



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Problemas Elípticos Não-Locais com Condições de Fronteira Integrais

Joelma Morbach

Orientador: Prof^o. Dr^o Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa.

BELÉM

2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Problemas Elípticos Não-Locais com Condições de Fronteira Integrais

Joelma Morbach

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Joelma Morbach para obtenção do Grau de Doutora em Matemática do Curso de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA - UFAM.

Orientador: Prof^o. Dr^o Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa.

BELÉM

2014

Morbach, Joelma, 1981 -

Problemas Elípticos Não-Locais com Condições de Fronteira Integrais/ Joelma Morbach. - 2014.

Orientador: Prof^o. Dr^o Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Doutorado), Belém, 2014.

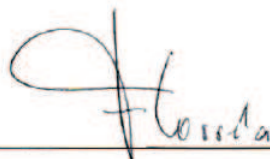
Equações diferenciais parciais. 2. Análise funcional não-linear. 3. Equações de Kirchhoff. 4. Fronteira integral. 5. Difusão. I. Título.

CDD 22. ed. 515.353

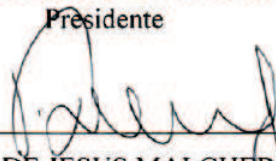
Joelma Morbach

Problemas Elípticos Não-Locais com Condições de Fronteira Integrais

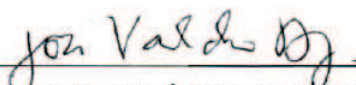
Esta tese foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Doutora em Matemática no Curso de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA - UFAM, pela seguinte banca examinadora:



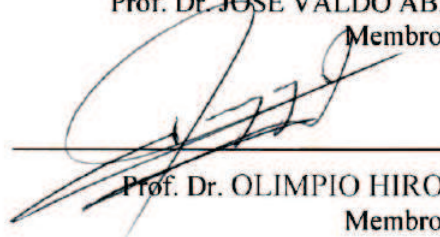
Prof. Dr. FRANCISCO JULIO SOBREIRA DE ARAUJO CORRÊA
Presidente



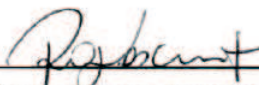
Prof. Dr. GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO
Membro



Prof. Dr. JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES
Membro



Prof. Dr. OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI
Membro



Profa. Dra. RÚBIA GONÇALVES NASCIMENTO
Membro

DATA DE AVALIAÇÃO: 26/05/2014

CONCEITO: EXC

Aos dois grandes amores da minha vida, minha filha Fabiana e meu esposo Juaci.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido vida, saúde e perseverança para realizar este trabalho.

À meu pai Albino Morbach, pelo seu carinho e seu cuidado. Por ter sempre acreditado em mim, me encorajado e me apoiado incondicionalmente.

A minha mãe Oneide Morbach, pela dedicação que sempre teve para comigo e para com toda a família, por seu amor e todas as suas orações em meu favor.

Ao meu orientador, professor Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa, pela tão paciente e eficiente orientação, assim como, pelo tempo dedicado aos nossos estudos e pelos conhecimentos e valores éticos que me repassou durante toda a realização desta tese e dos artigos.

Ao professor Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki da UFJF por participar desta banca, por ter aceitado ver a tese durante o Summer Meeting e pelas preciosas palavras e sugestões.

Aos Professores Dr. José Valdo Abreu Gonçalves da UFG, Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Dr^a. Rúbia Gonçalves Nascimento colegas da UFPA, por terem aceitado ler o trabalho e fazerem parte deste momento tão importante da minha vida.

A todos os demais professores e à coordenação deste programa que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta pós-graduação.

À Universidade Federal do Pará.

A todos os colegas do curso que contribuíram nas horas de estudo e de descontração.

A todos os meus familiares e amigos, pelos incentivos e pela confiança atribuída à minha pessoa.

Resumo

Neste estudo usaremos algumas técnicas de Análise Funcional Não-Linear para investigar existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos não-locais com condições de fronteira integrais

$$\begin{cases} D(\mathcal{J}(u))(-\Delta u + u) = f(\lambda, x, u, \mathfrak{B}_1(u)) & \text{em } \Omega \\ D(\mathcal{J}(u)) \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta u \right) = g(\lambda, x, u, \mathfrak{B}_2(u)) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.1)$$

em que Ω é um domínio suave e limitado do \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, o operador D na maioria dos casos será o termo de Kirchhoff $M(\|u\|^2)$ em que $\|u\|^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$ é a norma usual em $W^{1,2}(\Omega)$. Em outros casos, será um coeficiente de difusão que depende da população global em Ω . Temos ainda $\mathcal{J}(u) \in \left\{ \|u\|^2, \int_{\Omega} u dx \right\}$, f, g são funções dadas, \mathfrak{B}_i é um operador integral com $\mathfrak{B}_i(u) \in \left\{ \int_{\Omega} u^{\beta_i} dx, \int_{\partial\Omega} u^{\beta_i} d\sigma \right\}$, $d\sigma$ é a medida de superfície de Lebesgue em $\partial\Omega$, β_i é uma constante positiva, η é a normal exterior unitária em $\partial\Omega$. Em dois dos modelos de problema que estudaremos $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e num terceiro modelo teremos $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

Palavras chave: Kirchhoff, Fronteira Integral, Difusão, Krasnoselkii, Bifurcação, Rabinowitz, Subsolução, Supersolução, Neumann, Dirichlet.

Abstract

In this work we use some techniques of Nonlinear Functional Analysis to investigate the existence and multiplicity of solutions for the following class of nonlocal elliptic problems with integral boundary conditions

$$\begin{cases} D(\mathcal{J}(u))(-\Delta u + u) = f(\lambda, x, u, \mathfrak{B}_1(u)) & \text{in } \Omega \\ D(\mathcal{J}(u)) \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta u \right) = g(\lambda, x, u, \mathfrak{B}_2(u)) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.2)$$

where Ω is a smooth bounded domain in \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, the operator D in most cases will be the Kirchhoff term $M(x, \|u\|^2)$ with $\|u\|^2 = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx$ the usual norm in $W^{1,2}(\Omega)$. In another cases, be a diffusion coefficient which depends of global population in Ω . We still have $\mathcal{J}(u) \in \left\{ \|u\|^2, \int_{\Omega} u dx \right\}$, f, g are given functions, \mathfrak{B}_i is an integral operator of the type $\mathfrak{B}_i(u) \in \left\{ \int_{\Omega} u^{\beta_i} dx, \int_{\partial\Omega} u^{\beta_i} d\sigma \right\}$, $d\sigma$ is the Lebesgue surface measure on $\partial\Omega$, β_i is a positive constant and η is the unit exterior normal on $\partial\Omega$. In two models we study the problem $\alpha = 1$ and $\beta = 0$ and a third model we have $\alpha = 0$ and $\beta = 1$.

Key Words: Kirchhoff, Fronteira Integral, Difusão, Krasnoselkii, Bifurcação, Rabinowitz, Subsolução, Supersolução, Neumann, Dirichlet.

Índice de Notações

$\bar{\Omega}$, $|\Omega|$ e $\partial\Omega$ são, respectivamente, o fecho, a medida e a fronteira do conjunto Ω .

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u|^2 dx < +\infty \right\}.$$

$$\|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ é a norma usual em } L^2(\Omega).$$

$E := W^{1,2}(\Omega)$ é espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^2(\Omega)$.

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx \text{ é o produto interno usual em } W^{1,2}(\Omega).$$

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ é a norma usual em } W^{1,2}(\Omega).$$

$W_0^{1,2}(\Omega)$ é espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u \in L^2(\Omega)$ e $\int_{\partial\Omega} u dx = 0$.

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \text{ é o produto interno usual em } W_0^{1,2}(\Omega).$$

$$\|u\|_0 = \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ é a norma usual em } W_0^{1,2}(\Omega).$$

$$S(\Omega, 2, q) = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^{2/q}} \text{ é a melhor constante de Sobolev da}$$

imersão compacta $E \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \text{ é o operador Laplaciano aplicado a função } u.$$

$u_n \rightarrow u$ convergência forte (em norma)

$u_n \rightharpoonup u$ convergência fraca

$C^\alpha(\overline{\Omega})$ é o conjunto das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Holder-contínuas de expoente α que possuem extensão contínua em $\overline{\Omega}$

$C^{1,\alpha}(\Omega)$ é o conjunto das funções $u \in C^1(\Omega)$ cuja derivada é Holder-contínua com expoente $\alpha \in (0, 1)$.

$\|u\|_\infty = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$ é a norma em $C^0(\overline{\Omega})$

Sumário

1	Introdução	3
2	Problemas Lineares Não-Locais do Tipo Steklov-Neumann	11
2.1	Introdução	11
2.2	Problema de Steklov-Neumann Não-Local Tipo I: Um Caso Autoadjunto . .	13
2.3	Problema de Steklov-Neumann Não-Local Tipo II: Um Caso Não-Autoadjunto	21
3	Problemas a-Não-Locais Via Ponto Fixo	27
3.1	Introdução	27
3.2	Problema do Tipo 1	28
3.3	Problema do Tipo 2	31
4	Um Problema com Não-Linearidade Limitada	37
4.1	Introdução	37
4.2	Problema de Autovalor Não-Linear Via Bifurcação	38
5	Problemas do Tipo M-Linear e Sublinear	44
5.1	Introdução	44
5.2	Um Problema Não-Local M -linear Via Método de Galerkin	45
5.3	Um Problema Sublinear	50

5.4	Um Problema de Steklov-Neumann M-Linear	55
6	Problemas de Dirichlet Sob Condições de Fronteira Integrais	62
6.1	Introdução	62
6.2	Um Problema de Autovalor Linear	64
6.3	Existência e Multiplicidade Via Bifurcação	66
6.4	Uma Abordagem Via Sub e Supersolução	75
A	Sobre Convergências e Teoria dos Pontos Críticos	87
B	Teoremas de Krein-Rutman e Teoria de Regularidade Elíptica	91
C	Resultados Auxiliares do Capítulo V	97
D	Sobre o Gênero de Krasnoselkii e Teorema de Rabinowitz	102
	Bibliografia	108

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, analisaremos problemas do tipo

$$\begin{cases} D(\mathcal{J}(u))(-\Delta u + u) = f(\lambda, x, u, \mathfrak{B}_1(u)) & \text{em } \Omega \\ D(\mathcal{J}(u)) \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta u \right) = g(\lambda, x, u, \mathfrak{B}_2(u)) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

em que Ω é um domínio suave e limitado do \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, o operador D na maioria dos casos será o termo de Kirchhoff $M(\|u\|^2)$ ou um coeficiente de difusão que depende da população global em Ω , $\mathcal{J}(u) \in \left\{ \|u\|^2, \int_{\Omega} u dx \right\}$, f, g são funções dadas, \mathfrak{B}_i é um operador integral do tipo $\mathfrak{B}_i(u) \in \left\{ \int_{\Omega} u^{\beta_i} dx, \int_{\partial\Omega} u^{\beta_i} d\sigma \right\}$, $d\sigma$ é a medida de superfície de Lebesgue em $\partial\Omega$, β_i é uma constante positiva, η é a normal exterior unitária em $\partial\Omega$. Em dois dos modelos de problema que estudaremos $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e num terceiro modelo teremos $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

Focalizaremos nossa atenção em três modelos. O primeiro deles é a Equação de Kirchhoff que tem sido vastamente estudada sob condições de fronteira de Dirichlet. Mais precisamente, vários pesquisadores, dentre eles Alves-Corrêa-Ma [3], Ma [?], He-Zou [?], Perera-Zhang [?], Mao-Zhang [?] e Sun-Liu [?], têm estudado problemas como

$$\begin{cases} -M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é como acima, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Esse problema está relacionado com as soluções estacionárias da Equação Hiperbólica de Kirchhoff

$$u_{tt} - M\left(\int_{\Omega} |\nabla_x u(x, t)|^2 dx\right) \Delta_x u = f(x, t), \quad (1.3)$$

onde $M(s) = a + bs$, $a, b > 0$ são constantes e $s \geq 0$. Esse modelo foi proposto por Kirchhoff [32] em 1883 como uma extensão da clássica equação da onda de D'Alembert, para oscilações livres de uma corda elástica. O modelo de Kirchhoff leva em consideração as variações do comprimento da corda durante a oscilação.

Na verdade, o modelo introduzido em Kirchhoff [32] é da forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

e seus parâmetros possuem os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área de sua seção transversal, E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita, ρ é a densidade da massa e P_0 é a tensão inicial.

Os estudos iniciais clássicos dedicados à Equação de Kirchhoff foram feitos por Bernstein [12] e Pohozaev [40]. No entanto a equação (1.3) começou a receber maior atenção após a publicação do trabalho de Lions [35], no qual foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para tal problema.

No que concerne ao modelo estacionário, grande parte dos trabalhos relacionados a Equação de Kirchhoff estudaram-na sob condições de fronteira homogêneas de Dirichlet conforme modelo em (1.2).

Já Wang [44] estuda o problema de Dirichlet com condição de fronteira integral como

$$\begin{cases} Lu = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

em que o núcleo $K(x, y)$ é uma dada função. São estudados nesse trabalho problemas de

autovalor como, por exemplo,

$$\begin{cases} L\varphi = \lambda\varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = K \int_{\Omega} \varphi(y)dy & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro real e $K(x, y) = K$ é constante, existência de soluções para os casos linear e semilinear usando Princípios de Comparação e Teoria de Semigrupos.

Em Gladkov-Kim [29], os autores estudam a equação do calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c(x, t)u^p & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = \int_{\Omega} K(x, y, t)u^l(y, t)dy & \text{em } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

cuja versão estacionária é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = c(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u^l(y)dy & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

com $p, l > 0$. Em Kavallaris-Tzanetis [31] é estudado o problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_{\Omega} f(u)dx\right)^p} & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $0 \leq \beta = \beta(x) < +\infty$, $\beta \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado, $p > 0$ e f é uma função positiva, crescente e limitada, λ é um parâmetro com características físicas. Por exemplo, quando $N = 1$ e $p = 2$, a equação (1.9) modela o aquecimento Ohmico¹ e, nesse caso, λ é proporcional ao quadrado da diferença de potencial

¹A demanda por produtos minimamente processados de alta qualidade tem aumentado nas últimas décadas. O aquecimento Ohmico se destaca como uma promissora tecnologia para substituir o tratamento térmico convencional, tais como a pasteurização e a esterilização comercial. O aquecimento Ohmico é um processo onde se aplica corrente elétrica, por meio de eletrodos, com o objetivo de aquecer o produto. O calor gera-se internamente devido à resistência elétrica do mesmo, em que a taxa de geração de calor depende da diferença de potencial (voltagem) aplicada, e da condutividade elétrica do produto.

aplicado entre os extremos do circuito considerado.

Há outras motivações físicas importantes relacionadas com o problema (1.9) as quais estão relacionadas com uma variedade de processos tecnológicos.

Tais problemas não-locais surgem, por exemplo, no estudo analítico de fenômenos associados a ocorrência de banda de cisalhamento em corpos metálicos deformados sob altas taxas de deformação, veja Bebernes-Lacey [9], Bebernes-Talaga [11] e Bebernes-Li-Talaga [10] e suas referências.

A equação elíptica associada ao problema (1.9) é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda f(u)}{\left(\int_{\Omega} f(u) dx\right)^p} & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \beta u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.10)$$

Sob condições de fronteira de Neumann homogêneas como em

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

ou não-lineares, como em

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

o número de trabalhos é bem menor e dentre eles podemos citar Yang-Zhang [47], Corrêa-Nascimento [25] e Nascimento [38].

Dedicaremos uma parte deste trabalho a modelos que envolvem situações como

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = f\left(x, u, \int_{\Omega} u^{\alpha} dx\right) & \text{em } \Omega, \\ M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = g\left(x, u, \int_{\Omega} u^{\beta} dx\right) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

em $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $M : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas, $\alpha, \beta > 0$ e $\|u\|$ é a norma usual no espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

No caso em que $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são subcríticas, Wang-An [45] estudam o problema

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.14)$$

e apresentam dois resultados de existência para o problema (1.14), um deles usando Método de Galerkin e estimativa a priori e outro usando o Teorema do Passo da Montanha.

As novidades em nosso trabalho são a introdução do termo de Kirchhoff $M(\|u\|^2)$ e a consideração de condições de fronteira não-locais do tipo integral. Mais precisamente, estudaremos várias questões relacionadas com problemas cujo protótipo é dado por (1.13). Até onde conhecemos a quantidade de resultados concernentes ao problema (1.13) é bem pequena.

O segundo modelo que estudaremos está relacionado com problemas de difusão, como por exemplo, problemas que modelam crescimento populacional. O problema clássico consiste em encontrar uma função $u = u(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t - a \left(\int_{\Omega} u(x, t) dx \right) \Delta u = f & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.15)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado e regular, $T > 0$ é o tempo arbitrário e $a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ é uma função dada. Essa equação surge em várias situações. Por exemplo, $u = u(x, t)$ pode descrever uma população de bactérias - em um domínio Ω , em $x \in \Omega$, no tempo $0 < t < T$ - sujeita a disseminação. O coeficiente de difusão a é suposto dependente da população global em Ω em vez da população pontual (ou local) como é considerado na maioria dos modelos. Desse modo, o movimento de bactérias é guiado pelo estado global do meio ambiente.

Observemos que em (1.15) é considerada condição de fronteira de Dirichlet. É possível considerar o modelo (1.15) sob condições de fronteira mista, isto é,

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, t) = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times (0, T) \end{cases} \quad (1.16)$$

onde (Γ_0, Γ_1) é uma partição da fronteira de Ω . Nesse caso, não existe fluxo de bactérias através de Γ_1 .

Resultados relacionados com problemas de fronteira mista estão em andamento e serão apresentados em um trabalho futuro.

A versão estacionária de (1.15) é dada por

$$\begin{cases} -a \left(\int_{\Omega} u dx \right) \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.17)$$

e tem sido estudada por vários autores, tais como Chipot-Lovat ([18], [17]), Chipot-Rodrigues [19], Corrêa [22] e Bueno-Ercole-Zumpano [15].

Aqui, investigaremos questões relacionadas com

$$\begin{cases} a \left(\int_{\Omega} u dx \right) (-\Delta u + u) = f \left(x, \int_{\Omega} u dx \right) & \text{em } \Omega, \\ a \left(\int_{\Omega} u dx \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \left(\lambda, x, \int_{\Omega} u dx \right) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.18)$$

em que a , f e g são funções dadas. Observemos que existem algumas diferenças essenciais entre os problemas (1.13) e (1.18). Sob determinadas escolhas de f e g , o problema (1.13) possui estrutura variacional. No entanto, o problema (1.18) não possui estrutura variacional. Ao longo do trabalho algumas diferenças entre os problemas (1.13) e (1.18) ficarão evidenciadas.

Como no problema (1.13) as novidades aqui são a introdução de a e a condição de Neumann integral. Observemos também que em várias situações as integrais nos problemas (1.13) e (1.18) serão substituídas por integrais da forma $\int_{\partial\Omega} f(x, u) d\sigma$.

A seguir descreveremos o plano de estudo dessa tese.

No capítulo II faremos um estudo de problemas de autovalor lineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{I})$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} u dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{II})$$

em que λ é um parâmetro e m é um peso positivo em $C^0(\overline{\Omega})$. Usando teoremas do tipo Krein-Rutman faremos uma análise espectral tanto do problema (I), o qual é autoadjunto, e caracterizaremos o primeiro autovalor do problema (II), que não é autoadjunto.

No capítulo III investigaremos existência de solução positiva para algumas classes de problemas de difusão. Neste capítulo faremos uma abordagem via ponto fixo e usaremos técnicas como as apresentadas em Figueiredo-Morales-Santos Junior-Suárez [27]. Veremos que sob certas condições podemos garantir multiplicidade de soluções para uma dessas classes.

No capítulo IV nos dedicaremos ao estudo de um problema com termo não-linear limitado. Este problema será atacado usando-se o Teorema D.3 de Rabinowitz para encontrar componentes de soluções positivas. Esta técnica também será usada no capítulo VI.

No capítulo V mostraremos existência de solução para problemas não-locais do tipo M-linear e sublinear via método de Galerkin. Ressaltamos, que este capítulo da tese originou um artigo intitulado *Some Remarks on Elliptic Equations Under Nonlinear and Nonlocal Boundary Conditions*, o qual foi aceito para publicação na revista *Advances in Mathematical Sciences and Applications* Vol. 23, No. 2 (2013), pp. 529-543. Além disso, mostraremos existência de infinitas soluções para um problema que generaliza o problema estudado na Seção 2.2 do capítulo II. Faremos isso usando a Teoria do Gênero de Krasnoselski e mais alguns lemas que poderão ser encontrados no Apêndice D.

Por fim, no capítulo VI, focalizaremos nossa atenção em problemas do tipo

$$\begin{cases} -A\left(\int_{\Omega} v dx\right) \Delta v = f(v) & \text{em } \Omega, \\ v > 0 & \text{em } \Omega, \\ v = K \int_{\Omega} v dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.19)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um domínio limitado e regular, $K > 0$ é um parâmetro, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas satisfazendo determinadas condições, de acordo com as técnicas que serão empregadas. Inicialmente, consideraremos um problema de autovalor linear cujo primeiro autovalor é menor ou igual ao autovalor principal de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$. Depois, via teorema de Bifurcação de Rabinowitz [41], mostraremos existência e multiplicidade de soluções para um problema não-local com condição de fronteira de Dirichlet homogêneo equivalente ao problema (1.19), o qual é um Problema Dirichlet não-local com condição de fronteira integral. Nesse capítulo também faremos uma abordagem via sub e supersolução para mostrar existência de solução para um problema desse tipo.

Capítulo 2

Problemas Lineares Não-Locais do Tipo Steklov-Neumann

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos problemas de autovalor lineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{I})$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} u dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{II})$$

em que λ é um parâmetro, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado e regular, $d\sigma$ é a medida de superfície de Lebesgue em $\partial\Omega$, η é a normal exterior unitária em $\partial\Omega$ e m é um peso positivo em $C^0(\overline{\Omega})$.

