Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM

Tese de Doutorado

Problemas Elípticos do tipo $p(x)$-Kirchhoff em Espaços Generalizado de Lebesgue-Sobolev

Augusto César dos Reis Costa

Orientador: Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa

Belém

2014

Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática UFPA/UFAM

Augusto César dos Reis Costa

Problemas Elípticos do tipo $p(x)$-Kirchhoff em Espaços Generalizado de Lebesgue-Sobolev

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Matemática em associação ampla UFPA/UFAM, como resquisito parcial, para a obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Data da defesa: 30 de abril de 2014.
Conceito: Aprovado

Banca Examinadora

Ederson Moreira dos Santos
Prof. Dr. EDERSON MOREIRA DOS SANTOS
Universidade de São Paulo - USP - São Carlos

Prof. Dr. EVERALDO SOUTO DE MEDEIROS
Universidade Federal da Paraíba - UFPB

Prof. Dr. FRANCISCO JULIO SOBREIRA DE ARAUJO CORRÊA
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG (Orientador)

Prof. Dr. GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO
Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof.ª Dra. RÚBIA GONÇALVES NASCIMENTO
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedicado à Minha Esposa Carmen

Um Poema de Amor

... e quando a noite desceu,
O poeta escreveu
Sua história de amor!
Tinha a grandeza do Mar,
O esplendor do Luar
E a beleza da Flor!...
Era o romance uma linda canção
Nascida do coração!
Hoje, o Poeta-Cantor
Nada mais tem, senão
Um poema de amor!
(Um poema de amor, de amor!...)

Wilson Fonseca

Agradecimentos

Agradeço a Deus, meu baluarte, pela Vida.

A Minha Mãe, ao meu pai (in memoriam) e aos meus irmãos que sempre me incentivaram e apoiaram nos estudos.

A Minha Linda esposa Carmen, pela feliz convivência e pela compreensão pelos meus momentos de estudo.

A toda a família, e em particular aos meus netos e ao bisneto Saulo, que tornam meu mundo mais bonito.

Ao Nobre Professor e Amigo Professor Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa por acreditar que era possível fazer esta pesquisa, e me ensinar matemática com muita capacidade, humildade e dedicação. Agradeço também pelos "tópicos da vida", pois muitas vezes gosta de fazer comentários sobre assuntos do dia a dia - comentários esses que sempre nos levam à reflexão.

Aos professores Uberlândio Batista Severo e Marco Antonio Lázaro Velásquez, por participarem de minha qualificação em Análise e Geometria respectivamente.

Aos professores Ederson Moreira dos Santos, Everaldo Souto de Medeiros, Francisco Julio Sobreira de Araujo Corrêa, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Rúbia Gonçalves Nascimento, por aceitarem participar da banca examinadora desta Tese e pelas contribuições à mesma.

Aos colegas de curso, pela boa companhia: João, Amanda, Joelma e Rosilene.

Aos amigos e colegas de trabalho pelos incentivos; Giovany, Rubia, Brand, Pablo, Adam, Geraldo, Elizardo e Silvino.

A Universidade Federal do Pará - Instituto de Ciências Exatas e Naturais - Faculdade de Matemática, pela oportunidade.

Aos funcionários da secretaria do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, pelo sempre cordial atendimento.

Resumo

Neste trabalho, mostramos existência e multiplicidade de soluções, em espaços generalizados de Sobolev, para problemas elípticos do tipo $p(x)$-Kirchhoff

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u & = & \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \\ & & +|u|^{q(x)-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \qquad (P)$$

onde Ω é um domínio limitado do $I\!R^N$, com fronteira suave e $\Delta_{p(x)}$ é o operador $p(x)-$Laplaciano. Mostramos também existência de solução com condição de Neumann. Estudamos o problema com crescimento subcrítico e crítico. Para obter os resultados utilizamos Teorema do Passo da Montanha, Princípio Variacional de Ekeland, Teoria de Gênero e Argumento de Truncamento.

Palavras-Chave: Teorema do Passo da Montanha; Princípio Variacional de Ekeland; Teoria de Gênero; Espaço de Sobolev de expoente variável, $p(x)$-Kirchhoff; Problema de Neumann, Argumento de truncamento, Expoente crítico de Sobolev.

Abstract

In this work, we show existence and multiplicity of solutions in generalized Sobolev spaces for elliptic problems of the type $p(x)$-Kirchhoff

$$\left\{\begin{array}{rcl} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u & = & \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \\ & & +|u|^{q(x)-2}u \quad in \;\; \Omega, \\ u & = & 0 \quad \text{on } \; \partial\Omega, \end{array}\right. \qquad (P)$$

where Ω is a bounded domain of $I\!R^N$ with smooth boundary and $\Delta_{p(x)}$ is the $p(x)-$ Laplacian operator. We also show the existence of solution with Neumann condition. We study the problem with subcritical and critical growth. For obtain the results, we use the Mountain Pass Theorem, Ekeland Variational Principle, Genus Theory and Truncation Argument.

Key words: Mountain Pass Theorem; Ekeland Variational Principle; Genus theory; Sobolev spaces of variable exponent; $p(x)$-Kirchhoff; Neumann problem, Truncation argument, Sobolev critical exponent.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, mostraremos existência e multiplicidade de soluções, em espaços generalizados de Lebesgue-Sobolev, para problemas elípticos do tipo $p(x)$-Kirchhoff

$$\left\{\begin{array}{rcl} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u & = & \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \\ & & +|u|^{q(x)-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{P}$$

onde Ω é um domínio limitado do $I\!R^N$ com fronteira suave, $p, q \in C(\overline{\Omega})$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções contínuas, que satisfazem certas condições que serão dadas posteriormente, $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,\xi)d\xi$, λ, $r > 0$ são parâmetros reais e $\Delta_{p(x)}$ é o operador $p(x)$-Laplaciano, isto é, $\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$, que é uma extensão do operador p-Laplaciano. Mostraremos, também, existência de solução para o problema com condição de Neumann.

O problema (P) com $p \equiv 2$, $\lambda = 1$, $r = 0$ e sem a segunda parcela do termo à direita da igualdade, reduz-se à equação estacionária original de Kirchhoff, a saber

$$\left\{\begin{array}{rcl} -M(\|u\|^2)\Delta u & = & f(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ u & = & 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{P_1}$$

onde $\|u\|^2 = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ é a norma em $H_0^1(\Omega)$.

A equação original de Kirchhoff, a qual apareceu pela primeira vez no trabalho de Kirchhoff [37], é dada por

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; 0, \tag{P_2}$$

e estende a equação clássica da onda de D'Alembert, considerando os efeitos da mudança no comprimento da corda durante as vibraçoes. Os parâmetros da equação (P_2) tem os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área de sua seção transversal, E é o módulo de Young do material do qual ela é feita, ρ é a densidade da massa e P_0 é a tensão inicial. Um diferencial importante na equação (P_2) é a presença do coeficiente não-local

$\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$ que depende da média $\frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx$, da energia cinética $\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2$ em $[0, L]$. Várias equações do tipo Kirchhoff tem sido estudadas, especialmente depois do trabalho de J. Lions [41] no qual foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para o referido problema.

Considerando o problema (P), com $M \equiv 1$, $p(x) \equiv 2$ e sem a segunda parcela do termo à direita da igualdade, tem-se o seguinte problema não-local

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \quad \text{em} \ \ \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_3}$$

O problema (P_3) foi estudado por Gomes e Sanchez [35] usando técnica variacional considerando f com um certo crescimento exponencial e Ω uma bola do $I\!R^N$. Nesse trabalho, os autores melhoraram os resultados contidos em Bebernes e Lacey [6].

Em Bebernes e Talaga [7] é considerado o caso particular de (P_3), dado por

$$\begin{cases} -\Delta u &= \delta \dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_4}$$

com $f(t) = F(t) = e^t$, que é o caso estacionário do problema parabólico

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= \delta \dfrac{e^u}{\int_\Omega e^u} \quad \text{em} \quad \Omega \times [0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times [0,T), \end{cases} \tag{P_5}$$

que resulta da investigação analítica dos fenômenos associados com a ocorrência de bandas de cisalhamento em metais que estão sendo deformados sob altas taxas de deformação. Veja também, Burns ([12], [13]), Olmstead, Nemat, Nasser e Ni [45]. Ela surge também na investigação do comportamento de um fluxo turbulento real e na teoria do equilíbrio gravitacional das estrelas politrópicas. Veja, por exemplo, Caglioti, Lions, Marchiori e Pulvirenti [14], e Krzywick e Nadzieja [39].

Outras motivações físicas para o problema (P_3) podem ser encontradas em Carrillo [15], Gogny e Lions [34], Dolbeault [25] e suas referências. Esses trabalhos estão relacionados com o problema (P_3) em que p é constante e seus estudos são feitos no espaço de Sobolev usual. Portanto, estamos interessados no problema (P), em que o operador $p(x)$-Laplaciano aparece e o crescimento da não-linearidade não é padrão, ou seja, o expoente $q(x)$ depende de $x \in \overline{\Omega}$.

Considerando o problema (P), com $p(x) \equiv p$ constante, $\lambda = 1$, $r = 0$ e sem a segunda parcela à direita da igualdade, tem-se a seguinte equação de Kirchhoff

$$\begin{cases} -M(\|u\|_{1,p}^p)\Delta_p u &= f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_6}$$

Vários trabalhos tratam do problema (P_6) onde M é o termo de Kirchhoff original da forma $M(\tau) = a + b\tau, \tau \geq 0$, $a, b > 0$ e $1 \leq p < +\infty$ são números reais constantes. Em Alves, Corrêa e Ma [2] e Corrêa e Figueiredo [21] outras classes de M são consideradas.

Observe que na equação do problema (P_3) somente o termo não-local $\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r$ aparece, enquanto que na equação do problema (P_6) somente o termo não-local $M(\|u\|_{1,p}^p)$. Já o nosso problema (P), apresenta dois termos não-locais, dos tipos que aparecem em (P_3) e (P_6), na mesma equação, e com o operador $p(x)$-Laplaciano.

Outros trabalhos também inspiraram o problema (P); os artigos de Perera e Zhang [46] e [47], em que os autores estudam

$$\begin{cases} -\|u\|^2\Delta u &= \mu u^3 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{P_7}$$

como um problema auxiliar, onde $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$ é a norma usual do $H_0^1(\Omega)$, e o artigo de Agarwal, Perera e Zhang [1] no qual os autores atacam o problema

$$\begin{cases} -\|u\|_{1,q}^{p-q}\Delta_q u &= \lambda\|u\|_r^{p-r}|u|^{r-2}u \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_8}$$

onde $\|u\|_{1,q} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^q dx\right)^{1/q}$ é a norma usual em $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Salientamos que a literatura relacionada aos problemas do tipo (P), mesmo para o caso de $p \equiv 2$, é pequena comparada com os do tipo (P_3) e (P_6).

Ressaltamos que uma das principais diferença entre $p(x)$-Laplaciano e p-Laplaciano é que o operador p-Laplaciano é $(p-1)$-homogêneo, ou seja, $\Delta_p(\mu u) = \mu^{p-1}\Delta_p u$ para todo $\mu > 0$, no entando o operador $p(x)$-Laplaciano, quando $p(x)$ não é constante, é não-homogêneo. Como consequência disso, temos algumas dificuldades, como por exemplo, não podemos usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange na maioria dos problemas envolvendo esse operador.

Problemas envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano são importantes porque eles podem modelar problemas em teoria da elasticidade e mecânica dos fluidos, mais precisamente, fluidos do tipo eletrorreológicos (chamados fluidos inteligentes). Problemas com as condições de crescimento, com expoente variável também surgem na modelagem de fluxos viscosos de fluidos não-newtonianos. Outra aplicação está relacionada com processamento de imagem. Para maiores detalhes, veja Mihailescu e Radulescu [43], Ruzicka [49] e suas referências.

No Capítulo 1, apresentaremos os espaços generalizados de Lebesgue-Sobolev, definições e resultados essenciais para um melhor entendimento dos resultados que serão expostos nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2, estudaremos questões de existência de soluções positivas para o problema

$$\left\{\begin{array}{rcllc} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u & = & \lambda|u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^r & \text{em} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} & \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{E_1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $\lambda, r > 0$ são parâmetros reais, $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ e $p, q \in C(\overline{\Omega})$, são funções que satisfazem determinadas condições.

Dado $h \in C(\overline{\Omega})$, designamos $h^+ = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} h(x)$ e $h^- = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} h(x)$.

Teorema 2.1.
(i) Suponhamos que existam constantes $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{m_1p^+}{m_0} < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$ e $q^-(r+1) > p^+$. Então o problema (E_1) possui uma solução fraca, para todo $\lambda > 0$.
(ii) Suponhamos que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$. Se $q^-(r+1) < p^-$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (E_1) possui uma solução positiva u_λ para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.
(iii) Seja $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, onde $a \geq 0$, $b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Se $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \dfrac{(r+1)(q^-)^{r+1}}{(q^+)^r}$ e $q^-(r+1) > (\eta+1)p^+$, então o problema (E_1) possui uma solução fraca positiva, para todo $\lambda > 0$.
(iv) Suponhamos $M(\tau)$ do tipo considerada em (iii). Se $q^-(r+1) < p^-$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (E_1) possui uma solução positiva u_λ para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Para obter os resultados nos itens (i) e (iii) usamos o Teorema do Passo da Montanha e nos itens (ii) e (iv) o Princípio Variacional de Ekeland.

Esse resultado complementa o resultado obtido em Fan [26] e estende o resultados obtido por Mihailescu e Radulescu [44], Fan e Zhang [28] e resultados citados anteriormente, pois a equação é mais geral devido aos termos não-locais presentes na equação em estudo.

No Capítulo 3, estudaremos existência de soluções para o problema com crescimento crítico

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u &= \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r + |u|^{q(x)-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{E_2}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições e λ, $r > 0$ são parâmetros reais.

Suporemos as seguintes hipóteses: existem constantes positivas A_1, A_2 e função $\beta(x) \in C_+(\overline{\Omega}) = \{h; h \in C(\overline{\Omega}), h(x) > 1 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}\}$, tais que

$$A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}, \tag{1}$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $f(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Além disso,

$$1 < p^- \leq p^+ < N, \tag{2}$$

e

$$1 < \beta^+(r+1) < q(x) \leq p^* = \frac{Np(x)}{N-p(x)}, \tag{3}$$

Teorema 3.1.
(i) Suponhamos (1), (2) e (3). Mais ainda, suponhamos que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \dfrac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$ e $p^+ < \beta^-(r+1)$. Então existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda > \overline{\lambda}$ existe uma solução não-trivial para (E_2).
(ii) Suponhamos (1),(2), (3) e $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, com $a \geq 0, b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Mais ainda, suponhamos $(\eta+1)p^+ < \beta^-(r+1)$ e $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \dfrac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$. Então existe $\widetilde{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda > \widetilde{\lambda}$ existe uma solução não-trivial para (E_2).

Esse resultado estende resultados obtido em Bonder e Silva [8], que por sua vez estendem resultados obtido por Azorero e Alonso [5]. Estende ainda parcialmente resultados obtidos em Figueiredo e Santos Junior [32]. A extensão de nosso resultado segue da presença de dois termos não-locais na equação. Como o problema tem crescimento crítico, o resultado foi obtido via Teorema do Passo da Montanha e Princípio de Concentração de Compacidade de Lions estendido.

No Capítulo 4, estudaremos existência e multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u &= f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{E_3}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições e $r > 0$ é um parâmetro real.

Suporemos as seguintes hipóteses sobre M e f: Existem constantes positivas A_0, A, B_0, B, Q_1, Q_2 e funções $\alpha(x), q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, tais que

$$A_0 + At^{\alpha(x)} \le M(t) \le B_0 + Bt^{\alpha(x)}, \tag{4}$$

e

$$Q_1 t^{q(x)-1} \le f(x,t) \le Q_2 t^{q(x)-1}, \tag{5}$$

para todo $t \ge 0$ e para todo a $x \in \overline{\Omega}$. Além disso $q(x) < p^* = \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}$, com

$$p^- > q^+(r+1), \tag{6}$$

e

$$f(x,t) = -f(x,-t) \tag{7}$$

para todo $t \in I\!R$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Teorema 4.1.
Suponhamos (4), (5), (6) e (7). Então o problema (E_3) tem infinitas soluções.

Esse resultado estende os resultado obtidos em Corrêa e Figueiredo [22] e Avci, Cekic e Mashyiev [4]. A extensão segue do termo Kirchhoff mais geral e da presença de um termo não-local adicional. Para obter esse resultado usamos Teoria do Gênero de Krasnoselskii.

No capítulo 5, estudaremos existência de soluções, via argumento de truncamento, para o seguinte problema com crescimento crítico

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u &= \lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \\ &\qquad +|u|^{q(x)-2}u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{E_4}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições e λ, $r > 0$ são parâmetros reais.

Suporemos as seguintes hipóteses: existem constantes positivas A_1, A_2, e uma função $\beta \in C_+(\overline{\Omega})$, tal que

$$A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}, \tag{8}$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$. Além disso p, $q \in C_+(\overline{\Omega})$ e

$$1 < p^- \leq p^+ < N, \tag{9}$$

$$1 < \beta^+(r+1) < q(x) \leq p^* = \frac{Np(x)}{N - p(x)}, \tag{10}$$

com $\{x \in \overline{\Omega}; q(x) = p^*(x)\} \neq \emptyset$. Suponhamos ainda

$$f(x,t) = -f(x,-t), \tag{11}$$

para todo $t \in I\!R$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Teorema 5.1.
(i) Suponhamos (8), (9), (10) e (11). Suponhamos ainda que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{p^+ m_1}{m_0} < q^-$ e $\beta^-(r+1) < p^-$. Então existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ existem infinitas soluções para (E_4) em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
(ii) Suponhamos (8), (9), (10), (11) e $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, com $a \geq 0, b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Suponhamos ainda que, $\beta^+(r+1) < p^-$ e $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < q^-$. Então existem $\widetilde{\lambda} > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \widetilde{\lambda}$ existem infinitas soluções para (E_4) em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Esse resultado em complemento com o resultado obtido no Capítulo 3, estende o resultados obtidos em Bonder e Silva [8] e parcialmente Figueiredo e Santos Junior [32]. Os trabalhos de Corrêa e Figueiredo [23] e Figueiredo e Santos Junior [32] foram importantes na obtenção desse resultado, pois utilizam o argumento de truncamento em seus respectivos trabalhos.

No Capítulo 6, estudaremos questões de existência de soluções para o seguinte problema, com crescimento crítico e com condições de fronteira de Neumann

$$\begin{cases} M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right)(-\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u) \\ \qquad\qquad = \quad \lambda f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \quad \text{em } \Omega \\ M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} \\ \qquad\qquad = \quad \gamma g(x,u)\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^\kappa \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}, \tag{E_5}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $p \in C(\overline{\Omega})$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$, $g : \partial\Omega \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições, $F(x,u) = \int_0^u f(x,\xi)d\xi$, $G(x,u) = \int_0^u g(x,y)dy$, ν a normal unitária exterior, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal exterior, dS a medida na fronteira e $\lambda, r, \gamma, \kappa \geq 0$ são parâmetros reais.

Estudaremos o problema com os seguintes expoentes críticos de Sobolev

$$p^*(x) = \frac{Np(x)}{N - p(x)} \quad \text{e} \quad p_*(x) = \frac{(N-1)p(x)}{N - p(x)}, \tag{12}$$

onde o expoente p_* é o expoente crítico no sentido do traço.

Teorema 6.1.

(*i*) Suponhamos $\kappa = 0$, $g(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \partial\Omega \to [1,\infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \partial\Omega : q(x) = p_*(x)\} \neq \emptyset$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$, com $f(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\frac{m_1 p^+}{m_0} < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$ e $p^+ < \beta^-(r+1) < q^-$. Então existe $\lambda_1 > 0$, tal que para todo $\lambda > \lambda_1$ e para todo $\gamma > 0$ existe uma solução não-trivial para (E_5).

(*ii*) Suponhamos $\kappa = 0$, $g(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \partial\Omega \to [1,\infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \partial\Omega : q(x) = p_*(x)\} \neq \emptyset$ e $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, com $a \geq 0, b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$, com $f(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda, $(\eta+1)p^+ < \beta^-(r+1) < q^-$ e $\frac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$. Então existe $\lambda_2 > 0$, tal que para todo $\lambda > \lambda_2$ e para todo $\gamma > 0$ existe uma solução não-trivial para (E_5).

(*iii*) Suponhamos $r = 0$, $f(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \Omega \to [1,\infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \Omega : q(x) =$

$p^*(x)\} \neq \emptyset$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\partial\Omega)$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq g(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \partial\Omega$, com $g(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{\kappa+1} \dfrac{(\beta^-)^{\kappa+1}(\kappa+1)}{(\beta^+)^{\kappa}}$ e $p^+ < \beta^-(\kappa+1) < q^-$. Então existe $\gamma_1 > 0$ tal que para todo $\gamma > \gamma_1$ e para todo $\lambda > 0$ existe uma solução não-trivial para (E_5).

(iv) Suponhamos $r = 0$, $f(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \Omega \to [1, \infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \Omega : q(x) = p^*(x)\} \neq \emptyset$ e $M(\tau) = a + b\tau^{\eta}$, com $a \geq 0, b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\partial\Omega)$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq g(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \partial\Omega$, com $g(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda que, $(\eta+1)p^+ < \beta^-(\kappa+1) < q^-$ e $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^{\eta}} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{\kappa+1} \dfrac{(\beta^-)^{\kappa+1}(\kappa+1)}{(\beta^+)^{\kappa}}$. Então existe $\gamma_2 > 0$ tal que para todo $\gamma > \gamma_2$ e para todo $\lambda > 0$ existe uma solução não-trivial para (E_5).

Esse resultado completa e estende os resultado obtidos em Bonder, Saintier e Silva [10], Guo e Zhao [36], Liang e Zhang [40] e Yao [52]. Além disso completa o nosso resultado obtido no Capítulo 3. Para mostrar esse resultado usamos o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio de Concentração de Compacidade de Lions estendido. Foi fundamental nos itens (i) e (ii), o uso do resultado obtido sobre o traço em Bonder, Saintier e Silva [9].

Para facilitar a leitura deste trabalho, apresentaremos os enunciados dos teoremas nos capítulos correspondentes.

Publicações em periódicos

Durante a elaboração desta tese, alguns dos resultados obtidos foram publicados ou aceitos para publicação, como segue

[18] F.J.S.A. Corrêa & A.C.R. Costa, *A variational approach for a bi-nonlocal problem involving the p(x)-Laplacian and nonlinearity with nonstandard growth*, Glasgow Math. J. (2013) 1-17, doi:10.1017/S001708951300027X. (Teorema 2.1)

[19] F.J.S.A. Corrêa & A.C.R. Costa, *On a bi-nonlocal $p(x)$-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Math. Meth. Appl. Sci. 2014, doi: 10.1002/mma.3051. (Teorema 4.1)

[20] F.J.S.A. Corrêa & A.C.R. Costa, *On a p(x)-Kirchhoff Equation with Critical Exponent and an Additional Nonlocal Term*, aceito para publicação em Funkcialaj Ekvacioj. (Teorema 3.1)

Notações

$\blacksquare$: fim de uma demonstração,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$B_r(x)$: bola aberta de centro x e raio r.

u_+: parte positiva da função u, isto é, $u_+ = \max\{u, 0\}$.

Capítulo 1

Espaços de Lebesgue-Sobolev com expoentes variáveis

Inicialmente, seja

$$C_+(\overline{\Omega}) = \left\{h; h \in C(\overline{\Omega}), h(x) > 1 \text{ para todo } x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Para cada $h \in C_+(\overline{\Omega})$ definimos

$$h^+ = \max_{x \in \overline{\Omega}} h(x) \text{ e } h^- = \min_{x \in \overline{\Omega}} h(x).$$

Designamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções reais mensuráveis definidas em Ω.

Para cada $p \in C_+(\overline{\Omega})$, definimos o espaço generalizado de Lebesgue por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{u \in \mathcal{M}(\Omega); \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\right\}.$$

Consideramos $L^{p(x)}(\Omega)$ munido com a norma de Luxemburg

$$|u|_{p(x)} = \inf\left\{\mu > 0; \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\mu}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

O espaço generalizado de Lebesgue - Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega); |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\right\},$$

com a norma

$$\|u\|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}.$$

Definimos $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ com relação à norma $\|u\|_{1,p(x)}$. De acordo com Fan e Zhao [30], os espaços $L^{p(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ são espaços de Banach reflexivos e separáveis. Se $p_1, p_2 \in C(\overline{\Omega})$ e $p_1(x) \leq p_2(x)$, para todo $x \in \Omega$, então temos a imersão contínua $L^{p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$.

As demonstrações das proposições seguintes encontram-se em Bonder e Silva [8], Bonder, Saintier e Silva [9], Fan e Shen [27], Fan e Zhang [28] e Fan e Zhao [30],.

Proposição 1.1. Sejam $\Omega \subset I\!R^N$ e $p \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) < N$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Se $p_1 \in C(\overline{\Omega})$ e $1 \leq p_1(x) \leq p^*(x)$ $(1 \leq p_1(x) < p^*(x))$ para $x \in \overline{\Omega}$, então existe imersão contínua (compacta) $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$, onde $p^*(x) = \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}$.

O espaço de Lebesgue sobre $\partial\Omega$ é definido como

$$L^{q(x)}(\partial\Omega) := \{u|\ u : \partial\Omega \to I\!R \quad \text{mensurável e} \int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)} dS < \infty\},$$

onde dS é a medida na fronteira e a correspondente norma de Luxemburg é dada por

$$\|u\|_{L^{q(x)}(\partial\Omega)} := \|u\|_{q(x),\partial\Omega} := \inf\{\lambda > 0 : \int_{\partial\Omega} \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{q(x)} dS \leq 1\}.$$

Proposição 1.2. Sejam $\Omega \subset I\!R^N$ e $p, q \in C(\overline{\Omega})$ com $p(x) < N$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Então existe uma imersão contínua e compacta $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$, onde $q(x) < p_*(x) = \dfrac{(N-1)p(x)}{N-p(x)}$.

Proposição 1.3. Seja $\rho(u) = \displaystyle\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx$. Para todo $u, u_j \in L^{p(x)}(\Omega)$, temos:

1. For $u \neq 0$, $|u|_{p(x)} = \lambda \Leftrightarrow \rho(\frac{u}{\lambda}) = 1$;

2. $|u|_{p(x)} < 1\ (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1\ (= 1; > 1)$;

3. Se $|u|_{p(x)} > 1$, então $|u|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^+}$;

4. Se $|u|_{p(x)} < 1$, então $|u|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^-}$;

5. $\lim\limits_{j\to+\infty} |u_j|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho(u_j) = 0$;

6. $\lim\limits_{j\to+\infty} |u_j|_{p(x)} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho(u_j) = +\infty$.

Fazendo $\rho_{1,p(x)} := \displaystyle\int_\Omega (|u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)}) dx$ para todo $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.4. Para todo $u, u_j \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, temos:

1. $\|u\| < 1\ (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho_{1,p(x)}(u) < 1\ (= 1; > 1)$;

2. Se $\|u\| > 1$, então $\|u\|^{p^-} \leq \rho_{1,p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^+}$;

3. Se $\|u\| < 1$, então $\|u\|^{p^+} \leq \rho_{1,p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^-}$;

4. $\lim\limits_{j\to+\infty} \|u_j\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{1,p(x)}(u_j) = 0$;

5. $\lim\limits_{j\to+\infty} \|u_j\| = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{j\to+\infty} \rho_{1,p(x)}(u_j) = +\infty$.

Proposição 1.5. (Desigualdade de Poincaré) Se $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, então

$$|u|_{p(x)} \leq C|\nabla u|_{p(x)},$$

onde C é uma constante que não depende de u.

Observe que, pela desigualdade de Poincaré, as normas $\|\cdot\|_{1,p(x)}$ and $\|u\| = |\nabla u|_{p(x)}$ são equivalentes em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Doravante trabalharemos em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com a norma $\|u\| = |\nabla u|_{p(x)}$.

