

Universidade Federal do Pará
Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Imersões PMC em Espaços $E^n(c) \times \mathbb{R}$

por

Henrique Reffert Filho

Manaus-Am
Maio/2015

Imersões PMC em Espaços $E^n(c) \times \mathbb{R}$

por

Henrique Reffert Filho

sob orientação do

Professor Dr. Renato de Azevedo Tribuzy

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-Am

Maio/2015

Henrique Reffert Filho

Imersões PMC em Espaços $E^n(c) \times \mathbb{R}$

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em
Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM,
como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 18 de maio de 2015.

BANCA EXAMINADORA

-
Prof. Dr. Renato de Azevedo Tribuzy (orientador)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM
-
Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (membro)
Universidade Federal do Amazonas - UFAM
-
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (membro externo)
Universidade Federal do Ceará - UFC
-
Dr^a. Ketti Tenenblat (membro externo)
Universidade de Brasília - UnB
-
Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso (membro externo)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Dedicatória

A Deus meu Pai-Mãe eterno.

A minha mãe terrena que se encontra em outro plano.

Ao meu pai terreno que junto com minha mãe me deram muito nesta existência.

Agradecimentos

Eu quero expressar minha gratidão ao meu incansável mestre Professor Dr. Renato Tribuzy, por sua valiosa dedicação em orientar todos os passos que precisei dar a fim de obter este trabalho. É uma grande satisfação poder agradecer aos meus amigos José Kenedy Martins, José Nazareno, Raul Mesquita e João Batista Ponciano que tanto me deram apoio e encorajamento para completar a presente missão. A Adriana minha namorada e companheira que atravessou ao meu lado momentos desafiadores. Finalmente, eu quero agradecer a agência brasileira de fomento à pesquisa: CAPES por prover os recursos que viabilizaram minha dedicação exclusiva. De igual modo agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas pela liberação para realizar este doutorado.

Resumo

Esta tese apresenta condições suficientes para que uma superfície imersa, com vetor curvatura média paralelo e não nulo, no espaço produto $E^n(c) \times \mathbb{R}$, onde $E^n(c)$ é a variedade riemanniana n -dimensional, simplesmente conexa, completa com curvaturas seccionais constantes $c \neq 0$, seja invariante por um grupo a um parâmetro especial de isometrias do espaço ambiente.

Palavras-chave: Imersões, PMC, Espaço-Produto

Abstract

This thesis gives sufficient conditions to a surface immersed, with parallel mean curvature vector not null, into the product space $E^n(c) \times \mathbb{R}$, where $E^n(c)$ is the simply connected n -dimensional complete Riemannian manifold with constant sectional curvature $c \neq 0$, be invariant by a special one parameter group of isometries of the ambient space.

Keywords: Immersions, PMC, Product-Space

Conteúdo

Introdução	2
1 Fundamentação Teórica	8
1.1 Fibrados Vetoriais Riemannianos	8
1.2 Tensores em Variedades Riemannianas	11
1.3 Imersões Isométricas	12
1.4 Espaços de Lorentz	14
1.5 Estrutura Complexa	15
2 Resultados Auxiliares	19
3 Superfícies PMC em Espaços Produtos	36
Bibliografia	53

Introdução

Um memorável resultado foi provado por H. Hopf em 1951 [18] com um estudo extenso das superfícies CMC (Curvatura Média Constante) orientadas, fechadas com gênero zero, ou seja superfícies homeomorfas à esfera, no espaço tridimensional.

Em 1841 Delaunay caracterizou em [10] uma classe de superfícies no espaço euclidiano a qual ele descreveu explicitamente como superfícies de revolução de roulettes das cônicas. Estas superfícies são os catenóides, ondulóides, nodóides e cilindros circulares retos. Hoje elas são conhecidas como as superfícies de Delaunay e são os primeiros exemplos não triviais de superfícies tendo curvatura média constante. Em uma nota aditivada ao artigo de Delaunay, M. Sturm caracterizou estas superfícies variacionalmente como extremas de superfícies de rotação tendo volume fixo e área lateral maximizada. Usando esta caracterização, foi obtido o seguinte teorema.

Teorema de Delaunay *As superfícies completas de revolução imersas em $\mathbb{R}^3$ e tendo curvatura média constante são exatamente aquelas obtidas por rotação, em torno de seu eixo, das roulettes das cônicas.*

Estas superfícies foram também reconhecidas por Plateau usando experimentos com películas de sabão. Em 1853 J.H. Jellet mostrou em [20] que se Σ é uma superfície compacta estrelada em $\mathbb{R}^3$ tendo curvatura média constante, então ela é a esfera canônica. H. Hopf conjecturou que isto em verdade vale para todas as imersões compactas:

Conjectura de Hopf *Seja Σ uma imersão de uma hipersuperfície compacta orientada com curvatura média constante $H \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Então Σ deve ser a esfera canônica $(n - 1)$ -dimensional mergulhada.*

Hopf provou a conjectura em [18] para o caso de imersões de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$ tendo curvatura média constante e alguns anos depois A.D. Alexandrov mostrou que a conjectura vale para qualquer hipersuperfície mergulhada em $\mathbb{R}^n$, veja [6]. Era amplamente aceito que

esta conjectura fosse verdadeira até 1982 quando Wu-Yi Hsiang [19] construiu um contra exemplo em $\mathbb{R}^4$. Dois anos mais tarde Wente construiu em [32] uma imersão do toro T^2 em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante.

A construção de Wente tem sido vastamente estudada mas foi apenas capaz de criar superfícies de gênero $g = 1$. Um método diferente de construir superfícies em $\mathbb{R}^3$ tendo curvatura média constante e de gênero $g \geq 3$ foi apresentado em 1987 por N. Kapouleas [21]. Uma prova do fato de que existem imersões CMC de superfícies compactas de qualquer gênero foi publicado em [23] em 1995 pelo mesmo autor.

Em sua demonstração, usando a equação de Codazzi, Hopf mostrou a existência de uma diferencial holomórfica numa superfície CMC em $\mathbb{R}^3$ cujo anulamento caracteriza a propriedade da superfície ser um aberto da esfera canônica, em outros termos, a diferencial se anula exatamente quando a superfície é umbílica.

Este resultado foi posteriormente estendido a superfícies CMC nos espaços formas tridimensionais por S-S. Chern [8]. Um problema de classificar superfícies CMC fechadas de gênero zero orientadas é chamado de problema de Hopf.

Aqui neste trabalho denotaremos esta diferencial holomórfica construída por Hopf em uma superfície CMC, simplesmente por **diferencial de Hopf**.

A generalização natural de superfícies CMC para superfícies de codimensão maiores são as superfícies PMC (Curvatura Média Paralela) em Espaços forma.

Segue naturalmente que toda superfície mínima é PMC. É também possível mostrar que uma subvariedade mínima em $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ possui um vetor curvatura média paralelo não nulo quando é considerada como subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$. Além desta, apresentamos como exemplo natural de subvariedade PMC, o caso de uma hipersuperfície de uma variedade riemanniana de curvatura média constante (CMC).

No que diz respeito ao caso de superfícies CMC em codimensões maiores temos a situação de ocorrências em formas espaciais. Neste caso podemos mencionar o artigo de Hoffman, onde ele considerou superfícies PMC em $\mathbb{R}^n$. Ele mostrou que superfícies PMC, orientadas, fechadas de gênero zero são superfícies pseudo-umbílicas que estão em uma hiperesfera. Chern [8] e Yau [33], de forma independente, deram um passo adiante quando consideraram as imersões em formas espaciais tridimensionais. Eles mostraram que uma superfície PMC no $\mathbb{R}^n$ é: uma superfície mínima do $\mathbb{R}^n$, uma superfície mínima de uma hiperesfera do $\mathbb{R}^n$, uma superfície CMC do $\mathbb{R}^3$ ou uma superfície CMC que está

numa hipersfera de um subespaço afim de dimensão quatro do $\mathbb{R}^n$. Resultados similares também são demonstrados para superfícies PMC na esfera e no espaço hiperbólico [7].

Os trabalhos científicos nos últimos dez anos sobre superfícies CMC em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, no grupo de Heisenberg Nil_3 , no recobrimento universal do $PSL_2(\mathbb{R})$, no grupo de Lie (Sol_3) , nas esferas tridimensionais de Berger e nos grupos de Lie com métrica invariante à esquerda, migraram das imersões nos espaços formas $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$.