Sob condições de fronteira locais, problemas do tipo (I) e (II) foram introduzidos por

Steklov [43]. Mais precisamente, em [43] é considerado o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

o qual foi, também, estudado por Calderon [16]. O problema (2.25) tem importante significado físico e as propriedades dos autovalores são bem conhecidas. Se $N = 2$ o problema (2.25) descreve a vibração de uma membrana livre cuja massa total está distribuída uniformemente sobre o bordo.

Relacionados, também, com problemas do tipo (I) e (II) sob condições de fronteiras locais temos a equação proveniente do Teorema de Sobolev do Traço. Mais precisamente, dada uma função $u \in C^1(\bar{\Omega}) \subset W^{1,2}(\Omega)$, pode-se definir a restrição de u a $\partial\Omega$. Esse operador restrição, que é linear, pode ser estendido continuamente a $W^{1,2}(\Omega)$, produzindo um operador linear contínuo

$$T : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow L^r(\partial\Omega)$$

para $1 \leq r \leq 2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$. Esse é o conhecido Teorema do Traço o qual está enunciado no Apêndice B e encontra-se demonstrado em Adams-Fournier [2]. A norma desse operador é dada por

$$S(\Omega, 2, r) = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega)} \{ \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2; \|u\|_{L^r(\partial\Omega)}^2 = 1 \} = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^r d\sigma \right)^{2/r}}. \quad (2.2)$$

No caso subcrítico, $r < 2_*$, o operador traço é compacto e existe uma função em $W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)$ que atinge o ínfimo descrito no problema (2.2). Esse extremo vem a ser a solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda |u|^{r-2} u & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

em que λ é um multiplicador de Lagrange.

No caso em que $r = 2$, chegamos ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

para o qual existe uma seqüência de autovalores reais (λ_j) com $\lambda_j \rightarrow +\infty$, em que o primeiro autovalor corresponde a $S(\Omega, 2, 2)$. Veja Bonder-Rossi [13], Lamberti [33], An-Lê [34], Rossi [42], Godoi [30] e suas referências.

2.2 Problema de Steklov-Neumann Não-Local Tipo I: Um Caso Autoadjunto

Nesta seção, estudaremos o problema de autovalor autoadjunto

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

fazendo sua análise espectral.

Suporemos que $m \in C^0(\overline{\Omega})$, mas se quisermos obter melhor regularidade nas soluções, poderemos supor $m \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$.

Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (2.5) se

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx = \lambda \int_{\Omega} m(x) u \varphi dx + \lambda \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right), \quad (2.6)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Temos ainda que (2.6) pode ser visto em termos do produto interno usual de $W^{1,2}(\Omega)$ como

$$\langle u, \varphi \rangle = \lambda \left[\int_{\Omega} m(x) u \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \right]. \quad (2.7)$$

Motivado por essa expressão, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada consideramos o funcional

linear

$$L_u : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longmapsto L_u(\varphi)$$

dado por

$$L_u(\varphi) = \int_{\Omega} m(x)u\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Observemos que L_u está bem definido e claramente é linear.

Como $u \in W^{1,2}(\Omega)$, temos $u \in L^2(\partial\Omega)$ e assim

$$\left| \int_{\partial\Omega} u d\sigma \right| \leq \|1\|_{L^2(\partial\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |L_u(\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} m(x)u\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |m(x)||u||\varphi| dx + \left| \int_{\partial\Omega} u d\sigma \right| \left| \int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |m(x)||u||\varphi| dx + |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &= \|m\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + |\partial\Omega| \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

e usando o Teorema do Traço

$$|L_u(\varphi)| \leq [C_1 \|m\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 |\partial\Omega| \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}] \|\varphi\|.$$

Como u está fixada, temos que

$$|L_u(\varphi)| \leq C(u) \cdot \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

e assim L_u é limitado. Desse modo, L_u é um funcional linear e contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixado, existe um único

$v := Su \in W^{1,2}(\Omega)$, tal que

$$L_u(\varphi) = \langle Su, \varphi \rangle,$$

isto é,

$$\langle v, \varphi \rangle = \int_{\Omega} m(x)u\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Observemos que, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada, v é a única solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta v + v = m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

Dessa forma, temos um operador

$$\begin{aligned} S : W^{1,2}(\Omega) &\longrightarrow W^{1,2}(\Omega) \\ u &\longmapsto v := Su \end{aligned}$$

em que $\langle Su, \varphi \rangle = L_u(\varphi)$

Observação 2.1. Usando a teoria da regularidade, observando que $mu \in L^2(\Omega)$ e, para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ fixada, $\int_{\partial\Omega} u d\sigma$ é uma constante, temos, pelo Teorema B.5 do Apêndice B, que $v \in W^{2,2}(\Omega)$ e

$$\|v\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}].$$

Proposição 2.1. O operador S acima definido é linear, contínuo, autoadjunto e compacto.

Demonstração.

Passo 1 : (S é linear) Dadas $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, existem únicos $Su_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ e $Su_2 \in W^{1,2}(\Omega)$ tais que para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ tem-se

$$\langle Su_1, \varphi \rangle = L_{u_1}(\varphi)$$

e

$$\langle Su_2, \varphi \rangle = L_{u_2}(\varphi).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle S(u_1 + \alpha u_2), \varphi \rangle &= L_{(u_1 + \alpha u_2)}(\varphi) \\
&= \int_{\Omega} m(x)(u_1 + \alpha u_2)\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} (u_1 + \alpha u_2) d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \\
&= \int_{\Omega} m(x)u_1\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_1 d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \\
&\quad + \alpha \left[\int_{\Omega} m(x)u_2\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_2 d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) \right] \\
&= L_{u_1}(\varphi) + \alpha L_{u_2}(\varphi) \\
&= \langle Su_1, \varphi \rangle + \alpha \langle Su_2, \varphi \rangle \\
&= \langle Su_1 + \alpha Su_2, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, $S(u_1 + \alpha u_2) = Su_1 + \alpha Su_2$ e S é linear.

Passo 2 : (S é autoadjunto) Para quaisquer $u_1, u_2 \in W^{1,2}(\Omega)$, com $v_1 = Su_1$ e $v_2 = Su_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle Su_1, u_2 \rangle &= \langle v_1, u_2 \rangle \\
&= \int_{\Omega} m(x)u_1u_2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_1 d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} u_2 d\sigma \right) \\
&= \int_{\Omega} m(x)u_2u_1 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u_2 d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} u_1 d\sigma \right) \\
&= \langle v_2, u_1 \rangle \\
&= \langle Su_2, u_1 \rangle \\
&= \langle u_1, Su_2 \rangle
\end{aligned}$$

de onde segue que S é autoadjunto.

Passo 3 : (S é compacto) Seja $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|Su_n - Su\|^2 &= \langle S(u_n - u), S(u_n - u) \rangle \\
&= \int_{\Omega} m(x)(u_n - u)S(u_n - u) dx + \left(\int_{\partial\Omega} (u_n - u) d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} S(u_n - u) d\sigma \right) \\
&\leq C_1 \|m\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|S(u_n - u)\| + C_2 |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u_n - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|S(u_n - u)\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Su_n - Su\| \leq \|m\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} + C |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u_n - u\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Desde que as imersões de $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e $W^{1,2}(\Omega)$ em $L^2(\partial\Omega)$ são compactas temos $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\partial\Omega)$ possivelmente para subsequências. Então, $Su_n \rightarrow Su$ em $W^{1,2}(\Omega)$ possivelmente para subsequências e daí S é compacto. Sendo S compacto, então S é limitado e desde que este é linear, temos S contínuo. ■

Observação 2.2. *Seja $Su = \mu u$ com $u \neq 0$. Supondo $\mu = 0$ então $Su = 0$ e daí*

$$0 = \langle 0, \varphi \rangle = \langle Su, \varphi \rangle = \int_{\Omega} m(x)u\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right),$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Fazendo $\varphi = u$, teremos

$$\int_{\Omega} m(x)u^2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 = 0.$$

Supondo $m > 0$, segue-se que

$$\int_{\Omega} m(x)u^2 dx = 0 \quad e \quad \int_{\partial\Omega} u d\sigma = 0 \tag{2.9}$$

Assim temos que

(i) Desde que $m > 0$ em Ω e $u \neq 0$, segue-se que $u^2 \geq 0$ e $u^2 \neq 0$, então a primeira igualdade em (2.9) nos leva a uma contradição. Portanto, $\mu = 0$ não é um autovalor de S .

(ii) Observemos que se $m = 0$, teremos $Su = 0$ se, e somente se,

$$\left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) = 0 \tag{2.10}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Ou seja $u \in \text{Ker}(S)$ se, e somente se, (2.10) acontece.

Logo, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então $\int_{\partial\Omega} u d\sigma = 0$ e assim (2.10) se verifica, isto é, $W_0^{1,2}(\Omega) \subset \text{Ker}(S)$.

Agora suponhamos $\mu \neq 0$ e $Su = \mu u$, $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$. Daí

$$\mu \langle u, \varphi \rangle = \langle Su, \varphi \rangle = \int_{\Omega} m(x)u\varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right),$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Fazendo $\varphi = u$, teremos

$$\mu \|u\|^2 = \int_{\Omega} m(x)u^2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 > 0$$

pois $m(x) > 0$ em Ω . Assim, segue que $\mu > 0$, ou seja, todos os autovalores de S são positivos.

Segue das observações e proposições precedentes e da teoria espectral para operadores compactos e autoadjuntos que existe uma seqüência (μ_j) de autovalores reais de S , com $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots > 0$ e $\mu_j \rightarrow 0$.

Além disso, já que

$$\langle Su, u \rangle = \int_{\Omega} m(x)u^2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 = \mu \|u\|^2 \geq 0,$$

sendo $u \neq 0$ temos $\langle Su, u \rangle > 0$. De onde segue que o operador S é positivo definido.

Assim, $Su = \mu u$ se, e somente se, $S \left(\frac{u}{\mu} \right) = u$ e daí,

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle S \left(\frac{u}{\mu} \right), \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} m(x) \frac{u}{\mu} \varphi dx + \left(\int_{\partial\Omega} \frac{u}{\mu} d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, ou seja,

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} m(x)u\varphi dx + \frac{1}{\mu} \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Fazendo $\lambda = \frac{1}{\mu}$ temos

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx = \lambda \int_{\Omega} m(x) u \varphi dx + \lambda \left(\int_{\partial \Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial \Omega} \varphi d\sigma \right) \quad (2.11)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Desse modo, fica evidente que os autovalores λ do problema (2.5) são os inversos dos autovalores de S . Logo, $\bar{\lambda}_j = \frac{1}{\mu_j}$ e desde que $\mu_j \rightarrow 0$ temos que $\bar{\lambda}_j \rightarrow +\infty$.

Com efeito, pela teoria da regularidade, $u \in W^{2,2}(\Omega)$ e (λ, u) satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial \Omega} u d\sigma & \text{em } \partial \Omega \end{cases} \quad (2.12)$$

no sentido fraco. De fato, usando a identidade de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} -\Delta u \varphi dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi d\sigma$$

em (2.11) temos

$$\int_{\Omega} -\Delta u \varphi dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi d\sigma + \int_{\Omega} u \varphi dx = \lambda \int_{\Omega} m(x) u \varphi dx + \lambda \left(\int_{\partial \Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial \Omega} \varphi d\sigma \right)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Logo,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u) \varphi dx - \lambda \int_{\Omega} m(x) u \varphi dx + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \varphi d\sigma - \lambda \left(\int_{\partial \Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial \Omega} \varphi d\sigma \right) = 0$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

O que equivale a

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - \lambda m(x)u) \varphi dx + \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} - \lambda \int_{\partial \Omega} u d\sigma \right] \varphi d\sigma = 0 \quad (2.13)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Assim, tomando $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, de (2.13) temos

$$\int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} - \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma \right] \varphi d\sigma = 0 \quad (2.14)$$

e que

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - \lambda m(x)u) \varphi dx = 0 \quad (2.15)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Portanto,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.16)$$

Da Teoria Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos segue-se que

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sup\{\langle Su, u \rangle; \|u\| = 1\} > 0 \\ &= \sup\left\{ \int_{\Omega} m(x)u^2 dx + \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2; \|u\| = 1 \right\} > 0 \end{aligned}$$

e existe $\varphi_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ com $\|\varphi_1\| = 1$ tal que $\langle S\varphi_1, \varphi_1 \rangle = \mu_1$ e $S\varphi_1 = \mu_1\varphi_1$. Desse modo $\mu_1 = r(S)$ em que $r(S)$ é o raio espectral de S ver Apêndice B, ou seja, $\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{r(S)}$.

Proposição 2.2. *As autofunções associadas ao primeiro autovalor têm sinal definido.*

Demonstração. Dada $v := Su$ com $u \geq 0$ em $W^{1,2}(\Omega)$, isto é, $u \geq 0$ quase sempre em Ω então v satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v + v = m(x)u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\partial\Omega} u d\sigma \geq 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco e daí, pelo Princípio do Máximo, $v \geq 0$ quase sempre em Ω , ou seja, S é um endomorfismo positivo. Temos ainda que o cone positivo em $W^{1,2}(\Omega)$ é dado por

$$[W^{1,2}(\Omega)]_+ = \{u \in W^{1,2}(\Omega); u \geq 0 \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

e se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ então $u = u^+ - u^-$ com $u^+ \in [W^{1,2}(\Omega)]_+$ e $u^- \in [W^{1,2}(\Omega)]_+$. Assim, $W^{1,2}(\Omega) = [W^{1,2}(\Omega)]_+ - [W^{1,2}(\Omega)]_+$, o que significa que $[W^{1,2}(\Omega)]_+$ é um cone positivo total

neste espaço. Além disso, S é positivo $S([W^{1,2}(\Omega)]_+) \subset [W^{1,2}(\Omega)]_+$, S é compacto e possui raio espectral positivo. Logo, pelo Teorema B.1, segue-se $\mu_1 = r(S)$ é um autovalor de S e que as autofunções associadas à $\mu_1 = r(T)$ podem ser tomadas em $[W_0^{1,2}(\Omega)]_+$. Assim, $\varphi_1 \geq 0$ quase sempre em Ω . Além disso, desde que φ_1 é autofunção então $\varphi_1 \not\equiv 0$. ■

Devemos observar que, pela Teoria da Regularidade, $\varphi_j \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.3. *O autovalor λ_1 é simples.*

Demonstração. Suponhamos que ψ_1 e φ_1 são autofunções associada a λ_1 e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como S é linear temos

$$S(\alpha\varphi_1 + \psi_1) = \mu_1(\alpha\varphi_1 + \psi_1).$$

Assim, $\alpha\varphi_1 + \psi_1$ também é autofunção associada a λ_1 e, portanto, tem sinal definido como vimos na observação anterior. Logo os conjuntos, $A := \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha\varphi_1 + \psi_1 \geq 0\}$ e $B := \{\alpha \in \mathbb{R}; \alpha\varphi_1 + \psi_1 \leq 0\}$ são ambos não vazios, fechados e $A \cup B = \mathbb{R}$. Portanto, existe $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\alpha}\varphi_1 + \psi_1 = 0$. De onde segue que essas autofunções são linearmente dependentes e o auto-espaço associado a λ_1 é gerado por φ_1 . ■

2.3 Problema de Steklov-Neumann Não-Local Tipo II: Um Caso Não-Autoadjunto

A seguir, consideraremos o seguinte problema de autovalor que surgirá em aplicações futuras e que não possui estrutura autoadjunta como no caso anterior:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} u dx & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Vejamos como fica a formulação fraca do problema. Dizemos que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (2.17) se

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) dx = \lambda \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right), \quad (2.18)$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Motivado por (2.18), para cada $u \in W^{1,2}(\Omega)$ definimos o funcional

$$l_u : W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right),$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Claramente l_u está bem definida, é linear e contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $v := Tu \in W^{1,2}(\Omega)$, tal que $l_u(\varphi) = \langle Tu, \varphi \rangle$.

Ou seja,

$$\int_{\Omega} (\nabla v \nabla \varphi + v \varphi) dx = \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right).$$

Em virtude de termos no produto $\left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right)$ uma integral em Ω e outra em $\partial\Omega$, esse operador, que é linear e contínuo, não é autoadjunto. De fato, esse operador é contínuo pois,

$$\begin{aligned} \|Tu\|^2 &= \langle Tu, Tu \rangle = l_u(Tu) \\ &= \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} Tu d\sigma \right) \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |Tu|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} C \|u\| \|Tu\| \end{aligned}$$

e assim

$$\|Tu\| \leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} C \|u\|.$$

No entanto, não é autoadjunto, pois se tomarmos $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $\int_{\Omega} \varphi dx \neq 0$ e $u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)$ com $\int_{\partial\Omega} u d\sigma \neq 0$ teremos

$$\langle Tu, \varphi \rangle = \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right) = 0, \quad (2.19)$$

e

$$\langle u, T\varphi \rangle = \left(\int_{\Omega} \varphi dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \neq 0. \quad (2.20)$$

Em vista disso, faremos uma abordagem de (2.17) de uma maneira distinta daquela feita na seção precedente para o problema (2.5).

Para $u \in C^0(\bar{\Omega})$ consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \int_{\Omega} u dx & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.21)$$

Pelo Teorema B.5, usando o fato de que $\int_{\Omega} u dx$ é um número real, o problema (2.21) possui uma única solução $v \in W^{2,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left\| \int_{\Omega} u dx \right\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C \left\| \int_{\Omega} u dx \right\|_{L^p(\partial\Omega)}^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} u dx \right\|_{L^p(\partial\Omega)} &= \left(\int_{\partial\Omega} \left| \int_{\Omega} u dx \right|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\partial\Omega} \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^p |\Omega|^p \right) d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\Omega| |\partial\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C |\Omega| |\partial\Omega|^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (2.22)$$

Tomando $p > N$ teremos

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$$

e daí

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Desse modo, se chamarmos $v := Tu$, a desigualdade (2.22) nos diz que o operador

$$\begin{aligned} T : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \\ u &\longmapsto Tu = v \end{aligned}$$

é contínuo. Notemos também que este operador é linear, por causa da linearidade da integral e tomando $p > N$, já que $\int_{\Omega} u dx \in \mathbb{R}$ e Ω é limitado, podemos usar a imersão compacta $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ e concluir que

$$\begin{aligned} T : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \\ u &\longmapsto Tu = v \end{aligned}$$

é linear e compacto.

Desse modo, acabamos de demonstrar que

Proposição 2.4. *O operador solução associado ao problema (2.17) visto como operador*

$$\begin{aligned} T : C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \\ u &\longmapsto Tu = v \end{aligned}$$

é linear, contínuo e compacto.

Mesmo este operador não sendo autoadjunto como no caso anterior é possível realizarmos a caracterização de seu autovalor principal. Faremos isso no resultado a seguir.

Teorema 2.1. *O primeiro autovalor de T é simples, possui autofunção positiva e não existe nenhum outro autovalor de T com autofunção positiva.*

Demonstração. Consideremos o cone $[C^0(\overline{\Omega})]^+ = \{u \in C^0(\overline{\Omega}); u \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}\}$ e observemos que $T([C^0(\overline{\Omega})]^+) \subset [C^0(\overline{\Omega})]^+$, pois se $u \in [C^0(\overline{\Omega})]^+$, pelo princípio do máximo, $v := Tu \geq 0$. Desse modo, T é positivo. Além disso, dada $u \in C^0(\overline{\Omega})$, $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $u \not\equiv 0$ temos $\int_{\Omega} u dx > 0$. Assim, $v \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $v \not\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$. Pelo Princípio do Máximo em Amann ([4] pag. 634), temos que $v(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Se $v(x) = 0$ para algum $x \in \partial\Omega$ então, pelo mesmo Princípio do Máximo, teríamos $0 > \frac{\partial v(x)}{\partial \eta} = \int_{\Omega} u dx \in \mathbb{R} > 0$, o que é uma

contradição. Dessa forma, $v(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e, portanto, existe $v_0 > 0$ tal que $v(x) > v_0 > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Assim, se $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e $u \not\equiv 0$, então $v := Tu$ satisfaz $v(x) > v_0 > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e, portanto, $v \in \text{int}[C^0(\overline{\Omega})]^+$. De fato, já que $v_0 > 0$, basta tomar $r = \frac{v_0}{2}$ para ver que toda $\omega \in B_r(v) \subset C^0(\overline{\Omega})$ satisfaz $\omega(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, ou seja, $B_r(v) \subset [C^0(\overline{\Omega})]^+$. Conseqüentemente, $v \in \text{int}[C^0(\overline{\Omega})]^+$ e T é fortemente positiva. Logo pelo Teorema B.2 do Apêndice B, o raio espectral de T , $r(T)$, é positivo, é autovalor simples de T tendo autofunção positiva e não existe nenhum outro autovalor de T com autofunção positiva. ■

Observação 2.3. *Tanto no primeiro caso (autoadjunto), quanto no segundo caso (não-autoadjunto) poderíamos ter considerado problemas mais gerais. Por exemplo, no primeiro caso poderíamos considerar o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m_1(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda m_2(x) \int_{\partial\Omega} m_2(x)u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.23)$$

com $m_1 \in C^0(\overline{\Omega})$ e $m_2 \in C^0(\partial\Omega)$ ou com $m_1 \in L^r(\Omega)$ e $m_2 \in L^s(\partial\Omega)$ para r e s convenientes. Este teria o mesmo comportamento do primeiro problema, sendo também autoadjunto e poderíamos proceder a caracterização dos autovalores deste e das autofunções associadas a estes autovalores. No segundo caso, poderíamos ter considerado também um problema mais geral do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda r(x) \int_{\Omega} r(x)u dx & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

No entanto, optou-se por resolver esses problemas pois os resultados obtidos neste capítulo serão usados em outros problemas, especialmente na Seção 4.2 para resolver um problema de autovalor não-linear via bifurcação e em problemas de trabalhos ainda em andamento.

