



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

**Estabilidade assintótica e numérica de
sistemas fracamente dissipativos de
Mindlin-Timoshenko**

Anderson David de Souza Campelo

Belém

2014

Anderson David de Souza Campelo

Estabilidade assintótica e numérica de sistemas fracamente dissipativos de Mindlin-Timoshenko

Tese submetida ao corpo docente do Programa em Associação Ampla de Doutorado em Matemática - UFPA/UFAM, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém

2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Campelo, Anderson David de Souza, 1983-
Estabilidade assintótica e numérica de
sistemas fracamente dissipativos de
Mindlin-Timoshenko / Anderson David de Souza
Campelo. - 2014.

Orientador: Mauro de Lima Santos.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do
Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais,
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Doutorado), Belém, 2014.

1. Equações diferenciais parciais. 2.
Equações diferenciais - Teoria assintótica. 3.
Diferenças finitas. 4. Estabilidade. I. Título.

CDD 23. ed. 515.353

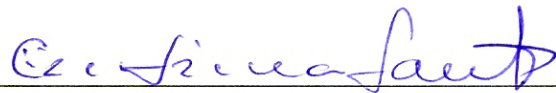
Estabilidade assintótica e numérica de sistemas fracamente dissipativos de Mindlin-Timoshenko

por

Anderson David de Souza Campelo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA - UFPA/UFAM, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

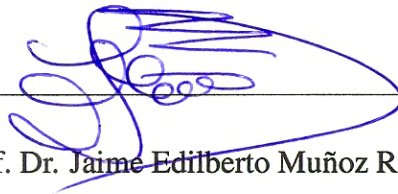
Aprovada em 27 de Junho de 2014 por:



Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)



Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (UFPA)



Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera (LNCC/UF RJ)



Prof. Dr. Ma To Fu (USP)

À minha família.

*“Entrega o teu caminho ao
Senhor, confia nEle, e o mais
Ele fará.” Sl. 37.5.*

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a vida e a oportunidade de estudar.
- Aos meus pais que transformaram essa oportunidade em realização, através de seus incentivos e carinho.
- Agradeço aos professores e amigos Mauro Santos e Dilberto Almeida Jr. que como orientador e co-orientador, dedicaram tempos para discussões, aprendizados e sem os quais esta tese não seria possível.
- Aos meus orientadores de mestrado, professores Marcus Rocha e Valcir Farias, pelo incentivo e conselho que me fizeram despertar para pesquisa.
- Ao Programa de Doutorado em Matemática da Universidade Federal do Pará pelo apoio de todos os professores e técnicos.
- Aos meus amigos desta jornada de formação: Anderson Ramos, Sebastião Cordeiro, Lindomar Ribeiro, Gesson Mendes, Renato Lobato e Walter Martins.
- A CAPES, pela concessão da bolsa de doutorado e apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

Lista de Figuras

1.1	Placa.	3
1.2	Seção transversal de uma placa deformada.	4
2.1	Decaimento Exponencial.	26
2.2	Comportamento da Energia.	26
6.1	$d_i = 0, i = 0, 1, 2.$	136
6.2	$d_i = 0, i = 0, 1, 2.$	136
6.3	$d_i > 0, i = 0, 1, 2.$	136
6.4	$d_i > 0, i = 0, 1, 2.$	136
6.5	$v_1^2 \neq v_2^2.$	137
6.6	$v_1^2 = v_2^2.$	137
6.7	$v_1^2 \neq v_2^2.$	137
6.8	$v_1^2 = v_2^2.$	137
6.9	$v_1^2 \neq v_2^2.$	138
6.10	$v_1^2 = v_2^2.$	138
6.11	$v_1^2 \neq v_2^2.$	139
6.12	$v_1^2 = v_2^2.$	139
6.13	$d_0 = d_2 = 0, d_1 > 0, v_1^2 \neq v_2^2.$	139
6.14	$d_0 = d_2 = 0, d_1 > 0, v_1^2 = v_2^2.$	139
6.15	$d_0 = d_1 = 0, d_2 > 0, v_1^2 \neq v_2^2.$	140
6.16	$d_0 = d_1 = 0, d_2 > 0, v_1^2 = v_2^2.$	140
6.17	$d_2 = 0, d_0, d_1 > 0, v_1^2 \neq v_2^2.$	140
6.18	$d_2 = 0, d_0, d_1 > 0, v_1^2 = v_2^2.$	140
6.19	$d_1 = 0, d_0, d_2 > 0, v_1^2 \neq v_2^2.$	141
6.20	$d_1 = 0, d_0, d_2 > 0, v_1^2 = v_2^2.$	141

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Resumo

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

Estabilidade assintótica e numérica de sistemas fracamente dissipativos de Mindlin-Timoshenko

por Anderson David de Souza Campelo

No presente trabalho, mostramos que existe um número que caracteriza a estabilização de sistemas de Mindlin-Timoshenko. No primeiro momento, introduzimos dissipações do tipo atrito atuando sobre as equações dos ângulos de rotação. Em seguida, colocamos uma dissipação também do tipo atrito atuando apenas na equação do deslocamento transversal. Identificamos que o sistema de Mindlin-Timoshenko possui duas velocidades características $v_1^2 := K/\rho_1$ e $v_2^2 := D/\rho_2$ e mostramos que ambos os sistemas são exponencialmente estáveis se, e somente se,

$$v_1^2 = v_2^2.$$

Caso contrário, provamos que os dois sistemas são polinomialmente estáveis com taxa de decaimento ótima. Para certificar nossos resultados analíticos, realizamos um estudo numérico dos modelos dissipativos utilizando modelos semidiscretos e totalmente discretos em diferenças finitas.

Palavras-chave: Sistemas de Mindlin-Timoshenko; velocidade de ondas; estabilidade exponencial; decaimento ótimo; diferenças finitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Abstract

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Doutorado em Matemática

**Asymptotic and numerical stability of weakly dissipative systems of
Mindlin-Timoshenko.**

by Anderson David de Souza Campelo

In the present work, we show that there exists a number that characterizes the stabilization Mindlin-Timoshenko systems. In the first moment, we introduce frictional dissipations acting on the angle rotations. After that we put a frictional dissipation acting only on equation of the transverse displacement. We identify that Mindlin-Timoshenko system has two characteristics velocities $v_1^2 := K/\rho_1$ and $v_2^2 := D/\rho_2$ and we show that both systems are exponentially stable if only if

$$v_1^2 = v_2^2.$$

On the contrary we prove that systems are polynomially stable with optimal rate decay. To certify our analytical results, we carry out a numerical study of the dissipative models using semidiscrete and totally discrete models in finite differences.

Keywords: Mindlin-Timoshenko system; velocities of waves; exponential stability; optimal decay; finite difference.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Considerações Gerais e Motivações	1
1.2	Objetivos da Tese	10
1.3	Organização da Tese	10
I	Resultados de Análise	13
2	Modelo Dissipativo de uma placa de Mindlin-Timoshenko	14
2.1	Introdução	14
2.2	O Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares	15
2.3	A energia do sistema	22
3	Mindlin-Timoshenko: Dissipação nas equações de rotação	28
3.1	Introdução	28
3.2	Falta de estabilidade exponencial	30
3.3	Estabilidade Assintótica	36
3.4	Decaimento Polinomial	53
4	Mindlin-Timoshenko: Dissipação na equação de deslocamento	60
4.1	Introdução	60
4.2	Falta de estabilidade exponencial	61
4.3	Estabilidade Assintótica	68
4.4	Decaimento Polinomial	84

II	Resultados Numéricos	88
5	Modelos semidiscretos em Diferenças Finitas	89
5.1	Introdução	89
5.2	Modelo Semidiscreto em Diferenças Finitas	91
5.3	Análise numérica para o θ -esquema	104
6	Modelo espaço-tempo em Diferenças Finitas	113
6.1	Introdução	113
6.2	Método numérico explícito em diferenças finitas	114
6.3	A Energia Discreta	118
6.4	Simulações Numéricas	135
6.4.1	Casos conservativo e dissipação total	136
6.4.2	Dissipação nos ângulos de rotação: $d_0 = 0, d_1 > 0, d_2 > 0$	137
6.4.3	Dissipação somente no deslocamento transversal: $d_0 > 0, d_1 = d_2 = 0$	138
6.4.4	Dissipação somente em um ângulo de rotação: $d_0 = d_2 = 0, d_1 > 0$ ou $d_0 = d_1 = 0, d_2 > 0$	139
6.4.5	Dissipação no deslocamento e um ângulo de rotação: $d_0, d_1 > 0, d_2 = 0$ ou $d_0, d_2 > 0, d_1 = 0$	140
7	Considerações Finais	142
	Referências Bibliográficas	145

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais e Motivações

Podemos caracterizar placas como elementos estruturais limitados por duas superfícies planas distanciadas entre si de uma grandeza designada por espessura. No caso em que esta espessura for muito menor em comparação com as outras dimensões das superfícies, tais como comprimento e largura, as placas são designadas por placas finas.

Usadas em vários campos da engenharia, as placas finas combinam leveza e uma eficiência com alta capacidade de carga, economia e eficácia tecnológica. Sejam elas usadas em pontes, pavimentos, aviões, navios, instrumentos, partes de máquinas, etc.

Sistemas matemáticos que governam a dinâmica de estruturas flexíveis do tipo placas são bem estabelecidos na literatura matemática e engenharias. Historicamente, o primeiro impulso para uma instrução matemática de problemas de placa, provavelmente foi feito por Leonhard

Euler (1707–1783), passando por Daniel Bernoulli (1700–1782), Ernst Chladni (1756–1827), Jacques Bernoulli (1759–1789), Sophie Germain (1776–1831), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) e Siméon-Denis Poisson (1781–1840), sendo estes dois últimos os primeiros a estudar o problema de placas flexíveis [42].

A primeira teoria satisfatória a respeito de placas flexíveis é devida a Claude-Louis Navier (1785–1836), que em 1823, considerou a rigidez à flexão D proporcional ao cubo da espessura h da placa [40]. No entanto, está associada a Gustav Kirchhoff (1824–1887), a primeira teoria *completa* sobre placas flexíveis. Kirchhoff, em 1850, publicou um importante resultado sobre a teoria de placas finas. Ele obteve uma equação diferencial de quarta ordem, onde a rigidez à flexão D foi definida em termos do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson μ . Todavia, a teoria de Kirchhoff não leva em conta o efeito da deformação por cortante, assumindo que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação [16, 17].

Em 1944, Eric Reissner (1913–1996), desenvolveu um modelo de placas incluindo os efeitos das deformações por cortante transversais, não consideradas no modelo clássico de placas de Kirchhoff. A formulação do modelo de placas de Reissner foi derivada do princípio variacional da energia de deformação complementar com a suposição de uma distribuição linear de tensões de flexão e uma distribuição de tensões de corte parabólico [43, 8].

Em 1951, Raymond Mindlin (1906–1987), publica um modelo muito próximo daquele de Reissner, porém, ao contrário deste, que considerou o equilíbrio da placa, Mindlin levou em conta a vibração da placa e derivou suas equações da placa a partir das equações de elasticidade sem o uso de princípios variacionais [4]. A teoria de placas de Mindlin, inclui os efeitos de inércia rotatória bem como os efeitos da deformação por cortante, o que é equivalente a teoria unidimensional de vigas de Stephen Timoshenko (1878–1972), proposta em 1921 [22].

O modelo de Mindlin-Timoshenko descreve o movimento elástico de uma placa fina homogênea e isotrópica. O movimento presume-se ser elástico, no sentido de que não ocorre nenhuma deformação permanente da placa.

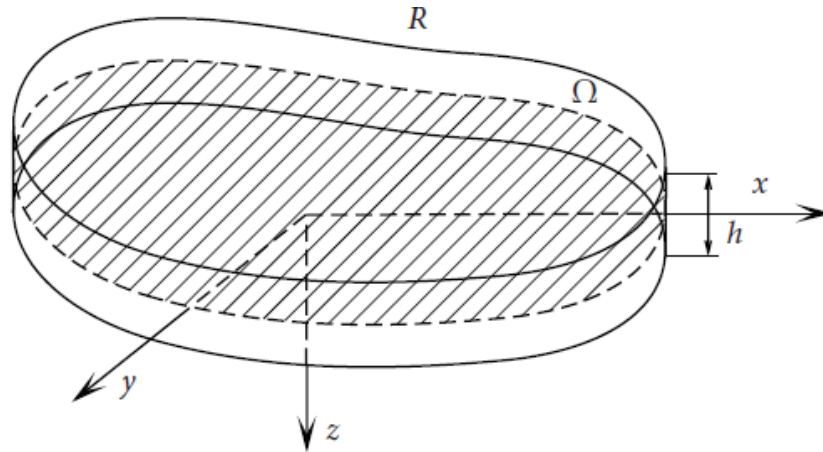


FIGURA 1.1: Placa.

Consideremos a placa em coordenadas retangulares $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assumimos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira suave dada por $\Gamma = \partial\Omega$. Consideremos a espessura da placa h e assumimos que, em estado de equilíbrio, ela ocupa a região $R = \Omega \times]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$, isto é, as faces da placa estão no plano $z = \frac{h}{2}$, chamado de plano médio da placa, (ver Figura 1.1, obtida em [29]). Os ângulos de rotação de um filamento da placa são denotados pelas funções $\psi = \psi(x, y, t)$ e $\varphi = \varphi(x, y, t)$ e a função $\omega = \omega(x, y, t)$ representa o deslocamento transversal do plano médio da placa, para $(x, y) \in \Omega$, $t > 0$.

No modelo de Mindlin-Timoshenko [16, 17], os filamentos da placa permanecem normais ao plano médio quando não são submetidos a nenhuma tensão em deformação, mas não necessariamente estes filamentos permanecem perpendicular ao plano médio da placa sob deformação (ver Figura 1.2, obtida em [29]). Isto ocorre pois se considera a deformação do corte transversal, o que nos leva as seguintes relações aproximadas

$$\psi \approx - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \tilde{\psi} \right), \quad \varphi \approx - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \tilde{\varphi} \right)$$

onde $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\varphi}$ representam um fator de correção devido ao efeito de corte.

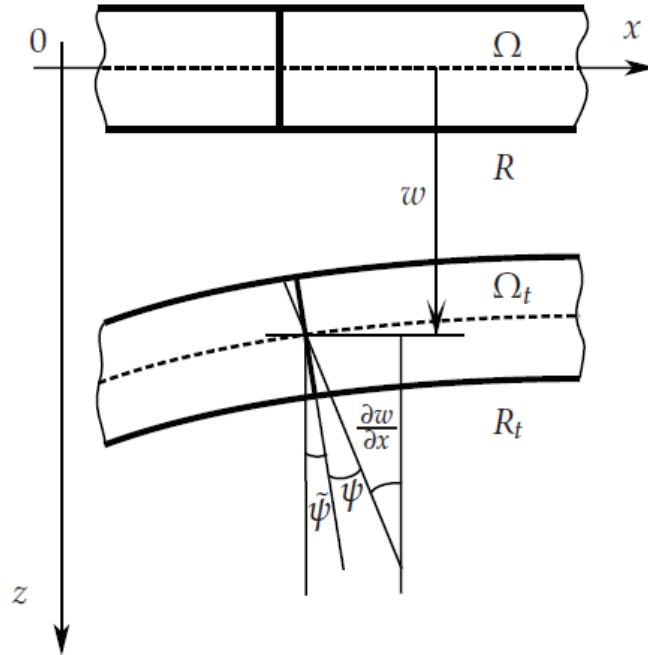


FIGURA 1.2: Seção transversal de uma placa deformada.

De um modo geral, podemos descrever as equações bidimensionais que regem a teoria de Mindlin-Timoshenko para o estiramento de placas como:

$$\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (1.1)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x \quad (1.2)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y \quad (1.3)$$

onde $I = h^3/12$ representa o momento de inércia, ρ é a densidade do material, M é momento fletor e Q o esforço cortante.

Tanto os momentos fletores, quanto as forças cortantes são grandezas por unidade de tempo, e considerando-se a Lei de Hooke e as hipóteses de que ψ , φ e $\nabla \omega$ são pequenos (ver [34]),

estas relações são dadas por

$$\begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), & M_y &= D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\ M_{xy} &= D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$Q_x = kGh \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi \right), \quad Q_y = kGh \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \varphi \right). \quad (1.5)$$

onde k é o fator de correção do cortante, $G = E/2(1 + \mu)$ exprime o módulo de rigidez do cortante e o fator D denota a rigidez à flexão da placa e é dado por $D = EI/(1 - \mu^2)$, em que E é o módulo de Young e μ é a constante de Poisson. O valor do fator de correção k depende de μ e varia quase linearmente de 0,76 a 0,91. Por outro lado, μ está compreendido no intervalo $(0, 1/2)$.

Às equações (1.4) e (1.5) denotamos por *equações constitutivas* e podem ser substituídas nas *equações de movimento* (1.1)–(1.3), resultando no seguinte sistema de três equações diferenciais parciais hiperbólicas.

$$\rho_1 \omega_{tt} - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = 0, \quad (1.6)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \psi_{yy} - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \varphi_{xy} + K(\psi + \omega_x) = 0, \quad (1.7)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \varphi_{xx} - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \psi_{xy} + K(\varphi + \omega_y) = 0, \quad (1.8)$$

aqui $K = \kappa Gh$ denota o módulo de cisalhamento.

Estruturas elásticas, tais como, vigas, placas e conchas tem sido alvo de estudo de muitos pesquisadores das áreas de matemática, física e engenharias. Todas estas estão preocupadas com as propriedades de equações diferenciais de vários tipos. A matemática, por exemplo, incide sobre a existência e unicidade e estabilidade de soluções. A estabilidade de soluções, neste sentido, está voltada no interesse de modelos matemáticos que dissipam energia durante o movimento do sistema, ou seja, nos modelos dissipativos.

Basicamente, o interesse no âmbito matemático é direcionado às propriedades assintóticas das soluções dos respectivos sistemas dissipativos, ou seja, verificar se a dissipação induzida por algum mecanismo dissipativo é forte o suficiente para estabilizar o sistema e qual o tipo de taxa de decaimento que pode ser obtida. Nesse sentido, estuda-se o comportamento assintótico das soluções a fim de obter um controle das mesmas, seja um controle do tipo exponencial ou polinomial (ver [14] para discussões mais detalhadas dos papéis comparativos de estabilidade assintótica e exponencial na teoria de controle).

Dizemos que um sistema é exponencialmente estável se existirem constantes positivas C e ω de modo que

$$\|U(t)\| \leq Ce^{-\omega t} \|U(0)\|, \quad t \geq 0, \quad (1.9)$$

onde $U(t)$ resolve um problema de valor inicial associado ao modelo em equações diferenciais parciais.

Sob a ótica da estabilidade exponencial, em particular de estruturas flexíveis, o modelo de vigas de Timoshenko, tem sido largamente estudado (ver [15, 39, 2, 3, 27, 26, 36]). E devido, a sua semelhança com o modelo de placas de Mindlin-Timoshenko, nos é conveniente explorar alguns desses trabalhos.

Primeiramente, considere abaixo as equações que regem as vibrações mecânicas em uma viga plana sem a presença de qualquer tipo de mecanismo dissipativo estabelecidas por Timoshenko [41],

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (1.10)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (1.11)$$

onde assumimos que $\rho_1 = \rho A$, $\kappa = kGA$, $\rho_2 = \rho I$ e $b = EI$. Discutiremos, agora, alguns dos principais trabalhos presentes na literatura considerando estabilidade de sistemas do tipo Timoshenko.

Em 1999, A. Soufyane [39] investigou a estabilização uniforme de um modelo dissipativo de vigas de Timoshenko com somente um mecanismo dissipativo localmente distribuído e condições de contorno Dirichlet-Dirichlet, no qual constatou que a energia de soluções decresce exponencialmente se, e somente se, as velocidades associadas ao sistema são iguais, isto é,

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}. \quad (1.12)$$

Um outro resultado igualmente importante é devido a J. Muñoz Rivera e R. Racke [27], que em 2003, estudaram um caso linear com dissipação $a\psi_t$ ($a > 0$) e provaram que a propriedade de decaimento exponencial das soluções ocorre se, e somente se, as velocidades associadas são iguais, tal como em (1.12). Resultados análogos, foram obtidos por F. Ammar-Khodja *et al.* [3] e D. Almeida Júnior *et al.* [2], o primeiro considerou um efeito dissipativo do tipo memória agindo na equação das rotações angulares, e o segundo um mecanismo dissipativo linear atuando na equação do deslocamento transversal. Para ambos a estabilidade exponencial é condicionada a igualdade entre as velocidades de propagação de ondas do sistema.

Inspirado nos resultados da literatura em estabilização de sistemas dissipativos unidimensionais de Timoshenko, surge um questionamento natural: quais são as velocidades de propagação de ondas para Mindlin-Timoshenko? Então, mantendo em mente o sistema (1.6)–(1.8) e levando em conta que

$$\frac{1 - \mu}{2} = 1 - \frac{1 + \mu}{2}, \quad (1.13)$$

podemos reescrever as equações (1.6)–(1.8) como

$$\rho_1 \omega_{tt} - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = 0, \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\Delta\psi + D\frac{1 + \mu}{2}\psi_{yy} - D\frac{1 + \mu}{2}\varphi_{xy} + K(\psi + \omega_x) = 0, \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\Delta\varphi + D\frac{1 + \mu}{2}\varphi_{xx} - D\frac{1 + \mu}{2}\psi_{xy} + K(\varphi + \omega_y) = 0, \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Observe que $\frac{K}{\rho_1} = \frac{k}{2(1+\mu)} \frac{E}{\rho}$ onde a relação entre a tensão E e a densidade ρ tem dimensão de velocidade. Analogamente, temos também que $\frac{D}{\rho_2} = \frac{1}{(1-\mu^2)} \frac{E}{\rho}$ possui dimensão de velocidade. Desta forma, definimos

$$v_1^2 := K/\rho_1 \quad \text{e} \quad v_2^2 := D/\rho_2, \quad (1.17)$$

como sendo as velocidades de propagação de ondas do sistema de Mindlin-Timoshenko. A partir disto, surge uma nova questão: o que acontece em termos de estabilização do sistema quando (1.6)-(1.8) quando

$$v_1^2 - v_2^2 = 0? \quad (1.18)$$

Agora, vamos mencionar alguns resultados matemáticos relativo ao modelo de oscilações em estruturas elásticas do tipo placas. O mais conhecido deles é devido a J. Lagnese, que em sua monografia [16], abordou a questão de estabilização uniforme e forte de placas puramente elásticas por meio de *damping* na fronteira. Ele considerou um domínio limitado Ω com uma fronteira Lipschitz Γ tal que $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1$, onde $\bar{\Gamma}_0$ e $\bar{\Gamma}_1$ são subconjuntos abertos e disjuntos de Γ com $\Gamma_1 \neq \emptyset$ e ao sistema (1.6)–(1.8) ele associou as seguintes condições de fronteira

$$\omega = \psi = \varphi = 0 \quad \text{em } \Gamma_0, \quad (1.19)$$

$$K \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi, \frac{\partial \omega}{\partial y} + \varphi \right) \cdot \nu = m_1 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (1.20)$$

$$D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \cdot \nu = m_2 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (1.21)$$

$$D \left(\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \nu = m_3 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (1.22)$$

onde $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal exterior a Γ e $\{m_1, m_2, m_3\}$ definem a dissipação de fronteira linear dada por

$$(m_1, m_2, m_3)' = -F(\omega_t, \psi_t, \varphi_t)',$$

com $F = [f_{ij}]$ uma matriz real 3×3 de funções de $L^\infty(\Gamma_1)$, tal que F é simétrica e semi-definida positiva em Γ_1 . Lagnese provou que as equações (1.6)–(1.8) com condições de contorno (1.19)–(1.22) exponencialmente estável, sem qualquer restrição entre os coeficientes do sistema. Em 2003, um resultado análogo foi obtido por J. Muñoz Rivera e H. Portillo Oquendo [25], onde eles consideraram condições de fronteira do tipo memória

$$\omega = \psi = \varphi = 0 \text{ em } \Gamma_0, \quad (1.23)$$

$$\omega + K \int_0^t g_1(t-s) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}(s) + \psi(s), \frac{\partial \omega}{\partial y}(s) + \varphi(s) \right) \cdot \nu \, ds = 0 \text{ em } \Gamma_1, \quad (1.24)$$

$$\psi + D \int_0^t g_2(t-s) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(s) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}(s), \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(s) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(s) \right) \right) \cdot \nu \, ds = 0 \text{ em } \Gamma_1, \quad (1.25)$$

$$\varphi + D \int_0^t g_3(t-s) \left(\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(s) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(s) \right), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(s) + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}(s) \right) \cdot \nu \, ds = 0 \text{ em } \Gamma_1, \quad (1.26)$$

onde $g_i, i = 1, 2, 3$ são os núcleos. Neste caso, eles provaram que as soluções do sistema (1.6)–(1.8) mais as condições de contorno (1.23)–(1.26) são exponencialmente estável desde que os núcleos tenham um comportamento exponencial, e são polinomialmente estáveis para núcleos do tipo polinomial. Dissipações similares foram usadas por M. L. Santos [37], onde o autor considerou um modelo de Timoshenko em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Para os casos onde os mecanismos dissipativos atuam em todo o domínio, relatamos o trabalho de H. Fernández Sare [7]. Ele considerou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com uma fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, com $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ disjuntos e não-vazios. Ao sistema de Mindlin-Timoshenko (1.6)–(1.8), o autor introduziu dissipações do tipo friccional atuando nas equações dos ângulos de rotação. Levando em conta, as seguintes condições de fronteira

$$\omega = 0, \quad \text{em } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (1.27)$$

$$\psi = 0, \quad \left(\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \quad (1.28)$$

$$\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+, \quad (1.29)$$

onde $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário exterior a Γ . Fernández Sare provou, usando um critério de resolvente, que o sistema de Mindlin-Timoshenko não é exponencialmente estável independente de qualquer relação entre os coeficientes, o que, neste caso, difere do análogo unidimensional.

Em 2014, M. Jorge Silva *et al.* [13] desenvolveu um estudo a respeito da estabilidade assintótica para placas de Mindlin-Timoshenko, introduzindo dissipações do tipo Kelvin–Voigt às equações que as regem rotações angulares. Jorge Silva mostrou que o semigrupo associado a este sistema não é nem analítico tão pouco exponencialmente estável. Neste caso, o autor mostrou que as soluções decaem polinomialmente.

1.2 Objetivos da Tese

O principal objetivo desta tese é estudar o comportamento da energia de modelos dissipativos de Mindlin-Timoshenko. Neste contexto, motivados pelos resultados para o modelo de vigas de Timoshenko, em que para alguns trabalhos descritos na literatura, é bem sabido que os coeficientes do sistema desempenham um papel importante nas configurações de estabilização do sistema, vamos procurar provar um resultado que caracterize a estabilidade exponencial para o modelo de Mindlin-Timoshenko, ainda que esteja condicionado a uma possível relação entre os coeficientes. Paralelamente, desenvolvemos métodos numéricos semidiscretos e totalmente discretos no contexto das diferenças finitas, em que consideramos alguns aspectos da análise numérica e reproduzimos numericamente as propriedades de estabilização.

1.3 Organização da Tese

No Capítulo 2 apresentamos um modelo dissipativo de Mindlin-Timoshenko com dissipações do tipo atrito atuando em cada uma das três equações do sistema, $d_0\omega_t$, $d_1\psi_t$ e $d_2\varphi_t$, respectivamente. Analisamos a existência e unicidade de soluções utilizando-se de técnicas de semigrupo

de operadores lineares. Apresentamos a energia do sistema, a qual naturalmente é não-crescente e levantamos questionamentos a respeito de decaimento polinomial e exponencial.

No Capítulo 3 estabelecemos um sistema de Mindlin-Timoshenko com dissipações agindo nos ângulos de rotação, bastando para isso considerar $d_0 = 0$ no sistema do Capítulo 2. Os principais resultados matemáticos versam sobre a propriedade de decaimento exponencial e a falta de estabilidade exponencial. Para ambos os resultados, usamos o teorema de estabilização uniforme de Gearhart-Herbst-Huang-Prüss. Outro resultado importante descrito no Capítulo 3 diz respeito ao decaimento polinomial cuja taxa é ótima. Para provar este resultado, nos utilizamos do Teorema de Borichev e Tomilov.

O Capítulo 4 possui a mesma estrutura de resultados apresentados no Capítulo 3. Porém, desta vez é estudado o sistema de Mindlin-Timoshenko com uma dissipação atuante somente na equação que governa o deslocamento transversal. Neste ponto, é importante ressaltar que a estabilidade exponencial de ambos os sistemas apresentados nos Capítulos 3 e 4, ocorre sob a hipótese de igualdade entre as velocidades de propagações de ondas.

No Capítulo 5 desenvolvemos modelos numéricos semidiscretos em diferenças finitas considerando os mesmos problemas de placas de Mindlin-Timoshenko expostos nos capítulos anteriores. Neste capítulo debatemos a respeito do problema de Trancamento no Cortante (do inglês *shear locking*), o qual é uma anomalia numérica bem conhecida nas formulações em elementos finitos lineares quando aplicadas sobre estruturas elásticas do tipo vigas e placas. O problema de trancamento no cortante introduz parâmetros extras sobre os coeficientes de rigidez. Então, neste capítulo, em um primeiro momento, apresentamos uma discretização baseada nos trabalhos de J. Wright e D. Almeida Júnior que visa contornar este efeito numérico indesejado. Em seguida, investigamos os termos sobressalentes que ocasionam o trancamento, e para isto usamos o θ -esquema.

No Capítulo 6 apresentamos uma discretização espaço-temporal em diferenças finitas do modelo de Mindlin-Timoshenko, e por simplicidade adotamos condições de contorno do tipo Dirichlet homogênea. Neste capítulo, nos preocupamos em desenvolver modelos livres de

sobrestimação nos coeficientes de rigidez, decorrentes do trancamento no cortante. Apresentamos a energia numérica, onde nos preocupamos em preservar o seu caráter conservativo, a fim de assegurar uma medida de precisão do modelo numérico. Finalizamos o capítulo com as comprovações numéricas das propriedades de decaimento exponencial numérico e a falta de decaimento exponencial numérico.