Designamos por $L^{p\,'(x)}(\Omega)$ o espaço conjugado de $L^{p(x)}(\Omega)$, onde

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p\,'(x)} = 1, \ \text{ para todo } \ x \in \overline{\Omega}.$$

Proposição 1.6. (Desigualdade de Hölder) Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{p\,'(x)}(\Omega)$, então

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p\,'^-}\right)|u|_{p(x)}|v|_{p\,'(x)}.$$

Teorema 1.1. (Fan e Zhang [28]) Seja $L_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))'$ tal que

$$L_{p(x)}(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v, \quad \forall\ u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

então

(i) $L_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ é um operador contínuo, limitado e estritamente monótono;

(ii) $L_{p(x)}$ é uma aplicação do tipo (S_+), i.é., se $u_j \rightharpoonup u$ in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $\limsup(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \leq 0$, então $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$;

(iii) $L_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ é um homeomorfismo.

Esse resultado também é válido para $L_{p(x)} : W^{1,p(x)}(\Omega) \to (W^{1,p(x)}(\Omega))^*$.

Proposição 1.7. (Bonder e Silva [8]) Sejam $q(x)$ e $p(x)$ duas funções contínuas tais que

$$1 < \inf_{x\in\Omega} p(x) \leq \sup_{x\in\Omega} p(x) < N \quad \text{e} \quad 1 \leq q(x) \leq p^*(x) \ \text{ em } \ \Omega.$$

Seja (u_j) uma sequência tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ onde:

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu, \quad \text{fraco} -^* \quad \text{em} \quad \text{medida},$$

e

$$|u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \nu, \quad \text{fraco} -^* \quad \text{em} \quad \text{medida}.$$

Também suponhamos que $\mathcal{A} = \{x \in \Omega : q(x) = p^*(x)\}$ é não-vazio. Então, para algum conjunto enumerável de índices I, temos:

$$\nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0$$

$$\mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i \in I} \mu_i \delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0$$

$$S \nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I,$$

onde $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ e S é a melhor constante da desigualdade Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, para o expoente variável, dada por

$$S = S_q(\Omega) = \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\| |\nabla \phi| \|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|\phi\|_{L^{q(x)}}}.$$

Proposição 1.8. (Bonder, Saintier e Silva [9]) Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Então existe um conjunto enumerável I, de números positivos $(\mu)_{i \in I}$ e $(\nu)_{i \in I}$ e pontos $\{x_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A} = \{x \in \partial\Omega : q(x) = p_*(x)\}$ tais que

$$|u_j|^{q(x)} dS \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} dS + \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \text{fraco} - * \quad \text{em} \quad \text{medida}.$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} dx \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} dx + \sum_{i \in I} \mu_i \delta_{x_i}, \quad \text{fraco} - * \quad \text{em} \quad \text{medida}.$$

$$\overline{T}_{x_i} \nu_i^{\frac{1}{q(x_i)}} \leq \mu_i^{\frac{1}{p(x_i)}},$$

onde $\overline{T}_{x_i} = \sup_{\epsilon > 0} T(p(.), q(.), \Omega_{\epsilon,i}, \Gamma_{\epsilon,i})$ representa a constante de Sobolev no sentido do traço, sendo

$$\Omega_{\epsilon,i} = \Omega \cap B_\epsilon(x_i) \quad \text{e} \quad \Gamma_{\epsilon,i} = \partial B_\epsilon(x_i) \cap \Omega.$$

Capítulo 2

Demonstração do Teorema 2.1

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos questões de existência de soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^r & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $\lambda, r > 0$, são parâmetros reais, $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ e $p, q \in C(\overline{\Omega})$ são funções que satisfazem determinadas condições.

O funcional energia associado ao problema (2.1) é dado por

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}, \tag{2.2}$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, onde $\widehat{M}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau M(s)ds$.

Pelas condições aqui consideradas, o funcional acima é diferenciável no sentido de Fréchet e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)v &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx \\ &\quad -\lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^r \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (ver Apêndice A.1.1). Então, $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (2.1) se, e somente se, u é um ponto crítico do funcional J_λ.

Usaremos o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.3) e o Princípio Variacional de Ekeland (ver Apêndice A.1.4), para estabelecer vários resultados para certas classes do termo de Kirchhoff M, em intervalos determinados por p, q, M, r e λ. Consideraremos, neste capítulo, somente o caso subcrítico. O problema crítico, será estudado nos capítulos 2 e 4.

No que segue, vamos considerar o problema

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u &= \lambda(u_+)^{q(x)-1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u_+)^{q(x)}dx\right]^r \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

porque estamos interessados em encontrar soluções positivas. Note que possíveis soluções de (2.3) são soluções positivas de (2.1). Veja Fan, Zhao e Zhang [29] e Zhang [50].

Dizemos que $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (2.3) quando

$$M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx = \lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u_+)^{q(x)}dx\right]^r\int_\Omega (u_+)^{q(x)-1}v dx\ ,$$

$\forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Definamos os funcionais $\tilde{M}, \mathcal{B}$ por

$$\tilde{M}(u) = M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)$$

e

$$\mathcal{B}(u) = \left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx\right]^r$$

e as aplicações $T, G, L_{p(x)}, N : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ por

$$T(u)v = \tilde{M}(u)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx,\ \forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

$$G(u)v = \lambda\mathcal{B}(u)\int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv dx,\ \forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

$$L_{p(x)}(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx,\ \forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

e

$$N(u)v = \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv dx,\ \forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Então, $T(u) = \tilde{M}(u)L_{p(x)}(u)$ e $G(u) = \lambda\mathcal{B}(u)N(u)$ para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

O funcional J_λ é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$ (ver Apêndice A.1.1), e temos

$$J'_\lambda(u)v = \tilde{M}(u)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx - \lambda\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u_+)^{q(x)}dx\right]^r\int_\Omega (u_+)^{q(x)-1}v dx,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

No que segue vamos considerar entre outras hipóteses que $1 < p(x) < N$ com $1 \leq q(x) < p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$.

2.2 Demonstração do Teorema 2.1

Teorema 2.1.

(i) Suponhamos que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$ e $q^-(r+1) > p^+$. Então o problema (2.1) possui uma solução fraca, para todo $\lambda > 0$.

(ii) Suponhamos que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$. Se $q^-(r+1) < p^-$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (2.1) possui uma solução positiva u_λ para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

(iii) Seja $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, onde $a \geq 0$, $b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Se $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \dfrac{(r+1)(q^-)^{r+1}}{(q^+)^r}$ e $q^-(r+1) > (\eta+1)p^+$, então o problema (2.1) possui uma solução fraca positiva, para todo $\lambda > 0$.

(iv) Suponhamos $M(\tau)$ do tipo considerada em (iii). Se $q^-(r+1) < p^-$, então existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (2.1) possui uma solução positiva u_λ para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

2.2.1 Demonstração do item (i) do Teorema 2.1

Demonstração: Usaremos o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.3). Desde que

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u_+)^{q(x)}dx\right]^{r+1},$$

para todo $\lambda > 0$. Temos ainda que

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Observe que considerando $\|u\| < 1$, obtém-se pela Proposição 1.3, $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \geq \|u\|^{p^+}$ que implica

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Usando a imersão de Sobolev $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$, temos

$$|u|_{q(x)} \leq C\|u\| = C\rho < 1,$$

se $\rho = \|u\| < 1$ é suficientemente pequeno. Pela Proposição 1.3,

$$\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \leq |u|_{q(x)}^{q^-}$$

e então

$$\left(\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right)^{r+1} \leq |u|_{q(x)}^{q^-(r+1)}.$$

Assim,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\|u\|)^{q^-(r+1)},$$

e considerando $\|u\| = \rho$

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\rho^{p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}C^{q^-(r+1)}\rho^{q^-(r+1)},$$

que implica

$$J_\lambda(u) \geq \rho^{p^+}\left[\frac{m_0}{p^+} - \frac{\lambda C^{q^-(r+1)}}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\rho^{q^-(r+1)-p^+}\right].$$

Como por hipótese $q^-(r+1) > p^+$, encontramos números positivos a, ρ tais que

$$J_\lambda(u) \geq a > 0 \text{ se } \|u\| = \rho, \quad \text{para cada} \quad \lambda > 0.$$

Assim o funcional J_λ satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Seja $0 < \omega \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t > 0$

$$J_\lambda(t\omega) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla t\omega|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|t\omega|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Para $t > 1$, temos $t^{p(x)} \leq t^{p^+}$ e $t^{q^-} \leq t^{q(x)}$. Assim,

$$J_\lambda(t\omega) \leq \frac{m_1 t^{p^+}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\omega|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)}\frac{t^{q^-(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_\Omega \omega^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Usando o fato que $q^-(r+1) > p^+$ obtemos $J_\lambda(t\omega) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Consequentemente, J_λ satisfaz a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Para concluir a demonstração do resultado (i), mostraremos que J_λ satisfaz a condição de Palais-Smale, isto é, toda sequência $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$J_\lambda(u_j) \to C_\lambda \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_j) \to 0, \tag{2.4}$$

contém uma subsequência fortemente convergente em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência satisfazendo a condição (2.4). Assim, considerando $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \theta < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$ tem-se

$$\begin{aligned} C + \|u_j\| &\geq J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta} J'_\lambda(u_j)u_j \\ &\geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right) \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \\ &+ \lambda \left(\frac{1}{\theta (q^+)^r} - \frac{1}{(q^-)^{r+1}(r+1)}\right) \left[\int_\Omega |u_j|^{q(x)} dx\right]^{r+1}. \end{aligned}$$

Se (u_j) é ilimitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ podemos supor, passando à subsequência, se necessário, que $\|u_j\| > 1$ e como consequência da desigualdade anterior, pela Proposição 1.3

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right) \|u_j\|^{p^-},$$

que é um absurdo pois $p^- > 1$. Portanto (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, existe uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
Usando o fato de que

$$J'_\lambda(u_j) \to 0,$$

tem-se

$$J'_\lambda(u_j)(u_j - u) = \tilde{M}(u_j) \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \nabla (u_j - u) dx - G(u_j)(u_j - u) \to 0. \tag{2.5}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\left| \int_\Omega |u_j|^{q(x)-2} u_j (u_j - u) dx \right| \leq \int_\Omega |u_j|^{q(x)-1} |(u_j - u)| dx \leq C ||u|^{q(x-1)}|_{q(x)/q(x)-1} |u_j - u|_{q(x)}.$$

Como $q(x) < p^*(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ temos que $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^{q(x)}(\Omega)$, e portanto $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Desta forma $N(u_j)(u_j - u) \to 0$.

Por outro lado existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \leq \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |\nabla u_j|^{q(x)} dx \leq c_2.$$

Então, $G(u_j)(u_j - u) \to 0$.

Por (2.5) obtemos

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \nabla (u_j - u) dx \to 0,$$

pois existem constantes positivas c_3 e c_3 tais que $c_3 \leq \tilde{M}(u_j) \leq c_4$. Temos ainda também

$$L_{p(x)}(u)(u_j - u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla (u_j - u) dx \to 0.$$

Portanto,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \to 0.$$

Pelo Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e a demonstração do item (i) está completa.

■

2.2.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 2.1

Demonstração: Usaremos o Princípio Variacional de Ekeland (ver Apêndice A.1.4), inspirados em ideias contidas em Mihailescu e Radulescu [44]. Raciocinando como no item (i), obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}} \left[\int_\Omega |u|^{q(x)} dx \right]^{r+1}.$$

e então para $\|u\| = \rho < 1$ suficientemente pequeno

$$J_\lambda(u) \geq \rho^{q^-(r+1)} \left[\frac{m_0 \rho^{p^+ - q^-(r+1)}}{p^+} - \frac{\lambda C^{q^-(r+1)}}{(r+1)(q^-)^{r+1}} \right] \geq a > 0 \quad \text{se} \quad 0 < \lambda < \lambda^*,$$

para algum $\lambda^* > 0$. Assim, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ temos

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

Observe que neste item, o parâmetro λ desempenha um papel crucial. Seja $\epsilon_0 > 0$ tal que $q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-$. Pelo fato de $q \in C(\overline{\Omega})$, tem-se que existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $|q(x) - q^-| < \epsilon_0$ para todo $x \in \Omega_0$. Assim, concluimos que $q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-$ para todo $x \in \Omega_0$.

Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\text{supp}(\phi) \supset \overline{\Omega}_0$, $\phi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega_0$ e $0 \leq \phi \leq 1$ em Ω.

Para t suficientemente pequeno, $t \in (0,1)$, temos que $t\phi \in B_\rho(0) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) &\leq \frac{m_1 t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)}\frac{1}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_\Omega |t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \\ &\leq \frac{m_1 t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)}\frac{1}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_\Omega t^{q(x)}|\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1} \\ &\leq \frac{m_1 t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)}\frac{1}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0} t^{q(x)}|\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned}$$

Em Ω_0, $q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-$ e assim para $t \in (0,1)$

$$J_\lambda(t\phi) \leq \frac{m_1 t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{(r+1)}\frac{t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Portanto,

$$J_\lambda(t\phi) < 0$$

para $t < \delta^{1/(p^- - [q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)])}$ com

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\lambda p^- \int_{\Omega_0}|\phi|^{q(x)}dx}{m_1(r+1)(q^+)^{r+1}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx}\right\}.$$

Observe que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx > 0$, pois $\displaystyle\int_{\Omega_0}|\phi|^{q(x)}dx \leq \int_\Omega |\phi|^{q(x)}dx \leq \int_\Omega |\phi|^{q^-}dx$. Pela imersão $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^-}(\Omega)$ tem-se $\|\phi\|_{q^-} \leq C\|\phi\|$, onde C é uma constante positiva. Logo, $0 < \displaystyle\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx$.

Como para todo $u \in B_\rho(0)$ tem-se

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda C}{r+1}\frac{1}{(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)},$$

segue que

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

Seja $0 < \epsilon < \displaystyle\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda$. Aplicando o princípio variacional de Ekeland para o funcional $J_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \to I\!R$, encontramos $u_\epsilon \in \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$J_\lambda(u_\epsilon) \leq \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \epsilon \text{ e } J_\lambda(u_\epsilon) < J_\lambda(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|, \ u \neq u_\epsilon.$$

Como

$$J_\lambda(u_\epsilon) \leq \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda + \epsilon \leq \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \epsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda,$$

deduzimos que $u_\epsilon \in B_\rho(0)$. Definindo $I_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \to I\!R$ por $I_\lambda(u) = J_\lambda(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|$, temos que u_ϵ é um ponto de mínimo de I_λ e assim

$$\frac{I_\lambda(u_\epsilon + tv) - I_\lambda(u_\epsilon)}{t} \geq 0$$

para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e todo $v \in B_1(0)$. Daí, tem-se

$$\frac{J_\lambda(u_\epsilon + tv) - J_\lambda(u_\epsilon)}{t} + \epsilon\|v\| \geq 0.$$

Fazendo $t \to 0$ temos -$\langle J_\lambda(u_\epsilon), v\rangle \leq \|v\|$. Como a desigualdade é verdadeira para v e $-v$ temos $\|J'_\lambda(u_\epsilon)\| \leq \epsilon$.

Daí temos que existe uma sequência $(w_j) \subset B_\rho(0)$ tal que

$$J_\lambda(w_j) \to \underline{c} \ \text{ e } \ J'_\lambda(w_j) \to 0.$$

Pelo fato de (w_j) ser limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, existe uma subsequêcia, ainda designada por (w_j), tal que $w_j \rightharpoonup w$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Procedendo como na parte final do item (i), concluimos que $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca, não-trivial, para o problema (2.1).

■

2.2.3 Demonstração do item (iii) do Teorema 2.1

Demonstração: Sabendo que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ &\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}(u_+)^{q(x)}dx\right]^{r+1} \end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{a}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ &\quad -\frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned}$$

Considerando $\|u\| < 1$, pela Proposição 1.3

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{(\eta+1)p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.$$

Mais ainda,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{(\eta+1)p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\|u\|)^{q^-(r+1)}.$$

Como $q^-(r+1) > (\eta+1)p^+$, encontramos números positivos δ, ρ tais que

$$J_\lambda(u) \geq \delta > 0 \;\text{ se }\; \|u\| = \rho, \quad \text{para cada }\; \lambda > 0.$$

Assim o funcional satisfaz a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha. Usando argumento como em (i), obtemos $0 < \omega \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $J_\lambda(t\omega) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Consequentemente, J_λ satisfaz a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

A seguir mostraremos que J_λ satisfaz a condição (PS).

Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência tal que

$$J_\lambda(u_j) \to C_\lambda \;\text{ e }\; J'_\lambda(u_j) \to 0.$$

Desta forma, considerando

$$\frac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \theta < \frac{(r+1)(q^-)^{r+1}}{(q^+)^r},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
C + \|u_j\| &\geq J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_j)u_j,\\
&\geq a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1}\\
&\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}dx\right]^{r+1} - \frac{a}{\theta}\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\\
&\quad -\frac{b}{\theta}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta}\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) + \frac{\lambda}{\theta(q^+)^r}\left[\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx\right]^{r+1},\\
&\geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) + \left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{b}{\theta(p^-)^\eta}\right)\\
&\quad \times\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} + \lambda\left(\frac{1}{\theta(q^+)^r} - \frac{1}{(r+1)(q^-)^{r+1}}\right)\left[\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx\right]^{r+1}.
\end{aligned}$$

Suponhamos que (u_j) é ilimitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, passando à subsequência se necessário, temos para os termos da sequência tais que $\|u_j\| > 1$, usando a Proposição 1.3

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-} + \left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{b}{\theta(p^-)^{\eta}}\right)\|u_j\|^{(\eta+1)p^-},$$

que é um absurdo, pois $p^- > 1$. Portanto (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Logo, existe uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
Como

$$J'_\lambda(u_j) \to 0,$$

temos

$$J'_\lambda(u_j)(u_j - u) = \left(a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta}\right)L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) - G(u_j)(u_j - u) \to 0.$$

Procedendo como na demonstração de (i), obtemos $G(u_j)(u_j - u) \to 0$, constantes positivias c_3 e c_4 tais que $c_3 \leq \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta} \leq c_4$ e

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j - u)dx \to 0.$$

Temos também

$$L_{p(x)}(u)(u_j - u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla(u_j - u)dx \to 0.$$

Logo,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_n - u) \to 0.$$

Pelo Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e concluimos a demonstração do item (iii).

■

2.2.4 Demonstração do item (iv) do Teorema 2.1

Demonstração: Procedendo como antes, obtemos para $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, com $\|u\| < 1$

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{(\eta+1)p^+} - \frac{\lambda}{(r+1)(q^-)^{r+1}}(C\|u\|)^{q^-(r+1)}$$

e assim para $\|u\| = \rho < 1$ suficientemente pequeno

$$J_\lambda(u) \geq \delta > 0 \quad \text{se} \quad 0 < \lambda < \lambda^*.$$

Podemos considerar

$$\lambda^* = \frac{1}{3}\min\left\{\frac{(r+1)(q^-)^{r+1}a(\rho)^{p^+-q^-(r+1)}}{C^{q^-(r+1)}p^+}, \frac{(r+1)(q^-)^{r+1}b(\rho)^{(\eta+1)p^+-q^-(r+1)}}{(\eta+1)C^{q^-(r+1)}(p^+)^{\eta+2}}\right\}.$$

Assim, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ temos

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

Seja $\epsilon_0 > 0$ tal que $q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-$. Pelo fato de $q \in C(\overline{\Omega})$, tem-se que existe um conjunto aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $|q(x) - q^-| < \epsilon_0$ para todo $x \in \Omega_0$. Assim, concluimos que $q(x)(r+1) \leq q^-(r+1) + \epsilon_0(r+1) < p^-$ para todo $x \in \Omega_0$.

Seja $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\mathrm{supp}(\phi) \supset \overline{\Omega}_0$, $\phi(x) = 1$ para todo $x \in \Omega_0$ e $0 \leq \phi \leq 1$ em Ω. Para t suficientemente pequeno, $t \in (0,1)$, temos que $t\phi \in B_\rho(0) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) \quad &\leq \quad \tfrac{at^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx + \tfrac{bt^{(\eta+1)p^-}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ &\quad -\tfrac{\lambda}{(r+1)}\tfrac{1}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_\Omega |t\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) \quad &\leq \quad \frac{at^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx + \frac{bt^{(\eta+1)p^-}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ &\quad -\frac{\lambda}{(r+1)}\frac{t^{q^-(r+1)+\epsilon_0(r+1)}}{(q^+)^{r+1}}\left[\int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)}dx\right]^{r+1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$J_\lambda(t\phi) < 0,$$

para t suficientemente pequeno.

Observe que para todo $u \in B_\rho(0)$ tem-se

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{(\eta+1)p^+} - \frac{\lambda C}{r+1}\frac{1}{(q^-)^{r+1}}\|u\|^{q^-(r+1)}.$$

Daí, segue que

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda < 0.$$

Seja $0 < \epsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda$. Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland para o funcional $J_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \to I\!R$, encontramos $u_\epsilon \in \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$J_\lambda(u_\epsilon) \le \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda + \epsilon \text{ e } J_\lambda(u_\epsilon) < J_\lambda(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|, \;\; u \neq u_\epsilon.$$

Como

$$J_\lambda(u_\epsilon) \le \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda + \epsilon \le \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \epsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda,$$

deduzimos que $u_\epsilon \in B_\rho(0)$. Definindo $I_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \to I\!R$ por $I_\lambda(u) = J_\lambda(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|$, temos que u_ϵ é um ponto de mínimo de I_λ e assim

$$\frac{I_\lambda(u_\epsilon + tv) - I_\lambda(u_\epsilon)}{t} \ge 0$$

para todo $t > 0$ suficientemente pequeno e todo $v \in B_1(0)$. Daí, tem-se

$$\frac{J_\lambda(u_\epsilon + tv) - J_\lambda(u_\epsilon)}{t} + \epsilon\|v\| \ge 0.$$

Fazendo $t \to 0$ temos -$\langle J_\lambda(u_\epsilon), v\rangle \le \|v\|$. Como a desigualdade é verdadeira para v e $-v$ temos $\|J'_\lambda(u_\epsilon)\| \le \epsilon$.

Daí temos que existe uma sequência $(w_j) \subset B_\rho(0)$ tal que

$$J_\lambda(w_j) \to \underline{c} \;\text{ e }\; J'_\lambda(w_j) \to 0.$$

Pelo fato de (w_j) ser limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, existe uma subsequêcia, ainda designada por (w_j), tal que $w_j \rightharpoonup w$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Procedendo como na parte final do item (i), concluimos que $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca, não-trivial, para o problema (2.1).

■

A seguir apresentamos uma tabela com os resultados obtidos neste capítulo.

$M(\tau)$	hipóteses	TPM	PVE
$0 < m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$	$\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \dfrac{(q^-)^{r+1}(r+1)}{(q^+)^r}$ e $q^-(r+1) > p^+$	Sim para todo $\lambda > 0$	Não
$0 < m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$	$q^-(r+1) < p^-$	Não	Sim para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$
$M(\tau) = a + b\tau^\eta$ $a \geq 0,\ b > 0,\ \tau \geq 0,\ \eta \geq 1$	$\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \dfrac{(r+1)(q^-)^{r+1}}{(q^+)^r}$ e $q^-(r+1) > 2p^+$	Sim para todo $\lambda > 0$	Não
$M(\tau) = a + b\tau^\eta$ $a \geq 0,\ b > 0,\ \tau \geq 0,\ \eta \geq 1$	$q^-(r+1) < p^-$	Não	Sim para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$

TPM - Existência de solução via Teorema do Passo da Montanha.

PVE - Existência de solução via Princípio Variacional de Ekeland.

Capítulo 3

Um problema com expoente crítico

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos existência de soluções para a equação com crescimento crítico

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u &= \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r + |u|^{q(x)-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset I\!\!R^N$, $f : \overline{\Omega} \times I\!\!R \to I\!\!R$ e $M : I\!\!R^+ \to I\!\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições, $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,\xi)d\xi$ e λ, $r > 0$ são parâmetros reais.

Suporemos as seguintes hipóteses: existem constantes positivas A_1, A_2 e função $\beta(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, tais que

$$A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}, \tag{3.2}$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $f(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Além disso,

$$1 < p^- \leq p^+ < N, \tag{3.3}$$

e

$$1 < \beta^+(r+1) < q(x) \leq p^* = \frac{Np(x)}{N - p(x)}, \tag{3.4}$$

com $\{x \in \Omega : q(x) = p^*(x)\} \neq \emptyset$.

Observe que o termo $\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r$ faz sentido pois, pela hipótese (3.2), $F(x,u) \geq 0$ para todo $u \in I\!\!R$.

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Teorema 3.1.

(i) Suponhamos (3.2), (3.3) e (3.4). Mais ainda, suponhamos que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\frac{m_1 p^+}{m_0} < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$ e $p^+ < \beta^-(r+1)$. Então existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda > \overline{\lambda}$ existe uma solução não-trivial para (3.1).

(ii) Suponhamos (3.2),(3.3), (3.4) e $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, com $a \geq 0, b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Mais ainda, suponhamos $(\eta+1)p^+ < \beta^-(r+1)$ e $\frac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$. Então existe $\widetilde{\lambda} > 0$ tal que para todo $\lambda > \widetilde{\lambda}$ existe uma solução não-trivial para (3.1).

O funcional energia associado ao problema (3.1) é dado por

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx, \quad (3.5)$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, onde $\widehat{M}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau M(s)ds$.

Pelas condições aqui consideradas, o funcional é Fréchet diferenciável e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)v \quad = \quad & M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx \\ & -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx, \end{aligned} \quad (3.6)$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (ver Apêndice A.1.1). Assim, $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (3.1) se, e somente se, u é um ponto crítico de J_λ.

Usaremos o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.3) e o Princípio de Concentração de Compacidade Lions [42], para espaços com expoente variável, estendido por Bonder e Silva [8], para demonstrar o nosso resultado principal. Salientamos que podemos encontrar uma versão da extensão, do referido princípio, em Yongqiang [33].

3.2.1 Demonstração do item (i) do Teorema 3.1

A demonstração segue de vários lemas:

Lema 3.1. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c, então (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Por hipótese temos que $J_\lambda(u_j) \to c$ e $J'_\lambda(u_j) \to 0$. Sabemos que

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx,$$

e

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)v &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx \\ &\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx. \end{aligned}$$

Assim,

$$C + \|u_j\| \geq J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_j)u_j,$$

com $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \theta < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \dfrac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$.

Daí,

$$\begin{aligned} C + \|u_j\| &\geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right)\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx + \frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta}\frac{1}{(\beta^+)^r})\left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} \\ &\quad -\lambda\frac{A_2^{r+1}}{r+1}\frac{1}{(\beta^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} + \frac{1}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx - \frac{1}{q^-}\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Supondo que (u_j) é ilimitada, para $\|u_j\| > 1$, obtemos pela Proposição 1.3

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-},$$

que é um absurdo, pois $p^- > 1$. Logo, (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 3.2. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S)^N$, onde $\overline{m}_0 = \min\{{m_0}^{1/p^+}, {m_0}^{1/p^-}\}$, então o conjunto de índices I, dado na Proposição 1.7 é vazio e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ para algum $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Pela Proposição 1.7 e Lema 3.1, obtemos

$$|u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0$$

$$S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I.$$

Se $I = \emptyset$ então $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Para demonstrarmos essa convergênica consideraremos a extensão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions para o aberto

$I\!R^N$. Podemos considerar as funções $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como funções em $W^{1,p(x)}(I\!R^N)$, com $u = 0$ em $I\!R^N \setminus \Omega$. Identicando as funções $|u_j|^{q(x)}$ e $|u|^{q(x)}$ como funções de $L^1(I\!R^N)$, obtemos

$$\int_\Omega |u_j|^{q(x)}\phi dx = \int_{I\!R^N} |u_j|^{q(x)}\phi dx \to \int_{I\!R^N} |u|^{q(x)}\phi dx = \int_\Omega |u|^{q(x)}\phi dx,$$

para toda $\phi \in C_0(I\!R^N)$.