Observação 2.4. *É importante dizer que problemas de autovalores do tipo Steklov-Neumann têm despertado bastante interesse ultimamente. Veja, por exemplo, Godoi [30], Pardo [39] e as referências desses.*

Em Pardo [39] por exemplo a autora apresenta um estudo bem completo de uma equação elíptica com uma condição de contorno não-linear que é assintoticamente linear no infinito

e que depende de um parâmetro dada por

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u + g(x, u) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.25)$$

Como o parâmetro cruza alguns valores críticos (conhecidos como autovalores de Steklov) um fenômeno de ressonância aparece na equação garantindo a existência de componentes ilimitadas de soluções. Este fenômeno é conhecido como bifurcação no infinito. Pardo [39] estuda ainda essas componentes de soluções e caracteriza-as quando subcrítico (à esquerda do autovalor) ou supercrítico (à direita do autovalor). Aplica estes resultados para garantir a existência de soluções para o problema ressonante.

Ressaltamos também que durante a realização desta tese, tomamos conhecimento do trabalho de Abreu-Suárez-Morales Rodrigo [1], no qual, os autores estudam o seguinte problema de autovalor com condição de fronteira não-local.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - u^p & \text{em } \Omega, \\ B(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x)u(x)dx & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.26)$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro real, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com borda suave, $p > 1$, $K \in C(\bar{\Omega})$ é uma função real não negativa e não-trivial satisfazendo algumas hipóteses, $B(u) := \alpha_0 \partial_{\eta} u + \beta(x)u$ e $\beta \in C(\partial\Omega)$. Os mesmos consideram dois casos: $\alpha_0 = 1$ e β pode mudar de sinal (Robin) ou $\alpha_0 = 0$ e $\beta \equiv 1$ (Dirichlet). Tal problema está relacionado com o problema (2.5) da nossa tese.

Capítulo 3

Problemas a -Não-Locais Via Ponto Fixo

3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos problemas do tipo

$$\begin{cases} a\left(\int_{\Omega} u dx\right) (-\Delta u + u) = f\left(x, \int_{\Omega} u dx\right) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ a\left(\int_{\Omega} u dx\right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = g\left(\lambda, x, \int_{\Omega} u dx\right) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ é um domínio limitado e suave, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \times \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas e λ é um parâmetro real.

O estudo de (3.1) foi motivado por Wang [44] no qual o autor trabalha com o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro real e $K(x, y)$ é um certo núcleo.

Wang [44] mostra, entre outras coisas, que se $\lambda < \frac{1}{|\Omega|}$, então o problema (3.2) possui

uma única solução clássica. Aqui, usando abordagem de ponto fixo, estudaremos algumas classes do problema (3.1).

Usaremos uma técnica usada por Figueiredo-Morales-Santos Junior-Suárez [27] e, para simplificar os cálculos, suporemos $a(x, t) = a(t)$, muito embora tudo possa ser feito se considerarmos $a = a(x, t)$. Nesse caso, a hipótese de regularidade sobre a será

$$a(., t) \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega)$$

para $t \geq 0$ e $p > 1$.

3.2 Problema do Tipo 1

Nesta seção investigaremos o problema, que será chamado do Tipo 1,

$$\begin{cases} a \left(\int_{\Omega} u dx \right) (-\Delta u + u) = f(x) \left(\int_{\Omega} u dx \right)^{\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ a \left(\int_{\Omega} u dx \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \left(\int_{\Omega} u dx \right)^{\beta} & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

em que $f \in L^2(\Omega)$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ e a , α e β satisfazem:

$$(a_1) \quad 0 < a_0 \leq a(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

$$(a_2) \quad 0 < \alpha < 1; \alpha \leq \beta \text{ e } \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{a(R)}{R^{\beta}} > 0$$

Teorema 3.1. *Se $f \in L^2(\Omega)$ é tal que $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ e valem as hipóteses (a_1) e (a_2) então o problema (3.3) possui ao menos uma solução.*

Demonstração. Para cada $R \geq 0$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \frac{f(x)}{a(R)} R^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{a(R)} R^\beta & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Desde que $f \in L^2(\Omega)$, R e $a(R)$ estão fixadas, segue-se que (3.4) possui uma única solução fraca $u_R \in W^{2,2}(\Omega)$, isto é, $u_R \in W^{2,2}(\Omega)$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_R + u_R = \frac{f(x)}{a(R)} R^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_R}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{a(R)} R^\beta & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

no sentido fraco e, pelo Princípio do Máximo, $u_R > 0$ em Ω . Observemos que u_R não é constante pois f não o é. Assim, usando $\varphi \equiv 1 \in W^{1,2}(\Omega)$ como função teste e integração por partes em (3.5), obtemos

$$\int_{\Omega} u_R dx = \frac{R^\alpha}{a(R)} \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda R^\beta}{a(R)} |\partial\Omega|. \quad (3.6)$$

Consideremos a função $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$g(R) = \frac{R^\alpha}{a(R)} \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda R^\beta}{a(R)} |\partial\Omega| \quad (3.7)$$

a qual é contínua. Observemos que $g(0) = 0$.

Por (a_2) , existe $K > 0$ e $R_0 > 1$ tal que $\frac{a(R)}{R^\beta} \geq K$ se $R \geq R_0 > 0$ e desde que $0 < \alpha \leq \beta$ temos

$$\frac{a(R)}{R^\alpha} \geq \frac{a(R)}{R^\beta} \geq K \text{ se } R \geq R_0 > 0 \quad (3.8)$$

e daí

$$\frac{R^\beta}{a(R)}, \frac{R^\alpha}{a(R)} \leq \frac{1}{K} = C_1 \text{ se } R \geq R_0 > 0. \quad (3.9)$$

Se $0 \leq R \leq R_0$, em virtude das continuidades de R^α , R^β e $a(R)$ e pelo fato de valer (a_1) , tem-se

$$\frac{R^\beta}{a(R)}, \frac{R^\alpha}{a(R)} \leq C_2 \text{ para todo } R \in [0, R_0]. \quad (3.10)$$

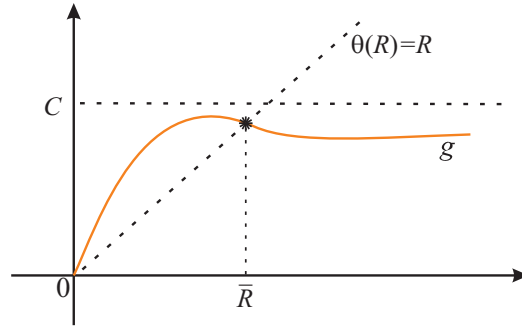
De (3.9) e (3.10),

$$\frac{R^\beta}{a(R)}, \frac{R^\alpha}{a(R)} \leq C = \max\{C_1, C_2\} \text{ para todo } R \geq 0. \quad (3.11)$$

Portanto,

$$g(R) \leq C \text{ para todo } R > 0. \quad (3.12)$$

Como $g(0) = 0$ e desde que $0 < \alpha < 1$ tem-se que $\lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{g(R)}{R} = +\infty$, então o gráfico de g tem o seguinte comportamento



e, portanto, existe $\bar{R} > 0$ tal que $g(\bar{R}) = \bar{R}$. De (3.6) e (3.7), concluímos que

$$\bar{R} = \int_{\Omega} u_{\bar{R}} dx \quad (3.13)$$

e assim, $u_{\bar{R}}$ satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{\bar{R}} + u_{\bar{R}} = \frac{f(x)}{a\left(\int_{\Omega} u_{\bar{R}} dx\right)} \left(\int_{\Omega} u_{\bar{R}} dx\right)^{\alpha} \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u_{\bar{R}}}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{a\left(\int_{\Omega} u_{\bar{R}} dx\right)} \left(\int_{\Omega} u_{\bar{R}} dx\right)^{\beta} \text{ em } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

o que conclui a demonstração. ■

Observação 3.1. *Notemos que a hipótese (a_2) nos diz que, em particular, a função a não pode ser limitada. A limitação de a ocorre na maioria dos trabalhos em que esse termo aparece em problemas sob condições de fronteira de Dirichlet. Vide [18], [17], [19] e Chipot [20].*

3.3 Problema do Tipo 2

Nesta seção, consideraremos o problema singular, que será chamado do Tipo 2,

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \left(\int_{\Omega} u dx \right) (-\Delta u + u) = f(x) \left(\int_{\Omega} u dx \right)^{\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ a \left(\int_{\Omega} u dx \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{\left(\int_{\Omega} u dx \right)^{\beta}} & \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.15)$$

em que $\alpha, \beta > 0$. Consideremos a hipótese

$$(a_3) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{\alpha}}{a(R)} = \gamma \geq 0$$

Teorema 3.2. *Seja $f \in L^2(\Omega)$ tal que $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ e, suponhamos que, além da hipótese (a_1) da seção anterior, tenhamos ainda a condição (a_3) . Então o problema singular (3.15) possui ao menos uma solução.*

Demonstração. Como no Teorema 3.1, fixemos $R > 0$, e consideremos o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = \frac{f(x)}{a(R)} R^{\alpha} & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{a(R)} \frac{1}{R^{\beta}} & \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

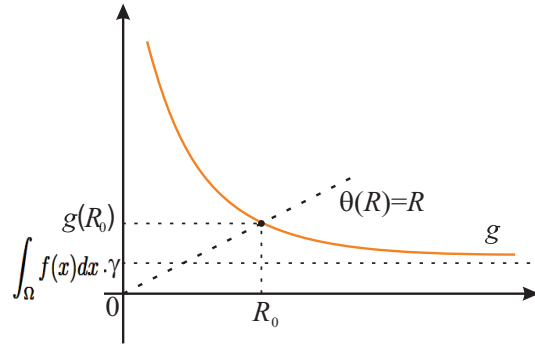
Designemos por u_R a solução positiva deste problema. Assim,

$$\int_{\Omega} u_R dx = \frac{R^{\alpha}}{a(R)} \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda}{a(R)} \frac{|\partial\Omega|}{R^{\beta}}. \quad (3.17)$$

Seja $g : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ a função contínua

$$g(R) = \frac{R^{\alpha}}{a(R)} \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda}{a(R)} \frac{|\partial\Omega|}{R^{\beta}}. \quad (3.18)$$

Observemos que $\lim_{R \rightarrow 0^+} g(R) = +\infty$ e da hipótese (a_3) temos $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^{\alpha}}{a(R)} = \gamma \geq 0$. Logo a função g tem o seguinte comportamento



Assim, existe $R_0 > 0$ tal que $g(R_0) = R_0$ e daí, raciocinando como no Teorema 3.1, u_{R_0} é solução do problema (3.15), o que conclui a demonstração do teorema. ■

Se a for uma função constante, obtemos resultados de multiplicidade para o problema singular.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $a \equiv 1$. Portanto, temos o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f(x) \left(\int_{\Omega} u dx \right)^{\alpha} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\lambda}{\left(\int_{\Omega} u dx \right)^{\beta}} & \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (3.19)$$

e o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *Seja $f \in L^2(\Omega)$ tal que $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ e $\alpha, \beta > 0$. Então o problema (3.19) possui*

- (i) *ao menos duas soluções distintas se $\alpha > 1$ e $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno;*
- (ii) *ao menos duas soluções distintas se $0 < \alpha < 1$ e $\lambda > 0$ é suficientemente grande;*
- (iii) *uma solução se $\alpha = 1$ e $\int_{\Omega} f(x) dx < 1$.*

Demonstração. Como antes, fixemos $R > 0$, e consideremos o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u = f(x) R^{\alpha} & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \frac{1}{R^{\beta}} & \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Designemos sua solução positiva por u_R . Logo,

$$\int_{\Omega} u_R dx = R^{\alpha} \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda |\partial\Omega|}{R^{\beta}}. \quad (3.21)$$

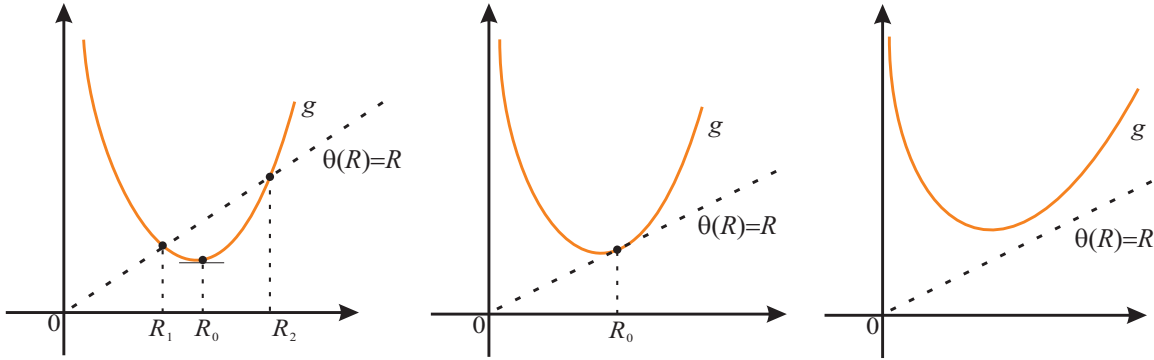
Seja $g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dada por

$$g(R) = R^{\alpha} \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda |\partial\Omega|}{R^{\beta}} \quad (3.22)$$

donde

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} g(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} g(R) = +\infty, \quad (3.23)$$

ou seja, g tem o comportamento de uma das figuras a seguir.



Dessa forma, a questão é saber sob quais condições existe $R_0 > 0$ tal que $g(R_0) < R_0$.

Tem-se que $g'(R) = 0$ se, e somente se,

$$g'(R) = \alpha R^{\alpha-1} \int_{\Omega} f(x) dx - \frac{\beta \lambda |\partial\Omega|}{R^{\beta+1}} = 0.$$

Fazendo $\int_{\Omega} f(x) dx := I_f > 0$, temos

$$g'(R) = \alpha R^{\alpha-1} I_f - \frac{\beta \lambda |\partial\Omega|}{R^{\beta+1}} = 0.$$

Assim, $g'(R_0) = 0$ se, e somente se,

$$\alpha R_0^{\alpha-1} I_f = \frac{\beta \lambda |\partial\Omega|}{R_0^{\beta+1}},$$

o que, por sua vez, equivale a

$$R_0^{\alpha+\beta} = \frac{\beta\lambda|\partial\Omega|}{\alpha I_f}.$$

A qual ocorre se, e somente se,

$$R_0 = \left(\frac{\beta\lambda|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Portanto,

$$g(R_0) = \left(\frac{\beta\lambda|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \frac{\lambda|\partial\Omega|}{\left(\frac{\beta\lambda|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} < R_0$$

se, e somente se,

$$\left(\frac{\beta\lambda|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \frac{\lambda|\partial\Omega|}{\left(\frac{\beta\lambda|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} < \left(\frac{\beta\lambda|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Chamando $A := \left(\frac{\beta|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$, $B := \frac{|\partial\Omega|}{\left(\frac{\beta|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$ e $C := \left(\frac{\beta|\partial\Omega|}{\alpha I_f} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ temos

$$A\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + B\lambda^{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} < C\lambda^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

ou seja

$$A\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + B\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} < C\lambda^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

e assim

$$(A + B)\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} < C\lambda^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

que implica em

$$(A + B) < C\lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Caso (i): Se $\alpha > 1$, então

$$(A + B)\lambda^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}} < C$$

se, e somente se,

$$\lambda^{\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}} < \frac{C}{(A+B)} \quad (3.24)$$

e esta ocorre se $\lambda > 0$ for suficientemente pequeno, ou seja, existem $0 < R_1 < R_2$ tais que $g(R_1) = R_1$ e $g(R_2) = R_2$. Logo, g possui dois pontos fixos distintos e, conseqüentemente temos duas soluções distintas para o problema.

Caso (ii): Se $0 < \alpha < 1$, então

$$(A+B) < \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}} C$$

se, e somente se,

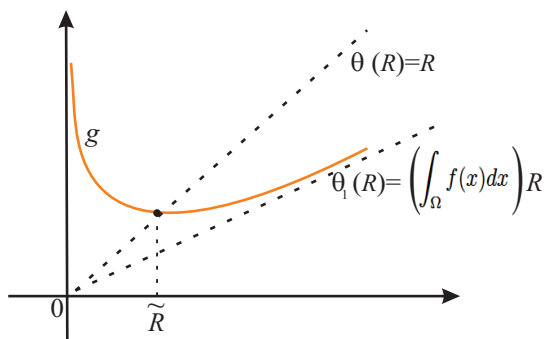
$$\frac{(A+B)}{C} < \lambda^{\frac{1-\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (3.25)$$

e esta ocorre se λ for suficientemente grande e obtemos, novamente, duas soluções distintas para o problema.

Caso (iii): Se $\alpha = 1$ então

$$g(R) = R \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda |\partial\Omega|}{R^{\beta}}$$

e podemos pensar em g como na figura



Assim,

$$\frac{g(R)}{R} = \int_{\Omega} f(x) dx + \frac{\lambda |\partial\Omega|}{R^{\beta+1}} \longrightarrow \int_{\Omega} f(x) dx.$$

E já que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{g(R)}{R} = \int_{\Omega} f(x) dx$$

e $\int_{\Omega} f(x)dx < 1$ temos uma solução, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Observação 3.2. *Nesse caso singular pode-se considerar a não-constante e não-crescente.*

No entanto, $g(R)$ seria dada por

$$g(R) = \frac{R^{\alpha}}{a(R)} \int_{\Omega} f(x)dx + \frac{\lambda|\partial\Omega|}{a(R)R^{\beta}}$$

e a análise de g' seria mais complicada. A análise dessa situação aparecerá em outro trabalho.

Capítulo 4

Um Problema com Não-Linearidade Limitada

4.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos um problema em que o termo não-linear é limitado. Consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_{\Omega} u dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função não-linear que, além de outras hipóteses, é limitada. Mostraremos que sob certas condições este problema possui ao menos uma solução fraca positiva. Para atacar esse tipo de problema usaremos um teorema devido a Rabinowitz o qual enunciamos no Apêndice D e pode ser encontrado em Rabinowitz [41]. Assim, esse problema será abordado via um Método Topológico. Observamos que, no problema (4.1), não temos a presença do termo de Kirchhoff.

4.2 Problema de Autovalor Não-Linear Via Bifurcação

Nesta seção, abordaremos o problema (4.1) e vamos usar um resultado obtido na Seção 2.3 sobre problemas de autovalor de Steklov-Neumann e outro importante resultado devido a Rabinowitz, para encontrar uma solução de um problema de autovalor não-linear e com isso mostrar que o problema não-linear (4.1) possui ao menos uma solução positiva.

Suporemos que $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e satisfaz

(g_1) Existe uma constante $C > 0$ tal que $g(t) \leq C$ para todo $t \geq 0$ e $g(0) > 0$.

Além disso, estenderemos $g(t)$ para $t < 0$, pondo $g(t) = g(0)$ se $t < 0$. Continuaremos chamando tal extensão de g . Desse modo, se $u \in C^0(\bar{\Omega})$, então $g(u) \in C^0(\bar{\Omega})$. Como estamos interessados em soluções positivas, para atacar o problema (4.1) consideraremos o problema de autovalor não-linear

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda g(u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} |u| dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $\lambda \geq 0$ é um parâmetro real, pois estamos interessados em soluções positivas.

Mostraremos que para $\lambda = 1$ o problema (4.2) possui uma solução positiva e daí será solução do problema (4.1).

Teorema 4.1. *Se $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua satisfazendo a hipótese (g_1) e o primeiro autovalor de Steklov-Neumann do problema (2.17) é maior que 1, então o problema (4.1) possui ao menos uma solução positiva.*

Demonstração. Para cada par $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega})$ consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \lambda g(u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} |u| dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

Usando o Teorema B.5 do Apêndice B, existe uma única $v \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que

$$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left[\|\lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \lambda \int_{\Omega} |u| dx \right\|_{L^p(\partial\Omega)} \right]$$

para todo $1 < p < \infty$, pois g é limitada.

Definimos, desse modo, um operador

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega}) &\longrightarrow W^{2,p}(\Omega) \\ (\lambda, u) &\longmapsto v := T(\lambda, u) \end{aligned}$$

em que (λ, u) e v estão relacionados como no problema (4.3).

Afirmação 1: O operador $T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega)$ é contínuo.

De fato, seja (λ_j, u_j) uma seqüência em $\mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega})$ convergindo para $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega})$, ou seja,

$$\lambda_j \longrightarrow \lambda \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } u_j \longrightarrow u \text{ em } C^0(\bar{\Omega}). \quad (4.4)$$

Lembremos que $C^0(\bar{\Omega})$ está equipado com a norma $\|u\|_{\infty} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ e façamos $v_j := T(\lambda_j, u_j)$ e $v := T(\lambda, u)$. Segue então que

$$\begin{cases} -\Delta v_j + v_j = \lambda_j g(u_j) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v_j}{\partial \eta} = \lambda_j \int_{\Omega} |u_j| dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \lambda g(u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} |u| dx & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Subtraindo-se membro a membro e usando a linearidade do Laplaciano e da derivada obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(v_j - v) + (v_j - v) = \lambda_j g(u_j) - \lambda g(u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial(v_j - v)}{\partial \eta} = \lambda_j \int_{\Omega} |u_j| dx - \lambda \int_{\Omega} |u| dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

Portanto,

$$\|v_j - v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left[\|\lambda_j g(u_j) - \lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)} + \|\lambda_j \int_{\Omega} |u_j| dx - \lambda \int_{\Omega} |u| dx\|_{L^p(\partial\Omega)} \right]. \quad (4.8)$$

Como $\lambda_j \rightarrow \lambda$ em \mathbb{R} e $u_j \rightarrow u$ em $C^0(\overline{\Omega})$, ou seja, $u_j \rightarrow u$ uniformemente em $\overline{\Omega}$, então

$$\lambda_j g(u_j(x)) \rightarrow \lambda g(u)(x) \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}, \quad (4.9)$$

de onde segue que

$$[\lambda_j g(u_j(x))]^p \rightarrow [\lambda g(u)(x)]^p,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$. E como $0 \leq \lambda_j g(u_j(x)) \leq C$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\Omega} \lambda_j^p [g(u_j(x))]^p dx \rightarrow \int_{\Omega} \lambda^p [g(u)(x)]^p dx. \quad (4.10)$$

Ou seja,

$$\|\lambda_j g(u_j)\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|\lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Desde que $(\lambda_j g(u_j))$ é limitada em $L^p(\Omega)$ e

$$\lambda_j g(u_j(x)) \rightarrow \lambda g(u)(x) \text{ q.s em } \Omega,$$

podemos usar o Lema de Brézis-Lieb, o qual garante que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\|\lambda_j g(u_j)\|_{L^p(\Omega)}^p - \|\lambda_j g(u_j) - \lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}^p \right) = \|\lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\|\lambda_j g(u_j) - \lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}^p \right) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\|\lambda_j g(u_j) - \lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}^p - \|\lambda_j g(u_j)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\lambda_j g(u_j)\|_{L^p(\Omega)}^p \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left([\|\lambda_j g(u_j) - \lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}^p - \|\lambda_j g(u_j)\|_{L^p(\Omega)}^p] + \|\lambda_j g(u_j)\|_{L^p(\Omega)}^p \right) \\ &= -\|\lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\lambda g(u)\|_{L^p(\Omega)}^p = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lambda_j g(u_j) \longrightarrow \lambda g(u) \text{ em } L^p(\Omega). \quad (4.11)$$

Como $u_j \longrightarrow u$ em $C^0(\overline{\Omega})$ então $|u_j| \longrightarrow |u|$ em $C^0(\overline{\Omega})$ e daí

$$\int_{\Omega} |u_j| dx \longrightarrow \int_{\Omega} |u| dx,$$

o que implica em

$$\lambda_j \int_{\Omega} |u_j| dx \longrightarrow \lambda \int_{\Omega} |u| dx \quad (4.12)$$

Usando (4.11) e (4.12) em (4.8) concluímos que

$$v_j \longrightarrow v \text{ em } W^{2,p}(\Omega) \quad (4.13)$$

e isso mostra que $T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega)$ é um operador contínuo.