Este redirecionamento das pesquisas sobre superfícies CMC teve início após os trabalhos de Rosenberg e Meeks em [25, 26] e de Ryan [29] onde são estabelecidos vários resultados sobre superfícies mínimas completas em $M^2 \times \mathbb{R}$ e depois, em 2004, em trabalhos de Rosenberg e Abresch em [1, 2] onde são demonstrados resultados do problema de Hopf em espaços homogêneos tridimensionais com grupo de isometria quadridimensional. Eles usaram a mesma abordagem de Hopf porém fazendo uso de uma forma diferencial adaptada (forma diferencial de Abresch-Rosenberg) para este novo espaço ambiente. Todavia, a propriedade de holomorfia desta nova forma diferencial era equivalente à propriedade de curvatura média constante.

O estudo de superfícies PMC também foi estendido quando o espaço ambiente é homogêneo e em particular para os casos de espaços produto que são espaços simétricos, produto de dois espaços forma. Um dos primeiros artigos sobre isto foi escrito por Torralbo e Urbano. Eles estudaram superfícies PMC em espaços produto de espaços formas bidimensionais. Usando as estruturas de Kähler que esse produto possui, eles obtiveram duas diferenciais de Hopf e assim puderam classificar as esferas PMC nesse produto.

Recentemente, H. Alencar, M. do Carmo e R. Tribuzy [3] usaram a forma bilinear

$$Q(X, Y) = 2\langle \alpha(X, Y), H \rangle - c\langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle \quad (1)$$

para demonstrar que no caso das imersões PMC em espaços $E^n(c) \times \mathbb{R}$, a forma quadrática $Q(Z, Z)$, a qual é uma generalização da forma de Abresch e Rosenberg, é holomorfa. Aqui nós usamos $E^n(c)$ para simbolizar um espaço simplesmente conexo com curvatura seccional constante $c \neq 0$. A partir desta informação eles descreveram as imersões de superfícies PMC no espaço $E^n(c) \times \mathbb{R}$, ver [4].

Este trabalho generaliza os resultados obtidos em [3, 4, 5] descritos a seguir.

Teorema 1 *Sejam M uma superfície e $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média não nulo o qual é paralelo na conexão do fibrado normal. Seja ξ um vetor unitário na direção da segunda componente do espaço tangente ambiente definido ao longo da imersão. Se a projeção de ξ no espaço tangente é um autovetor do operador de forma A_H , então uma das seguintes afirmações ocorre:*

1. *A superfície é mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $E^n(c)$;*
2. *A superfície tem curvatura média constante em uma variedade 3-dimensional totalmente umbílica ou totalmente geodésica em $E^n(c)$;*
3. *A superfície $M \subset E^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}^5$ pode ser considerada com a métrica de Lozentz e é deixada invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias. Este subgrupo age como aplicação identidade sobre o complemento ortogonal de um plano $W \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$. Em verdade, todas as trajetórias nas direções horizontais são deixadas invariantes pelo subgrupo e a menos de translações, elas são círculos em W se $c > 0$, e se $c < 0$, elas são círculos, horocírculos ou hipercírculos em uma superfície totalmente geodésica de $E^4(c)$, $E^2(c)$.*

Teorema 2 *Sejam M uma superfície e $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão com curvatura média não nula e paralela na conexão do fibrado normal. Assuma a existência de um triângulo geodésico T em M com ângulos internos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ satisfazendo*

$$\Pi - \sum_{i=1}^3 \beta_i = \int_R - \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta} \right)^2 |d\phi|^2 + 2|H| \left| \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \right| |d\phi| + c \sin^2 \theta \quad (2)$$

onde R denota a região limitada por T , a função ϕ mede o ângulo entre H e ξ . A função θ é o ângulo entre ξ e $T_p M$. Aqui ξ denota um vetor unitário na direção da segunda componente. Admitamos que a menos de pontos isolados no interior de R , a expressão $\frac{\sin \phi}{\cos \theta}$ esteja definida e seja não-nula. Então $M \subset E^3(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ com $\mathbb{R}^4$ possivelmente Lorentz. Além disso M é deixada invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias o qual age como aplicação identidade sobre o complemento ortogonal de um plano W . Em verdade, todas as trajetórias nas direções horizontais são deixadas invariantes por este subgrupo e a menos de translações, elas são círculos em W se $c > 0$, e se $c < 0$, elas são círculos ou horocírculos ou hipercírculos em uma superfície totalmente geodésica de $E^3(c)$, $E^2(c)$.

Teorema 3 *Sejam M uma superfície compacta de gênero zero e $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica tal que $|\nabla^\perp H| \leq g|Q^{(2,0)}|$, onde H é a curvatura média da imersão, g é uma função real contínua não-negativa e $Q^{(2,0)}$ é a diferencial generalizada de Abresch-Rosenberg. Uma das seguintes afirmações ocorre:*

1. *A superfície é mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $E^n(c)$;*
2. *A superfície é uma esfera umbílica de $E^3(c)$;*
3. *A superfície satisfaz $M \subset E^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}^5$ é possivelmente Lorenz e é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de rotações o qual age como aplicação identidade sobre o complemento ortogonal de uma plano W . Em verdade, todas as trajetórias nas direções horizontais são deixadas invariantes por este subgrupo e elas são círculos em uma superfície totalmente geodésica de $E^4(c)$, $E^2(c)$.*

Teorema 4 *Seja $M \subset E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma superfície compacta e simplesmente conexa com bordo formado por uma curva regular por partes, cujos vértices sejam os (finitos) pontos onde o bordo é não-regular. Assumindo que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (I) *A superfície está contida como conjunto no interior de uma superfície regular $\overline{M}$ sem bordo.*
- (II) *Em $\overline{M}$ temos $|\nabla^\perp H| \leq h|Q^{(2,0)}|$, onde H é a curvatura média da superfície, $Q^{(2,0)}$ é a diferencial generalizada de Abresch-Rosenberg, e g é uma função contínua e não-negativa.*
- (III) *O numero de vértices em ∂M com ângulo menor que π é no máximo 3.*
- (IV) *A parte imaginária de $Q^{(2,0)}$ anula-se em $\partial M \setminus V$. Isto significa que as partes regulares do bordo ∂M são curvas integrais das direções que maximizam ou minimizam os valores da forma quadrática real $\overline{\sigma}$ sobre o círculo unitário.*

Então uma das seguintes situações ocorre:

1. *A superfície é mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $E^n(c)$;*
2. *A superfície tem curvatura média constante em uma variedade totalmente umbílica 3-dimensional ou ela é totalmente geodésica em $E^n(c)$;*

3. A superfície M satisfaz $M \subset E^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}^5$ pode ser considerada com a métrica de Lozentz e esta superfície é deixada invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias. Este subgrupo age como aplicação identidade sobre o complemento ortogonal de um plano $W \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$. De fato, todas as trajetórias nas direções horizontais são deixadas invariantes pelo subgrupo e a menos de translações, elas são círculos em W se $c > 0$, e se $c < 0$, elas são círculos, horocírculos ou hipercírculos em uma superfície de $E^4(c)$, $E^2(c)$.

O próximo resultado dá uma caracterização mais completa da classificação apresentada no Teorema 3 de [4] e no Teorema 1.2 de [17].

Teorema 5 *Sejam M uma superfície completa com curvatura gaussiana $K \geq 0$, e $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$, $c \neq 0$, uma imersão isométrica com vetor curvatura média paralelo. Então uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. $K \equiv 0$;
2. A superfície é mínima em uma subvariedade totalmente umbílica de $E^n(c)$;
3. A superfície tem curvatura média constante em uma subvariedade de dimensão 3 totalmente umbílica de $E^n(c)$;
4. A superfície está contida em $E^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^6$ (munido da métrica de Lorentz no caso $c < 0$) e é invariante por um grupo a um parâmetro especial de isometrias de uma variedade totalmente geodésica $E^2(c)$ de $E^4(c)$ e que deixa fixo o espaço complementar ao $\mathbb{R}^3$ (possivelmente com a métrica de Lorentz) que a contém.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Neste Capítulo disponibilizamos algumas definições e resultados gerais de Variedades Riemannianas e fixaremos notações que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho.