Considerando $\phi \in C_0(I\!R^N)$ tal que $\phi(x) = 1$ em Ω com o suporte compacto contendo Ω a convergência segue.

Mostraremos agora que o conjunto de índices $I = \emptyset$ se tivermos $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S)^N$, onde $\overline{m}_0 = \min\{{m_0}^{1/p^+}, {m_0}^{1/p^-}\}$. De fato, vamos supor que $I \neq \emptyset$. Seja $\phi \in C_0^\infty(I\!R^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e suporte na bola unitária do $I\!R^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x \in I\!R^N$ e $\varepsilon > 0$.

Como $J'_\lambda(u_j) \to 0$ em $\left(W_0^{1,p(x)}\Omega\right)'$ obtemos

$$\lim J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) = 0.$$

Porém,

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) \quad = \quad & \left[M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \\ & -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \\ & -\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx. \end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$ temos

$$0 = \lim\left(\left[M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j dx\right)\right) +$$

$$M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu - \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx,$$

onde $t_0 = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx$.

Note que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\left[M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j dx\right)\right) \to 0, \text{ pois}$$

$$0 \quad \leq \quad \left|\lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j dx\right)\right| \leq \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|dx,$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$0 \leq \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|dx \leq \lim_{j\to\infty}||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)}.$$

Observe que

$$\lim_{j\to\infty} ||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)} \leq$$

$$\lim_{j\to\infty}\left\{(|\nabla u_j|_{p(x)}^{p^+-1}+|\nabla u_j|_{p(x)}^{p^--1})\left[\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^+}+\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^-}\right]\right\}$$

Usando a hipótese da sequência (u_j) ser limitada

$$\lim_{j\to\infty} ||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)} \leq$$

$$\lim_{j\to\infty} C\left[\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^+}+\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^-}\right],$$

onde C é uma constante positiva.

Temos ainda via desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx = \int_\Omega |u_j|^{p(x)}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})|^{p(x)}dx \leq ||u_j|^{p(x)}|_{\alpha(x)}||\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^{p(x)}|_{\alpha'(x)},$$

onde $\alpha(x) = N/(N-p(x))$, $\alpha'(x) = N/p(x)$ e as duas últimas normas são calculadas em $B_\varepsilon(x_i)$.

Assim,

$$\int_\Omega |u_j|^{p(x)}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})|^{p(x)}dx \leq (|u_j|_{p^*}^{p^+}+|u_j|_{p^*}^{p^-})(|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^+}+|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^-}).$$

Logo,

$$\lim_{j\to\infty} ||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)} \leq$$

$$C\left[\left((|u|_{p^*}^{p^+}+|u|_{p^*}^{p^-})(|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^+}+|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^-})\right)^{1/p^+}+\left((|u|_{p^*}^{p^+}+|u|_{p^*}^{p^-})(|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^+}+|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^-})\right)^{1/p^-}\right].$$

Como $\nabla\phi_{i,\varepsilon} = \nabla\phi(\frac{x-x_i}{\varepsilon})\frac{1}{\varepsilon}$, obtém-se via mudança de variável

$$\int_{B_\varepsilon(x_i)} |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^N dx = \int_{B_\varepsilon} |\nabla\phi(\frac{x-x_i}{\varepsilon})|^N\frac{1}{\varepsilon^N}dx = \int_{B_1(0)} |\nabla\phi(y)|dy.$$

Além disso $\int_{B_\varepsilon(x_i)} |u|^{p^*}dx \to 0$ quando $\varepsilon\to 0$.

Portanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\left[M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_jdx\right)\right)\to 0.$$

Por outro lado,

$\lim_{\varepsilon\to 0} M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = M(t_0)\mu_i\phi(0)$, $\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu = \nu_i\phi(0)$ e

$\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0$, quando $\varepsilon\to 0$. Assim,

$M(t_0)\mu_i\phi(0) = \nu_i\phi(0)$ implica que $m_0\mu_i \leq \nu_i$. Como $S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}$ obtemos,

$$(\overline{m}_0 S)^N \leq \nu_i,$$

onde $\overline{m}_0 = \min\{{m_0}^{1/p^+}, {m_0}^{1/p^-}\}$.

Como c é o nível de energia e considerando $I \neq \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} c \quad \geq \quad & \lim \Bigg(\left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta} \right) \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx + \frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r}) \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} \\ & -\lambda \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \frac{1}{\theta} \int_\Omega |u_j|^{q(x)} dx - \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_j|^{q(x)} dx \Bigg). \end{aligned}$$

Considerando,

$$\frac{m_1 p^+}{m_0} < \theta < \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r},$$

temos

$$c \geq \lim \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q(x)} \right) |u_j|^{q(x)} dx.$$

Sendo $\mathcal{A}_\delta = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} (B_\delta(x) \cap \Omega) = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}) < \delta\}$, obtemos

$$\begin{aligned} c \quad \geq \quad & \lim \int_{\mathcal{A}_\delta} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) |u_j|^{q(x)} dx = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) \left(\int_{\mathcal{A}_\delta} |u|^{q(x)} dx + \sum_{i \in I} \nu_i \right) \\ \geq \quad & \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) \nu_i \\ \geq \quad & \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) (\overline{m}_0 S)^N. \end{aligned}$$

Temos que δ é positivo e arbitrario e que q é contínua. Então,

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{m}_0 S)^N.$$

Portanto, se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{m}_0 S)^N$, o conjunto de índices I é vazio e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$.

■

Lema 3.3. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{m}_0 S)^N$, existe $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j) tal que $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Note que

$$J'_\lambda(u_j) \to 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_j)(u_j - u) &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx \\ &-\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u)dx \\ &-\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)dx \to 0. \end{aligned}$$

Observe que existem constantes positivas m_0 e m_1 tais que

$$m_0 \leq M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) \leq m_1$$

e constantes não-negativas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \leq \left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \leq c_2.$$

Pelo Lema 3.2, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$, e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\left|\int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0.$$

Considerando

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j-u)dx,$$

temos $L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) \to 0$. Temos ainda que $L_{p(x)}(u)(u_j-u) \to 0$. Portanto,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \to 0.$$

Do Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 3.4.

(*i*) Para todo $\lambda > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$, tais que $J_\lambda(u) \geq \alpha$, $\|u\| = \rho$.

(*ii*) Existe um elemento $w_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w_0\| > \rho$ e $J(w_0) < \alpha$.

Demonstração: ($\underline{i}$) Temos,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq m_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{A_2}{\beta(x)}u^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} \\ &\quad -\frac{1}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Seja $\rho = \|u\|$, onde $\|u\| < 1$ é suficientemente pequeno. Pela Proposição 1.3 obtemos $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \geq \|u\|^{p^+}$ e das seguintes imersões $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$, tem-se que $\displaystyle\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx \leq M_1^{\beta^-}\|u\|^{\beta^-}$ e $\displaystyle\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \leq M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}$.

$$J_\lambda(u) \geq \rho^{p^+}\left[\left(\frac{m_0}{p^+}\right) - \left(\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)} + \frac{1}{q^-}M_2^{q^-}\right)\rho^{\beta^-(r+1)-p^+}\right],$$

e o resultado segue.

($\underline{ii}$) Seja $0 < w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t > 1$,

$$\begin{aligned} J_\lambda(tw) &\leq \frac{m_1}{p^-}t^{p^+}\left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)}dx\right) + \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^-(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1} \\ &\quad -\frac{1}{q^+}t^{q^-}\int_\Omega |w|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Então temos

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda(tw) = -\infty,$$

e a demonstração está completa.

■

Para concluir a demonstração do item (i), consideremos $0 < t < 1$ e $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim

$$\begin{aligned} J_\lambda(tw) &\leq \frac{m_1}{p^-}t^{p^-}\left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1} \\ &\quad -\frac{1}{q^+}t^{q^-}\int_\Omega |w|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$J_\lambda(tw) \leq \frac{m_1}{p^-}t^{p^-}\left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}.$$

Definindo $g(t) = \left(\dfrac{m_1\tilde{a}}{p^-}\right)t^{p^-} - \dfrac{\lambda}{r+1}\left(\dfrac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1}\tilde{b}t^{\beta^+(r+1)}$,

onde $\tilde{a} = \displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)}dx$ e $\tilde{b} = \left(\displaystyle\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}$, obtemos $\sup J_\lambda(tw) \leq g(t)$. Note que $g(t)$ tem um ponto de crítico de máximo $t_\lambda = \left[\dfrac{m_1\tilde{a}}{\lambda\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1}\tilde{b}\beta^+}\right]^{\frac{1}{\beta^+(r+1)-p^-}}$ e $t_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Pela continuidade de J_λ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\sup_{t\geq 0} J_\lambda(tw)\right)=0.$$

Então existe $\overline{\lambda}$ tal que $\forall\lambda\geq\overline{\lambda}$

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda(tw)<\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S)^N.$$

Isso completa a demonstração do item (i).

■

3.2.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 3.1

Demonstração: A demonstração segue dos seguintes lemas:

Lema 3.5. Seja $(u_j)\subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c, então, (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Por hipótese temos $J_\lambda(u_j)\to c$ e $J'_\lambda(u_j)\to 0$. Sabemos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= a\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)+\frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1}\\ &\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}-\int_\Omega\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)v &= a\left(\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx\right)+b\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta}\\ &\quad\times\left(\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx\right)-\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r}\int_\Omega f(x,u)v dx\\ &\quad -\int_\Omega|u|^{q(x)-2}uv dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$C+\|u_j\|\geq J_\lambda(u_j)-\frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_j)u_j,$$

com $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta}<\theta<\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{r+1}\dfrac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$.

Daí,

$$\begin{aligned} C+\|u_j\| &\geq \left(\frac{a}{p^+}-\frac{a}{\theta}\right)\int_\Omega|\nabla u_j|^{p(x)}dx+\left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)\left(\int_\Omega|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1}\\ &\quad -\frac{b}{\theta(p^-)^\eta}\left(\int_\Omega|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1}+\frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta}\frac{1}{(\beta^+)^r})\left[\int_\Omega|u_j|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1}\\ &\quad -\lambda\frac{A_2^{r+1}}{r+1}\frac{1}{(\beta^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega|u_j|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1}+\frac{1}{\theta}\int_\Omega|u_j|^{q(x)}dx-\frac{1}{q^-}\int_\Omega|u_j|^{q(x)}dx.\end{aligned}$$

Suponhamos que (u_j) é ilimitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, passando a subsequência se necessário, temos para $\|u_j\| > 1$ usando a Proposição 1.3

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right) \|u_j\|^{p^-} + \left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{b}{\theta(p^-)^{\eta}}\right) \|u_j\|^{(\eta+1)p^-},$$

que é uma absurdo, pois $p^- > 1$. Logo (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 3.6. Sejam $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c e $t_0 = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j| dx$. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S)^N$, onde $\overline{a} = \min\{t_1^{1/p^+}, t_1^{1/p^-}\}$ e $0 < t_1 < t_0^{\eta}$, então o conjunto de índices I, dado na Proposição 1.7 é vazio e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ para algum $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Pela Proposição 1.7 e Lema 3.5, temos

$$|u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i\in I} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I} \mu_i \delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0$$

$$S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I.$$

Se $I = \emptyset$ então $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Para demonstrar essa convergência, usa-se a extensão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions, como no item (i).

Mostraremos agora que o conjunto de índices $I = \emptyset$, se (u_j) é uma sequência Palais-Smale com nível de energia c, onde $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S)^N$ com $\overline{a} = \min\{t_1^{1/p^+}, t_1^{1/p^-}\}$. De fato, suponhamos que $I \neq \emptyset$. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e suporte na bola unitária do $\mathbb{R}^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon > 0$.

Como $J'_\lambda(u_j) \to 0$ em $\left(W_0^{1,p(x)}\Omega\right)'$ obtemos

$$\lim J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon} u_j) = 0.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) \;=\; & \left[a+b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \\
& -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \\
& -\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx.
\end{aligned}
$$

Quando $j\to\infty$ temos

$$0=\lim\left(\left[a+b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_jdx\right)\right)+$$
$$(a+bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu-\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu-\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx,$$

Note que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\left[a+b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}\right)\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j\right)\right)\to 0,$$

pois

$$0 \;\le\; \left|\lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_jdx\right)\right|\le \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|dx,$$

e pela desigualdade de Hölder,

$$0\le \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|dx\le \lim_{j\to\infty}||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)}.$$

Observe que

$$\lim_{j\to\infty}||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)}\le$$

$$\lim_{j\to\infty}\left\{(|\nabla u_j|_{p(x)}^{p^+-1}+|\nabla u_j|_{p(x)}^{p^--1})\left[\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^+}+\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^-}\right]\right\}$$

Usando a hipótese da sequência (u_j) ser limitada

$$\lim_{j\to\infty}||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)}\le$$

$$\lim_{j\to\infty}C\left[\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^+}+\left(\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx\right)^{1/p^-}\right],$$

onde C é uma constante positiva.

Temos ainda via desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega |\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|^{p(x)}dx=\int_\Omega |u_j|^{p(x)}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})|^{p(x)}dx\le ||u_j|^{p(x)}|_{\alpha(x)}||\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^{p(x)}|_{\alpha'(x)}$$

onde $\alpha(x)=N/(N-p(x))$, $\alpha'(x)=N/p(x)$ e as duas últimas normas são calculadas em $B_\varepsilon(x_i)$.

Assim,

$$\int_\Omega |u_j|^{p(x)}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})|^{p(x)}dx \leq (|u_j|_{p^*}^{p^+} + |u_j|_{p^*}^{p^-})(|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^+} + |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^-}).$$

Logo,

$$\lim_{j\to\infty} ||\nabla u_j|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j|_{p(x)} \leq$$

$$C\left[\left((|u|_{p^*}^{p^+} + |u|_{p^*}^{p^-})(|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^+} + |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^-})\right)^{1/p^+} + \left((|u|_{p^*}^{p^+} + |u|_{p^*}^{p^-})(|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^+} + |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|_N^{p^-})\right)^{1/p^-}\right].$$

Como $\nabla\phi_{i,\varepsilon} = \nabla\phi(\frac{x-x_i}{\varepsilon})\frac{1}{\varepsilon}$, obtém-se via mudança de variável

$$\int_{B_\varepsilon(x_i)} |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^N dx = \int_{B_\varepsilon} |\nabla\phi(\frac{x-x_i}{\varepsilon})|^N \frac{1}{\varepsilon^N}dx = \int_{B_1(0)} |\nabla\phi(y)|dy.$$

Além disso $\displaystyle\int_{B_\varepsilon(x_i)} |u|^{p^*}dx \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Portanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\left[a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}\right)\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j\right)\right) \to 0.$$

Por outro lado,

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}(a + bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = (a + bt_0^\eta)\mu_i\phi(0), \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu = \nu_i\phi(0)$ e

$\displaystyle\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0,$ quando $\varepsilon \to 0$. Então,

$(a + bt_0^\eta)\mu_i\phi(0) = \nu_i\phi(0)$. Como $S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}$, obtemos

$$(\overline{a}S)^N \leq \nu_i,$$

onde $\overline{a} = \min\{t_1^{1/p^+}, t_1^{1/p^-}\}$, como citado anteriormente.

Temos ainda,

$$\begin{aligned} c &= \lim\left(a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1}\right. \\ &\qquad -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}dx \\ &\quad -\frac{a}{\theta}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx - \frac{b}{\theta}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) \\ &\qquad \left. +\frac{\lambda}{\theta}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)u_jdx + \frac{1}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx\right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
c &\geq \lim \left(\frac{a}{p^+} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \right. \\
&\quad - \frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega F(x,u_j) dx \right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_j|^{q(x)} dx \\
&\quad - \frac{a}{\theta} \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx - \frac{b}{\theta(p^-)^\eta} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \\
&\quad \left. + \frac{\lambda}{\theta} \left[\int_\Omega F(x,u_j) dx \right]^r \int_\Omega f(x,u_j) u_j dx + \frac{1}{\theta} \int_\Omega |u_j|^{q(x)} dx \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
c &\geq \lim \left(\left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta} \right) \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx + \left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} \right) \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \right. \\
&\quad - \frac{b}{\theta(p^-)^\eta} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} - \lambda \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} \\
&\quad \left. + \frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r}) \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \frac{1}{\theta} \int_\Omega |u_j|^{q(x)} dx - \frac{1}{q^-} \int_\Omega |u_j|^{q(x)} dx \right)
\end{aligned}$$

Considerando

$$\frac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \theta < \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r},$$

temos

$$c \geq \lim \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q(x)} \right) |u_j|^{q(x)} dx.$$

Sendo $\mathcal{A}_\delta = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} (B_\delta(x) \cap \Omega) = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}) < \delta\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
c &\geq \lim \int_{\mathcal{A}_\delta} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) |u_j|^{q(x)} dx = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) \left(\int_{\mathcal{A}_\delta} |u|^{q(x)} dx + \sum_{i \in I} \nu_i \right) \\
&\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) \nu_i \\
&\geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) (\overline{a}S)^N.
\end{aligned}$$

Como δ é positivo e arbitrário e q é contínua, então

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{a}S)^N.$$

Portanto, o conjunto de índices I é vazio se,

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{a}S)^N.$$

■

Lema 3.7. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S)^N$, existe $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como

$$J'_\lambda(u_j) \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_j)(u_j - u) &= a\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j - u)dx\right) + \\ & b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j - u)dx\right) \\ & -\lambda\left[\int_\Omega F(x, u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x, u_j)(u_j - u)dx \\ & - \int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j - u)dx \to 0. \end{aligned}$$

Note que existem constantes não-negativas c_1, c_2, c_3 e c_4 tais que

$$c_1 \leq \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta \leq c_2$$

e

$$c_3 \leq \left[\int_\Omega F(x, u_j)dx\right]^r \leq c_4.$$

Pelo Lema 3.6, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\left|\int_\Omega f(x, u_j)(u_j - u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j - u)dx\right| \to 0.$$

Considerando

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j - u)dx,$$

obtemos $L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) \to 0$. Temos também $L_{p(x)}(u)(u_j - u) \to 0$. Logo,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \to 0.$$

Do Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

$\blacksquare$

Lema 3.8.

($\underline{i}$) Para todo $\lambda > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$, tais que $J_\lambda(u) \geq \alpha$, $\|u\| = \rho$.

($\underline{ii}$) Existe um elemento $w_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w_0\| > \rho$ e $J_\lambda(w_0) < \alpha$.

Demonstração: ($\underline{i}$) Temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \;\geq\; & a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ & -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{A_2}{\beta(x)}u^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} - \frac{1}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \;\geq\; & \frac{a}{p^+}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ & -\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\left[\int_\Omega u^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} - \frac{1}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$ é suficientemente pequeno, da Proposição 1.3 obtemos $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \geq \|u\|^{p^+}$ e das seguintes imersões $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$, tem-se $\displaystyle\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx \leq M_1^{\beta^-}\|u\|^{\beta^-}$ e $\displaystyle\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \leq M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \;\geq\; & \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{p^+(\eta+1)} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\|u\|^{\beta^-(r+1)} \\ & -\frac{1}{q^-}M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}. \end{aligned}$$

Usando as hipóteses que $(\eta+1)p^+ < \beta^-(r+1) \leq q^-$, temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \;\geq\; & \frac{a}{p^+}\|u\|^{(\eta+1)p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{p^+(\eta+1)} \\ & -\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{1}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\|u\|^{\beta^-(r+1)}, \end{aligned}$$

que pode ser escrito como segue,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \;\geq\; & \left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)\|u\|^{(\eta+1)p^+} \\ & -\left(\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)} + \frac{1}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\right)\|u\|^{\beta^-(r+1)}. \end{aligned}$$

Considerando $\rho = \|u\|$,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \;\geq\; & \rho^{(\eta+1)p^+}\left[\left(\frac{a}{p^+}\right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \left(\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{1}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\right)\rho^{\beta^-(r+1)-(\eta+1)p^+}\right], \end{aligned}$$

e o resultado segue.

($\underline{ii}$) Seja $0 < w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t > 1$,

$$\begin{aligned} J_\lambda(tw) &\leq \frac{a}{p^-} t^{p^+} \left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)} dx \right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} t^{(\eta+1)p^+} \left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \\ &\quad + \frac{\lambda}{r+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{r+1} t^{\beta^-(r+1)} \left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)} dx \right)^{r+1} - \frac{1}{q^+} t^{q^-} \int_\Omega |w|^{q(x)} dx. \end{aligned}$$

Então temos,

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda(tw) = -\infty,$$

e a demonstração do lema está completa.

■

Para concluir a demonstração do item (ii) consideremos $0 < t < 1$ e $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim

$$\begin{aligned} J_\lambda(tw) &\leq \frac{a}{p^-} t^{p^-} \left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)} dx \right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} t^{(\eta+1)p^-} \left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \\ &\quad - \frac{\lambda}{r+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)} \left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)} dx \right)^{r+1} - \frac{1}{q^+} t^{q^+} \int_\Omega |w|^{q(x)} dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} J_\lambda(tw) &\leq \frac{a}{p^-} t^{p^-} \left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)} dx \right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} t^{(\eta+1)p^-} \left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \\ &\quad - \frac{\lambda}{r+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)} \left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)} dx \right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Definindo $g(t) = \left(\frac{a\tilde{a}}{p^-} + \frac{b(\tilde{a})^{\eta+1}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} \right) t^{p^-} - \frac{\lambda}{r+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{r+1} \tilde{b} t^{\beta^+(r+1)}$,

onde $\tilde{a} = \int_\Omega |\nabla w|^{p(x)} dx$ and $\tilde{b} = \left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)} dx \right)^{r+1}$, obtemos $\sup J_\lambda(tw) \leq g(t)$. Note que

$g(t)$ tem um ponto crítico de máximo $t_\lambda = \left[\dfrac{\tilde{a}a + \dfrac{b(\tilde{a})^{\eta+1}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta}}}{\lambda \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{r+1} \tilde{b}\beta^+} \right]^{\dfrac{1}{\beta^+(r+1) - p^-}}$ e $t_\lambda \to 0$

quando $\lambda \to \infty$. Pela continuidade de J_λ

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left(\sup_{t\geq 0} J_\lambda(tw) \right) = 0.$$

Então existe $\widetilde{\lambda}$ tal que $\forall \lambda \geq \widetilde{\lambda}$

$$\sup_{t\geq 0} J_\lambda(tw) < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-} \right) (\overline{a}S)^N.$$

Isso conclui a demonstração do item (ii).

■

Capítulo 4

Uma solução via gênero de Krasnoselskii

4.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos existência e multiplicidade de soluções para a equação

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u & = & f(x,u)\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r, \quad \text{em } \Omega, \\ u & = & 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições e $r > 0$ é um parâmetro real.

Suporemos as seguintes hipóteses sobre M e f: Existem constantes positivas A_0, A, B_0, B, Q_1, Q_2 e funções $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, tais que

$$A_0 + A\tau^{\alpha(x)} \leq M(\tau) \leq B_0 + B\tau^{\beta(x)}, \tag{4.2}$$

e

$$Q_1 t^{\gamma(x)-1} \leq f(x,t) \leq Q_2 t^{q(x)-1}, \tag{4.3}$$

para todo $t \geq 0$ e para todo a $x \in \overline{\Omega}$. Além disso $\gamma(x) \leq q(x) < p^* = \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}$, com

$$p^- > q^+(r+1), \tag{4.4}$$

e

$$f(x,t) = -f(x,-t) \tag{4.5}$$

para todo $t \in I\!R$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Note que podemos utilizar em nosso problema, $f(x,t) = |t|^{q(x)-2}t$.

Usaremos a Teoria do Gênero, introduzida por Krasnoselskii [38] (ver Apêndice A.2), para demonstrar o resultado principal, como segue:

4.2 Teorema 4.1

Teorema 4.1. Suponhamos (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5). Então (4.1) tem infinitas soluções.

O funcional energia associado ao problema (4.1) é dado por

$$J(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1},$$

onde $\widehat{M}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau M(s)ds$ e $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)ds$.

Temos que $J \in C^1(W_o^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$ e

$$J'(u)v = M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx - \left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)vdx,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (ver Apêndice A.1.1).

A seguir apresentaremos dois lemas importantes para a demonstração do resultado principal.

Lema 4.1. J é limitado inferiormente.

Demonstração: Usando (4.2) e (4.3) temos

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \int_0^{\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)} [As^{\alpha(x)} + A_0]ds - \frac{1}{r+1}\left[\int_\Omega \left(Q_2\int_0^u s^{q(x)-1}ds\right)\right]^{r+1} \\ &\geq \frac{A}{\alpha(x)+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\alpha(x)+1} + \left(A_0\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) \\ &\quad - \frac{1}{r+1}\left(\frac{Q_2}{q^-}\right)^{r+1}\left(\int_\Omega u^{q(x)}dx\right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Considerando $\|u\| > 1$ obtemos da Proposição 1.3 e das imersões de Sobolev

$$J(u) \geq \frac{A}{(p^+)^{\alpha^+ +1}(\alpha^+ +1)}\|u\|^{p^-(\alpha^- +1)} + \frac{A_0}{p^+}\|u\|^{p^-} - C\|u\|^{(r+1)q^\pm}.$$

Então, J é limitado inferiormente, pois $p^-(\alpha^+ + 1) > p^- > q^+(r+1)$, e o lema está demonstrado.

■

Lema 4.2. J satisfaz a condição (PS).

Demonstração: Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência tal que

$$J(u_j) \to C' \ \text{ e } \ J'(u_j) \to 0.$$

Procedendo como no lema anterior, obtemos uma constante positiva C_1 tal que

$$C_1 \geq J(u_j) \geq \frac{A}{(p^+)^{\alpha^++1}(\alpha^+ + 1)}\|u_j\|^{p^-(\alpha^-+1)} - C\|u_j\|^{(r+1)q^{\pm}}.$$

Como $p^-(\alpha^+ + 1) > q^+(r+1)$, concluimos que (u_j) é limitada. Assim, existe uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Como

$$J'(u_j) \to 0,$$

temos

$$J'(u_j)(u_j - u) \to 0,$$

isto é ,

$$M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j - u)dx$$
$$- \left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(u_j - u)dx \to 0.$$

Pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\left|\int_\Omega f(x,u_j)(u_j - u)dx\right| \leq Q_2\left|\int_\Omega |u_j|^{q(x)-1}(u_j - u)dx\right|.$$

Note que

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{q(x)-1}(u_j - u)dx\right| \leq \int_\Omega |u_j|^{q(x)-1}|(u_j - u)|dx \leq C||u|^{q(x)-1}|_{q(x)/q(x)-1}|u_j - u|_{q(x)}.$$

Como $q(x) < p^*(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ temos que $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^{q(x)}(\Omega)$. Logo, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Portanto

$$\left|\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(u_j - u)dx\right| \to 0.$$

Observe ainda que existem constantes não negativas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \leq \left[Q_1\int_\Omega \frac{1}{\gamma(x)}|u_j|^{\gamma(x)}dx\right]^r \leq \left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \leq \left[Q_2\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u_j|^{q(x)}dx\right]^r \leq c_2. \quad (4.6)$$

Como (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, podemos supor que

$$\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx \to t_0 \geq 0.$$

Se $t_0 = 0$ então $u_j \to 0$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e a demonstração termina. Se $t_0 > 0$ então de (4.2) obtemos

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u)=\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx \to 0,$$

pois existem constantes positivas c_3 e c_4 tais que s $c_3 \leq M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) \leq c_4$. Temos ainda que

$$L_{p(x)}(u)(u_j-u)=\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla(u_j-u)dx \to 0.$$

Temos também que

$$(L_{p(x)}(u_j)-L_{p(x)}(u),u_j-u)\to 0.$$

Do Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Portanto, J satisfaz a condição (PS).

■

4.2.1 Demonstração do Teorema 4.1

O resultado principal segue do seguinte teorema, cuja demonstração encontra-se em Brezis [11].

