z_t(\tau) = \frac{1}{\epsilon}(p_\epsilon(\tau, u(\tau)) - u_t(\tau) + \Delta u(\tau)), \quad (\text{A.40})$$

em que $\tau < t$ é arbitrário (mais adiante tomaremos $\tau = t - n$). Multiplicando (A.38) por z_t resulta que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2} \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \right) + \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u) \right\|_{L^\infty(\mathcal{O})}^2 \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned}$$

A imersão $H^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow C(\overline{\mathcal{O}})$ e a condição de crescimento sobre $\frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}$ e $\frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}$ implicam que

$$\frac{d}{dt} \left(\epsilon \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \right) + \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C. \quad (\text{A.41})$$

Se, por sua vez, multiplicarmos (A.38) por z , vemos que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\epsilon (z_t, z) + \frac{1}{2} \|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right) - \epsilon \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial t}(t, u) \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \left\| \frac{\partial p_\epsilon}{\partial u}(t, u) \right\|_{L^\infty(\mathcal{O})}^2 \|u_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\frac{d}{dt} \left(2\epsilon(z_t, z) + \|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right) - 2\epsilon\|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + 2\|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C.$$

Agora multiplicando esta estimativa por $1/4$ e somando a (A.41). Obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\epsilon\|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2}\epsilon(z_t, z) + \frac{1}{4}\|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right) \\ + \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon \right) \|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2}\|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C. \end{aligned}$$

Somando a ambos os lados $1/8\|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2$, o qual é limitado por (A.37), e denotando

$$\hat{E}(z_t, z) = \epsilon\|z_t\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|z\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \frac{1}{2}\epsilon(z_t, z) + \frac{1}{2}\|z\|_{L^2(\mathcal{O})}^2,$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(z_t, z) + \frac{1}{4}\hat{E}(z_t, z) \leq C.$$

Usando o Lema de Gronwall concluimos que

$$\hat{E}(z_t(t), z(t)) \leq \hat{E}(z_t(\tau), z(\tau))e^{\frac{\tau-t}{4}} + 4C.$$

Escolhemos $\tau = t - n$. Como $(u_t(t - n), u(t - n)) \in \mathcal{A}_\epsilon$, usando (A.37) e (A.40) podemos ver que $\hat{E}(z_t(\tau), z(\tau)) \leq C(1 + 1/\epsilon)$, enquanto que

$$\hat{E}(z_t(t), z(t)) \leq C \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) e^{-\frac{n}{4}} + 4C.$$

Uma vez que esta última desigualdade é válida para todo n , então para n suficientemente grande (dependendo de ϵ), resulta

$$\hat{E}(z_t(t), z(t)) \leq 4C + 1,$$

com a limitação independente de ϵ . A prova está completa. ■

A.4.1 Comparação das trajetórias

Provamos que o conjunto $\bigcup_{\epsilon \in (0,1]} \mathcal{A}_\epsilon$ é limitado em $H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})$. Mostraremos um resultado sobre a comparação das trajetórias de (3.1) e (3.2) para os dados iniciais pertencentes a este conjunto. O argumento do próximo lema é semelhante à prova do Lema 1 em [32].

Lema A.13. *Seja $(u_0, u_1) \in \bigcup_{\epsilon \in (0,1]} \mathcal{A}_\epsilon$. Denotaremos por $u(t)$ e $u_\epsilon(t)$ as soluções de (3.2) e (3.1), respectivamente, com condição inicial (u_0, u_1) tomada no instante t_0 , então*

$$\|u_\epsilon(t) - u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq \eta(\epsilon)(t - t_0)e^{C(t-t_0)}, \quad \text{para todo } t \geq t_0,$$

em que $\eta(\epsilon)$ converge para zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ uniformemente com relação a t_0, t e a condição inicial em $\bigcup_{\epsilon \in (0,1]} \mathcal{A}_\epsilon$.