1.1 Fibrados Vetoriais Riemannianos

Definição 1.1 *Sejam E e M variedades diferenciáveis e seja $\pi : E \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial de dimensão k quando para cada ponto $q \in M$ tem-se:*

1. $\pi^{-1}(q)$ é um espaço vetorial real de dimensão k ;
2. existem uma vizinhança aberta U de q em M e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ para cada $y \in U$.

Definição 1.2 *Dado um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ e um conjunto $F \subset E$ tal que a restrição $\pi|_F : F \rightarrow M$ é também um fibrado vetorial, dizemos que F é um subfibrado vetorial de E se a inclusão leva $(\pi|_F)^{-1}(q)$ linearmente sobre $\pi^{-1}(q)$ para todo $q \in M$.*

Definição 1.3 *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial. Para cada $p \in M$ chamamos o espaço $E_p = \pi^{-1}(p)$ a fibra de π sobre p . Uma seção local sobre um conjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\varepsilon : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \varepsilon = \text{id}_U$; se $U = M$ dizemos que $\varepsilon : M \rightarrow E$ é uma seção global ou simplesmente seção de π . É possível mostrar que para todo $e \in E$ existe uma seção ε tal que $\varepsilon(\pi(e)) = e$, em particular isto mostra que o conjunto $\Gamma(\pi)$ das seções de π é não vazio.*

Definição 1.4 *Sejam $\pi_1 : E^1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^2 \rightarrow M$ fibrados vetoriais. Definimos a projeção $\pi : \mathcal{L}(E^1, E^2) \rightarrow M$ colocando $\pi^{-1}(p) = \mathcal{L}(E_p^1, E_p^2)$, onde o conjunto $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ é a união dos espaços das aplicações lineares de E_p^1 sobre E_p^2 , $p \in M$. Dotando $\mathcal{L}(E^1, E^2)$ com a estrutura diferenciável natural induzida pela projeção ele torna-se um fibrado vetorial, chamado fibrado das aplicações lineares. A soma $\pi_1 \oplus \pi_2$ dos fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^2 \rightarrow M$ é definida como a projeção*

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : E^1 \oplus E^2 \rightarrow M,$$

dada por $\pi_1 \oplus \pi_2(e_1, e_2) = \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)$, onde $E^1 \oplus E^2 = \{(e_1, e_2) \in E^1 \times E^2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}$

Definição 1.5 *Sejam $\pi_1 : E^1 \times E^2 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^3 \rightarrow M$ fibrados vetoriais. Definimos a projeção $\pi : \mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3) \rightarrow M$ colocando $\pi^{-1}(p) = \mathcal{L}_2(E_p^1 \times E_p^2, E_p^3)$, onde o conjunto $\mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3)$ é a união dos espaços das aplicações bilineares de $E_p^1 \times E_p^2$ sobre E_p^3 , $p \in M$. Dotando $\mathcal{L}_2(E^1 \times E^2, E^3)$ com a estrutura diferenciável natural induzida pela projeção ele torna-se um fibrado vetorial, chamado fibrado das aplicações bilineares. A soma $\pi_1 \oplus \pi_2$ dos fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \times E^2 \rightarrow M$ e $\pi_2 : E^3 \rightarrow M$ é definida como a projeção*

$$\pi_1 \oplus \pi_2 : (E^1 \times E^2) \oplus E^3 \rightarrow M,$$

dada por $\pi_1 \oplus \pi_2(e_1 \times e_2, e_3) = \pi_1(e_1 \times e_2) = \pi_2(e_3)$, onde $(E^1 \times E^2) \oplus E^3 = \{(e_1 \times e_2, e_3) \in E^1 \times E^2 \times E^3 : \pi_1(e_1 \times e_2) = \pi_2(e_3)\}$.

As somas definidas acima são fibrados vetoriais. Mais geralmente, podemos transferir para fibrados vetoriais certas operações que são realizadas entre espaços vetoriais.

Definição 1.6 *Dados dois fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \rightarrow M_1$ e $\pi_2 : E^2 \rightarrow M_2$ e um difeomorfismo $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$, dizemos que a aplicação diferenciável $\tilde{\Phi} : E^1 \rightarrow E^2$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais ao longo de Φ se, para todo $q \in M_2$, temos*

$$(i) \quad \pi_2 \circ \tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi_1 \text{ e } \tilde{\Phi}(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(\Phi(p)),$$

(ii) A restrição $\tilde{\Phi}_p : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(\Phi(p))$ de $\tilde{\Phi}$ para a fibra $\pi_1^{-1}(p)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Segue da definição que $\tilde{\Phi}$ é um difeomorfismo. Além disso, para cada seção ε de π_1 obtemos a seção $\tilde{\Phi}(\varepsilon) = \tilde{\Phi} \circ \varepsilon \circ \Phi^{-1}$.

Definição 1.7 *Uma métrica Riemanniana $\langle, \rangle$ sobre um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação*

$$\langle, \rangle : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \rightarrow \mathcal{D}(M),$$

bilinear sobre o anel $\mathcal{D}(M)$ de funções diferenciáveis sobre M , que é simétrica e positiva definida.

Definição 1.8 *Um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ junto com uma métrica Riemanniana fixa é chamado um fibrado vetorial Riemanniano.*

Definição 1.9 *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial e seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis sobre M . Uma conexão linear é uma aplicação R -bilinear*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) &\rightarrow \Gamma(\pi) \\ (X, \varepsilon) &\mapsto \nabla_X \varepsilon \end{aligned}$$

satisfazendo, para cada $f \in \mathcal{D}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$, as propriedades

- (i) $\nabla_{fX} \varepsilon = f \nabla_X \varepsilon,$
- (ii) $\nabla_X (f\varepsilon) = X(f)\varepsilon + f \nabla_X \varepsilon.$

Definição 1.10 *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇ . Dizemos que a seção $\varepsilon \in \Gamma(\pi)$ é paralela quando $\nabla_X \varepsilon = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Um subfibrado vetorial F de E é dito paralelo se, para toda seção η de F e todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que $\nabla_X \eta$ é uma seção de F .*

Definição 1.11 *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial Riemanniano. Uma conexão linear ∇ é dita compatível com a métrica $\langle, \rangle$ quando*

$$X\langle \varepsilon, \eta \rangle = \langle \nabla_X \varepsilon, \eta \rangle + \langle \varepsilon, \nabla_X \eta \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon, \eta \in \Gamma(\pi)$.

O tensor curvatura de um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ com conexão linear ∇ é a aplicação R -trilinear

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \rightarrow \Gamma(\pi)$$

definida por $R(X, Y)\varepsilon = \nabla_X \nabla_Y \varepsilon - \nabla_Y \nabla_X \varepsilon - \nabla_{[X, Y]}\varepsilon$.

É bem conhecido que R é trilinear sobre $\mathcal{D}$. Quando o fibrado vetorial é Riemanniano, podemos associar a R outro tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \rightarrow R$$

dado por $R(X, Y, \varepsilon, \eta) = \langle R(X, Y)\varepsilon, \eta \rangle$, onde $\langle \cdot \rangle$ é a métrica sobre E .

Por um abuso de linguagem é comum não nos referirmos à aplicação $\pi : E \rightarrow M$ quando estamos trabalhando com fibrados cuja aplicação é a natural, mas sim às variedades E e M .

1.2 Tensores em Variedades Riemannianas

A ideia de tensor é uma generalização natural da ideia de campos de vetores e, analogamente aos campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

Observe que $\mathfrak{X}(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como “escalares” os elementos de $\mathcal{D}(M)$.

Definição 1.12 *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Com r fatores. Isto significa que, dados $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$ é uma aplicação diferenciável em M e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$

Seja T um tensor de ordem r . A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $r + 1$ dado por

$$(\nabla T)(Y_1, \dots, Y_r, Z) = \nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_r).$$

Um tensor T é um objeto pontual em um sentido que passamos a explicar. Fixe um ponto $p \in M$ e seja U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que em cada $p \in U$, os vetores $E_1(p), \dots, E_n(p)$ formam uma base de $T_p M$. Neste caso, diremos que $\{E_i\}$ é um referencial móvel em U .