Teorema 4.2. Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, então existem $(e_n)\subset X$ e $(e_n^*)\subset X^*$ tais que

$$<e_n^*,e_m>=\delta_{n,m}=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad n=m\\ 0 & \text{se} \quad n\neq m,\end{cases}$$

$$X=\overline{span\{e_n;1,2,\cdots\}} \quad e \quad X^*=\overline{span\{e_n^*;1,2,\cdots\}}.$$

Demonstração do Teorema 4.1: Para cada $k\in\mathbb{N}$ consideremos $X_k=span\{e_1,e_2,e_3,\cdots,e_k\}$, o subespaço de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ gerado pelos vetores $e_1,e_2,\cdots,e_k$. Observe que $X_k\hookrightarrow L^{\gamma(x)}(\Omega)$, $1<\gamma(x)<p^*$ com imersões contínuas. Assim, as normas em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $L^{\gamma(x)}(\Omega)$ são equivalentes em X_k.

Note que usando (4.2) e (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} J(u) \quad \leq \quad & B_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)+\frac{B}{(\beta(x)+1)}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\beta(x)+1}\\ & -\frac{1}{r+1}\left(\frac{Q_1}{\gamma^+}\right)^{r+1}\left(\int_\Omega u^{\gamma(x)}dx\right)^{r+1}.\end{aligned}$$

Se $\|u\|<1$ é suficientemente pequena, da Proposição 1.3 obtem-se $\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx \leq \|u\|^{p^-}$ e $-|u|_{\gamma(x)}^{\gamma^+}\geq -\int_\Omega |u|^{\gamma(x)}dx$. Pela equivalência das normas em X_k, $-C(k)\|u\|^{\gamma^+}\geq -\int_\Omega |u|^{\gamma(x)}dx$, onde $C(k)$ é uma constante positiva.

Portanto,

$$J(u) \leq \frac{B_0}{p^-}\|u\|^{p^-} + \frac{B}{(p^-)^{\alpha^-+1}(\alpha^-+1)}\|u\|^{p^-(\alpha^-+1)} - \widetilde{C}(K)\|u\|^{(r+1)\gamma^+},$$

ou ainda

$$J(u) \leq \ \|u\|^{(r+1)\gamma^+}\left[\left(\frac{B_0}{p^-} + \frac{B}{(p^-)^{\alpha^-+1}(\alpha^-+1)}\right)\|u\|^{p^- -(r+1)\gamma^+} - \widetilde{C}(K)\right].$$

Seja R uma constante positiva tal que

$$\left(\frac{B_0}{p^-} + \frac{B}{(p^-)^{\alpha^-+1}(\alpha^-+1)}\right)R^{p^- -(r+1)\gamma^+} < \widetilde{C}(K).$$

Assim, para todo $0 < r_0 < R$, e considerando $K = \{u \in X_k : \|u\| = r_0\}$, temos

$$\begin{aligned} J(u) \ &\leq \ r_0^{(r+1)\gamma^+}\left[\left(\frac{B_0}{p^-} + \frac{B}{(p^-)^{\alpha^-+1}(\alpha^-+1)}\right)r_0^{p^- -(r+1)\gamma^+} - \widetilde{C}(K)\right] \\ &< \ R^{(r+1)\gamma^+}\left[\left(\frac{B_0}{p^-} + \frac{B}{(p^-)^{\alpha^-+1}(\alpha^-+1)}\right)R^{p^- -(r+1)\gamma^+} - \widetilde{C}(K)\right] < 0 = J(0), \end{aligned}$$

que implica

$$\sup_K J(u) < 0 = J(0).$$

Como X_k e $I\!R^k$ são isomorfos, e K e S^{k-1} são homeomorfos, concluimos que $\gamma(K) = k$. Mais ainda, de (4.5), J é par. Pelo Teorema de Clark (ver Apêndice A.2), J tem pelo menos k pares de diferentes pontos críticos. Como k é arbitrário, obtemos infinitos pontos críticos de J.

■

Observação 4.2.1. Seguindo os mesmos passos deste capítulo, obtemos o resultado principal, trocando a condição (4.2) por: $A_0 \leq M(\tau) \leq B_0$, $A\tau^{\alpha(x)} \leq M(\tau) \leq B\tau^{\beta(x)}$, $A_0 \leq M(\tau) \leq B\tau^{\beta(x)}$, $A_0 \leq M(\tau) \leq B_0 + B\tau^{\beta(x)}$, $A\tau^{\alpha(x)} \leq M(\tau) \leq B_0 + B\tau^{\beta(x)}$, $A_0 + A\tau^{\alpha(x)} \leq M(\tau) \leq B\tau^{\beta(x)}$, onde A_0, B_0, A e B são constantes positivas.

Capítulo 5

Um problema com expoente crítico via argumento de truncamento

5.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos existência de soluções via argumento de truncamento, para a equação com crescimento crítico

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u & = & \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \\ & & +|u|^{q(x)-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{5.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições e λ, $r > 0$ são parâmetros reais.

Suporemos as seguintes hipóteses: existem constantes positivas A_1, A_2, e uma função $\beta \in C_+(\overline{\Omega})$, tal que

$$A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}, \tag{5.2}$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$. Além disso p, $q \in C_+(\overline{\Omega})$ e

$$1 < p^- \leq p^+ < N, \tag{5.3}$$

$$1 < \beta^+(r+1) < q(x) \leq p^* = \frac{Np(x)}{N-p(x)}, \tag{5.4}$$

com $\{x \in \overline{\Omega}; q(x) = p^*(x)\} \neq \emptyset$, e

$$f(x,t) = -f(x,-t), \tag{5.5}$$

para todo $t \in I\!R$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$.

O funcional energia associado ao Problema (5.1) é dado por:

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx, \quad (5.6)$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, onde $\widehat{M}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau M(s)ds$.

Pelas condições aqui consideradas, o funcional acima é Fréchet dife- renciável e sua diferencial no sentido de Fréchet é dada por

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)v &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx \\ &\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx, \end{aligned} \quad (5.7)$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (ver Apêndice A.1.1). Então, $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (5.1) se, e somente se, u é ponto crítico de J_λ.

Usaremos o argumento de truncamento e o Princípio de Concentração de Compacidade Lions [42], para os espaços de expoente variável, estendido por Bonder e Silva [8], para demonstrar o nosso resultado principal. A seguir nosso resultado principal:

5.2 Demonstração do Teorema 5.1

Teorema 5.1. (i) Suponhamos (5.2), (5.3), (5.4) e (5.5). Suponhamos ainda que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{p^+ m_1}{m_0} < q^-$ e $\beta^-(r+1) < p^-$. Então existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ existem infinitas soluções para (5.1) em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.
(ii) Suponhamos (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) e $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, com $a \geq 0, b > 0$, $\tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Suponhamos ainda que, $\beta^+(r+1) < p^-$ e $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < q^-$. Então existe $\widetilde{\lambda} > 0$ tal que para todo $0 < \lambda < \widetilde{\lambda}$ existem infinitas soluções para (5.1) em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

5.2.1 Demonstração do item (i) do Teorema 5.1

Esse resultado segue dos seguintes lemas:

Lema 5.1. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, então (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como (u_j) é uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, temos $J_\lambda(u_j) \to c$ e $J'_\lambda(u_j) \to 0$. Sabemos que

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
J'_\lambda(u)v &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx \\
&\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$C + \|u_j\| \geq J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_j)u_j,$$

com

$$\frac{m_1 p^+}{m_0} < \theta < q^-. \tag{5.8}$$

Supondo (u_j) ilimitada, para $\|u_j\| > 1$, pela Proposição 1.3

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-} + \lambda\left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta}\frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1}\frac{1}{(\beta^-)^{r+1}}\right)\|u\|^{\beta^\pm(r+1)},$$

que é uma contradição pois $p^- > 1$. Logo, (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 5.2. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência limitada, tal que

$$J_\lambda(u_j) \to c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_j) \to 0. \tag{5.9}$$

Suponhamos $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m_0}S_q)^N + K\min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}$, onde $\overline{m_0} = \min\{m_0^{1/p^+}, m_0^{1/p^-}\}$, e K independent de λ. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$ o conjunto de índices I, da Próposição 1.7 é vazio e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ para algum $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Pela Proposição 1.7 e do Lema 5.1, obtemos

$$|u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0$$

$$S_q\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I.$$

Note que se $I = \emptyset$ então $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Recordemos que a demonstração dessa convergência já foi feita na demonstração do Lema 3.2.

Mostraremos agora que o conjunto de índices $I = \emptyset$ se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S_q)^N + K\min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}$ e (u_j) satisfaz (5.9). De fato, vamos supor que $I \neq \emptyset$. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e suporte na bola unitária do $\mathbb{R}^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon > 0$.

Como $J'_\lambda(u_j) \to 0$ em $\left(W_0^{1,p(x)}\Omega\right)'$, obtemos

$$\lim J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) = 0.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) &= \left[M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \\ &\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \\ &\quad -\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx. \end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$ temos

$$0 = \lim\left(\left[M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j dx\right)\right) +$$

$$M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu - \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx,$$

onde $t_0 = \lim_{t\to\infty}\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx$.

Tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\left[M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j dx\right)\right) \to 0,$$

(ver no Lema 3.2).

Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = M(t_0)\mu_i\phi(0), \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu = \nu_i\phi(0)$$

e

$$\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)\right]^r \int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u) \to 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Então,

$M(t_0)\mu_i\phi(0) = \nu_i\phi(0)$ implica que $m_0\mu_i \leq \nu_i$. Como $S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}$ temos,

$$(\overline{m}_0 S)^N \leq \nu_i,$$

onde $\overline{m}_0 = \min\{{m_0}^{1/p^+}, {m_0}^{1/p^-}\}$.

Como c é o nível de energia, usando θ satisfazendo (5.8) e considerando $I \neq \emptyset$, obtemos

$$\begin{aligned} c &\geq \lim \left(\left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta} \right) \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx + \frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} \right. \\ &\left. -\lambda \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q(x)} \right) |u_j|^{q(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} c &\geq \lim \left(\lambda \left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \right) \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \right. \\ &\left. \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q(x)} \right) |u_j|^{q(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Considerando $\mathcal{A}_\delta = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} (B_\delta(x) \cap \Omega) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \mathcal{A}) < \delta\}$, obtemos

$$\begin{aligned} c &\geq \lambda \left(\frac{A_1}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \right) \left[\int_\Omega |u|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-} \right) \int_\Omega |u|^{q(x)} dx \\ &+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) \sum_{i \in I} \nu_i. \end{aligned}$$

Como $\delta > 0$ é arbitrário e q é contínua

$$\begin{aligned} c &\geq \lambda \left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \right) \left[\int_\Omega |u|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-} \right) \int_\Omega |u|^{q(x)} dx \\ &+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{m}_0 S_q)^N. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} c &\geq \lambda \left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \right) \left[||u|^{\beta(x)}|_{q(x)/\beta(x)} |\Omega|^{\frac{q^+ - \beta^-}{q^-}} \right]^{r+1} \\ &+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-} \right) \int_\Omega |u|^{q(x)} dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{m}_0 S_q)^N. \end{aligned}$$

Se $||u|^{\beta(x)}|_{q(x)/\beta(x)} \geq 1$, tem-se

$$c \geq c_1 \left| |u|^{\beta(x)} \right|_{q(x)/\beta(x)}^{(q/\beta)^-} - \lambda c_2 \left| |u|^{\beta(x)} \right|_{q(x)/\beta(x)}^{r+1} + c_3,$$

onde $0 < c_2 = \left(\frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} - \frac{A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} \right) |\Omega|^{\frac{(q^+ - \beta^-)(r+1)}{q^-}}$ e $c_3 = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{m}_0 S_q)^N$.
Então, sendo $g_1(t) = c_1 t^{(q/\beta)^-} - \lambda c_2 t^{r+1}$, esta função atinge o mínimo absoluto para $t > 0$, no ponto

$$\bar{t} = \left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^- c_1} \right)^{\frac{1}{(q/\beta)^- - (r+1)}}.$$

Observe que,

$g_1(\bar{t}) = c_1 \left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^- c_1} \right)^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}} - \lambda c_2 \left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^- c_1} \right)^{\frac{r+1}{(q/\beta)^- - (r+1)}}$, que implica

$$g_1(\bar{t}) = c_1\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}$$

$$-\frac{(r+1)c_1(q/\beta)^-}{(r+1)c_1(q/\beta)^-}\lambda c_2\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{r+1}{(q/\beta)^- - (r+1)}}.$$

Assim,

$$g_1(\bar{t}) = c_1\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}$$

$$-\frac{c_1(q/\beta)^-}{r+1}\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{r+1}{(q/\beta)^- - (r+1)}+1}.$$

Então,

$g_1(\bar{t}) = c_1\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}\left(1-\frac{(q/\beta)^-}{r+1}\right)$. Usando o fato que $\beta^+(r+1) < q^-$ podemos escrever

$g_1(\bar{t}) = \lambda^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}K$, onde K é uma constante negativa que depende apenas de A_1, A_2, r, q, β e Ω.

Se $||u|^{\beta(x)}|_{q(x)/\beta(x)} < 1$, temos

$$c \geq c_1\left||u|^{\beta(x)}\right|_{q(x)/\beta(x)}^{(q/\beta)^+} - \lambda c_2\left||u|^{\beta(x)}\right|_{q(x)/\beta(x)}^{r+1} + c_3,$$

onde $0 < c_2 = \left(\frac{A_2^{r+1}}{r+1}\frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} - \frac{A_1^{r+1}}{\theta}\frac{1}{(\beta^+)^r}\right)|\Omega|^{\frac{(q^+-\beta^-)(r+1)}{q^-}}$ e $c_3 = \left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S_q)^N$. Então, sendo $g_2(t) = c_1 t^{(q/\beta)^+} - \lambda c_2 t^{r+1}$, essa função atinge o seu mínimo absoluto para $t > 0$, no ponto

$$\underline{t} = \left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^+ c_1}\right)^{\dfrac{1}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}.$$

Assim, obtemos

$g_2(\underline{t}) = \lambda^{\dfrac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}K$, onde K é uma constante negativa que depende somente de A_1, A_2, r, q, β e Ω. Então,

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S_q)^N + K\min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}.$$

Portanto, $I = \emptyset$ se

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S_q)^N + K\min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}.$$

■

Lema 5.3. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m}_0 S_q)^N + K\min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}$, existe uma subsequência de (u_j), ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como

$$J'_\lambda(u_j) \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_j)(u_j - u) &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j - u)dx \\ &\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(u_j - u)dx \\ &\quad -\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j - u)dx \to 0. \end{aligned}$$

Observe que as constantes m_0 e m_1 são tais que

$$m_0 \leq M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right) \leq m_1.$$

Além disso existem constantes não-negativas c_1 e c_2 tais

$$c_1 \leq \left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \leq c_2.$$

Pelo Lema 5.2, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$, e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left|\int_\Omega f(x,u_j)(u_j - u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_{\Omega} |u_j|^{q(x)-2} u_j (u_j - u) dx\right| \to 0.$$

Fazendo

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) = \int_{\Omega} |\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \nabla (u_j - u) dx,$$

tem-se $L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) \to 0$. Temos ainda que $L_{p(x)}(u)(u_j - u) \to 0$. Então

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \to 0.$$

Da Proposição 1.1, $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 5.4. O funcional energia J_λ associado com (5.1) não é limitado inferiormente.

Demonstração: De fato,

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_{\Omega} F(x,u) dx\right]^{r+1} - \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx.$$

Considerando $0 < w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, para $t > 1$,

$$\begin{aligned} J_\lambda(tw) \leq\ & \frac{m_1}{p^-} t^{p^+} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^{p(x)} dx\right) + \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)} \left(\int_{\Omega} |w|^{\beta(x)} dx\right)^{r+1} \\ & - \frac{1}{q^+} t^{q^-} \int_{\Omega} |w|^{q(x)} dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda(tw) = -\infty,$$

e o lema está demonstrado.

■

No que segue usaremos um argumento de truncamento, do tipo usado em Azorero e Alonso [5], no funcional J_λ, para obtermos uma limitação inferior especial para o funcional.

Considerando $\|u\| \leq 1$, temos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} \frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}} \|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{1}{q^-} \frac{1}{S_q^{q^-}} \|u\|^{q^-}.$$

Seja

$$J_{1,\lambda}(\|u\|) = \frac{m_0}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} \frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}} \|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{1}{q^-} \frac{1}{S_q^{q^-}} \|u\|^{q^-}.$$

Assim

$$J_{1,\lambda}(t) = \frac{m_0}{p^+} t^{p^+} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} \frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}} t^{\beta^-(r+1)} - \frac{1}{q^-} \frac{1}{S_q^{q^-}} t^{q^-}.$$

Primeiro note que $J_{1,\lambda}(t) < 0$ para $t \approx 0$, pois $p^+ < q^-$.

Além disso,

$$\frac{m_0}{p^+}t^{p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}t^{q^-} = t^{p^+}\left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}t^{q^- - p^+}\right).$$

Como $q^- > p^+$, consideremos R_1, suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{m_0}{p^+}R_1^{p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}R_1^{q^-} > 0.$$

Vamos definir

$$\lambda_1 = \frac{(r+1)}{2}\left(\frac{\beta^-}{A_2}\right)^{r+1}\frac{S_\beta^{\beta^-(r+1)}}{R_1^{\beta^-(r+1)}}\left(\frac{m_0}{p^+}R_1^{p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}R_1^{q^-}\right)$$

e $R_0 = \max\{0 < t \leq R_1; J_{1,\lambda_1} \leq 0\}$. Assim, existem $0 < \lambda_1, R_0$ e R_1 com $R_0 < R_1$, tais que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \geq J_{1,\lambda}(\|u\|) \geq J_{1,\lambda_1}(\|u\|) &= \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda_1}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}}\|u\|^{\beta^-(r+1)} \\ &\quad - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}\|u\|^{q^-}. \end{aligned}$$

para todo $\|u\| < R_1$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, com $J_{1,\lambda_1}(R_1) > 0$ e $J_{1,\lambda_1}(R_0) = 0$.

Podemos escolher a função $\tau_1 : [0,\infty) \to [0,1]$, $\tau_1 \in C^\infty([0,\infty))$, não-crescente, tal que

$$\tau_1(x) = 1, \quad \text{se} \quad x \leq R_0$$

e

$$\tau_1(x) = 0, \quad \text{se} \quad x \geq R_1.$$

Se $\|u\| > 1$, obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^-} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}\|u\|^{\beta^\pm(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}\|u\|^{q^\pm}.$$

Seja

$$J_{2,\lambda}(\|u\|) = \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^-} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}\|u\|^{\beta^+(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}\|u\|^{q^+}.$$

Assim,

$$J_{2,\lambda}(t) = \frac{m_0}{p^+}t^{p^-} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}t^{\beta^+(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}t^{q^+}.$$

Observe que $J_{2,\lambda}(t) < 0$ para $t \approx 0$, pois $\beta^+(r+1) < p^-$.

Além disso,

$$\frac{m_0}{p^+}t^{p^-} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}t^{q^+} = t^{p^-}\left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}t^{q^+-p^-}\right).$$

Como $q^+ > p^-$, consideremos R_1, suficientemente pequeno, tal que

$$\frac{m_0}{p^+}R_1^{p^-} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}R_1^{q^+} > 0.$$

Vamos definir

$$\lambda_2 = \frac{(r+1)}{2}\left(\frac{\beta^-}{A_2}\right)^{r+1}\frac{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}{R_1^{\beta^+(r+1)}}\left(\frac{m_0}{p^+}R_1^{p-} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}R_1^{q^+}\right)$$

e $R_0 = \max\{0 < t \leq R_1; J_{2,\lambda_2} \leq 0\}$. Assim, existem $0 < \lambda_2, R_0$ e R_1 com $R_0 < R_1$, tal que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) \geq J_{2,\lambda}(\|u\|) \geq J_{2,\lambda_2}(\|u\|) &= \frac{m_0}{p^+}t^{p^-} - \frac{\lambda_2}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}t^{\beta^+(r+1)} \\ &\quad -\frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}t^{q^+}. \end{aligned}$$

para todo $\|u\| < R_1$ e $0 < \lambda < \lambda_2$, com $J_{2,\lambda_2}(R_1) > 0$ e $J_{2,\lambda_2}(R_0) = 0$.

Podemos escolher uma função não-cresente $\tau_2 : [0,\infty) \to [0,1]$, $\tau_2 \in C^\infty([0,\infty))$ tal que

$$\tau_2(x) = 1, \quad \text{se} \quad x \leq R_0$$

e

$$\tau_2(x) = 0, \quad \text{se} \quad x \geq R_1.$$

Finalmente, definimos

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_1(t) & , \quad t \leq 1 \\ \tau_2(t) & , \quad t \geq 1 \end{cases}.$$

Agora, consideremos o funcional truncado, com $0 < \lambda < \lambda' = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} \\ &\quad - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\tau(\|u\|)dx. \end{aligned}$$

Observe que, se $\|u\| \leq R_0$ então $J_\lambda(u) = I_\lambda(u)$ e se $\|u\| \geq R_1$, então

$$I_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}.$$

Podemos ver que I_λ é coercivo, e portanto I_λ é limitado inferiormente.

Lema 5.5. I_λ é $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$, se $I_\lambda(u) \leq 0$ então $\|u\| < R_0$ e $I_\lambda(v) = J_\lambda(v)$ para todo v em um vizinhança suficientemente pequena de u. Mais ainda, I_λ satisfaz a condição Palais-Smale localmente para $c \leq 0$.

Demonstração: É imediato que $I_\lambda \in C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$. Se $I_\lambda(u) \leq 0$ então $\|u\| < R_0$ por construção do funcional truncado. Agora, para todo $u \in B_{R_0}(0)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u) \subset B_{R_0}(0)$ e $I_\lambda(v) = J_\lambda(v)$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$, pois $\|v\| < R_0$. Para demonstrar a condição de Palais-Smale local, para $c \leq 0$, observe que todo sequência Palais-Smale para I_λ com $c \leq 0$ é necessariamente limitada, pois o funcional é coercivo. Pelo Lema 5.2 existe λ_0 tal que para $0 < \lambda < \lambda_0$

$$c \leq 0 < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{m_0} S_q)^N + K \min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\},$$

e portanto existe uma subsequência que converge forte em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, pelo Lema 5.3.

■

Lema 5.6. Para todo $n \in I\!N$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\gamma(I_\lambda^{-\varepsilon}) \geq n,$$

onde $I_\lambda^{-\varepsilon} = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega); I_\lambda^{-\varepsilon}(u) \leq -\varepsilon\}$ e γ é o gênero de Krasnoselskii.

Demonstração: Seja $E_n \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ um subespaço n-dimensional. Assim, temos para $u \in E_n$ tal que $\|u\| = 1$ e $0 < t < R_0$,

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla(tu)|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,tu)dx\right]^{r+1}, \\ &\quad - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|tu|^{q(x)}\tau(\|u\|)dx \\ I_\lambda(tu) &\leq \frac{m_1 t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{\lambda A_1^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}}{(r+1)(\beta^+)^{r+1}}\left(\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1} - \frac{t^{q^+}}{q^+}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx, \\ I_\lambda(tu) &\leq \frac{m_1 t^{p^-}}{p^-} - \frac{\lambda A_1^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}}{(r+1)(\beta^+)^{r+1}} a_n - \frac{t^{q^+}}{q^+} b_n, \end{aligned}$$

onde

$$a_n = \inf\left\{\left(\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}; u \in E_n, \|u\| = 1\right\},$$

e

$$b_n = \inf\left\{\int_\Omega |u|^{q(x)}dx; u \in E_n, \|u\| = 1\right\}.$$

Então,

$$I_\lambda(tu) \leq \frac{m_1 t^{p^-}}{p^-} - \frac{\lambda A_1^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}}{(r+1)(\beta^+)^{r+1}} a_n.$$

Temos $a_n > 0$ e $b_n > 0$, pois E_n tem dimensão finita e as normas em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e em $L^{\beta(x)}(\Omega)$ são equivalentes em E_n. Como $\beta^+(r+1) < p^-$ e $0 < t < R_0$, existem constantes positivas ρ e ε tais que

$$I_\lambda(\rho u) < -\varepsilon \ \text{ para } \ u \in E_n, \|u\| = 1.$$

Portanto, considerando $S_{\rho,n} = \{u \in E_n : \|u\| = \rho\}$, temos que $S_{\rho,n} \subset I_\lambda^{-\varepsilon}$. Pela monotonicidade do gênero (ver Apêndice A.2),

$$\gamma(I_\lambda^{-\varepsilon}) \geq \gamma(S_{\rho,n}) = n$$

como queríamos demonstrar.

■

Lema 5.7. Seja $\Sigma = \{A \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega) - 0 : A \text{ é fechado}, A = -A\}$, $\Sigma_k = \{A \subset \Sigma : \gamma(A) \geq k\}$ onde γ é o gênero Krasnoselskii. Então

$$c_k = \inf_{A \in \Sigma_k} \sup_{u \in A} J_\lambda(u)$$

é um valor crítico negativo J_λ e mais ainda, se $c = c_k = \cdots = c_{k+r}$, então $\gamma(K_c) \geq r+1$ onde $K_c = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) : J_\lambda(u) = c, J_\lambda'(u) = 0\}$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que $-\infty < c_k < \infty$. Com efeito, pelo Lema 5.6 temos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma(I_\lambda^{-\varepsilon}) \geq k$. Uma vez que I_λ é contínuo e par, segue que $I_\lambda^{-\varepsilon} \in \sum_k$; então $c_k \leq \sup_{u \in I_\lambda^{-\varepsilon}} (u) \leq -\varepsilon(k) < 0$ para todo k. Além disso I_λ é limitado inferiormente, portanto $c_k > -\infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $c < 0$, I_k verifica a condição (PS), com nível de energia c, ou seja, K_c é compacto e claramente simétrico, logo $\gamma(K_c)$ está bem definido.

Vamos supor por contradição que $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$ e $\gamma(K_c) < r+1$. Pelas propriedades de gênero (ver Apêndice A.2), existe uma vizinhança K de K_c com $\gamma(K) = \gamma(K_c) < r+1$. Pelo Lema de Deformação (ver Apêndice A.1.2), segue que existe um homeomorfismo ímpar $\hat{\eta} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ satisfazendo $\hat{\eta}(I_\lambda^{c+\delta} \backslash K) \subset I_\lambda^{c-\delta}$, onde $0 < \delta < -c$ pois, I_λ verifica a condição (PS) em I_λ^0. Por definição,

$$c = c_{k+r} = \inf_{A \in \sum_{k+r}} \sup_{u \in A} I_\lambda(u).$$

Portanto, existe $A \in \sum_{k+r}$ tal que $\sup\limits_{u\in A} < c+\delta$, isto é, $A \subset I_\lambda^{c+\delta}$, e

$$\hat{\eta}(A\backslash K) \subset \hat{\eta}((I_\lambda^{c+\delta}\backslash K)) \subset I_\lambda^{c-\delta}. \tag{5.10}$$

Pelas propriedades de gênero

$$\gamma(\hat{\eta}(\overline{A\backslash K})) \geq \gamma(\overline{A\backslash K}) \geq \gamma(A) - \gamma(K) \geq (k+r) - r = k.$$

Assim, $\hat{\eta}(\overline{A\backslash K}) \in \sum_k$. Logo $\sup\limits_{u\in\hat{\eta}(\overline{A\backslash K})} I_\lambda \geq c_k = c$, que contradiz (5.12). Portanto, se $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$, então $\gamma(K_c) \geq r+1$. Observe que isso assegura que c_k é valor crítico pois $\gamma(K_{c_k}) \geq 1$, ou seja, K_{c_k} é não-vazio $\forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, se os valores c_k não forem todos distintos, teremos $\gamma(K_c) > 1$ e isso significa que K_c é um conjunto infinito. Assim, chegamos a uma quantidade infinita de pontos críticos de I_λ com energia negativa, para $0 < \lambda < \overline{\lambda} = \min\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$. Pelo Lema 5.5 esses pontos são pontos críticos de J_λ. Isso mostra a existência de uma quantidade infinita de soluções fraca para o problema (5.1).