Afirmção 2: $T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é compacto.

Com efeito, desde que o operador imersão de $W^{2,p}(\Omega)$ em $C^0(\overline{\Omega})$ é compacto se $p > \frac{N}{2}$, então o operador $T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é compacto.

Observemos que (λ, u_λ) é solução de (4.2) se, e somente se,

$$u = T(\lambda, u_\lambda) \quad (4.14)$$

Suponhamos $v = T(0, u)$, então

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0g(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \int_{\Omega} |u| dx = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.15)$$

Daí $v = 0$, ou seja, $T(0, u) = 0$. Portanto, pelo Teorema D.3 (Rabinowitz), existe uma componente não-limitada de soluções positivas Σ^+ do problema (4.3) em $\mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$.

Claramente, se $(0, u) \in \Sigma^+$ então $u = 0$. Por outro lado, se $(\lambda, 0) \in \Sigma^+$ então $0 = T(\lambda, 0)$ e daí $0 = \lambda g(0)$ e como estamos supondo $g(0) > 0$ então $\lambda = 0$. Concluímos disso que Σ^+ intersecta $\mathbb{R}^+ \times \{0\} \subset \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$ e $\{0\} \times C^0(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$ somente em

$(0, 0) \in \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$.

Agora, se $(\lambda, u) \in \Sigma^+$, com $\lambda \geq 0$ e

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda g(u) \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} |u| dx \geq 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \geq 0$ e $u \not\equiv 0$, ou seja, $u > 0$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda g(u) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} u dx & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se a componente Σ^+ for não-limitada com respeito a λ , então esta intercepta $\{1\} \times C^0(\overline{\Omega})$ e dessa forma obteremos uma solução $(1, u_1)$ e daí u_1 é solução positiva do problema (4.1).

Caso a componente Σ^+ seja limitada com respeito a λ , existe λ^* tal que se $(\lambda, u) \in \Sigma^+$ então $0 < \lambda < \lambda^*$. Como Σ^+ é não-limitada, existe uma seqüencia $(\lambda_j, u_j) \in \Sigma^+$ com $0 < \lambda_j < \lambda^*$ tal que $\lambda_j \rightarrow \lambda$ e $\|u_j\|_{\infty} \rightarrow +\infty$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u_j + u_j = \lambda_j g(u_j) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_j}{\partial \eta} = \lambda_j \int_{\Omega} u_j dx & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Fazendo $w_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_{\infty}}$, então $\|w_j\|_{\infty} = 1$ e assim,

$$\begin{cases} -\Delta w_j + w_j = \frac{\lambda_j g(u_j)}{\|u_j\|_{\infty}} & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial w_j}{\partial \eta} = \lambda_j \int_{\Omega} w_j dx & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Teorema B.5 do Apêndice B obtemos $w_j \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\|w_j\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left[\left\| \frac{g(u_j)}{\|u_j\|_{\infty}} \right\|_{L^p(\Omega)} + C_1 \right] \leq C_2 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \quad (4.16)$$

Tomando $p > N$ obtemos $w_j \rightarrow w$ em $C^1(\overline{\Omega})$ e assim $w_j \rightarrow w$ em $C^0(\overline{\Omega})$ e também

$w_j \rightarrow w$ em $W^{1,2}(\overline{\Omega})$. Logo,

$$\int_{\Omega} (\nabla w_j \nabla \varphi + w_j \varphi) dx = \frac{\lambda_j}{\|u_j\|_{\infty}} \int_{\Omega} g(u_j) \varphi dx + \lambda_j \left(\int_{\Omega} w_j dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right)$$

e pelas convergências precedentes obtemos

$$\int_{\Omega} (\nabla w \nabla \varphi + w \varphi) dx = \frac{\lambda}{\|u\|_{\infty}} \int_{\Omega} g(u) \varphi dx + \lambda \left(\int_{\Omega} w dx \right) \left(\int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma \right).$$

Portanto, $w \in W^{2,2}(\Omega)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta w + w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w > 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} w dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

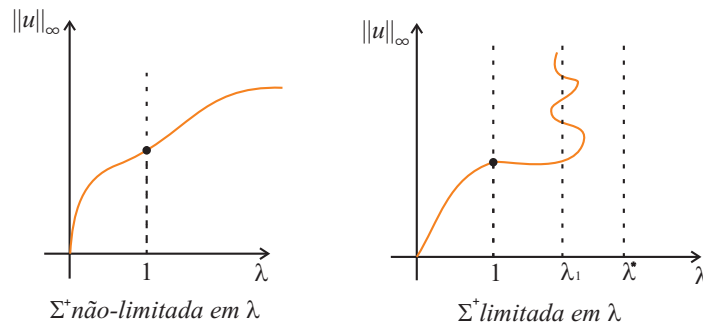
Se $\lambda = 0$, então $w = 0$ o que contradiz o fato de $\|w\|_{\infty} = 1$. Segue-se que, $\lambda > 0$ é autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} v dx & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

com autofunção positiva. Pelo Teorema 2.1, $\lambda = \lambda_1$. Assim, usando a hipótese $\lambda_1 > 1$, conclui-se que $\Sigma^+ \cap \{1\} \times C^0(\overline{\Omega}) \neq \emptyset$ e daí obtém-se uma solução como no primeiro caso.

■

As figuras a seguir ilustram os dois casos, um em que temos Σ^+ não-limitada em λ e outra onde temos Σ^+ limitada em λ



Capítulo 5

Problemas do Tipo M-Linear e Sublinear

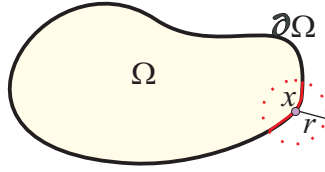
5.1 Introdução

Apresentaremos neste capítulo um estudo sobre alguns problemas não-locais do tipo M -linear e sublinear. Este estudo originou um artigo intitulado "Some Remarks on Elliptic Equations Under Nonlinear and Nonlocal Boundary Conditions", o qual foi aceito para publicação na revista *Advances in Mathematical Sciences and Applications* Vol. 23, No. 2 (2013), pp. 529-543.

Estudaremos, via método de Galerkin, problemas do tipo

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = f(x, u) & \text{in } \Omega \\ M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x, u, B(u)) & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

onde Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, $M : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, f, g são funções dadas, B é um operador integral do tipo $B(u) = \int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma$, $d\sigma$ é a medida de superfície de Lebesgue em $\partial\Omega$, $\Gamma_r(x) := \partial\Omega \cap B_r(x)$, $B_r(x)$ é a bola aberta do \mathbb{R}^N centrada em $x \in \partial\Omega$ de raio $r > 0$.



Observemos que se $r > 0$ é suficientemente grande então $\Gamma_r(x) = \partial\Omega$ e o problema (5.1) seria puramente não-local. Sendo assim, na segunda seção, vamos supor que $r > 0$ fixado é suficientemente pequeno tal que $\Gamma_r(x) \neq \partial\Omega$.

Na terceira seção, atacaremos também via Método de Galerkin, o problema sublinear

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = \lambda u^\alpha & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = u^\beta & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde o termo não-local na condição de contorno aparece apenas no lado esquerdo.

Por último, estudaremos, na Seção 5.4, o caso em que $M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma$ sobre $\partial\Omega$, mostrando existência de infinitas soluções para este tipo de problema. Faremos isso usando a Teoria do Gênero de Krasnoselski e mais alguns lemas que poderão ser encontrados no Apêndice D.

5.2 Um Problema Não-Local M -linear Via Método de Galerkin

Nesta seção, investigaremos a existência de solução para um problema M -Linear não-local com condição de fronteira de Neumann via método de Galerkin. Inicialmente vamos considerar um problema intermediário

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = f(x) & \text{em } \Omega \\ M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lambda \int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado, λ é um parâmetro real positivo, $M : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função dada. Este é um problema não-local intermediário típico, ou seja, o termo $\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma$ é integral, isto é, não-local, mas é calculado em vizinhanças de cada $x \in \partial\Omega$.

Deve-se ressaltar que, pelo menos para o nosso conhecimento, existem poucos trabalhos que lidam com problemas não-locais intermediários, como o problema (5.3). Veja, por exemplo, Chipot-Roy [20] em que uma seção é dedicada a uma classe deste tipo de problema sob condição de contorno de Dirichlet.

Como já dissemos, em Wang [44] é feito um estudo do problema linear não-local com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u(x) = \lambda \int_{\Omega} u(y) dy & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

Wang mostra que se $\lambda < \frac{1}{|\Omega|}$, então o problema (5.4) possui uma única solução clássica, ou seja, a existência de solução depende da relação entre o parâmetro λ e a medida do conjunto Ω . Em nosso estudo teremos algo semelhante.

Suporemos que a função $M : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz

(M_0) Existem constantes $m_0, t_0 > 0$ tal que $M(t) \geq m_0$ se $t \geq t_0$.

Uma solução fraca do problema (5.3) é uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo

$$M(\|u\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) \varphi d\sigma - \int_{\Omega} f \varphi dx = 0, \quad (5.5)$$

para toda $\varphi \in E := W^{1,2}(\Omega)$.

Considerando S_T a melhor constante de Sobolev da imersão compacta $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ decorrente do Teorema do Traço e usando o Método de Galerkin mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 5.1. Se

$$0 < \lambda < m_0 \frac{S_T}{|\partial\Omega|}, \quad (5.6)$$

então para cada $f \in L^2(\Omega)$ o problema (5.3) possui uma solução fraca.

Demonstração. Se $f \equiv 0$, então $u \equiv 0$ é claramente uma solução. Então vamos supor $0 \neq f \in L^2(\Omega)$ e aplicar o Método de Galerkin o qual tem o Lema C.1 do Apêndice 5 como ferramenta essencial. Inicialmente, definimos a função

$$M^+(t) = \max \{M(t), 0\},$$

pois, uma vez que a função M pode mudar de sinal, consideraremos o problema auxiliar

$$\begin{cases} M^+(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = f(x) & \text{em } \Omega \\ M^+(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lambda \int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

Para utilização do supracitado método, escolhemos um sistema ortonormal completo em $E := W^{1,2}(\Omega)$ dada por

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$$

que pode ser considerado regular o suficiente. Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomamos o conjunto $\mathbb{V}_m = [e_1, \dots, e_m]$, que é o gerado por $\{e_1, \dots, e_m\}$. Assim, dado qualquer $u \in \mathbb{V}_m$ existem $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_m e_m.$$

Desse modo, fica definida uma aplicação $T : \mathbb{V}_m \rightarrow \mathbb{R}^m$ que a cada $u \in \mathbb{V}_m$ dado como acima, associa $T(u) = \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$. Desde que \mathcal{B} é uma base Hilbertiana ortonormal, esta aplicação é uma isometria linear. A partir de agora, a não ser que se diga o contrário, vamos identificar $u \leftrightarrow \xi$ via aplicação T . Fixamos $m \in \mathbb{N}$ e definimos $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, F = (F_1, \dots, F_m)$ com

$$F_j(\xi) = M^+(\|u\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u \nabla e_j + u e_j) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) e_j d\sigma - \int_{\Omega} f(x) e_j dx \quad (5.8)$$

assim

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = M^+(\|u\|^2)\|u\|^2 - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) u d\sigma - \int_{\Omega} f(x)u dx. \quad (5.9)$$

Usando a condição (M_0) e as imersões de Sobolev obtemos

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq \left(m_0 - \lambda \frac{|\partial\Omega|}{S_T} \right) \|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|, \quad (5.10)$$

se $\|u\|^2 \geq t_0$, então por (5.6) existe $R > 0$ tal que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle > 0 \text{ se } |\xi| = R \quad (5.11)$$

com R independente de $m \in \mathbb{N}$. Usando o Lema C.1, encontramos

$$u_m \in \mathbb{V}_m, \quad \|u_m\| \leq R \quad (5.12)$$

satisfazendo $F(u_m) = 0$, ou seja,

$$M^+(\|u_m\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_m \nabla e_j + u_m e_j) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u_m d\sigma \right) e_j d\sigma - \int_{\Omega} f(x) e_j dx = 0, \quad (5.13)$$

para todo $j = 1, \dots, m$. Conseqüentemente,

$$M^+(\|u_m\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_m \nabla \varphi + u_m \varphi) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u_m d\sigma \right) \varphi d\sigma - \int_{\Omega} f(x) \varphi dx = 0. \quad (5.14)$$

para toda $\varphi \in \mathbb{V}_m$. Desde que $\|u_m\| \leq R$ para toda $m \in \mathbb{N}$ obtemos, a menos de subsequência, as seguintes convergências

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u \text{ em } E, \\ \|u_m\|^2 &\longrightarrow a \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}, \\ u_m &\longrightarrow u \text{ a. e. in } L^2(\Omega), \\ u_m &\longrightarrow u \text{ a. e. in } L^2(\partial\Omega), \\ \int_{\partial\Omega} u_m d\sigma &\longrightarrow \int_{\partial\Omega} u d\sigma. \end{aligned}$$

Resta-nos provar que

$$\int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u_m d\sigma \right) \varphi d\sigma \rightarrow \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) \varphi d\sigma, \quad (5.15)$$

para toda $\varphi \in E$. De fato, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u_m d\sigma \right) \varphi d\sigma - \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) \varphi d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} (u_m - u) d\sigma \right) \varphi d\sigma \quad (5.16)$$

e devido a $u_m \rightarrow u \in L^2(\partial\Omega)$ temos

$$\left| \int_{\Gamma_r(x)} (u_m - u) d\sigma \right| \leq |\partial\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u_m - u\|_{L^2(\partial\Omega)}. \quad (5.17)$$

Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos a convergência desejada. Fixando $k < m$ e $\varphi \in \mathbb{V}_k$ e passando os limites nos dois lados de (5.14) obtemos

$$M^+(a) \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) \varphi d\sigma - \int_{\Omega} f(x) \varphi dx = 0 \quad (5.18)$$

para toda $\varphi \in \mathbb{V}_k$. Tendo em vista que k é arbitrário e \mathcal{B} é um sistema ortonormal completo, então a identidade (5.18) é válida para toda $\varphi \in E$. Dessa maneira, u é uma solução não-trivial do problema auxiliar (5.7). Fazendo $\varphi = u_m$ em (5.14), obtemos

$$M^+(\|u_m\|^2) \|u_m\|^2 - \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u_m d\sigma \right) u_m d\sigma - \int_{\Omega} f u_m dx = 0 \quad (5.19)$$

então, passando os limites para $m \rightarrow +\infty$ teremos

$$M^+(a)a = \lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) u d\sigma + \int_{\Omega} f u dx. \quad (5.20)$$

Conseqüentemente, fazendo $\varphi = u$ na identidade (5.18) obtemos

$$M^+(a)a = M(a)\|u\|^2. \quad (5.21)$$

Se $M^+(a) = 0$ segue de (5.18) que

$$\lambda \int_{\partial\Omega} \left(\int_{\Gamma_r(x)} u d\sigma \right) \varphi d\sigma + \int_{\Omega} f\varphi dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in E. \quad (5.22)$$

Assim, esta última desigualdade se torna verdadeira para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ou seja

$$\int_{\Omega} f\varphi dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (5.23)$$

Portanto $f \equiv 0$ o que é uma contradição. De onde concluímos que $M^+(a) > 0$ e $a = \|u\|^2$ e então completamos a demonstração se $0 \neq f$, pois pela definição de M^+ , teremos $M^+(a) = M(a)$. O que conclui a demonstração do teorema. ■

Observação 5.1. *Uma questão interessante relacionada a soluções de problemas do tipo (5.3) diz respeito a sua análise assintótica. Mais precisamente, as soluções de um tal problema dependem do $r > 0$ fixado. Então, podemos nos perguntar o que acontece quanto $r \rightarrow 0$. Esta questão será atacada em trabalhos posteriores.*

Observação 5.2. *No problema (5.3), pode-se considerar M com certos tipos de descontinuidade e, ainda usando Método de Galerkin, demonstrar um resultado de existência semelhante ao Teorema 5.1. A mesma observação continua válida para o Teorema 5.2 da próxima seção. Resultados com M descontínua aparecerão em outro trabalho.*

5.3 Um Problema Sublinear

Nesta seção, estudaremos o problema sublinear

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = \lambda u^\alpha & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ M(\|u\|^2) \frac{\partial u}{\partial \eta} = u^\beta & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.24)$$

onde o termo não-local na condição de contorno aparece apenas no lado esquerdo. Se a condição de fronteira for da forma $M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\Omega} u dx$ ou $M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma$ surgem algumas dificuldades técnicas adicionais quando tentamos aplicar o Método de Galerkin. O caso em que $M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda \int_{\partial\Omega} u d\sigma$ sobre $\partial\Omega$ veremos na Seção 5.4 usando outro método.

Novamente, para resolver o problema (5.24) vamos usar o problema auxiliar

$$\begin{cases} M^+(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = \lambda(u^+)^\alpha + \varepsilon & \text{em } \Omega, \\ M^+(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = (u^+)^\beta & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.25)$$

onde $0 < \varepsilon < 1$ é um número fixado.

Teorema 5.2. *Se $0 < \alpha, \beta < 1$ e M satisfaz a condição (M_0) , então o problema (5.25) possui uma solução $u_\varepsilon \geq 0$, $u_\varepsilon \not\equiv 0$.*

Demonstração. Do mesmo modo que no problema da seção anterior vamos tomar $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$ uma base Hilbertiana ortonormal de E e para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, considerar o conjunto $\mathbb{V}_m = [e_1, \dots, e_m]$. Definimos $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F = (F_1, \dots, F_m)$ por

$$F_j(\xi) = M^+(\|u\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u \nabla e_j + u e_j) dx - \lambda \int_{\Omega} (u^+)^\alpha e_j dx - \varepsilon \int_{\Omega} e_j dx - \int_{\partial\Omega} (u^+)^\beta e_j d\sigma$$

para todo $j = 1, 2, \dots, m$.

Observamos que tal qual fizemos no Teorema 5.1, vamos identificar \mathbb{R}^m com \mathbb{V}_m para conseguir a isometria linear que já mencionamos anteriormente.