Sejam $Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}$, $Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}$ com $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ as restrições a U dos campos $Y_1, \dots, Y_r$ expressas no referencial móvel $\{E_i\}$.

Por linearidade, temos

$$T(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_r}) = \sum_{i_1, \dots, i_r} y_{i_1} \dots y_{i_r} T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}).$$

As aplicações $T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}) = T_{i_1, \dots, i_r}$ são chamadas as componentes de T no referencial $\{E_i\}$.

Da expressão acima, decorre que o valor de $T(Y_1, \dots, Y_r)$ em um ponto $p \in M$ depende apenas dos valores em p das componentes de T e dos valores de $Y_1, \dots, Y_r$ em p . É neste sentido que dizemos que T é pontual.

1.3 Imersões Isométricas

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica sobre uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+m}$. Então podemos considerar a soma direta do fibrado tangente TM com o fibrado normal $TM^\perp$, isto é,

$$T\overline{M}|_{f(M)} = TM \oplus TM^\perp.$$

Assim, temos as projeções

$$(\)^T : T\overline{M}|_{f(M)} \rightarrow TM, \quad (\)^\perp : T\overline{M}|_{f(M)} \rightarrow TM^\perp$$

que são chamadas tangencial e normal, respectivamente.

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}^{n+m}$. Dados campos de vetores $X, Y \in TM$, temos que

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T + (\overline{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Segue da unicidade da conexão Riemanniana que $(\overline{\nabla}_X Y)^T$ é a conexão Riemanniana de M , que será denotada por ∇ . De modo que, a segunda forma fundamental $\alpha : TM \times$

$TM \rightarrow TM^\perp$ de f , é definida por

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad (\text{Fórmula de Gauss}). \quad (1.1)$$

Em particular, para $\eta \in TM^\perp$, denotaremos por $\mathcal{A}_\eta X$ a componente tangencial de $-\bar{\nabla}_X \eta$, isto é,

$$\mathcal{A}_\eta X = -(\bar{\nabla}_X \eta)^T.$$

A aplicação $\mathcal{A}_\eta$ é o operador de forma ou, por um abuso de linguagem, a segunda forma fundamental na direção de η . A componente normal de $\bar{\nabla}_X \eta$, que denotamos por $\nabla_X^\perp \eta$, define uma conexão compatível sobre o fibrado normal $TM^\perp$. Além disso, as equações de Weingarten, são dadas por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_\eta X, Y \rangle &= \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle, \\ \bar{\nabla}_X \eta &= -\mathcal{A}_\eta X + \nabla_X^\perp \eta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Usando as fórmulas de Gauss e Weingarten obteremos as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. De fato, se R e $\bar{R}$ são os tensores curvaturas de M e $\bar{M}$, respectivamente, a *Equação de Gauss* é dada por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle.$$

Em particular, se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)Y, X \rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\bar{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_p M$, a equação de Gauss torna-se

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle.$$

Por outro lado, considerando a componente normal de $\bar{R}(X, Y)Z$, obtemos

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) \quad (\text{Equação de Codazzi}). \quad (1.3)$$

Observamos que $\nabla^\perp$ pode ser vista como uma conexão no fibrado vetorial $\mathcal{L}_2(TM \times TM, TM^\perp)$.

Denotaremos por $R^\perp$ o tensor curvatura do fibrado normal $TM^\perp$, isto é,

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

Então, a Equação de Ricci é dada por

$$(\overline{R}(X, Y)\eta)^\perp = R^\perp(X, Y)\eta + \alpha(\mathcal{A}_\eta X, Y) - \alpha(X, \mathcal{A}_\eta Y),$$

ou equivalentemente,

$$\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle - \langle [\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_\varepsilon]X, Y \rangle,$$

onde $\varepsilon \in TM^\perp$ e $[\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_\varepsilon] = \mathcal{A}_\eta \mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{A}_\eta$. Além disso, a Equação de Codazzi pode ser escrita como

$$(\overline{R}(X, Y)\eta)^T = (\nabla_Y \mathcal{A})(X, \eta) - (\nabla_X \mathcal{A})(Y, \eta),$$

A seguir consideraremos o caso em que $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c . Neste caso, o tensor curvatura é dado por

$$\overline{R}(X, Y) = c(X \wedge Y),$$

onde $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y$, com $Z \in T\overline{M}$. Então, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são respectivamente:

$$\begin{aligned} (i) \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle \\ &\quad + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle; \\ (ii) \quad (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) &= (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z), \\ (\nabla_X \mathcal{A})(Y, \eta) &= (\nabla_Y \mathcal{A})(X, \eta); \\ (iii) \quad R^\perp(X, Y)\eta &= \alpha(X, \mathcal{A}_\eta Y) - \alpha(\mathcal{A}_\eta X, Y), \\ \langle R^\perp(X, Y)\eta, \varepsilon \rangle &= \langle [\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}_\varepsilon]X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Note que segue de (iii) que $R_X^\perp = 0$ se, e somente se, existe uma base ortogonal para $T_p M$ que diagonaliza simultaneamente todo $\mathcal{A}_\eta$.

1.4 Espaços de Lorentz

Dados um espaço vetorial V de dimensão finita e uma forma bilinear simétrica não-degenerada $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, se $g(X, Y) = 0$ para todo $Y \in V$ então $X = 0$, definimos o índice μ de g como a dimensão máxima de um subespaço $W \subset V$ tal que $g|_W$ é definida negativa.

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V e $g(e_i, e_j) = \pm \delta_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, n$ dizemos que essa é uma base ortonormal de V e então a matriz de g relativa a essa base será

$(g_{ij}) = (g(e_i, e_j)) = (\delta_{ij}\varepsilon_j)$, onde $\varepsilon_j = g(e_j, e_j)$. Ordenamos os vetores de uma base ortonormal de modo que os sinais negativos apareçam em primeiro lugar na listagem $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Esta listagem é chamada de assinatura da forma g .

Definimos o espaço de Lorentz $\mathbb{L}^n$, como sendo o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido com a forma bilinear simétrica não-degenerada $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ dada por

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Desta forma, podemos considerar um vetor $Z \in \mathbb{L}^n$ tal que $\langle\langle Z, Z \rangle\rangle < 0$, e afirmarmos que: a forma $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_{(span[Z])^\perp}$ é positiva definida (e portanto não-degenerada), de índice 1 e $\mathbb{L}^n = span[Z] \oplus (span[Z])^\perp$. Ademais, se W é um subespaço de $\mathbb{L}^n$, então $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle|_W$ é não-degenerada e de índice 1, se e somente se, é uma forma definida positiva.

1.5 Estrutura Complexa

Seja V um espaço vetorial real com uma estrutura complexa J , isto é, um homomorfismo linear em V satisfazendo $J^2 = -I$, onde I é a aplicação identidade em V . Isto permite-nos considerar V como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com a operação $\lambda X = (a + ib)X = aX + bJX$, para todo $X \in V$ e $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$. Sendo assim, a dimensão real de V deve ser par, digamos que $dim_{\mathbb{C}}V = n$, então $dim_{\mathbb{R}}V = 2n$. Por outro lado, se V é um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n , e J é o endomorfismo linear em V definido por $JX = iX$, para todo $X \in V$. Considerando V como espaço vetorial real de dimensão $2n$, então J é a estrutura complexa de V .

Quanto a estrutura complexa J em V como espaço vetorial real. Podemos estender J a um endomorfismo linear complexo em $V^{\mathbb{C}} = \{X + iY; X, Y \in V\}$, também denotado por J , bastando definir $J(X + iY) := JX + iJY$.