$\blacksquare$

5.2.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 5.1

O resultado segue dos seguintes lemas:

Lema 5.8. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c. Então (u_j) é limitada.

Demonstração: Sendo (u_j) uma sequência de Palais-Smale com nível de energia c, temos $J_\lambda(u_j) \to c$ e $J'_\lambda(u_j) \to 0$, com

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ &\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u)v &= a\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx\right) + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta} \\ &\quad \times\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx\right) - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r}\int_\Omega f(x,u)v dx \\ &\quad -\int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv dx. \end{aligned}$$

Assim

$$C + \|u_j\| \geq J_\lambda - \frac{1}{\theta}J'_\lambda(u_j)u_j,$$

com $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \theta < q^-$.

Suponhamos que (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Então, passando à subsequência se necessário, temos $\|u_j\| > 1$ e usando a Proposição 1.3

$$\begin{aligned} C + \|u_j\| \quad &\geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\|u\|^{p^-} + \left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{b}{\theta(p^-)^\eta}\right)\|u\|^{(\eta+1)p^-} \\ &+\lambda\left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta}\frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1}\frac{1}{(\beta^-)^{r+1}}\right)\|u\|^{\beta^\pm(r+1)}, \end{aligned}$$

que é uma constradição, pois $(\eta+1)p^- > p^- > \beta^\pm(r+1) > 1$. Logo, (u_j) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 5.9. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência limitada, tal que

$$J_\lambda(u_j) \to c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_j) \to 0. \tag{5.11}$$

Suponhamos ainda $t_0 = \lim\limits_{j\to\infty} \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx$ e

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N + K\min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\},$$

onde $\overline{a} = \min\{t_1^{1/p^+}, t_1^{1/p^-}\}$, com $0 < t_1 < bt_0^\eta$ e K independente de λ. Então, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$ o conjunto de índices I, da Proposição 1.7 é vazio e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ para algum $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Pela proposição 1.7 e Lema 5.8, temos

$$|u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0$$

$$S_q\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I.$$

Se $I = \emptyset$ então $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Recordemos que a demonstração dessa convergência já foi feita na demonstração do Lema 3.2.

Mostraremos agora que o conjunto de índices $I = \emptyset$ se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N + K\min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}$ e (u_j) satisfaz (5.11). De fato, vamos supor que $I \neq \emptyset$. Seja $\phi \in C_0^\infty(I\!R^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e suporte na bola unitária do $I\!R^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\dfrac{x - x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x \in I\!R^N$ e $\varepsilon > 0$.

Como $J'_\lambda(u_j) \to 0$ em $\left(W_0^{1,p(x)}\Omega\right)'$ temos que

$$\lim J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon} u_j) = 0.$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} J'_\lambda(u_j)(\phi_{i,\varepsilon} u_j) &= \left[a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta\right]\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon} u_j)dx \\ &\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon} u_j)dx \\ &\quad -\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(\phi_{i,\varepsilon} u_j)dx, \end{aligned}$$

temos

$$0 = \lim\left(\left[a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j dx\right)\right) +$$

$$(a + bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon} d\mu - \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon} d\nu - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon} u)dx$$

quando $j \to \infty$.

Tem-se

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{j\to\infty}\left[a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta\right]\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon})u_j dx\right)\right) \to 0,$$

(ver no Lema 3.6).

Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(a + bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon} d\mu = (a + bt_0^\eta)\mu_i\phi(0), \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon} d\nu = \nu_i\phi(0)$$

e

$$\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon} u)dx \to 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Então, $(a + bt_0^\eta)\mu_i\phi(0) = \nu_i\phi(0)$. Como $S_q\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}$ temos,

$$(\overline{a}S_q)^N \leq \nu_i,$$

onde $\overline{a} = \min\{t_1^{1/p^+}, t_1^{1/p^-}\}$.

Além disso, considerando $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \theta < q^-$, tem-se

$$\begin{aligned} c &= \lim \Bigg(a \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right) + \frac{b}{(\eta+1)} \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \\ & -\frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega F(x,u_j) dx \right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_j|^{q(x)} dx - \frac{a}{\theta} \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \\ & -\frac{b}{\theta} \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right) \\ & +\frac{\lambda}{\theta} \left[\int_\Omega F(x,u_j) dx \right]^{r} \int_\Omega f(x,u_j) u_j dx + \frac{1}{\theta} \int_\Omega |u_j|^{q(x)} dx \Bigg). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} c &\geq \lim \Bigg(\frac{a}{p^+} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} \\ & -\frac{\lambda}{r+1} \left[\int_\Omega F(x,u_j) dx \right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u_j|^{q(x)} dx - \frac{a}{\theta} \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \\ & -\frac{b}{\theta(p^-)^\eta} \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} + \frac{\lambda}{\theta} \left[\int_\Omega F(x,u_j) dx \right]^{r} \int_\Omega f(x,u_j) u_j dx \\ & + \frac{1}{\theta} \int_\Omega |u_j|^{q(x)} dx \Bigg). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} c &\geq \lim \Bigg(\left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta} \right) \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx + \left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{b}{\theta(p^-)^\eta} \right) \\ & \times \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)} dx \right)^{\eta+1} - \lambda \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} \\ & + \frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r}) \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q(x)} \right) |u_j|^{q(x)} dx \Bigg). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} c &\geq \lim \Bigg(\lambda \left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \right) \left[\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \\ & \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q(x)} \right) |u_j|^{q(x)} dx \Bigg). \end{aligned}$$

Fazendo $\mathcal{A}_\delta = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} (B_\delta(x) \cap \Omega) = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}) < \delta\}$, obtemos

$$\begin{aligned} c &\geq \lambda \left(\frac{A_1}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \right) \left[\int_\Omega |u|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-} \right) \int_\Omega |u|^{q(x)} dx \\ & + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}} \right) \sum_{i \in I} \nu_i. \end{aligned}$$

Pelo fato de $\delta > 0$, ser arbitrário e q contínua

$$\begin{aligned} c &\geq \lambda \left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta} \frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1} \frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} \right) \left[\int_\Omega |u|^{\beta(x)} dx \right]^{r+1} + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-} \right) \int_\Omega |u|^{q(x)} dx \\ & + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}} \right) (\overline{a} S_q)^N. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} c &\geq \lambda\left(\frac{A_1^{r+1}}{\theta}\frac{1}{(\beta^+)^r} - \frac{A_2^{r+1}}{r+1}\frac{1}{(\beta^-)^{r+1}}\right)\left[||u|^{\beta(x)}|_{q(x)/\beta(x)}|\Omega|^{\frac{q^+-\beta^-}{q^-}}\right]^{r+1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right)\int_\Omega |u|^{q(x)}dx + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N. \end{aligned}$$

Se $||u|^{\beta(x)}|_{q(x)/\beta(x)} \geq 1$, temos

$$c \geq c_1 \left||u|^{\beta(x)}\right|_{q(x)/\beta(x)}^{(q/\beta)^-} - \lambda c_2 \left||u|^{\beta(x)}\right|_{q(x)/\beta(x)}^{r+1} + c_3,$$

onde $0 < c_2 = \left(\frac{A_2^{r+1}}{r+1}\frac{1}{(\beta^-)^{r+1}} - \frac{A_1^{r+1}}{\theta}\frac{1}{(\beta^+)^r}\right)|\Omega|^{\frac{(q^+-\beta^-)(r+1)}{q^-}}$ e $c_3 = \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N$. Seja $g_1(t) = c_1 t^{(q/\beta)^-} - \lambda c_2 t^{r+1}$. A referida função atinge o mínimo absoluto para $t > 0$, no ponto

$$\bar{t} = \left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^- c_1}\right)^{\dfrac{1}{(q/\beta)^- - (r+1)}}.$$

Note que,

$g_1(\bar{t}) = c_1\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^- c_1}\right)^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}} - \lambda c_2 \left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^- c_1}\right)^{\dfrac{r+1}{(q/\beta)^- - (r+1)}}$, que implica

$$\begin{aligned} g_1(\bar{t}) &= c_1\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}} \\ &\quad - \frac{(r+1)c_1(q/\beta)^-}{(r+1)c_1(q/\beta)^-}\lambda c_2\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{r+1}{(q/\beta)^- - (r+1)}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} g_1(\bar{t}) &= c_1\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}} \\ &\quad - \frac{c_1(q/\beta)^-}{r+1}\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{r+1}{(q/\beta)^- - (r+1)}+1}. \end{aligned}$$

Então,

$g_1(\bar{t}) = c_1\left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{c_1(q/\beta)^-}\right)^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}\left(1 - \frac{(q/\beta)^-}{r+1}\right)$. Usando o fato que $\beta^+(r+1) < q^-$ podemos escrever

$g_1(\bar{t}) = \lambda^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}} K$, onde K é uma constante negativa que depende somente de

A_1, A_2, r, q, β e Ω.

Se $||u|^{\beta(x)}|_{q(x)/\beta(x)} < 1$, temos

$$c \geq c_1 \left||u|^{\beta(x)}\right|_{q(x)/\beta(x)}^{(q/\beta)^+} - \lambda c_2 \left||u|^{\beta(x)}\right|_{q(x)/\beta(x)}^{r+1} + c_3,$$

onde $0 < c_2 = \left(\dfrac{A_2^{r+1}}{r+1}\dfrac{1}{(\beta^-)^{r+1}} - \dfrac{A_1^{r+1}}{\theta}\dfrac{1}{(\beta^+)^r}\right)|\Omega|^{\frac{(q^+-\beta^-)(r+1)}{q^-}}$ e $c_3 = \left(\dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N$. Seja $g_2(t) = c_1 t^{(q/\beta)^+} - \lambda c_2 t^{r+1}$. Essa função atinge o mínimo absoluto para $t > 0$, no ponto

$$\underline{t} = \left(\frac{(r+1)\lambda c_2}{(q/\beta)^+ c_1}\right)^{\dfrac{1}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}.$$

Assim, temos

$g_2(\underline{t}) = \lambda^{\dfrac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}} K$, onde K é uma constante negativa que depende somente de A_1, A_2, r, q, β e Ω. Então

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N + K \min\{\lambda^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\dfrac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}.$$

Portanto, $I = \emptyset$ se

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N + K \min\{\lambda^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\dfrac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}.$$

■

Lema 5.10. Seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N + K \min\{\lambda^{\dfrac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\dfrac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\}$, então existe uma subsequência de (u_j), designada ainda por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como

$$J'_\lambda(u_j) \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned}
J'_\lambda(u_j)(u_j-u) &= a\left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx\right)+\\
&\quad b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta \left(\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j-u)dx\right)\\
&\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u)dx\\
&\quad -\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)dx \to 0.
\end{aligned}$$

Note que existem constantes não-negativas c_1, c_2, c_3 e c_4 tal que

$$c_1 \leq \left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u_j|^{p(x)}dx\right)^\eta \leq c_2$$

e

$$c_3 \leq \left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \leq c_4.$$

Pelo Lema 5.9, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\left|\int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0.$$

Considerando,

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j-u)dx,$$

obtemos $L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) \to 0$. Temos ainda $L_{p(x)}(u)(u_j-u) \to 0$. Então

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j-u) \to 0.$$

Da Proposição 1.1, $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 5.11. O funcional energia J_λ, associado ao problema (5.1) não é limitado inferiormente.

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1}\\
&\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx.
\end{aligned}$$

Considerando $0 < w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, para $t > 1$,

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(tw) \quad \leq \quad & \frac{a}{p^-}t^{p^+}\left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)}dx\right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}t^{(\eta+1)p^+}\left(\int_\Omega |\nabla w|^{p(x)}dx\right) \\
& + \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1} - \frac{1}{q^+}t^{q^-}\int_\Omega |w|^{q(x)}dx.
\end{aligned}
$$

Então,

$$\lim_{t\to\infty} J_\lambda(tw) = -\infty,$$

e o lema está demonstrado.

∎

No que segue, usaremos o argumento de truncamento do tipo usando em Azorero e Alonso [5], no funcional J_λ, para obter uma especial limitação inferior para o funcional.

Supondo $\|u\| \leq 1$, temos

$$
\begin{aligned}
J_\lambda(u) \quad & \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{(\eta+1)p^+} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}}\|u\|^{\beta^-(r+1)} \\
& \quad - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}\|u\|^{q^-}.
\end{aligned}
$$

Seja

$$
\begin{aligned}
J_{1,\lambda}(\|u\|) \quad = \quad & \frac{a}{p^+}\|u\|^{(\eta+1)p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{(\eta+1)p^+} \\
& -\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}}\|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}\|u\|^{q^-}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
J_{1,\lambda}(t) \quad = \quad & \left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)t^{(\eta+1)p^+} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}}t^{\beta^-(r+1)} \\
& -\frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}t^{q^-}.
\end{aligned}
$$

Note que $J_{1,\lambda}(t) < 0$ para $t \approx 0$, pois $(\eta+1)p^+ < q^-$.

Além disso,

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)t^{(\eta+1)p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}t^{q^-} = \\
& \qquad t^{(\eta+1)p^+}\left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}t^{q^- - (\eta+1)p^+}\right).
\end{aligned}
$$

Como $q^- > (\eta+1)p^+$, consideremos R_1, suficientemente pequeno, tal que

$$\left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)R_1^{(\eta+1)p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}R_1^{q^-} > 0.$$

Consideremos ainda,

$$\lambda_1 = \frac{(r+1)}{2}\left(\frac{\beta^-}{A_2}\right)^{r+1}\frac{S_\beta^{\beta^-(r+1)}}{R_1^{\beta^-(r+1)}}\left(\left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)R_1^{(\eta+1)p^+} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}R_1^{q^-}\right)$$

e $R_0 = \max\{0 < t \leq R_1; J_{1,\lambda_1} \leq 0\}$. Assim, existem $0 < \lambda_1, R_0$ e R_1 com $R_0 < R_1$, tais que

$$J_\lambda(u) \geq J_{1,\lambda}(\|u\|) \geq J_{1,\lambda_1}(\|u\|) = \left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)\|u\|^{(\eta+1)p^+} - \frac{\lambda_1}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^-(r+1)}}\|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}\|u\|^{q^-}.$$

para toda $\|u\| < R_1$ e $0 < \lambda < \lambda_1$, com $J_{1,\lambda_1}(R_1) > 0$ e $J_{1,\lambda_1}(R_0) = 0$.

Desta forma, podemos escolher a função $\tau_1 : [0,\infty) \to [0,1]$, $\tau_1 \in C^\infty([0,\infty))$, não-crescente, tal que

$$\tau_1(x) = 1, \quad \text{se} \quad x \leq R_0$$

e

$$\tau_1(x) = 0, \quad \text{se} \quad x \geq R_1.$$

Se $\|u\| > 1$, obtemos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^-} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{(\eta+1)p^-} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}\|u\|^{\beta^\pm(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}\|u\|^{q^\pm}.$$

Seja

$$J_{2,\lambda}(\|u\|) = \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^-} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{p^-} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}\|u\|^{\beta^+(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}\|u\|^{q^+}.$$

Assim,

$$J_{2,\lambda}(t) = \left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)t^{p^-} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}t^{\beta^+(r+1)} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}t^{q^+}.$$

Note que $J_{2,\lambda}(t) < 0$ para $t \approx 0$, pois $\beta^+(r+1) < p^-$.

Além disso,

$$\left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)t^{p^-} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}t^{q^+} = t^{p^-}\left(\left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right) - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}t^{q^+-p^-}\right).$$

Como $q^+ > p^-$, consideremos R_1, suficientemente pequeno, tal que

$$\left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)R_1^{p^-} - \frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}R_1^{q^+} > 0.$$

Consideremos ainda,

$$\lambda_2 = \frac{(r+1)}{2}\left(\frac{\beta^-}{A_2}\right)^{r+1}\frac{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}{R_1^{\beta^+(r+1)}}\left(\left(\frac{a}{p^+}+\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)R_1^{p-}-\frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^-}}R_1^{q^+}\right)$$

e $R_0=\max\{0<t\leq R_1; J_{2,\lambda_2}\leq 0\}$. Assim, existem $0<\lambda_2, R_0$ e R_1 com $R_0<R_1$, tais que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u)\geq J_{2,\lambda}(\|u\|)\geq J_{2,\lambda_2}(\|u\|) &= \left(\frac{a}{p^+}+\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)\|u\|^{p^-} \\ &-\frac{\lambda_2}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\frac{1}{S_\beta^{\beta^\pm(r+1)}}\|u\|^{\beta^+(r+1)}-\frac{1}{q^-}\frac{1}{S_q^{q^\pm}}\|u\|^{q^+}. \end{aligned}$$

para todo $\|u\|<R_1$ e $0<\lambda<\lambda_2$, com $J_{2,\lambda_2}(R_1)>0$ e $J_{2,\lambda_2}(R_0)=0$.

Desta forma, podemos escolher uma função não-crescente $\tau_2:[0,\infty)\to[0,1]$, $\tau_2\in C^\infty([0,\infty))$ tal que

$$\tau_2(x)=1,\quad \text{se}\quad x\leq R_0$$

e

$$\tau_2(x)=0,\quad \text{se}\quad x\geq R_1.$$

Finalmente definimos

$$\tau(t)=\begin{cases}\tau_1(t) & , \quad t\leq 1\\ \tau_2(t) & , \quad t\geq 1\end{cases}.$$

Agora considere o funcional truncado, com $0<\lambda<\lambda'=\min\{\lambda_1,\lambda_2\}$,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= a\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)+\frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ &-\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}-\int_\Omega\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\tau(\|u\|)dx, \end{aligned}$$

Note que se $\|u\|\leq R_0$ então $J_\lambda(u)=I_\lambda(u)$ e se $\|u\|\geq R_1$, então

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= a\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)+\frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\ &-\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1}. \end{aligned}$$

Podemos ver que I_λ é coercivo , e portanto I_λ é limitado inferiormente.

Lema 5.12. *I_λ é $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega),\mathbb{R})$. Se $I_\lambda(u)\leq 0$ então $\|u\|<R_0$ e $I_\lambda(v)=J_\lambda(v)$ para todo v em uma vizinhança pequena de u. Mais ainda, I_λ satisfaz a condição de Palais-Smale local para $c\leq 0$.*

Demonstração: É imediato que $I_\lambda\in C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega),\mathbb{R})$. Se $I_\lambda(u)\leq 0$ então $\|u\|<R_0$ por construção do funcional truncado. Agora, para todo $u\in B_{R_0}(0)$ existe $\varepsilon>0$ tal que

$B_\varepsilon(u) \subset B_{R_0}(0)$ e $I_\lambda(v) = J_\lambda(v)$ para todo $v \in B_\varepsilon(u)$, pois $\|v\| < R_0$. Para demonstrar a condição de Palais-Smale local para $c \leq 0$, observe que toda sequência de Palais-Smale para I_λ com $c \leq 0$ é necessariamente limitada pois o funcional é coercivo. Pelo Lema 5.9 existe λ_0 tal que para $0 < \lambda < \lambda_0$

$$c \leq 0 < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)(\overline{a}S_q)^N + K \min\{\lambda^{\frac{(q/\beta)^-}{(q/\beta)^- - (r+1)}}, \lambda^{\frac{(q/\beta)^+}{(q/\beta)^+ - (r+1)}}\},$$

e portanto existe uma subsequência que converge forte em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, pelo Lema 5.10.

■

Lema 5.13. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\gamma(I_\lambda^{-\varepsilon}) \geq n,$$

onde $I_\lambda^{-\varepsilon} = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega); I_\lambda^{-\varepsilon}(u) \leq -\varepsilon\}$ e γ é o gênero de Krasnoselskii.

Demonstração: Seja $E_n \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ um subespaço n-dimensional. Assim para $u \in E_n$ tal que $\|u\| = 1$ e $0 < t < R_0$, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(tu) &= a\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla(tu)|^{p(x)}dx + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla(tu)|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\
&\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,tu)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|tu|^{q(x)}\tau(\|u\|)dx \\
I_\lambda(tu) &\leq \frac{at^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx + \frac{bt^{(\eta+1)p^-}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx\right)^{\eta+1} \\
&\quad -\frac{\lambda A_1^{r+1}t^{\beta^+(r+1)}}{(r+1)(\beta^+)^{r+1}}\left(\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1} - \frac{t^{q^+}}{q^+}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \\
I_\lambda(tu) &\leq \frac{at^{p^-}}{p^-} + \frac{bt^{(\eta+1)p^-}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} - \frac{\lambda A_1^{r+1}t^{\beta^+(r+1)}}{(r+1)(\beta^+)^{r+1}}a_n - \frac{t^{q^+}}{q^+}b_n,
\end{aligned}$$

onde

$$a_n = \inf\left\{\left(\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}; u \in E_n, \|u\| = 1\right\},$$

e

$$b_n = \inf\left\{\int_\Omega |u|^{q(x)}dx; u \in E_n, \|u\| = 1\right\}.$$

Então,

$$I_\lambda(tu) \leq \frac{at^{p^-}}{p^-} + \frac{bt^{(\eta+1)p^-}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} - \frac{\lambda A_1^{r+1}t^{\beta^+(r+1)}}{(r+1)(\beta^+)^{r+1}}a_n.$$

Observe que $a_n > 0$ e $b_n > 0$, pois E_n tem dimensão finita e as normas em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $L^{\beta(x)}(\Omega)$ são equivalentes em E_n. Como $\beta^+(r+1) < p^-$ e $0 < t < R_0$ existem constantes positivas ρ e ε tais que

$$I_\lambda(\rho u) < -\varepsilon \quad \text{para} \quad u \in E_n, \|u\| = 1.$$

Portanto, sendo $S_{\rho,n} = \{u \in E_n : \|u\| = \rho\}$, temos que $S_{\rho,n} \subset I_\lambda^{-\varepsilon}$. Assim, pela monotonicidade do gênero (ver Apêndice A.2)

$$\gamma(I_\lambda^{-\varepsilon}) \geq \gamma(S_{\rho,n}) = n,$$

como queríamos demonstrar.

■

Lema 5.14. Seja $\Sigma = \{A \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega) - 0 : A \text{ fechado}, A = -A\}$, $\Sigma_k = \{A \subset \Sigma : \gamma(A) \geq k\}$ onde γ é o gênero de Krasnoselskii. Então

$$c_k = \inf_{A \in \Sigma_k} \sup_{u \in A} J_\lambda(u),$$

é um valor crítico negativo de J_λ e mais, se $c = c_k = \cdots = c_{k+r}$, então $\gamma(K_c) \geq r+1$ onde $K_c = \{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) : J_\lambda(u) = c, J'_\lambda(u) = 0\}$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que $-\infty < c_k < \infty$. Com efeito, pelo Lema 5.13 temos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma(I_\lambda^{-\varepsilon}) \geq k$. Uma vez que I_λ é contínuo e par, segue que $I_\lambda^{-\varepsilon} \in \sum_k$; então $c_k \leq \sup_{u \in I_\lambda^{-\varepsilon}} (u) \leq -\varepsilon(k) < 0$ para todo k. Além disso I_λ é limitado inferiormente, portanto $c_k > -\infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $c < 0$, I_k verifica a condição (PS), com nível de energia c, ou seja, K_c é compacto e claramente simétrico, logo $\gamma(K_c)$ está bem definido.

Vamos supor com contradição que $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$ e $\gamma(K_c) < r+1$. Pelas propriedades de gênero (ver Apêndice A.2), existe uma vizinhança K de K_c com $\gamma(K) = \gamma(K_c) < r+1$. Pelo Lema de Deformação (ver Apêndice A.1.2), segue que existe um homeomorfismo ímpar $\hat{\eta} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ satisfazendo $\hat{\eta}(I_\lambda^{c+\delta} \backslash K) \subset I_\lambda^{c-\delta}$, onde $0 < \delta < -c$ pois, I_λ verifica a condição (PS) em I_λ^0. Por definição,

$$c = c_{k+r} = \inf_{A \in \sum_{k+r}} \sup_{u \in A} I_\lambda(u).$$

Portanto, existe $A \in \sum_{k+r}$ tal que $\sup_{u \in A} < c + \delta$, isto é, $A \subset I_\lambda^{c+\delta}$, e

$$\hat{\eta}(A \backslash K) \subset \hat{\eta}((I_\lambda^{c+\delta} \backslash K)) \subset I_\lambda^{c-\delta}. \tag{5.12}$$

Pelas propriedades de gênero

$$\gamma(\hat{\eta}(\overline{A \backslash K})) \geq \gamma(\overline{A \backslash K}) \geq \gamma(A) - \gamma(K) \geq (k+r) - r = k.$$

Assim, $\hat{\eta}(\overline{A \backslash K}) \in \sum_k$. Logo $\sup\limits_{u \in \hat{\eta}(\overline{A \backslash K})} I_\lambda \geq c_k = c$, que contradiz (5.12). Portanto, se $c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}$, então $\gamma(K_c) \geq r+1$. Observe que isso assegura que c_k é valor crítico pois $\gamma(K_{c_k}) \geq 1$, ou seja, K_{c_k} é não-vazio $\forall k \in \mathbb{N}$. Além disso, se os valores c_k não forem todos distintos, teremos $\gamma(K_c) > 1$ e isso significa que K_c é um conjunto infinito. Assim, chegamos a uma quantidade infinita de pontos críticos de I_λ com energia negativa, para $0 < \lambda < \widetilde{\lambda} = \min\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$. Pelo Lema 5.12 esses pontos são pontos críticos de J_λ. Isso mostra a existência de uma quantidade infinita de soluções fraca para o problema (5.1).

■

Capítulo 6

Existência de soluções para um problema de Neumann

6.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos questões de existência de soluções da seguinte equação, com crescimento crítico e com condições de fronteira de Neumann

$$\left\{\begin{array}{rcl} M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)})dx\right)(-\Delta_{p(x)}u+|u|^{p(x)-2}u) & & \\ = & \lambda f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r & \text{em } \Omega \\ M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)})dx\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & & \\ = & \gamma g(x,u)\left[\displaystyle\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^\kappa & \text{em } \partial\Omega, \end{array}\right. , \tag{6.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $p \in C(\overline{\Omega})$, $p(x) < N$, $2 \leq N$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$, $g : \partial\Omega \times I\!R \to I\!R$ e $M : I\!R^+ \to I\!R^+$ são funções que satisfazem determinadas condições, $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,\xi)d\xi$, $G(x,u) = \displaystyle\int_0^u g(x,y)dy$, ν é a normal unitária exterior, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada normal exterior e $\lambda, r, \gamma, \kappa \geq 0$ são parâmetros reais.

Estudaremos o problema com os seguintes expoentes críticos de Sobolev

$$p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)} \quad \text{e} \quad p_*(x) = \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)}, \tag{6.2}$$

onde o expoente p_* é o expoente crítico no sentido do traço.

O funcional energia associado ao problema (6.1) é dado por

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) &= \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)})dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} \\ &\quad -\frac{\gamma}{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^{\kappa+1}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

para todo $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, onde $\widehat{M}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau M(s)dS$ e dS designa a medida na fronteira.

Pelas condições aqui consideradas, o funcional abaixo é diferenciável no sentido de Fréchet e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u)v &= M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right)\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv\right)dx \\ &\quad -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u)vdx - \gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u)vdS, \end{aligned} \tag{6.4}$$

para todo $u, v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Então, $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (6.1) se, e somente se, u é um ponto crítico de $J_{\lambda,\gamma}$.

6.2 Demonstração do Teorema 6.1

Teorema 6.1.

(i) Suponhamos $\kappa = 0$, $g(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \partial\Omega \to [1,\infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \partial\Omega : q(x) = p_*(x)\} \neq \emptyset$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$, com $f(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \dfrac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$ e $p^+ < \beta^-(r+1) < q^-$. Então existe $\lambda_1 > 0$, tal que para todo $\lambda > \lambda_1$ e para todo $\gamma > 0$ existe uma solução não-trivial para (6.1).