Assim, obtemos

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = M^+(\|u\|^2)\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha+1} dx - \varepsilon \int_{\Omega} u dx - \int_{\partial\Omega} (u^+)^{\beta+1} d\sigma \quad (5.26)$$

e se $\|u\|^2 \geq t_0$ temos $M(\|u\|^2) \geq m_0$. Logo,

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq m_0\|u\|^2 - \lambda \int_{\Omega} (u^+)^{\alpha+1} dx - \varepsilon \int_{\Omega} u dx - \int_{\partial\Omega} (u^+)^{\beta+1} d\sigma \quad (5.27)$$

Observando que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (u^+)^{\alpha+1} dx &\leq C \|u\|^{\alpha+1} \\ \int_{\partial\Omega} (u^+)^{\beta+1} d\sigma &\leq C \|u\|^{\beta+1} \\ \int_{\Omega} u dx &\leq C \|u\|\end{aligned}$$

teremos

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq m_0 \|u\|^2 - \lambda C \|u\|^{\alpha+1} - \varepsilon C \|u\| - C \|u\|^{\beta+1}.$$

assim já que $0 < \varepsilon < 1$, obtemos

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq m_0 \|u\|^2 - \lambda C \|u\|^{\alpha+1} - C \|u\| - C \|u\|^{\beta+1}.$$

Tendo em vista que $0 < \alpha, \beta < 1$ segue a existência de $R > 0$, suficientemente grande e independente de m e de $0 < \varepsilon < 1$, tal que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle > 0 \quad \text{se} \quad \|u\| = R \quad (\xi \leftrightarrow u) \quad (5.28)$$

Segue então do Lema C.1 do Apêndice 5 que existe $u_m \in \mathbb{V}_m$ com $\|u_m\| \leq R$, tal que

$$M^+(\|u_m\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u_m \nabla \varphi + u_m \varphi) dx = \lambda \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha} \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi dx + \int_{\partial\Omega} (u_m^+)^{\beta} \varphi d\sigma \quad (5.29)$$

para toda $\varphi \in \mathbb{V}_m$. Segue do fato de R não depender de m que $\|u_m\| \leq R$, para todo $m = 1, 2, \dots$. Logo, a menos de subsequência, tem-se

$$\begin{aligned}u_m &\rightharpoonup u_{\varepsilon} \text{ em } E, \\ u_m &\longrightarrow u_{\varepsilon} \text{ em } L^{\alpha+1}(\Omega), \\ u_m &\longrightarrow u_{\varepsilon} \text{ em } L^{\beta+1}(\partial\Omega), \\ u_m &\longrightarrow u_{\varepsilon} \text{ a. e. in } \Omega.\end{aligned}$$

Agora fixando $k < m$, $\varphi \in \mathbb{V}_k$ e fazemos $m \rightarrow +\infty$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla u_m \nabla \varphi + u_m \varphi) dx &\longrightarrow \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon} \nabla \varphi + u_{\varepsilon} \varphi) dx, \\ \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha} \varphi dx &\longrightarrow \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} \varphi dx, \\ \int_{\partial\Omega} (u_m^+)^{\beta} \varphi d\sigma &\longrightarrow \int_{\partial\Omega} (u_{\varepsilon}^+)^{\beta} \varphi d\sigma, \\ \|u_m\|^2 &\longrightarrow a \geq 0, \\ M^+(\|u_m\|^2) &\longrightarrow M^+(a) \end{aligned}$$

o que implica em

$$M^+(a) \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon} \nabla \varphi + u_{\varepsilon} \varphi) dx = \lambda \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi dx + \int_{\partial\Omega} (u_{\varepsilon}^+)^{\beta} \varphi d\sigma \quad (5.30)$$

para toda $\varphi \in \mathbb{V}_k$. Desde que k é arbitrário, a identidade (5.30) passa a valer para toda $\varphi \in E$. Deste modo, $u_{\varepsilon} \in E$ é uma solução fraca para o problema

$$\begin{cases} M^+(a)(-\Delta u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon}) = \lambda(u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} + \varepsilon & \text{em } \Omega, \\ M^+(a) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \eta} = (u_{\varepsilon}^+)^{\beta} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.31)$$

Supondo $M^+(a) = 0$ (lembrando que $M^+(a) \geq 0$) teríamos

$$\lambda \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \varphi dx + \int_{\partial\Omega} (u_{\varepsilon}^+)^{\beta} \varphi d\sigma = 0 \quad (5.32)$$

para toda $\varphi \in E$ e então (5.32) valeria para toda $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Logo

$$\int_{\Omega} [\lambda(u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} + \varepsilon] \varphi dx = 0 \quad (5.33)$$

para toda $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, daí obteríamos $\lambda(u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} + \varepsilon \equiv 0$ o que é uma contradição pois $\lambda, \varepsilon > 0$ e $(u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} \geq 0$. De onde conclui-se que $M^+(a) > 0$. Pelo Princípio do Máximo $u_{\varepsilon} \geq 0$ em Ω e desde que $\varepsilon > 0$, teremos $u_{\varepsilon} \not\equiv 0$. Assim,

$$\begin{cases} M(a)(-\Delta u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon}) = \lambda(u_{\varepsilon}^+)^{\alpha} + \varepsilon & \text{em } \Omega, \\ M(a) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \eta} = (u_{\varepsilon}^+)^{\beta} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.34)$$

Escolhendo $\varphi = u_\varepsilon$ obtemos

$$M(a)\|u_\varepsilon\|^2 = \lambda \int_{\Omega} (u_\varepsilon)^{\alpha+1} dx + \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon dx + \int_{\partial\Omega} (u_\varepsilon)^{\beta+1} d\sigma \quad (5.35)$$

e fazendo $\varphi = u_m$ na equação (5.29) temos que

$$M(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 = \lambda \int_{\Omega} (u_m^+)^{\alpha+1} dx + \varepsilon \int_{\Omega} u_m dx + \int_{\partial\Omega} (u_m^+)^{\beta+1} d\sigma \quad (5.36)$$

e, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (5.36)

$$M(a)a = \lambda \int_{\Omega} (u_\varepsilon)^{\alpha+1} dx + \varepsilon \int_{\Omega} u_\varepsilon dx + \int_{\partial\Omega} (u_\varepsilon)^{\beta+1} d\sigma \quad (5.37)$$

De modo que, comparando (5.35) e (5.37) concluímos que $a = \|u_\varepsilon\|^2$ mostrando que u_ε é uma solução de

$$\begin{cases} M(\|u_\varepsilon\|^2)(-\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon) = \lambda(u_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon & \text{em } \Omega, \\ u_\varepsilon \geq 0, \quad u_\varepsilon \not\equiv 0 & \text{em } \Omega, \\ M(\|u_\varepsilon\|^2)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \eta} = (u_\varepsilon)^\beta & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.38)$$

e temos o resultado desejado. ■

O próximo passo é mostrar que u_ε , $0 < \varepsilon < 1$, converge para uma solução do problema

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = \lambda u^\alpha & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, \quad u \not\equiv 0 & \text{em } \Omega, \\ M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = u^\beta & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.39)$$

Para demonstrar isso, é fundamental usarmos o Teorema C.2 do Apêndice 5.

Teorema 5.3. *Se α , β and M satisfazem as mesmas condições do Teorema 5.2, então o problema (5.24) possui uma solução.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que o número positivo R , obtido no Teorema 5.2, não depende de $0 < \varepsilon < 1$. Assim, já que $\|u_m\| \leq R$, segue que $\|u_\varepsilon\| \leq R$.

Seja

$$M_R = \max_{0 \leq t^2 \leq R^2} M(t^2)$$

Logo,

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon \geq \frac{\lambda}{M_R} u_\varepsilon^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \eta} \geq \frac{u_\varepsilon^\beta}{M_R} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.40)$$

Tomando $\omega \geq 0, \omega \not\equiv 0$, a única solução (Ver apêndice) de

$$\begin{cases} -\Delta \omega + \omega = \frac{\lambda}{M_R} \omega^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\omega^\beta}{M_R} & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.41)$$

De acordo com (5.40)-(5.41) e usando o Teorema C.2, obtemos $u_\varepsilon \geq \omega \geq 0$ e $\omega \not\equiv 0$. Observamos ainda que $\omega > 0$ em Ω . Raciocinando como antes, podemos provar que $u_\varepsilon \rightarrow u$ e u é uma solução do problema (5.24). Desde que $u \geq \omega > 0$ em Ω , u é uma solução não trivial do problema (5.24) o que conclui a prova deste resultado. ■

5.4 Um Problema de Steklov-Neumann M-Linear

Nesta seção, vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} M(\|u\|^2)(-\Delta u + u) = \lambda V(x)u & \text{em } \Omega, \\ M(\|u\|^2)\frac{\partial u}{\partial \eta} = \mu \int_{\partial\Omega} u d\sigma & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.42)$$

em que $\lambda, \mu > 0$ são parâmetros reais, $M : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ é uma função contínua satisfazendo

$$(H_0) \quad At^\alpha \leq M(t) \leq Bt^\alpha \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } A, B, \alpha > 0$$

$$\text{e } \widehat{M}(t) := \int_0^t M(\xi) d\xi.$$

$$(V_0) \quad V(x) \geq V_0 > 0 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Observamos que, quando $M \equiv 1$, temos um problema linear similar ao que foi abordado na Seção 2.2.

Diz-se que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca do problema (5.42) se

$$M(\|u\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} V(x) u \varphi dx - \mu \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Seja $J : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2} \widehat{M}(\|u\|^2) - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} V(x) u^2 dx - \frac{\mu}{2} \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2.$$

Temos que $J \in C^1(W^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$J'(u)\varphi = M(\|u\|^2) \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + u \varphi) dx - \lambda \int_{\Omega} V(x) u \varphi dx - \mu \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma$$

para toda $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Logo, os pontos críticos do funcional J são soluções fracas do problema (5.42).

Teorema 5.4. *Se M satisfaz as hipóteses (H_0) e (V_0) então o funcional J possui infinitos pontos críticos. Assim, o problema (5.42) possui infinitas soluções.*

Para mostrar este teorema vamos precisar da Teoria do Gênero de Krasnoselski e de alguns lemas que nos ajudarão a enquadrar o funcional J definido acima nas condições do Teorema D.1 do Apêndice D.

Lema 5.1. *O funcional J é limitado inferiormente.*

Demonstração. Temos que $A \int_0^t s^\alpha ds \leq \int_0^t M(s) ds \leq B \int_0^t s^\alpha ds$ implica $\frac{A}{\alpha+1} t^{\alpha+1} \leq \widehat{M}(t) \leq \frac{B}{\alpha+1} t^{\alpha+1}$. Logo,

$$J(u) \geq \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} V(x) u^2 dx - \frac{\mu}{2} \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2$$

Da imersão $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos

$$\int_{\Omega} V(x)u^2 dx \leq C_1 \|u\|^2$$

e da imersão $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ obtemos

$$\left| \int_{\partial\Omega} u d\sigma \right| \leq C_2 \|u\|^2, \text{ ou seja, } \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 \leq C_2 \|u\|^2.$$

Portanto,

$$J(u) \geq \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{\lambda}{2} C_1 \|u\|^2 - \frac{\mu}{2} C_2 \|u\|^2.$$

Como $\alpha+1 > 1$ temos que $2(\alpha+1) > 2$ de onde segue que J é limitado inferiormente. ■

Lema 5.2. *O funcional J é par.*

Demonstração. Segue imediatamente da definição do funcional. ■

Lema 5.3. *O funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Com efeito, tomemos $(u_n) \subset W^{1,2}(\Omega)$ uma seqüência Palais-Smale, isto é, $J(u_n) \rightarrow C$ e $J'(u_n) \rightarrow 0$. Assim,

$$C_1 \geq J(u_n) \geq \frac{A}{2(\alpha+1)} \|u_n\|^{2(\alpha+1)} - \frac{\lambda}{2} C_1 \|u_n\|^2 - \frac{\mu}{2} C_2 \|u_n\|^2$$

e como $2(\alpha+1) > 2$, segue que (u_n) é limitada em $W^{1,2}(\Omega)$. Passando a uma subsequência se necessário, temos que $\|u_n\| \rightarrow t_0 \geq 0$. Se $t_0 = 0$, então $u_n \rightarrow 0$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e a demonstração estaria concluída.

Se $t_0 > 0$, desde que M é contínua, temos que $M(\|u_n\|^2) \rightarrow M(t_0) \geq At_0^\alpha > 0$. Portanto, para n suficientemente grande teremos $M(\|u_n\|^2) \geq \bar{C} > 0$, para algum $\bar{C} > 0$.

Observemos que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^2(\partial\Omega)$, possivelmente para subsequências. Lembrando que

$$J'(u_n)\varphi = M(\|u_n\|^2)\langle u_n, \varphi \rangle - \lambda \int_{\Omega} V(x)u_n\varphi dx - \mu \left(\int_{\partial\Omega} u_n d\sigma \right) \int_{\partial\Omega} \varphi d\sigma$$

e que $J'(u_n)\varphi \rightarrow 0$, mostraremos que $u_n \rightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$, eventualmente para uma subsequência. De fato, temos que

$$\begin{aligned} J'(u_n)(u_n - u) &= M(\|u_n\|^2)\langle u_n, u_n - u \rangle - \lambda \int_{\Omega} V(x)u_n(u_n - u)dx \\ &\quad - \mu \left(\int_{\partial\Omega} u_n d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} (u_n - u) d\sigma \right) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} J'(u)(u_n - u) &= M(\|u\|^2)\langle u, u_n - u \rangle - \lambda \int_{\Omega} V(x)u(u_n - u)dx \\ &\quad - \mu \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} (u_n - u) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{J'(u_n)(u_n - u)}{M(\|u_n\|^2)} &= \langle u_n, u_n - u \rangle - \frac{\lambda}{M(\|u_n\|^2)} \int_{\Omega} V(x)u_n(u_n - u)dx \\ &\quad - \frac{\mu}{M(\|u_n\|^2)} \left(\int_{\partial\Omega} u_n d\sigma \right) \int_{\partial\Omega} (u_n - u) d\sigma \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{J'(u)(u_n - u)}{M(\|u\|^2)} &= \langle u, u_n - u \rangle - \frac{\lambda}{M(\|u\|^2)} \int_{\Omega} V(x)u(u_n - u)dx \\ &\quad - \frac{\mu}{M(\|u\|^2)} \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right) \int_{\partial\Omega} (u_n - u) d\sigma. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{J'(u_m)(u_m - u_n)}{M(\|u_m\|^2)} &= \langle u_m, u_m - u_n \rangle - \frac{\lambda}{M(\|u_m\|^2)} \int_{\Omega} V(x)u_m(u_m - u_n)dx \\ &\quad - \frac{\mu}{M(\|u_m\|^2)} \left(\int_{\partial\Omega} u_m d\sigma \right) \int_{\partial\Omega} (u_m - u_n) d\sigma \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{J'(u_n)(u_m - u_n)}{M(\|u_n\|^2)} &= \langle u_n, u_m - u_n \rangle - \frac{\lambda}{M(\|u_n\|^2)} \int_{\Omega} V(x)u_n(u_m - u_n)dx \\ &- \frac{\mu}{M(\|u_n\|^2)} \left(\int_{\partial\Omega} u_n d\sigma \right) \int_{\partial\Omega} (u_m - u_n) d\sigma. \end{aligned}$$

Das quais, subtraindo-se membro a membro, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{J'(u_m)(u_m - u_n)}{M(\|u_m\|^2)} - \frac{J'(u_n)(u_m - u_n)}{M(\|u_n\|^2)} &= \|u_m - u_n\|^2 \tag{5.43} \\ &- \frac{\lambda}{M(\|u_m\|^2)} \int_{\Omega} V(x)u_m(u_m - u_n)dx \\ &+ \frac{\lambda}{M(\|u_n\|^2)} \int_{\Omega} V(x)u_n(u_m - u_n)dx \\ &- \frac{\mu}{M(\|u_m\|^2)} \left(\int_{\partial\Omega} u_m d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} (u_m - u_n) d\sigma \right) \\ &+ \frac{\mu}{M(\|u_n\|^2)} \left(\int_{\partial\Omega} u_n d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} (u_m - u_n) d\sigma \right) \end{aligned}$$

No entanto, temos

$$\frac{J'(u_m)(u_m - u_n)}{M(\|u_m\|^2)} \longrightarrow 0 \text{ e } \frac{J'(u_n)(u_m - u_n)}{M(\|u_n\|^2)} \longrightarrow 0$$

devido a condição $J'(u_n)\varphi \longrightarrow 0$. Além disso,

$$\frac{\lambda}{M(\|u_m\|^2)} \int_{\Omega} V(x)u_m(u_m - u_n)dx \longrightarrow 0$$

pois (u_m) é de Cauchy em $L^2(\Omega)$ e

$$\frac{\mu}{M(\|u_m\|^2)} \left(\int_{\partial\Omega} u_m d\sigma \right) \left(\int_{\partial\Omega} (u_m - u_n) d\sigma \right) \longrightarrow 0$$

pois (u_m) é de Cauchy em $L^2(\partial\Omega)$. Então, pela equação (5.43) temos que (u_n) é de Cauchy em $W^{1,2}(\Omega)$. Logo, $u_n \longrightarrow w$ em $W^{1,2}(\Omega)$ e $u_n \rightharpoonup w$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Por unicidade do limite $w = u$, ou seja, $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Portanto, J satisfaz a condição de Palais-Smale. ■

Finalmente, vamos à demonstração do Teorema 5.4.

Demonstração. Consideremos $\{e_1, e_2, \dots\}$ uma base Hilbertiana em $W^{1,2}(\Omega)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $X_k = [e_1, e_2, \dots, e_k] = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ o subespaço de $W^{1,2}(\Omega)$ gerado por $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Observemos que X_k está imerso continuamente tanto em $L^2(\Omega)$ quanto em $L^2(\partial\Omega)$. Logo, as normas em X_k em $L^2(\Omega)$ e em $L^2(\partial\Omega)$ são equivalentes. Portanto, existem constantes $C_1(k) > 0$ e $C_2(k) > 0$ tais que

$$C_1(k)\|u\|^2 \leq \int_{\Omega} u^2 dx \quad \text{e} \quad C_2(k)\|u\|^2 \leq \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma$$

para todo $u \in X_k$.

Como

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{\|u\|^2} M(s) ds - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} V(x) u^2 dx - \frac{\mu}{2} \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 \\ &\leq \frac{B}{2} \|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} V(x) u^2 dx - \frac{\mu}{2} \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 \end{aligned}$$

Tendo em vista que $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, teremos $V(x)u^2 \geq V_0u^2$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, o que implica em $\int_{\Omega} V(x)u^2 dx \geq V_0 \int_{\Omega} u^2 dx \geq V_0 C_1(k)\|u\|^2$. Assim, desde que

$$\frac{\mu}{2} \left(\int_{\partial\Omega} u d\sigma \right)^2 \geq 0$$

teremos

$$J(u) \leq \frac{B}{2} \|u\|^{2(\alpha+1)} - \frac{\lambda}{2} V_0 \int_{\Omega} u^2 dx,$$

ou seja,

$$J(u) \leq \|u\|^2 \left[\frac{B}{2} \|u\|^{2\alpha} - \frac{\lambda}{2} V_0 C_1(k) \right].$$

Como $\frac{\lambda}{2} V_0 C_1(k) > 0$ e $B > 0$ podemos tomar $\|u\| = \rho$ suficientemente pequeno de modo

que

$$J(u) \leq \rho^2 \left[\frac{B}{2} \rho^{2\alpha} - \frac{\lambda V_0 C_1(k)}{2} \right] < 0 = J(0).$$

Isto significa que se tomarmos $0 < r < \rho$, considerando $K = \{u \in X_k; \|u\| = r\}$ teremos

$$J(u) \leq r^2 \left[\frac{B}{2} r^{2\alpha} - \frac{\lambda V_0 C_1(k)}{2} \right] < \rho^2 \left[\frac{B}{2} \rho^{2\alpha} - \frac{\lambda V_0 C_1(k)}{2} \right] < 0 = J(0).$$

Isto implica que $\sup_{u \in K} J(u) < 0 = J(0)$. Desde que X_k e \mathbb{R}^k são isomorfos e que K e \mathbb{S}^k são homeomorfos, concluímos que o Gênero de Krasnoselskii (ver Apêndice D) de K é k , isto é,

$$\gamma(K) = k.$$

Logo, pelo Teorema D.1, concluímos que J possui pelo menos k pares de pontos críticos distintos. Desde que k é arbitrário, obtemos infinitos pontos críticos de J , ou seja, o problema (5.42) possui infinitas soluções. ■

Capítulo 6

Problemas de Dirichlet Sob Condições de Fronteira Integrais

6.1 Introdução

Neste capítulo, focalizaremos nossa atenção em problemas do tipo

$$\left\{ \begin{array}{ll} -A \left(\int_{\Omega} v dx \right) \Delta v = f(v) & \text{em } \Omega, \\ v > 0 & \text{em } \Omega, \\ v = K \int_{\Omega} v dx & \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um domínio limitado e regular, $K > 0$ é um parâmetro real, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ são funções contínuas satisfazendo determinadas condições, de acordo com as técnicas que serão empregadas.

Como frisamos no Capítulo 3, a investigação ao problema (6.1) foi motivada por Wang [44], o qual estuda o problema (3.2) e algumas de suas variações.

Na segunda seção, consideraremos o problema de autovalor linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu \left(u + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.2)$$

e mostraremos que o primeiro autovalor deste problema é sempre menor ou igual ao autovalor principal de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$. Utilizaremos este resultado na terceira seção, na qual usaremos o Teorema D.3 (Rabinowitz) para mostrar existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \Delta u = f \left(u + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.3)$$

que por sua vez é equivalente ao problema (6.1). Na quarta e última seção deste capítulo, usando Método de Sub e Supersolução, mostraremos existência de solução para o

$$\begin{cases} -A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \Delta u = f \left(x, u + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.4)$$

Como dissemos, estudaremos o problema (6.1) sob outra forma. Para isso, seja v uma solução do problema (6.1) e façamos

$$u = v - K \int_{\Omega} v dx. \quad (6.5)$$

Supondo que $1 - K |\Omega| > 0$, ou seja, $K < \frac{1}{|\Omega|}$, vê-se facilmente que u é solução do problema (6.3).

Assim, os problemas (6.1) e (6.3) são equivalentes, em que u e v estão relacionados como em (6.5). Observemos que por (6.5) tem-se

$$\int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} v dx - K \left(\int_{\Omega} v dx \right) |\Omega| = (1 - K |\Omega|) \int_{\Omega} v dx$$

o que ocorre se, e somente se,

$$\int_{\Omega} v dx = \frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx.$$

Desse modo,

$$v = u + K \int_{\Omega} v dx = u + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx.$$

Portanto, $u = v - K \int_{\Omega} v dx$ é equivalente a $v = u + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx$.

Ao longo deste capítulo, a menos que se diga algo em contrário, suporemos sempre

$$1 - K |\Omega| > 0. \quad (6.6)$$

6.2 Um Problema de Autovalor Linear

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu \left(u + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.7)$$

A formulação variacional do problema (6.7) é dada por

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \mu \left[\int_{\Omega} u \varphi dx + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\Omega} \varphi dx \right) \right], \quad (6.8)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Assim, μ é um autovalor do problema (6.7) se existir $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que (6.8) é satisfeita para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Lembremos que

$$\langle u, v \rangle_0 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (6.9)$$

denota o produto interno usual em $W_0^{1,2}(\Omega)$. A seguir, fixemos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e consideremos

o funcional

$$H_u : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \longmapsto L_u(\varphi)$$

dado por

$$H_u(\varphi) = \int_{\Omega} u\varphi dx + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\Omega} \varphi dx \right)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Claramente H_u é linear e contínuo. Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, para cada $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ fixado, existe um único $v := Gu \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tal que

$$\langle Gu, \varphi \rangle_0 = \int_{\Omega} u\varphi dx + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\Omega} \varphi dx \right),$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Portanto, definimos um operador

$$G : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$u \longmapsto v := Gu$$

que é linear, contínuo, compacto e autoadjunto. Assim, usando a Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos, encontramos uma seqüência de autovalores de G ,

$$\frac{1}{\mu_1} \geq \frac{1}{\mu_2} \geq \dots > 0 \tag{6.10}$$

com $\frac{1}{\mu_j} \rightarrow 0$, associada a uma seqüência de autofunções (Ψ_j) , tais que $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots\}$ é uma base ortonormal Hilbertiana de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Uma aplicação do Teorema de Krein-Rutman, como feita no Capítulo 2, mostra que $\frac{1}{\mu_1}$ é simples, $\frac{1}{\mu_1} > \frac{1}{\mu_j}$, $j \geq 2$, Ψ_1 pode ser escolhida positiva em Ω e Ψ_j , $j \geq 2$ sempre muda de sinal em Ω .