Assumindo que a dimensão real de V é $2n$ e com estrutura complexa J , podemos obter elementos $X_1, \dots, X_n$ de V tais que $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$ é uma base de V . Além disso, uma base de $V^{\mathbb{C}}$ é obtida quando consideramos os vetores

$$Z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k - iJX_k) \quad \text{e} \quad \overline{Z}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_k + iJX_k), \quad (k = 1, \dots, n).$$

De fato, o conjunto $\{Z_1, \dots, Z_n, \overline{Z_1}, \dots, \overline{Z_n}\}$ é uma base de $V^{\mathbb{C}}$, $\dim V^{\mathbb{C}} = \dim_R V = 2n$,

$$\begin{aligned} J(Z_k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iJ^2X_k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iX_k) = iZ_k, \\ J(\overline{Z_k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k + iJ^2X_k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(JX_k - iX_k) = -i\overline{Z_k}. \end{aligned}$$

Assim, i e $-i$ são os autovalores correspondentes aos autovetores Z_k e $\overline{Z_k}$, respectivamente. Portanto J é diagonalizável (i e $-i$ tem multiplicidade n). Vamos denotar os autoespaços correspondentes aos autovalores i e $-i$, respectivamente, por

$$V^{(1,0)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = iZ\} \quad \text{e} \quad V^{(0,1)} = \{Z \in V^{\mathbb{C}}; JZ = -iZ\}.$$

Baseado nas considerações feitas anteriormente, podemos assegurar que

$$V^{(1,0)} = \{X - iJX; X \in V\} \quad \text{e} \quad V^{(0,1)} = \{X + iJX; X \in V\},$$

o que vai implicar na soma direta: $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

Agora vamos indicar por $T^{\mathbb{C}}M = \{X + iY; X, Y \in TM\}$ a complexificação do fibrado tangente de uma superfície M . Como já vimos, a extensão de J ao fibrado tangente complexificado pode ser diagonalizada tendo i e $-i$ como autovalores. Os autoespaços associados a eles serão denotados por $T^{(1,0)}$ e $T^{(0,1)}$. Seja x uma imersão isométrica de M em uma variedade Riemanniana N , α a segunda forma de x e H o seu vetor curvatura média.

Sejam (u, v) parâmetros isotérmicos em um aberto $U \subset M$ com $\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle = 0$ e $\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle = \lambda^2 = \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle$. Estaremos considerando $z = u + iv$, $dz = du + idv$, $d\bar{z} = du - idv$,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \overline{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Finalizaremos este capítulo com o lema a seguir o qual já é bem conhecido na literatura e dispensa demonstração.

Lema 1.1 *Propriedades elementares dos campos Z e $\overline{Z}$.*

- (i) $\langle Z, \overline{Z} \rangle = \lambda^2, \quad \langle Z, Z \rangle = 0 = \langle \overline{Z}, \overline{Z} \rangle;$
- (ii) $\nabla_{\overline{Z}}Z = 0 = \nabla_Z\overline{Z};$
- (iii) $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$. Em particular, $\alpha(Z, \overline{Z}) = \lambda^2 H$.

Demonstração:(i)

$$\begin{aligned}\langle Z, \bar{Z} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^2) = \lambda^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle Z, Z \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle) = 0\end{aligned}$$

(ii)

Com efeito, sejam e_1, e_2 vetores unitarios na direcao de $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$ respectivamente, observe que pelo item (i) $\langle Z, Z \rangle = 0$ e assim $\bar{Z}\langle Z, Z \rangle = 0$. Uma vez que Z e $\bar{Z}$ formam uma base para $TM = \{X + iY : X, Y \in TM\}$, entao $\nabla_{\bar{Z}}Z = Z_1Z + Z_2\bar{Z}$, onde Z_1 e $Z_2 \in \mathbb{C}$. Portanto,

$$\begin{aligned}0 &= \langle \nabla_{\bar{Z}}Z, Z \rangle \\ &= \langle Z_1Z + Z_2\bar{Z}, Z \rangle \\ &= Z_1\langle Z, Z \rangle + Z_2\langle Z, \bar{Z} \rangle \\ &= Z_2\langle Z, \bar{Z} \rangle,\end{aligned}$$

Como $\langle Z, \bar{Z} \rangle = \frac{\lambda^2}{2}(\langle e_1, e_1 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle) = \lambda^2 \neq 0$, entao $Z_2 = 0$ e isto implica $\nabla_{\bar{Z}}Z = Z_1Z$. Por outro lado, fazendo um calculo analogo com $\langle \bar{Z}, \bar{Z} \rangle$, encontramos $\nabla_Z\bar{Z} = Z'_2\bar{Z}$.

Como $[Z, \bar{Z}] = 0 \Rightarrow \nabla_{\bar{Z}}Z = \nabla_Z\bar{Z}$. O que implica que $Z_1Z = Z'_2\bar{Z}$ e sendo os vetores Z e $\bar{Z}$ linearmente independentes, temos $Z_1 = Z'_2 = 0$, o que demonstra que $\nabla_{\bar{Z}}Z = 0$.

$$\begin{aligned}\langle \bar{Z}, \bar{Z} \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \rangle) = 0\end{aligned}$$

(iii) Seja $E = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2)$ onde e_1 e e_2 são os vetores unitários de $\frac{\partial}{\partial u}$ e $\frac{\partial}{\partial v}$, respectivamente.

$$\alpha(E, \bar{E}) = \alpha\left(\frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}, \alpha e_1 + ie_2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}(\alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2)) = H$$

Qualquer vetor complexo em M é dado por $X = aE$, onde a é um número complexo. Assim se $Y = bE$, obtemos

$$\alpha(X, \overline{Y}) = \alpha(aE, \overline{bE}) = a\overline{b}\alpha(E, \overline{E}) = \langle X, \overline{Y} \rangle H.$$

□

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

Ao longo deste trabalho estaremos considerando diversas vezes a noção de direção umbílica de uma imersão dada. Esta se trata de uma direção indicada por um campo v no fibrado normal cujo operador de forma seja do tipo $A_v = \lambda(p)I$.

Indicaremos por $\xi : E^n(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção natural sobre $\mathbb{R}$ isto é $\xi(p, t) = t$, $p \in E^n(c)$, $t \in \mathbb{R}$ e identificaremos, para simplificar a notação, ξ com sua diferencial $d\xi$

Definição 2.1 *Seja E um fibrado sobre uma variedade B munido de uma conexão ∇ . Dizemos que um subfibrado $E' \subset E$ é paralelo na conexão ∇ se E' é invariante na conexão ∇ .*

Definição 2.2 *Seja U um vetor de $TM^\perp$, dizemos que U é paralelo se $\nabla^\perp U = 0$. Se o vetor curvatura média de uma imersão é paralelo, dizemos que a imersão é pmc.*

Lema 2.1 *Uma imersão $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ está contida em uma esfera se, e somente se, existe um campo normal unitário v paralelo na conexão do fibrado normal tal que $A_v = \lambda I$ para alguma função real $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ não nula.*

Demonstração: Se $f(M) \subset \mathbb{S}_r^{n+m-1}$, suponhamos sem perda de generalidade que 0 é o centro de $\mathbb{S}_r$. Como localmente f é um mergulho identificaremos localmente M com $f(M)$.

Sendo p o vetor posição então $v(p) = \frac{p}{r}$ é o campo que buscamos. Observe que v é unitário pois $|p| = r$. Se considerarmos um campo tangente $X \in TM$ qualquer, então

de $X\langle v, v \rangle = 0$ obtemos então que $\bar{\nabla}_X v \perp v$. Portanto, usando que $\mathbb{S}_r$ é umbílica e que a tal esfera tem dimensão uma a menos que o espaço euclidiano temos

$$\bar{\nabla}_X v = -A_v^s X = \lambda X \Rightarrow \bar{\nabla}_X v \in T_p M,$$

onde A_v^s é o operador de forma da imersão de $\mathbb{S}_r$ em $\mathbb{R}^{n+m}$. Por outro lado

$$\bar{\nabla}_X v = -A_v X + \nabla_X^\perp v,$$

onde A_v é o operador de forma da imersão e $\nabla^\perp$ é a conexão no fibrado normal da imersão. Assim

$$-A_v X + \nabla_X^\perp v \in T_p M.$$

Consequentemente $A_v X = -\lambda X$ e $\nabla_X^\perp v = 0$.

Reciprocamente se $v \in TM^\perp$ e $|v| = 1$, $\nabla^\perp v = 0$ e $A_v = \lambda I$ com $\lambda \neq 0$.