Parte I

Resultados de Análise

Modelo Dissipativo de uma placa de Mindlin-Timoshenko

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar o seguinte modelo dissipativo de uma placa fina bidimensional de Mindlin-Timoshenko.

$$\rho_1 \omega_{tt} - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y + d_0 \omega_t = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\psi_{yy} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\varphi_{xy} + K(\psi + \omega_x) + d_1 \psi_t = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\varphi_{xx} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\psi_{xy} + K(\varphi + \omega_y) + d_2 \varphi_t = 0, \quad (2.3)$$

em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, onde Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^2 . Aqui, consideramos $\rho_1 = \rho h$ e $\rho_2 = \frac{\rho h^3}{12}$, onde ρ simboliza a massa por unidade de volume, h é a espessura uniforme da placa, μ é a constante de Poisson ($0 < \mu < \frac{1}{2}$), $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ denota o módulo de rigidez à flexão e

$K = \frac{kEh}{2(1+\mu)}$ exprime o módulo de cisalhamento, onde E é o módulo de Young e k é um fator de correção de cisalhamento. Além disso, d_i , $i = 0, 1, 2$ são as constantes positivas de dissipação. Já as funções $\psi = \psi(x, y, t)$ e $\varphi = \varphi(x, y, t)$ representam os ângulos de rotação de um filamento da placa e a função $\omega = \omega(x, y, t)$ denota o deslocamento transversal da superfície média da placa, para $(x, y) \in \Omega$, $t > 0$. Associamos ao sistema as seguintes condições iniciais

$$\omega(x, y, 0) = \omega_0(x, y), \quad \omega_t(x, y, 0) = \omega_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (2.4)$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad \psi_t(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (2.5)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (2.6)$$

e condições de contorno como sugeridas em [7], a saber

$$\omega = 0, \quad \text{em } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (2.7)$$

$$\psi = 0, \quad \left(\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \quad (2.8)$$

$$\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+. \quad (2.9)$$

aqui consideramos a fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, com $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ disjuntos e não-vazios, e $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário exterior a Γ .

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2.2 discutiremos existência, regularidade e unicidade de soluções globais do problema (2.1)–(2.9) via método de semigrupo de operadores lineares. Na Seção 2.3 estabelecemos a energia de soluções associada ao sistema (2.1)–(2.9), e mostramos que esta energia é decrescente ao longo do tempo t .

2.2 O Cenário de Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, iremos estudar existência e unicidade de soluções para o sistema de Mindlin-Timoshenko, utilizando-se da Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares (ver [28]). Para nos

dar uma formulação exata para o sistema (2.1)–(2.9), deixe-nos considerar Ω como o interior de uma placa retangular

$$\Omega := [0, L_1] \times [0, L_2], \quad \text{com } L_1, L_2 > 0.$$

Definimos

$$\Gamma_1 := \{(x, y) : 0 < x < L_1, y = 0, L_2\},$$

$$\Gamma_2 := \{(x, y) : 0 < y < L_2, x = 0, L_1\}.$$

Note que $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$. Sob as hipóteses acima em Ω , vamos considerar o seguinte espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_{\Gamma_2}^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o qual é um espaço de Hilbert, dotado do seguinte produto interno

$$\begin{aligned} (U, V)_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int_{\Omega} u^2 \bar{v}^2 \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} u^4 \bar{v}^4 \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} u^6 \bar{v}^6 \, dx \, dy \\ &+ K \int_{\Omega} (u^3 + u_x^1) (\bar{v}^3 + \bar{v}_x^1) \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (u^5 + u_y^1) (\bar{v}^5 + \bar{v}_y^1) \, dx \, dy \\ &+ D \int_{\Omega} u_x^3 \bar{v}_x^3 \, dx \, dy + D \int_{\Omega} u_y^5 \bar{v}_y^5 \, dx \, dy \\ &+ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} (u_y^3 + u_x^5) (\bar{v}_y^3 + \bar{v}_x^5) \, dx \, dy \\ &+ D\mu \int_{\Omega} u_x^3 \bar{v}_y^5 \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} u_y^5 \bar{v}_x^3 \, dx \, dy, \end{aligned} \tag{2.10}$$

e norma

$$\begin{aligned}
 \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1 \int_{\Omega} |u^2|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |u^4|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |u^6|^2 dx dy \\
 &+ K \int_{\Omega} |u^3 + u_x^1|^2 dx dy + K \int_{\Omega} |u^5 + u_y^1|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |u_x^3|^2 dx dy \\
 &+ D \int_{\Omega} |u_y^5|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |u_y^3 + u_x^5|^2 dx dy \\
 &+ D\mu \int_{\Omega} u_x^3 \overline{u_y^5} dx dy + D\mu \int_{\Omega} u_y^5 \overline{u_x^3} dx dy,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6)^T$, $V = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6)^T$ e

$$H_{\Gamma_i}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ em } \Gamma_i\}, \quad (i = 1, 2).$$

O Lema a seguir, o qual é consequência da desigualdade de Korn, nos fornece uma equivalência entre a norma dada acima em (2.11) e a norma usual em \mathcal{H} ([16, 17]). Nesse contexto, denotemos por \mathcal{V} o seguinte espaço de Hilbert

$$\mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \times H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_2}^1(\Omega).$$

Lema 2.1. *Sob as considerações acima temos*

(a) *Existe uma constante $\alpha_0 > 0$ tal que, para todo par $(\psi, \varphi) \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$,*

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 [\|\psi\|_{H^1}^2 + \|\varphi\|_{H^1}^2] &\leq \int_{\Omega} \left[D|\psi_x|^2 + D|\varphi_y|^2 \right. \\
 &\quad \left. + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 + D\mu\psi_x \overline{\varphi_y} + D\mu\varphi_y \overline{\psi_x} \right] dx dy;
 \end{aligned}$$

(b) Para cada $K_0 > 0$, existe um $\beta(K_0)$ tal que, para todo $K \geq K_0$ e $(\omega, \psi, \varphi) \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \beta(K_0) \|(\omega, \psi, \varphi)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq & \int_{\Omega} \left[K|\psi + \omega_x|^2 dx dy + K|\varphi + \omega_y|^2 dx dy + D|\psi_x|^2 + D|\varphi_y|^2 \right. \\ & \left. + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 + D\mu\psi_x\bar{\varphi}_y + D\mu\varphi_y\bar{\psi}_x \right] dx dy. \end{aligned}$$

Agora, vamos denotar por $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)^T$ e $U_0 = (\omega_0, \omega_1, \psi_0, \psi_1, \varphi_0, \varphi_1)^T$ então o sistema (2.1)–(2.5) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \text{ para } t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

onde

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & Id & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{\rho_1} \Delta & -\frac{d_0}{\rho_1} Id & \frac{K}{\rho_1} \partial_x & 0 & \frac{K}{\rho_1} \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id & 0 & 0 \\ -\frac{K}{\rho_2} \partial_x & 0 & \mathcal{B}_1 & -\frac{d_1}{\rho_2} Id & \frac{D}{\rho_2} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \partial_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id \\ -\frac{K}{\rho_2} \partial_y & 0 & \frac{D}{\rho_2} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \partial_{xy}^2 & 0 & \mathcal{B}_2 & -\frac{d_2}{\rho_2} Id \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

em que os operadores $\mathcal{B}_i (i = 1, 2)$, são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{D}{\rho_2} \left[\partial_x^2 + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \partial_y^2 \right] - \frac{K}{\rho_2} Id, \\ \mathcal{B}_2 &= \frac{D}{\rho_2} \left[\left(\frac{1-\mu}{2} \right) \partial_x^2 + \partial_y^2 \right] - \frac{K}{\rho_2} Id. \end{aligned}$$

Observação 2.2. Nas considerações a seguir é conveniente ter em mente a seguinte expressão:

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \omega_t \\ \frac{K}{\rho_1}(\psi + \omega_x)_x + \frac{K}{\rho_1}(\varphi + \omega_y)_y - \frac{d_0}{\rho_1}\omega_t \\ \psi_t \\ \frac{D}{\rho_2}(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2}\psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy}) - \frac{K}{\rho_2}(\psi + \omega_x) - \frac{d_1}{\rho_2}\psi_t \\ \varphi_t \\ \frac{D}{\rho_2}(\frac{1-\mu}{2}\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\psi_{xy}) - \frac{K}{\rho_2}(\varphi + \omega_y) - \frac{d_2}{\rho_2}\varphi_t \end{pmatrix}, \text{ para } U = \begin{pmatrix} \omega \\ W \\ \psi \\ \Psi \\ \varphi \\ \Phi \end{pmatrix}.$$

O domínio do operador \mathcal{A} é definido por

$$D(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_2}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_2}^1(\Omega),$$

o qual é denso em \mathcal{H} . Além disso, temos o seguinte.

Teorema 2.3. *O operador \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $S(t)$ de contrações em \mathcal{H} . Portanto, para todo $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (2.1)–(2.9) tem uma única solução fraca $U(t) \in C^0([0, \infty), \mathcal{H})$. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então $U(t)$ é uma solução forte de (2.1)–(2.9), isto é, $U(t) \in C^1([0, \infty), \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$.*

Prova. Para $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e da definição do produto interno em (2.10), resulta que

$$\mathcal{R}e(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -d_0 \int_{\Omega} W^2 dx dy - d_1 \int_{\Omega} \Psi^2 dx dy - d_2 \int_{\Omega} \Phi^2 dx dy \leq 0, \quad (2.14)$$

de onde segue que \mathcal{A} é um operador dissipativo. Além disso, temos que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Então, seguindo os resultados devido a Lummer-Phillips (ver [28, 23]), para provar que \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, é suficiente mostrar que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Com este propósito, vamos tomar $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6)^T \in \mathcal{H}$, e mostrar que existe $U =$

$(\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que

$$-\mathcal{A}U = F, \quad (2.15)$$

isto é

$$\begin{aligned} -W &= f^1, \\ -\frac{K}{\rho_1}(\psi + \omega_x)_x - \frac{K}{\rho_1}(\varphi + \omega_y)_y + \frac{d_0}{\rho_1}W &= f^2, \\ -\Psi &= f^3, \\ -\frac{D}{\rho_2} \left(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2}\psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy} \right) + \frac{K}{\rho_2}(\psi + \omega_x) + \frac{d_1}{\rho_2}\Psi &= f^4, \\ -\Phi &= f^5, \\ -\frac{D}{\rho_2} \left(\frac{1-\mu}{2}\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\psi_{xy} \right) + \frac{K}{\rho_2}(\varphi + \omega_y) + \frac{d_2}{\rho_2}\Phi &= f^6, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$W = -f^1, \quad \Psi = -f^3, \quad \Phi = -f^5.$$

Das equações acima, temos que $W \in H_0^1(\Omega)$, $\Psi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ e $\Phi \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$. Podemos, então, considerar o seguinte sistema elíptico

$$-K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = \rho_1 f^2 + d_0 f^1 \quad \text{em } L^2(\Omega), \quad (2.16)$$

$$-D \left(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2}\psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy} \right) + K(\psi + \omega_x) = \rho_2 f^4 + d_1 f^3 \quad \text{em } L^2(\Omega), \quad (2.17)$$

$$-D \left(\frac{1-\mu}{2}\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\psi_{xy} \right) + K(\varphi + \omega_y) = \rho_2 f^6 + d_2 f^5 \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (2.18)$$

com condições de contorno dadas por

$$\omega = 0, \quad \text{em } \Gamma, \quad (2.19)$$

$$\psi = 0, \quad \left(\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (2.20)$$

$$\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_2. \quad (2.21)$$

Para solucionar este problema, definimos a seguinte forma bilinear

$$a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\Theta, \tilde{\Theta}) \mapsto a(\Theta, \tilde{\Theta})$$

onde

$$\begin{aligned} a(\Theta, \tilde{\Theta}) := & K \int_{\Omega} (u^3 + u_x^1)(\overline{v^3 + v_x^1}) \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (u^5 + u_y^1)(\overline{v^5 + v_y^1}) \, dx \, dy \\ & + D \int_{\Omega} u_x^3 \overline{v_x^3} \, dx \, dy + D \int_{\Omega} u_y^5 \overline{v_y^5} \, dx \, dy \\ & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} (u_y^3 + u_x^5)(\overline{v_y^3 + v_x^5}) \, dx \, dy \\ & + D\mu \int_{\Omega} u_x^3 \overline{v_y^5} \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} u_y^5 \overline{v_x^3} \, dx \, dy, \end{aligned} \quad (2.22)$$

para $\Theta = (u^1, u^3, u^5)$ e $\tilde{\Theta} = (v^1, v^3, v^5)$.

A forma bilinear (2.16) é contínua e sua coercividade é garantida pela desigualdade de Korn (ver [16]). Além disso, definimos a seguinte aplicação linear e contínua

$$T : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Theta \mapsto T(\Theta)$$

onde

$$T := \int_{\Omega} \left[(\rho_1 f^2 + d_0 f^1) \bar{u}^1 + (\rho_2 f^4 + d_1 f^3) \bar{u}^3 + (\rho_2 f^6 + d_2 f^5) \bar{u}^5 \right] dx dy.$$

Segue, então, do Teorema de Lax-Milgran (ver [6] para mais detalhes) que existe uma única função $(\omega, \psi, \varphi) \in \mathcal{V}$ tal que

$$a((\omega, \psi, \varphi), (\bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\varphi})) = T(\bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}), \quad \forall (\bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}) \in \mathcal{V}.$$

Ademais, do problema (2.16)–(2.21) em $L^2(\Omega)$, obtemos $(\omega, \psi, \varphi) \in [H^2(\Omega)]^3$. Portanto, $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Desta forma, deduzimos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Então, pela identidade do resolvente, para $\lambda > 0$ pequeno, temos que $R(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (ver Teorema 1.2.4 em [19]). Finalmente, usando o Teorema de Lumer-Phillips, concluimos que o operador \mathcal{A} é gerador de um C_0 -semigrupo de contrações $S(t)$ em \mathcal{H} . ■

2.3 A energia do sistema

A energia de soluções do sistema Mindlin-Timoshenko (2.1)–(2.5) é definida por

$$\begin{aligned} E(t) := & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\rho_1 |\omega_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_2 |\varphi_t|^2 + K |\psi + \omega_x|^2 + K |\varphi + \omega_y|^2 \right. \\ & \left. + D |\psi_x|^2 + D |\varphi_y|^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 + 2D\mu \psi_x \varphi_y \right] dx dy. \end{aligned} \quad (2.23)$$

O funcional de energia, assim definido, é não-crescente para todo $t > 0$. De fato, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 2.4. *Seja $(\omega, \omega_t, \varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t)$ a solução de (2.1)–(2.5). Então, a taxa instantânea de variação de energia do sistema em relação ao tempo t é dada por*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -d_0 \int_{\Omega} \omega_t^2 dx dy - d_1 \int_{\Omega} \psi_t^2 dx dy - d_2 \int_{\Omega} \varphi_t^2 dx dy, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.24)$$

Prova. Iniciamos multiplicando a equação (2.1) por ω_t e integrando em Ω . Assim, temos

$$\rho_1 \int_{\Omega} \omega_{tt} \omega_t dx dy - K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x)_x \omega_t dx dy - K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y)_y \omega_t dx dy = -d_0 \int_{\Omega} \omega_t^2 dx dy,$$

então, integrando-se por partes segue que

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega_t^2 dx dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \omega_{xt} dx dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \omega_{yt} dx dy \\ & - K \int_{\Gamma} (\psi + \omega_x) \nu_1 \omega_t d\Gamma - K \int_{\Gamma} (\varphi + \omega_y) \nu_2 \omega_t d\Gamma = -d_0 \int_{\Omega} \omega_t^2 dx dy. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Agora, multiplicando-se a equação (2.2) por ψ_t e integrando-se em Ω , tem-se

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_{\Omega} \psi_{tt} \psi_t dx dy - D \int_{\Omega} \psi_{xx} \psi_t dx dy - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_{yy} \psi_t dx dy \\ & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_{xy} \psi_t dx dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \psi_t dx dy = -d_1 \int_{\Omega} \psi_t^2 dx dy, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi_t^2 dx dy + \frac{D}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi_x^2 dx dy + \frac{D}{2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi_y^2 dx dy \\ & + \frac{D}{2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \psi_{yt} dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \psi_{xt} dx dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \psi_t dx dy \\ & + D \int_{\Gamma} \left(\psi_x + \mu \varphi_y, \frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y) \right) \cdot \nu \psi_t d\Gamma = -d_1 \int_{\Omega} \psi_t^2 dx dy. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por fim, multiplicado-se a equação (2.3) por φ_t e integrando-se em Ω , obtemos

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_{\Omega} \varphi_{tt} \varphi_t \, dx dy - D \int_{\Omega} \varphi_{yy} \varphi_t \, dx dy - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_{xx} \varphi_t \, dx dy \\ & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_{xy} \varphi_t \, dx dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \varphi_t \, dx dy = -d_2 \int_{\Omega} \varphi_t^2 \, dx dy, \end{aligned}$$

de onde resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_t^2 \, dx dy + \frac{D}{2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_x^2 \, dx dy + \frac{D}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_y^2 \, dx dy \\ & + \frac{D}{2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \varphi_{xt} \, dx dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \varphi_{yt} \, dx dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \varphi_t \, dx dy \\ & + D \int_{\Gamma} \left(\frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y), \varphi_y + \mu \psi_x \right) \cdot \nu \varphi_t \, d\Gamma = -d_2 \int_{\Omega} \varphi_t^2 \, dx dy. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Então, somando-se as equações (2.25), (2.26) e (2.27), encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega_t^2 \, dx dy + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi_t^2 \, dx dy + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_t^2 \, dx dy + \frac{K}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\psi + \omega_x)^2 \, dx dy \\ & + \frac{K}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y)^2 \, dx dy + \frac{D}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi_x^2 \, dx dy + \frac{D}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi_y^2 \, dx dy \\ & + \frac{D}{2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} (\psi_y + \varphi_x)^2 \, dx dy + D\mu \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi_x \varphi_y \, dx dy + \mathcal{F} \\ & = -d_0 \int_{\Omega} \omega_t^2 \, dx dy - d_1 \int_{\Omega} \psi_t^2 \, dx dy - d_2 \int_{\Omega} \varphi_t^2 \, dx dy, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde \mathcal{F} é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= K \int_{\Gamma} (\psi + \omega_x) \nu_1 \omega_t \, d\Gamma + K \int_{\Gamma} (\varphi + \omega_y) \nu_2 \omega_t \, d\Gamma \\ &+ D \int_{\Gamma} \left(\psi_x + \mu \varphi_y, \frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y) \right) \cdot \nu \psi_t \, d\Gamma \\ &+ D \int_{\Gamma} \left(\frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y), \varphi_y + \mu \psi_x \right) \cdot \nu \varphi_t \, d\Gamma.\end{aligned}$$

Utilizando as condições de contorno (2.5) segue que $\mathcal{F} = 0$. Portanto, concluímos que

$$\frac{d}{dt} E(t) := -d_0 \int_{\Omega} \omega_t^2 \, dx dy - d_1 \int_{\Omega} \psi_t^2 \, dx dy - d_2 \int_{\Omega} \varphi_t^2 \, dx dy \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.29)$$

e desde que $d_i > 0$ para qualquer $i = 0, 1, 2$ obtemos a lei de dissipação de energia

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.30)$$

É claro que se $d_0 = d_1 = d_2 = 0$ obtemos a lei de conservação de energia

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.31)$$

■

Uma das motivações desta tese, consiste em determinar como se comporta a energia $E(t)$ do sistema de Mindlin-Timoshenko sob certos tipos de efeitos dissipativos. Já sabemos que a energia em (2.23) é decrescente, desde que $d_i > 0$ para algum $i = 0, 1, 2$. Contudo, não sabemos como ocorre esse decrescimento. Neste contexto, definimos por decaimento exponencial ao tipo de decrescimento mais acelerado, no qual a energia pode ser controlada por uma função exponencial decrescente. Por outro lado, definimos por decaimento polinomial, ao decrescimento mais lento, onde a energia é controlada por um polinômio. Na Figura 2.1 observamos o gráfico do comportamento exponencial da energia de soluções para o sistema de vigas de

Timoshenko com dissipação atuando na equação do ângulo de rotação. A Figura 2.2 ilustra uma comparação dos casos conservativo (em preto), exponencial (em azul) e polinomial (em vermelho), considerando-se o mesmo sistema de equações da figura anterior.

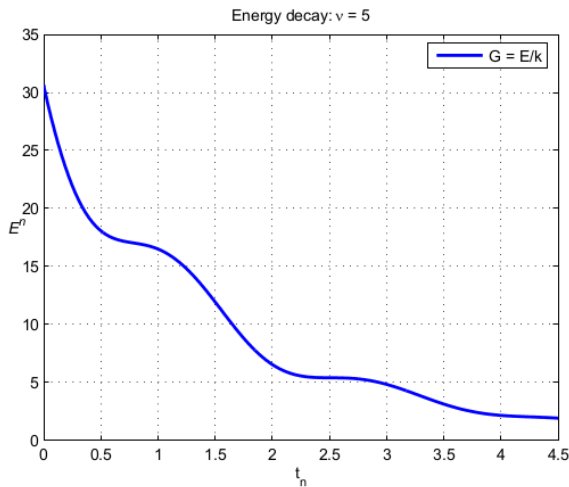


FIGURA 2.1: Decaimento Exponencial.

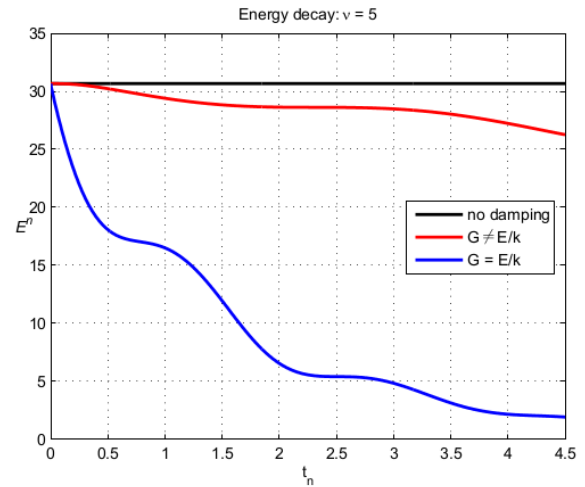


FIGURA 2.2: Comportamento da Energia.

Nas figuras acima, obtidas em [1], percebemos que estabilidade exponencial está condicionada a relação $G = E/k$, o que por sua vez é equivalente a relação de igualdade entre a velocidade de propagação de ondas do sistema de Timoshenko dada em (1.12).

Motivados por estas observações, nos perguntamos sob que condições o sistema de Mindlin-Timoshenko é exponencialmente estável, considerando algum tipo de mecanismo dissipativo? Nos capítulos que se seguem, verificaremos que a relação entre as velocidade de ondas do sistema de Mindlin-Timoshenko em (1.17) está intrinsecamente ligada a estabilidade exponencial do sistema.

Com estes propósitos, descreveremos alguns resultados importantes que serão utilizados não nos próximos capítulos. O método usado para mostrar a estabilidade exponencial bem como a falta de decaimento exponencial é baseado no Teorema de Gearhart-Herbst-Prüss-Huang para sistemas dissipativos [11, 32]. Um resultado equivalente pode ser encontrado em Z. Liu e S. Zheng [19], o qual nos dá a seguinte versão que fornece uma condição necessária e suficiente para estabilidade exponencial.

Teorema 2.5. *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, as seguintes condições*

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad (2.32)$$

e

$$\overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \quad (2.33)$$

se verificam, onde $\varrho(\mathcal{A})$ é o resolvente de \mathcal{A} .

Neste trabalho usaremos um resultado devido a Borichev e Tomilov [5] que nos fornece condições equivalentes para obter decaimento do tipo polinomial para soluções em nossos futuros problemas.

Teorema 2.6. *Seja $S(t)$ um C_0 semigrupo limitado em um espaço de Hilbert \mathcal{H} com gerador infinitesimal \mathcal{A} tal que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$. Então, para alguma constante fixada $\alpha > 0$ as seguintes afirmações são equivalentes*

$$(i) \quad \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^{-\alpha}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

$$(ii) \quad \|S(t)(-\mathcal{A}^{-\alpha})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$(iii) \quad \|S(t)(-\mathcal{A}^{-\alpha})u\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty, \quad u \in \mathcal{H}.$$

$$(iv) \quad \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/\alpha}), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$(v) \quad \|S(t)\mathcal{A}^{-1}u\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-1/\alpha}), \quad t \rightarrow \infty, \quad u \in \mathcal{H}.$$

Mindlin-Timoshenko: Dissipação nas equações de rotação

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar um modelo de uma placa bidimensional de Mindlin-Timoshenko com dissipações nas equações dos ângulos de rotação, portanto, consideramos $d_0 = 0$ no sistema (2.1)–(2.3). Analisemos, então, o comportamento assintótico de soluções globais para o seguinte sistema de placas de Mindlin-Timoshenko com dissipação friccional

$$\rho_1 \omega_{tt} - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\psi_{yy} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\varphi_{xy} + K(\psi + \omega_x) + d_1\psi_t = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\varphi_{xx} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\psi_{xy} + K(\varphi + \omega_y) + d_2\varphi_t = 0, \quad (3.3)$$

em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, onde Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^2 . Além disso, as constantes de dissipação d_1, d_2 são positivas.

Nosso principal objetivo é mostrar que este sistema é exponencialmente estável se, e somente se, as velocidades de propagação de ondas do sistema são iguais. Com este propósito, associamos ao sistema as seguintes condições iniciais

$$\omega(x, y, 0) = \omega_0(x, y), \quad \omega_t(x, y, 0) = \omega_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (3.4)$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad \psi_t(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (3.5)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (3.6)$$

e condições de contorno mistas dadas por

$$\omega = 0, \quad \text{em } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (3.7)$$

$$\psi = 0, \quad \left(\frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \quad (3.8)$$

$$\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+. \quad (3.9)$$

aqui consideramos a fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, com $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ disjuntos e não-vazios, e $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário exterior a Γ .

A estrutura matemática deste capítulo é organizada da seguinte maneira. Na Seção 3.2 estudaremos a falta de decaimento exponencial para o sistema de Mindlin-Timoshenko com mecanismos dissipativos nos ângulos de rotação dado por (3.1)–(3.3) com condições iniciais e condições de contorno dados por (3.4)–(3.6) e (3.7)–(3.9), respectivamente. Na Seção 3.3 estudaremos o decaimento de soluções fortes do sistema (3.1)–(3.9). Usaremos métodos multiplicativos. Finalmente, na Seção 3.4 mostraremos que o sistema de (3.1)–(3.9) é polinomialmente estável apresentando uma taxa de decaimento ótima.

3.2 Falta de estabilidade exponencial

Nesta seção, vamos mostrar que o sistema de Mindlin-Timoshenko (3.1)–(3.9) perde a estabilidade exponencial quando consideramos

$$v_1^2 \neq v_2^2, \quad (3.10)$$

onde $v_1^2 := K/\rho_1$ e $v_2^2 := D/\rho_2$.

Para provar a falta de estabilidade exponencial, utilizaremos o Teorema 2.5. Usando-se argumentos de contradição, provaremos que existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e uma sequência $U_n = (\omega_n, W_n, \psi_n, \Phi_n, \varphi_n, \Phi_n)^T \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, satisfazendo a equação resolvente

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n, \quad (3.11)$$

para funções $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6)^T \subset \mathcal{H}$, com $\|F_n\| \leq 1$, de modo que

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}} = \|(\lambda_n I - A)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Em outras palavras, ao analisarmos a equação (3.11), mostramos que a solução correspondente U_n não é limitada quando F_n é limitada em \mathcal{H} .

Reescrevendo a equação resolvente em termos de seus componentes, obtemos o seguinte sistema

$$i\lambda_n \omega_n - W_n = f_n^1, \quad (3.13)$$

$$i\lambda_n W_n - \frac{K}{\rho_1}(\psi_n + \omega_{nx})_x - \frac{K}{\rho_1}(\varphi_n + \omega_{ny})_y = f_n^2, \quad (3.14)$$

$$i\lambda_n \psi_n - \Psi_n = f_n^3, \quad (3.15)$$

$$i\lambda_n \Psi_n - \frac{D}{\rho_2} \left(\psi_{nxx} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{nyy} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{nxy} \right) + \frac{K}{\rho_2}(\psi_n + \omega_{nx}) + \frac{d_1}{\rho_2} \Psi_n = f_n^4, \quad (3.16)$$

$$i\lambda_n \varphi_n - \Phi_n = f_n^5, \quad (3.17)$$

$$i\lambda_n \Phi_n - \frac{D}{\rho_2} \left(\frac{1-\mu}{2} \varphi_{nxx} + \varphi_{nyy} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{nxy} \right) + \frac{K}{\rho_2} (\varphi_n + \omega_{ny}) + \frac{d_2}{\rho_2} \Phi_n = f_n^6. \quad (3.18)$$

Agora, estamos em condições de estabelecer o principal resultado desta seção.

Teorema 3.1. *Vamos supor que*

$$v_1^2 \neq v_2^2,$$

onde v_1^2 e v_2^2 são as velocidades de propagação de ondas dadas em (1.17). Então o semigrupo associado ao sistema (3.1)–(3.9), onde $d_0 = 0$ e $d_1, d_2 > 0$, não é exponencialmente estável.