Demonstração: Definimos $v(t) = u_\epsilon(t) - u(t)$ para $t \geq t_0$, então v satisfaz a equação

$$v_t - \Delta v = f_\epsilon(t, u_\epsilon) - f_0(u) - \epsilon u_{\epsilon tt}.$$

O lado direito da equação acima pertence a $L_{loc}^2([t_0, \infty); L^2(\mathcal{O}))$, e além disso, $v(t_0) = 0$, enquanto que $v \in L_{loc}^2([t_0, \infty); H^2(\mathcal{O})) \cap L_{loc}^\infty([t_0, \infty); H_0^1(\mathcal{O}))$ com $v_t \in L_{loc}^2([t_0, \infty); L^2(\mathcal{O}))$. Multiplicando a equação acima por v_t , obtemos após alguns cálculos simples que

$$\begin{aligned} & \|v_t(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \\ & \leq C(\|f_\epsilon(t, u_\epsilon(t)) - f_0(u_\epsilon(t))\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \|f_0(u_\epsilon(t)) - f_0(u(t))\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 + \epsilon^2 \|u_{\epsilon tt}(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2). \end{aligned}$$

Como $(u_\epsilon(\cdot), u_{\epsilon t}(\cdot))$ é uma trajetória completa em \mathcal{A}_ϵ , o Lema A.12 assegura que

$$\epsilon \|u_{\epsilon tt}(t)\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq C.$$

Além disso,

$$\|f_\epsilon(t, u_\epsilon(t)) - f_0(u_\epsilon(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C \sup_{|s| \leq R, t \in \mathbb{R}} |f_\epsilon(t, s) - f_0(s)|$$

em que

$$R = \sup_{\substack{(u,v) \in \bigcup_{\epsilon \in (0,1]} \mathcal{A}_\epsilon \\ x \in \mathcal{O}}} |u(x)|,$$

o qual é finito por imersão $H^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow C(\overline{\mathcal{O}})$ e o fato que $u_\epsilon(t)$ pertence a um conjunto limitado de $H^2(\mathcal{O})$. Assim, pelo Corolário 3.1,

$$\|f_\epsilon(t, u_\epsilon(t)) - f_0(u_\epsilon(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \eta(\epsilon).$$

De (3.11) e da imersão $H_0^1(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^6(\mathcal{O})$ segue-se que

$$\|f_0(u_\epsilon(t)) - f_0(u(t))\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C(1 + \|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 + \|u_\epsilon(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2) \|u_\epsilon(t) - u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})},$$

Por [42, Proposição 2.2] temos a limitação uniforme $\|u(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C$ com relação a escolha da condição inicial em $\bigcup_{\epsilon \in (0,1]} \mathcal{A}_\epsilon$ da solução da equação parabólica. Além disso, $(u_\epsilon(t), u_{\epsilon t}(t)) \in \mathcal{A}_\epsilon$, assim $\|u_\epsilon(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C$. Logo

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2 \leq C(\eta(\epsilon) + \|v(t)\|_{H_0^1(\mathcal{O})}^2).$$

E o resultado segue-se pelo Lema de Gronwall. ■

Bibliografia

- [1] G. M. Araújo, M. A. F. Araújo, and E. F. L. Lucena. On a system of equations of a non-newtonian micropolar fluid. *Journal of Applied Mathematics*, 2015.
- [2] L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [3] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, and J. K. Hale. A damped hyperbolic equation with critical exponent. *Comm. Partial Differential Equations*, 17:841–866, 1992.
- [4] A. V. Babin and M. I. Vishik. *Attractors of evolution equations*. North Holland, Amsterdam, 1992.
- [5] J. E. Billotti and J. P. LaSalle. Dissipative periodic processes. *Bull Am Math Soc*, 77(6):1082–1088, 1971.
- [6] W. Bixiang. Existence and upper semicontinuity of attractors for stochastic equations with deterministic non-autonomous terms. *Stochastics and Dynamics*, 2014. DOI:10.1142/S0219493714500099.
- [7] M. Bortolan, A. Carvalho, and J. Langa. Structure of attractors for skew product semiflows. *Journal of Differential Equations*, 257(2):490 – 522, 2014.
- [8] C. Calmelet-Eluhu and D. R. Majundar. Flow of a micropolar fluid through a circular cylinder subject to longitudinal and torsional oscillations. *Chapman Hall, First Edition*, 27(8):69–78, 1998.
- [9] A. Carvalho, J. A. Langa, and J. Robinson. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, volume 182. Springer, 2013.
- [10] A. N. Carvalho and J. Cholewa. Regularity of solutions on the global attractor for a semilinear damped wave equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337:932–948, 2008.