Seja p o vetor posição, então vamos definir a função ϕ localmente em M

$$\phi(p) = p - \lambda^{-1} v.$$

Se mostrarmos que λ é constante então

$$\begin{aligned} \phi'(p)X &= I_p X - X(\lambda^{-1})v - \lambda^{-1} dv_p X \\ &= (X - \lambda^{-1} dv_p X) - X(\lambda^{-1})v \\ &= (I_p - \lambda^{-1} dv_p)X - X(\lambda^{-1})v \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a derradeira igualdade acima é obtida de

$$dv_p X = \bar{\nabla}_X v(p) = -A_v X(p) + \nabla_X^\perp v(p) = \lambda I_p X.$$

Pois v é uma direção umbílica e paralela na conexão do fibrado normal. Assim as funções ϕ e λ são constantes e temos

$$|p - \phi(p)| = |\lambda^{-1} v| = |\lambda^{-1}|.$$

Isto significa que a imersão está contida numa esfera de raio $|\frac{1}{\lambda}|$ e centro p .

Veamos agora que λ é constante. Note que:

$$\delta_{ik} \lambda = \langle A_v e_i, e_k \rangle = \langle \alpha(e_i, e_k), v \rangle,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de TM . Façamos $k = i$ e fixemos um valor de i , precisamos mostrar que para todo $1 \leq j \leq n$ $e_j(\lambda) = 0$. Começamos observando que vale:

$$e_j(\lambda) = e_j \langle \alpha(e_i, e_i), v \rangle = \langle \nabla_{e_j}^\perp \alpha_{ii}, v \rangle + \langle \alpha_{ii}, \nabla_{e_j}^\perp v \rangle = \langle \nabla_{e_j}^\perp \alpha_{ii}, v \rangle,$$

onde na última igualdade usamos que v é campo paralelo. Agora se $i \neq j$ então usando a equação de Codazzi no espaço euclidiano:

$$\begin{aligned} e_j(\lambda) &= \langle (\nabla_{e_j}^\perp \alpha)(e_i, e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_j} e_i, e_i), v \rangle \\ &= \langle (\nabla_{e_i}^\perp \alpha)(e_j, e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_j} e_i, e_i), v \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i}^\perp \alpha_{ij} - \alpha(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - \alpha(e_i, \nabla_{e_i} e_j) + 2\alpha(\nabla_{e_j} e_i, e_i), v \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i}^\perp \alpha_{ij}, v \rangle - \langle \alpha(\nabla_{e_i} e_i, e_j), v \rangle - \langle \alpha(e_i, \nabla_{e_i} e_j), v \rangle + 2\langle \alpha(\nabla_{e_j} e_i, e_i), v \rangle. \end{aligned}$$

Observe agora que $\langle \alpha_{ij}, v \rangle = 0 = \langle e_i, e_j \rangle$ implicam que

$$\langle \nabla_{e_i} \alpha_{ij}, v \rangle = -\langle \alpha_{ij}, \nabla_{e_i}^\perp v \rangle = 0, \quad (2.1)$$

$$\langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle. \quad (2.2)$$

Portanto temos também

$$\begin{aligned} \langle \alpha(e_i, \nabla_{e_i} e_j), v \rangle &= \langle A_v e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle = \lambda \langle e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle \\ \langle \alpha(\nabla_{e_i} e_i, e_j), v \rangle &= \langle A_v e_j, \nabla_{e_i} e_i \rangle = \lambda \langle e_j, \nabla_{e_i} e_i \rangle. \end{aligned}$$

Desse modo temos $\langle \alpha(e_i, \nabla_{e_i} e_j), v \rangle = -\langle \alpha(\nabla_{e_i} e_i, e_j), v \rangle$ e

$$\langle \alpha(\nabla_{e_j} e_i, e_i), v \rangle = \langle A_v e_i, \nabla_{e_j} e_i \rangle = \lambda \langle e_i, \nabla_{e_j} e_i \rangle = 0. \quad (2.3)$$

Consequentemente obtemos $e_j(\lambda) = 0$ para todo j diferente do i fixado. Para o caso $j = i$, basta de início fixarmos outro valor para i e recairemos na situação anterior. $\square$

A seguir enunciaremos e apresentaremos uma prova alternativa de um conhecido resultado devido à Yau.

Teorema 2.1 (Teorema de Yau) *Seja $f : M^2 \rightarrow E^n(c)$ uma imersão de uma superfície com curvatura média paralela $H \neq 0$, onde $E^n(c)$ é uma variedade riemanniana de curvatura seccional contante c . Então uma das seguintes condições ocorre:*

1. $f(M)$ é mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $E^n(c)$;
2. $f(M)$ é uma superfície com curvatura média constante de uma subvariedade tridimensional totalmente geodésica de $E^n(c)$;
3. $f(M)$ é uma superfície com curvatura média constante de uma subvariedade tridimensional totalmente umbílica de $E^n(c)$;

Demonstração: Caso $c = 0$. Primeiro vamos admitir que H seja uma direção umbílica, então $v = \frac{H}{|H|}$ também é uma direção umbílica, unitária e paralela. De fato,

$$X\langle H, H \rangle = \langle \nabla_X^\perp H, H \rangle + \langle H, \nabla_X^\perp H \rangle = 0,$$

e portanto $|H|^2 = \text{constante}$ e assim $\nabla_X^\perp v = 0$. De acordo com o Lema 2.1 a imersão está contida em um esfera. Em seguida, consideremos $f = \tilde{f} \circ i$, onde $\tilde{f} : M^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^{n-1}$ e $i : \mathbb{S}_r^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Então $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, onde α , α_1 e α_2 são respectivamente as segundas formas da imersão original f , da imersão $\tilde{f}$ e da inclusão i . Consequentemente, $H = \tilde{H} + H_i$, onde H é a curvatura média da imersão f , $\tilde{H}$ a curvatura média da imersão $\tilde{f}$ e H_i a curvatura média da inclusão. Como foi visto na demonstração do Lema 2.1, $H_i \parallel v$ segue-se que $H = H_i$, logo $\tilde{H} \equiv 0$. Isto prova que ocorre o item 1.

Agora vamos analisar o caso em que H não seja uma direção umbílica. Nesta situação, como $\bar{R} = 0$ e $R^\perp(\cdot, \cdot)H \equiv 0$ (pois H é paralelo na conexão do fibrado normal), teremos imediatamente pela equação de Ricci que $[A_H, A_v] \equiv 0$. Logo, A_v e A_H comutam, para todo $v \in TM^\perp$. Fixando-se um v , tem-se que existe um referencial ortonormal $\{e_1, e_2\}$ em TM , que diagonaliza A_H e A_v simultaneamente. Como a dimensão deste referencial é dois e H não é uma direção umbílica, este mesmo referencial diagonaliza $A_w \forall w \in TM^\perp$. Isto é, a segunda forma α é diagonalizada neste referencial, e assim, $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$. Logo, a dimensão do subfibrado gerado pela imagem de α é no máximo 2, quando então os geradores dele são α_{11} e α_{22} . Precisamos que a imagem de α esteja num subfibrado paralelo.

Mostraremos que tal subfibrado é $W := TM \oplus_w \text{Span}(\text{Im}(\alpha))$. Vejamos: da equação de Weingarten

$$\bar{\nabla}_{e_k} \alpha_{ii} = -A_{\alpha_{ii}} e_k + \nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii}.$$

Assim, é suficiente mostrar que $\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} \in \text{Span}(\text{Im}(\alpha))$. Por outro lado, temos que

$$\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} = (\nabla_{e_k}^\perp \alpha)(e_i, e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_k} e_i, e_i).$$

Logo, se $i \neq k$, $\alpha_{ki} \equiv 0$ e pela equação de Codazzi obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} &= (\nabla_{e_i}^\perp \alpha)(e_k, e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_k} e_i, e_i) \\ &= \alpha(\nabla_{e_i} e_k, e_i) + \alpha(e_k, \nabla_{e_i} e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_k} e_i, e_i).\end{aligned}$$

Logo $\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} \in \text{Span}(Im(\alpha))$.