Novamente usando a Teoria Espectral de Operadores Compactos e Autoadjuntos, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} &= \sup\{\langle Gu, u \rangle_0; \|u\|_0 = 1\} \\ &= \sup\left\{\int_{\Omega} u^2 dx + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \left(\int_{\Omega} u dx\right)^2; \|u\|_0 = 1\right\} \\ &\geq \sup\left\{\int_{\Omega} u^2 dx; \|u\|_0 = 1\right\} = \frac{1}{\lambda_1} \end{aligned}$$

em que λ_1 é o autovalor principal de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$. Conseqüentemente, $\lambda_1 \geq \mu_1$.

Os detalhes da Análise Espectral de G são inteiramente análogos aos da Seção 2.3 do Capítulo 2 e, por isso, não os faremos aqui.

6.3 Existência e Multiplicidade Via Bifurcação

Inicialmente observamos que vamos novamente fazer uso do Teorema D.3 do Apêndice D e da Proposição A.1 contida no Apêndice A.

Suporemos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazem:

$$(h_1) \quad f \text{ é localmente Lipschitziana, } f(t) = mt + h(t), \text{ com } m > 0, \quad 0 \leq h(t) \leq C,$$

para todo $t \geq 0$, $f(0) = h(0) > 0$.

$$(h_2) \quad 0 < A(\infty) \leq A(t) \leq A_0 \leq 1, \quad \forall t \geq 0, \quad A(t) \text{ é não-crescente e } A(\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t).$$

Além disso, suporemos que Ω está situado entre dois hiperplanos paralelos separados por uma distância $d > 0$ e existe $t_0 > 0$ tal que

$$(h_3) \quad f \text{ é não-decrescente no intervalo } \left[0, \left(1 + \frac{K|\Omega|}{1 - K|\Omega|}\right)t_0\right]$$

e

$$(h_4) \quad (e^d - 1) \frac{f\left(\left(1 + \frac{K|\Omega|}{1-K|\Omega|}\right)t_0\right)}{A\left(\left(1 + \frac{K|\Omega|}{1-K|\Omega|}\right)t_0\right)} < t_0.$$

Observemos que impusemos a condição de f ser localmente Lipschitziana a fim de obtermos soluções de classe $C^2(\Omega)$, e assim ser possível usar a Proposição A.1.

Observação 6.1. *A abordagem usada nesse teorema foi previamente usada, para outra classe de problemas, em Corrêa [21] e Arruda-Marques [7].*

Teorema 6.1. *Suponhamos que são válidas as hipóteses (h_1) e (h_2) .*

(i) Se $\mu_1 A(\infty) > m$ então o problema (6.3) possui uma solução.

(ii) Se $\mu_1 A(\infty) < m$ e (h_3) e (h_4) se verificam, então o problema (6.3) possui pelo menos duas soluções u_1 e u_2 com

$$\|u_1\|_\infty < t_0 < \|u_2\|_\infty. \quad (6.11)$$

Demonstração. Inicialmente, construamos uma aplicação da seguinte maneira. Para cada $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega})$, seja $v \in C^0(\bar{\Omega})$ a solução única do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v = \frac{\lambda}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right)} \left[m|u| + \frac{mK}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \right] \\ \quad + \frac{\lambda}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right)} h\left(|u| + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx\right) \quad \text{em } \Omega, \\ v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (6.12)$$

Assim, definimos uma aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega}) &\longrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \\ (\lambda, u) &\longmapsto v := T(\lambda, u) \end{aligned}$$

onde λ, u estão relacionados como na equação (6.12).

Afirmção 1: O operador $T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ é contínuo.

Com efeito, seja (λ_j, u_j) uma seqüencia em $\mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$ convergindo para $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$, ou seja,

$$\lambda_j \longrightarrow \lambda \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } u_j \longrightarrow u \text{ em } C^0(\overline{\Omega}). \quad (6.13)$$

onde $C^0(\overline{\Omega})$ está equipado com a norma $\|u\|_\infty = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$. Fazendo $v_j := T(\lambda_j, u_j)$ e $v := T(\lambda, u)$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_j = \frac{\lambda_j}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} \left[m|u_j| + \frac{mK}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u_j| dx \right] \\ \quad + \frac{\lambda_j}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} h \left(|u_j| + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u_j| dx \right) \text{ em } \Omega, \\ v_j = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (6.14)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v = \frac{\lambda}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} \left[m|u| + \frac{mK}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \right] \\ \quad + \frac{\lambda}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} h \left(|u| + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \right) \text{ em } \Omega, \\ v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\Delta(v_j - v) = \frac{\lambda_j m |u_j|}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} - \frac{\lambda m |u|}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} \\
 + \frac{\lambda_j m}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} |u_j| dx \\
 - \frac{\lambda m}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \\
 + \frac{\lambda_j}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} h \left(|u_j| + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} |u_j| dx \right) \\
 - \frac{\lambda}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} h \left(|u| + \frac{K}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \right) \quad \text{em } \Omega, \\
 v_j - v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,
 \end{array} \right. \quad (6.16)$$

A seguir, observamos que, em face da convergência $u_j \rightarrow u$ em $C^0(\overline{\Omega})$, tem-se

$$\begin{aligned}
 |u_j| &\rightarrow |u| \text{ em } C^0(\overline{\Omega}) \\
 \int_{\Omega} u_j dx &\rightarrow \int_{\Omega} u dx \text{ em } \mathbb{R} \\
 \int_{\Omega} |u_j| dx &\rightarrow \int_{\Omega} |u| dx \text{ em } \mathbb{R} \\
 A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right) &\rightarrow A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \text{ em } \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Também

$$m \left[\frac{\lambda_j |u_j|}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} - \frac{\lambda |u|}{A \left(\frac{1}{1 - K |\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} \right] \rightarrow 0 \text{ em } C^0(\overline{\Omega}),$$

o que implica convergência em $L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$. Ademais,

$$m \left[\frac{\lambda_j}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u_j| dx - \frac{\lambda}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \right] \rightarrow 0 \text{ em } C^0(\overline{\Omega})$$

e

$$\left[\frac{\lambda_j}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} h \left(|u_j| + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u_j| dx \right) - \frac{\lambda}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right)} h \left(|u| + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \right) \right] \rightarrow 0$$

em $L^p(\Omega)$, para todo $p \geq 1$. Conseqüentemente, por (6.16) tem-se

$$\|v_j - v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|g_j\|_{L^p(\Omega)} \text{ em que } \|g_j\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (6.17)$$

para todo $p \geq 1$. Assim,

$$v_j \rightarrow v \text{ em } W^{2,p}(\Omega) \text{ para todo } p \geq 1.$$

Tomando $p > \frac{N}{2}$, concluímos que $v_j = T(\lambda_j, u_j) \rightarrow v = T(\lambda, u)$ em $C^0(\overline{\Omega})$.

Afirmação 2: O operador $T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é compacto.

Seja $(\lambda_j, u_j) \subset \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$ uma seqüência limitada e $v_j = T(\lambda_j, u_j)$. Raciocinando como na Afirmação 1, obtemos

$$\|v_j\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p, \text{ para todo } p \geq 1 \text{ e para todo } j \in \mathbb{N} \text{ com } C_p > 0 \text{ uma constante.}$$

Desde que $p > \frac{N}{2}$ temos a imersão compacta de $W^{2,p}(\Omega)$ em $C^0(\overline{\Omega})$ e daí a seqüência (v_j) possui subseqüência convergente em $C^0(\overline{\Omega})$. Logo, o operador $T : \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega}) \rightarrow C^0(\overline{\Omega})$ é compacto.

Claramente $0 = T(0, u)$. Pelo Teorema D.3, obtemos uma componente não-limitada $\Sigma^+ \subset \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$ de soluções da equação $u = T(\lambda, u)$. Note que

- $u = T(0, u)$ implica em $u = 0$
- $0 = T(\lambda, 0)$ implica em $\lambda = 0$ pois $h(0) > 0$.

Isso nos diz que a componente Σ^+ intersecta $\{0\} \times C^0(\overline{\Omega})$ e $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$, ambas contidas em $\mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$, somente em $(0, 0) \in \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$.

A seguir, recordemos que $v = T(\lambda, u)$ implica

$$\begin{cases} -\Delta v = \frac{\lambda}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right)} \left[m|u| + \frac{mK}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx \right] \\ \quad + \frac{\lambda}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right)} h\left(|u| + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} |u| dx\right) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.18)$$

observando que, em virtude do Princípio do Máximo, $u > 0$ em Ω .

Como $h \geq 0$, tomando $\varphi_1 > 0$, autofunção de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ associada a λ_1 , como função teste em (6.18) e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\Omega} u \varphi_1 dx \geq \frac{\lambda m}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right)} \int_{\Omega} u \varphi_1 dx$$

e assim

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u(-\Delta \varphi_1) dx \geq \lambda m \int_{\Omega} u \varphi_1 dx.$$

Portanto,

$$0 < \lambda \leq \frac{\lambda_1}{m}.$$

Desde que a componente Σ^+ é não-limitada em $\mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$ e $(\lambda, u) \in \Sigma^+$ implica em $0 \leq \lambda \leq \frac{\lambda_1}{m}$, segue-se que Σ^+ é não-limitada na direção de $C^0(\overline{\Omega})$, isto é, existe uma seqüência (λ_j, u_j) em Σ^+ tal que $\|u_j\|_{\infty} \rightarrow +\infty$ e $\lambda_j \rightarrow \lambda_{\infty}$ em \mathbb{R}^+ . Façamos $w_j = \frac{u_j}{\|u_j\|_{\infty}}$,

$\|w_j\|_\infty = 1$, para obter

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w_j = \frac{\lambda_j}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_j dx\right)} \left[m|w_j| + \frac{mK}{1-K|\Omega|}\int_\Omega |w_j| dx \right] \\ \quad + \frac{\lambda_j}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_j dx\right)} \frac{1}{\|u_j\|_\infty} h\left(|u_j| + \frac{K}{1-K|\Omega|}\int_\Omega |u_j| dx\right) \quad \text{em } \Omega, \\ w_j = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Observando que, por (6.19) e usando a Teoria da Regularidade Elíptica, obtemos

$$\|w_j\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p, \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e para todo } p \geq 1. \quad (6.20)$$

Tomando $p > \frac{N}{2}$, temos a imersão compacta de $W^{2,p}(\Omega)$ em $C^0(\overline{\Omega})$ e assim $w_j \rightarrow w$ em $C^0(\overline{\Omega})$, possivelmente para uma subsequência, e

$$\int_\Omega w_j dx \rightarrow \int_\Omega w dx.$$

Note que $w_j \geq 0$, $w_j \not\equiv 0$ implica $w \geq 0$. Além disso, como $w_j \rightarrow w$ em $C^0(\overline{\Omega})$ segue-se que $\|w_j\|_\infty = 1 \rightarrow \|w\|_\infty = 1$ e, assim, $w \not\equiv 0$. Portanto,

$$\int_\Omega w_j dx \rightarrow \int_\Omega w dx > 0.$$

Desde que $u_j = \|u\|_\infty w_j$, temos

$$\int_\Omega u_j dx = \|u\|_\infty \int_\Omega w_j dx \rightarrow +\infty$$

pois $\|u\|_\infty \rightarrow +\infty$ e

$$\int_\Omega w_j dx \rightarrow \int_\Omega w dx > 0.$$

Assim,

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_j dx\right) \rightarrow A(\infty). \quad (6.21)$$

De (6.19), obtemos

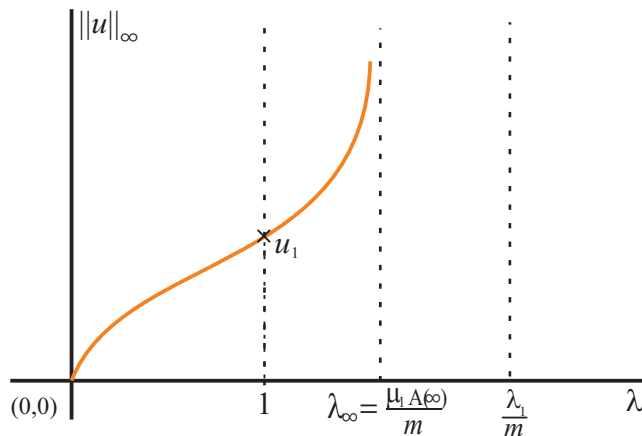
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla w_j \nabla \varphi dx &= \frac{\lambda_j}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} \left[m \int_{\Omega} w_j \varphi dx + \frac{mK}{1-K|\Omega|} \left(\int_{\Omega} w_j dx \right) \left(\int_{\Omega} \varphi dx \right) \right] \\ &+ \frac{\lambda_j}{A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right)} \left[\frac{1}{\|u_j\|_{\infty}} \int_{\Omega} h \left(u_j + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_j dx \right) \varphi dx \right], \quad (6.22) \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Das convergências anteriores, tomando o limite em (6.22) quando $j \rightarrow +\infty$, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla \varphi dx = \frac{\lambda_{\infty} m}{A(\infty)} \left[\int_{\Omega} w \varphi dx + \frac{K}{1-K|\Omega|} \left(\int_{\Omega} w dx \right) \left(\int_{\Omega} \varphi dx \right) \right]$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é, $w > 0$ é solução fraca do problema de autovalor linear. Conseqüentemente, $\frac{\lambda_{\infty} m}{A(\infty)} = \mu_1$ onde μ_1 é o autovalor considerado na Seção 6.2 e assim, $\lambda_{\infty} = \frac{A(\infty)\mu_1}{m}$ é o único ponto de bifurcação no infinito para soluções positivas do problema (6.12).

Demonstração de (i) Suponhamos $\lambda_{\infty} > 1$, isto é, $\frac{m}{A(\infty)} < \mu_1$. Desde Σ^+ é uma componente contínua, $(0,0) \in \Sigma^+$ e $(\lambda_{\infty}, +\infty)$ é o único ponto de bifurcação no infinito para soluções positivas do problema (6.12), então Σ^+ cruza $\{1\} \times C^0(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^+ \times C^0(\overline{\Omega})$ em um ponto $(1, u_1)$ de Σ^+ . Então u_1 é solução do problema (6.3). Observe a seguir uma interpretação geométrica deste fato.

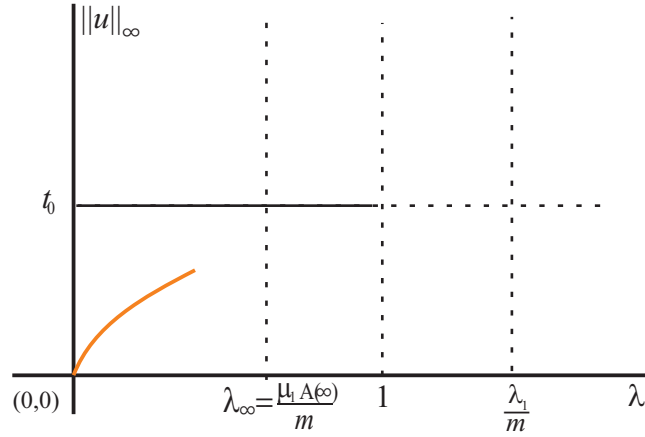


Demonstração de (ii) Suponhamos que $\lambda_{\infty} = \frac{\mu_1 A(\infty)}{m} < 1$ e que exista $(\lambda_0, u_0) \in \Sigma^+$

com $0 < \lambda_0 \leq 1$ e $\|u_0\|_\infty = t_0$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \frac{\lambda_0}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_0 dx\right)} f\left(u_0 + \frac{K}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_0 dx\right) & \text{em } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.23)$$

Assim estamos com a seguinte interpretação gráfica.



Novamente, pela Proposição A.1, temos que

$$t_0 = \|u\|_\infty \leq \frac{(e^d - 1)}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_0 dx\right)} \left\| f\left(u_0 + \frac{K}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_0 dx\right) \right\|_\infty.$$

Note que

$$u_0(x) + \frac{K}{1-K|\Omega|}\int_\Omega u_0 dx \leq t_0 + \frac{K|\Omega|t_0}{1-K|\Omega|} = \left(1 + \frac{K|\Omega|}{1-K|\Omega|}\right)t_0.$$

Em virtude das hipóteses (h_2) e (h_3) tem-se

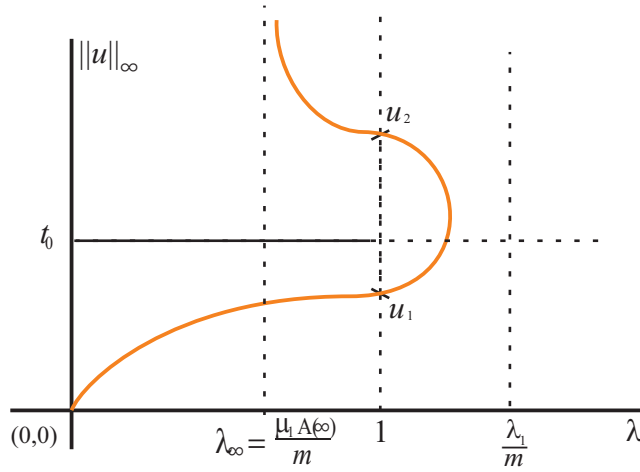
$$t_0 \leq \frac{(e^d - 1)}{A\left(\frac{t_0|\Omega|}{1-K|\Omega|}\right)} f\left(\left(1 + \frac{K|\Omega|}{1-K|\Omega|}t_0\right)\right) < t_0$$

o que é uma contradição.

Conseqüentemente, Σ^+ cruza $\{1\} \times C^0(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^+ \times C^0(\bar{\Omega})$ em um ponto $(1, u_1)$ de Σ^+ com $\|u_1\|_\infty < t_0$. Desde que $\lambda_\infty < 1$ é o único ponto de bifurcação no infinito de Σ^+ , segue-se que

Σ^+ cruza novamente $\{1\} \times C^0(\overline{\Omega})$ em outro ponto $(1, u_2)$ de Σ^+ com $\|u_2\|_\infty > t_0$. Portanto, o problema (6.3) possui pelo menos duas soluções u_1 e u_2 com $\|u_1\|_\infty < t_0 < \|u_2\|_\infty$ ■.

A figura abaixo ilustra tal fato.



6.4 Uma Abordagem Via Sub e Supersolução

Nesta seção, usaremos o Método de Sub e Supersolução para estudar o problema

$$\begin{cases} -A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right)\Delta u = f\left(x, u + \frac{K}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.24)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ é um domínio limitado, $K > 0$ é um parâmetro real tal que $1 - K|\Omega| > 0$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função de Carathéodory e $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções satisfazendo determinadas condições que serão especificadas oportunamente.

Antes de atacarmos o problema (6.24) faremos algumas observações preliminares.

Começemos com o problema A-Linear

$$\begin{cases} -A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right)\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases} \quad (6.25)$$

em que $f \in H^{-1}(\Omega)$ onde $H^{-1}(\Omega)$ é o dual topológico de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

A formulação variacional de (6.25) é da seguinte maneira.

Diz-se que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (6.25) se

$$A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \langle \langle f, \varphi \rangle \rangle \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad (6.26)$$

em que $\langle \langle f, \varphi \rangle \rangle$ é o par de dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$.

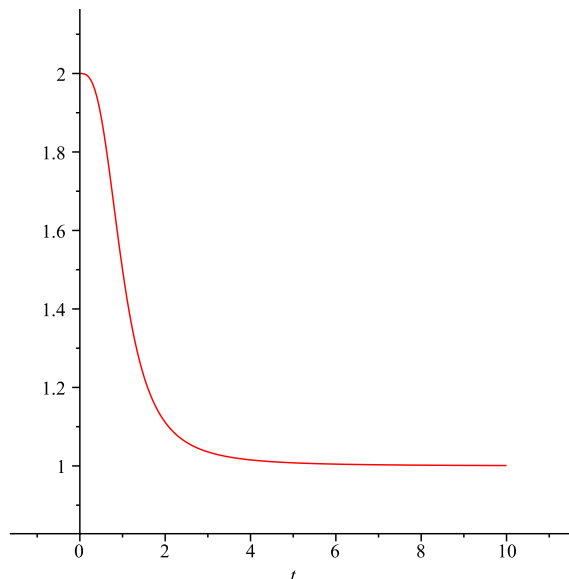
Suporemos que a função $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça

$$(h_5) \quad 0 < A(\infty) \leq A(t) \leq A_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, A(t) \text{ é decrescente e } A(\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t).$$

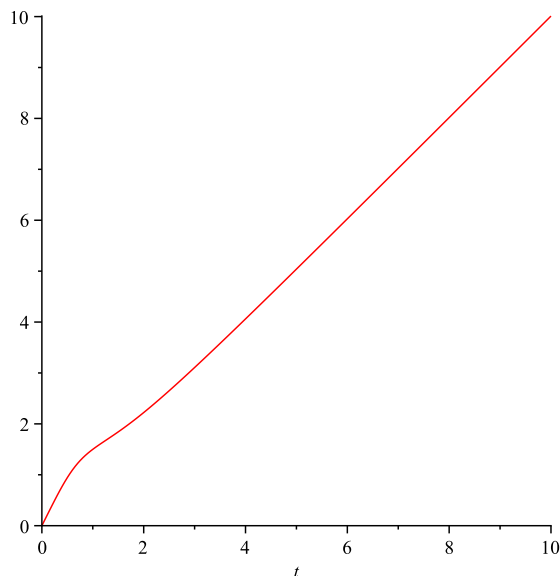
$$(h_6) \quad \text{a função } t \mapsto tA(t) \text{ é crescente.}$$

Exemplo 6.1. A função $A(t) = \frac{1}{1 + t^\alpha} + 1$ para $t \geq 0$ satisfaz as hipóteses acima.

Para $\alpha = 3$ o gráfico de $A(t)$ é



e o de $tA(t)$ é o seguinte



Como estamos interessados em soluções positivas, suporemos $f \geq 0$. Assim, $w_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$, solução única do problema,

$$\begin{cases} -\Delta w_f = f \in H^{-1}(\Omega) & \text{em } \Omega, \\ w_f \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases} \quad (6.27)$$

é maior ou igual a zero em Ω . O próximo Lema será muito útil na demonstração do resultado principal desta seção e é essencialmente devido a Chipot-Lovat [17].