- [11] A. N. Carvalho and J. A. Langa. Non-autonomous perturbation of autonomous semilinear differential equations: Continuity of local stable and unstable manifolds. *J. Differential Equations*, 233:622–653, 2007.
- [12] A. N. Carvalho, J. A. Langa, and J. C. Robinson. On the continuity of pullback attractors for evolution processes. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(5):1812–1824, 2009.
- [13] D. N. Cheban, P. Kloeden, and B. Schmalfuß. The relationship between pullback, forwards and global attractors. *Nonlinear Dyn Syst Theory*, 2:125–144, 2002.
- [14] J. Chen, Z. Chen, and B. Dong. Existence of H^2 -global attractors of two-dimensional micropolar fluid flows. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 322:512–522, 2006.
- [15] V. V. Chepyzhov, V. Pata, and M. I. Vishik. Averaging of 2D Navier-Stokes equations with singularly oscillating forces. *Nonlinearity*, 22:351–370, 2009.
- [16] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik. *Attractors for equations of mathematical physics*, volume 49. American Mathematical Society Providence, RI, USA, 2002.
- [17] C. I. Christov and P. M. Jordan. Heat conduction paradox involving second-sound propagation in moving media. *Phys. Rev. Lett.*, 94(154301), 2005.
- [18] I. Chueshov. *Monotone random systems theory and applications*, volume 1779. Springer Science & Business Media, 2002.
- [19] P. Constantin and C. Foias. Global Lyapunov, exponents Kaplan-Yorke formulas and the dimension of the attractors for twodimensional Navier-Stokes equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 38:1–27, 1985.
- [20] M. Conti, V. Pata, and R. Temam. Attractors for processes on time-dependent spaces. Applications to wave equations. *J. Differential Equations*, 255:1254–1277, 2013.
- [21] M. Coti Zelati and P. Kalita. Minimality properties of set-valued processes and their pullback attractors. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47(2):1530–1561, 2015.
- [22] H. Crauel. Global random attractors are uniquely determined by attracting deterministic compact sets. *Annali di Matematica pura ed applicata*, 176(1):57–72, 1999.
- [23] H. Crauel. *Random probability measures on Polish spaces*, volume 11. CRC press, 2003.

- [24] H. Crauel, A. Deussche, and F. Flandoli. Random attractors. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 9(2):307–341, 1997.
- [25] H. Cui, M. M. Freitas, and J. A. Langa. On random cocycle attractors with autonomous attraction universes. *Discrete and Continuous Dynamical Systems (Aceito para publicação)*.
- [26] H. Cui and J. A. Langa. Uniform attractors for non-autonomous random dynamical systems. *Journal of Differential Equations*, page in press.
- [27] H. Cui, J. A. Langa, and Y. Li. Regularity and structure of pullback attractors for reaction-diffusion type systems without uniqueness. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 140:208 – 235, 2016.
- [28] A. Deussche. On the finite dimensionality of random attractors. *Stoch. Anal. Appl.*, 15(4):473–491, 1997.
- [29] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer, Berlin, 1985.
- [30] B. Dong and Z. Chen. Global attractors of two-dimensional micropolar fluid flows in some unbounded domains. *Applied Mathematics and Computation*, 182:610–620, 2006.
- [31] S. S. Dragomir. *Some Gronwall type inequalities and applications*. Nova Science Publishers Inc., Hauppauge, NY, 2003.
- [32] A. Eden and A. Milani. On the convergence of attractors and exponential attractors for singularly perturbed hyperbolic equations. *Tr. J. of Mathematics*, 19:102–117, 1995.
- [33] A. C. Eringen. Theory of micropolar fluids. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 16:1–18, 1966.
- [34] P. Fabrie, C. Galusinski, A. Miranville, and S. Zelik. Uniform exponential attractors for a singularly perturbed damped wave equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 10:211–238, 2004.
- [35] X. Fan. Attractors for a damped stochastic wave equation of the Sine-Gordon type with sublinear multiplicative noise. *Stochastic Analysis and Applications*, 24:767–793, 2006.
- [36] F. Flandoli and J. A. Langa. Determining modes for dissipative random dynamical systems. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 66(1-2):1–25, 1999.