(ii) Suponhamos $\kappa = 0$, $g(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \partial\Omega \to [1,\infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \partial\Omega : q(x) = p_*(x)\} \neq \emptyset$ e $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, com $a \geq 0, b > 0, \tau \geq 0$ e $\eta \geq 1$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\overline{\Omega})$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$, com $f(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda, $(\eta+1)p^+ < \beta^-(r+1) < q^-$ e $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \dfrac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}$. Então existe $\lambda_2 > 0$, tal que para todo $\lambda > \lambda_2$ e para todo $\gamma > 0$ existe uma solução não-trivial para (6.1).

(iii) Suponhamos $r = 0$, $f(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \Omega \to [1,\infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \Omega : q(x) = p^*(x)\} \neq \emptyset$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\partial\Omega)$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq g(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \partial\Omega$, com $g(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda que existam $0 < m_0$ e m_1 tais que $m_0 \leq M(\tau) \leq m_1$, com $\dfrac{m_1 p^+}{m_0} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{\kappa+1} \dfrac{(\beta^-)^{\kappa+1}(\kappa+1)}{(\beta^+)^\kappa}$ e $p^+ < \beta^-(\kappa+1) < q^-$. Então existe $\gamma_1 > 0$ tal que para todo $\gamma > \gamma_1$ e para todo $\lambda > 0$ existe uma solução não-trivial para (6.1).

(iv) Suponhamos $r = 0$, $f(x,u) = |u|^{q(x)-2}u$, $q : \Omega \to [1,\infty)$ e $\mathcal{A} := \{x \in \Omega : q(x) = p^*(x)\} \neq \emptyset$ e $M(\tau) = a + b\tau^\eta$, com $a \geq 0, b > 0, \tau \geq 0, \eta \geq 1$. Além disso, consideremos a função $\beta(x) \in C_+(\partial\Omega)$, constantes positivas A_1, A_2 tais que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq g(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$ para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \partial\Omega$, com $g(x,t) = 0$ para todo $t < 0$. Suponhamos ainda que, $(\eta+1)p^+ < \beta^-(\kappa+1) < q^-$ e $\dfrac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^\eta} < \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^{\kappa+1} \dfrac{(\beta^-)^{\kappa+1}(\kappa+1)}{(\beta^+)^\kappa}$. Então existe $\gamma_2 > 0$ tal que para todo $\gamma > \gamma_2$ e para todo $\lambda > 0$ existe uma solução não-trivial para (6.1).

6.2.1 Demonstração do item (i) do Teorema 6.1

O resultado segue dos seguintes lemas:

Lema 6.1. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, então (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como (u_j) é uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, temos $J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c$ e $J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0$. Considerando θ tal que

$$\frac{m_1 p^+}{m_0} < \theta < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}, \tag{6.5}$$

temos

$$C + \|u_j\| \geq \left(J_{\lambda,\gamma}(u_j) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
C + \|u_j\| \;&\geq\; \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^{r+1} \\
&\quad -\gamma\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dS - \frac{1}{\theta}M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) \\
&\quad \times\left(\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j u_j)dx\right) \\
&\quad +\frac{\lambda}{\theta}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)u_j + \frac{\gamma}{\theta}\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)-2}u_j u_j dS, \\
C + \|u_j\| \;&\geq\; m_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^{r+1} \\
&\quad -\gamma\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dS - \frac{m_1}{\theta}\left(\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right) \\
&\quad +\frac{\lambda}{\theta}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)u_j + \frac{\gamma}{\theta}\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)-2}u_j u_j dS,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C+\|u_j\| \ \geq\ & m_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)}\right)dx\right)-\frac{\lambda A_2^{r+1}}{(r+1)(\beta^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u_j|^\beta dx\right]^{r+1}\\
&-\gamma\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dS-\frac{m_1}{\theta}\left(\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)\\
&+\frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta(\beta^+)^r}\left[\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1}+\frac{\gamma}{\theta}\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)-2}u_ju_jdS.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C+\|u_j\| \ \geq\ & \left(\frac{m_0}{p^+}-\frac{m_1}{\theta}\right)\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)}\right)dx\right)+\left(\frac{\gamma}{\theta}-\frac{\gamma}{q^-}\right)\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}dS\\
&+\left(\frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta(\beta^+)^r}-\frac{\lambda A_2^{r+1}}{(r+1)(\beta^-)^{r+1}}\right)\left[\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1}.
\end{aligned}$$

Suponhamos que (u_j) é ilimitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, passando para subsequência se necessário, considerando $\|u_j\|>1$ pela Proposição 1.4

$$C+\|u_j\|\geq\left(\frac{m_0}{p^+}-\frac{m_1}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-},$$

que é uma contradição, pois $p^->1$. Logo (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.2. Seja $(u_j)\subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c<\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q^-}\right)\inf_{i\in I}\left(\gamma^{1-1/p(x_i)}m_0^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}$, então o conjunto de índices I, da Proposição 1.8 é vazio e $u_j\to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$.

Demonstração: Seja $u_j\rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Pela Proposição 1.8 e Lema 6.1, temos

$$|u_j|_{\partial\Omega}|^{q(x)}\rightharpoonup\nu=|u|^{q(x)}+\sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i},\quad \text{fraco} -^*\ \text{ no sentido das medidas.}$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)}\rightharpoonup\mu\geq|\nabla u|^{p(x)}+\sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i},\quad \text{fraco} -^*\ \text{ no sentido das medidas.}$$

$$\overline{T}_{x_i}\nu_i^{\frac{1}{q(x_i)}}\leq\mu_i^{\frac{1}{p(x_i)}},\ \forall i\in I.$$

Se $I=\emptyset$ então $u_j\to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$. Para demonstrar essa afirmação, vamos considerar a extensão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions para o aberto $\mathbb{R}^N$. Considerando as funções $u\in W^{1,p(x)}(\Omega)$ como funções em $W^{1,p(x)}(\mathbb{R}^N)$, com $u=0$ em $\mathbb{R}^N\setminus\partial\Omega$. Identicando as funções $|u_j|^{q(x)}$ e $|u|^{q(x)}$ como funções de $L^1(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}\phi dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^{q(x)}\phi dx\to\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q(x)}\phi dx=\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}\phi dx,$$

para toda $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Considerando $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi(x) = 1$ em $\partial\Omega$ com o suporte compacto contendo $\partial\Omega$, a convergência segue. Agora vamos supor que $I \neq \emptyset$. Seja x_i um ponto singular das medidas μ e ν. Seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e suporte na bola unitária do $\mathbb{R}^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\dfrac{x - x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon > 0$.

Como $J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0$ em $\left(W^{1,p(x)}\Omega\right)'$ obtemos que

$$\lim J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) = 0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) \quad = \quad & M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right) \\ & \times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j\right)dx \\ & -\gamma\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dS - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \to 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) \quad = \quad & M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right) \\ & \times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j + |\nabla u_j|^{p(x)}\nabla\phi_{i,\varepsilon} + |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}\right)dx \\ & -\gamma\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}\phi_{i,\varepsilon}dS - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \to 0. \end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 = \lim \Bigg(& M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \\ & M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)\int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx\Bigg) + \\ & M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu - \gamma\int_{\partial\Omega}\phi_{i,\varepsilon}d\nu - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx, \end{aligned}$$

onde $t_0 = \lim\limits_{j\to\infty}\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)$.

Sabemos que,

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M(t_0)\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0$, (ver no Lema 3.2).

Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = M(t_0)\mu\phi(0), \quad \gamma\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial\Omega}\phi_{i,\varepsilon}d\nu = \gamma\nu\phi(0)$$

e

$\lambda\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r\displaystyle\int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0, \quad M(t_0)\displaystyle\int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Assim,

$M(t_0)\mu_i\phi(0) = \gamma\nu_i\phi(0)$ implica que $\gamma^{-1}m_0\mu_i \leq \nu_i$. Como $\overline{T}_{x_i}\nu_i^{1/p_*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}$ obtemos $\gamma^{-1}m_0\left(\overline{T}_{x_i}\right)^{p(x_i)}\nu_i^{p(x_i)/p_*(x_i)} \leq \gamma^{-1}m_0\mu_i \leq \nu_i$. Assim, $\gamma^{-1}m_0\left(\overline{T}_{x_i}\right)^{p(x_i)} \leq \nu_i^{1-p(x_i)/p_*(x_i)} = \nu_i^{(p_*(x_i)-p(x_i))/p_*(x_i)}$ e $\gamma^{-1/p(x_i)}m_0^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i} \leq \nu_i^{(p_*(x_i)-p(x_i))/p(x_i)p_*(x_i)}$. Logo,

$$\nu_i \geq \left(\gamma^{-1/p(x_i)}m_0^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

Considerando θ satisfazendo (6.5) e o fato que $c = \lim\left(J_\lambda(u_j) - \dfrac{1}{\theta}J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right)$, temos

$$c \geq \lim\left(\frac{\gamma}{\theta} - \frac{\gamma}{q^-}\right)\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}dS.$$

Daí,

$$c \geq \left(\frac{\gamma}{\theta} - \frac{\gamma}{q^-}\right)\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}dS + \int_{\partial\Omega}\sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}\right) \geq \left(\frac{\gamma}{\theta} - \frac{\gamma}{q^-}\right)\nu_i,$$

que implica

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right)\inf_{i\in I}\left(\gamma^{1-1/p(x_i)}m_0^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

Portanto, o conjunto de índices I é vazio se,

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right)\inf_{i\in I}\left(\gamma^{1-1/p(x_i)}m_0^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

■

Lema 6.3. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{q^-}\right)\inf_{i\in I}\left(\gamma^{1-1/p(x_i)}m_0^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}$, existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como

$$J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(u_j - u) \;=\; & M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right) \\ & \times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j - u) + |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j - u)\right)dx \\ & -\gamma\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j - u)dS \\ & -\lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u_j)(u_j - u)dx \to 0. \end{aligned}$$

Observe que

$$m_0 \leq M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right) \leq m_1.$$

Note ainda que existem constantes não-negativas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \leq \left[\int_\Omega F(x, u_j)dx\right]^r \leq c_2.$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j - u)dx\right| \leq \int_\Omega |u_j|^{p(x)-1}|u_j - u|dx \leq C_1||u|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|u_j - u|_{p(x)},$$

e

$$\left|\int_\Omega f(x, u_j)(u_j - u)dx\right| \leq A_2\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)-1}|u_j - u|dx \leq C_2||u|^{\beta(x)-1}|_{\beta(x)/\beta(x)-1}|u_j - u|_{\beta(x)},$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Desta forma,

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j - u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_\Omega f(x, u_j)(u_j - u)dx\right| \to 0.$$

Pelo Lema 6.2, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$ e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left|\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j - u)dS\right| \to 0.$$

Fazendo

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j - u)dx,$$

tem-se $L_{p(x)}(u_j)(u_j - u) \to 0$. Temos também que $L_{p(x)}(u)(u_j - u) \to 0$. Assim,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j - u) \to 0.$$

Do Teorema 1.1, $u_j \to u$ in $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.4.

($\underline{i}$) Para todo $\lambda > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$, tais que $J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \alpha$, $\|u\| = \rho$.

($\underline{ii}$) Existe um elemento $w_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w_0\| > \rho$ e $J_{\lambda,\gamma}(w_0) < \alpha$.

Demonstração: ($\underline{i}$) Temos que,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) &\geq m_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{A_2}{\beta(x)}u^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} \\ &\quad -\frac{\gamma}{q^-}\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}dS. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) &\geq \frac{m_0}{p^+}\int_\Omega(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\left[\int_\Omega u^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} \\ &\quad -\frac{\gamma}{q^-}\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}dS. \end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$ é suficientemente pequena, da Proposição 1.4 obtemos $\int_\Omega(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx \geq \|u\|^{p^+}$ e das imersões $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ (continuas), temos $\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx \leq M_1^{\beta^-}\|u\|^{\beta^-}$ e $\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}dx \leq M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}$.

Desta forma,

$$J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{\gamma}{q^-}M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}.$$

Usando o fato que $p^+ < \beta^-(r+1) < q^-$,

$$J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{\gamma}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\|u\|^{\beta^-(r+1)},$$

que pode ser escrito como

$$J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \left(\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)} + \frac{\gamma}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\right)\|u\|^{\beta^-(r+1)}.$$

Considerando $\rho = \|u\|$,

$$J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \rho^{p^+}\left[\left(\frac{m_0}{p^+}\right) - \left(\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)} + \frac{\gamma}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\right)\rho^{\beta^-(r+1)-p^+}\right],$$

o resultado segue.

($\underline{ii}$) Seja $0 < w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t > 1$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) &\leq \frac{m_1}{p^-}t^{p^+}\left(\int_\Omega(|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right) - \frac{\gamma}{q^+}t^{q^-}\int_{\partial\Omega}|w|^{q(x)}dS \\ &\quad +\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} t^{\beta^-(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t\to\infty} J_{\lambda,\gamma}(tw) = -\infty.$$

Isso conclui a demonstração do lema.

■

Para concluir a demonstração do item (i), pelo Lema 6.4 podemos usar o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.3), que garante a existência de uma sequência $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c \ \text{ e } \ J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0 \ \text{ em } \ (W^{1,p(x)}(\Omega))',$$

onde o candidato a valor crítico é dado por

$$c = \inf_{h\in\mathcal{C}} \sup_{t\in[0,1]} J_{\lambda,\gamma}(h(t))$$

e $\mathcal{C} = \{h : [0,1] \to W^{1,p(x)}(\Omega) : h$ contínua e $h(0) = 0, h(1) = w_0\}$.

Para $0 < t < 1$ e fixando $w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \ &\leq \ \frac{m_1}{p^-}t^{p^-}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right) - \frac{\gamma}{q^+}t^{q^+}\int_{\partial\Omega}|w|^{q(x)}dS \\ &\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \ &\leq \ \frac{m_1}{p^-}t^{p^-}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right) \\ &\quad -\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Fazendo $g(t) = \dfrac{m_1\tilde{a}}{p^-}t^{p^-} - \dfrac{\lambda}{r+1}\left(\dfrac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1}\tilde{b}t^{\beta^+(r+1)}$,

onde $\tilde{a} = \int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx$ e $\tilde{b} = \int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx$, obtemos $\sup J_\lambda(tw) \leq g(t)$. Observe que $g(t)$ tem um ponto crítico de máximo

$$t_\lambda = \left[\frac{m_1\widetilde{a}}{\lambda\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1}\widetilde{b}\beta^+}\right]^{\frac{1}{\beta^+(r+1)-p^-}},$$

e $t_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Pela continuidade de $J_{\lambda,\gamma}$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw)\right) = 0.$$

Então existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\forall \lambda \geq \lambda_1$

$$\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw) < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right)\inf_{i\in I}\left(\gamma^{1-1/p(x_i)} m_0^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

Isso completa a demonstração do item (i).

■

6.2.2 Demonstração do item (ii) do Teorema 6.1

O resultado segue dos seguintes lemas:

Lema 6.5. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, então (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como (u_j) é uma sequência de Palais-Smale com nível de energia c, temos $J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c$ e $J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0$. Considerando θ tal que

$$\frac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^{\eta}} < \theta < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{r+1} \frac{(\beta^-)^{r+1}(r+1)}{(\beta^+)^r}, \tag{6.6}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
&C + \|u_j\| \geq \left(J_{\lambda,\gamma}(u_j) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right) \geq \\
&a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1} \\
&-\frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^{r+1} - \gamma\int_{\partial\Omega}\frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dS - \frac{a}{\theta}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla u_j dx \\
&-\frac{a}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j u_j dx + \frac{\lambda}{\theta}\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x,u_j)u_j dx + \frac{\gamma}{\theta}\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)-2}u_j u_j dS \\
&-\frac{b}{\theta}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta}\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j u_j\right)dx\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&C + \|u_j\| \geq \\
&\frac{a}{p^+}\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1} \\
&-\frac{\lambda A_2^{r+1}}{(r+1)(\beta^-)^{r+1}}\left[\int_\Omega |u_j|^{\beta}dx\right]^{r+1} - \frac{\gamma}{q^-}\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}dS - \frac{a}{\theta}\int_\Omega|\nabla u_j|^{p(x)}dx \\
&-\frac{a}{\theta}\int_\Omega|u_j|^{p(x)}dx + \frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta(\beta^+)^r}\left[\int_\Omega|u|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} + \frac{\gamma}{\theta}\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}dS \\
&-\frac{b}{\theta(p^-)^{\eta}}\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&C + \|u_j\| \geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) \\
&+\left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{b}{\theta(p^-)^{\eta}}\right)\left(\int_\Omega\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1}
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\lambda A_1^{r+1}}{\theta(\beta^+)^r}-\frac{\lambda A_2^{r+1}}{(r+1)(\beta^-)^{r+1}}\right)\left[\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx\right]^{r+1}+\left(\frac{\gamma}{\theta}-\frac{\gamma}{q^-}\right)\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}dS.$$

Vamos supor que (u_j) é ilimitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, passando à subsequência se necessário, temos $\|u_j\|>1$ e pela Proposição 1.4

$$C+\|u_j\|\geq\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-},$$

que é uma contradição, pois $p^->1$. Logo (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.6. Seja $(u_j)\subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c e $t_0=\lim\limits_{j\to\infty}\left(\int_\Omega\frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)$. Se

$$c<\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q^-}\right)\inf_{i\in I}\left(\gamma^{1-1/p(x_i)}\overline{a}^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}},$$

onde $\overline{a}=t_1$ com $0<t_1<bt_0^\eta$, então o conjunto de índices I, da Proposição 1.8 é vazio e $u_j\to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$.

Demonstração: Suponhamos que $u_j\rightharpoonup u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Pela Proposição 1.8 e Lema 6.5, temos

$$|u_j|_{\partial\Omega}|^{q(x)}\rightharpoonup\nu=|u|^{q(x)}+\sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i},\quad\text{fraco }-^*\text{ no sentido das medidas.}$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)}\rightharpoonup\mu\geq|\nabla u|^{p(x)}+\sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i},\ \text{fraco }-^*\text{ no sentido das medidas.}$$

$$\overline{T}_{x_i}\nu_i^{\frac{1}{q(x_i)}}\leq\mu_i^{\frac{1}{p(x_i)}},\ \forall i\in I.$$

Se $I=\emptyset$ então $u_j\to u$ fortemente em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$. Recordemos que a demonstração dessa convergência já foi feita na demonstração do Lema 6.2. Agora, suponhamos que $I\neq\emptyset$. Seja x_i um ponto singular das medidas μ and ν. Seja $\phi\in C_0^\infty(I\!R^N)$ tal que $0\leq\phi(x)\leq 1$, $\phi(0)=1$ e suporte na bola unitária do $I\!R^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x)=\phi\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x\in I\!R^N$ e $\varepsilon>0$.

Como $J'_{\lambda,\gamma}(u_j)\to 0$ em $\left(W^{1,p(x)}\Omega\right)'$ obtemos que

$$\lim J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)=0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) &= \left(a+b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right) \\ &\times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j\right)dx \\ &-\gamma\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dS - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \to 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) &= \left(a+b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right) \\ &\times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j + |\nabla u_j|^{p(x)}\nabla\phi_{i,\varepsilon} + |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}\right)dx \\ &-\gamma\int_{\partial\Omega}|u_j|^{q(x)}\phi_{i,\varepsilon} dS - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u_j)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx \to 0. \end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$ temos

$$0 = \lim\left(\left[a+b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right]\int_\Omega(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx\right.$$
$$\left.\left[a+b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right]\int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx\right)+$$

$$(a+bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu - \gamma\int_{\partial\Omega}\phi_{i,\varepsilon}d\nu - \lambda\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r\int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx.$$

Mostra-se que,
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ (a+bt_0^\eta)\displaystyle\int_\Omega(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0$, (ver no Lema 3.6).
Por outro lado,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}(a+bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = (a+bt_0^\eta)\mu\phi(0), \quad \gamma\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial\Omega}\phi_{i,\varepsilon}d\nu = \nu\phi(0)$$
e
$\lambda\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right]^r\displaystyle\int_\Omega f(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0, \quad (a+bt_0^\eta)\displaystyle\int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Assim, $(a+bt_0^\eta)\mu_i\phi(0) = \gamma\nu_i\phi(0)$. Isso implica que $\gamma^{-1}\overline{a}\mu_i \le \nu_i$. Como $\overline{T}_{x_i}\nu_i^{1/p_*(x_i)} \le \mu_i^{1/p(x_i)}$ obtemos $\gamma^{-1}\overline{a}\left(\overline{T}_{x_i}\right)^{p(x_i)}\nu_i^{p(x_i)/p_*(x_i)} \le \gamma^{-1}\overline{a}\mu_i \le \nu_i$. Logo,

$$\gamma^{-1}\overline{a}\left(\overline{T}_{x_i}\right)^{p(x_i)} \le \nu_i^{1-p(x_i)/p_*(x_i)} = \nu_i^{(p_*(x_i)-p(x_i))/p_*(x_i)}$$

e $\gamma^{-1/p(x_i)}\overline{a}^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i} \le \nu_i^{(p_*(x_i)-p(x_i))/p(x_i)p_*(x_i)}$. Portanto,

$$\nu_i \ge \left(\gamma^{-1/p(x_i)}\overline{a}^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

Por outro lado, usando θ satisfazendo (6.6) e o fato que

$$c = \lim\left(J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right).$$

Temos ,

$$c \geq \lim \left(\frac{\gamma}{\theta} - \frac{\gamma}{q^-}\right) \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)} dS.$$

Daí,

$$c \geq \left(\frac{\gamma}{\theta} - \frac{\gamma}{q^-}\right) \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)} dS + \int_{\partial\Omega} \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}\right) \geq \left(\frac{\gamma}{\theta} - \frac{\gamma}{q^-}\right) \nu_i.$$

Logo,

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right) \inf_{i \in I} \left(\gamma^{1-1/p(x_i)} \overline{a}^{1/p(x_i)} \overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

Portanto o conjunto de índices I é vazio se,

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right) \inf_{i \in I} \left(\gamma^{1-1/p(x_i)} \overline{a}^{1/p(x_i)} \overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

■

Lema 6.7. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale com nível de energia c. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right) \inf_{i \in I} \left(\gamma^{1-1/p(x_i)} \overline{a}^{1/p(x_i)} \overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}$, existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ e $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como

$$J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(u_j - u) &= \left(a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right) \\ &\times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j - u) + |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j - u)\right) dx \\ &-\gamma \int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j - u)dS \\ &-\lambda \left[\int_\Omega F(x, u_j)dx\right]^r \int_\Omega f(x, u_j)(u_j - u)dx \to 0. \end{aligned}$$

Observe que existem constantes não negativas c_1, c_2, c_3 e c_4 tais que

$$c_1 \leq a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta \leq c_2$$

e

$$c_3 \leq \left[\int_\Omega F(x, u_j)dx\right]^r \leq c_4.$$

Usando a desigualdade de Hölder inequality, temos

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j - u)dx\right| \leq \int_\Omega |u_j|^{p(x)-1}|u_j - u|dx \leq C_1 ||u|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|u_j - u|_{p(x)},$$

e

$$\left|\int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u)dx\right| \leq A_2\int_\Omega |u_j|^{\beta(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_2||u|^{\beta(x)-1}|_{\beta(x)/\beta(x)-1}|u_j-u|_{\beta(x)},$$

onde C_1 and C_2 são constantes positivas. Assim,

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_\Omega f(x,u_j)(u_j-u)dx\right| \to 0.$$

Pelo Lema 6.6, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\left|\int_{\partial\Omega} |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)dS\right| \to 0.$$

Fazendo

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u),$$

tem-se $L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) \to 0$. Temos ainda que, $L_{p(x)}(u)(u_j-u) \to 0$. Então,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j-u) \to 0.$$

Do Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.8.

($\underline{i}$) Para todo $\lambda > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$, tais que $J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \alpha$, $\|u\| = \rho$.

($\underline{ii}$) Existe um elemento $w_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w_0\| > \rho$ e $J_{\lambda,\gamma}(w_0) < \alpha$.

Demonstração: ($\underline{i}$) Temos

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \quad & a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right) \\ & + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ & - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega \frac{A_2}{\beta(x)}u^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} - \frac{\gamma}{q^-}\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}dS. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \quad & \frac{a}{p^+}\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx + \frac{b}{(\eta+1)(p+)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ & - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1}\left[\int_\Omega u^{\beta(x)}dx\right]^{r+1} - \frac{\gamma}{q^-}\int_{\partial\Omega}|u|^{q(x)}dS. \end{aligned}$$

Se $\|u\| < 1$ é suficientemente pequena, da Proposição 1.4 obtemos $\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx \geq \|u\|^{p^+}$ e das imersões $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$ (contínuas), temos $\int_\Omega |u|^{\beta(x)}dx \leq M_1^{\beta^-}\|u\|^{\beta^-}$ e $\int_{\partial\Omega} |u|^{q(x)}dx \leq M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}$.

Desta forma,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \geq & \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{p^+(\eta+1)} \\ & -\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{\gamma}{q^-}M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}. \end{aligned}$$

Usando o fato que $(\eta+1)p^+ < \beta^-(r+1) < q^-$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \geq & \frac{a}{p^+}\|u\|^{(\eta+1)p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{p^+(\eta+1)} \\ & -\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\|u\|^{\beta^-(r+1)} - \frac{\gamma}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\|u\|^{\beta^-(r+1)}, \end{aligned}$$

que podemos escrever como

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \geq & \left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)\|u\|^{p^+(\eta+1)} \\ & -\left(\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)} + \frac{\gamma}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\right)\|u\|^{\beta^-(r+1)}. \end{aligned}$$

Considerando $\rho = \|u\|$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \geq & \rho^{(\eta+1)p^+}\left[\left(\frac{a}{p^+} + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right) - \left(\frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} M_1^{\beta^-(r+1)}\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{\gamma}{\beta^-(r+1)}M_2^{q^-}\right)\rho^{\beta^-(r+1)-(\eta+1)p^+}\right], \end{aligned}$$

e o resultado segue.

($\underline{ii}$) Seja $0 < w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t > 1$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \leq & \frac{a}{p^-}t^{p^+}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right) \\ & + \frac{bt^{p^+(\eta+1)}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ & + \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{r+1} t^{\beta^-(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1} - \frac{\gamma}{q^+}t^{q^-}\int_{\partial\Omega}|w|^{q(x)}dS. \end{aligned}$$

Então temos

$$\lim_{t\to\infty} J_{\lambda,\gamma}(tw) = -\infty.$$

E assim concluimos a demonstração do lema.

∎

Para concluir a demonstração do item (ii), pelo Lema 6.8 podemos usar o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.3), que garante a existência de uma sequência

$(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c \ \text{ e } \ J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0 \ \text{ em } \ (W^{1,p(x)}(\Omega))',$$

onde o candidato a valor crítico é dado por

$$c = \inf_{h\in\mathcal{C}} \sup_{t\in[0,1]} J_{\lambda,\gamma}(h(t))$$

e $\mathcal{C} = \{h : [0,1] \to W^{1,p(x)}(\Omega) : h \text{ contínua e } h(0) = 0, h(1) = w_0\}$.

Para $0 < t < 1$ e fixando $w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \leq \ & \frac{a}{p^-}t^{p^-}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right) \\ & + \frac{bt^{p^-(\eta+1)}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ & - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1} - \frac{\gamma}{q^+}t^{q^+}\int_{\partial\Omega}|w|^{q(x)}dS. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \leq \ & \frac{a}{p^-}t^{p^-}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right) \\ & + \frac{bt^{p^-(\eta+1)}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ & - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1} t^{\beta^+(r+1)}\left(\int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx\right)^{r+1}. \end{aligned}$$

Fazendo $g(t) = \left(\frac{a\tilde{a}}{p^-} + \frac{b\tilde{a}^{\eta+1}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\right)t^{p^-} - \frac{\lambda}{r+1}\left(\frac{A_1}{\beta^+}\right)^{r+1}\tilde{b}t^{\beta^+(r+1)}$, onde $\tilde{a} = \int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx$ e $\tilde{b} = \int_\Omega |w|^{\beta(x)}dx$, obtemos $\sup J_\lambda(tw) \leq g(t)$. Note que $g(t)$ tem ponto crítico de máximo

$$t_\lambda = \left[\frac{(\beta^+)^{r+1}((\eta+1)(p^-)^\eta)a\widetilde{a} + b(\widetilde{a})^{\eta+1})}{\lambda A_1^{r+1}(\eta+1)(p^-)^\eta\widetilde{b}\beta^+}\right]^{\frac{1}{\beta^+(r+1)-p^-}},$$

e $t_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$. Pela continuidade de $J_{\lambda,\gamma}$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw)\right) = 0.$$

Então existe $\lambda_2 > 0$ tal que $\forall\lambda \geq \lambda_2$

$$\sup_{t\geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw) < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right)\inf_{i\in I}\left(\gamma^{1-1/p(x_i)}\overline{a}^{1/p(x_i)}\overline{T}_{x_i}\right)^{\frac{p(x_i)p_*(x_i)}{p_*(x_i)-p(x_i)}}.$$

Isso completa a demonstração do item (ii).