Lema 6.1. *Sob as condições (h_5) e (h_6) o problema (6.25) possui uma única solução fraca.*

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca do problema (6.25), isto é,

$$A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \langle \langle f, \varphi \rangle \rangle \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

e daí

$$\int_{\Omega} \nabla \left(A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) u \right) \nabla \varphi dx = \langle \langle f, \varphi \rangle \rangle \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Pela unicidade de solução tem-se que

$$A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) u = w_f.$$

Logo,

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right)\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right) = \frac{\int_{\Omega} w_f dx}{1-K|\Omega|},$$

ou seja, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca do problema (6.25), então

$$\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx$$

é solução da equação

$$A(t)t = \frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} w_f dx. \quad (6.28)$$

Seja $w_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ como acima e consideremos

$$u = tw_f, \quad t > 0. \quad (6.29)$$

Calculemos

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} u dx\right)\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx &= A\left(\frac{t}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} w_f dx\right)\int_{\Omega} t \nabla w_f \nabla \varphi dx \\ &= A\left(\frac{t}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} w_f dx\right)t \langle \langle f, \varphi \rangle \rangle \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Se existir $t > 0$ tal que

$$A\left(\frac{t}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} w_f dx\right)t = 1$$

o que é equivalente a

$$A\left(\frac{t}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} w_f dx\right)\left(\frac{t}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega} w_f dx\right) = \frac{\int_{\Omega} w_f dx}{1-K|\Omega|}, \quad (6.30)$$

então u será solução do problema (6.25).

Observando que $w_f \geq 0$, $w_f \not\equiv 0$ e $\int_{\Omega} w_f dx > 0$, então a função $h(t) = tA(t)$ satisfaz: $h(0) = 0$, h é contínua, $h(t) \rightarrow +\infty$ se $t \rightarrow +\infty$ e h é crescente, existe um único $t > 0$ tal que (6.30) se verifica. Isso mostra que o problema (6.25) possui uma única solução fraca. ■

Lema 6.2. *Sejam $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u, v \geq 0$ quase sempre em Ω tais que tais que*

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \leq A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx\right) \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi dx, \quad (6.31)$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ em Ω . Se $A(t)$ for decrescente e (h_6) se verifica, então $u \leq v$ q.s.em Ω .

Demonstração. Observamos que de (6.29) tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla \left(A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) u \right) \nabla \varphi dx \leq \int_{\Omega} \nabla \left(A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx\right) v \right) \nabla \varphi dx, \quad (6.32)$$

para toda $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ em (Ω) . Portanto,

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) u \leq A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx\right) v \text{ a.e. em } (\Omega), \quad (6.33)$$

e daí

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) \leq A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx\right) \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx\right). \quad (6.34)$$

Em virtude da hipótese (h_6) , concluímos que

$$\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \leq \frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx. \quad (6.35)$$

Como A é decrescente

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx\right) \leq A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right). \quad (6.36)$$

Usando (6.33), teremos $u \leq v$ q.s.em Ω . ■

A partir daqui, faremos a abordagem do problema (6.24) via sub e supersolução.

Diz-se que $\underline{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ é subsolução do problema (6.24) se

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx\right) \int_{\Omega} \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx \leq \int_{\Omega} f\left(x, \underline{u} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx\right) \varphi dx, \quad (6.37)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ em (Ω) .

Diz-se que $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é supersolução do problema (6.24) se

$$A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right) \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla \varphi dx \geq \int_{\Omega} f \left(x, \bar{u} + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right) \varphi dx, \quad (6.38)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ em (Ω) .

Consideraremos as seguintes hipóteses:

(h_7) Existe um par $0 \leq \underline{u} \leq \bar{u}$ de sub e supersolução, respectivamente, de (6.24).

(h_8) $0 \leq f(x, t) \leq K(x) \in L^2(\Omega)$; para todo t que satisfaça

$$\underline{u}(x) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx \leq t \leq \bar{u}(x) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx.$$

(h_9)

$f(x, \cdot)$ é não-decrescente em $\left[\underline{u}(x) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx, \bar{u}(x) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right]$.

Teorema 6.2. *Sob as hipóteses (h_5), (h_6), (h_7), (h_8) e (h_9) o problema (6.24) possui soluções $U, V \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tais que $\underline{u} \leq U \leq V \leq \bar{u}$. Além disso, qualquer solução u de (6.24) com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ é tal que $U \leq u \leq V$, ou seja, U é solução mínima e V é solução máxima com respeito ao intervalo $[\underline{u}, \bar{u}]$.*

Demonstração. Seja $I \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ o intervalo ordenado $I = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega); \underline{u} \leq u \leq \bar{u}\}$ e definamos

$$\begin{aligned} \tilde{T} : I &\longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega) \\ u &\longmapsto v := \tilde{T}(u) \end{aligned}$$

em que v satisfaz

$$\begin{cases} -A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx \right) \Delta v = f \left(x, u + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.39)$$

no sentido fraco. Em virtude da condição (h_8)

$$f \left(\cdot, u(\cdot) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \in L^2(\Omega)$$

pois

$$\underline{u}(x) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx \leq u(x) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \leq \bar{u}(x) + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx.$$

Pelo Lema 6.1, o problema (6.39) possui uma única solução fraca $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, isto é,

$$A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} v dx \right) \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \left(x, u + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u dx \right) \varphi dx, \quad (6.40)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Afirmção 1: \tilde{T} é crescente em I , isto é, se $u_1, u_2 \in I$, $u_1 \leq u_2$, então

$$v_1 := \tilde{T}(u_1) \leq v_2 := \tilde{T}(u_2).$$

Com efeito,

$$A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} v_1 dx \right) \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \left(x, u_1 + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u_1 dx \right) \varphi dx, \quad (6.41)$$

e

$$A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} v_2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla v_2 \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \left(x, u_2 + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u_2 dx \right) \varphi dx, \quad (6.42)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Observemos que $\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \bar{u}$ implica em

$$\underline{u}(x) + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx \leq u_1(x) + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_1 dx \leq u_2(x) + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_2 dx \leq \bar{u}(x) + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx$$

e recordemos que $f(x, \cdot)$ é não-decrescente no intervalo

$$\left[\underline{u}(x) + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx, \bar{u}(x) + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right].$$

Conseqüentemente, combinando as igualdades (6.41) e (6.42), obtemos

$$A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v_2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla v_2 \nabla \varphi dx \geq A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} v_1 dx \right) \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla \varphi dx \quad (6.43)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, daí, usando o Lema 6.2, $v_1 \leq v_2$ q.s em Ω , o que mostra a monotonicidade de \tilde{T} em I .

Façamos $u_1 = \underline{u}$ e $u_n = \tilde{T}u_{n-1}$, $n \geq 2$. Observemos que

$$A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \left(x, \underline{u} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx \right) \varphi dx, \quad (6.44)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx \right) \int_{\Omega} \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx \leq \int_{\Omega} f \left(x, \underline{u} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx \right) \varphi dx, \quad (6.45)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ q.s. em Ω . Logo,

$$A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{u} dx \right) \int_{\Omega} \nabla \underline{u} \nabla \varphi dx \leq A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla \varphi dx \quad (6.46)$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ em (Ω) . Pelo Lema 6.2, $\underline{u} = u_1 \leq u_2$ q.s em Ω . Por indução, repetindo os argumentos prévios, obtemos

$$0 \leq \underline{u} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \bar{u} \leq \|\bar{u}\|_\infty \text{ para todo } n \geq 1.$$

Assim, existe uma função mensurável U com

$$u_n(x) \leq U(x) \leq \bar{u}(x) \leq \|\bar{u}\|_\infty \text{ q. s. em } \Omega \text{ para todo } n \geq 1$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = U(x) \text{ q. s. em } \Omega.$$

Observemos que

$$U \in L^\infty(\Omega),$$

$$0 \leq U(x) \leq \|\bar{u}\|_\infty \text{ q. s. em } \Omega$$

$$0 \leq (U(x) - u_n(x)) \rightarrow 0 \text{ q. s. em } \Omega$$

$$0 \leq (U(x) - u_n(x)) = |U(x) - u_n(x)| \leq 2\|\bar{u}\|_\infty$$

$$|U(x) - u_n(x)|^2 \rightarrow 0 \text{ e}$$

$$|U(x) - u_n(x)|^2 \leq 4\|\bar{u}\|_\infty.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\Omega} |U(x) - u_n(x)|^2 dx \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$\|U - u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(u_m - u_n) \nabla \varphi dx &= \frac{1}{A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u_m dx \right)} \int_{\Omega} f \left(x, u_{m-1} + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u_{m-1} dx \right) \varphi dx \\ &- \frac{1}{A \left(\frac{1}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u_n dx \right)} \int_{\Omega} f \left(x, u_{n-1} + \frac{K}{1 - K|\Omega|} \int_{\Omega} u_{n-1} dx \right) \varphi dx, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Fazendo $\varphi = u_m - u_n$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_0^2 &= \frac{1}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_m dx\right)} \int_{\Omega} f\left(x, u_{m-1} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_{m-1} dx\right) (u_m - u_n) dx \\ &\quad - \frac{1}{A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_n dx\right)} \int_{\Omega} f\left(x, u_{n-1} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_{n-1} dx\right) (u_m - u_n) dx. \end{aligned}$$

Usando as condições (h_5) , (h_8) e a desigualdade de Hölder, tem-se

$$\|u_m - u_n\|_0^2 \leq \frac{2}{A(\infty)} \|K\|_{L^2(\Omega)} \|u_m - u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Conseqüentemente, (u_n) é uma seqüência de Cauchy em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Portanto, $u_n \rightarrow \tilde{U} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e assim $u_n \rightarrow \tilde{U}$ em $L^2(\Omega)$. Por unicidade do limite em $L^2(\Omega)$, teremos

$$u_n \rightarrow U \text{ em } W_0^{1,2}(\Omega). \quad (6.47)$$

Observemos que (6.47) implica que $u_n \rightarrow U$ em $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < 2^*$. Em particular, $u_n \rightarrow U$ em $L^1(\Omega)$ e daí $\int_{\Omega} u_n dx \rightarrow \int_{\Omega} U dx$. Pela continuidade de A teremos

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_n dx\right) \rightarrow A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} U dx\right). \quad (6.48)$$

Como

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_n dx\right) \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f\left(x, u_{n-1} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} u_{n-1} dx\right) \varphi dx, \quad (6.49)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Tomando os limites em ambos os membros de (6.49) temos

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} U dx\right) \int_{\Omega} \nabla U \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f\left(x, U + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} U dx\right) \varphi dx, \quad (6.50)$$

para toda $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. De maneira análoga, obtemos $V \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\underline{u} \leq U(x) \leq V(x) \leq \bar{u} \text{ q. s. em } \Omega$$

e

$$A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega}Vdx\right)\int_{\Omega}\nabla V\nabla\varphi dx = \int_{\Omega}f\left(x, V + \frac{K}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega}Vdx\right)\varphi dx.$$

Além disso, dada uma solução u com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ em Ω , considerando o intervalo $[\underline{u}, u]$ aplicamos o procedimento anterior para obter uma seqüência não-decrescente $\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \dots \leq u$ tal que $u_n \rightarrow U$. Logo, $U \leq u$ é solução minimal com respeito ao intervalo $[\underline{u}, \bar{u}]$. Analogamente, verifica-se que V é solução maximal no intervalo $[\underline{u}, \bar{u}]$. ■

Exemplo: Observe que, pela hipótese (h_2) , A é limitada e crescente com

$$A(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) < A(0).$$

Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua satisfazendo

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} > \lambda_1 A(0) \quad (6.51)$$

em que λ_1 é o autovalor principal de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada a λ_1 . Se t for suficientemente pequeno, teremos, em virtude de (2.10), que

$$\frac{f(t\varphi_1(x))}{t\varphi_1(x)} > \lambda_1 A(0). \quad (6.52)$$

Logo,

$$-A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega}t\varphi_1 dx\right)\Delta(t\varphi_1) = A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega}t\varphi_1 dx\right)(\lambda_1 t\varphi_1) = A(0)\lambda_1 t\varphi_1 < f(t\varphi_1). \quad (6.53)$$

Supondo f crescente,

$$-A\left(\frac{1}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega}t\varphi_1 dx\right)\Delta(t\varphi_1) < \int_{\Omega}f\left(t\varphi_1 + \frac{K}{1-K|\Omega|}\int_{\Omega}t\varphi_1 dx\right)\varphi dx \text{ em } \Omega. \quad (6.54)$$

Suponhamos que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} < \mu_1 A(\infty). \quad (6.55)$$

Assim, existe $0 < \alpha < \mu_1 A(\infty)$ tal que

$$f(t) \leq \alpha t + \beta, \quad \beta > 0. \quad (6.56)$$

Seja $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ a solução fraca (única) de

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} = \frac{1}{A(\infty)} \left[\alpha \left(\bar{u} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right) + \beta \right] & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

a qual existe pois $\frac{\alpha}{A(\infty)} < \mu_1$. Usando (6.56)

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} \geq \frac{1}{A(\infty)} \left[f \left(\bar{u} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right) + \beta \right] & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e daí

$$\begin{cases} -A \left(\frac{1}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right) \Delta \bar{u} \geq f \left(\bar{u} + \frac{K}{1-K|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{u} dx \right) & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\varphi_1 > 0$ em Ω e $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} < 0$ em $\partial\Omega$ podemos escolher $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $0 < \underline{u} = t\varphi_1 < \bar{u}$. Portanto existe uma solução u com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

Apêndice A

Sobre Convergências e Teoria dos Pontos Críticos

Teorema A.1. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma seqüência limitada em X , então existem uma subseqüência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que $x_{n_j} \rightarrow x$ em X .*

Demonstração. Ver Brezis [14].

Teorema A.2. *(Convergência Dominada de Lebesgue): Seja (f_n) uma seqüência de funções em $L^1(\Omega)$ e suponha que:*

- (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;
- (b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} f_n dx \rightarrow \int_{\Omega} f dx$

Demonstração. Ver Bartle [8].

Teorema A.3. *(Vainberg): Seja (f_n) uma seqüência de funções em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que*

- (a) $f_{n_j}(x) \rightarrow f_n(x)$ q.t.p. em Ω ;
- (b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} f_n dx \rightarrow \int_{\Omega} f dx$

Demonstração. Ver Brezis [14].

Lema A.1. (Brezis-Lieb) Sejam Ω um aberto do \mathbb{R}^N , (u_n) uma seqüência de funções em $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Suponhamos que

(a) exista uma constante $C > 0$ tal que $\int_{\Omega} |f_n|^p dx \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

(b) $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em Ω

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p$$

Demonstração. Ver Willem [46].

Definição A.1. Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que a seqüência $(u_n) \in X$ é Palais-Smale de nível c para I se as seguintes convergências ocorrem:

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ e } I'(u_n) \rightarrow 0.$$

Dizemos que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale no nível c se toda seqüência Palais-Smale de nível c possui subseqüência convergente em X .

então existe $u \in V$ tal que

Uma das conseqüências do último resultado é que deve existir $(u_n) \subset V$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$F(u_n) \rightarrow \inf_V F \text{ e } \|F'(u_n)\| \rightarrow 0.$$

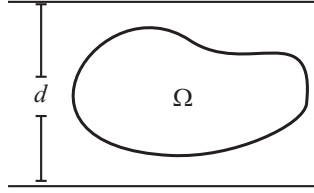
Ou seja, existe uma seqüência Palais-Smale no nível $c = \inf_X F(u)$.

O resultado a seguir pode ser encontrado em Gilbarg-Trudinger [28].

Proposição A.1. Dada $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x) \in C^0(\overline{\Omega}) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

então $\sup_{\Omega} u \leq (e^d - 1) \sup_{\Omega} g$, ou seja, se $g \geq 0$ então $\|u\|_{\infty} \leq (e^d - 1)\|g\|_{\infty}$ onde Ω está contido entre dois hiperplanos paralelos separados por uma distância d , como na figura abaixo.



O teorema a seguir é clássico e sua demonstração pode ser encontrada em Amster [6].

Lema A.2. (Um Princípio de Máximo) *Sejam $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$, e assuma que w satisfaz*

$$-\Delta w + \lambda w \geq 0 \text{ em } \Omega, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + \mu w \geq 0 \text{ em } \Gamma_1, \quad (\text{A.3})$$

$$w \geq 0 \text{ sobre } \Gamma_2, \quad (\text{A.4})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio com fronteira $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Então $w \geq 0$ em Ω .

O resultado a seguir é conhecido como Teorema do Traço de Sobolev e o operador Traço e sua demonstração pode ser encontrada em Adams-Fournier [2], página 164.

Lema A.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Supondo que $1 < p < N$ e $p \leq q \leq p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$. Então a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

é contínua. Além disso, se $q < p^* = \frac{(N-1)p}{N-p}$ tal imersão é compacta.

Aqui, $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ com $\nabla u \in (L^p(\Omega))^N$ equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Relacionado com este lema, temos desigualdade do traço Sobolev em $W^{1,p}(\Omega)$ and $L^q(\partial\Omega)$,

$$S_T(\Omega, p, q) \|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^p \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \quad 1 \leq q \leq p^* = \frac{p(N-1)}{N-p}.$$

Apêndice B

Teoremas de Krein-Rutman e Teoria de Regularidade Elíptica

Começaremos este apêndice com resultados do tipo Krein-Rutman os quais podem ser consultados em Amann [4].

Observação B.1. *Os espaços vetoriais considerados são todos reais.*

Observação B.2. *Seja X um espaço de Banach e $T : D(X) \subset X \rightarrow X$ um operador linear e fechado. Designamos por $\mathfrak{L}(X)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos definidos em X e tomando valores em X .*

Definição B.1. *O resolvente de T , designado por ρ é definido por*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - T)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)\}.$$

O complemento de $\rho(T)$ é chamado de espectro de T e designado por $\sigma(T)$

Definição B.2. *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T se $\lambda I - T$ não é injetivo. Se $x \in X \setminus \{0\}$ satisfaz $Tx = \lambda x$, então λ é chamado de autovetor de T .*

Definição B.3. *O raio espectral de T , designado por $r(T)$ é definido por*

$$r(T) := \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Definição B.4. *Seja E um espaço vetorial e \leq uma relação de ordem em E , isto é, \leq é transitiva, reflexiva e anti simétrica que satisfaz as condições de compatibilidade*

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z, \forall z \in E,$$

e

$$x \leq y \implies \lambda x \leq \lambda y, \forall \lambda \geq 0.$$

Dizemos que (E, \leq) é um espaço vetorial ordenado (EVO).

Definição B.5. *Seja E um espaço de Banach ordenado (EBO), então $x \leq y$ significa $x \leq y$ e $x \neq y$. Além disso, o conjunto*

$$[x, y]_E := \{z \in E; x \leq z \leq y\},$$

é chamado um intervalo ordenado entre x e y .

Definição B.6. *Seja (E, \leq) um espaço vetorial ordenado. O conjunto*

$$E_+ := \{x \in E; x \geq 0\},$$

é chamado de cone positivo de E . Seja $x \in E$

- a) *Diz-se que x é não-negativo se $x \in E_+$.*
- b) *Diz-se que x é positivo se $x \in E_+ \setminus \{0\}$.*
- c) *Suponhamos que $\text{int}(E_+) \neq \emptyset$. Diz-se que x é fortemente positivo se $x \in \text{int}(E_+)$.*

Definição B.7. *Seja E um espaço de Banach. Diz-se que (E, \leq) é um espaço de Banach Ordenado se for um espaço vetorial ordenado e o cone positivo E_+ é fechado com relação a topologia da norma de E .*

Definição B.8. *Seja E um espaço de Banach com cone positivo E_+ . Diz-se que E_+ é total se $E = \overline{E_+ - E_+}$.*

Definição B.9. *Sejam E e F espaços de Banach ordenados, respectivamente, por cones E_+ e F_+ . Um operador linear $T : E \rightarrow F$ é dito positivo se $T(E_+) \subset F_+$ e T é dito estritamente positivo se $T(E_+ \setminus \{0\}) \subset F_+ \setminus \{0\}$.*

Teorema B.1. *(Krein-Rutman-Versão 1) Seja E um espaço de Banach ordenado com cone positivo total E_+ . Suponhamos que $T : E \rightarrow E$ é compacto, positivo e possui raio espectral $r(T)$ positivo. Então $r(T)$ é um autovalor de T com autovetores $u \in E_+$. Além disso, $r(T)$ é autovalor de T^* com autovetores E_+^* , respectivamente.*

Definição B.10. *Sejam E e F espaços de Banach ordenados, respectivamente, por cones E_+ e F_+ . Suponhamos que $\text{int}(F_+) \neq \emptyset$ e consideremos o operador $T : E \rightarrow F$. Dizemos que T é fortemente positivo, $T \gg 0$, se $Tx \in \text{int}(F_+)$ para todo $x > 0$.*

Teorema B.2. *(Krein-Rutman-Versão 2) Seja E um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo E_+ possui interior não vazio. Se $T : E \rightarrow E$ é um operador compacto fortemente positivo, então as seguintes condições se verificam:*

- a) $r(T)$ é positivo.
- b) $r(T)$ é um autovalor simples de T tendo autovetor positivo e não existe nenhum outro autovalor com autovetor positivo. Aqui, positivo é fortemente positivo.
- c) $r(T)$ é autovalor simples de T^* tendo autovetor estritamente positivo.
- d) Para todo $y \in E_+ \setminus \{0\}$, a equação

$$\lambda x - Tx = y$$

possui exatamente uma solução positiva se $\lambda > r(T)$ e nenhuma solução positiva se $\lambda \leq r(T)$.

- e) Para toda $S \in \mathfrak{L}(E)$ satisfazendo $S \geq T$, $r(S) \geq r(T)$. Se $S - T$ é fortemente positivo, então $r(S) > r(T)$.