- [37] J. Frehse and J. Málek. *Problems duo to the no-slip boundary in incompressible fluids dynamics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [38] M. Graselli and V. Pata. Asymptotic behavior of a parabolic-hyperbolic system. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 3:849–881, 2004.
- [39] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*. Mathematical surveys and monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [40] J. K. Hale. *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems, Mathematical Surveys and Monographs Number*. American Mathematical Society, Providence, Providence, 1988.
- [41] J. K. Hale and G. Raugel. Upper semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation. *J. Differential Equations*, 73:197–214, 1988.
- [42] J. K. Hale and G. Raugel. Lower semicontinuity of the attractor for a singularly perturbed hyperbolic equation. *J. Differential Equations*, 2(1), 1990.
- [43] P. E. Kloeden. Pullback attractors in nonautonomous difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 6(1):33–52, 2000.
- [44] P. E. Kloeden and J. A. Langa. Flattening, squeezing and the existence of random attractors. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 463:163–181, Jan. 2007.
- [45] P. E. Kloeden and J. A. Langa. Flattening, squeezing and the existence of random attractors. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 463, pages 163–181. The Royal Society, 2007.
- [46] P. E. Kloeden and M. Rasmussen. *Nonautonomous dynamical systems*. Number 176. American Mathematical Soc., 2011.
- [47] O. A. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, Science Publishers, New York, 1963.
- [48] O. A. Ladyzhenskaya. On finite dimensionality of bounded invariant sets for the Navier-Stokes equations and some other dissipative systems. *Zap. Nauchn. Semi. LOMI*, 115:3–15, 1982.
- [49] J. A. Langa. Finite-dimensional limiting dynamics of random dynamical systems. *Dynamical Systems: An International Journal*, 18(1):57–68, 2003.

- [50] J. A. Langa, J. C. Robinson, A. Suárez, and A. Vidal-López. The stability of attractors for nonautonomous perturbations of gradient-like systems. *J. Differential Equations*, 234(2):607–625, 2007.
- [51] D. Li and P. E. Kloeden. Equi-attraction and the continuous dependence of attractors on parameters. *Glasgow Mathematical Journal*, 46(01):131–141, 2004.
- [52] D. Li and P. E. Kloeden. Equi-attraction and the continuous dependence of pullback attractors on parameters. *Stochastics and Dynamics*, 4(03):373–384, 2004.
- [53] D. Li and P. E. Kloeden. Equi-attraction and continuous dependence of strong attractors of set-valued dynamical systems on parameters. *Set-Valued Analysis*, 13(4):405–416, 2005.
- [54] G. Lukaszewicz. *Micropolar Fluids, Theory and applications*. Modeling and simulations in Science, Engineering and Technology, Birkh 1999.
- [55] G. Lukaszewicz. Long time behavior of 2d micropolar fluid flows. *Mathematical and Computer Modelling*, 34:487–509, 2001.
- [56] Q. Ma, S. Wang, and C. Zhong. Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications. *Indiana Univ. Math. J.*, 51:1541–1559, 2002.
- [57] J. Málek and J. Nečas. Compact sets in the space $L^p(0, T, B)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 146:65–96, 1987.
- [58] J. Málek and J. Nečas. A finite-dimensional attractor for three-dimensional flow of incompressible fluids. *Journal of Differential Equations*, 127:498–518, 1996.
- [59] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, and M. Růžička. *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*. Chapman Hall, First Edition, 1996.
- [60] J. Málek and D. Pražák. On finite fractal dimension of the global attractor for a class of non-newtonian fluids. *Applied Mathematics Letters*, 13:105–110, 2000.
- [61] J. Málek and D. Pražák. Large time behavior via the method of l -trajectories. *Journal of Differential Equations*, 181:243–279, 2002.
- [62] P. Marín-Rubio and J. Real. On the relation between two different concepts of pullback attractors for non-autonomous dynamical systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(9):3956–3963, 2009.

- [63] A. Miranville, V. Pata, and S. Zelik. Exponential attractors for singularly perturbed damped wave equations: A simple construction. *Asymptotic Analysis*, 53:1–12, 2007.
- [64] J. Nečas. Sur le normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives. in *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles*, pages 102–128, 1966.
- [65] V. Pata and M. Squassina. On the strongly damped wave equation. *Commun. Math. Phys.*, 253:511–533, 2005.
- [66] J. C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems: an introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, volume 28. Cambridge University Press, 2001.
- [67] P. Szopa. Random attractors in H^1 for stochastic two dimensional micropolar fluid flows with spatial-valued noises. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 246:1–19, 2014.
- [68] R. Temam. *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [69] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1995.
- [70] R. Temam. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1997.
- [71] P. Walters. *Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [72] B. Wang. Sufficient and necessary criteria for existence of pullback attractors for non-compact random dynamical systems. *J. Differential Equations*, 253:1544–1583, 2012.
- [73] B. Wang. Random attractors for non-autonomous stochastic wave equations with multiplicative noise. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 34(1):269–300, 2014.
- [74] S. Zelik. Asymptotic regularity of solutions of a nonautonomous damped wave equation with a critical growth coefficient. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 3:921–934, 2004.