■

6.2.3 Demonstração do item (iii) do Teorema 6.1

O resultado segue dos seguintes lemas:

Lema 6.9. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, então (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como (u_j) é uma sequência de Palais-Smale com nível de energia c, temos $J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c$ e $J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0$. Considerando θ tal que

$$\frac{m_1 p^+}{m_0} < \theta < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\kappa+1} \frac{(\beta^-)^{\kappa+1}(\kappa+1)}{(\beta^+)^{\kappa}}, \tag{6.7}$$

temos

$$C + \|u_j\| \geq \left(J_{\lambda,\gamma}(u_j) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} C + \|u_j\| \ \geq \ & \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx\right) - \frac{\gamma}{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j) dS\right]^{\kappa+1} \\ & -\lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx - \frac{1}{\theta} M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx\right) \\ & \times \left(\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j u_j)dx\right) \\ & + \frac{\gamma}{\theta}\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^{\kappa} \int_{\partial\Omega} g(x,u_j)u_j dS + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j u_j dx. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} C + \|u_j\| \ \geq \ & m_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx\right) - \frac{\gamma}{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^{\kappa+1} \\ & -\lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx - \frac{m_1}{\theta}\left(\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right) \\ & + \frac{\gamma}{\theta}\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^{\kappa} \int_{\partial\Omega} g(x,u_j)u_j dS + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j u_j dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} C + \|u_j\| \ \geq \ & m_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx\right) - \frac{\gamma A_2^{\kappa+1}}{(\kappa+1)(\beta^-)^{\kappa+1}}\left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{\beta} dS\right]^{\kappa+1} \\ & -\lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx - \frac{m_1}{\theta}\left(\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right) \\ & + \frac{\gamma A_1^{\kappa+1}}{\theta(\beta^+)^{\kappa}}\left[\int_{\partial\Omega} |u|^{\beta(x)}dS\right]^{\kappa+1} + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j u_j dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right)\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right) dx\right) + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q^-}\right)\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx$$
$$\left(\frac{\gamma A_1^{\kappa+1}}{\theta(\beta^+)^\kappa} - \frac{\gamma A_2^{\kappa+1}}{(\kappa+1)(\beta^-)^{\kappa+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega} |u|^{\beta(x)}dS\right]^{\kappa+1}.$$

Vamos supor que (u_j) é ilimitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, passando à subsequência se necessário, temos $\|u_j\| > 1$ e obtemos pela Proposição 1.4

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{m_0}{p^+} - \frac{m_1}{\theta}\right)\|u_j\|^{p^-},$$

que é uma contradição, pois $p^- > 1$. Portanto (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.10. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right)\lambda(\overline{m}_0 S)^N$, onde $\overline{m}_0 = \min\{(\lambda^{-1}m_0)^{1/p^+}, (\lambda^{-1}m_0)^{1/p^-}\}$, então o conjunto de índices I da Proposição 1.7 é vazio e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Pela Proposição 1.7 e Lema 6.9, temos

$$|u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0$$

$$S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I.$$

Se $I = \emptyset$ então $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Recordemos que a demonstração dessa convergência já foi feita, na demonstração do Lema 3.2. Agora, suponhamos que $I \neq \emptyset$. Seja x_i um ponto singular das medidas μ and ν. Seja $\phi \in C_0^\infty(I\!R^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e suporte na bola unitária do $I\!R^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x \in I\!R^N$ e $\varepsilon > 0$.

Como $J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0$ em $\left(W^{1,p(x)}\Omega\right)'$ obtemos que

$$\lim J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) \quad &= \quad M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)\\ &\times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j\right)dx\\ &-\lambda\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dx - \gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dS \to 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) \quad &= \quad M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)\\ &\times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j + |\nabla u_j|^{p(x)}\nabla\phi_{i,\varepsilon} + |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}\right)dx\\ &-\lambda\int_\Omega |u_j|^{q(x)}\phi_{i,\varepsilon} dx - \gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dS \to 0.\end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$, tem-se

$$0 = \lim\left(M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx\right.$$
$$\left. M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)\int_\Omega |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx\right)+$$

$$M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu - \lambda\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu - \gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dS,$$

onde $t_0 = \lim\limits_{j\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)}+|u_j|^{p(x)})dx\right)$.

Mostra-se que,

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M(t_0)\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0$, (ver no Lema 3.2).

Por outro lado,

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M(t_0)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = M(t_0)\mu\phi(0), \quad \lambda\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu = \nu\phi(0)$

e

$\gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dS \to 0, \quad M(t_0)\int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Desta forma, $M(t_0)\mu_i\phi(0) = \lambda\nu_i\phi(0)$. Isso implica que $\lambda^{-1}m_0\mu_i \leq \nu_i$. Como $S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}$, procedendo como no item (i) obtemos,

$$(\overline{m}_0 S)^N \leq \nu_i,$$

onde $\overline{m}_0 = \min\{(\lambda^{-1}m_0)^{1/p^+}, (\lambda^{-1}m_0)^{1/p^-}\}$.

Considerando θ satisfazendo (6.7), temos

$$c = \lim\left(J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right).$$

Além disso,

$$c \geq \lim \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q(x)}\right) |u_j|^{q(x)} dx.$$

Assim, usando o conjunto $\mathcal{A}_\delta$, dado nos capítulos 3 e 5 deste trabalho

$$c \geq \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}}\right) \left(\int_{\mathcal{A}_\delta} |u|^{q(x)} dx + \sum_{i \in I} \nu_i\right) \geq \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}}\right) \nu_i.$$

Logo,

$$c \geq \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q^-_{\mathcal{A}}}\right) (\overline{m}_0 S)^N.$$

Portanto, o conjunto de índices I é vazio se,

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}}\right) \lambda (\overline{m}_0 S)^N.$$

■

Lema 6.11. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}}\right) \lambda (\overline{m}_0 S)^N$, então existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como

$$J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(u_j - u) \quad = \quad & M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} (|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}) dx\right) \\ & \times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2} \nabla u_j \nabla(u_j - u) + |u_j|^{p(x)-2} u_j (u_j - u)\right) dx \\ & -\lambda \int_\Omega |u_j|^{q(x)-2} u_j (u_j - u) dx \\ & -\gamma \left[\int_{\partial\Omega} G(x, u_j) dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x, u_j)(u_j - u) dS \to 0. \end{aligned}$$

Observe que,

$$m_0 \leq M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} (|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}) dx\right) \leq m_1.$$

Note ainda que existem constantes não-negativas c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \leq \left[\int_{\partial\Omega} G(x, u_j) dS\right]^r \leq c_2.$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \leq \int_\Omega |u_j|^{p(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_1||u|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|u_j-u|_{p(x)},$$

e

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(u_j-u)dS\right| &\leq A_2\int_{\partial\Omega}|u_j|^{\beta(x)-1}|u_j-u|dS \\ &\leq C_2||u|^{\beta(x)-1}|_{\beta(x)/\beta(x)-1}|u_j-u|_{\beta(x)},\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Assim,

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(u_j-u)dS\right| \to 0.$$

Pelo Lema 6.10, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ usando a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0.$$

Fazendo,

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j\nabla(u_j-u)dx,$$

tem-se $L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) \to 0$. Temos ainda que $L_{p(x)}(u)(u_j-u) \to 0$. Então,

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j-u) \to 0.$$

Do Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.12.

($\underline{i}$) Para todo $\lambda > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$, tais que $J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \alpha$, $\|u\| = \rho$.

($\underline{ii}$) Existe um elemento $w_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w_0\| > \rho$ e $J_{\lambda,\gamma}(w_0) < \alpha$.

Demonstração: ($\underline{i}$) Temos

$$\begin{aligned}J_{\lambda,\gamma}(u) \quad \geq \quad & m_0\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right) - \frac{\gamma}{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega}\frac{A_2}{\beta(x)}u^{\beta(x)}dS\right]^{\kappa+1} \\ & -\frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,\gamma}(u) \quad &\geq \quad \frac{m_0}{p^+}\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx - \frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega} u^{\beta(x)} dS\right]^{\kappa+1} \\
&\quad - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx.
\end{aligned}
$$

Se $\|u\| < 1$ é suficientemente pequena, da Proposição 1.4, obtemos $\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx \geq \|u\|^{p^+}$ e das imersões $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\partial\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ (contínuas), temos $\int_{\partial\Omega} |u|^{\beta(x)}dS \leq M_1^{\beta^-}\|u\|^{\beta^-}$ e $\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \leq M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}$.

Daí,

$$
J_{\lambda,\gamma}(u) \quad \geq \quad \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1} M_1^{\beta^-(\kappa+1)}\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)} - \frac{\lambda}{q^-}M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}.
$$

Usando o fato que $p^+ < \beta^-(\kappa+1) < q^-$,

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,\gamma}(u) \quad &\geq \quad \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1} M_1^{\beta^-(\kappa+1)}\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)} \\
&\quad - \frac{\lambda}{\beta^-(\kappa+1)}M_2^{q^-}\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)},
\end{aligned}
$$

que pode ser escrito como,

$$
J_{\lambda,\gamma}(u) \quad \geq \quad \frac{m_0}{p^+}\|u\|^{p^+} - \left(\frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1} M_1^{\beta^-(\kappa+1)} + \frac{\lambda}{\beta^-(\kappa+1)}M_2^{q^-}\right)\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)}.
$$

Considerando $\rho = \|u\|$,

$$
J_{\lambda,\gamma}(u) \quad \geq \quad \rho^{p^+}\left[\left(\frac{m_0}{p^+}\right) - \left(\frac{\gamma}{r+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1} M_1^{\beta^-(\kappa+1)} + \frac{\lambda}{\beta^-(\kappa+1)}M_2^{q^-}\right)\rho^{\beta^-(\kappa+1)-p^+}\right],
$$

e o resultado segue.

($\underline{ii}$) Seja $0 < w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t > 1$,

$$
\begin{aligned}
J_{\lambda,\gamma}(tw) \quad &\leq \quad \frac{m_1}{p^-}t^{p^+}\left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)})dx\right) - \frac{\lambda}{q^+}t^{q^-}\int_\Omega |w|^{q(x)}dx \\
&\quad + \frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1} t^{\beta^-(\kappa+1)}\left(\int_{\partial\Omega} |w|^{\beta(x)}dS\right)^{\kappa+1}.
\end{aligned}
$$

Então temos,

$$
\lim_{t\to\infty} J_{\lambda,\gamma}(tw) = -\infty.
$$

Assim, concluimos a demonstração do lema.

■

Para concluir a demonstração do item (*iii*), pelo Lema 6.12 podemos usar o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.3), que garante a existência de uma sequência $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$
J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c \ \text{ e } \ J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0 \ \text{ in } \ (W^{1,p(x)}(\Omega))',
$$

onde o candidato ao valor crítico é dado por

$$c = \inf_{h \in \mathcal{C}} \sup_{t \in [0,1]} J_{\lambda,\gamma}(h(t))$$

and $\mathcal{C} = \{h : [0,1] \to W^{1,p(x)}(\Omega) : h$ contínua e $h(0) = 0, h(1) = w_0\}$.

Para $0 < t < 1$ e fixando $w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) &\leq \frac{m_1}{p^-} t^{p^-} \left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx \right) - \frac{\lambda}{q^+} t^{q^+} \int_\Omega |w|^{q(x)} dx \\ & - \frac{\gamma}{\kappa+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{\kappa+1} t^{\beta^+(\kappa+1)} \left(\int_{\partial\Omega} |w|^{\beta(x)} dS \right)^{\kappa+1}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) &\leq \frac{m_1}{p^-} t^{p^-} \left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx \right) \\ & - \frac{\gamma}{\kappa+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{\kappa+1} t^{\beta^+(\kappa+1)} \left(\int_{\partial\Omega} |w|^{\beta(x)} dS \right)^{\kappa+1}. \end{aligned}$$

Fazendo $g(t) = \dfrac{m_1 \tilde{a}}{p^-} t^{p^-} - \dfrac{\gamma}{\kappa+1} \left(\dfrac{A_1}{\beta^+} \right)^{\kappa+1} \tilde{b} t^{\beta^+(\kappa+1)}$,
onde $\tilde{a} = \displaystyle\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx$ e $\tilde{b} = \displaystyle\int_\Omega |w|^{\beta(x)} dx$, obtemos $\sup J_\lambda(tw) \leq g(t)$. Observe que $g(t)$ tem ponto crítico de máximo

$$t_\gamma = \left[\frac{m_1 (\beta^+)^\kappa \widetilde{a}}{\gamma A_1^\kappa \widetilde{b}} \right]^{\frac{1}{\beta^+(\kappa+1) - p^-)}},$$

e $t_\gamma \to 0$ quando $\gamma \to \infty$. Pela continuidade de $J_{\lambda,\gamma}$

$$\lim_{\gamma \to \infty} \left(\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw) \right) = 0.$$

Então existe γ_1, tal que $\forall \gamma \geq \gamma_1$

$$\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw) < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-} \right) \lambda (\overline{m}_0 S)^N.$$

Isso completa a demonstração do item (iii).

■

6.2.4 Demonstração do item (iv) do Teorema 6.1

O resultado segue dos seguintes lemas:

Lema 6.13. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, então (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração Como (u_j) é uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c, temos $J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c$ e $J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0$. Assim, considerando θ tal que

$$\frac{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}{(p^-)^{\eta}} < \theta < \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\kappa+1} \frac{(\beta^-)^{\kappa+1}(\kappa+1)}{(\beta^+)^{\kappa}}, \tag{6.8}$$

temos

$$C + \|u_j\| \geq \left(J_{\lambda,\gamma}(u_j) - \frac{1}{\theta} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right) \geq$$

$$\begin{aligned}
&a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1} \\
&- \frac{\gamma}{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^{\kappa+1} - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx - \frac{a}{\theta}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla u_j dx \\
&- \frac{a}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j u_j dx + \frac{\gamma}{\theta}\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^{\kappa}\int_{\partial\Omega} g(x,u_j)u_j dS + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j u_j dx \\
&- \frac{b}{\theta}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j u_j\right)dx\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&C + \|u_j\| \geq \\
&\frac{a}{p^+}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) + \frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1} \\
&\quad - \frac{\gamma A_2^{\kappa+1}}{(\kappa+1)(\beta^-)^{\kappa+1}}\left[\int_{\partial\Omega} |u_j|^{\beta}dS\right]^{\kappa+1} - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx - \frac{a}{\theta}\int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)}dx \\
&\quad\quad - \frac{a}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{p(x)}dx + \frac{\gamma A_1^{\kappa+1}}{\theta(\beta^+)^{\kappa}}\left[\int_{\partial\Omega} |u|^{\beta(x)}dS\right]^{\kappa+1} + \frac{\lambda}{\theta}\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx \\
&\quad\quad\quad - \frac{b}{\theta(p^-)^{\eta}}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
C + \|u_j\| &\geq \left(\frac{a}{p^+} - \frac{a}{\theta}\right)\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right) \\
&+ \left(\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}} - \frac{b}{\theta(p^-)^{\eta}}\right)\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)}\right)dx\right)^{\eta+1} \\
&+ \left(\frac{\gamma A_1^{r+1}}{\theta(\beta^+)^{\kappa}} - \frac{\gamma A_2^{\kappa+1}}{(\kappa+1)(\beta^-)^{\kappa+1}}\right)\left[\int_{\partial\Omega} |u|^{\beta(x)}dS\right]^{\kappa+1} + \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q^-}\right)\int_\Omega |u_j|^{q(x)}dx.
\end{aligned}$$

Vamos supor que (u_j) é ilimitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, passando para uma subsequências se necessário, para $\|u_j\| > 1$ obtemos pela Proposição 1.4

$$C + \|u_j\| \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_j\|^{p^-},$$

que é uma contradição, pois $p^- > 1$. Logo (u_j) é limitada em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.14. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, com nível de energia c e $t_0 = \lim\limits_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx$. Se

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right) \lambda(\overline{t}_1 S)^N,$$

onde $\overline{a} = t_1$ com $0 < t_1 < bt_0^\eta$, então o conjunto de índices I, da Proposição 1.7 é vazio e $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\partial\Omega)$.

Demonstração: Pela Proposição 1.7 e Lema 6.13, temos

$$|u_j|^{q(x)} \rightharpoonup \nu = |u|^{q(x)} + \sum_{i\in I} \nu_i \delta_{x_i}, \quad \nu_i > 0$$

$$|\nabla u_j|^{p(x)} \rightharpoonup \mu \geq |\nabla u|^{p(x)} + \sum_{i\in I} \mu_i \delta_{x_i}, \quad \mu_i > 0$$

$$S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \leq \mu_i^{1/p(x_i)}, \quad \forall i \in I.$$

Se $I = \emptyset$ então $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$. Recordemos que a demonstração dessa convergência já foi feita, na demonstração do Lema 3.2.

Agora, se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_{\mathcal{A}}^-}\right) \lambda(\overline{t}_1 S)^N$, então o conjunto de índices $I = \emptyset$. De fato, suponha que $I \neq \emptyset$. Seja $\phi \in C_0^\infty(I\!R^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(0) = 1$ e suporte na bola unitária do $I\!R^N$. Consideremos as funções $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon}\right)$ para todo $x \in I\!R^N$ e $\varepsilon > 0$.

Como $J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0$ em $\left(W^{1,p(x)}\Omega\right)'$ obtemos

$$\lim J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(\phi_{i,\varepsilon} u_j) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) &= \left(a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right) \\ &\times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla \phi_{i,\varepsilon} u_j + |u_j|^{p(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j\right) dx \\ &-\lambda \int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j\phi_{i,\varepsilon}u_j dx \\ &-\gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dS \to 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u)(\phi_{i,\varepsilon}u_j) &= \left(a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right) \\ &\times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla \phi_{i,\varepsilon} u_j + |\nabla u_j|^{p(x)}\nabla\phi_{i,\varepsilon} + |u_j|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}\right) dx \\ -\lambda \int_\Omega |u_j|^{q(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx &- \gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(\phi_{i,\varepsilon}u_j)dS \to 0. \end{aligned}$$

Quando $j \to \infty$ tem-se,

$$0 = \lim\left(\left[a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right] \int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla\phi_{i,\varepsilon}u_j)dx\right.$$
$$\left.\left[a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right] \int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx\right) +$$

$$(a+bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu - \lambda\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu - \gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dS.$$

Mostra-se que,

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ (a+bt_0^\eta)\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi_{i,\varepsilon}u)dx \to 0$, (ver no Lema 3.6).

Por outro lado,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(a+bt_0^\eta)\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\mu = (a+bt_0^\eta)\mu\phi(0), \qquad \lambda\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}d\nu = \lambda\nu\phi(0)$$

e

$$\gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u)(\phi_{i,\varepsilon}u)dS \to 0, \quad (a+bt_0^\eta)\int_\Omega |u|^{p(x)}\phi_{i,\varepsilon}dx \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Então,

$(a+bt_0^\eta)\mu_i\phi(0) = \lambda\nu_i\phi(0)$. Isso implica que $\lambda^{-1}t_1\mu_i \le \nu_i$, onde $0 < t_1 < t_0^\eta$. Como $S\nu_i^{1/p^*(x_i)} \le \mu_i^{1/p(x_i)}$ e procedendo como no item (iii) obtemos,

$$(\bar{t}_1 S)^N \le \nu_i,$$

onde $\bar{t}_1 = \min\{(\lambda^{-1}t_1)^{1/p^+}, (\lambda^{-1}t_1)^{1/p^-}\}$.

Considerando θ satisfazendo (6.8), temos

$$c = \lim\left(J_\lambda(u_j) - \frac{1}{\theta}J'_{\lambda,\gamma}(u_j)u_j\right).$$

Assim,

$$c \geq \lim \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q(x)}\right) |u_j|^{q(x)} dx.$$

Daí, usando o conjunto $\mathcal{A}_\delta$, dado nos capítulos 3 e 5 deste trabalho

$$c \geq \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}}\right)\left(\int_{\mathcal{A}_\delta} |u|^{q(x)} dx + \sum_{i\in I} \nu_i\right) \geq \left(\frac{\lambda}{\theta} - \frac{\lambda}{q^-_{\mathcal{A}_\delta}}\right)\nu_i.$$

Logo,

$$c \geq \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}}\right)\lambda(\bar{t}_1 S)^N.$$

Portanto, o conjunto de índices I é vazio se

$$c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}}\right)\lambda(\bar{t}_1 S)^N.$$

■

Lema 6.15. Seja $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale, com nível de energia c. Se $c < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-_{\mathcal{A}}}\right)\lambda(\bar{t}_1 S)^N$, existe $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ e uma subsequência, ainda designada por (u_j), tal que $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Demonstração: Como

$$J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0,$$

temos

$$\begin{aligned} J'_{\lambda,\gamma}(u_j)(u_j - u) \ = \ & \left(a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta\right) \\ & \times \int_\Omega \left(|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j - u) + |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j - u)\right) dx \\ & -\lambda \int_\Omega |u_j|^{q(x)-2} u_j(u_j - u)dx \\ & -\gamma\left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^\kappa \int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(u_j - u)dS \to 0. \end{aligned}$$

Observe que existem constantes não-negativas c_1, c_2, c_3 e c_4 tais que

$$c_1 \leq a + b\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u_j|^{p(x)} + |u_j|^{p(x)})dx\right)^\eta \leq c_2$$

e

$$c_3 \leq \left[\int_{\partial\Omega} G(x,u_j)dS\right]^\kappa \leq c_4.$$

Usando a deigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \leq \int_\Omega |u_j|^{p(x)-1}|u_j-u|dx \leq C_1||u|^{p(x)-1}|_{p(x)/p(x)-1}|u_j-u|_{p(x)},$$

e

$$\left|\int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(u_j-u)dS\right| \leq A_2\int_{\partial\Omega}|u_j|^{\beta(x)-1}|u_j-u|dS$$

$$\leq C_2||u|^{\beta(x)-1}|_{\beta(x)/\beta(x)-1}|u_j-u|_{\beta(x)},$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Assim,

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{p(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0$$

e

$$\left|\int_{\partial\Omega} g(x,u_j)(u_j-u)dS\right| \to 0.$$

Pelo Lema 6.14, $u_j \to u$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ e usando a desigualdade de Hölder, tem-se

$$\left|\int_\Omega |u_j|^{q(x)-2}u_j(u_j-u)dx\right| \to 0.$$

Fazendo

$$L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) = \int_\Omega |\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j \nabla(u_j-u)dx,$$

obtemos $L_{p(x)}(u_j)(u_j-u) \to 0$. Temos ainda que, $L_{p(x)}(u)(u_j-u) \to 0$. Logo.

$$(L_{p(x)}(u_j) - L_{p(x)}(u), u_j-u) \to 0.$$

Do Teorema 1.1, $u_j \to u$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

■

Lema 6.16.

($\underline{i}$) Para todo $\lambda > 0$, existem $\alpha, \rho > 0$, tais que $J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \alpha$, $\|u\| = \rho$.

($\underline{ii}$) Existe um elemento $w_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|w_0\| > \rho$ e $J_{\lambda,\gamma}(w_0) < \alpha$.

Demonstração: ($\underline{i}$) Temos,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \geq \quad & a\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right) \\ & + \frac{b}{\eta+1}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ & - \frac{\gamma}{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega}\frac{A_2}{\beta(x)}u^{\beta(x)}dS\right]^{\kappa+1} - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \ &\geq\ \frac{a}{p^+}\int_\Omega(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)})dx+\frac{b}{(\eta+1)(p+)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ &\quad -\frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1}\left[\int_{\partial\Omega}u^{\beta(x)}dS\right]^{\kappa+1}-\frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega|u|^{q(x)}dx. \end{aligned}$$

Se $\|u\|<1$ é suficientemente pequeno, da Proposição 1.4 obtemos $\int_\Omega(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)})dx \geq \|u\|^{p^+}$ e das imersões $W^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{\beta(x)}(\partial\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ (contínuas), temos $\int_{\partial\Omega}|u|^{\beta(x)}dx \leq M_1^{\beta^-}\|u\|^{\beta^-}$ e $\int_\Omega|u|^{q(x)}dx\leq M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}$.

Desta forma,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \ &\geq\ \frac{a}{p^+}\|u\|^{p^+}+\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{p^+(\eta+1)} \\ &\quad -\frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1}M_1^{\beta^-(\kappa+1)}\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)}-\frac{\lambda}{q^-}M_2^{q^-}\|u\|^{q^-}. \end{aligned}$$

Usando o fato que $(\eta+1)p^+<\beta^-(r+1)<q^-$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \ &\geq\ \frac{a}{p^+}\|u\|^{(\eta+1)p^+}+\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\|u\|^{p^+(\eta+1)} \\ &\quad -\frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1}M_1^{\beta^-(\kappa+1)}\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)}-\frac{\lambda}{\beta^-(\kappa+1)}M_2^{q^-}\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)}, \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \ &\geq\ \left(\frac{a}{p^+}+\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)\|u\|^{p^+(\eta+1)} \\ &\quad -\left(\frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1}M_1^{\beta^-(\kappa+1)}+\frac{\lambda}{\beta^-(\kappa+1)}M_2^{q^-}\right)\|u\|^{\beta^-(\kappa+1)}. \end{aligned}$$

Considerando $\rho=\|u\|$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(u) \ &\geq\ \rho^{(\eta+1)p^+}\Bigg[\left(\frac{a}{p^+}+\frac{b}{(\eta+1)(p^+)^{\eta+1}}\right)-\Bigg(\frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1}M_1^{\beta^-(\kappa+1)} \\ &\quad +\frac{\lambda}{\beta^-(\kappa+1)}M_2^{q^-}\Bigg)\rho^{\beta^-(\kappa+1)-(\eta+1)p^+}\Bigg], \end{aligned}$$

e o resultado segue.

(<u>*ii*</u>) Seja $0<w\in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $t>1$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \ &\leq\ \frac{a}{p^-}t^{p^+}\left(\int_\Omega(|\nabla w|^{p(x)}+|w|^{p(x)})dx\right) \\ &\quad +\frac{bt^{p^+(\eta+1)}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}}\left(\int_\Omega(|\nabla w|^{p(x)}+|w|^{p(x)})dx\right)^{\eta+1} \\ &\quad +\frac{\gamma}{\kappa+1}\left(\frac{A_2}{\beta^-}\right)^{\kappa+1}t^{\beta^-(\kappa+1)}\left(\int_\Omega|w|^{\beta(x)}dx\right)^{\kappa+1}-\frac{\lambda}{q^+}t^{q^-}\int_{\partial\Omega}|w|^{q(x)}dS. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t\to\infty}J_{\lambda,\gamma}(tw)=-\infty.$$

Isso conclui a demonstração do lema.

$\blacksquare$

Para concluir a demonstração do item (iv), pelo Lema 6.16 podemos usar o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A.1.3), que garante a existência de uma sequência $(u_j) \subset W^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$J_{\lambda,\gamma}(u_j) \to c \ \text{ e } \ J'_{\lambda,\gamma}(u_j) \to 0 \ \text{ em } \ (W^{1,p(x)}(\Omega))',$$

onde o candidato a valor crítico é dado por

$$c = \inf_{h \in \mathcal{C}} \sup_{t \in [0,1]} J_{\lambda,\gamma}(h(t))$$

e $\mathcal{C} = \{h : [0,1] \to W^{1,p(x)}(\Omega) : h \text{ contínua e } h(0) = 0, h(1) = w_0\}$.