Prova. Vamos provar que existe uma sequência λ_n e funções $F_n \in \mathcal{H}$, com $\|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ verificando (3.12). Para isto, vamos tomar $f_n^1 = f_n^3 = f_n^5 = 0$, sendo assim

$$W_n = i\lambda_n \omega_n, \quad \Psi_n = i\lambda_n \psi_n, \quad \Phi_n = i\lambda_n \varphi_n, \quad (3.19)$$

o que nos permite reescrever o sistema (3.13)–(3.18) como

$$-\lambda_n^2 \rho_1 \omega_n - K(\psi_n + \omega_{nx})_x - K(\varphi_n + \omega_{ny})_y = \rho_1 f_n^2, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2 \rho_2 \psi_n - D \left(\psi_{nxx} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{nyy} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{nxy} \right) \\ + K(\psi_n + \omega_{nx}) + i\lambda_n d_1 \psi_n = \rho_2 f_n^4, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_n^2 \rho_2 \varphi_n - D \left(\frac{1-\mu}{2} \varphi_{nxx} + \varphi_{nyy} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{nxy} \right) \\ + K(\varphi_n + \omega_{ny}) + i\lambda_n d_2 \varphi_n = \rho_2 f_n^6. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos f_n^2, f_n^4 e f_n^6 como

$$f_n^2 = \sin(\delta \lambda_1 x) \sin(\delta \lambda_2 y), \quad f_n^4 = f_n^6 = 0.$$

onde

$$\lambda_j = \lambda_{j,n} := \frac{n\pi}{\delta L_j}, \quad (j = 1, 2) \quad \text{e} \quad \delta := \sqrt{\frac{\rho_1}{K}}.$$

Definimos

$$\lambda_n := \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (3.23)$$

Levando-se em conta as condições de contorno dadas em (3.7)–(3.9), vamos assumir que

$$\omega_n(x, y) = A \sin(\delta \lambda_1 x) \sin(\delta \lambda_2 y),$$

$$\psi_n(x, y) = B \cos(\delta \lambda_1 x) \sin(\delta \lambda_2 y),$$

$$\varphi_n(x, y) = C \sin(\delta \lambda_1 x) \cos(\delta \lambda_2 y),$$

onde A , B , C depende de λ_n e serão determinados posteriormente. Desta forma, encontrar a solução do sistema (3.20)–(3.22) é equivalente a encontrar soluções A , B e C para o seguinte sistema

$$[-\lambda_n^2 \rho_1 + K \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] A + K \delta \lambda_1 B + K \delta \lambda_2 C = \rho_1, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} K \delta \lambda_1 A + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D \delta^2 \lambda_1^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_2^2 \right. \\ \left. + K + i \lambda_n d_1 \right] B + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 C = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} K \delta \lambda_2 A + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 B + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D \delta^2 \lambda_2^2 \right. \\ \left. + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K + i \lambda_n d_2 \right] C = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Agora, note que

$$\frac{1 - \mu}{2} = 1 - \frac{1 + \mu}{2}.$$

Usando-se a identidade acima, temos que

$$[-\lambda_n^2 \rho_1 + K \delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)] A + K \delta \lambda_1 B + K \delta \lambda_2 C = \rho_1, \quad (3.27)$$

$$K \delta \lambda_1 A + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D \delta^2 \lambda_1^2 + D \delta^2 \lambda_2^2 - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_2^2 \right. \\ \left. + K + i \lambda_n d_1 \right] B + D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 C = 0, \quad (3.28)$$

$$K \delta \lambda_2 A + D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 B + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D \delta^2 \lambda_1^2 + D \delta^2 \lambda_2^2 \right. \\ \left. - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K + i \lambda_n d_2 \right] C = 0. \quad (3.29)$$

Então, considerando-se as definições de δ e λ_n em (3.23), obtemos

$$K \delta \lambda_1 B + K \delta \lambda_2 C = \rho_1, \quad (3.30)$$

$$K \delta \lambda_1 A + \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_2^2 + K + i \lambda_n d_1 \right] B \\ + D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 C = 0, \quad (3.31)$$

$$K \delta \lambda_2 A + D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 B + \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) \right. \\ \left. - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K + i \lambda_n d_2 \right] C = 0. \quad (3.32)$$

De (3.30) temos

$$C = \frac{\delta}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} B. \quad (3.33)$$

Substituindo (3.33) em (3.32) e (3.31) encontramos

$$\begin{aligned} & K\delta\lambda_1 A + \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_1 \right] B \\ &= -D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^3 \lambda_1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

e

$$\begin{aligned} & K\delta\lambda_2 A - \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_2 \right] \frac{\lambda_1}{\lambda_2} B \\ &= - \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K + i\lambda_n d_2 \right] \frac{\delta}{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Multiplicando-se (3.34) e (3.35) por λ_2 e $-\lambda_1$, respectivamente, e em seguida efetuando a soma, resulta

$$\begin{aligned} & \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_1 \right] \lambda_2 B \\ &+ \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_2 \right] \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} B \\ &= -D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^3 \lambda_1 \lambda_2 + \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K + i\lambda d_2 \right] \delta \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \end{aligned}$$

de onde, multiplicando-se por λ_2 , segue que

$$\begin{aligned} & \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_1 \right] \lambda_2^2 B \\ &+ \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_2 \right] \lambda_1^2 B \\ &= \left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_2 \right] \delta \lambda_1 \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$B = \frac{\left[-\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_2 \right] \delta \lambda_1}{-\lambda_n^4 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^4 + K \lambda_n^2 + i\lambda_n (d_1 \lambda_2^2 + d_2 \lambda_1^2)}. \quad (3.36)$$

Substituindo B dado por (3.36) em (3.34) encontramos

$$A = -\frac{D}{K} \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 - \frac{Q_1(\lambda_n)Q_2(\lambda_n)}{Q_3(\lambda_n)}, \quad (3.37)$$

onde

$$Q_1(\lambda_n) = -\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_1,$$

$$Q_2(\lambda_n) = -\lambda_n^2 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K + i\lambda_n d_2,$$

$$Q_3(\lambda_n) = K \left[-\lambda_n^4 D \left(\frac{\rho_2}{D} - \frac{\rho_1}{K} \right) - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^4 + K \lambda_n^2 + i\lambda_n (d_1 \lambda_2^2 + d_2 \lambda_1^2) \right].$$

De (3.33), (3.36) e (3.37) resulta que

$$A \rightarrow \frac{\rho_1 \rho_2}{K^2} (v_1^2 - v_2^2), \quad (3.38)$$

$$B \rightarrow 0, \quad (3.39)$$

$$C \rightarrow 0, \quad (3.40)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, desde que

$$v_1^2 - v_2^2 \neq 0,$$

e usando-se (2.14), ($d_0 = 0$), e a definição de $\|U_n\|_{\mathcal{H}}$ dada em (2.11), concluímos que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_1 \int_{\Omega} |W_n|^2 dx dy \\ &= \rho_1 \int_{\Omega} |\lambda_n \omega_n|^2 dx dy \\ &= \rho_1 \int_{\Omega} |\lambda_n A \sin(\delta \lambda_1 x) \sin(\delta \lambda_2 y)|^2 dx dy \end{aligned}$$

$$= \rho_1 |\lambda_n A|^2 \frac{L_1 L_2}{4} \rightarrow \infty, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.41)$$

Desta forma, usando-se o Teorema 2.5 seguem nossas conclusões. ■

3.3 Estabilidade Assintótica

Nesta seção estudaremos o decaimento exponencial do sistema (3.1)–(3.9), o qual corresponde a placa de Mindlin-Timoshenko com dissipações friccionais atuando nas equações dos ângulos de rotação. Nosso objetivo é mostrar que se

$$v_1^2 = v_2^2,$$

então, a solução do sistema decai exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, onde v_1^2 e v_2^2 são dados por (1.17). Mais precisamente, provaremos que a energia das soluções do problema, dada por (3.6), pode ser controlada por uma função exponencial decrescente, estabilizando rapidamente as soluções. Para alcançar essa propriedade faremos uso de uma caracterização de estabilidade exponencial para um semigrupo de contrações dada pelo Teorema 2.5.

Portanto, a fim de mostrar o decaimento exponencial do semigrupo associado ao sistema Mindlin-Timoshenko (3.1)–(3.9), é necessário e suficiente provar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ e

$$\exists C > 0 \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \forall \lambda \in \mathbb{R} : C \|(i\lambda I - \mathcal{A})U\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \|U\|_{\mathcal{H}}^2,$$

o que corresponde a verificar se as condições (2.32) e (2.33) do Teorema de Prüss são satisfeitas.

Primeiramente, vamos considerar o produto interno em \mathcal{H} de $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com a equação resolvente de \mathcal{A} , isto é

$$i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Então, tomando a parte real e usando a desigualdade (2.14), obtemos

$$d_1 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + d_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.42)$$

Agora, mostraremos que o resolvente de \mathcal{A} é uniformemente limitado ao longo do eixo imaginário. Portanto, estabelecemos o seguinte Lema.

Lema 3.2. *Sob as considerações acima*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

Prova. Desde que $(I - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto em \mathcal{H} , para verificar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ é suficiente mostrar que \mathcal{A} não possui autovalor imaginário puro. Deste modo, suponhamos que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que $i\lambda_0$ é um autovalor e $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)$ seja um autovetor normalizado. Provaremos que vale a seguinte implicação

$$\mathcal{A}U = i\lambda_0 U \quad \Rightarrow \quad U = 0.$$

De fato, escrevendo a relação acima em termos de seus componentes, temos que

$$i\lambda_0 \omega - W = 0, \quad (3.43)$$

$$i\lambda_0 \rho_1 W - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = 0, \quad (3.44)$$

$$i\lambda_0 \psi - \Psi = 0, \quad (3.45)$$

$$i\lambda_0 \rho_2 \Psi - D \left(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{xy} \right) + K(\psi + \omega_x) + d_1 \Psi = 0, \quad (3.46)$$

$$i\lambda_0 \varphi - \Phi = 0, \quad (3.47)$$

$$i\lambda_0 \rho_2 \Phi - D \left(\frac{1-\mu}{2} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{xy} \right) + K(\varphi + \omega_y) + d_2 \Phi = 0. \quad (3.48)$$

Tomando $F = 0$, segue de (3.42) que $\Psi = \Phi = 0$. Então, substituindo $\Psi = \Phi = 0$ em (3.45) e (3.47) obtemos $\psi = \varphi = 0$. Agora, de (3.46) e (3.48), e usando a desigualdade de Poincaré concluímos que $\omega = W = 0$. Portanto, $U = 0$. Logo não existem autovalores imaginários, e o nosso resultado está provado. ■

Observação 3.3. Em particular este resultado implica que o semigrupo é fortemente estável, isto é

$$S(t)U_0 \rightarrow 0,$$

onde $S(t) := e^{At}$ é o C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} e U_0 é o dado inicial.

A seguir, mostraremos que se

$$v_1^2 = v_2^2, \quad (3.49)$$

então, o semigrupo $S(t) = e^{At}$ associado ao problema de Mindlin-Timoshenko (3.1)–(3.9) satisfaz a condição (2.33) do Teorema 2.5, e concluir que o sistema é exponencialmente estável.

Para isto, vamos considerar o sistema resolvente

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F \quad \text{em } \mathcal{H},$$

o qual pode ser reescrito em termos de seus componentes como

$$i\lambda\omega - W = f^1, \quad (3.50)$$

$$i\lambda\rho_1 W - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = f^2, \quad (3.51)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f^3, \quad (3.52)$$

$$i\lambda\rho_2\Psi - D\left(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2}\psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\varphi_{xy}\right) + K(\psi + \omega_x) + d_1\Psi = f^4, \quad (3.53)$$

$$i\lambda\varphi - \Phi = f^5, \quad (3.54)$$

$$i\lambda\rho_2\Phi - D\left(\frac{1-\mu}{2}\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2}\psi_{xy}\right) + K(\varphi + \omega_y) + d_2\Phi = f^6, \quad (3.55)$$

onde $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6)^T \in \mathcal{H}$ e $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. A prova envolve a utilização de alguns lemas auxiliares.

Lema 3.4. *Sob as considerações acima, existe uma constante positiva M tal que*

$$\begin{aligned}
 & D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\
 & + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy \\
 & \leq \frac{K\varepsilon}{|\lambda|^2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K\varepsilon}{|\lambda|^2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande.

Prova. Multiplicando-se a equação (3.53) por $\bar{\psi}$ e integrado-se em Ω , temos

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{\psi} dx dy - D \int_{\Omega} \psi_{xx} \bar{\psi} dx dy - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_{yy} \bar{\psi} dx dy}_{:=I_1} \\
 & - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_{xy} \bar{\psi} dx dy - D\mu \int_{\Omega} \varphi_{xy} \bar{\psi} dx dy \\
 & + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} dx dy + d_1 \int_{\Omega} \Psi \bar{\psi} dx dy = \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} dx dy.
 \end{aligned}$$

Usando-se (3.52) em I_1 e realizando algumas integrações por partes, encontramos

$$\begin{aligned}
 & -\rho_2 \int_{\Omega} \Psi (\overline{f^3 + \Psi}) dx dy + D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy - D \int_{\Gamma} \psi_x \bar{\psi} \nu_1 d\Gamma \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 dx dy - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Gamma} \psi_y \bar{\psi} \nu_2 d\Gamma \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\psi}_y dx dy - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Gamma} \varphi_x \bar{\psi} \nu_2 d\Gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x \, dx \, dy - D\mu \int_{\Gamma} \varphi_y \bar{\psi} \nu_1 \, d\Gamma \\
& + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy + d_1 \int_{\Omega} \Psi \bar{\psi} \, dx \, dy = \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} \, dx \, dy,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
& - \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy - \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{f}^3 \, dx \, dy + D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\psi}_y \, dx \, dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy \\
& - D \int_{\Gamma} \left(\psi_x + \mu \varphi_y, \frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y) \right) \cdot \nu \bar{\psi} \, d\Gamma \\
& + d_1 \int_{\Omega} \Psi \bar{\psi} \, dx \, dy = \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} \, dx \, dy,
\end{aligned}$$

de onde segue, usando as condições de contorno em (3.7)–(3.9), que

$$\begin{aligned}
& D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\psi}_y \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x \, dx \, dy \\
& = \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy - K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy - d_1 \int_{\Omega} \Psi \bar{\psi} \, dx \, dy \\
& + \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{f}^3 \, dx \, dy. \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, multiplicando-se a equação (3.55) por $\bar{\varphi}$, integrando-se por partes em Ω e usando (3.54), obtemos

$$\begin{aligned}
 & D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \bar{\varphi}_x dx dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \\
 & = \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy - K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\varphi} dx dy - d_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{\varphi} dx dy \\
 & + \int_{\Omega} f^6 \bar{\varphi} dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{f}^5 dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Somando-se as equações (3.57), (3.58), resulta

$$\begin{aligned}
 & D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \\
 & + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy = \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy \\
 & + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy - K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} dx dy \\
 & - K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\varphi} dx dy - d_1 \int_{\Omega} \Psi \bar{\psi} dx dy \\
 & - d_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{\varphi} dx dy + \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} dx dy \\
 & + \int_{\Omega} f^6 \bar{\varphi} dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{f}^3 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{f}^5 dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Então, usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
& D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy \\
& \leq \left(\rho_2 + \frac{d_2}{|\lambda|} + \frac{K}{4\varepsilon} \right) \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \left(\rho_2 + \frac{d_2}{|\lambda|} + \frac{K}{4\varepsilon} \right) \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \\
& + \frac{K\varepsilon}{|\lambda|^2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K\varepsilon}{|\lambda|^2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \\
& + \frac{K}{|\lambda|} \int_{\Omega} |f^3| |\psi + \omega_x| dx dy + \frac{K}{|\lambda|} \int_{\Omega} |f^5| |\varphi + \omega_y| dx dy \\
& + \frac{d_1}{|\lambda|} \int_{\Omega} |\Psi| |f^3| dx dy + \frac{d_2}{|\lambda|} \int_{\Omega} |\Phi| |f^5| dx dy + \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} dx dy \\
& + \int_{\Omega} f^6 \bar{\varphi} dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{f}^3 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{f}^5 dx dy, \tag{3.60}
\end{aligned}$$

onde ε é uma pequena constante positiva. Da desigualdade acima e de (3.42) concluímos que existe uma constante positiva M tal que

$$\begin{aligned}
& D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy \\
& \leq \frac{K\varepsilon}{|\lambda|^2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K\varepsilon}{|\lambda|^2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

de onde segue nosso resultado. ■

O próximo lema nos fornece uma importante relação entre os coeficientes para obter uma condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial.

Lema 3.5. *Sob as considerações acima, existe uma constante positiva M de tal modo que qualquer solução forte do sistema (3.1)–(3.9) satisfaz*

$$\begin{aligned}
 & \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \\
 & \leq i\lambda D \left(\frac{\rho_1}{K} - \frac{\rho_2}{D} \right) \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy \\
 & + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande.

Prova. Multiplicando-se a equação (3.53) por $(\overline{\psi + \omega_x})$, integrando-se por partes Ω e usando (3.52) temos

$$\begin{aligned}
 & i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{\omega_x} dx dy + D \int_{\Omega} \psi_x (\overline{\psi + \omega_x})_x dx dy \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\psi + \omega_x})_y dx dy \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\psi + \omega_x})_y dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y (\overline{\psi + \omega_x})_x dx dy \\
 & - D \int_{\Gamma} \left(\psi_x + \mu\varphi_y, \frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y) \right) \cdot \nu (\overline{\psi + \omega_x}) d\Gamma \\
 & + K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy = \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{f^3} dx dy \\
 & - d_1 \int_{\Omega} \Psi (\overline{\psi + \omega_x}) dx dy + \int_{\Omega} f^4 (\overline{\psi + \omega_x}) dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Por outro lado, multiplicando-se a equação (3.55) por $(\overline{\varphi + \omega_y})$, integrando-se por partes em Ω e usando a equação (3.54), obtemos

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{\omega_y} \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy \\
& + D \int_{\Omega} \varphi_y (\overline{\varphi + \omega_y})_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \psi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_y \, dx \, dy - D \int_{\Gamma} \left(\frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y), \varphi_y + \mu\psi_x \right) \cdot \nu (\overline{\varphi + \omega_y}) \, d\Gamma \\
& + K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 \, dx \, dy = \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{f^5} \, dx \, dy \\
& - d_2 \int_{\Omega} \Phi (\overline{\varphi + \omega_y}) \, dx \, dy + \int_{\Omega} f^6 (\overline{\varphi + \omega_y}) \, dx \, dy. \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Somando-se os resultados acima e levando em consideração as condições de contorno, segue que

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{\omega_x} \, dx \, dy + i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{\omega_y} \, dx \, dy \\
& + K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 \, dx \, dy + K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 \, dx \, dy \\
& + D \underbrace{\int_{\Omega} \psi_x (\overline{\psi + \omega_x})_x \, dx \, dy + \int_{\Omega} \varphi_y (\overline{\varphi + \omega_y})_y \, dx \, dy}_{:=I_2} \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\psi + \omega_x})_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\psi + \omega_x})_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y (\overline{\psi + \omega_x})_x \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_y \, dx \, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{f^3} dx dy \\
 &+ \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{f^5} dx dy - d_1 \int_{\Omega} \Psi (\overline{\psi + \omega_x}) dx dy - d_2 \int_{\Omega} \Phi (\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy \\
 &+ \int_{\Omega} f^4 (\overline{\psi + \omega_x}) dx dy + \int_{\Omega} f^6 (\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Além disso, de (3.51) temos

$$\begin{aligned}
 &- i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} \overline{W} (\psi_x + \varphi_y) dx dy - K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \psi_x dx dy \\
 &- K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \varphi_y dx dy - K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \psi_x dx dy \\
 &- K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \varphi_y dx dy = \int_{\Omega} \overline{f^2} (\psi_x + \varphi_y) dx dy,
 \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
 &K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \psi_x dx dy + K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \varphi_y dx dy \\
 &= -i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} \overline{W} (\psi_x + \varphi_y) dx dy - K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \varphi_y dx dy \\
 &- K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \psi_x dx dy - \int_{\Omega} \overline{f^2} (\psi_x + \varphi_y) dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Substituindo (3.65) em I_2 temos

$$\begin{aligned}
 &i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{\omega_x} dx dy + i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{\omega_y} dx dy \\
 &+ K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{D}{K} \left[i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \varphi_y \, dx \, dy \right. \\
& \left. + K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \psi_x \, dx \, dy + \int_{\Omega} \overline{f^2}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy \right] \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\psi + \omega_x})_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\psi + \omega_x})_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y (\overline{\psi + \omega_x})_x \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_y \, dx \, dy \\
& = \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{f^3} \, dx \, dy \\
& + \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{f^5} \, dx \, dy - d_1 \int_{\Omega} \Psi (\overline{\psi + \omega_x}) \, dx \, dy - d_2 \int_{\Omega} \Phi (\overline{\varphi + \omega_y}) \, dx \, dy \\
& + \int_{\Omega} f^4 (\overline{\psi + \omega_x}) \, dx \, dy + \int_{\Omega} f^6 (\overline{\varphi + \omega_y}) \, dx \, dy,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
& \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{\omega_x} \, dx \, dy}_{:=I_3} + \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{\omega_y} \, dx \, dy}_{:=I_4} - i\lambda \frac{D\rho_1}{K} \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy \\
& + K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 \, dx \, dy + K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 \, dx \, dy \\
& - D(1-\mu) \int_{\Omega} \varphi_y (\overline{\psi + \omega_x})_x \, dx \, dy - D(1-\mu) \int_{\Omega} \psi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_y \, dx \, dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\psi + \omega_x})_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x (\overline{\psi + \omega_x})_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y (\overline{\varphi + \omega_y})_x \, dx \, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{f^3} dx dy \\
 &+ \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{f^5} dx dy - d_1 \int_{\Omega} \Psi (\overline{\psi + \omega_x}) dx dy - d_2 \int_{\Omega} \Phi (\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy \\
 &+ \frac{D}{K} \int_{\Omega} \overline{f^2} (\psi_x + \varphi_y) dx dy + \int_{\Omega} f^4 (\overline{\psi + \omega_x}) dx dy \\
 &+ \int_{\Omega} f^6 (\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Substituindo ω dado por (3.50) em I_3 e I_4 temos que

$$\begin{aligned}
 I_3 + I_4 &= \underbrace{\rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} \Psi_x dx dy}_{:=I_5} + \underbrace{\rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} \Phi_y dx dy}_{:=I_6} \\
 &- \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_x^1} \Psi dx dy - \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_y^1} \Phi dx dy.
 \end{aligned}$$

Agora, substituindo Ψ dada por (3.52) e Φ dada por (3.54) em I_5 e I_6 , respectivamente, encontramos

$$\begin{aligned}
 I_3 + I_4 &= i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} (\psi_x + \varphi_y) dx dy - \rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} (f_x^3 + f_y^5) dx dy \\
 &- \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_x^1} \Psi dx dy - \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_y^1} \Phi dx dy.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Usando (3.67) em (3.66) obtemos

$$\begin{aligned}
 &K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \\
 &- D(1 - \mu) \int_{\Omega} \varphi_y (\overline{\psi + \omega_x})_x dx dy - D(1 - \mu) \int_{\Omega} \psi_x (\overline{\varphi + \omega_y})_y dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y(\overline{\psi + \omega_x})_y dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x(\overline{\varphi + \omega_y})_x dx dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x(\overline{\psi + \omega_x})_y dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y(\overline{\varphi + \omega_y})_x dx dy \\
& = i\lambda D \left(\frac{\rho_1}{K} - \frac{\rho_2}{D} \right) \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \\
& + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{\Psi} f^3 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{\Phi} f^5 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_x^1} \Psi dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_y^1} \Phi dx dy \\
& + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} (f_x^3 + f_y^5) dx dy - d_1 \int_{\Omega} \overline{\Psi}(\overline{\psi + \omega_x}) dx dy \\
& - d_2 \int_{\Omega} \overline{\Phi}(\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy + \frac{D}{K} \int_{\Omega} \overline{f^2} \psi_x dx dy \\
& + \frac{D}{K} \int_{\Omega} \overline{f^2} \varphi_y dx dy + \int_{\Omega} f^4(\overline{\psi + \omega_x}) dx dy + \int_{\Omega} f^6(\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Agora, denotemos por I_7 a seguinte soma

$$\begin{aligned}
I_7 & = -D(1-\mu) \int_{\Omega} \varphi_y(\overline{\psi + \omega_x})_x dx dy - D(1-\mu) \int_{\Omega} \psi_x(\overline{\varphi + \omega_y})_y dx dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y(\overline{\psi + \omega_x})_y dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x(\overline{\varphi + \omega_y})_x dx dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x(\overline{\psi + \omega_x})_y dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y(\overline{\varphi + \omega_y})_x dx dy.
\end{aligned}$$

Então, integrando-se por partes os dois primeiros termos e efetuando algumas simplificações, temos que

$$\begin{aligned}
I_7 & = -D(1-\mu) \int_{\Omega} \varphi_x(\overline{\psi + \omega_x})_y dx dy - D(1-\mu) \int_{\Omega} \psi_y(\overline{\varphi + \omega_y})_x dx dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} [|\psi_y|^2 + |\varphi_x|^2 + \varphi_x \overline{\psi}_y + \psi_y \overline{\varphi}_x + 2\psi_y \overline{\omega}_{xy} + 2\varphi_x \overline{\omega}_{xy}] dx dy,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$I_7 = D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} [-2\psi_y \bar{\varphi}_x - 2\psi_y \bar{\omega}_{xy} - 2\varphi_x \bar{\psi}_y - 2\varphi_x \bar{\omega}_{xy} + |\psi_y|^2 + |\varphi_x|^2 + \varphi_x \bar{\psi}_y + \psi_y \bar{\varphi}_x + 2\psi_y \bar{\omega}_{xy} + 2\varphi_x \bar{\omega}_{xy}] dx dy.$$

E, portanto,

$$I_7 = D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y - \varphi_x|^2 dx dy. \quad (3.69)$$

Substituindo (3.69) em (3.68), encontramos

$$\begin{aligned} & K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y - \varphi_x|^2 dx dy \\ &= i\lambda D \left(\frac{\rho_1}{K} - \frac{\rho_2}{D} \right) \int_{\Omega} \bar{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \\ &+ \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{f}^3 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{f}^5 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \bar{f}_x^1 \Psi dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \bar{f}_y^1 \Phi dx dy \\ &+ \rho_2 \int_{\Omega} \bar{W}(f_x^3 + f_y^5) dx dy - d_1 \int_{\Omega} \Psi(\overline{\psi + \omega_x}) dx dy \\ &- d_2 \int_{\Omega} \Phi(\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy + \frac{D}{K} \int_{\Omega} \bar{f}^2 \psi_x dx dy \\ &+ \frac{D}{K} \int_{\Omega} \bar{f}^2 \varphi_y dx dy + \int_{\Omega} f^4(\overline{\psi + \omega_x}) dx dy + \int_{\Omega} f^6(\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned}
& \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \\
& \leq i\lambda D \left(\frac{\rho_1}{K} - \frac{\rho_2}{D} \right) \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy \\
& + \left(\rho_2 + \frac{d_1^2}{2K} \right) \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \left(\rho_2 + \frac{d_2^2}{2K} \right) \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \\
& + \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{f^3} dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{f^5} dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f^1}_x \Psi dx dy \\
& + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f^1}_y \Phi dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} (f_x^3 + f_y^5) dx dy + \frac{D}{K} \int_{\Omega} \overline{f^2} \psi_x dx dy \\
& + \frac{D}{K} \int_{\Omega} \overline{f^2} \varphi_y dx dy + \int_{\Omega} f^4(\overline{\psi + \omega_x}) dx dy + \int_{\Omega} f^6(\overline{\varphi + \omega_y}) dx dy, \tag{3.70}
\end{aligned}$$

utilizando a inequação (3.42) seguem nossas conclusões. ■

Lema 3.6. *Sob as considerações acima, existe uma constante positiva M de tal modo que qualquer solução forte do sistema (3.1)–(3.9) satisfaz*

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_{\Omega} |W|^2 dx dy & \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \\
& + \left(K + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \right) \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy \\
& + \left(K + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \right) \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.71}
\end{aligned}$$

onde ε é uma pequena constante positiva e $|\lambda| > 1$ é suficientemente grande.

Prova. Multiplicando-se a equação (3.51) por $\bar{\omega}$ e integrado-se em Ω temos

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} W\bar{\omega} \, dx \, dy - K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x)_x \bar{\omega} \, dx \, dy - K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y)_y \bar{\omega} \, dx \, dy}_{:=I_8} = \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} \, dx \, dy.$$

Substituindo ω dada por (3.50) em I_8 e integrando-se por partes, temos

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \int_{\Omega} W(\overline{f^1 + W}) \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\omega}_x \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\omega}_y \, dx \, dy \\ & = \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} \, dx \, dy, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_{\Omega} |W|^2 \, dx \, dy - K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 \, dx \, dy \\ & + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy - K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 \, dx \, dy \\ & + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\varphi} \, dx \, dy \\ & = -\rho_1 \int_{\Omega} W \bar{f^1} \, dx \, dy - \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Usando-se desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_{\Omega} |W|^2 \, dx \, dy \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy \\ & + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy + \left(K + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \right) \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 \, dx \, dy \\ & + \left(K + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \right) \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\Omega} |f^3| |\psi + \omega_x| \, dx \, dy \\
& + \frac{1}{|\lambda|} \int_{\Omega} |f^5| |\varphi + \omega_y| \, dx \, dy \\
& - \rho_1 \int_{\Omega} W \overline{f^1} \, dx \, dy - \int_{\Omega} f^2 \overline{\omega} \, dx \, dy,
\end{aligned}$$

onde ε é uma pequena constante positiva. Deste modo, concluímos que

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_{\Omega} |W|^2 \, dx \, dy & \leq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy \\
& + \left(K + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \right) \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 \, dx \, dy \\
& + \left(K + \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \right) \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 \, dx \, dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do Lema. ■

Agora, estamos em condições de provar o principal resultado desta seção

Teorema 3.7. *O semigrupo associado ao sistema de Mindlin-Timoshenko (3.1)–(3.9), onde $d_0 = 0$ e $d_1, d_2 > 0$, é exponencialmente estável se, e somente se*

$$v_1^2 = v_2^2,$$

onde v_1^2 e v_2^2 são as velocidades de propagação de ondas dadas por (1.17).