Agora, para o caso $i = k$, como H é paralelo na conexão do fibrado normal, segue-se que

$$\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} + \nabla_{e_k}^\perp \alpha_{jj} = 2\nabla_{e_k}^\perp H = 0.$$

Donde,

$$\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} = -\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{jj} \in \text{Span}(Im(\alpha)) \text{ pois } j \neq k.$$

Sendo assim, apenas duas situações podem ocorrer:

A primeira é que α_{11} é múltiplo de α_{22} . Nesse caso o $\text{Span}(Im(\alpha))$ tem dimensão 1 e, pelo Teorema de Erbacher, $f(M)$ está contida em um subespaço afim (subvariedade totalmente geodésica no caso geral) de dimensão 3. Observando que a segunda forma fundamental é preservada em subvariedades totalmente geodésicas, e portanto a imersão aí também é pmc mas como a codimensão agora é um teremos, em verdade, que ela é cmc. Ademais,

$$0 = \nabla^\perp \alpha_{11} + \nabla^\perp \alpha_{22} = \nabla^* \alpha_{11} + (\nabla^\perp \alpha_{11})^P + \nabla^* \alpha_{22} + (\nabla^\perp \alpha_{22})^P = 2\nabla^* H.$$

onde, $(\nabla^\perp \alpha_{11})^P$ é a projeção ortogonal no espaço normal à imagem de α .

Logo, H é constante em P .

A segunda é que α_{11} não é múltiplo de α_{22} . Tomemos v unitário tal que $(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \perp v$. Provaremos que v é direção umbílica, ou seja, que $A_v = \lambda I$. Vamos primeiramente mostrar que $\nabla^\perp(\alpha_{11} - \alpha_{22})$ é múltiplo de $\alpha_{11} - \alpha_{22}$. Como $\nabla_X^\perp \alpha_{11} = -\nabla_X^\perp \alpha_{22}$ teremos

$$\nabla_X^\perp(\alpha_{11} - \alpha_{22}) = \nabla_X^\perp \alpha_{11} - \nabla_X^\perp \alpha_{22} = -2\nabla_X^\perp \alpha_{22}, \quad \forall X.$$

Por outro lado, $\langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle = 0$ e $\nabla_{e_1}^\perp \alpha_{22} = (\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_2) + 2\alpha(\nabla_{e_1} e_2, e_2)$. Logo, $\nabla_{e_1} e_2$ é um múltiplo de e_1 . Podemos então escrever $\nabla_{e_1} e_2 = w e_1$, onde $w = \langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle$. Assim $2\alpha(\nabla_{e_1} e_2, e_2) = 2w\alpha(e_1, e_2) = 0$, e portanto $\nabla_{e_1}^\perp \alpha_{22} = (\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_2)$. Por Codazzi teremos

$$\nabla_{e_1}^\perp \alpha_{22} = (\nabla_{e_2}^\perp \alpha)(e_1, e_2) \stackrel{=0}{=} \nabla_{e_2}^\perp \alpha(e_1, e_2) - \alpha(\nabla_{e_2} e_1, e_2) - \alpha(e_1, \nabla_{e_2} e_2).$$

Mas $\nabla_{e_2} e_1 = \overbrace{\langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle}^w e_2$, e $\nabla_{e_2} e_2 = \overbrace{\langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle}^{-w} e_1$ (pois $e_2 \langle e_1, e_2 \rangle = 0$).

$$\nabla_{e_1}^\perp \alpha_{22} = -\alpha(we_2, e_2) - \alpha(e_1, -we_1) = -w\alpha_{22} + w\alpha_{11} = w(\alpha_{11} - \alpha_{22}).$$

Analogamente, $\nabla_{e_2}^\perp(\alpha_{11} - \alpha_{22}) = -2\langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle(\alpha_{11} - \alpha_{22})$. Assim, v é paralelo.

Umbilicidade: $\langle v, \alpha_{11} - \alpha_{22} \rangle = 0 \rightarrow \langle A_v(e_1), e_1 \rangle = \langle A_v(e_2), e_2 \rangle = \lambda$. Agora, de $\langle v, \alpha_{12} \rangle = \langle v, \alpha_{21} \rangle = \langle A_v(e_1), e_2 \rangle = \langle A_v(e_2), e_1 \rangle = 0$ obtemos que $A_v = \lambda I$. Isto conclui a prova para o caso $c = 0$.

Finalmente, para os casos $c = 1$ ou $c = -1$, podemos reduzir ao caso $c = 0$ observando-se que sendo pmc as imersões $f : M^2 \rightarrow E^n(c)$ e $i : E^n(c) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}(\mathbb{L}^{n+1})$, então a composta $f \circ i$ também será pmc. onde $\mathbb{L}^{n+1}$ é o espaço de Lorenz. Com efeito, como temos $\alpha(X, Y) = \alpha_2(X, Y) - \alpha_1(X, Y)$, então $H = H_2 - H_1$. Mas H e H_1 são paralelos nas conexões $\nabla^\perp$ e ${}^i\nabla^\perp$ respectivamente, então H_2 vai ser paralelo quando calculada na conexão ${}^{i \circ f}\nabla^\perp$ e disso segue-se o resultado pretendido.

□

Lema 2.2 *Seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma superfície M . Admita que um subfibrado L do fibrado normal contém a imagem da segunda forma fundamental, seja paralelo na conexão do fibrado normal e que $V = TM \oplus L$ seja invariante pelo tensor curvatura $\tilde{R}$ de $E^n(c) \times \mathbb{R}$ no seguinte sentido: Se $A, B, C \in V$ temos que $\tilde{R}(A, B)C \in V$. Então existe uma subvariedade totalmente geodésica $S \subset E^n(c) \times \mathbb{R}$ com $T_p S = V$ para todo $p \in S$ e $x(M) \subset S$.*

Demonstração: Afirmamos que $E^n(c) \times \mathbb{R}$ com a conexão de Levi-Civita da métrica produto é um espaço homogêneo redutível. De fato, o espaço $E^n(c) \times \mathbb{R}$ é simétrico e isso implica homogêneo redutível. Assim este resultado segue do Teorema 2 em [16]. □

Lema 2.3 *A expressão para o tensor curvatura $\tilde{R}$ de $E^n(c) \times \mathbb{R}$ é*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(A, B)C, D \rangle &= c\{(\langle A, C \rangle - \langle A_2, C_2 \rangle)(\langle B, D \rangle \langle B_2, D_2 \rangle) \\ &\quad - (\langle A, D \rangle - \langle A_2, D_2 \rangle)(\langle B, C \rangle \langle B_2, C_2 \rangle)\} \\ &= c\{(\langle A, C \rangle - \langle A, \xi \rangle \langle C, \xi \rangle)(\langle B, D \rangle - \langle B, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle) \\ &\quad - (\langle A, D \rangle - \langle A, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle)(\langle B, C \rangle - \langle B, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle)\}, \end{aligned}$$

onde X_2 denota a projeção de X no segundo fator, ou seja, $X_2 = \langle X, \xi \rangle \xi$.

Demonstração: Em variedades produto $\tilde{R} \equiv R_1 + R_2$ onde R_1 é o tensor curvatura do primeiro fator e R_2 o tensor curvatura do segundo. Sendo o primeiro fator $E^n(c)$ e o segundo R , então $R_2 \equiv 0$ e

$$\langle \tilde{R}(A, B)C, D \rangle = c\{\langle \pi A, \pi C \rangle \langle \pi B, \pi D \rangle - \langle \pi A, \pi D \rangle \langle \pi B, \pi C \rangle\}, \quad (2.4)$$

Onde π denota a projeção no espaço tangente de $E^n(c)$ e $\pi X = X - X_2$ e portanto

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(A, B)C, D \rangle &= c\{\langle A - A_2, C - C_2 \rangle \langle B - B_2, D - D_2 \rangle \\ &\quad - \langle A - A_2, D - D_2 \rangle \langle B - B_2, C - C_2 \rangle \\ &= c\{(\langle A, C \rangle - \langle A, C_2 \rangle - \langle A_2, C \rangle + \langle A_2, C_2 \rangle)(\langle B, D \rangle \\ &\quad - \langle B, D_2 \rangle - \langle B_2, D \rangle + \langle B_2, D_2 \rangle) \\ &\quad - (\langle A, D \rangle - \langle A, D_2 \rangle - \langle A_2, D \rangle + \langle A_2, D_2 \rangle)(\langle B, D \rangle \\ &\quad - \langle B, D_2 \rangle - \langle B_2, D \rangle + \langle B_2, D_2 \rangle)\}. \end{aligned}$$