Para $0 < t < 1$ e fixando $w \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \ \leq \ & \frac{a}{p^-} t^{p^-} \left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx \right) \\ & + \frac{b t^{p^-(\eta+1)}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} \left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx \right)^{\eta+1} \\ & - \frac{\gamma}{\kappa+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{\kappa+1} t^{\beta^+(\kappa+1)} \left(\int_{\partial\Omega} |w|^{\beta(x)} dS \right)^{\kappa+1} - \frac{\lambda}{q^+} t^{q^+} \int_\Omega |w|^{q(x)} dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_{\lambda,\gamma}(tw) \ \leq \ & \frac{a}{p^-} t^{p^-} \left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx \right) \\ & + \frac{b t^{p^-(\eta+1)}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} \left(\int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx \right)^{\eta+1} \\ & - \frac{\gamma}{\kappa+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{\kappa+1} t^{\beta^+(\kappa+1)} \left(\int_{\partial\Omega} |w|^{\beta(x)} dS \right)^{\kappa+1}. \end{aligned}$$

Fazendo $g(t) = \left(\frac{a\tilde{a}}{p^-} + \frac{b\tilde{a}^{\eta+1}}{(\eta+1)(p^-)^{\eta+1}} \right) t^{p^-} - \frac{\gamma}{\kappa+1} \left(\frac{A_1}{\beta^+} \right)^{\kappa+1} \tilde{b} t^{\beta^+(\kappa+1)}$,

onde $\tilde{a} = \int_\Omega (|\nabla w|^{p(x)} + |w|^{p(x)}) dx$ e $\tilde{b} = \int_{\partial\Omega} |w|^{\beta(x)} dS$, obtemos $\sup J_\lambda(tw) \leq g(t)$. Observe que $g(t)$ tem um ponto crítico de máximo

$$t_\gamma = \left[\frac{(\beta^+)^\kappa ((\eta+1)(p^-)^\eta) a\widetilde{a} + b(\widetilde{a})^{\eta+1})}{\gamma A_1^{\kappa+1} (\eta+1)(p^-)^\eta \widetilde{b}} \right]^{\frac{1}{\beta^+(\kappa+1) - p^-}},$$

e $t_\gamma \to 0$ quando $\gamma \to \infty$. Pela continuidade de $J_{\lambda,\gamma}$

$$\lim_{\gamma \to \infty} \left(\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw) \right) = 0.$$

Então existe $\gamma_2 > 0$ tal que $\forall \gamma \geq \gamma_2$

$$\sup_{t \geq 0} J_{\lambda,\gamma}(tw) < \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q^-}\right) \lambda(\bar{t}_1 S)^N$$

Isso completa a demonstração do item (iv).

■

Alguns problemas não-locais abertos

Ao término desta tese elencamos alguns problemas elípticos não-locais, que no nosso ponto de vista, estão abertos.

- Os problemas (3.1) e (5.1) em $I\!R^N$, em domínio exterior e em domínio com fronteira mista.

- O problema $p(x)$-Biharmônico, com crescimento crítico em domínio limitado, em $I\!R^N$ e em domínio com fronteira mista. A seguir o problema em $\Omega \subset I\!R^N$

$$\begin{cases} M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}(|\Delta u|^{p(x)} + |u|^{p(x)})dx\right)(\Delta^2_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2}u) \\ \qquad\qquad = f(x,u)\left[\displaystyle\int_\Omega F(x,u)\right]^r + |u|^{q(x)-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, \quad \Delta u = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

- Um problema de autovalor, que está em fase de conclusão.

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)\Delta_{p(x)}u &= \lambda f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

- Um problema (não-local e local) de Schrödinger, em domínio limitado (cujo estudo está em andamento), em $I\!R^N$, em domínio com fronteira mista. A seguir o problema local em domínio limitado.

$$-\Delta_{p(x)}u - \frac{p(x)}{2^{p(x)-1}}u\Delta_{p(x)}(u^2) = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

- O problema onde g muda de sinal, que está em fase de conclusão.

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\right)\Delta_{p(x)}u &= \lambda|u|^{q(x)-2}u \\ &\quad +\mu g(x)|u|^{\gamma(x)-2}u\left[\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{\gamma(x)}g(x)|u|^{\gamma(x)}\right]^{2r}, \\ &\quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Apêndice A

Definições e Resultados Auxiliares

Definição A.1. Dizemos que uma sequência $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma sequência de Palais-Smale (PS) para o funcional $J : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to I\!R$ quando

$$J(u_j) \to c_* \ \text{ e } \ J'(u_j) \to 0 \ \text{ em } \ (W_0^{1,p(x)}(\Omega))', \tag{A.1}$$

onde

$$c_* = \inf_{h \in \mathcal{C}} \sup_{t \in [0,1]} J(h(t)) > 0 \tag{A.2}$$

e

$$\mathcal{C} = \{h : [0,1] \to W_0^{1,p(x)}(\Omega) : h \text{ contínua e } h(0) = 0, J(h(1)) < 0\}.$$

O número c_* é chamado *nível de energia* c_*.

Quando (A.1) implica a existência de uma subsequência de (u_j), ainda designada por (u_j), que converge em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale.

A.1 Resultados variacionais

A.1.1 Funcional de classe C^1

O funcional $J_\lambda : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \longrightarrow I\!R$ definido por

$$J_\lambda(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right) - \frac{\lambda}{r+1}\left[\int_\Omega F(x,u)dx\right]^{r+1} - \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx,$$

onde $\widehat{M}(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau M(s)ds$, $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds$, sendo $M : I\!R^+ \to I\!R^+$, $f : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R$ funções contínuas, satisfazendo condições que serão apresentadas posteriormente, e λ, $r > 0$ parâmetros reais, é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$.

Para mostrar que o funcional J_λ é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$, basta mostrar que a derivada no sentido de Gateaux de J_λ existe e é contínua.

Definindo os funcionais $J_1, J_2, J_3 : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to I\!R$, dados por
$J_1(u) = \widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)$, $J_2(u) = \frac{1}{r+1}\left(\int_\Omega F(x,u)dx\right)^{r+1}$ e
$J_3(u) = \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx$, mostraremos que:

Afirmação A.1. O funcional J_1 é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$.

Demonstração: J_1 é Gateaux diferenciável. De fato, considere a função $G : I\!R \to I\!R$ dada por $G(s) = |\nabla u + st\nabla v|^{p(x)}$ onde $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi(x,t) = \xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{|\nabla u + t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \xi t\nabla v)\nabla v.$$

Note que,

$$\phi = |\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \xi t\nabla v)\nabla v \longrightarrow |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v \ \text{ q.s. em } \ \Omega, \qquad (a_1)$$

quando $t \to 0$.

Observe ainda que,

$$|\phi| \leq |\nabla u + \xi t\nabla v|^{p(x)-1}|\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v|. \qquad (a_2)$$

Como

$$|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}(\Omega),$$

temos que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder, concluimos que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega). \qquad (a_3)$$

Logo, usando (a_1)-(a_3) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesque, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t}dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx.$$

Usando a Regra da Cadeia, deduzimos

$$J_1'(u)v = \left[\widehat{M}\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\right]'\left(\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+tv)|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t}dx\right),$$

ou seja,

$$J_1'(u)v = M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx.$$

Mostrando que J_1 é Gateaux-diferenciável.

A seguir mostraremos que $u \to J_1'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. De fato, seja $(u_j) \subset W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $u_j \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $\psi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ com $\|\psi\| \leq 1$. Assim,

$$\nabla u_j \to \nabla u \ \text{ em } \ (L^{p(x)}(\Omega))^N. \tag{a_4}$$

Logo, a menos de subsequência

$$\nabla u_j(x) \to \nabla u(x), \quad \text{q.s. em } \ \Omega \tag{a_5}$$

e

$$|\nabla u_j(x)| \leq g(x), \quad \text{q.s. em } \ \Omega, \tag{a_6}$$

onde $g(x) \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Por (a_5), temos que

$$|\nabla u_j(x)| \to |\nabla u(x)|, \quad \text{q.s. em } \ \Omega. \tag{a_7}$$

Considerando $\Gamma(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx$, tem-se

$$\begin{aligned}|(\Gamma'(u_j) - \Gamma'(u), \psi)| &= \left|\int_\Omega (|\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)\nabla\psi dx\right| \\ &\leq \int_\Omega ||\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u||\nabla\psi|dx. \end{aligned}\tag{a_8}$$

Fazendo

$$f_j = ||\nabla u_j|^{p(x)-2}\nabla u_j - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u|, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{a_9}$$

obtemos

$$f_j \leq |\nabla u_j|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega). \tag{a_{10}}$$

Logo, concluimos que $(f_j) \subset L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)$.

Usando a desigualdade de Hölder em (a_8),

$$|(\Gamma'(u_j) - \Gamma'(u), \psi)| \leq C|f_j|_{p(x)/p(x)-1}|\nabla\psi|_{p(x)} \leq C|f_j|_{p(x)/p(x)-1}\|\psi\|,$$

de onde se conclui que

$$\|\Gamma'(u_j) - \Gamma'(u)\| \leq C|f_j|_{p(x)/p(x)-1}. \tag{a_{11}}$$

Por (a_5) e (a_7),

$$f_j \to 0, \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{a_{12}}$$

De (a_6) e (a_{10}), temos

$$f_j(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Daí,

$$f_j(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+}(g(x)^{p(x)} + |\nabla u(x)|^{p(x)}) \in L^1(\Omega) \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{a_{13}}$$

onde $q(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$.

De (a_{12}) e (a_{13}) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta que

$$\int_\Omega f_j^{q(x)} dx \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Desta forma pela Proposição 1.3 temos que $|f_j|_{q(x)} \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$.

Logo,

$$\|\Gamma'(u_j) - \Gamma'(u)\| \longrightarrow \quad \text{quando} \quad j \longrightarrow \infty,$$

ou seja, a derivada de Gateaux Γ' é contínua. Como

$$J_1'(u)v = M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx,$$

e M é contínua, concluimos que a aplicação $u \to J_1'(u)$ é contínua e portanto $J_1 \in C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$.

■

Afirmação A.2. O funcional J_2 é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$.

Demonstração: Primeiramente analisaremos o funcional $\widetilde{J}_2(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx$.

Definimos $G(s) = F(x, u + stv)$, onde $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, aplicado em G, no intervalo $[0,1]$, existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x, u + \xi tv)v. \tag{a_{14}}$$

Assim,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x,u)v, \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{a_{15}}$$

Aqui, usaremos o fato que $A_1 t^{\beta(x)-1} \leq f(x,t) \leq A_2 t^{\beta(x)-1}$, onde A_1 e A_2 são constantes positivas e $\beta^+(r+1) < p^*(x)$.

Sabemos que $v \in L^{\beta(x)}(\Omega)$. Temos ainda que $(|u|+|v|)^{\beta(x)-1} \in L^{\frac{\beta(x)}{\beta(x)-1}}$. Como

$$|f(x,u+\xi tv)v| \leq A_2|u+\xi tv|^{\beta(x)-1}|v| \leq A_2(|u|+|v|)^{\beta(x)-1}|v| \in L^1(\Omega). \tag{a_{16}}$$

Por (a_{14})-(a_{16}) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\widetilde{J}_2'(u)v = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}dx = \int_\Omega f(x,u)vdx.$$

Observe que $J_2(u) = \dfrac{1}{r+1}\left(\displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx\right)^{r+1}$, é a composição da função $h(s) = \dfrac{1}{r+1}s^{r+1}$ com $\widetilde{J}_2(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx$. Logo, pela Regra da Cadeia,

$$\left[\frac{1}{r+1}\left(\int_\Omega F(x,u)dx\right)^{r+1}\right]' = \left(\int_\Omega F(x,u)dx\right)^r \int_\Omega f(x,u)vdx.$$

A seguir estudaremos a continuidade de $u \to \widetilde{J}_2'(u)$. Consideremos uma sequência $(u_j) \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq 1$. Temos que

$$\begin{aligned} |(\widetilde{J}_2'(u_j) - \widetilde{J}_2'(u), v)| &= |\widetilde{J}_2'(u_j)h - \widetilde{J}_2'(u)v| \\ &\leq \int_\Omega |f(x,u_j) - f(x,u)||v|dx. \end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega)$, temos

$$u_j \to u, \quad \text{em} \quad L^{\beta(x)}(\Omega).$$

Logo, existe uma subsequência, ainda designada por (u_j) tal que

$$u_j(x) \to u(x), \quad \text{q.s.} \quad \text{em} \quad \Omega,$$

e

$$|u_j(x)| \leq k(x), \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \text{com} \quad k \in L^{\beta(x)}(\Omega).$$

Fazendo $f_j = |f(x,u_j) - f(x,u)|$, temos $f_j \leq A_2|u_j|^{\beta(x)-1} + A_2|u|^{\beta(x)-1}$, com $j \in \mathbb{N}$.

Note que $(f_j) \subset L^{\beta(x)/\beta(x)-1}(\Omega)$. Pela desigualdade de Hölder,

$$|(\widetilde{J'}_2(u_j) - \widetilde{J'}_2(u), v)| \leq C|f_j|_{\beta(x)/\beta(x)-1}|v|_{\beta(x)}.$$

Usando a imersão citada acima, temos

$$\|\widetilde{J}_2'(u_j) - \widetilde{J}_2'(u_j)\| \leq \overline{C}|f_j|_{\beta(x)/\beta(x)-1}.$$

Da continuidade de $f(x,\cdot)$,

$$f_j(x) \longrightarrow 0, \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Temos ainda

$$f_j(x) \leq A_2 k(x)^{\beta(x)-1} + A_2|u|^{\beta(x)-1} \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Daí,

$$f_j(x)^{\beta(x)/\beta(x)-1} \leq (A_2)^{q^{\pm}} 2^{q^+}(k(x)^{\beta(x)} + |u|^{\beta(x)}) \in L^1(\Omega), \text{ q.s. em } \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega f_j^{\beta(x)/\beta(x)-1} dx \to 0, \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Pela Proposição 1.3, tem-se $|f_j|_{\beta(x)/\beta(x)-1} \to 0, \quad \text{quando } j \to \infty$.

Assim,

$$\|\widetilde{J}_2'(u_j) - \widetilde{J}_2'(u_j)\| \to 0, \quad \text{quando } j \to \infty,$$

ou seja, $\widetilde{J}_2'$ é contínua.

Como a função $h = h(s)$ é contínua e diferenciável temos que a aplicação $u \to \left[\frac{1}{r+1}\left(\int_\Omega F(x,u)\right)^{r+1}\right]'(u) = \left(\int_\Omega F(x,u)\right)^r \widetilde{J'}_2(u)$ é contínua.

■

Afirmação A.3. O funcional J_3 é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$.

Demonstração: Semelhante ao da Afirmação 1.

■

Portanto, como

$$J_\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u) - J_3(u),$$

pelas Afirmações 1, 2 e 3, o funcional J_λ é de classe $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), I\!R)$.

■

A.1.2 Lema de Deformação

Esse resultado encontra-se em Rabinowitz [48], pág. 82.

Sejam E um espaço de Banach real, $J \in C^1(E, I\!R)$ satisfazendo a condição (PS), $A_c = \{u \in E; J(u) \leq c\}$ e $K_c = \{u \in E; J(u) = c, J'(u) = 0\}$. Se $c \in I\!R$, $\overline{\varepsilon} > 0$ e N é uma vizinhança de K_c, então existe $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que

(i) $\eta(0, u) = u, \ \ \forall u \in E$;

(ii) $\eta(t, u) = u$, se $J(u) \notin [c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}], \ \ \forall t \in [0,1]$;

(iii) $\eta(t, u)$ é um homeomorfismo de E sobre E, $\forall t \in [0,1]$;

(iv) $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \backslash N) \subset A_{c-\varepsilon}$;

(v) Se $K_c = \emptyset$, $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$;

(vi) $\|\eta(t, u) - u\| \leq 1$, $u \in E$, $\forall t \in [0,1]$;

(vii) $J(\eta(t, u)) \leq J(u)$, $u \in E$, $\forall t \in [0,1]$;

$(viii)$ Se $J(u)$ é par em u, então $\eta(t, u)$ é ímpar em u.

A.1.3 Teorema do Passo da Montanha

Esse resultado encontra-se em Willem [51] (pg. 13).

Teorema A.1. (Passo da Montanha) Sejam X um espaço de Banach e $\phi : X \to I\!R$ um funcional $C^1(X, I\!R)$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Suponhamos que existam uma constante $r > 0$ e $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e

$$\max\{\phi(0), \phi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \phi(u).$$

Defina

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]; X), \text{ tal que } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Então,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} \phi(\gamma(t))$$

é um valor crítico de ϕ.

A.1.4 Princípio Variacional de Ekeland

Este resultado encontra-se em de Figueiredo [31].

Teorema A.2. (Forma Fraca) Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\phi : X \to I\!R \cup \{\infty\}$ semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Então, para todo $\epsilon > 0$

existe $u_\epsilon \in X$ tal que,

$$\phi(u_\epsilon) \leq \inf_X \phi + \epsilon$$

e

$$\phi(u_\epsilon) < \phi(u) + \epsilon d(u, u_\epsilon), \quad \forall u \in X \quad \text{com} \quad u \neq u_\epsilon.$$

Teorema A.3. (Forma Forte) Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\phi : X \to I\!R \cup \{\infty\}$ semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Dados $\epsilon > 0$ e $\overline{u} \in X$ tais que

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ existe $u_\lambda \in X$ tal que

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u}),$$

$$d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda$$

e

$$\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda) \quad \forall u \neq u_\lambda.$$

A.2 Gênero de Krasnoselskii

Nesta seção apresentaremos algumas noções básicas do gênero de Krasnoselskii, importantes na demonstração de alguns resultados desse trabalho.

Seja X um espaço de Banach real. Designaremos por $\mathcal{U}$ a classe de todos os subconjuntos fechados $A \subset X \setminus \{0\}$ que são simétricos em relação à origem, ou seja, $u \in A$ implica $-u \in A$.

Definição A.2. Seja $A \in \mathcal{U}$. O gênero $\gamma(A)$ de A é definido com sendo o menor inteiro positivo k tal que existe uma aplicação ímpar $\phi \in C(A, I\!R^k)$ onde $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Se tal k não existir, dizemos que $\gamma(A) = \infty$. Além disso, definimos $\gamma(\emptyset) = 0$.

A seguir estabelecemos propriedades de gênero utilizados nesse trabalho. Outras informações, sobre esse tema, podem ser obtidas nas seguintes referências Ambrosetti e Malchiodi [3], Castro [16], Costa [24], Krasnoselskii [38] e Rabonowitz [48].

Teorema A.4. Seja $X = I\!R^N$ e $\partial\Omega$ a fronteira de um aberto, simétrico e limitado $\Omega \subset I\!R^N$, com $0 \in \Omega$. Então $\gamma(\partial\Omega) = N$.

Corollary A.2.1. $\gamma(S^{N-1}) = N$.

Como consequência deste resultado, temos que se X tem dimensão infinita, separável e S é a esfera unitária em X, então $\gamma(S) = \infty$.

A seguir vamos estabelecer um resultado devido a Clark [17].

Teorema A.5. Seja $J \in C^1(X, I\!R)$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale. Além disso, vamos supor que:

(i) J é par e limitado inferiormente;

(ii) Existe um conjunto compacto $K \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma(K) = k$ e $\sup_{x \in K} J(x) < J(0)$.

Então J possui pelo menos k pares de pontos críticos distintos e seus correspondentes valores críticos são menores do que $J(0)$.

O resultado seguinte encontra-se em Rabinowitz [48], pág 46.

Teorema A.6. Sejam $A, B \in \mathcal{U}$. Então

(i) Se $\gamma(A) > 1$, então A contém uma quantidade infinita de pontos distintos;

(ii) Se existe uma aplicação ímpar $h \in C(A, B)$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;

(iii) Se $A \subset B$, então $\gamma(A) \leq \gamma(B)$;

(iv) $\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$;

(v) Se V é um subespaço de E de codimensão k e $\gamma(A) > k$, então $A \cap V \neq \emptyset$;

(vi) Se A é um compacto, então $\gamma(A) < \infty$ e existe um $\delta > 0$ tal que $N_\delta(A) \subset \mathcal{U}$ e $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$ onde $N_\delta(A) = \{u \in E; \|u - a\| \leq \delta, \forall a \in A\}$;

(vii) Se $\gamma(B) < \infty$, então $\gamma(\overline{A \backslash B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$;

($viii$) Se W é uma vizinhança de 0 em $I\!R^k$ e existe um homeomorfismo ímpar $h \in C(A, \partial W)$ então $\gamma(A) = k$.

Referências Bibliográficas

[1] R.P. Agarwal, K. Perera & Z. Zhang, *On some nonlocal eigenvalue problems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S , Vol. 5, N. 4, August (2012)707-714.

[2] C.O Alves, F.J.S.A. Corrêa & T.F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005)85-93.

[3] A. Ambrosetti & A. Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge Stud. Adv. Math. 14 (2007).

[4] M. Avci, B. Cekic & R. A. Mashyiev, *Existence and multiplicity of the solutions of the $p(x)$-Kirchhoff type equation via genus theory*, Math. Methods Appl. Sci. 2011, 34 1751-1759.

[5] J.G. Azorero and I.P. Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term* , Trans. Amer. Math. Soc., 323 (1991), 877-895.

[6] J.W. Bebernes & A. Lacey, *Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems*, Adv. Differential Equations , 2(6) (1997)927-953.

[7] J.W. Bebernes & P. Talaga, *Nonlocal problems modelling shear banding*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. , (3), N. 2 (1996)79-103.

[8] J. F. Bonder, A. Silva; *The concentration compactness principle for variable exponent spaces and application*, Eletron. J. Differential Equations. Vol. 2010(2010), N. 141, 1 - 18.

[9] J. F. Bonder, N. Saintier & A. Silva, *On the Sobolev trace Theorem for variable exponent spaces in the critical range*, Ann. Mat. Pura Appl., may 2013

[10] J. F. Bonder, N. Saintier & A. Silva, *Existence of solutions to a critical trace equation with variable exponent*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 37 (2012), 579 - 594.

[11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Universitex, Springer, New York, 2011.

[12] T.J. Burns, *On a combustion - like model for plastic strain localization*, Shock Induced Transitions and Phase Structure in General Media, R. Fosdick, et al., Editors, Springer - Verlag, New York, Chapter 2.

[13] T.J. Burns, *Does a shear band result from a thermal explosion?*, Mechanics of Materials, 17 (1994)261-271.

[14] E. Caglioti, P.L. Lions, C. Marchiori & M. Pulvirenti, *A special class of stationary flows for two - dimensional Euler equations: A statistical mechanics description*, Comm. Math. Phys., 143 (1992)501-525.

[15] J.A. Carrillo, *On a nonlocal elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction*, Nonlinear Anal., Vol. 32, N. 1 (1998)97-115.

[16] A. Castro, *Metodos variacionales y analisis functional no linear*, in: X Coloquio Colombiano de Matemática, 1980.

[17] D.C. Clark, *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory*, Indiana Univ. Math. J., 22 (1972) 65-74.

[18] F.J.S.A. Corrêa & A.C.R. Costa, *A variational approach for a bi-nonlocal problem involving the p(x)-Laplacian and nonlinearity with nonstandard growth*, Glasgow Math. J. (2013) 1-17, doi:10.1017/S001708951300027X.

[19] F.J.S.A. Corrêa & A.C.R. Costa, *On a bi-nonlocal $p(x)$-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Math. Meth. Appl. Sci. 2014, doi: 10.1002/mma.3051.

[20] F.J.S.A. Corrêa & A.C.R. Costa, *On a $p(x)$-Kirchhoff Equation with Critical Exponent and an Additional Nonlocal Term*, aceito para publicação em Funkcialaj Ekvacioj.

[21] F.J.S.A. Corrêa & G.M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhof type via variational methods*, Bull. Aust. Math. Soc. 74 (2006)263-277.

[22] F.J.S.A. Corrêa & G.M. Figueiredo, *On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus*, Appl. Math. Lett., 22 (2009) 819-822.

[23] F.J.S.A. Corrêa & G.M. Figueiredo, *Existence and multiplicity of nontrivial solutions for a bi-nonlocal equation*, Adv. Differential Equations, Vol. 18, N. 5/6 (2013), 587-608.

[24] D.G. Costa, *Tópicos em análise não-linear e aplicações às equações diferenciais*, in: Escola Latino-Americana de Matemática, 1986.

[25] J. Dolbeault, *Stationary states in plasma physics: Maxwellian solutions of the Vlasov - Poisson system*, Math. Models. Meth. Appl. Sci., 1 (1991)183-148.

[26] X. Fan, *On nonlocal p(x)-Laplacian Dirichlet problems*, Nonlinear Anal. 72 (2010)3314-3323.

[27] X.L. Fan, J.S. Shen & D. Zhao, *Sobolev embedding theorems for spaces* $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl., 262 (2001)749-760.

[28] X.L. Fan & Q.H. Zhang, *Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problems*, Nonlinear Anal., 52 (2003)1843-1852.

[29] X. Fan, Y. Zhao & Q. Zhang, *A strong maximum principle for p(x)-Laplace equations*, Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 21, N. 1, (2000) 1-7.

[30] X.L. Fan & D. Zhao, *On the spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{m,p(x)}$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001)424-446.

[31] D. G. Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, volume 81 of Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics . Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.

[32] G. M. Figueiredo & J. R. S. Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth*, Differential and Integral Equations, vol. 25 (2012), 853 - 868.

[33] Y. Fu, *The principle of concentration compactness in* $L^{p(x)}$ *spaces and its application*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 1876 - 1892.

[34] D. Gogny & P.L. Lions, *Sur les états déqulibre pour las densités életroniques das les plasmas*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér., 23 (1998)137-153.

[35] J.M. Gomes & L. Sanchez, *On a variational approach to some non-local boundary value problems*, Appl. Anal. , Vol. 84, N. 9, September (2005)909-925.

[36] E. Guo & P. Zhao, *Existence and multiplicity of solutions for nonlocal* $p(x)$*-Laplacian equations with nonlinear Neumann boundary conditions*, Boundary Value Problems, 2012.

[37] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[38] M. A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, MacMillan, New York, 1964.

[39] A. Krzywick & T. Nadzieja, *Some results concerning the Poisson - Boltzmann equation*, Zastosowania Math. Appl. Math., 21, 2 (1991)265-272.

[40] S. Liang and J. Zhang, *Infinitely many small solutions for the $p(x)$-Laplacian operator with nonlinear boundary conditions*, Ann. Mat. Pura Appl. V.192, N.1, (2013), 1-16.

[41] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977) (1978), 284-346.

[42] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case Part I*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1) (1985) 145-201; *Part II*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (2) (1985) 45-121.

[43] M. Mihailescu & V. Radulescu, *A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids*, Proceedings of the Royal Society A, 462 (2006)2625-2641.

[44] M. Mihailescu & V. Radulescu, *On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue roblem in Sobolev spaces with variable exponent*, Proc. Amer. Math. Soc. , Vol. 135, N. 9, September (2007)2929-2937.

[45] W.E. Olmstead, S. Nemat - Nasser & L. Ni, *Shear bands as surfaces of discontinuity*, J. Mech. Phys. Solids, 42 (1994)697-709.

[46] K. Perera & Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via Yang index*, J. Differential Equations , 221 (2006)246-255.

[47] K. Perera & Z. Zhang, *Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flows*, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006)456-463.

[48] P. H. Rabinowitz *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Reg. Conf.series in math. 65 (1984).

[49] M. Rŭžička, *Electrorheological Fluids: Modelling and Mathematical Theory*, Springer - Verlag, Berlin, 2000.

[50] Q. Zhang, *A strong maximum principle for differential equations with nonstandard p(x)-growth conditions*, J. Math. Anal. Appl. 312 (2005) 24-32.

[51] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.

[52] J. Yao, *Solutions for Neumann boundary value problems involving $p(x)$-Laplace operators*, Nonlinear Anal. 68 (5) (2008) 1271-1283.