Prova. Dos lemas (3.2), (3.4), (3.5) e (3.6) e também da desigualdade (3.42) concluímos que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad \forall U \in D(\mathcal{A}),$$

de onde segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U \in D(\mathcal{A}).$$

Usando o resultado de Prüss's (ver Teorema 2.5) segue a conclusão do teorema. ■

3.4 Decaimento Polinomial

Nesta seção provaremos que, se a relação (3.49) não é satisfeita, as soluções do sistema de Mindlin-Timoshenko dado por (3.1)–(3.9) decaem polinomialmente para zero ao longo do tempo, para qualquer dado inicial sobre $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Em outras palavras, mostraremos que a energia $E(t)$ de soluções do sistema Mindlin-Timoshenko, dada por (2.23), é controlada por um polinômio, a saber

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq f(t)\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

onde $S(t) = e^{At}$ é o semigrupo gerado pelo operador \mathcal{A} e $f(t)$ é uma função polinomial positiva tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Nosso ponto de partida é considerar, novamente, a equação resolvente em termos de seus componentes dada por (3.50)–(3.55).

O próximo Lema que apresentaremos será importante para provarmos o resultado desta seção.

Lema 3.8. *Sob as considerações acima, existe uma constante positiva M tal que*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |W| |(\psi_x + \varphi_y)| \, dx \, dy &\leq M|\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{M}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{3.72}$$

onde $|\lambda| > 1$ é suficientemente grande.

Prova. Da equação (3.53), temos que

$$\begin{aligned}
& -i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \overline{\Psi}(i\lambda\psi) \, dx \, dy - i\lambda D \int_{\Omega} \overline{\psi}_{xx}\psi \, dx \, dy - i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} \overline{\psi}_{yy}\psi \, dx \, dy \\
& - i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} \overline{\varphi}_{xy}\psi \, dx \, dy - i\lambda D\mu \int_{\Omega} \overline{\varphi}_{xy}\psi \, dx \, dy + i\lambda K \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \, dy \\
& + i\lambda K \int_{\Omega} \overline{\omega}_x\psi \, dx \, dy + i\lambda d_1 \int_{\Omega} \overline{\Psi}\psi \, dx \, dy = i\lambda \int_{\Omega} \overline{f_4}\psi \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Efetuada-se integração por partes e usando as condições de contorno dadas em (3.7)–(3.9), segue que

$$\begin{aligned}
& -i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \overline{\Psi}(i\lambda\psi) \, dx \, dy + i\lambda D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy + i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy \\
& + i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} \overline{\varphi}_x\psi_y \, dx \, dy + i\lambda D\mu \int_{\Omega} \overline{\varphi}_y\psi_x \, dx \, dy + i\lambda K \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \, dy \\
& - i\lambda K \int_{\Omega} \overline{\omega}\psi_x \, dx \, dy + i\lambda d_1 \int_{\Omega} \overline{\Psi}\psi \, dx \, dy = i\lambda \int_{\Omega} \overline{f_4}\psi \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

Usando-se (3.50) e (3.52) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
& -i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \overline{\Psi}(f^3 + \Psi) \, dx \, dy + i\lambda D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy + i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy \\
& + i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} \overline{\varphi}_x\psi_y \, dx \, dy + i\lambda D\mu \int_{\Omega} \overline{\varphi}_y\psi_x \, dx \, dy + i\lambda K \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \, dy \\
& + K \int_{\Omega} (\overline{f^1 + \overline{W}})\psi_x \, dx \, dy + d_1 \int_{\Omega} \overline{\Psi}(f^3 + \Psi) \, dx \, dy = \int_{\Omega} \overline{f_4}(f^3 + \Psi) \, dx \, dy,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
 K \int_{\Omega} \overline{W} \psi_x \, dx \, dy &= i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy - d_1 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy \\
 &- i\lambda K \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \, dy - i\lambda D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy - i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy \\
 &- i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \overline{\varphi}_x \psi_y \, dx \, dy - i\lambda D \mu \int_{\Omega} \overline{\varphi}_y \psi_x \, dx \, dy + i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \overline{\Psi} f^3 \, dx \, dy \\
 &- d_1 \int_{\Omega} \overline{\Psi} f^3 \, dx \, dy - K \int_{\Omega} \overline{f^1} \psi_x \, dx \, dy + \int_{\Omega} \overline{f_4} \Psi \, dx \, dy + \int_{\Omega} \overline{f_4} f^3 \, dx \, dy. \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, da equação (3.55) encontramos

$$\begin{aligned}
 K \int_{\Omega} \overline{W} \varphi_y \, dx \, dy &= i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy - d_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy \\
 &- i\lambda K \int_{\Omega} |\varphi|^2 \, dx \, dy - i\lambda D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 \, dx \, dy - i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 \, dx \, dy \\
 &- i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \overline{\psi}_y \varphi_x \, dx \, dy - i\lambda D \mu \int_{\Omega} \overline{\psi}_x \varphi_y \, dx \, dy + i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \overline{\Phi} f^5 \, dx \, dy \\
 &- d_2 \int_{\Omega} \overline{\Phi} f^5 \, dx \, dy - K \int_{\Omega} \overline{f^1} \varphi_y \, dx \, dy + \int_{\Omega} \overline{f_6} \Phi \, dx \, dy + \int_{\Omega} \overline{f_6} f^5 \, dx \, dy. \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

Somando-se (3.73) e (3.74), resulta

$$\begin{aligned}
 K \int_{\Omega} \overline{W} (\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy &= i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy + i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy \\
 &- d_1 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy - d_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy - i\lambda K \int_{\Omega} |\psi|^2 \, dx \, dy \\
 &- i\lambda K \int_{\Omega} |\varphi|^2 \, dx \, dy - i\lambda D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy - i\lambda D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\lambda D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy - i\lambda D \mu \int_{\Omega} \bar{\varphi}_y \psi_x dx dy \\
& -i\lambda D \mu \int_{\Omega} \bar{\psi}_x \varphi_y dx dy + i\lambda \rho_2 \int_{\Omega} \bar{\Psi} f^3 dx dy + i\lambda \rho_2 \int_{\Omega} \bar{\Phi} f^5 dx dy \\
& -d_1 \int_{\Omega} \bar{\Psi} f^3 dx dy - d_2 \int_{\Omega} \bar{\Phi} f^5 dx dy - K \int_{\Omega} \bar{f}^1 (\psi_x + \varphi_y) dx dy \\
& + \int_{\Omega} \bar{f}_4 \Psi dx dy + \int_{\Omega} \bar{f}_6 \Phi dx dy + \int_{\Omega} \bar{f}_4 f^3 dx dy + \int_{\Omega} \bar{f}_6 f^5 dx dy. \tag{3.75}
\end{aligned}$$

Dos Lemas (3.4), (3.5), (3.6), encontramos

$$\begin{aligned}
& D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\
& + D \mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy + D \mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy \leq \frac{2D\varepsilon}{|\lambda|} \left(\frac{\rho_1}{K} - \frac{\rho_2}{D} \right) \int_{\Omega} \bar{W} (\psi_x + \varphi_y) dx dy \\
& + \frac{2M_1\varepsilon}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + M_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.76}
\end{aligned}$$

onde M_1 é uma constante positiva. Usando-se (3.76) em (3.75) e tomando a parte real obtemos

$$\begin{aligned}
(K - 2\varepsilon c_1) \int_{\Omega} |W| |\psi_x + \varphi_y| dx dy & \leq M_2 |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{M_2}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
& + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

em que M_2 uma constante positiva e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Isto conclui a prova do Lema. ■

Estamos, agora em condições de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.9. *Vamos supor que*

$$v_1^2 \neq v_2^2,$$

onde v_1^2 e v_2^2 são as velocidades de propagação de ondas dadas em (1.17), então o semigrupo associado ao sistema (3.1)–(3.9) é polinomialmente estável e

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \quad (3.77)$$

Além disso, esta taxa é ótima.

Prova. Combinando-se os Lemas (3.4), (3.5), (3.6) e (3.8) segue que existe uma constante positiva C tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

para $|\lambda| > 0$ suficientemente grande, de onde segue que

$$\frac{1}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, resulta que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C |\lambda|^2.$$

Isto implica que a condição (i) do Teorema 2.6 é válida para $\alpha = 2$. Por equivalência, segue, da condição (iv), que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/2}),$$

ou seja, existe uma constante positiva C tal que

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, segue que \mathcal{A} é sobrejetivo sobre \mathcal{H} , então, considerando-se $\mathcal{A}U_0 = F$, da última desigualdade obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\|F\|_{\mathcal{H}} \Rightarrow \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Notando que $\|\mathcal{A}U_0\|_{\mathcal{H}} = \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, resulta

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

portanto, podemos afirmar que a solução tem estabilidade polinomial.

Para provar que a taxa de decaimento é ótima, utilizaremos argumentos de contradição. Desta maneira, vamos supor que a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ pode ser melhorada para uma taxa da forma $t^{-1/2-\epsilon}$. Do Teorema 5.3 em [24], o operador

$$|\lambda|^{-2+\frac{\epsilon}{2}}\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$$

deve ser limitado quando $\lambda \rightarrow \infty$, mas isto não acontece. De fato, para provar vamos supor que existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $(U_n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $(F_n) \subset \mathcal{H}$ tal que

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n.$$

Então, podemos considerar

$$F_n = (0, F^2 \sin(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y), 0, F^4 \cos(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y), 0, F^6 \sin(\delta\lambda_1 x) \cos(\delta\lambda_2 y)),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, com $F^2 \neq 0$, $F^4 \neq 0$, $F^6 \neq 0$ constantes, com $\lambda_1 = \frac{n\pi}{\delta L_1}$, $\lambda_2 = \frac{n\pi}{\delta L_2}$, $\delta = \sqrt{\frac{\rho_1}{K}}$ e $U_n = (\omega_n, W_n, \psi_n, \Psi_n, \varphi_n, \Phi_n)^T$ onde

$$\omega_n = A \sin(\delta \lambda_1 x) \sin(\delta \lambda_2 y),$$

$$\psi_n = B \cos(\delta \lambda_1 x) \sin(\delta \lambda_2 y),$$

$$\varphi_n = C \sin(\delta \lambda_1 x) \cos(\delta \lambda_2 y).$$

Portanto, escolhendo

$$\lambda = \lambda_n := \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = O(n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 3.1, podemos concluir que

$$|\lambda_n|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \|U_n\|_{\mathcal{H}} \geq O(n^{\frac{\epsilon}{2}}) \rightarrow \infty,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Desta forma, a taxa não pode ser melhorada. A prova, agora, está completa. ■

Mindlin-Timoshenko: Dissipação na equação de deslocamento

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar o sistema dissipativo de Mindlin-Timoshenko com dissipação atuando somente na equação do deslocamento transversal, isto é, estamos tomando $d_1, d_2 = 0$ no sistema (2.1)–(2.3), para obter

$$\rho_1 \omega_{tt} - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y + d_0 \omega_t = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\psi_{yy} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\varphi_{xy} + K(\psi + \omega_x) = 0, \quad (4.2)$$

$$\rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - D\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\varphi_{xx} - D\left(\frac{1+\mu}{2}\right)\psi_{xy} + K(\varphi + \omega_y) = 0. \quad (4.3)$$

em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, onde Ω é um domínio limitado do \mathbb{R}^2 . No sistema, observamos uma dissipação atuando na equação (4.1) do deslocamento transversal, onde $d_0 > 0$ é a constante de dissipação.

Consideramos que os dados iniciais são dado por

$$\omega(x, y, 0) = \omega_0(x, y), \quad \omega_t(x, y, 0) = \omega_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (4.4)$$

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad \psi_t(x, y, 0) = \psi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (4.5)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \varphi_t(x, y, 0) = \varphi_1(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (4.6)$$

sujeito a seguinte condições de contorno

$$\omega = 0, \quad \text{em } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \quad (4.7)$$

$$\psi = 0, \quad \left(\frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \nu = 0, \quad \text{em } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \quad (4.8)$$

$$\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \cdot \nu = 0, \quad \text{em } \Gamma_2 \times \mathbb{R}^+. \quad (4.9)$$

Aqui consideramos a fronteira suave $\partial\Omega = \Gamma := \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, com $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2$ disjuntos e não-vazios, e $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ é o vetor normal unitário exterior a Γ .

A estrutura matemática deste capítulo é organizada da seguinte maneira. Na Seção 4.2 identificaremos as velocidades de propagação de ondas e estudaremos a falta de decaimento exponencial. Na Seção 4.3 estudaremos o decaimento de soluções fortes do sistema (4.1)–(4.9). Usaremos métodos multiplicativos. Finalmente, na Seção 4.4 mostraremos que o sistema de Mindlin-Timoshenko é polinomialmente estável apresentando uma taxa de decaimento ótima.

4.2 Falta de estabilidade exponencial

Nosso ponto de partida é mostrar que o semigrupo associado ao sistema de Mindlin-Timoshenko (4.1)–(4.9) com $v_1^2 \neq v_2^2$, onde v_1^2 e v_2^2 são definidos em (1.17), não é exponencialmente estável,

isto é, provaremos que

Teorema 4.1. *Se*

$$v_1^2 \neq v_2^2, \quad (4.10)$$

então, o semigrupo associado ao sistema (4.1)–(4.9) não é exponencialmente estável.

Prova. Para provar este resultado, faremos uso, novamente, do notório Teorema 2.5, para o qual é suficiente mostrar a existência de uma sequência de valores $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $U_n = (\omega_n, W_n, \psi_n, \Psi_n, \varphi_n, \Phi_n)^T \in D(\mathcal{A})$ para $F_n = (f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n}, f_{5n}, f_{6n})^T \in \mathcal{H}$ tal que $(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n$ é limitado e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$

Reescrevendo a equação espectral em termos de suas componentes, temos

$$i\lambda_n \omega_n - W_n = f_n^1, \quad (4.11)$$

$$i\lambda W_n - \frac{K}{\rho_1}(\psi + \omega_{nx})_x - \frac{K}{\rho_1}(\varphi_n + \omega_{ny})_y + \frac{d_0}{\rho_1} W_n = f_n^2, \quad (4.12)$$

$$i\lambda_n \psi_n - \Psi_n = f_n^3, \quad (4.13)$$

$$i\lambda_n \Psi_n - \frac{D}{\rho_2} \left[\psi_{nxx} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{nyy} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{nxy} \right] + \frac{K}{\rho_2}(\psi_n + \omega_{nx}) = f_n^4, \quad (4.14)$$

$$i\lambda_n \varphi_n - \Phi_n = f_n^5, \quad (4.15)$$

$$i\lambda_n \Phi_n - \frac{D}{\rho_2} \left[\left(\frac{1-\mu}{2} \right) \varphi_{nxx} + \varphi_{nyy} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \psi_{nxy} \right] + \frac{K}{\rho_2}(\varphi_n + \omega_{ny}) = f_n^6. \quad (4.16)$$

Escolhendo $F_n = (0, f_n^2, 0, f_n^4, 0, f_n^6)^T$ com

$$f_n^2 := F^2 \sin(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y), \quad F^2 \neq 0 \text{ (constante)}$$

$$f_n^4 := F^4 \cos(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y), \quad F^4 \neq 0 \text{ (constante)}$$

$$f_n^6 := F^6 \sin(\delta\lambda_1 x) \cos(\delta\lambda_2 y), \quad F^6 \neq 0 \text{ (constante)}$$

onde

$$\lambda_j = \lambda_{j,n} := \frac{n\pi}{\delta L_j}, \quad j = 1, 2, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \delta := \sqrt{\frac{\rho_2}{D}}.$$

E definimos

$$\lambda_n := \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (4.17)$$

Eliminando W_n , Ψ_n e Φ_n em (4.11)–(4.16), podemos obter para ω_n , ψ_n e φ_n

$$-\lambda_n^2 \rho_1 \omega_n - K(\psi_n + \omega_{nx})_x - K(\varphi_n + \omega_{ny})_y + i\lambda_n d_0 \omega_n = \rho_1 f_n^2, \quad (4.18)$$

$$-\lambda_n^2 \rho_2 \psi_n - D \left[\psi_{nxx} + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \psi_{nyy} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \varphi_{nxy} \right] + K(\psi_n + \omega_{nx}) = \rho_2 f_n^4, \quad (4.19)$$

$$-\lambda_n^2 \rho_2 \varphi_n - D \left[\left(\frac{1-\mu}{2} \right) \varphi_{nxx} + \varphi_{nyy} + \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \psi_{nxy} \right] + K(\varphi_n + \omega_{ny}) = \rho_2 f_n^6. \quad (4.20)$$

Consideramos soluções particulares para o sistema resolvente com base nas condições de contorno (4.7)–(4.9). Vamos assumir que

$$\omega_n(x, y) := A \sin(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y),$$

$$\psi_n(x, y) := B \cos(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y),$$

$$\varphi_n(x, y) := C \sin(\delta\lambda_1 x) \cos(\delta\lambda_2 y),$$

com A, B, C dependentes de λ_n a determinar. Substituindo essas funções em (4.18)–(4.20), obtemos

$$\begin{aligned} [-\lambda_n^2 \rho_1 + K\delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + i\lambda_n d_0] A + K\delta\lambda_1 B + K\delta\lambda_2 C &= \rho_1, \\ K\delta\lambda_1 A + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D\delta^2 \lambda_1^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_2^2 + K \right] B \\ &\quad + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 C = 0, \\ K\delta\lambda_2 A + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 B + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D\delta^2 \lambda_2^2 \right. \\ &\quad \left. + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K \right] C = 0. \end{aligned}$$

E, novamente, considerando a identidade

$$\frac{1-\mu}{2} = 1 - \frac{1+\mu}{2}$$

resulta que,

$$\begin{aligned} [-\lambda_n^2 \rho_1 + K\delta^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + i\lambda_n d_0] A + K\delta\lambda_1 B + K\delta\lambda_2 C &= \rho_1 F^2, \\ K\delta\lambda_1 A + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D\delta^2 \lambda_1^2 + D\delta^2 \lambda_2^2 - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_2^2 + K \right] B \\ &\quad + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 C = \rho_2 F^4, \\ K\delta\lambda_2 A + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 B + \left[-\lambda_n^2 \rho_2 + D\delta^2 \lambda_1^2 + D\delta^2 \lambda_2^2 \right. \\ &\quad \left. - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K \right] C = \rho_2 F^6. \end{aligned}$$

Escolhendo $F^2 = 0$, $F^4 = F^6 = 1$ e levando-se em consideração as definições de λ_n e δ , obtemos

$$\left[-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0\right] A + K\delta\lambda_1 B + K\delta\lambda_2 C = 0, \quad (4.21)$$

$$K\delta\lambda_1 A + \left[-D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_2^2 + K\right] B + D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 C = \rho_2, \quad (4.22)$$

$$K\delta\lambda_2 A + D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 B + \left[-D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_1^2 + K\right] C = \rho_2. \quad (4.23)$$

De (4.21) resulta que

$$A = -\frac{K\delta\lambda_1 B + K\delta\lambda_2 C}{-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0}. \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.22) e (4.23), encontramos

$$\begin{aligned} & \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_2^2 + K\right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0\right) - K^2 \delta^2 \lambda_1^2 \right] B \\ & + \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2\right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0\right) - K^2 \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right] C \\ & = \rho_2 \left[-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0\right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

e

$$\begin{aligned} & \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2\right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0\right) - K^2 \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right] B \\ & + \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2}\right) \delta^2 \lambda_1^2 + K\right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0\right) - K^2 \delta^2 \lambda_2^2 \right] C \\ & = \rho_2 \left[-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D}\right) + i\lambda_n d_0\right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Note que o sistema (4.25)–(4.26) pode ser reescrito como

$$\beta B + \gamma C = r \quad (4.27)$$

$$\gamma B + \theta C = r \quad (4.28)$$

de tal modo que suas soluções são dadas por

$$B = \frac{r(\theta - \gamma)}{\beta\theta - \gamma^2}, \quad C = \frac{r(\beta - \gamma)}{\beta\theta - \gamma^2}, \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \beta &= \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_2^2 + K \right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i\lambda_n d_0 \right) - K^2 \delta^2 \lambda_1^2 \right] \\ \theta &= \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K \right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i\lambda_n d_0 \right) - K^2 \delta^2 \lambda_2^2 \right] \\ \gamma &= \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i\lambda_n d_0 \right) - K^2 \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right] \\ r &= \rho_2 \left[-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i\lambda_n d_0 \right]. \end{aligned}$$

Portanto, encontramos para B e C as seguintes expressões explícitas

$$\begin{aligned} B &= \frac{\rho_2 \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1^2 + K \right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i\lambda_n d_0 \right) - K^2 \delta^2 \lambda_2^2 \right]}{K \left(-\rho_1 \lambda_n^2 + i\lambda_n d_0 \right) \left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K \right)} \\ &\quad - \frac{\rho_2 \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i\lambda_n d_0 \right) - K^2 \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right]}{K \left(-\rho_1 \lambda_n^2 + i\lambda_n d_0 \right) \left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K \right)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

e

$$C = \frac{\rho_2 \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_2^2 + K \right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i \lambda_n d_0 \right) - K^2 \delta^2 \lambda_1^2 \right]}{K \left(-\rho_1 \lambda_n^2 + i \lambda_n d_0 \right) \left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K \right)} - \frac{\rho_2 \left[\left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right) \left(-\lambda_n^2 \left(\rho_1 - K \frac{\rho_2}{D} \right) + i \lambda_n d_0 \right) - K^2 \delta^2 \lambda_1 \lambda_2 \right]}{K \left(-\rho_1 \lambda_n^2 + i \lambda_n d_0 \right) \left(-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \delta^2 \lambda_n^2 + K \right)}. \quad (4.31)$$

Substituindo B e C dados por (4.30) e (4.31), respectivamente, em (4.24), vem que

$$A = -\frac{\delta \rho_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{(-\rho_1 \lambda_n^2 + i \lambda_n d_0)}. \quad (4.32)$$

De (4.30), (4.31) e (4.32), podemos concluir que

$$A \rightarrow 0, \quad (4.33)$$

$$B \rightarrow \left(\frac{L_1 L_2 + L_2^2}{L_1^2 + L_2^2} \right) \frac{\rho_2^2}{KD} (v_2^2 - v_1^2), \quad (4.34)$$

$$C \rightarrow \left(\frac{L_1 L_2 + L_1^2}{L_1^2 + L_2^2} \right) \frac{\rho_2^2}{KD} (v_2^2 - v_1^2), \quad (4.35)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Visto que

$$\Psi_n = i \lambda_n \psi_n,$$

e usando a definição de $\|U_n\|_{\mathcal{H}}$ e pela hipótese (4.10), segue que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy \\ &= \rho_2 \int_{\Omega} |\lambda_n \psi_n|^2 dx dy \\ &= \rho_2 \int_{\Omega} |\lambda_n B \cos(\delta \lambda_1 x) \sin(\delta \lambda_2 y)|^2 dx dy \\ &= \rho_2 |\lambda_n B|^2 \frac{L_1 L_2}{4} \rightarrow \infty \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Deste modo, nossas conclusões seguem do Teorema 2.5. ■

4.3 Estabilidade Assintótica

Nesta seção estabeleceremos propriedades sobre o comportamento assintótico da energia associada ao sistema de Mindlin-Timoshenko (4.1)–(4.9). Provaremos que, quando o sistema está sobre a influência de um mecanismo dissipativo atuando na equação do deslocamento transversal, então, o decaimento da energia é exponencial e tende para zero quando o tempo vai para o infinito, desde que a condição $D\rho_1 = K\rho_2$ seja satisfeita.

Para começar, vamos mostrar, seguindo o Teorema 2.5, que o resolvente é uniformemente limitado sobre o eixo imaginário. Para isto, vamos considerar o produto interno em \mathcal{H} de $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)^T \in D(\mathcal{A})$ com a equação resolvente de \mathcal{A} , isto é

$$i\lambda \|U\|_{\mathcal{H}}^2 - (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Assim tomando a parte real e usando a inequação (2.14), fazendo $d_1 = d_2 = 0$, chegamos a seguinte estimativa

$$d_0 \int_{\Omega} W^2 dx dy \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.37)$$

Agora, estamos em condições de provar o seguinte Lema.

Lema 4.2. *Sob as considerações acima temos*

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}).$$

Prova. Desde que $(I - \mathcal{A})^{-1}$ é compacto em \mathcal{H} , para verificar que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ é suficiente mostrar que \mathcal{A} não possui autovalor imaginário puro. Deste modo, suponhamos que existe

$\lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ tal que $i\lambda_0$ é um autovalor e $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)$ seja um autovetor normalizado, isto é

$$\mathcal{A}U = i\lambda_0 U.$$

Portanto, temos que

$$i\lambda_0 \omega - W = 0, \quad (4.38)$$

$$i\lambda_0 \rho_1 W - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y + d_0 W = 0, \quad (4.39)$$

$$i\lambda_0 \psi - \Psi = 0, \quad (4.40)$$

$$i\lambda_0 \rho_2 \Psi - D \left(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{xy} \right) + K(\psi + \omega_x) = 0, \quad (4.41)$$

$$i\lambda_0 \varphi - \Phi = 0, \quad (4.42)$$

$$i\lambda_0 \rho_2 \Phi - D \left(\frac{1-\mu}{2} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{xy} \right) + K(\varphi + \omega_y) = 0. \quad (4.43)$$

Desta forma, de (4.37), para $F = 0$, obtemos $W = 0$. Então, de (4.38) temos que $\omega = 0$. Agora, de (4.39), (4.41) e (4.43) e usando as desigualdades de Poincaré e Korn inequality concluímos que $\psi = \varphi = 0$. Finalmente, usando (4.40) e (4.42) encontramos $\Psi = \Phi = 0$. Isto implica que $U = 0$. Mas isto é contradição, desta maneira não existem autovalores imaginários.

■

Observação 4.3. Em particular este resultado implica que o semigrupo é fortemente estável, isto é

$$S(t)U_0 \rightarrow 0,$$

onde $S(t) := e^{At}$ é o C_0 -semigrupo de contrações no espaço de Hilbert \mathcal{H} e U_0 o dado inicial.

Agora, provaremos que o sistema Mindlin-Timoshenko (4.1)–(4.9) exponencialmente estável se, e somente se

$$v_1^2 = v_2^2.$$

Para fazer isto, vamos considerar o sistema resolvente

$$i\lambda U - \mathcal{A}U = F \text{ em } \mathcal{H}, \quad (4.44)$$

o qual pode ser reescrito em termo de seus componentes como

$$i\lambda\omega - W = f^1, \quad (4.45)$$

$$i\lambda\rho_1 W - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y + d_0 W = f^2, \quad (4.46)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f^3, \quad (4.47)$$

$$i\lambda\rho_2 \Psi - D \left(\psi_{xx} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \varphi_{xy} \right) + K(\psi + \omega_x) = f^4, \quad (4.48)$$

$$i\lambda\varphi - \Phi = f^5, \quad (4.49)$$

$$i\lambda\rho_2 \Phi - D \left(\frac{1-\mu}{2} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1+\mu}{2} \psi_{xy} \right) + K(\varphi + \omega_y) = f^6, \quad (4.50)$$

onde $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6)^T \in \mathcal{H}$ e $U = (\omega, W, \psi, \Psi, \varphi, \Phi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. A prova envolve a utilização de alguns lemas auxiliares.

Lema 4.4. *Existe uma constante positiva M tal que toda solução forte do sistema (4.1)–(4.9) satisfaz*

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \leq \\ & C_1 \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 \right. \\ & \left. + \mu\varphi_y \bar{\psi}_x + \mu\psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde C_1 é uma constante positiva.

Prova. Multiplicando a equação (4.46) por $\bar{\omega}$ e integrando em Ω temos que

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} W\bar{\omega} \, dx \, dy}_{:=I_1} - K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x)_x \bar{\omega} \, dx \, dy - K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y)_y \bar{\omega} \, dx \, dy + d_0 \int_{\Omega} W\bar{\omega} \, dx \, dy = \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} \, dx \, dy.$$

Substituindo ω dado por (4.45) em I_1 e integrando por partes, resulta

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \int_{\Omega} W(\overline{f^1 + W}) \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\omega}_x \, dx \, dy \\ & + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\omega}_y \, dx \, dy - K \int_{\Gamma} (\psi + \omega_x) \bar{\omega} \nu_1 \, d\Gamma \\ & - K \int_{\Gamma} (\varphi + \omega_y) \bar{\omega} \nu_2 \, d\Gamma + d_0 \int_{\Omega} W\bar{\omega} \, dx \, dy = \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} \, dx \, dy, \end{aligned}$$

então, usando as condições de contorno (4.7)–(4.9), segue que

$$\begin{aligned} & K \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 \, dx \, dy + K \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 \, dx \, dy = \rho_1 \int_{\Omega} |W|^2 \, dx \, dy \\ & + \underbrace{K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\varphi} \, dx \, dy}_{:=I_2} + \rho_1 \int_{\Omega} W \bar{f}^1 \, dx \, dy \\ & - \underbrace{d_0 \int_{\Omega} W\bar{\omega} \, dx \, dy}_{:=I_3} + \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} \, dx \, dy. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Usando as desigualdades de Young e Korn, encontramos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi|^2 dx dy \\
&\quad + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx dy \\
&\leq \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \\
&\quad + C_1 \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 \right. \\
&\quad \left. + \mu\varphi_y \bar{\psi}_x + \mu\psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right]. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{d_0}{|\lambda|} \int_{\Omega} |W||W + f^1| dx dy \\
&\leq \frac{d_0}{|\lambda|} \int_{\Omega} |W|^2 dx dy + \frac{d_0}{|\lambda|} \int_{\Omega} |W||f^1| dx dy. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Substituindo I_2 e I_3 em (4.52), resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \leq \\
&\left(\rho_1 + \frac{d_0}{|\lambda|} \right) \int_{\Omega} |W|^2 dx dy + C_1 \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 + |\varphi_y|^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 + \mu\varphi_y \bar{\psi}_x + \mu\psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] \\
&\quad + \frac{d_0}{|\lambda|} \int_{\Omega} |W||f^1| \bar{\omega} dx dy + \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} dx dy.
\end{aligned}$$

Da equação acima e de (4.37) concluímos que existe uma constante positiva M tal que

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy \leq \\ & C_1 \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 + |\varphi_y|^2 + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) |\psi_y + \varphi_x|^2 \right. \\ & \left. + \mu \varphi_y \bar{\psi}_x + \mu \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

de onde segue nossas conclusões. A prova está completa. ■

Lema 4.5. *Existe uma constante positiva M tal que toda solução forte do sistema (4.1)–(4.9) satisfaz*

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \leq C_2 \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy \right. \\ & + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\ & \left. + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy \\ & + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

onde C_2 é uma constante positiva.