Teorema B.3. *(Krein-Rutman-Versão 3) Seja (E, \leq) um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo E_+ possui interior não vazio e $T \in \mathfrak{L}(E)$ um operador positivo, compacto e fortemente positivo. Então*

- a) $r(T)$ é um autovalor com multiplicidade algébrica 1 tanto de T quanto de T^* .
- b) os auto espaços são gerados por funções fortemente positivas e por funcional fortemente positivo.
- c) $r(T)$ é o único autovalor de T cuja autofunção associada pode ser escolhida positiva.

Consideremos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + bu = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

em que $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e regular, $b \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema B.4. (*Krein-Rutman-Versão 4*) O problema de autovalor (B.1) possui um autovalor λ_1 que satisfaz $\lambda \geq \lambda_1$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de (B.1). O autovalor λ_1 é chamado de autovalor principal de (B.1). Além disso, λ_1 é o único autovalor tal que a autofunção associada pode ser escolhida positiva em Ω .

A partir de agora, apresentaremos resultados de existência e regularidade para o problema. Esses resultados podem ser encontrados em Morales-Rodrigo [37].

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x) & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = h(x) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Teorema B.5. Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e $h \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Então, o problema (B.2) possui uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Além disso,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)}. \quad (\text{B.3})$$

Teorema B.6. Suponhamos que $f \in C^\alpha(\Omega)$ e $h \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$. Então, o problema (B.2) possui uma única solução $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Além disso,

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|h\|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}. \quad (\text{B.4})$$

Teorema B.7. *Suponhamos que $f \in C(\Omega)$ e $h \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Então, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução do problema (B.2) tem-se*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^p(\partial\Omega)}. \quad (\text{B.5})$$

Teorema B.8. *Suponhamos que $g \in L^r(\Omega)$ com $r > \frac{2N}{N+2}$ e seja $\phi \in W^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = g & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Então

$$\|\phi\|_{W^{1,\beta}(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^r(\Omega)} \quad \text{com } \beta = \frac{Nr}{N+r} > 2. \quad (\text{B.7})$$

Teorema B.9. *Suponhamos que $h \in L^s(\partial\Omega)$ com $s > \frac{2(N-1)}{N}$ e seja $\psi \in W^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \psi = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = h & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Então

$$\|\psi\|_{W^{1,\gamma}(\Omega)} \leq C\|h\|_{L^s(\partial\Omega)} \quad \text{com } \gamma = \frac{Ns}{N-1} > 2. \quad (\text{B.9})$$

Lema B.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$ um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Se $1 < p < N$ e $p \leq q \leq p_* = \frac{(N-1)p}{N-p}$. Então a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

é contínua. Além disso, se $q < p_ = \frac{(N-1)p}{N-p}$ então a imersão é compacta.*

Assim, as funções de $W^{1,2}(\Omega)$ admitem um traço em $L^q(\partial\Omega)$ e temos a desigualdade do traço Sobolev

$$S_T(\Omega, 2, q)\|u\|_{L^q(\partial\Omega)}^2 \leq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2, \quad 1 \leq q \leq 2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}.$$

Além disso, a melhor constante de Sobolev $S_T(\Omega, 2, q)$ é dada

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2) dx}{\left(\int_{\partial\Omega} |u|^q d\sigma \right)^{2/q}} > 0. \quad (\text{B.10})$$

e as funções que fazem com que esse ínfimo seja atingido são justamente as autofunções associadas ao λ_1 .

Apêndice C

Resultados Auxiliares do Capítulo V

A seguir vamos provar dois resultados usados na Seção 5.3 e nos demais resultados deste trabalho que usam sub e supersolução

Teorema C.1. *O problema (5.41) possui uma solução positiva.*

Demonstração. Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ associada ao primeiro autovalor λ_1 . Consideremos a função $\underline{u} = t\varphi_1, t > 0$. Um cálculo direto mostra que

$$-\Delta \underline{u} + \underline{u} \leq \frac{\lambda}{M_R} \underline{u}^\alpha \text{ em } \Omega$$

o que vale se

$$t^{1-\alpha} \varphi_1^{1-\alpha} (1 + \lambda_1) \leq \frac{\lambda}{M_R} \text{ em } \Omega$$

e, já que $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega})$, tal desigualdade vale se $t > 0$ é suficientemente pequeno. Também temos que

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(t\varphi_1) = t \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} < 0 < \underline{u}^\beta \text{ em } \partial\Omega$$

e então

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} + \underline{u} \leq \frac{\lambda}{M_R} \underline{u}^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} < \underline{u}^\beta & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

o que implica em $\underline{u} = t\varphi_1$, com $t > 0$ é suficientemente pequeno, é uma subsolução do problema (5.41). Vamos trabalhar agora para construir uma supersolução. Para tanto, seja

e a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta e + e = 1 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial e}{\partial \eta} = 1 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Pelo Princípio do Máximo temos que $e \geq 0$ em $\bar{\Omega}$. E, se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que $e(x_0) = 0$, teríamos

$$0 \geq -\Delta e(x_0) + e(x_0) = 1 > 0$$

o que é uma contradição.

Se $x_0 \in \partial\Omega$ e $e(x_0) = 0$, pelo Princípio do Máximo de Hopf teríamos $\frac{\partial e}{\partial \eta}(x_0) < 0$ o que é impossível pois $\frac{\partial e}{\partial \eta} = 1 > 0$ em $\partial\Omega$. Conseqüentemente, existe um número positivo e_0 tal que $e(x) \geq e_0 > 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Seja $\bar{u} = Le$, em que $L > 0$ é uma constante a ser estabelecida posteriormente. Um simples cálculo mostra-nos que

$$-\Delta \bar{u} + \bar{u} = L \geq \frac{\lambda}{M_R} \bar{u}^\alpha \quad \text{em } \Omega \quad (\text{C.3})$$

o que é equivalente a

$$L^{1-\alpha} \geq \frac{\lambda}{M_R} e^\alpha \quad \text{em } \Omega \quad (\text{C.4})$$

a qual vale para L suficientemente grande. Além disso, $\frac{\partial}{\partial \eta}(\bar{u}) = L \geq \bar{u}^\beta = L^\beta e^\beta$ sobre $\partial\Omega$ se e somente se $L^{1-\beta} \geq e^\beta$ sobre $\partial\Omega$ e esta última desigualdade é satisfeita se L é suficientemente grande. Assim, $\bar{u} = Le$ é uma supersolução do problema (5.41) se L é suficientemente grande. Ademais, se $t > 0$ é pequeno e $L > 0$ é grande, teremos $\underline{u} \leq \bar{u}$ em Ω .

Para cada $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, tomamos $v := T(u)$ a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \frac{\lambda}{M_R} u^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = u^\beta & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

com $u \in C^0(\bar{\Omega})$.

Afirmção C.1. $T : [\underline{u}, \bar{u}] \rightarrow [\underline{u}, \bar{u}] \subset C^0(\bar{\Omega})$

De fato, se $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, temos

$$\begin{cases} -\Delta(\bar{u} - v) + (\bar{u} - v) \geq \frac{L}{M_R}(\bar{u}^\alpha - u^\alpha) \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(\bar{u} - v) \geq (\bar{u}^\beta - u^\beta) \geq 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

e então $\bar{u} \geq v$ em Ω . Do mesmo modo pode-se provar que $v \geq \underline{u}$ e, portanto, $T([\underline{u}, \bar{u}]) \subset [\underline{u}, \bar{u}]$. O que prova a afirmação.

Um cálculo padrão mostra que T é compacto e contínuo, logo, pelo teorema do Ponto Fixo de Schauder T tem um ponto fixo, o qual será uma solução fraca do problema (5.41) e concluímos a prova do teorema. ■

O próximo resultado é uma adaptação da demonstração feita por Ambrosetti-Brezis-Cerami em [5] para problemas com condição de fronteira de Dirichlet.

Teorema C.2. *Sejam f and g funções tais que $\frac{f(t)}{t}$ e $\frac{g(t)}{t}$ são decrescentes para $t > 0$. Sejam v e ω duas funções satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta v + v = f(v) & \text{em } \Omega, \\ v > 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(v) & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

e

$$\begin{cases} -\Delta \omega + \omega = f(\omega) & \text{em } \Omega, \\ \omega > 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = g(\omega) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Então $\omega \geq v$ em Ω .

Demonstração. Inicialmente observamos que

$$-v\Delta\omega + \omega\Delta v \geq v\omega \left(\frac{f(\omega)}{\omega} - \frac{f(v)}{v} \right) \text{ em } \Omega. \quad (\text{C.9})$$

Seja $\theta(t)$ uma função não-decrescente regular satisfazendo $\theta(0) = 0, \theta(t) \equiv 1$, se $t \geq 1$ e

$\theta(t) \equiv 0$ se $t \leq 0$. Definamos $\theta_\epsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ e observemos que

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (C.9) por $\theta_\epsilon(v - \omega)$, obtemos

$$\int_{\Omega} [(-\Delta\omega)(v\theta_\epsilon(v - \omega)) + (\Delta v)(\omega\theta_\epsilon(v - \omega))] dx \geq \int_{\Omega} v\omega \left(\frac{f(\omega)}{\omega} - \frac{f(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) dx. \quad (\text{C.11})$$

Raciocinando como em [5], nós temos

$$\int_{\Omega} [(-\Delta\omega)(v\theta_\epsilon(v - \omega)) + (\Delta v)(\omega\theta_\epsilon(v - \omega))] dx \leq \quad (\text{C.12})$$

$$\int_{\Omega} (v - \omega)\theta'_\epsilon(v - \omega)\nabla v(\nabla v - \nabla\omega) dx - \int_{\partial\Omega} v\omega \left(\frac{g(\omega)}{\omega} - \frac{g(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) d\sigma \leq \quad (\text{C.13})$$

$$\int_{\partial\Omega} v\omega \left(\frac{g(\omega)}{\omega} - \frac{g(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) d\sigma + \int_{\Omega} v\omega \left(\frac{f(\omega)}{\omega} - \frac{f(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) dx \leq \quad (\text{C.14})$$

$$\int_{\Omega} (v - \omega)\theta'_\epsilon(v - \omega)\nabla v\nabla(\nabla v\nabla\omega) dx. \quad (\text{C.15})$$

Tomemos $\gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s\theta'_\epsilon(s) ds$ e observemos que $0 \leq \gamma_\epsilon(t) \leq \epsilon$. Assim,

$$\int_{\Omega} \nabla v((v - \omega)\theta'_\epsilon(v - \omega))(\nabla v - \nabla\omega) dx = \int_{\Omega} \nabla v\nabla(\gamma_\epsilon(v - \omega)) dx = \quad (\text{C.16})$$

$$- \int_{\Omega} \Delta v\gamma_\epsilon(v - \omega) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} \gamma_\epsilon(v - \omega) d\sigma \leq \quad (\text{C.17})$$

$$C\epsilon + \int_{\partial\Omega} v^\beta \gamma_\epsilon(v - \omega) d\sigma \leq (C + 1)\epsilon \rightarrow 0 \text{ pois } \epsilon \rightarrow 0. \quad (\text{C.18})$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} v\omega \left(\frac{g(\omega)}{\omega} - \frac{g(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) d\sigma + \int_{\Omega} v\omega \left(\frac{f(\omega)}{\omega} - \frac{f(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) dx \leq 0 \quad (\text{C.19})$$

e então

$$\int_{[v>\omega]} v\omega \left(\frac{g(\omega)}{\omega} - \frac{g(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) d\sigma + \int_{[v>\omega]} v\omega \left(\frac{f(\omega)}{\omega} - \frac{f(v)}{v} \right) \theta_\epsilon(v - \omega) dx \leq 0. \quad (\text{C.20})$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\int_{[v>\omega]} v\omega \left(\frac{g(\omega)}{\omega} - \frac{g(v)}{v} \right) d\sigma + \int_{[v>\omega]} v\omega \left(\frac{f(\omega)}{\omega} - \frac{f(v)}{v} \right) dx \leq 0. \quad (\text{C.21})$$

Desde que $\frac{f(t)}{t}$ e $\frac{g(t)}{t}$ são funções decrescentes, obtemos $|\{v; [v > \omega]\}| = 0$ e então $v(x) \leq \omega(x)$ a.e. em Ω o que conclui a prova deste teorema. ■

O próximo resultado é uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer usado no método de Galerkin. A demonstração deste resultado pode ser encontrada Lions [36].

Lema C.1. *Suponhamos $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua tal que $\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0$ em $|\xi| \leq r$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual em \mathbb{R}^m e $|\cdot|$ é a norma associada a este produto interno. Então, existe $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(z_0) = 0$.*

Apêndice D

Sobre o Gênero de Krasnoselkii e Teorema de Rabinowitz

Seja E um espaço de Banach real. Designemos por \mathcal{U} a classe de todos os subconjuntos fechados $A \subset E \setminus \{0\}$ que são simétricos com relação à origem $0 \in E$, isto é, $u \in A$ implica em $-u \in A$.

Definição D.1. *Seja $A \in \mathcal{U}$. O Gênero de Krasnoselkii $\gamma(A)$ de A é definido como sendo o menor inteiro positivo k tal que existe uma aplicação ímpar $\phi \in C(A, \mathbb{R}^k)$ tal que $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Se tal ϕ não existe, definimos $\gamma(A) = +\infty$. Além disso, por definição, $\gamma(\phi) = 0$.*

Teorema D.1. *Seja $E = \mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ a fronteira de um conjunto aberto, limitado e simétrico $\Omega \in \mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$. Então*

$$\gamma(\partial\Omega) = N.$$

Corolário D.1.

$$\gamma(S^{N-1}) = N.$$

Teorema D.2. *Seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale. Além disso, suponhamos que*

(i) *J é limitado inferiormente e par;*

(ii) existe um conjunto compacto $K \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(K) = k$ e $\sup_{x \in K} J(x) < J(0)$.

Então J possui pelo menos k pares de pontos críticos distintos e seus correspondentes valores críticos são menores que $J(0)$.

Para mais detalhes sobre a Teoria do Gênero de Krasnoselskii consultar Costa [26].

Agora, vamos à uma importante observação.

Observação D.1. *Sejam E é um espaço de Banach real e $T : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ um operador contínuo e compacto. Se consideramos a equação*

$$u = T(\lambda, u) \text{ em } (\lambda, E) \tag{D.1}$$

podemos aplicar o seguinte Teorema devido a Rabinowitz.

Teorema D.3. *(Rabinowitz) Se T é um operador contínuo e compacto e $T(0, u) \equiv 0$, então $\Sigma = \overline{\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E; u = T(\lambda, u)\}}$ contém um par de componentes Σ^+ e Σ^- contidas em $\mathbb{R}^+ \times E$ e $\mathbb{R}^- \times E$, respectivamente, não-limitadas e contendo $(0, 0) \in \mathbb{R} \times E$.*

Referências Bibliográficas

- [1] R. Abreu, A. Suárez, C. Morales-Rodrigo, *Some Eigenvalue Problems With Non-Local Boundary Conditions and Applications*. Preprint, (2014).
- [2] R.A. Adams & J.J. Fournier, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2003.
- [3] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa, T. F. MA, *Positive Nolutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type*, *Comput. Math. Appl*, 49 (2005), 85-93.
- [4] H. Amann, *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*, *SIAM Rev.* 18 (1976), 620-709.
- [5] A. Ambrosetti, H. Brezis & G. Cerami, *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*, *J. Funct. Anal.*, 122 (1994)519-543.
- [6] P. Amster, M.C. Mariani & O. Mendez, *Nonlinear Boundary Conditions for Elliptic Equations*, *EJDE(144)(2005)*, 1-8.
- [7] L. K. Arruda, I. Marques, *On Pairs of Positive Solutions for a Class of Quasilinear Elliptic Problems*. Preprint.
- [8] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- [9] J. W. Bebernes, A. A. Lacey, *Global Existence and Finite-time Blow-up for a Class of Nonlocal Parabolic Problems*. *Adv. Differential Equations*,2 (1997), nº 6, 927-953.
- [10] J.W. Bebernes, C. Li, P. Talaga, *Single-point Blow-up for Nonlocal Parabolic Problems*, *Physica D* 134 (1) (1999) 48-60.

- [11] J.W. Bebernes, P. Talaga, *Nonlocal Problems Modelling Shear Banding*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 3 (1996) 79-103.
- [12] S. Bernstein, *Sur Une Classe D'Équations Fonctionnelles Aux Dérivées Partielles*, Bull. Acad. Sci URSS, Ser. Math. 4, 17-26, 1940.
- [13] J.F. Bonder & J.D. Rossi, *Existence Results for the p -Laplacian With Nonlinear Boundary Condition*, J. Math. Anal. Appl. 263(2001), 195-223.
- [14] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*. Paris: Dunod, 2005.
- [15] H. Bueno, G. Ercole, A. Zumpano, *Existence and Multiplicity of Positive Solutions for the p -Laplacian With Nonlocal Coefficient*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 343, p. 151-158, 2008.
- [16] A. P. Calderon, *On a inverse Boundary value Problem*, Seminar on Nonlinear Analysis and Applications to Continuum Physics. Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (1980), 65-73.
- [17] M. Chipot & B. Lovat, *Some Remarks on Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems*, Nonlinear Anal., Vol. 30, N. 7,(1997), 4619-4627.
- [18] M. Chipot & B. Lovat, *On the Asymptotic Behaviour of Some Nonlocal Problems*, Positivity 3(1999), 65-81.
- [19] M. Chipot & J.F. Rodrigues, *On a Class of Nonlocal Nonlinear Elliptic Problems*, M²AN, Vol. 26, N. 3, (1992), 447-468.
- [20] M. Chipot & P. Roy, *Remark On Some Class of Nonlocal Elliptic Problems*. *Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues*, Edited by M. Chipot and H. Ninomiya, World Scientific , (2006), 79-102.
- [21] F. J. S. A. Corrêa, *On Pairs of Positive Solutions for a Class of Sub-superlinear Elliptic Problems*, Differential Int. Equations, 5 (1992), no. 2, 387-392.
- [22] F.J.S.A. Corrêa, *On Positive Solutions of Nonlocal and Nonvariational Elliptic Problems*, Nonlinear Anal.59(2004), 1147-1155.

- [23] F.J.S.A. Corrêa, G.M. Figueiredo, *On an Elliptic Equation of p -Kirchhoff-type via Variational Methods*, Bull. Austral. Math. Soc., 74 (2006), pp. 263-277.
- [24] F. J. S. A. Corrêa, J. Morbach, *Some Remarks on Elliptic Equations Under Nonlinear and Nonlocal Boundary Conditions*, Advances in Mathematical Sciences and Applications Vol. 23, No. 2 (2013), pp. 529-543.
- [25] F. J. S. A. Corrêa, R. G. Nascimento, *On a Nonlocal Elliptic System of p -Kirchhoff Type Under Neumann Boundary Condition*, Mathematical and Computer Modelling (2008), doi:10.1016/j.mcm.2008.03.013.
- [26] D. G. Costa, *Tópicos em Análise Não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, Escola Latino-Americana de Matemática, 1986.
- [27] G. M. Figueiredo, C. Morales-Rodrigo, J. R. Santos & A. Suárez, *Study of a Nonlinear Kirchhoff Equation With Non-homogeneous Material*, preprint(2013)
- [28] D. Gilbarg & N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer - Verlag, Berlin, 1983.
- [29] A. Gladkov & K. I. Kim, *Blow-up of Solutions for Semilinear Heat Equation With Nonlinear Nonlocal Boundary Condition*. J Math Anal Appl. 338, 264-273 (2008).
- [30] J. D. B. Godoi, *Problemas de Autovalores de Steklov-Neumann e suas Aplicações*. Tese de Doutorado, UFSCAR (2012).
- [31] N.I. Kavallaris & D.E. Tzanetis, *On the Blow-up of a Non-local Parabolic Problem*, Applied Mathematics Letters Volume 19, Issue 9, September 2006, Pages 921-925.
- [32] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.
- [33] P. D. Lamberti, *Steklov-type Eigenvalues Associated With Best Sobolev Trace Constants: Domain Perturbation and Overdetermined Systems*, arXiv:1101.5930v1 [math.AP] 31 Jan 2011.
- [34] An Lê, *Eigenvalue Problems for the p -Laplacian*, Nonlinear Anal. 64 (2006), 1057-1099.

- [35] J.L. Lions, *On some questions in Boundary value Problems of mathematical physics, International Symposium on Continuum. Mechanics and Partial Differential Equations*, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies, Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, (1978)284-346.
- [36] J.L. Lions, *Quelques Méthods de Résolution de Problèmes Aux Limites non Linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [37] C. Morales-Rodrigo, *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Condiciones de Contorno no Lineales*. Aplicaciones a la Dinamica de Tumores. Tese de Doutorado, (2009).
- [38] R. G. Nascimento, *Problemas Elíticos Não-locais do Tipo p -Kirchhoff*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Janeiro 2008.
- [39] R. Pardo, *Bifurcation for an Elliptic Problem With Nonlinear Boundary Conditions*. Revista Integración Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander Vol. 30, No. 2, (2012), pág. 151-226.
- [40] S. I. Pohozaev, *On a Class of Quasilinear Hyperbolic Equations*, Math. Sbornik 96, 152-166(1975).
- [41] P. H. Rabinowitz, *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalues Problems*, J. Funct. Analysis, 7 (1971)487-513..
- [42] J.D. Rossi, *Elliptic Problems With Nonlinear Boundary Conditions and the Sobolev Trace Theorem*, Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations, Vol. 2, Edited by M. Chipot & P. Quittner, (2005), 311-406.
- [43] M.W. Steklov, *Sur Les Problèmes Fondamentaux en Physique mathématique*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 19(1902), 455-490.
- [44] Y. Wang, *Solutions to Nonlinear Elliptic Equations With a Nonlocal Boundary Condition*, Eletronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002, N. 02, (2002), 1-16.
- [45] F. Wang & Y. An, *Existence of Nontrivial Solution for a Nonlocal Elliptic Equation With Nonlinear Boundary Condition*, Boundary Value Problems, Vol. 2009, Article ID 540360, 8 pages.

- [46] M. Willem, *Minimax Theorems*, Boston, MA: Birkhauser, 1996.
- [47] Y. Yang, J. Zhang, *Existence Results for a Class of Nonlocal Problems Involving p -Laplacian*, Boundary value Problems, 2011, pp. 1-8.