Prova. Multiplicando a equação (4.48) por $\bar{\psi}$ e integrando em Ω temos que

$$\begin{aligned} & \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{\psi} \, dx \, dy - D \int_{\Omega} \psi_{xx} \bar{\psi} \, dx \, dy - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_{yy} \bar{\psi} \, dx \, dy}_{:=I_4} \\ & - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_{xy} \bar{\psi} \, dx \, dy - D\mu \int_{\Omega} \varphi_{xy} \bar{\psi} \, dx \, dy \\ & + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy = \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Substituindo ψ dado por (4.47) em I_4 e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} & -\rho_2 \int_{\Omega} \Psi (\overline{f^3 + \Psi}) \, dx \, dy + D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy \\ & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\psi}_y \, dx \, dy \\ & + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy \\ & - D \int_{\Gamma} \left(\psi_x + \mu\varphi_y, \left(\frac{1-\mu}{2} \right) (\varphi_x + \psi_y) \right) \cdot \nu \bar{\psi} \, d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} \, dx \, dy, \end{aligned}$$

de onde segue, usando as condições de contorno (4.43)–(4.45), que

$$\begin{aligned} & \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy = D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy \\ & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y|^2 \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\psi}_y \, dx \, dy \\ & + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\psi} \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$- \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{f^3} \, dx \, dy - \int_{\Omega} f^4 \overline{\psi} \, dx \, dy. \quad (4.56)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (4.50) por $\overline{\varphi}$, integrando por partes em Ω e usando (4.49), encontramos

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy &= D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 \, dx \, dy \\ &+ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\varphi_x|^2 \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \overline{\varphi}_x \, dx \, dy \\ &+ D\mu \int_{\Omega} \psi_x \overline{\varphi}_y \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \overline{\varphi} \, dx \, dy \\ &- \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{f^5} \, dx \, dy - \int_{\Omega} f^6 \overline{\varphi} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Somando as equações (4.56) e (4.57), obtemos

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 \, dx \, dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 \, dx \, dy &= D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy \\ &+ D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 \, dx \, dy \\ &+ D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \overline{\psi}_x \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \overline{\varphi}_y \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \overline{\psi} \, dx \, dy \\ &+ K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \overline{\varphi} \, dx \, dy - \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{f^3} \, dx \, dy - \int_{\Omega} f^4 \overline{\psi} \, dx \, dy \\ &- \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{f^5} \, dx \, dy - \int_{\Omega} f^6 \overline{\varphi} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Então, substituindo (4.53) em (4.58), vem que

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \leq C_2 \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy \right. \\
& + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\
& \left. + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy \\
& + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy - \rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{f}^3 dx dy - \int_{\Omega} f^4 \bar{\psi} dx dy \\
& - \rho_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{f}^5 dx dy - \int_{\Omega} f^6 \bar{\varphi} dx dy,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx dy \leq C_2 \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy \right. \\
& + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\
& \left. + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\psi + \omega_x|^2 dx dy \\
& + \frac{K}{2} \int_{\Omega} |\varphi + \omega_y|^2 dx dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

de onde segue nosso resultado. ■

O próximo Lema nos fornece uma importante relação entre os coeficientes para obter a condição necessária e suficiente para estabilidade exponencial do sistema (4.1)–(4.9).

Lema 4.6. *Existe uma contante positiva M tal que toda solução forte do sistema (4.1)–(4.9) satisfaz*

$$\begin{aligned}
 & D \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy + \mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy + \mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] \\
 & \leq i\lambda \left(\frac{D\rho_1}{K} - \rho_2 \right) \int_{\Omega} \bar{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a equação (4.48) por $\bar{\omega}_x$, integrando por partes em Ω e usando (4.47), temos que

$$\begin{aligned}
 & i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{\omega}_x dx dy + D \int_{\Omega} \psi_x \bar{\omega}_{xx} dx dy \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \bar{\omega}_{xy} dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\omega}_{xy} dx dy \\
 & + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\omega}_{xx} dx dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\omega}_x dx dy \\
 & - D \int_{\Gamma} \left(\psi_x + \mu\varphi_y, \frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y) \right) \cdot \nu \bar{\omega}_x d\Gamma \\
 & = \int_{\Omega} f^4 \bar{\omega}_x dx dy. \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

Da mesma maneira, multiplicando a equação (4.50) por $\bar{\omega}_y$, integrando por partes em Ω e usando a equação (4.49), obtemos

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{\omega}_y \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\omega}_{xy} \, dx \, dy \\
& + D \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\omega}_{yy} \, dx \, dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \bar{\omega}_{xy} \, dx \, dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\omega}_{yy} \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\omega}_y \, dx \, dy \\
& - D \int_{\Gamma} \left(\frac{1-\mu}{2} (\varphi_x + \psi_y), \varphi_y + \mu\psi_x \right) \cdot \nu \bar{\omega}_y \, d\Gamma \\
& = \int_{\Omega} f^6 \bar{\omega}_y \, dx \, dy.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Somando-se os resultados acima e levando-se em consideração as condições de contorno (4.7)–(4.9), segue que

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \bar{\omega}_x \, dx \, dy + i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \bar{\omega}_y \, dx \, dy \\
& + D \int_{\Omega} \psi_x \bar{\omega}_{xx} \, dx \, dy + D \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\omega}_{yy} \, dx \, dy \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{:=I_4} \\
& + 2D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \bar{\omega}_{xy} \, dx \, dy + 2D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \bar{\omega}_{xy} \, dx \, dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\omega}_{xx} \, dx \, dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\omega}_{yy} \, dx \, dy \\
& + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\omega}_x \, dx \, dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\omega}_y \, dx \, dy \\
& = \int_{\Omega} f^4 \bar{\omega}_x \, dx \, dy + \int_{\Omega} f^6 \bar{\omega}_y \, dx \, dy.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Por outro lado, de (4.46) temos que

$$\begin{aligned}
& -i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy - K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \psi_x \, dx \, dy \\
& - K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \varphi_y \, dx \, dy - K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \psi_x \, dx \, dy \\
& - K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \varphi_y \, dx \, dy + d_0 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy \\
& = \int_{\Omega} \overline{f^2}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
& K \int_{\Omega} \psi_x \overline{\omega_{xx}} \, dx \, dy + K \int_{\Omega} \varphi_y \overline{\omega_{yy}} \, dx \, dy \\
& = -i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy - K \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy \\
& - K \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 \, dx \, dy - K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \varphi_y \, dx \, dy \\
& - K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \psi_x \, dx \, dy + d_0 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy \\
& - \int_{\Omega} \overline{f^2}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy. \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.63) em I_4 obtemos

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{\omega_x} \, dx \, dy + i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{\omega_y} \, dx \, dy \\
& - \frac{D}{K} \left[i\lambda\rho_1 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) \, dx \, dy + K \int_{\Omega} |\psi_x|^2 \, dx \, dy \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + K \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \varphi_y dx dy \\
& + K \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \psi_x dx dy - d_0 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy \\
& + \int_{\Omega} \overline{f^2}(\psi_x + \varphi_y) dx dy \Big] + 2D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \overline{\omega_{xy}} dx dy \\
& + 2D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \overline{\omega_{xy}} dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \overline{\omega_{xx}} dx dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \overline{\omega_{yy}} dx dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \overline{\omega_x} dx dy \\
& + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \overline{\omega_y} dx dy = \int_{\Omega} f^4 \overline{\omega_x} dx dy + \int_{\Omega} f^6 \overline{\omega_y} dx dy,
\end{aligned}$$

de onde podemos obter

$$\begin{aligned}
& \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Psi \overline{\omega_x} dx dy}_{:=I_5} + \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \Phi \overline{\omega_y} dx dy}_{:=I_6} \\
& - i\lambda \frac{D\rho_1}{K} \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy - D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy \\
& - D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy - D \int_{\Omega} (\overline{\psi + \omega_x})_x \varphi_y dx dy \\
& - D \int_{\Omega} (\overline{\varphi + \omega_y})_y \psi_x dx dy + 2D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \psi_y \overline{\omega_{xy}} dx dy \\
& + 2D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \overline{\omega_{xy}} dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \overline{\omega_{xx}} dx dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \overline{\omega_{yy}} dx dy + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \overline{\omega_x} dx dy \\
& + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \overline{\omega_y} dx dy + \frac{d_0 D}{K} \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy
\end{aligned}$$

$$= \frac{D}{K} \int_{\Omega} \overline{f^2}(\psi_x + \varphi_y) dx dy + \int_{\Omega} f^4 \overline{\omega}_x dx dy + \int_{\Omega} f^6 \overline{\omega}_y dx dy. \quad (4.64)$$

Substituindo ω dado por (4.45) em I_5 e I_6 temos

$$\begin{aligned} I_5 + I_6 &= \underbrace{\rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} \Psi_x dx dy}_{:=I_7} + \underbrace{\rho_2 \int_{\Omega} \overline{W} \Phi_y dx dy}_{:=I_8} \\ &\quad + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f^1} \Psi_x dx dy + \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f^1} \Phi_y dx dy. \end{aligned}$$

Usando Ψ dado por (4.47) e Φ dado por (4.49) em I_7 e I_8 , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} I_5 + I_6 &= i\lambda\rho_2 \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy - \rho_2 \int_{\Omega} \overline{W}(f_x^3 + f_y^5) dx dy \\ &\quad - \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_x^1} \Psi dx dy - \rho_2 \int_{\Omega} \overline{f_y^1} \Phi dx dy. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Utilizando (4.65) em (4.64), após algumas simplificações, resulta

$$\begin{aligned} &D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \int_{\Omega} \overline{\psi}_y \varphi_x dx dy + D \int_{\Omega} \overline{\varphi}_x \psi_y dx dy \\ &= \lambda \left(\rho_2 - \frac{D\rho_1}{K} \right) \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy \\ &\quad + K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \overline{\omega}_x dx dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \overline{\omega}_y dx dy \\ &\quad + \frac{d_0 D}{K} \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy - \frac{D}{K} \int_{\Omega} \overline{f^2}(\psi_x + \varphi_y) dx dy \\ &\quad - \int_{\Omega} f^4 \overline{\omega}_x dx dy - \int_{\Omega} f^6 \overline{\omega}_y dx dy, \end{aligned} \quad (4.66)$$

de onde encontramos

$$\begin{aligned}
& D \int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + D \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy \\
& + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy + D\mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \\
& = i\lambda \left(\rho_2 - \frac{D\rho_1}{K} \right) \int_{\Omega} \bar{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y - \varphi_x|^2 dx dy \\
& + \underbrace{K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \bar{\omega}_x dx dy + K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \bar{\omega}_y dx dy}_{:=I_9} \\
& + \frac{d_0 D}{K} \int_{\Omega} \bar{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy - \frac{D}{K} \int_{\Omega} \bar{f}^2(\psi_x + \varphi_y) dx dy \\
& - \int_{\Omega} f^4 \bar{\omega}_x dx dy - \int_{\Omega} f^6 \bar{\omega}_y dx dy. \tag{4.67}
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
I_9 & = \rho_1 \int_{\Omega} |W|^2 dx dy + d_0 \int_{\Omega} W \bar{\omega} dx dy \\
& + \rho_1 \int_{\Omega} W \bar{f}^1 dx dy + \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} dx dy \\
& \leq \left(\rho_1 + \frac{d_0}{|\lambda|} \right) \int_{\Omega} |W|^2 dx dy + \int_{\Omega} f^2 \bar{\omega} dx dy \\
& + \left(\rho_1 + \frac{d_0}{|\lambda|} \right) \int_{\Omega} |W| |f^1| dx dy, \tag{4.68}
\end{aligned}$$

então, substituindo (4.68) em (4.67) e utilizando a desigualdade de Korn, concluímos que

$$\begin{aligned}
 & D \left[\int_{\Omega} |\psi_x|^2 dx dy + \int_{\Omega} |\varphi_y|^2 dx dy \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} |\psi_y + \varphi_x|^2 dx dy + \mu \int_{\Omega} \varphi_y \bar{\psi}_x dx dy + \mu \int_{\Omega} \psi_x \bar{\varphi}_y dx dy \right] \\
 & \leq i\lambda \left(\frac{D\rho_1}{K} - \rho_2 \right) \int_{\Omega} \overline{W}(\psi_x + \varphi_y) dx dy + M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},
 \end{aligned}$$

de onde seguem nossas conclusões. ■

Agora, estamos em posição de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.7. *O semigrupo associado ao sistema de Mindlin-Timoshenko (4.1)–(4.9), onde $d_0 > 0$ e $d_1 = d_2 = 0$, é exponencialmente estável se, e somente se*

$$v_1^2 = v_2^2,$$

onde v_1^2 e v_2^2 são as velocidades de propagação de ondas dadas por (1.17).

Prova. Utilizando os Lemmas 4.4, 4.5 e 4.6 podemos concluir que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

de onde segue que

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq M \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Então, usando o resultado devido a Prüss [32] segue a conclusão do teorema. ■

4.4 Decaimento Polinomial

Nesta seção, provaremos que as soluções do sistema de Mindlin-Timoshenko (4.1)–(4.9), desde que $D\rho_1 \neq K\rho_2$, decaem polinomialmente para zero a medida que o tempo tende para o infinito. Mostraremos que a energia correspondente decai, em geral, para zero na forma $1/\sqrt{t}$.

Além disso, mostraremos que a taxa de decaimento $1/\sqrt{t}$ é ótima, no sentido de que esta taxa não pode ser melhorada.

Segue, então, um resultado auxiliar.

Lema 4.8. *Sob as considerações acima, existem constantes positivas C_1 e C_3 tais que*

$$\int_{\Omega} |W| |\psi + \varphi_y| \, dx \, dy \leq C_3 |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_1}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.69)$$

onde $|\lambda| > 1$ é suficientemente grande.

Prova. Usando a desigualdade de Young segue que

$$\int_{\Omega} |W| |\psi + \varphi_y| \, dx \, dy \leq \frac{|\lambda|}{2} \int_{\Omega} |W|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{2|\lambda|} \int_{\Omega} |\psi + \varphi_y|^2 \, dx \, dy. \quad (4.70)$$

De (4.66), usando mais uma vez a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi_x + \varphi_y|^2 \, dx \, dy &\leq |\lambda| \left| \frac{D\rho_1}{K} - \rho_2 \right| \int_{\Omega} |W| |\psi_x + \varphi_y| \, dx \, dy \\ &\quad + C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{|\lambda|^2}{2} \left| \frac{D\rho_1}{K} - \rho_2 \right|^2 \int_{\Omega} |W|^2 \, dx \, dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\psi_x + \varphi_y|^2 \, dx \, dy \\ &\quad + C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\psi_x + \varphi_y|^2 dx dy \leq C_2 |\lambda|^2 \int_{\Omega} |W|^2 dx dy + C_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.71)$$

onde C_1, C_2 são constantes positivas. Substituindo (4.71) em (4.70), encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |W| |\psi + \varphi_y| dx dy &\leq \frac{|\lambda|}{2} \int_{\Omega} |W|^2 dx dy + C_2 |\lambda| \int_{\Omega} |W|^2 dx dy \\ &\quad + \frac{C_1}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Então, usando (4.37) em (4.72), segue que

$$\int_{\Omega} |W| |\psi + \varphi_y| dx dy \leq C_3 |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C_1}{|\lambda|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

De onde nossa conclusão segue. ■

Agora estamos em condições de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.9. *Vamos supor que*

$$v_1^2 \neq v_2^2,$$

onde v_1^2 e v_2^2 são as velocidades de propagação de ondas dadas em (1.17). Então o semigrupo associado ao sistema (4.1)–(4.9) é polinomialmente estável e

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}.$$

Além disso, esta taxa de decaimento é ótima.

Prova. Combinando os Lemas 4.4, 4.5, 4.6 segue existe uma constante positiva M_1 tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq M_1 |\lambda|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}},$$

para $|\lambda| > 1$ suficientemente grande, assim temos que

$$\frac{1}{|\lambda|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq M_1 \|F\|_{\mathcal{H}},$$

o que é equivalente a

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M_1 |\lambda|^2.$$

Então, usando Teorema 2.6 devido a Borichev e Tomilov [5] obtemos

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1/2}) \Rightarrow \|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{M_1}{\sqrt{t}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Desde que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, segue que \mathcal{A} sobrejetivo sobre \mathcal{H} , então tomando $\mathcal{A}U_0 = F$, resulta

$$\|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M_1}{\sqrt{t}} \|U_0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

completando a primeira afirmação do Teorema. Para provar que a taxa de decaimento é ótima, utilizaremos argumentos de contradição. Desta maneira, vamos supor que a taxa de decaimento polinomial $t^{-1/2}$ pode ser melhorada para uma taxa da forma $t^{-1/2-\epsilon}$. Do Teorema 5.3 em [24], o operador

$$|\lambda|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$$

deve ser limitado quando $\lambda \rightarrow \infty$, mas isto não acontece. De fato, para provar vamos supor que existe uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ e $(U_n) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $(F_n) \subset \mathcal{H}$ tal que

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n.$$

Então, podemos considerar

$$F_n = (0, F^2 \sin(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y), 0, F^4 \cos(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y), 0, F^6 \sin(\delta\lambda_1 x) \cos(\delta\lambda_2 y)),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, com $F^2 \neq 0, F^4 \neq 0, F^6 \neq 0$ constantes, com $\lambda_1 = \frac{n\pi}{\delta L_1}, \lambda_2 = \frac{n\pi}{\delta L_2}, \delta = \sqrt{\frac{\rho_2}{D}}$ e $U_n = (\omega_n, W_n, \psi_n, \Psi_n, \varphi_n, \Phi_n)^T$. Além disso, escolhemos

$$\omega_n = A \sin(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y),$$

$$\psi_n = B \cos(\delta\lambda_1 x) \sin(\delta\lambda_2 y),$$

$$\varphi_n = C \sin(\delta\lambda_1 x) \cos(\delta\lambda_2 y).$$

Portanto, definindo λ por

$$\lambda = \lambda_n := \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = O(n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 4.1, podemos concluir que

$$|\lambda_n|^{-2+\frac{\epsilon}{2}} \|U_n\|_{\mathcal{H}} \geq O(n^{\frac{\epsilon}{2}}) \rightarrow \infty,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Desta forma, a taxa não pode ser melhorada. A prova, agora, está completa. ■

Parte II

Resultados Numéricos

Modelos semidiscretos em Diferenças Finitas

5.1 Introdução

No presente capítulo, fizemos um estudo numérico com base nos modelos semidiscretos em diferenças finitas que aplicamos ao modelo de placas de Mindlin-Timoshenko. Em particular, essas semidiscretizações ocorrem no nível das variáveis x e y , sendo o tempo t contínuo. Aos leitores, recomendamos a referência de E. Zuazua [46], onde problemas hiperbólicos semidiscretos são considerados.

Com respeito ao esquema numérico, alguns aspectos devem ser levados em consideração. Entre eles, vale ressaltar a existência de um fenômeno numérico conhecido como *trancamento no cortante*¹, que trata da existência de um termo adicional de sobrestimação de rigidez e que tornam os modelos numéricos inconsistentes com os análogos contínuos. Para uma ampla discussão a respeito deste fenômeno recomendamos a leitura dos notáveis trabalhos de Hughes *et*

¹do inglês *shear-locking*.

al. [12], Prathap e Bhashyam [31], Li [18] e Loula [20, 21]. Para uma breve discussão acerca deste problema numérico nos baseamos nos trabalhos devido a M. L. Santos e D. Almeida Júnior [35, 1]. Deste modo, consideremos o caso de uma viga plana descrita pela teoria de Timoshenko dada pelo seguinte sistema equações diferenciais hiperbólicas

$$\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad (5.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0. \quad (5.2)$$

Se usarmos o método de elementos finitos com funções lineares, o coeficiente de rigidez $b = EI$ é modificado para

$$b_h = b \left(1 + \frac{\kappa}{12b} h^2 \right), \quad (5.3)$$

o que corresponde ao termo de sobrestimação de rigidez e que constitui em uma restrição espúria para h fixo. Em particular, para uma viga plana de geometria retangular com largura a e espessura ϵ , com $b = EI$, $\kappa = kGA$, $A = a\epsilon$, $I = a\epsilon^3/12$, temos que b_h pode ser reescrito como

$$b_h = EI \left[1 + \frac{kG}{E} \left(\frac{h}{\epsilon} \right)^2 \right]. \quad (5.4)$$

Aparentemente, esta solução espúria pode ser eliminada tomando-se um h pequeno, aqui definimos h como a dimensão espacial de passo da malha. Contudo, de acordo com a equação (5.4), h deve ser pelo menos da mesma ordem da espessura ϵ , sendo este um parâmetro que tende a ser pequeno. Mas isto, em outras palavras, significa refinar a malha, o que é computacionalmente custoso. Além disso, note que para um h fixo a equação do ângulo de rotação (5.2), pode ser reescrita como

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} - \frac{\kappa}{12} h^2 \psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) = 0, \quad (5.5)$$

e sua respectiva energia dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho_1 |\varphi_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \kappa |\varphi_x + \psi|^2 + b_h |\psi_x|^2] dx. \quad (5.6)$$

Naturalmente, esta energia difere do caso real em que se tem $b_h = b$. O problema numérico de trancamento no cortante presente na viga de Timoshenko se estende a teoria de placas de Mindlin-Timoshenko, e a fim de superá-lo muitos procedimentos tem sido desenvolvidos (*ver detalhes em [38]*). Em nosso caso, usaremos método semidiscreto em diferenças finitas e a fim de evitar o trancamento, tomamos uma discretização particular para as funções de derivada nula $K\psi$ e $K\varphi$, usando-se de operadores numéricos de segunda ordem.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 5.2 introduzimos um esquema numérico espacial aplicado ao sistema de equações de Mindlin-Timoshenko (2.1)–(2.5) livre de sobrestimação, onde definimos a energia semidiscreta, a qual se conserva sem a presença de termos dissipativos. Na Seção 5.3, nos utilizamos do θ -esquema a fim de identificar e exibir os termos de trancamento.

5.2 Modelo Semidiscreto em Diferenças Finitas

Para os nossos propósitos, considere $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$, e para $I, J \in \mathbb{N}$, denotamos por $h_x = \frac{L_1}{I+1}$ e $h_y = \frac{L_2}{J+1}$ a dimensão espacial de passo da malha, considerando-se as seguintes subdivisões uniformes dos intervalos $[0, L_1]$ e $[0, L_2]$, respectivamente

$$x_0 = 0 < x_1 = h_x < \cdots < x_I = Ih_x < x_{I+1} = L_1, \quad (5.7)$$

$$y_0 = 0 < y_1 = h_y < \cdots < y_J = Jh_y < y_{J+1} = L_2, \quad (5.8)$$

onde $x_i = ih_x$ e $y_j = jh_y$, para $i = 0, 1, 2, \dots, I + 1$, $j = 0, 1, 2, \dots, J + 1$. As equações semi-discretas via método de diferenças finitas aplicadas ao sistema (2.1)-(2.5) são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega''_{i,j} - K \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_x} - K \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h_x^2} - K \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h_y} \\ - K \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{h_y^2} + d_0 \omega'_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \psi''_{i,j} - D \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_x^2} - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h_y^2} \\ - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} + K \frac{\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{4} \\ + K \frac{\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{4} + K \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2h_x} + d_1 \psi'_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \varphi''_{i,j} - D \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h_y^2} - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h_x^2} \\ - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} + K \frac{\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{4} \\ + K \frac{\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{4} + K \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2h_y} + d_2 \varphi'_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

aqui, denotamos por ' a diferenciação com respeito ao tempo. As funções semidiscretas $\omega_{i,j} = \omega_{i,j}(t)$, $\psi_{i,j} = \psi_{i,j}(t)$ e $\varphi_{i,j} = \varphi_{i,j}(t)$ denotam os valores aproximado das soluções contínuas $\omega(ih_x, jh_y, t)$, $\psi(ih_x, jh_y, t)$ e $\varphi(ih_x, jh_y, t)$ na malha, respectivamente. As semidiscretizações das condições de contorno são dadas por

$$\omega_{0,j} = \omega_{I+1,j} = \omega_{i,0} = \omega_{i,J+1} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.12)$$

$$\psi_{0,j} = \psi_{I+1,j} = \psi_{i,0} = \psi_{i,J+1} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.13)$$

$$\varphi_{0,j} = \varphi_{I+1,j} = \varphi_{i,0} = \varphi_{i,J+1} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.14)$$

e condições iniciais

$$\omega_{i,j}(0) = \omega_{i,j}^0, \quad \omega'_{i,j}(0) = \omega_{i,j}^1, \quad \forall i = 0, \dots, I+1, j = 0, \dots, J+1, \quad (5.15)$$

$$\psi_{i,j}(0) = \psi_{i,j}^0, \quad \psi'_{i,j}(0) = \psi_{i,j}^1, \quad \forall i = 0, \dots, I+1, j = 0, \dots, J+1, \quad (5.16)$$

$$\varphi_{i,j}(0) = \varphi_{i,j}^0, \quad \varphi'_{i,j}(0) = \varphi_{i,j}^1, \quad \forall i = 0, \dots, I+1, j = 0, \dots, J+1. \quad (5.17)$$

Nas equações (5.10) e (5.11) destacamos as seguintes aproximações para os ângulos de rotação ψ e φ , dadas por

$$\psi(x_i, y_j, t) \approx \frac{\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{4} + \frac{\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{4}, \quad (5.18)$$

$$\varphi(x_i, y_j, t) \approx \frac{\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{4} + \frac{\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{4}. \quad (5.19)$$

A estas aproximações somos gratos a D. Almeida Júnior que, em seu trabalho [1], as utilizou na discretização em diferenças finitas para vigas de Timoshenko e vigas curvas de Bresse. Almeida Júnior, seguiu as mesmas aproximações usadas anteriormente por J. Wright [45] (e referências sugeridas contidas neste artigo), e observou que discretizações do tipo (5.18) e (5.19) evitam a anomalia numérica do trancamento no cortante. Por consequência, a energia numérica associada é livre de sobrestimações do tipo (5.4), como veremos na Proposição a seguir.

A energia numérica do sistema (5.9)–(5.17) é dada por

$$\begin{aligned} E_{h_x h_y}(t) := & \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 |\omega'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\psi'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\varphi'_{i,j}|^2 + D \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \right. \\ & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left| \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\ & + D \left| \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} \right|^2 + K \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\ & \left. + K \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \left| \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j}}{2h_y} \right) \\
& + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j}}{2h_y} \right) \Big]. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

As equações (5.9)–(5.11), de fato, estão livres de sobrestimação, o que pode ser percebido ao se comparar a energia numérica (5.20) com sua respectiva energia contínua, dada por (2.23). Note que o coeficiente de rigidez à flexão D , está exatamente como em (2.11), sem qualquer dependência dos termos h_x e h_y . De fato, estabelecemos essa propriedade de acordo com a seguinte assertiva.

Proposição 5.1 (Descrescimento da Energia Semidiscreta). *Para todo $h_x, h_y > 0$ a energia de soluções $E_{h_x h_y}(t)$ em (5.20) das equações discreta (5.9)–(5.11), para qualquer condição de contorno (5.12)–(5.14), com condições iniciais (5.15)–(5.17), satisfaz*

$$E_{h_x h_y}(t) \leq E_{h_x h_y}(0), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.21)$$

Prova. Para provar nossa afirmação, procederemos da seguinte maneira: vamos multiplicar as equações (5.9)–(5.11) pelos multiplicadores discretos $h_x h_y \omega'_{i,j}(t)$, $h_x h_y \psi'_{i,j}(t)$ e $h_x h_y \varphi'_{i,j}(t)$, respectivamente. E em seguida efetuamos a soma para $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, J$. Sendo assim, tem-se

$$\begin{aligned}
& \rho_1 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega''_{i,j} \omega'_{i,j} - K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_x} \omega'_{i,j} \\
& - K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h_x^2} \omega'_{i,j} - K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h_y} \omega'_{i,j} \\
& - K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{h_y^2} \omega'_{i,j} = -d_0 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\omega'_{i,j}|^2, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_2 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \psi''_{i,j} \psi'_{i,j} - D h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_x^2} \psi'_{i,j} \\
 & - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h_y^2} \psi'_{i,j} \\
 & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \psi'_{i,j} \\
 & + K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{4} + \frac{\psi_{i,j+1} + 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{4} \right) \psi'_{i,j} \\
 & + K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2h_x} \psi'_{i,j} = -d_1 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\psi'_{i,j}|^2, \tag{5.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho_2 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varphi''_{i,j} \varphi'_{i,j} - D h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h_y^2} \varphi'_{i,j} \\
 & - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h_x^2} \varphi'_{i,j} \\
 & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \varphi'_{i,j} \\
 & + K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i+1,j} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{4} + \frac{\varphi_{i,j+1} + 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{4} \right) \varphi'_{i,j} \\
 & + K h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2h_y} \varphi'_{i,j} = -d_2 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\varphi'_{i,j}|^2. \tag{5.24}
 \end{aligned}$$

Primeiramente note que as seguintes identidades são verdadeiras

$$h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \omega''_{i,j} \omega'_{i,j} = \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\omega'_{i,j}|^2, \tag{5.25}$$

$$h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \psi''_{i,j} \psi'_{i,j} = \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\psi'_{i,j}|^2, \tag{5.26}$$

$$h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varphi''_{i,j} \varphi'_{i,j} = \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\varphi'_{i,j}|^2. \quad (5.27)$$

Devido ao método ser muito extensivo, nos limitaremos a desenvolver as simplificações apenas para os termos na direção da variável x , sempre tomando a variável y como análoga. Agora, efetuaremos simplificações para equação que governa os deslocamentos transversais $\omega_{i,j}(t)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} & -Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_x} \omega'_{i,j} - Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h_x^2} \omega'_{i,j} \\ &= -Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2h_x} \omega'_{i,j} - Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x^2} \omega'_{i,j} \\ &+ Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{2h_x} \omega'_{i,j} + Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}}{h_x^2} \omega'_{i,j} \\ &= -Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2h_x} \omega'_{i,j} + Kh_x h_y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j} + \psi_{0,j}}{2h_x} \omega'_{0,j} \\ &- Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x^2} \omega'_{i,j} + Kh_x h_y \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{1,j} - \omega_{0,j}}{h_x^2} \omega'_{0,j} \\ &+ Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2h_x} \omega'_{i+1,j} - Kh_x h_y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I+1,j} + \psi_{I,j}}{2h_x} \omega'_{I+1,j} \\ &+ Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x^2} \omega'_{i+1,j} - Kh_x h_y \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{I+1,j} - \omega_{I,j}}{h_x^2} \omega'_{I+1,j} \\ &= -Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2h_x} \omega'_{i,j} - Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x^2} \omega'_{i,j} \\ &+ Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2h_x} \omega'_{i+1,j} + Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x^2} \omega'_{i+1,j} \\ &+ Kh_x h_y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,0} + \psi_{i,0}}{2h_x} \omega'_{i,0} + Kh_x h_y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j} + \psi_{0,j}}{2h_x} \omega'_{0,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+Kh_xh_y \sum_{i=0}^I \frac{\omega_{i+1,0} - \omega_{i,0}}{h_x^2} \omega'_{i,0} + Kh_xh_y \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{1,j} - \omega_{0,j}}{h_x^2} \omega'_{0,j} \\
 &-Kh_xh_y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,0} + \psi_{i,0}}{2h_x} \omega'_{i+1,0} - Kh_xh_y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I+1,j} + \psi_{I,j}}{2h_x} \omega'_{I+1,j} \\
 &-Kh_xh_y \sum_{i=0}^I \frac{\omega_{i+1,0} - \omega_{i,0}}{h_x^2} \omega'_{i+1,0} - Kh_xh_y \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{I+1,j} - \omega_{I,j}}{h_x^2} \omega'_{I+1,j}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 &-Kh_xh_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_x} \omega'_{i,j} - Kh_xh_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h_x^2} \omega'_{i,j} \\
 = &Kh_xh_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i+1,j} - \omega'_{i,j}}{h_x} + K \frac{h_xh_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
 &+Kh_y \sum_{j=1}^J \left[\left(\frac{\psi_{1,j} + \psi_{0,j}}{2} + \frac{\omega_{1,j} - \omega_{0,j}}{h_x} \right) \omega'_{0,j} - \left(\frac{\psi_{I+1,j} + \psi_{I,j}}{2} + \frac{\omega_{I+1,j} - \omega_{I,j}}{h_x} \right) \omega'_{I+1,j} \right] \\
 &-Kh_xh_y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i+1,j} - \omega'_{i,j}}{h_x} - K \frac{h_xh_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \right|^2. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Em procedimento análogo, obtemos

$$\begin{aligned}
 &-h_xh_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h_y} \omega'_{i,j} - Kh_xh_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{h_y^2} \omega'_{i,j} \\
 = &Kh_xh_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i,j+1} - \omega'_{i,j}}{h_y} + K \frac{h_xh_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
 &+Kh_x \sum_{i=1}^I \left[\left(\frac{\varphi_{i,1} + \varphi_{i,0}}{2} + \frac{\omega_{i,1} - \omega_{i,0}}{h_y} \right) \omega'_{i,0} - \left(\frac{\varphi_{i,J+1} + \varphi_{i,J}}{2} + \frac{\omega_{i,J+1} - \omega_{i,J}}{h_y} \right) \omega'_{i,J+1} \right] \\
 &-Kh_xh_y \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i,j+1} - \omega'_{i,j}}{h_y} - K \frac{h_xh_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} \right|^2. \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

Deste modo, usando-se as equações (5.25), (5.28) e (5.29) em (5.22), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
& \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\omega'_{i,j}|^2 + \underbrace{K h_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i+1,j} - \omega'_{i,j}}{h_x}}_{:=\mathcal{P}_{0h}} \\
& + \underbrace{K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \right|^2}_{:=\mathcal{P}_{1h}} + \underbrace{K h_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i,j+1} - \omega'_{i,j}}{h_y}}_{:=\mathcal{P}_{2h}} \\
& + \underbrace{K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} \right|^2}_{:=\mathcal{P}_{3h}} = -d_0 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\omega'_{i,j}|^2 + \mathcal{C}_1(t), \quad (5.30)
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_1(t)$ designa os termos de contorno provenientes do procedimento, os quais são dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1(t) &= K h_x h_y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i+1,j} - \omega'_{i,j}}{h_x} + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
& - K h_y \sum_{j=1}^J \left[\left(\frac{\psi_{1,j} + \psi_{0,j}}{2} + \frac{\omega_{1,j} - \omega_{0,j}}{h_x} \right) \omega'_{0,j} - \left(\frac{\psi_{I+1,j} + \psi_{I,j}}{2} + \frac{\omega_{I+1,j} - \omega_{I,j}}{h_x} \right) \omega'_{I+1,j} \right] \\
& + K h_x h_y \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \frac{\omega'_{i,j+1} - \omega'_{i,j}}{h_y} + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
& - K h_x \sum_{i=1}^I \left[\left(\frac{\varphi_{i,1} + \varphi_{i,0}}{2} + \frac{\omega_{i,1} - \omega_{i,0}}{h_y} \right) \omega'_{i,0} - \left(\frac{\varphi_{i,J+1} + \varphi_{i,J}}{2} + \frac{\omega_{i,J+1} - \omega_{i,J}}{h_y} \right) \omega'_{i,J+1} \right].
\end{aligned}$$

Sem nos estendermos demasiadamente, procedemos de modo análogo com os termos componentes da equação que rege as rotações angulares $\psi_{i,j}(t)$, resultando em

$$\frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\psi'_{i,j}|^2 + D \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2$$

$$\begin{aligned}
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
 & + D \underbrace{\left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j}}{2h_y} \right) \left(\frac{\psi'_{i+1,j+1} - \psi'_{i,j}}{2h_x} \right)}_{:=\mathcal{P}_{4h}} \\
 & + D \underbrace{\left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j}}{2h_y} \right) \left(\frac{\psi'_{i+1,j} - \psi'_{i,j+1}}{2h_x} \right)}_{:=\mathcal{P}_{5h}} \\
 & + K \underbrace{\frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2}_{:=\mathcal{P}_{6h}} \\
 & + K \underbrace{h_x h_y \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \frac{\psi'_{i+1,j} + \psi'_{i,j}}{2}}_{:=\mathcal{P}_{7h}} = -d_1 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\psi'_{i,j}|^2 + \mathcal{C}_2(t), \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_2(t) = & -D \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \left(\frac{\psi_{i+1,0} - \psi_{i,0}}{h_x} \right)^2 + D h_y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j} - \psi_{0,j}}{h_x} \psi'_{0,j} \\
 & - D h_y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I+1,j} - \psi_{I,j}}{h_x} \psi'_{I+1,j} - K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \left(\frac{\psi_{i+1,0} + \psi_{i,0}}{2} \right)^2 \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{0,j+1} + \psi_{0,j}}{2} \right)^2 - K h_x h_y \sum_{i=0}^I \frac{\omega_{i+1,0} - \omega_{i,0}}{h_x} \frac{\psi'_{i+1,0} + \psi'_{i,0}}{2} \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{1,j} + \psi_{0,j}}{2} + \frac{\omega_{1,j} + \omega_{0,j}}{h_x} \right) \psi'_{0,j} \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{I+1,j} + \psi_{I,j}}{2} + \frac{\omega_{I+1,j} + \omega_{I,j}}{h_x} \right) \psi'_{I+1,j} \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i,1} + \psi_{i,0}}{2} \psi'_{i,0} - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{1,J+1} + \psi_{i,J}}{2} \psi'_{i,J+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,1} - \varphi_{i,0}}{4h_x h_y} \psi'_{i,0} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j+1} - \varphi_{0,j}}{4h_x h_y} \psi'_{0,j} \right) \\
& -D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i+1,J} - \varphi_{i,J+1}}{4h_x h_y} \psi'_{i,J+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{1,j} - \varphi_{0,j+1}}{4h_x h_y} \psi'_{0,j+1} \right) \\
& -D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,1} - \varphi_{i+1,0}}{4h_x h_y} \psi'_{i+1,0} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I,j+1} - \varphi_{I+1,j}}{4h_x h_y} \psi'_{I+1,j} \right) \\
& +D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,J} - \varphi_{i+1,J+1}}{4h_x h_y} \psi'_{i+1,J+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{I,j} - \varphi_{I+1,j+1}}{4h_x h_y} \psi'_{I+1,j+1} \right. \\
& \left. - \frac{\varphi_{I,J} - \varphi_{I+1,J+1}}{4h_x h_y} \psi'_{I+1,J+1} \right).
\end{aligned}$$

Em relação as equações de rotações $\varphi_{i,j}(t)$, temos

$$\begin{aligned}
& \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\varphi'_{i,j}|^2 + D \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \underbrace{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi'_{i+1,j+1} - \varphi'_{i,j}}{2h_y} \right)}_{:=\mathcal{P}_{8h}} \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \underbrace{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi'_{i,j+1} - \varphi'_{i+1,j}}{2h_y} \right)}_{:=\mathcal{P}_{9h}} \\
& + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
& \underbrace{\quad \quad \quad}_{:=\mathcal{P}_{10h}} \\
& + K h_x h_y \underbrace{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} \frac{\varphi'_{i,j+1} + \varphi'_{i,j}}{2}}_{:=\mathcal{P}_{11h}} = -d_2 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\varphi'_{i,j}|^2 + \mathcal{C}_3(t), \quad (5.32)
\end{aligned}$$

para

$$\begin{aligned}
 C_3(t) = & -D \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{0,j+1} - \varphi_{0,j}}{h_y} \right)^2 + D h_x \sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i,1} - \varphi_{i,0}}{h_y} \varphi'_{i,0} \\
 & - D h_x \sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i,J+1} - \varphi_{i,J}}{h_y} \varphi'_{i,J+1} - K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{0,j+1} + \varphi_{0,j}}{2} \right)^2 \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \left(\frac{\varphi_{i+1,0} + \varphi_{i,0}}{2} \right)^2 - K h_x h_y \sum_{j=0}^J \frac{\omega_{0,j+1} - \omega_{0,j}}{h_y} \frac{\varphi'_{0,j+1} + \varphi'_{0,j}}{2} \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\varphi_{i,1} + \varphi_{i,0}}{2} + \frac{\omega_{i,1} + \omega_{i,0}}{h_y} \right) \varphi'_{i,0} \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\varphi_{i,J+1} + \varphi_{i,J}}{2} + \frac{\omega_{i,J+1} + \omega_{i,J}}{h_y} \right) \varphi'_{i,J+1} \\
 & - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j} + \varphi_{0,j}}{2} \varphi'_{0,j} - K \frac{h_x h_y}{2} \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I+1,j} + \varphi_{I,j}}{2} \varphi'_{I+1,j} \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,1} - \psi_{i,0}}{4h_x h_y} \varphi'_{i,0} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j+1} - \psi_{0,j}}{4h_x h_y} \varphi'_{0,j} \right) \\
 & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i+1,J} - \psi_{i,J+1}}{4h_x h_y} \varphi'_{i,J+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{1,j} - \psi_{0,j+1}}{4h_x h_y} \varphi'_{0,j+1} \right) \\
 & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,1} - \psi_{i+1,0}}{4h_x h_y} \varphi'_{i+1,0} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I,j+1} - \psi_{I+1,j}}{4h_x h_y} \varphi'_{I+1,j} \right) \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,J} - \psi_{i+1,J+1}}{4h_x h_y} \varphi'_{i+1,J+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{I,j} - \psi_{I+1,j+1}}{4h_x h_y} \varphi'_{I+1,j+1} \right. \\
 & \left. - \frac{\psi_{I,J} - \psi_{I+1,J+1}}{4h_x h_y} \varphi'_{I+1,J+1} \right).
 \end{aligned}$$

Somando-se \mathcal{P}_{0h} , \mathcal{P}_{1h} , \mathcal{P}_{6h} e \mathcal{P}_{7h} , encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{0h} + \mathcal{P}_{1h} + \mathcal{P}_{6h} + \mathcal{P}_{7h} &= K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
&\quad + K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \\
&\quad + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
&\quad + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
&= K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
&\quad + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{2h} + \mathcal{P}_{3h} + \mathcal{P}_{10h} + \mathcal{P}_{11h} &= K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
&\quad + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Agora, somando-se \mathcal{P}_{4h} , \mathcal{P}_{5h} , \mathcal{P}_{8h} e \mathcal{P}_{9h} , obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{4h} + \mathcal{P}_{5h} + \mathcal{P}_{8h} + \mathcal{P}_{9h} &= D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j}}{2h_y} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j}}{2h_y} \right) \right]. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Por fim, adicionando-se as equações (5.30)–(5.32) e em seguida substituindo as equações (5.33)–(5.35) na soma obtida, resulta

$$\begin{aligned}
 & \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 |\omega'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\psi'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\varphi'_{i,j}|^2 \right. \\
 & + D \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
 & + D \left| \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} \right|^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left| \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
 & + K \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
 & + K \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \left| \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
 & + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j}}{2h_y} \right) \\
 & \left. + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j}}{2h_y} \right) \right] \\
 & = -h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [d_0 |\omega'_{i,j}|^2 + d_1 |\psi'_{i,j}|^2 + d_2 |\varphi'_{i,j}|^2] \\
 & + \mathcal{C}_1(t) + \mathcal{C}_2(t) + \mathcal{C}_3(t). \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

Desta forma, usando-se as condições de contorno (5.12)–(5.14) obtemos a seguinte lei de dissipação semidiscreta para a energia (5.20)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} E_{h_x h_y}(t) & = -d_0 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\omega'_{i,j}|^2 - d_1 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\psi'_{i,j}|^2 \\
 & - d_2 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\varphi'_{i,j}|^2, \quad \forall t \in [0, T],
 \end{aligned}$$

de onde segue que

$$E_{h_x h_y}(t) + d_0 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\omega'_{i,j}|^2 + d_1 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\psi'_{i,j}|^2 + d_2 h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |\varphi'_{i,j}|^2 = E_{h_x h_y}(0) \quad \forall t \in [0, T].$$

Por conseguinte

$$E_{h_x h_y}(t) \leq E_{h_x h_y}(0), \quad \forall t \in [0, T].$$

É claro que se $d_0 = d_1 = d_2 = 0$ o sistema (5.9)–(5.17) é conservativo, isto é

$$E_{h_x h_y}(t) = E_{h_x h_y}(0), \quad \forall t \in [0, T].$$

A prova agora está completa. ■

5.3 Análise numérica para o θ -esquema

De maneira geral, modelos discretos não preservam o mesmo comportamento qualitativo do seu equivalente modelo contínuo. Como discutido anteriormente, alguns modelos discretos para vigas de Timoshenko são afetados pelo fenômeno do trancamento do cortante, caracterizado pela sobrestimação (5.3).

Nesta seção, investigaremos como o número relativo ao trancamento aparece para o modelo de placas de Mindlin-Timoshenko, utilizando-se de uma formulação numérica denominada θ -esquema. Para tal, vamos assumir uma combinação linear convexa para os ângulos de rotação

ψ e φ , reescrevendo-os seguinte maneira

$$2(1 - 2\theta)\psi_{i,j}(t) + \theta [\psi_{i+1,j}(t) + \psi_{i,j+1}(t) + \psi_{i-1,j}(t) + \psi_{i,j-1}(t)], \quad \forall t \in [0, T],$$

$$2(1 - 2\theta)\varphi_{i,j}(t) + \theta [\varphi_{i+1,j}(t) + \varphi_{i,j+1}(t) + \varphi_{i-1,j}(t) + \varphi_{i,j-1}(t)], \quad \forall t \in [0, T].$$

Então, estabelecemos este esquema de diferenças para as equações (2.1)–(2.3), como vemos abaixo

$$\begin{aligned} \rho_1 \omega''_{i,j} - K \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h_x} - K \frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h_x^2} - K \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h_y} \\ - K \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{h_y^2} + d_0 \omega'_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \psi''_{i,j} - D \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h_x^2} - D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h_y^2} \\ - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} + 2K(1 - 2\theta)\psi_{i,j} \\ + K\theta(\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1}) + K \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2h_x} + d_1 \psi'_{i,j} = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \varphi''_{i,j} - D \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h_y^2} - D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h_x^2} \\ - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} + 2K(1 - 2\theta)\varphi_{i,j} \\ + K\theta(\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1}) + K \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2h_y} + d_2 \varphi'_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde θ é um parâmetro positivo. Ao sistema, consideramos condições de contorno Dirichlet homogêneas

$$\omega_{0,j} = \omega_{I+1,j} = \omega_{i,0} = \omega_{i,J+1} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.40)$$

$$\psi_{0,j} = \psi_{I+1,j} = \psi_{i,0} = \psi_{i,J+1} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.41)$$

$$\varphi_{0,j} = \varphi_{I+1,j} = \varphi_{i,0} = \varphi_{i,J+1} = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.42)$$

e condições iniciais

$$\omega_{i,j}(0) = \omega_{i,j}^0, \quad \omega'_{i,j}(0) = \omega_{i,j}^1, \quad \forall i = 0, \dots, I+1, j = 0, \dots, J+1, \quad (5.43)$$

$$\psi_{i,j}(0) = \psi_{i,j}^0, \quad \psi'_{i,j}(0) = \psi_{i,j}^1, \quad \forall i = 0, \dots, I+1, j = 0, \dots, J+1, \quad (5.44)$$

$$\varphi_{i,j}(0) = \varphi_{i,j}^0, \quad \varphi'_{i,j}(0) = \varphi_{i,j}^1, \quad \forall i = 0, \dots, I+1, j = 0, \dots, J+1. \quad (5.45)$$

A energia do sistema (5.37)–(5.45) é dada por

$$\begin{aligned} E_{h_x h_y}^\theta(t) := & \frac{h_x h_y}{2} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 |\omega'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\psi'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\varphi'_{i,j}|^2 + D_{h_x}^\theta \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \right. \\ & + D_{\mu, h_y}^\theta \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2 + D_{\mu, h_x}^\theta \left| \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\ & + D_{h_y}^\theta \left| \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} \right|^2 + K \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\ & + K \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 \\ & + K \left| \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j}}{2h_y} \right) \\ & \left. + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j}}{2h_y} \right) \right]. \quad (5.46) \end{aligned}$$

onde temos que

$$D_{h_{xk}}^\theta = D \left[1 + \frac{K}{D} h_{xk}^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right], \quad k = 1, 2, \quad (5.47)$$

$$D_{\mu, h_{xk}}^\theta = D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left[1 + \frac{2K}{D(1-\mu)} h_{xk}^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right], \quad k = 1, 2, \quad (5.48)$$

para $h_x = h_{x1}$ e $h_y = h_{x2}$. É claro que a positividade de $E_{h_x h_y}^\theta(t)$ é satisfeita para $\theta \in [0, 1/4]$ e somente para $\theta = 1/4$, temos que $D_{h_{xk}}^{1/4} = D$ e $D_{\mu, h_{xk}}^{1/4} = D \left(\frac{1-\mu}{2} \right)$, para $k = 1, 2$.

Proposição 5.2 (Descrescimento da Energia Semidiscreta). *Para todo $h_x, h_y > 0$ a energia de soluções $E_{h_x h_y}^\theta(t)$ em (5.46) das equações discreta (5.37)–(5.39), para qualquer condição de contorno (5.40)–(5.42), com condições iniciais (5.43)–(5.45), satisfaz*

$$E_{h_x h_y}^\theta(t) \leq E_{h_x h_y}^\theta(0), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.49)$$

Prova. O procedimento é o mesmo usado na Proposição 5.1, portanto, multiplicamos as equações (5.37)–(5.39) por $h_x h_y \omega'_{i,j}(t)$, $h_x h_y \psi'_{i,j}(t)$ e $h_x h_y \varphi'_{i,j}(t)$, respectivamente. E em seguida efetuamos a soma para $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, J$. Note que as únicas diferenças entre os dois processos reside na construção das equações (5.33) e (5.34). Focaremos, então, a prova desta proposição, nestas diferenças. Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} & Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [2(1-2\theta)\psi_{i,j} + \theta(\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1})] \psi'_{i,j} \\ &= K\theta h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}] \psi'_{i,j} + 2Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \psi_{i,j} \psi'_{i,j} \\ &\quad + K\theta h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}] \psi'_{i,j} \\ &= -K\theta \frac{h_x^3 h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2 - K\theta \frac{h_x h_y^3}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\ &\quad + Kh_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi_{i,j}^2, \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde, por simplicidade, desta vez omitimos os termos relativos ao contorno. É importante observar que (5.50) corresponde ao termo \mathcal{P}_{6h} na Proposição 5.1. Sendo assim, o denotaremos por \mathcal{P}_{6h}^θ . Então, efetuando a soma $\mathcal{P}_{0h} + \mathcal{P}_{1h} + \mathcal{P}_{6h}^\theta + \mathcal{P}_{7h}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{0h} + \mathcal{P}_{1h} + \mathcal{P}_{6h}^\theta + \mathcal{P}_{7h} &= K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
&+ K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \\
&- K \theta \frac{h_x^3 h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
&- K \theta \frac{h_x h_y^3}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
&+ \underbrace{K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi_{i,j}^2}_{:=\mathcal{J}_1}. \tag{5.51}
\end{aligned}$$

Agora, \mathcal{J}_1 é reescrito como

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right)^2 + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right)^2 \\
&+ K \frac{h_x h_y}{8} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (-\psi_{i+1,j}^2 - 2\psi_{i+1,j}\psi_{i,j} + 3\psi_{i,j}^2) \\
&+ K \frac{h_x h_y}{8} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (-\psi_{i,j+1}^2 - 2\psi_{i,j+1}\psi_{i,j} + 3\psi_{i,j}^2).
\end{aligned}$$

Por outro lado, tendo em mente as condições de contorno (5.40)–(5.42), temos que

$$K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi_{i+1,j}^2 = K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi_{i,j}^2,$$

$$K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi_{i,j+1}^2 = K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \psi_{i,j}^2,$$

então,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right)^2 + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right)^2 \\ &\quad + K \frac{h_x h_y}{8} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^2 - 2\psi_{i+1,j}\psi_{i,j} + \psi_{i,j}^2) \\ &\quad + K \frac{h_x h_y}{8} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i,j+1}^2 - 2\psi_{i,j+1}\psi_{i,j} + \psi_{i,j}^2) \\ &= K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right)^2 + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right)^2 \\ &\quad + K \frac{h_x^3 h_y}{8} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right)^2 + K \frac{h_x h_y^3}{8} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right)^2. \end{aligned}$$

Deste modo, usando \mathcal{J}_1 em (5.51), obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{0h} + \mathcal{P}_{1h} + \mathcal{P}_{6h}^\theta + \mathcal{P}_{7h} &= K h_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\ &\quad + K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\ &\quad + K \frac{h_x^3 h_y}{2} \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\ &\quad + K \frac{h_x h_y^3}{2} \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Da mesma maneira, encontramos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{2h} + \mathcal{P}_{3h} + \mathcal{P}_{10h}^\theta + \mathcal{P}_{11h} &= Kh_x h_y \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_x} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
&+ K \frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
&+ K \frac{h_x^3 h_y}{2} \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
&+ K \frac{h_x h_y^3}{2} \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} \right|^2, \quad (5.53)
\end{aligned}$$

para \mathcal{P}_{10h}^θ , dado por

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{10h}^\theta &:= -K\theta \frac{h_x^3 h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} \right|^2 + 2Kh_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \varphi_{i,j} \varphi'_{i,j} \\
&- K\theta \frac{h_x h_y^3}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left| \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} \right|^2.
\end{aligned}$$

A exemplo da Proposição 5.1, após as devidas multiplicações e desdobramentos, somamos os resultados obtidos, de onde resulta que

$$\begin{aligned}
&\frac{h_x h_y}{2} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 |\omega'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\psi'_{i,j}|^2 + \rho_2 |\varphi'_{i,j}|^2 \right. \\
&+ D \left[1 + \frac{K}{D} h_x^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] \left| \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h_x} \right|^2 \\
&+ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left[1 + \frac{2K}{D(1-\mu)} h_y^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] \left| \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
&+ D \left[1 + \frac{K}{D} h_y^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] \left| \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_y} \right|^2 \\
&+ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left[1 + \frac{2K}{D(1-\mu)} h_x^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] \left| \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_x} \right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K \left| \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{h_x} + \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \left| \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
 & + K \left| \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{h_y} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 + K \left| \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right|^2 \\
 & + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i,j}}{2h_y} \right) \\
 & + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}}{2h_x} \right) \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j}}{2h_y} \right) \Big] \\
 & = -h_x h_y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [d_0 |\omega'_{i,j}|^2 + d_1 |\psi'_{i,j}|^2 + d_2 |\varphi'_{i,j}|^2], \tag{5.54}
 \end{aligned}$$

e então, obtemos que

$$\frac{d}{dt} E_{h_x h_y}^\theta(t) \leq 0 \Rightarrow E_{h_x h_y}^\theta(t) \leq E_{h_x h_y}^\theta(0), \quad \forall t \in [0, T],$$

onde $E_{h_x h_y}^\theta(t)$ é dado por (5.46). ■

A energia $E_{h_x h_y}^\theta(t)$ dada por (5.46), é representativa de um modelo de placas de Mindlin-Timoshenko com termos adicionais sobre alguns coeficientes. Desse modo temos que

$$\begin{aligned}
 E^\theta(t) & := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \rho_1 |\omega_t|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_2 |\varphi_t|^2 + K |\psi + \omega_x|^2 + K |\varphi + \omega_y|^2 \right. \\
 & + D \left[1 + \frac{K}{D} h_x^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] |\psi_x|^2 + D \left[1 + \frac{K}{D} h_y^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] |\varphi_y|^2 \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left[1 + \frac{2K}{D(1-\mu)} h_y^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] |\psi_y|^2 \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \left[1 + \frac{2K}{D(1-\mu)} h_x^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \right] |\varphi_x|^2 \\
 & \left. + 2D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \psi_x \varphi_y \right\} dx dy, \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

representa a energia total do seguinte modelo de placas de Mindlin-Timoshenko

$$\rho_1 \omega_{tt} - K(\psi + \omega_x)_x - K(\varphi + \omega_y)_y = 0, \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \psi_{tt} - D\psi_{xx} - Kh_x^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \psi_{xx} - D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \psi_{yy} \\ - Kh_y^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \psi_{yy} - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \varphi_{xy} + K(\psi + \omega_x) = 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \varphi_{tt} - D\varphi_{yy} - Kh_y^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \varphi_{yy} - D \left(\frac{1 - \mu}{2} \right) \varphi_{xx} \\ - Kh_x^2 \left(\frac{1}{4} - \theta \right) \varphi_{xx} - D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \psi_{xy} + K(\varphi + \omega_y) = 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

para todo $\theta \in [0, 1/4]$. As equações (5.57) e (5.58) são típicos exemplos de equações diferenciais parciais modificadas, considerando-se h_x, h_y fixos. Em outras palavras, fixados h_x, h_y , as equações (5.56)–(5.58) são inconsistentes com o análogo contínuo (2.1)–(2.3).

Modelo espaço-tempo em Diferenças Finitas

6.1 Introdução

No presente capítulo nos concentramos nos aspectos numéricos-computacionais dos modelos dissipativos friccionais de placas bidimensionais de Mindlin-Timoshenko com objetivo central de reproduzir numericamente os resultados analíticos estabelecidos em termos de decaimento exponencial e a perda de decaimento exponencial das respectivas soluções numéricas. Em particular, nos orientamos pelos resultados obtidos com o uso do modelo semidiscreto em diferenças finitas que é livre dos efeitos de trancamento no cortante, apresentados no capítulo anterior. No que diz respeito a discretização da variável temporal, optamos pelo método explícito de diferenças finitas centradas espaço-tempo.

6.2 Método numérico explícito em diferenças finitas

Para os nossos propósitos, considere $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$, e para $I, J, N \in \mathbb{N}$, denotamos por $\Delta x = \frac{L_1}{I+1}$, $\Delta y = \frac{L_2}{J+1}$ e $\Delta t = \frac{T}{N+1}$, considerando-se as seguintes subdivisões uniformes dos intervalos $[0, L_1]$ e $[0, L_2]$, e introduzimos a malha

$$x_0 = 0 < x_1 = \Delta x < \cdots < x_I = I\Delta x < x_{I+1} = (I+1)\Delta x = L_1, \quad (6.1)$$

$$y_0 = 0 < y_1 = \Delta y < \cdots < y_J = J\Delta y < y_{J+1} = (J+1)\Delta y = L_2, \quad (6.2)$$

$$t_0 = 0 < t_1 = \Delta t < \cdots < t_N = N\Delta t < t_{N+1} = (N+1)\Delta t = T, \quad (6.3)$$

com $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ e $t_n = n\Delta t$ para $i = 0, 1, 2, \dots, I+1$, $j = 0, 1, 2, \dots, J+1$ e $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$. Definimos, também os seguintes operadores no espaço e no tempo.

- **Esquema Progressivo (primeira ordem):**

$$\partial_x \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x}, \quad \partial_y \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y}, \quad \partial_t \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (6.4)$$

- **Esquema Atrasado (primeira ordem):**

$$\bar{\partial}_x \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \quad \bar{\partial}_y \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \quad \bar{\partial}_t \omega_{i,j}^n := \frac{\omega_{i,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (6.5)$$

- **Diferença Central (segunda ordem):**

$$\begin{aligned} \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \omega_{i,j}^n &= \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, & \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \omega_{i,j}^n &= \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y}, \\ \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} \omega_{i,j}^n &= \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{2\Delta t}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

• **Esquema de Diferença Central (segunda ordem):**

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_x \partial_x \omega_{i,j}^n &:= \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}, & \bar{\partial}_y \partial_y \omega_{i,j}^n &:= \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ \bar{\partial}_t \partial_t \omega_{i,j}^n &:= \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2},\end{aligned}\tag{6.7}$$

com as mesmas aproximações para as funções ψ e φ na malha. Aqui, estamos denotando por $\omega_{i,j}^n$, $\psi_{i,j}^n$ e $\varphi_{i,j}^n$ as aproximações numéricas para as soluções exatas ω , ψ e φ avaliadas na malha, respectivamente. Mais precisamente, temos que $\omega_{i,j}^n \approx \omega(x_i, y_j, t_n)$, $\psi_{i,j}^n \approx \psi(x_i, y_j, t_n)$ e $\varphi_{i,j}^n \approx \varphi(x_i, y_j, t_n)$. Vale ressaltar que a definição desses operadores são motivados pela Série de Taylor.

Nas configurações do esquema em diferenças finitas, consideremos o seguinte procedimento explícito de discretização total em diferenças finitas, que consiste em encontrar $(\omega_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n, \varphi_{i,j}^n)$ satisfazendo as seguintes equações numéricas

$$\begin{aligned}\rho_1 \bar{\partial}_t \partial_t \omega_{i,j}^n &= K \bar{\partial}_x \partial_x \omega_{i,j}^n + K \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \psi_{i,j}^n + K \bar{\partial}_y \partial_y \omega_{i,j}^n \\ &+ K \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \varphi_{i,j}^n - d_0 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} \omega_{i,j}^n,\end{aligned}\tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}\rho_2 \bar{\partial}_t \partial_t \psi_{i,j}^n &= D \bar{\partial}_x \partial_x \psi_{i,j}^n + D \frac{1-\mu}{2} \bar{\partial}_y \partial_y \psi_{i,j}^n + D \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \right) \varphi_{i,j}^n \\ &- \frac{K}{2} (\psi_{i+1/2,j}^n + \psi_{i-1/2,j}^n + \psi_{i,j+1/2}^n + \psi_{i,j-1/2}^n) \\ &- K \frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \omega_{i,j}^n - d_1 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} \psi_{i,j}^n,\end{aligned}\tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\rho_2 \bar{\partial}_t \partial_t \varphi_{i,j}^n &= D \bar{\partial}_y \partial_y \varphi_{i,j}^n + D \frac{1-\mu}{2} \bar{\partial}_x \partial_x \varphi_{i,j}^n + D \frac{1+\mu}{2} \left(\frac{\partial_x + \bar{\partial}_x}{2} \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \right) \psi_{i,j}^n \\ &- \frac{K}{2} (\varphi_{i+1/2,j}^n + \varphi_{i-1/2,j}^n + \varphi_{i,j+1/2}^n + \varphi_{i,j-1/2}^n) \\ &- K \frac{\partial_y + \bar{\partial}_y}{2} \omega_{i,j}^n - d_2 \frac{\partial_t + \bar{\partial}_t}{2} \varphi_{i,j}^n,\end{aligned}\tag{6.10}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, I$ $j = 1, 2, \dots, J$ e $n = 1, 2, \dots, N$. Aqui, $\psi_{i-1/2,j}^n$ e $\psi_{i+1/2,j}^n$ denotam a médias de $\psi_{i,j}^n$ nos pontos (x_{i-1}, y_j, t_n) , (x_i, y_j, t_n) e (x_{i+1}, y_j, t_n) , (x_i, y_j, t_n) , respectivamente. Uma abordagem semelhante vale para $\psi_{i,j-1/2}^n$ e $\psi_{i,j+1/2}^n$. Então, a exemplo do modelo semidiscreto, motivados por [1], obtemos as seguintes aproximações

$$\psi(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{4} + \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4}. \quad (6.11)$$

É importante lembrar que este tipo de discretização evita a anomalia numérica, já discutida anteriormente no Capítulo 5, conhecida como trancamento no cortante. Mais precisamente, evita-se uma sobrestimação no coeficiente de rigidez como visto em (5.47) e (5.48). Deste modo, substituindo-se os operadores descritos em (6.4)–(6.7) no sistema, (6.8)–(6.10), temos que

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= K \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + K \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ &+ K \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + K \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - d_0 \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= D \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ &+ D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ &+ D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \\ &- K \frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{j-1,j}^n}{4} - K \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4} \\ &- K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) - d_1 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} &= D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\
 &\quad + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\
 + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) &\frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \\
 - K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{4} &- K \frac{\varphi_{i,j+1}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{4} \\
 - K \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} &- d_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}. \tag{6.14}
 \end{aligned}$$

Para simplificar nossos cálculos, associamos ao sistema condições de contorno homogêneas dadas por

$$\omega_{0,j}^n = \omega_{I+1,j}^n = \omega_{i,0}^n = \omega_{i,J+1}^n = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \tag{6.15}$$

$$\psi_{0,j}^n = \psi_{I+1,j}^n = \psi_{i,0}^n = \psi_{i,J+1}^n = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \tag{6.16}$$

$$\varphi_{0,j}^n = \varphi_{I+1,j}^n = \varphi_{i,0}^n = \varphi_{i,J+1}^n = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \tag{6.17}$$

e condições iniciais

$$\omega_{i,j}^0 = \omega(x_i, y_j, 0), \quad \omega_{i,j}^1 = \omega_{i,j}^0 + \Delta t \omega_t(x_i, y_j, 0), \quad \forall i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, \tag{6.18}$$

$$\psi_{i,j}^0 = \psi(x_i, y_j, 0), \quad \psi_{i,j}^1 = \psi_{i,j}^0 + \Delta t \psi_t(x_i, y_j, 0), \quad \forall i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, \tag{6.19}$$

$$\varphi_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j, 0), \quad \varphi_{i,j}^1 = \varphi_{i,j}^0 + \Delta t \varphi_t(x_i, y_j, 0), \quad \forall i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J. \tag{6.20}$$

O esquema numérico apresentado aqui é explícito isto significa que sua implementação computacional demanda conhecer previamente as aproximações a nível de t_n e t_{n-1} a fim de aproximar as soluções numéricas no nível t_{n+1} . Além disso, devemos mencionar que o esquema proposto em (6.12)–(6.20) é consistente com respeito ao problema de Mindlin-Timoshenko (2.1)–(2.5) estudado. Em particular, o critério de estabilidade no caso unidimensional obedece uma relação entre o passo de tempo Δt e a espessura h (ver [44, 45]). Nesta direção, é esperado

que para o caso bidimensional uma relação similar prevaleça, contudo esta prova ainda precisa ser feita. Para nossa proposta de convergência numérica, fixamos a espessura h e escolhemos $\Delta t < \Delta$, onde $\Delta = \Delta x = \Delta y$.

6.3 A Energia Discreta

Nesta seção, provaremos que o esquema numérico (6.12)–(6.20) possui uma propriedade de consistência que torna o método útil no estudo de comportamento assintótico de sistemas de dissipação. Com este objetivo em mente, apresentamos uma primeira propriedade que diz respeito a energia de nosso método.

A energia total para o sistema de equações numérico (6.12)–(6.20) no passo de tempo t_n time será computado usando-se a expressão

$$\begin{aligned}
E^n := & \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
& + D \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
& + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \\
& + K \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \\
& + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \\
& + K \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \left. \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right) \Bigg]. \quad (6.21)$$

Notamos que a E^n é a versão discreta da energia contínua $E(t)$ (2.23). Além do que E^n é decrescente para qualquer $d_i > 0$, $i = 0, 1, 2$ e é constante para $d_i = 0$, $i = 0, 1, 2$. Ao invés de calcular a derivada do tempo da energia podemos usar a soma por partes. A energia discreta E^n é um importante instrumento numérico para certificar nossos resultados analíticos relativos a a estabilização de placas de Mindlin-Timoshenko dissipativas estabelecidas nos capítulos anteriores.

O próximo resultado estabelece o equivalente numérico a Proposição 2.4.

Proposição 6.1. *Sejam $(\omega_{i,j}^n, \varphi_{i,j}^n, \psi_{i,j}^n)$ soluções do esquema de diferenças finitas (6.12)–(6.20) com $d_i \geq 0$ $i = 0, 1, 2$. Então, para todo Δt , Δx e Δy , a taxa instatânea de variação discreta da energia do esquema numérico (6.12)–(6.20) no instante de tempo t_n é dado por*

$$\begin{aligned} \frac{E^n - E^{n-1}}{\Delta t} = & -d_0 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 - d_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\ & - d_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.22)$$

para todo $n = 1, \dots, N, N + 1$.

Prova. Multiplicamos, a equação (6.12) por $\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$, e somamos o resultado sobre o domínio discreto $i = 1, \dots, I$ e $j = 1, \dots, J$. Segue, então, que

$$\begin{aligned} & \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_1 \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - K \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - K \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. - K \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} - K \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & = -d_0 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

No que segue, faremos uma estimativa do primeiro termo da equação acima pelo multiplicador em questão. Note que, este método é o correspondente numérico ao descrito na Proposição 2.4 do Capítulo 2. Os termos a seguir representam uma aproximação para $\rho_1 \int_{\Omega} \omega_{tt} \omega_t \, dx dy$ que conduzirá a expressão discretizada equivalente para a componente $\rho_1 \int_{\Omega} \omega_t^2 \, dx dy$ do funcional de energia $E(t)$. Neste contexto, observe, inicialmente, que

$$\begin{aligned} & \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1})(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &= \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J [(\omega_{i,j}^{n+1})^2 + (\omega_{i,j}^{n-1})^2 - 2\omega_{i,j}^n(\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) + (\omega_{i,j}^n)^2 - (\omega_{i,j}^n)^2] \\ &= \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)^2 - \rho_1 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1})^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} & \rho_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\ &= \rho_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 - \rho_1 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Aqui, realizaremos os devidos cálculos apenas na direção de x , tomando y como análogo. Então, o passo a seguir é construir uma aproximação para o termo $K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \omega_{xt} \, dx dy$. Sendo assim, segue que

$$\begin{aligned} & K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &+ K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\ &= K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 = & K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\omega_{i,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 = & K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i+1,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}) - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i+1,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}) + K \sum_{j=1}^J (\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}) + K \sum_{j=1}^J (\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}) \\
 = & - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}) + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}) + K \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n) (\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}) \\
 & - K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) - K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}) \\
 & + K \sum_{i=0}^I (\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}) + K \sum_{i=0}^I (\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n) (\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -K \sum_{j=1}^J (\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) - K \sum_{j=1}^J (\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n) (\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}) \\
& + K \sum_{j=1}^J (\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}) + K \sum_{j=1}^J (\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n) (\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}).
\end{aligned}$$

De onde podemos concluir que

$$\begin{aligned}
& -K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right) \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} + \mathcal{S}_1^n, \quad (6.25)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1^n & = -K \Delta y \sum_{i=0}^I \left(\frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,0}^{n+1} - \omega_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + K \Delta y \sum_{i=0}^I \left(\frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + K \Delta y \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n}{2} + \frac{\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \Delta y \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n}{2} + \frac{\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{I+1,j}^{n+1} - \omega_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, procedendo da mesma maneira para encontrar aproximação equivalente a $K \int_{\Omega} (\varphi + \omega_y) \omega_{yt} dx dy$, temos que

$$\begin{aligned}
 & - K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & = K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \\
 & - K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,j+1}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} + \mathcal{S}_2^n, \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

para

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_2^n & = -K \Delta x \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{0,j+1}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} + \frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{0,j+1}^{n+1} - \omega_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + K \Delta x \sum_{j=0}^J \left(\frac{\varphi_{0,j+1}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} + \frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{0,j}^{n+1} - \omega_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + K \Delta x \sum_{i=1}^I \left(\frac{\varphi_{i,1}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} + \frac{\omega_{i,1}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,0}^{n+1} - \omega_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & - K \Delta x \sum_{i=1}^I \left(\frac{\varphi_{i,J+1}^n + \varphi_{i,J}^n}{2} + \frac{\omega_{i,J+1}^n - \omega_{i,J}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,J+1}^{n+1} - \omega_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t}.
 \end{aligned}$$

Feito isso, podemos reescrever a equação (6.23) como

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + K \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\
 & \left. + K \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right] \\
 & - \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + K \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \frac{\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \left(\frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \frac{\omega_{i,j+1}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} \Big] + \mathcal{S}_1^n + \mathcal{S}_2^n \\
& = -d_0 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2. \tag{6.27}
\end{aligned}$$

Dando continuidade, multiplicaremos a equação que governa a rotação nas seções transversais $\psi_{i,j}^n$ em (6.13) por $\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$, e posteriormente efetuando a soma no domínio discreto $i = 1, \dots, I$ e $j = 1, \dots, J$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
& \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_2 \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - D \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right. \\
& - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{-\varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} + K \frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{j-1,j}^n}{4} \\
& \left. + K \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4} + K \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = -d_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2. \tag{6.28}
\end{aligned}$$

Levando em conta que a prova é demasiadamente longa omitiremos, a partir daqui, os devidos desdobramentos, apresentando apenas as aproximações para os componentes numéricos da energia E^n . Sendo assim, o análogo discreto correspondente a $\rho_2 \int_{\Omega} \psi_t^2 dx dy$ é dado por

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = \rho_2 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 - \rho_2 \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2. \tag{6.29}
\end{aligned}$$

No desenvolvimento dos equivalentes discretos a $D \int_{\Omega} \psi_x^2 dx dy$ e $D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \int_{\Omega} \psi_y^2 dx dy$, obtemos, respectivamente, as expressões abaixo

$$\begin{aligned}
 & - D \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & = D \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \\
 & - D \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} + \mathcal{S}_3^n, \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & - D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & = D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \\
 & - D \left(\frac{1-\mu}{2}\right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} + \mathcal{S}_4^n, \tag{6.31}
 \end{aligned}$$

onde \mathcal{S}_3^n e \mathcal{S}_4^n são dados por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_3^n & = -D \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + D \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,0}^n - \psi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & + D \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
 & - D \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I+1,j}^n - \psi_{I,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t},
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_4^n = & -D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta x \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{0,j+1}^n - \psi_{0,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta x \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{0,j+1}^n - \psi_{0,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta x \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i,1}^n - \psi_{i,0}^n}{\Delta y^2} \frac{\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta x \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i,J+1}^n - \psi_{i,J}^n}{\Delta y^2} \frac{\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t}.
\end{aligned}$$

Abaixo, a expressão à esquerda da igualdade corresponde a uma aproximação a seguinte integral $-D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_{xy} \psi_t \, dx dy$, e conforme vimos na Proposição 2.4 do Capítulo 2 este termo após os devidos cálculos se encaminha para a componente $D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \int_{\Omega} \varphi_x \psi_{yt} \, dx dy + D\mu \int_{\Omega} \varphi_y \psi_{xt} \, dx dy$ da energia total do sistema em (2.23), cujo seu equivalente discreto é dado pela expressão após o sinal de igualdade.

$$\begin{aligned}
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \Delta x \Delta t \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i+1,j-1}^n - \varphi_{i-1,j+1}^n + \varphi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta t}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta t}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta t}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta x} \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta t}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta x} + \mathcal{S}_5^n, \tag{6.32}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_5^n = & D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j}^{n+1} \right) \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j+1}^{n+1} \right) \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j}^{n+1} \right) \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j+1}^{n+1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,J+1}^{n+1} \right) \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,1}^n - \varphi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j}^{n-1} \right) \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i+1,J}^n - \varphi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{0,j+1}^{n-1} \right) \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I,j+1}^n - \varphi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j}^{n-1} \right) \\
& - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i,J}^n - \varphi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{i+1,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{I,j}^n - \varphi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,j+1}^{n-1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\varphi_{I,J}^n - \varphi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \psi_{I+1,J+1}^{n-1} \right).
\end{aligned}$$

Na seqüência, procedemos com a discretização referente a integral dada por $K \int_{\Omega} (\psi + \omega_x) \psi_t \, dx dy$. Segue então

$$\begin{aligned}
& K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{j-1,j}^n}{4} + \frac{\psi_{i,j+1}^n + 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{4} \right) \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& + K \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& = K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \\
& + K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} + \mathcal{S}_6^n, \tag{6.33}
\end{aligned}$$

para

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_6^n & = -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \left(\frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,0}^{n+1} - \psi_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \left(\frac{\omega_{i+1,0}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,0}^n + \psi_{i,0}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n}{2} \frac{\psi_{0,j+1}^{n+1} - \psi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} - K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{0,j+1}^n + \psi_{0,j}^n}{2} \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{1,j}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{1,j}^n + \psi_{0,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{0,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{I+1,j}^n - \omega_{I,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{I+1,j}^n + \psi_{I,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{I+1,j}^{n+1} - \psi_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i,1}^n + \psi_{i,0}^n}{2} \frac{\psi_{i,0}^{n+1} - \psi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} - K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i,J+1}^n + \psi_{i,J}^n}{2} \frac{\psi_{i,J+1}^{n+1} - \psi_{i,J+1}^{n-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Considerando as equações (6.29)–(6.33), podemos reescrever (6.28) do seguinte modo

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + D \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \\
 & \left. + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} + K \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \right] \\
 & - \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + D \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} \right. \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta x} \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta x} \\
 & \left. + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} + K \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} \right] \\
 & + \mathcal{S}_3^n + \mathcal{S}_4^n + \mathcal{S}_5^n + \mathcal{S}_6^n = -d_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2. \tag{6.34}
 \end{aligned}$$

Por fim, multiplicamos a equação (6.14) por $\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$, e em seguida efetuamos a soma no domínio discreto $i = 1, \dots, I$ e $j = 1, \dots, J$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 & \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_2 \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right. \\
 & - D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} \\
 & \left. - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{-\psi_{i-1,j+1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta y} + K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{j-1,j}^n}{4} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \frac{\varphi_{i,j+1}^n + 2\varphi_{i,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n}{4} + K \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \left] \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right. \\
& = -d_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2. \tag{6.35}
\end{aligned}$$

E da mesma maneira que encontramos (6.34) a partir de (6.28), podemos reescrever (6.35) como

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right. \\
& + D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta y} \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta y} \\
& \left. + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} + K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \right] \\
& - \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} \right. \\
& + D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta y} \\
& + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta y} \\
& \left. + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1}}{2} + K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1}}{2} \right] \\
& + \mathcal{S}_7^n + \mathcal{S}_8^n + \mathcal{S}_9^n + \mathcal{S}_{10}^n = -d_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2, \tag{6.36}
\end{aligned}$$

com \mathcal{S}_7^n e \mathcal{S}_8^n , a exemplo de \mathcal{S}_3^n e \mathcal{S}_4^n , dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_7^n = & -D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n - \varphi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,0}^{n+1} - \varphi_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n - \varphi_{i,0}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j}^n - \varphi_{0,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & - D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \Delta y \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I+1,j}^n - \varphi_{I,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{I+1,j}^{n+1} - \varphi_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_8^n = & -D\Delta x \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{0,j+1}^{n+1} - \varphi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & + D\Delta x \sum_{j=0}^J \frac{\varphi_{0,j+1}^n - \varphi_{0,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & + D\Delta x \sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i,1}^n - \varphi_{i,0}^n}{\Delta y^2} \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\ & - D\Delta x \sum_{i=1}^I \frac{\varphi_{i,J+1}^n - \varphi_{i,J}^n}{\Delta y^2} \frac{\varphi_{i,J+1}^{n+1} - \varphi_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t}, \end{aligned}$$

assim como \mathcal{S}_9^n e \mathcal{S}_{10}^n , análogos a \mathcal{S}_5^n e \mathcal{S}_6^n , respectivamente. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_9^n = & D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,1}^n - \psi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j+1}^n - \psi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j}^{n+1} \right) \\ & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i+1,J}^n - \psi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j+1}^{n+1} \right) \\ & - D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,1}^n - \psi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,0}^{n+1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I,j+1}^n - \psi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,J}^n - \psi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,J+1}^{n+1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{I,j}^n - \psi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j+1}^{n+1} \right. \\
& \left. - \frac{\psi_{I,J}^n - \psi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,J+1}^{n+1} \right) \\
& -D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i+1,1}^n - \psi_{i,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{1,j+1}^n - \psi_{0,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j}^{n-1} \right) \\
& +D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=1}^I \frac{\psi_{i+1,J}^n - \psi_{i,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{1,j}^n - \psi_{0,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{0,j+1}^{n-1} \right) \\
& +D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,1}^n - \psi_{i+1,0}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,0}^{n-1} + \sum_{j=1}^J \frac{\psi_{I,j+1}^n - \psi_{I+1,j}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j}^{n-1} \right) \\
& -D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \left(\sum_{i=0}^I \frac{\psi_{i,J}^n - \psi_{i+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{i+1,J+1}^{n-1} + \sum_{j=0}^J \frac{\psi_{I,j}^n - \psi_{I+1,j+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,j+1}^{n-1} \right. \\
& \left. - \frac{\psi_{I,J}^n - \psi_{I+1,J+1}^n}{4\Delta x \Delta y} \varphi_{I+1,J+1}^{n-1} \right),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{10}^n = & -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{0,j+1}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{0,j+1}^{n+1} - \varphi_{0,j+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=0}^J \left(\frac{\omega_{0,j+1}^n - \omega_{0,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{0,j+1}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1,0}^{n+1} - \varphi_{i+1,0}^{n-1}}{2\Delta t} -K \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \frac{\varphi_{i+1,0}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\omega_{i,1}^n - \omega_{i,0}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,1}^n + \varphi_{i,0}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,0}^{n+1} - \varphi_{i,0}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{i=1}^I \left(\frac{\omega_{i,J+1}^n - \omega_{i,J}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,J+1}^n + \varphi_{i,J}^n}{2} \right) \frac{\varphi_{i,J+1}^{n+1} - \varphi_{i,J+1}^{n-1}}{2\Delta t} \\
& -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{1,j}^n + \varphi_{0,j}^n}{2} \frac{\varphi_{0,j}^{n+1} - \varphi_{0,j}^{n-1}}{2\Delta t} -K \frac{\Delta x \Delta y}{2} \sum_{j=1}^J \frac{\varphi_{I+1,j}^n + \varphi_{I,j}^n}{2} \frac{\varphi_{I+1,j}^{n+1} - \varphi_{I+1,j}^{n-1}}{2\Delta t}.
\end{aligned}$$

Dos resultados em (6.27), (6.34) e (6.36), obtemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
 & + D \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} + D \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \\
 & + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \\
 & + K \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \\
 & + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \\
 & + K \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} + \varphi_{i,j}^{n+1}}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \\
 & + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right. \\
 & \left. + \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \right) \Big] \\
 & - \frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta t} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[\rho_1 \left(\frac{\omega_{i,j}^n - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\psi_{i,j}^n - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \right. \\
 & + D \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} \\
 & + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} + D \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{\Delta y} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} \\
 & + K \left(\frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta x} + \frac{\psi_{i+1,j}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2} \right) \\
 & + K \frac{\psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j}^n}{2} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} + \psi_{i,j}^{n-1}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K \left(\frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j}^n}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \right) \left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n-1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{\Delta y} + \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1}}{2} \right) \\
& + K \frac{\varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j}^n}{2} \frac{\varphi_{i+1,j}^{n-1} + \varphi_{i,j}^{n-1}}{2} \\
& + D \left(\frac{1 + \mu}{2} \right) \left[\left(\frac{\varphi_{i+1,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i+1,j+1}^{n-1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta x} + \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta y} \frac{\psi_{i,j+1}^{n-1} - \psi_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta x} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i+1,j+1}^{n-1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta y} + \frac{\psi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{2\Delta x} \frac{\varphi_{i,j+1}^{n-1} - \varphi_{i+1,j}^{n-1}}{2\Delta y} \right) \right] + \mathcal{S}^n \\
& = -d_0 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 - d_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\
& - d_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2, \tag{6.37}
\end{aligned}$$

com $\mathcal{S}^n = \sum_{i=1}^{10} \mathcal{S}_i^n$. Então, levando em conta as condições de contorno Dirichlet homogêneas em (6.15)–(6.17), segue que $\mathcal{S}^n = 0$. Agora, considerando-se a definição da energia discreta dada por (6.21), concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{E^n - E^{n-1}}{\Delta t} & = -d_0 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 - d_1 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \\
& - d_2 \Delta x \Delta y \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2,
\end{aligned}$$

para todo $n = 1, \dots, N, N + 1$.

Além disso, é possível verificar que

$$E^n \leq E^{n-1}, \quad \forall n \geq 0, \tag{6.38}$$

de onde, utilizando-se recursividade, obtemos

$$E^n \leq E^0, \quad \forall n \geq 0, \tag{6.39}$$

É claro que, se $d_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, o modelo discreto é conservativo, ou seja, $E^n = E^0$, $\forall n \geq 0$. ■

6.4 Simulações Numéricas

Nesta seção, nosso foco de estudo será o esquema numérico (6.12)–(6.20) e sua energia E^n com o objetivo de ilustrar por meio de simulações numéricas os resultados analíticos estabelecidos nas seções anteriores. Ressaltamos que não estamos preocupados com questões de convergência numérica entre solução exata e solução discreta e as respectivas taxas de convergências.

A precisão do sistema numérico (6.12)–(6.20) pode ser visto através da lei de conservação de energia. Com efeito, tomando $d_i = 0$, $i = 0, 1, 2$ em (6.22) obtemos que $E^n = E^0$, $n = 1, \dots, N + 1$.

Para nossos experimentos numéricos, usamos as seguintes configurações: $L_1 = L_2 = 1.0m$, $T = 4s$ e espessura $h = 0.015m$. Para os dados iniciais, assumimos que

$$\omega(x_i, y_j, 0) = \psi(x_i, y_j, 0) = \varphi(x_i, y_j, 0) = 0, \quad (6.40)$$

$$\omega_t(x_i, y_j, 0) = \sin\left(\nu \frac{\pi x_i}{L_1}\right) \sin\left(\nu \frac{\pi y_j}{L_2}\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (6.41)$$

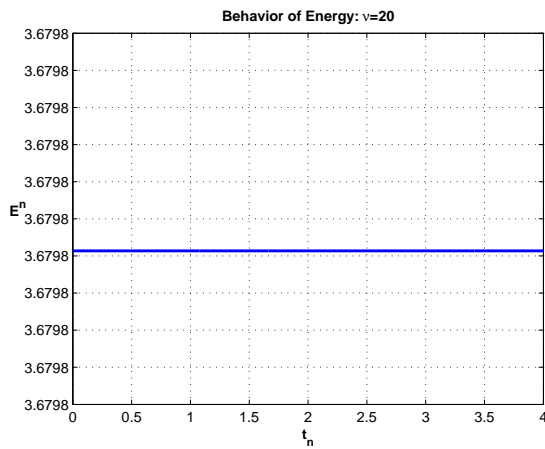
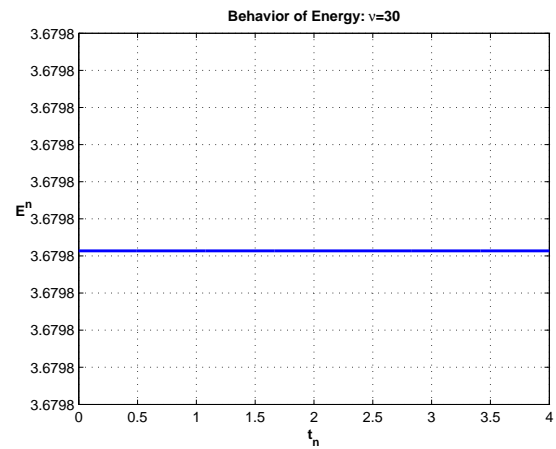
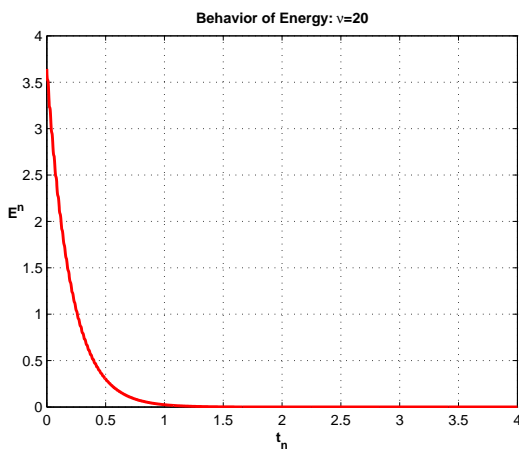
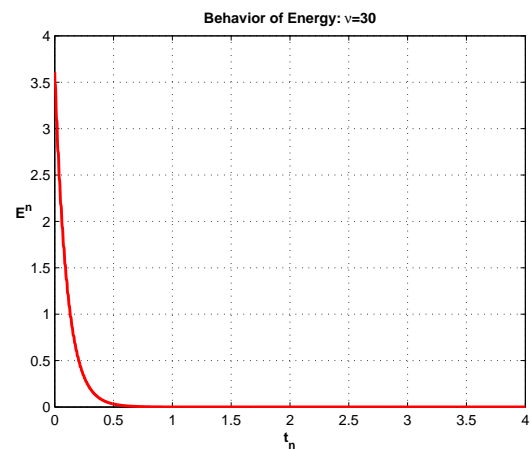
$$\psi_t(x_i, y_j, 0) = \cos\left(\nu \frac{\pi x_i}{L_1}\right) \sin\left(\nu \frac{\pi y_j}{L_2}\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad (6.42)$$

$$\varphi_t(x_i, y_j, 0) = \sin\left(\nu \frac{\pi x_i}{L_1}\right) \cos\left(\nu \frac{\pi y_j}{L_2}\right), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}. \quad (6.43)$$

Na malha computacional, usamos $\Delta = \Delta x = \Delta y = 0.03125$ e $\Delta_t = 0.00195$ de maneira que $\Delta t / \Delta = 0.0624$.

6.4.1 Casos conservativo e dissipação total

Para iniciar nossas simulações, consideremos os casos conservativo e com dissipação total, sejam eles $d_i = 0$, $i = 0, 1, 2$ e $d_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, respectivamente. Em ambos os casos, usamos diferença de velocidade de propagação de ondas. De acordo com as Figuras (6.1)–(6.2), vemos que a energia discreta E^n constante para todo tempo discreto t_n . Como dissemos anteriormente, esta propriedade é uma medida da precisão do nosso esquema numérico (6.12)–(6.20).

FIGURA 6.1: $d_i = 0, i = 0, 1, 2$.FIGURA 6.2: $d_i = 0, i = 0, 1, 2$.FIGURA 6.3: $d_i > 0, i = 0, 1, 2$.FIGURA 6.4: $d_i > 0, i = 0, 1, 2$.

Aqui, estamos falando em concordância qualitativa: a lei de conservação de energia (2.29) e sua equivalente discreta são compatíveis. Por outro lado, figures (6.3)–(6.4) mostram que a

energia E^n se caracteriza como uma função exponencial $e^{-\omega t_n}$ para $\omega > 0$.

6.4.2 Dissipação nos ângulos de rotação: $d_0 = 0, d_1 > 0, d_2 > 0$

Aqui, nossos experimentos numéricos estão em concordância com os resultados analíticos. Isto quer dizer que, se $v_1^2 = v_2^2$ obtemos decaimento exponencial e as Figuras (6.6)–(6.8) mostram esta propriedade. Neste caso, a energia E^n/E^0 tende a zero após 4s. Caso contrário, o decaimento passa a ser lento. É o que percebemos nas Figuras (6.5) e (6.7). Na primeira, considerando o mesmo tempo de simulação E^n/E^0 tende a um. E na última, temos que E^n/E^0 converge para 0.675 após os mesmos 4s.

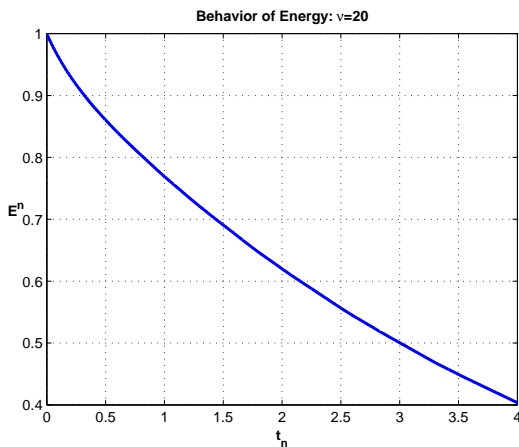


FIGURA 6.5: $v_1^2 \neq v_2^2$.

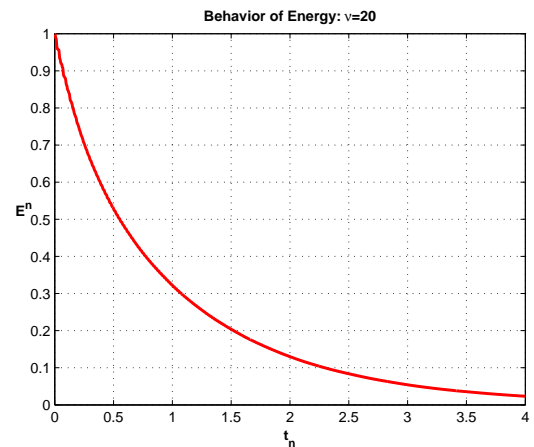


FIGURA 6.6: $v_1^2 = v_2^2$.

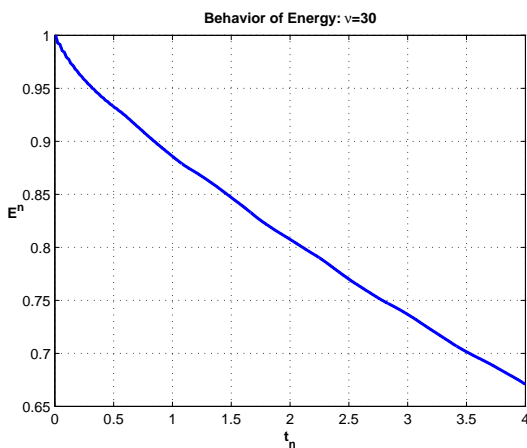


FIGURA 6.7: $v_1^2 \neq v_2^2$.

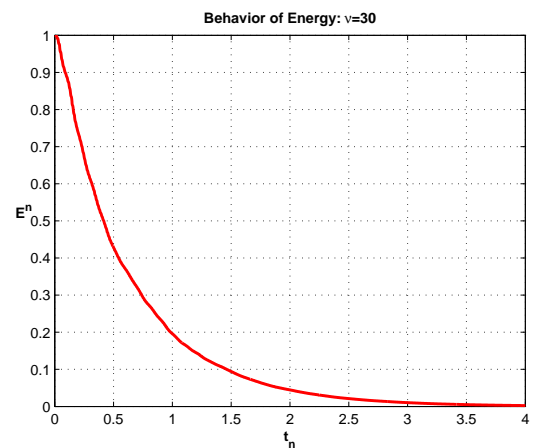


FIGURA 6.8: $v_1^2 = v_2^2$.

A perda de decaimento exponencial, ilustrada nas Figuras (6.5) e (6.7), pode ser vista como um típico comportamento de decaimento polinomial. Para o mesmo conjunto de dados da simulação, os gráficos passam de uma exponencial para uma linha reta.

6.4.3 Dissipação somente no deslocamento transversal: $d_0 > 0$, $d_1 = d_2 = 0$

Aqui, a natureza dos resultados numéricos são as mesmas da Seção 6.4.2. Concluindo, os resultados de decaimento exponencial são os mesmos quando o mecanismo de dissipação atua somente no deslocamento transversal, isto ocorre tanto para vigas de Timoshenko, quanto para o modelo de placas de Mindlin-Timoshenko. Para o primeiro caso, podemos ver as recentes análises de Almeida Júnior *et al.* [2]. Por outro lado, o modelo de placas, é o objeto de estudo do Capítulo 4 desta tese.

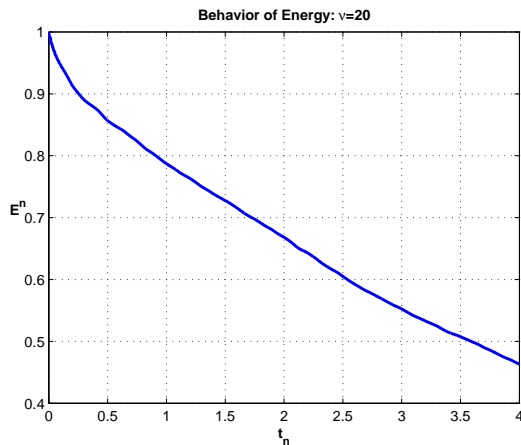


FIGURA 6.9: $v_1^2 \neq v_2^2$.

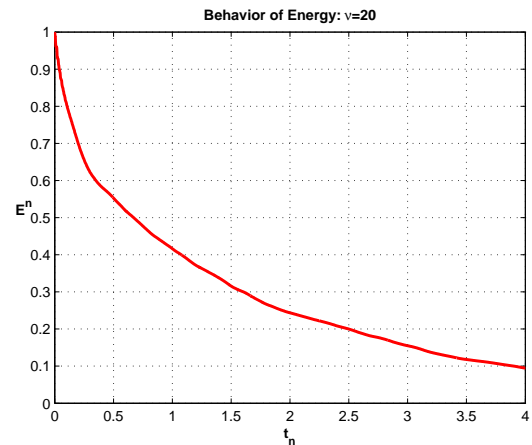


FIGURA 6.10: $v_1^2 = v_2^2$.

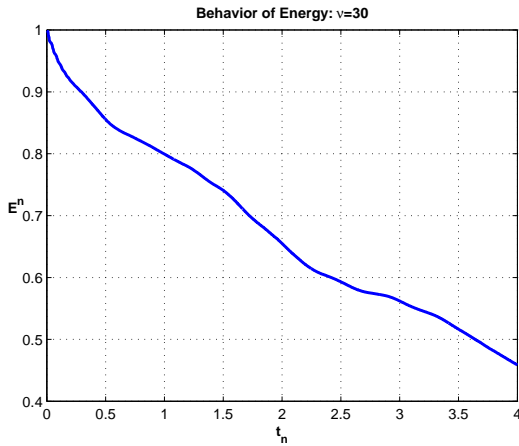


FIGURA 6.11: $v_1^2 \neq v_2^2$.

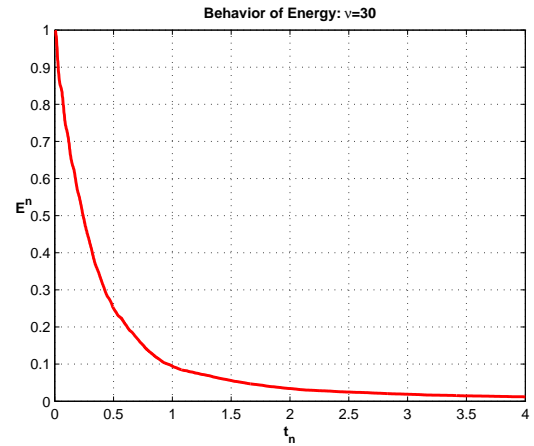


FIGURA 6.12: $v_1^2 = v_2^2$.

**6.4.4 Dissipação somente em um ângulo de rotação: $d_0 = d_2 = 0, d_1 > 0$
ou $d_0 = d_1 = 0, d_2 > 0$**

Neste conjunto de experimentos numéricos, sugerimos um outro problema. Para vigas de Timshenko, quando o mecanismo de dissipação atua somente em um ângulo de rotação, o decaimento ocorre se, e somente se, as velocidades de propagação de ondas são as mesmas. Para este caso, sugerimos a leitura [27, 39]. Para placas de Mindlin-Timoshenko, podemos ver a partir das simulações numéricas que estes resultados são preservados.

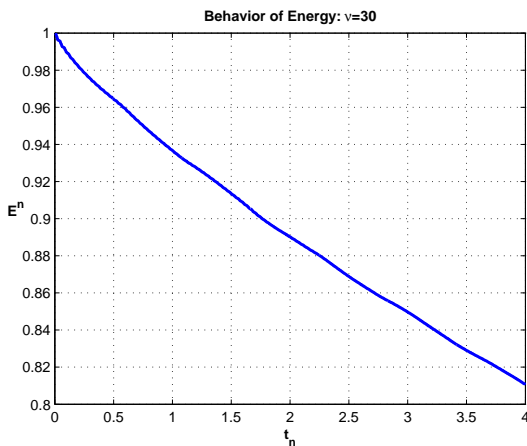


FIGURA 6.13: $d_0 = d_2 = 0,$
 $d_1 > 0, v_1^2 \neq v_2^2$.

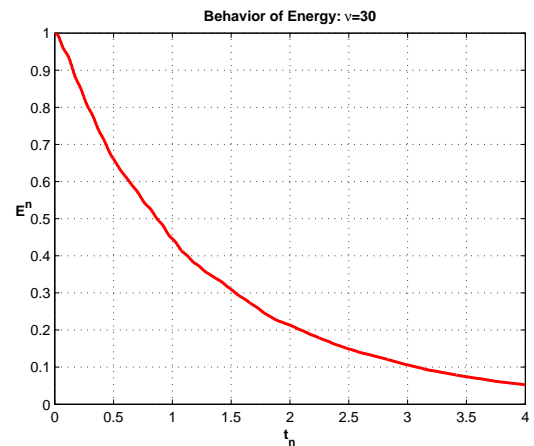


FIGURA 6.14: $d_0 = d_2 = 0,$
 $d_1 > 0, v_1^2 = v_2^2$.

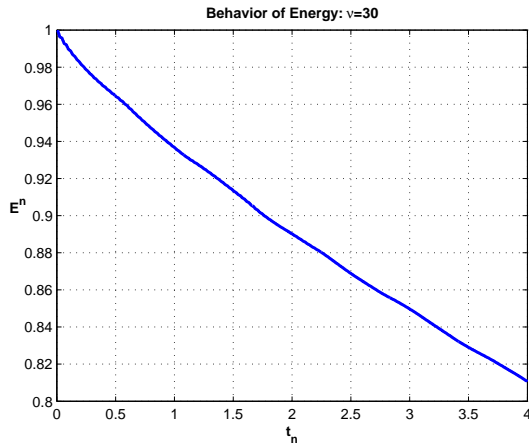


FIGURA 6.15: $d_0 = d_1 = 0$,
 $d_2 > 0$, $v_1^2 \neq v_2^2$.

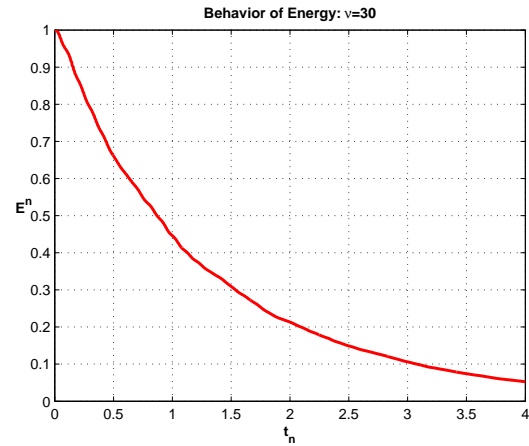


FIGURA 6.16: $d_0 = d_1 = 0$,
 $d_2 > 0$, $v_1^2 = v_2^2$.

6.4.5 Dissipação no deslocamento e um ângulo de rotação:

$$d_0, d_1 > 0, d_2 = 0 \text{ ou } d_0, d_2 > 0, d_1 = 0$$

Aqui, com as configurações dadas, com um mecanismo dissipativo agindo no deslocamento transversal ω e um outro atuando em um dos ângulos de rotação ψ ou φ , de acordo com nossos experimentos numéricos, o decaimento exponencial ocorre, independente de qualquer relação entre as velocidades de propagação. Veja as figuras abaixo.

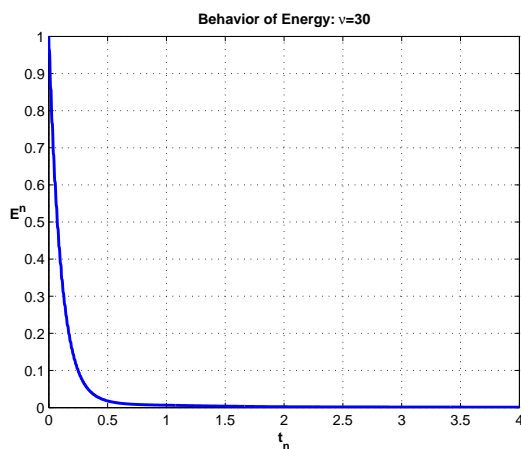


FIGURA 6.17: $d_2 = 0$, $d_0, d_1 > 0$,
 $v_1^2 \neq v_2^2$.

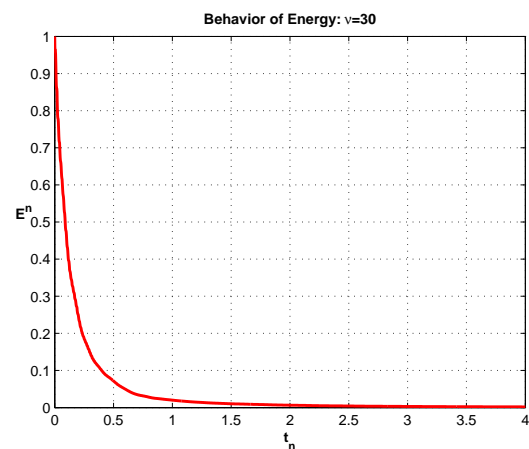


FIGURA 6.18: $d_2 = 0$, $d_0, d_1 > 0$,
 $v_1^2 = v_2^2$.

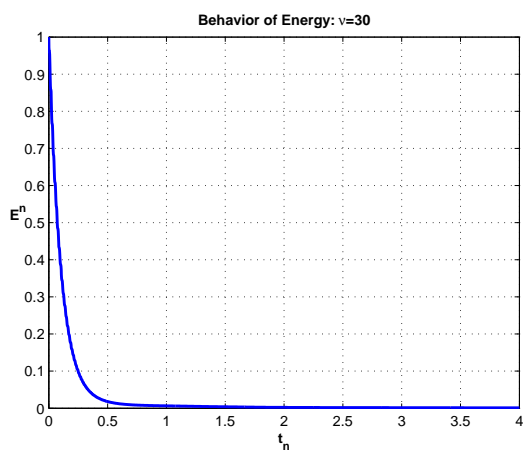


FIGURA 6.19: $d_1 = 0, d_0, d_2 > 0,$
 $v_1^2 \neq v_2^2.$

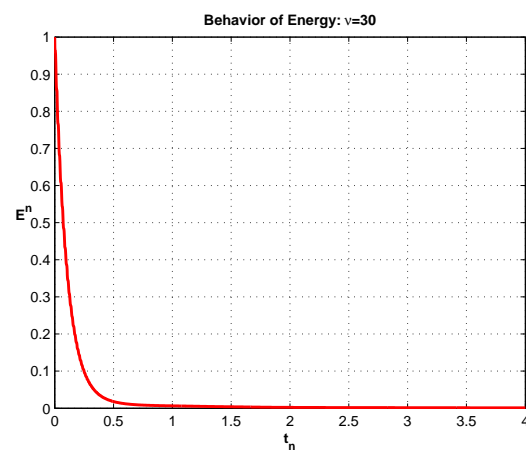


FIGURA 6.20: $d_1 = 0, d_0, d_2 > 0,$
 $v_1^2 = v_2^2.$

Um resultado análogo se verifica para o modelo de vigas de Timoshenko, de acordo com o trabalho de Raposo *et al.* [33].

CAPÍTULO 7

Considerações Finais

Estimulados pelos resultados de estabilização exponencial para vigas de Timoshenko, considerando-se diferentes tipos de mecanismos dissipativos, iniciamos uma pesquisa que envolvessem estruturas flexíveis do tipo placa. Nosso foco, então, voltou-se para modelos de placas bidimensionais de Mindlin-Timoshenko. O objetivo, até então, era obter respostas para questões do tipo:

Qual a quantidade mínima de termos dissipativos para se obter o decaimento exponencial para sistema dissipativos de Mindlin-Timoshenko?

Em se tratando de vigas de Timoshenko sabemos que se introduzirmos um único mecanismo dissipativo atuante na equação de rotação, então, a estabilidade exponencial é condicionada a uma relação entre os coeficientes do sistema. Neste sentido, surge a relação entre as velocidades de propagação de ondas do sistema, os quais desempenham um importante papel no comportamento assintótico de soluções de sistemas fracamente dissipativos de Timoshenko.

Neste ponto, consideramos a semelhança entre os modelos de vigas de Timoshenko e o de placas de Mindlin-Timoshenko. Naturalmente, surge a seguinte questão:

Existe uma relação entre os coeficientes que nos forneça uma condição necessária e suficiente para obter taxas de decaimento exponencial, considerando-se um mecanismo dissipativo agindo nos ângulo de rotação, ou somente no deslocamento transversal?

Com o propósito de responder questionamentos como este, desenvolvemos um esquema numérico em diferenças finitas para o sistema de Mindlin-Timoshenko, baseando-se em trabalhos direcionados à vigas de Timoshenko, onde destacamos a monografia de Almeida Júnior [1], que em seu trabalho de tese reproduziu propriedades assintóticas para modelos unidimensionais de vigas fracamente dissipativas de Timoshenko.

Dentro deste contexto numérico, em nosso trabalho, nos preocupamos com o já conhecido problema de trancamento no cortante que acomete os métodos numéricos aplicados em estruturas flexíveis. Esta anomalia consiste numa sobrestimação no coeficiente de rigidez e que tornam os modelos numéricos inconsistentes com os análogos contínuos. Então, com o intuito de evitar os problemas decorrentes do trancamento no cortante, reproduzimos algumas técnicas que se mostraram eficientes na correção da anomalia. Neste ponto, destacamos uma semidiscretização em diferenças finitas usando o θ -esquema para a identificação dos termos de trancamento, onde mostramos que o problema de sobrestimação ocorre para $\theta \in [0, 1/4[$, estando livre dos efeitos do trancamento no cortante somente para $\theta = 1/4$.

Com respeito a discretização espaço-temporal, deixamos claro que a questão de estabilidade do esquema numérico é um problema ainda a ser resolvido. Contudo, ressaltamos que é esperado que o critério de estabilidade obedeça uma relação entre o espaço de tempo Δt e a espessura h da placa, a exemplo dos modelos aplicados a vigas de Timoshenko. Deste modo, para evitarmos problemas com a convergência do método, fixamos h e escolhemos um Δt pequeno o suficiente de modo a não comprometer o esforço computacional.

Posto isso, efetuamos as simulações numéricas para o sistema de Mindlin-Timoshenko, onde constatamos que a estabilidade exponencial para diferentes casos por vezes está condicionada

a uma relação entre os coeficientes do sistema, que por sua vez possuem dimensões de velocidade, como ocorre para o modelo unidimensional de Timoshenko. Percebemos, então, que a semelhança entre o modelo de vigas e o modelo de placas poderia ir além da formulação física, pois ambos consideram os efeitos da deformação por cortante. Deste modo, decidimos investigar analiticamente se, de fato, a relação entre as velocidades nos fornece condições necessárias e suficientes para obter taxas de decaimento exponencial, como observado nas simulações numéricas, considerando-se as devidas permutações de mecanismos dissipativos nas equações do sistema.

Mantendo a ordem cronológica da pesquisa, analisamos as questões referentes a estabilidade exponencial, perda de estabilidade exponencial e decaimento polinomial do sistema de Mindlin-Timoshenko para os casos em que temos dissipações do tipo atrito atuando nas equações dos ângulos de rotação e, em seguida, para o caso em que temos uma única dissipação agindo na equação que governa o deslocamento transversal. Para ambos os casos, nos certificamos que se a relação dada por $v_1^2 = v_2^2$ é satisfeita, para $v_1^2 := K/\rho_1$ e $v_2^2 := D/\rho_2$, então a energia de soluções dos sistemas decrescem exponencialmente. Caso contrário, os sistemas perdem estabilidade e temos um decaimento polinomial, corroborando os experimentos numéricos.

Está cada vez mais evidente que o modelo bidimensional de Mindlin-Timoshenko preserva algumas propriedades qualitativas do modelo unidimensional de Timoshenko. Então, aproveitando-se dessa peculiaridade, e sabendo que as pesquisas que envolvem problemas de vigas de Timoshenko é mais ampla e melhor consolidada, projetamos novos questionamentos e perspectivas de modelos dissipativos de Mindlin-Timoshenko, e que podem ser estudados sob o ponto de vista da análise matemática, principalmente no que tange à estabilização exponencial. Por exemplo, o modelo dinâmico de placas pode ser estudado com outros mecanismos dissipativos, tais como, uma dissipação térmica, que pode ser obtida através da condução de calor considerando a lei de Fourier ou a lei de Cattaneo. Temas como estes, já estão sendo explorados por pesquisadores [29, 30, 9, 10], e sobre os quais pretendo estender meus estudos como um próximo passo na minha vida científica.

Referências Bibliográficas

- [1] D. S. Almeida Junior. *Estabilidade Assintótica e Numérica de Sistemas Dissipativos de Vigas de Timoshenko e Vigas de Bresse*. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2009.
- [2] D. S. Almeida Junior, M. L. Santos, and J. E. Muñoz Rivera. Stability to weakly dissipative Timoshenko systems. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36:1965–1976, 2013.
- [3] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera, and R. Racke. Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *Journal of Differential Equation*, 194 (1):82–115, 2003.
- [4] M. Batista. An elementary derivation of basic equations of the Reissner and Mindlin plate theories. *Engineering Structures*, 32:906–909, 2010.
- [5] A. Borichev and Y. Tomilov. Optimal polynomial decay of functions and operator semi-groups. *Mathematische Annalen*, 347 (2):455–478, 2009.
- [6] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*. Springer-Verlag, Masson, 1992.

-
- [7] H. D. Fernández Sare. On the stability of Mindlin-Timoshenko plates. *Quartely of Applied Mathematics*, 67:249–263, March 2009.
- [8] A. L. Goldenveizer. *On Reissner's Theory of the Bending of Plates*. National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1960.
- [9] M. Grobbelaar-Van Dalsen. Strong stabilization of models incorporating the thermoelastic Reissner-Mindlin plate equations with second sound. *Appl. Anal.*, 90:1419–1449, 2011.
- [10] M. Grobbelaar-Van Dalsen. Stabilization of a thermoelastic Mindlin-Timoshenko plate model revisited. *Z. Angew. Math. Phys.*, 64:1305–1325, 2013.
- [11] F. L. Huang. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Annals of Differential Equations*, 1:43–56, 1985.
- [12] T. R. Hughes, R. L. Taylor, and W. Kanoknukulchai. A simple and efficient finite element method for plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11:1529–1543, 1977.
- [13] M. A. Jorge Silva, T. F. Ma, and J. E. Muñoz Rivera. Mindlin-Timoshenko systems with Kelvin-Voigt: analyticity and optimal decay rates. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 417:164–179, 2014.
- [14] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems, 3rd Edition*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [15] J. U. Kim and Y. Renardy. Boundary control of the Timoshenko beam. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(6):1417–1429, 1987.
- [16] J. E. Lagnese. *Boundary Stabilization of Thin Plates*. SIAM, Philadelphia, 1989.
- [17] J. E. Lagnese and J. L. Lions. *Modelling, Analysis and Control of Thin Plates*. Collection RMA, Masson, Paris, 1988.
- [18] L. Li. Discretization of the Timoshenko beam problem by the p and $h - p$ versions of the finite element method. *Numerische Mathematik*, 57:413–420, 1990.

- [19] Z. Liu and S. Zheng. *Semigroups associated with dissipative systems*. In CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, 1999.
- [20] A. F. D. Loula, T. J. R. Hughes, and L. P. Franca. Petrov–Galerkin formulations of the Timoshenko beam problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 (2):115–132, 1987.
- [21] A. F. D. Loula, T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and I. Miranda. Mixed Petrov–Galerkin methods for the Timoshenko beam problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63 (2):133–154, 1987.
- [22] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18:31–38, 1951.
- [23] J. E. Muñoz Rivera. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*. Academia das Contas, Rio de Janeiro, 2008.
- [24] J. E. Muñoz Rivera and L. H. Fatori. Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 75 (6):881–904, 2010.
- [25] J. E. Muñoz Rivera and H. Portillo Oquendo. Asymptotic behavior on a Mindlin–Timoshenko plate with viscoelastic dissipation on the boundary. *Funkcialaj Ekvacioj*, 46:363–382, 2003.
- [26] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke. Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems – Global existence and exponential stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pages 248–278, 2002.
- [27] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke. Global stability for damped Timoshenko systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, B 9:1625–1639, 2003.
- [28] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [29] M. Pokojovy. Zur Theorie Wärmeleitender Reissner-Mindlin-Platten. Master’s thesis, Universität Konstanz, Konstanz, Deutschland, 2011.

- [30] M. Pokojovy. On stability of hyperbolic thermoelastic Reissner–Mindlin–Timoshenko plates. *Math. Meth. Appl. Sci*, 2014.
- [31] G. Prathap and G. R. Bhashyam. Reduced integration and the shear-flexible beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:195–210, 1982.
- [32] J. Prüss. On the spectrum of c_0 -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 284:847–857, 1984.
- [33] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, and N.N.O. Castro. Exponential stability for the Timoshenko beam with two weak dampings. *Appl. Math. Lett.*, 18:535–541, 2005.
- [34] H. Reismann. *Elastic Plates: Theory and Application*, 1998. In: A. Labuschagne, N.F.J. van Rensburg, A.J. van der Merweb. *Vibration of Reissner-Mindlin-Timoshenko plate beam system*. *Mathematical and Computer Modelling*, 50:1033–1044, 2000.
- [35] M. L. Santos and D. S. Almeida Junior. Numerical exponential decay to dissipative Bresse system. *Journal of Applied Mathematics*, 2010:1–17, 2010.
- [36] M. L. Santos, D. S. Almeida Junior, and J. E. Muñoz Rivera. The stability number of the Timoshenko system with second sound. *J. Differential Equations*, 253:2715–2733, 2012.
- [37] M.L. Santos. Decay rates for solutions of a Timoshenko system with a memory condition at the boundary. *Abstract and Applied Analysis*, 7(10):531–546, 2002.
- [38] I. Senjanovi, N. Vladimir, and N. Franca, Hadzic. Modified Mindlin plate theory and shear locking-free finiteelement formulation. *Mechanics Research Communications*, 55: 95–104, 2014.
- [39] A. Soufyane. Stabilisation de la poutre de Timoshenko. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série I - Mathematics*, 328(8):731–734, 1999.
- [40] R. Szilard. *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2004.

-
- [41] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41:744–746, 1921.
- [42] E. Ventsel and T. Krauthammer. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*. Marcel Dekker, New York, 2001.
- [43] C. M. Wang, G. T. Lim, J. N. Reddy, and K. H. Lee. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. *Engineering Structures*, 23:838–849, 2001.
- [44] J. P. Wright. A mixed time integration method for Timoshenko and Mindlin type elements. *Communications in Applied Numerical Methods*, 3:181–185, 1987.
- [45] J. P. Wright. Numerical stability of a variable time step explicit method for Timoshenko and Mindlin type structures. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 14: 81–86, 1998.
- [46] E. Zuazua. Propagation, Observation, Control and Numerical Approximation of Waves. *Bol. Soc. Esp. Mat. Ap*, 25:55–126, 2003.