Observemos agora que $\langle X, Y_2 \rangle = \langle X_2, Y \rangle = \langle X_2, Y_2 \rangle$, pois

$$\begin{aligned} \langle X, Y_2 \rangle &= \langle X, \langle Y, \xi \rangle \xi \rangle = \langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle, \\ \langle X_2, Y \rangle &= \langle \langle X, \xi \rangle \xi, Y \rangle = \langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle, \\ \langle X_2, Y_2 \rangle &= \langle \langle X, \xi \rangle \xi, \langle Y, \xi \rangle \xi \rangle = \langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle = \langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle \end{aligned}$$

e assim temos:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}(A, B)C, D \rangle &= c\{(\langle A, C \rangle - \langle A_2, C_2 \rangle)(\langle B, D \rangle \langle B_2, D_2 \rangle) \\
&\quad - (\langle A, D \rangle - \langle A_2, D_2 \rangle)(\langle B, C \rangle \langle B_2, C_2 \rangle)\} \\
&= c\{(\langle A, C \rangle - \langle \langle A, \xi \rangle \xi, \langle C, \xi \rangle \xi \rangle)(\langle B, D \rangle \\
&\quad - \langle \langle B, \xi \rangle \xi, \langle D, \xi \rangle \xi \rangle) \\
&\quad - (\langle A, D \rangle - \langle \langle A, \xi \rangle \xi, \langle D, \xi \rangle \xi \rangle)(\langle B, C \rangle \\
&\quad - \langle \langle B, \xi \rangle \xi, \langle C, \xi \rangle \xi \rangle)\} \\
&= c\{(\langle A, C \rangle - \langle A, \xi \rangle \langle C, \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle)(\langle B, D \rangle \\
&\quad - \langle B, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle) \\
&\quad - (\langle A, D \rangle - \langle A, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle)(\langle B, C \rangle \\
&\quad - \langle B, \xi \rangle \langle C, \xi \rangle \langle \xi, \xi \rangle)\} \\
&= c\{(\langle A, C \rangle - \langle A, \xi \rangle \langle C, \xi \rangle)(\langle B, D \rangle - \langle B, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle) \\
&\quad - (\langle A, D \rangle - \langle A, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle)(\langle B, C \rangle - \langle B, \xi \rangle \langle D, \xi \rangle)\},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

que completa a prova do lema. $\square$

Lema 2.4 *Consideremos uma imersão isométrica $M \looparrowright E^n(c) \times \mathbb{R}$. Sejam U e V campos normais a M , sendo V paralelo, então os operadores de forma A_V e A_U comutam, ou seja $[A_V, A_U] = 0$.*

Demonstração: Da equação de Ricci temos que

$$\langle R^\perp(X, Y)V, U \rangle = \langle [A_V, A_U]X, Y \rangle + \langle \tilde{R}(X, Y)V, U \rangle.$$

Sendo V paralelo temos

$$R^\perp(X, Y)V = 0.$$

Usando a equação (2.6) e usando que U e V são campos normais, obtemos $\langle \tilde{R}(X, Y)V, U \rangle = 0$ e conseqüentemente $[A_V, A_U] = 0$. $\square$

Corolário 2.1 *Seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão de uma superfície M com vetor curvatura média paralelo (pmc). Então para todo vetor $v \in TM^\perp$, os operadores de forma A_H e A_v comutam.*

Corolário 2.2 *Se H não é uma direção umbílica, ou seja se A_H não é múltiplo do operador identidade, então existe uma base que diagonaliza A_v para todo $v \in TM^\perp$.*

Lema 2.5 *Se H é paralelo e não é uma direção umbílica em um conjunto aberto de M , então existe um subfibrado do fibrado total que seja paralelo, contenha a imagem da segunda forma α e tenha dimensão no máximo cinco.*

Demonstração: A demonstração será feita em um aberto e então se estende para toda superfície usando a analiticidade e conexidade da imersão.

Seja $V = TM \oplus_W L$, o subfibrado do fibrado total, onde $L = \text{span}\{Im(\alpha) \cup \xi\}$. Mostraremos que L é $\tilde{\nabla}$ -paralelo. De acordo com o Corolário 2.2, como H não é uma direção umbílica, então existe uma base ortonormal de TM que diagonaliza A_V para todo $V \in TM$, ou seja, uma base ortonormal que diagonaliza a segunda forma fundamental α . Seja $\{e_1, e_2\}$ esta base, como ξ é paralelo na conexão $\tilde{\nabla}$ e $\alpha_{12} = \alpha(e_1, e_2) = 0$, tudo que precisamos provar é que para cada $i, k = 1, 2$ vale $\tilde{\nabla}_{e_k} \alpha_{ii} \in V$.

Se $i \neq k$, podemos escrever pela equação de Weingarten

$$\tilde{\nabla}_{e_k} \alpha_{ii} = -A_{\alpha_{ii}} e_k + \nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii}.$$

Por outro, lado temos que

$$\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} = (\nabla_{e_k}^\perp \alpha)(e_i, e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_k} e_i, e_i).$$

Consideramos agora o caso $i \neq k$. Pela equação de Codazzi obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} &= (\tilde{R}(e_k, e_i)e_i)^\perp + (\nabla_{e_i}^\perp \alpha)(e_k, e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_k} e_i, e_i) \\ &= (\tilde{R}(e_k, e_i)e_i)^\perp + \nabla_{e_i}^\perp \alpha_{ki} + \alpha(\nabla_{e_i} e_k, e_i) \\ &\quad + \alpha(e_k, \nabla_{e_i} e_i) + 2\alpha(\nabla_{e_k} e_i, e_i). \end{aligned}$$

Todavia

$$\begin{aligned} \tilde{R}(A, B)C &= c(\langle \pi A, \pi C \rangle \pi B - \langle \pi B, \pi C \rangle \pi A) \\ &= c\{\langle \pi A, \pi C \rangle (B - B_2) - \langle \pi B, \pi C \rangle (A - A_2)\} \\ &= c\{\langle \pi A, \pi C \rangle (B - \langle B, \xi \rangle \xi) - \langle \pi B, \pi C \rangle (A - \langle A, \xi \rangle \xi)\}. \end{aligned}$$

Consequentemente temos:

$$(\tilde{R}(e_i, e_k)C)^\perp = c\{\langle \pi e_i, \pi C \rangle \langle e_k, \xi \rangle \xi^\perp - \langle \pi e_k, \pi C \rangle \langle e_i, \xi \rangle \xi^\perp\} \in V$$

No caso $i = k$, temos $\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} = 2\nabla_{e_k}^\perp H = 0$, já que H é $\nabla^\perp$ -paralelo. Logo $\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{ii} = -\nabla_{e_k}^\perp \alpha_{jj} \in V$, pois reduzimos à situação anterior.

Como podemos observar na expressão acima

$$(\tilde{R}(A, B)C)$$

é obtida em termos de A, B e ξ que estão em V , assim obtemos que V é invariante por $\tilde{R}$.

Pelo Lema 2.2 temos que existe uma subvariedade totalmente geodésica $S \subset E^n(c) \times \mathbb{R}$ com $T_p S = V$ para cada $p \in S$ e $M \subset S$ com dimensão de S sendo no máximo 5. Uma vez que V contém ξ , a subvariedade S é em verdade $E^4(c) \times R$, o que demonstra o lema. $\square$

Lema 2.6 *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa definida em um aberto do plano complexo que contém a origem $z = 0$. Admita que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) \cdot |f(z)|,$$

onde $h(z)$ é uma função real contínua e não-negativa. Admita ainda que $z = z_0$ é um zero da função f . Então ou $f \equiv 0$ em uma vizinhança $V \subset U$ de z_0 ou

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$$

com $z \in V$, $k \geq 1$ e $f_k(z)$ uma função contínua com $f_k(z_0) \neq 0$.

Demonstração: Podemos assumir que o zero de f ocorre na origem e que U é o disco D de raio R e centro 0. Precisaremos de alguns lemas auxiliares. Usaremos as notações de Chern [5], Hartman e Winter [7] e Carleman [3].

Lema 2.7 *Assuma a hipótese do lema principal e o fato que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$, onde $k \geq 1$. Então existe o limite $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^k}$.*

Lema 2.8 *Assuma a hipótese do lema principal e o fato que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$ onde $k \geq 1$. Então $f \equiv 0$ em uma vizinhança de 0.*

Vejamos que o lema principal é de fato consequência destes dois lemas acima. Com efeito, do Lema (2.8) vemos que se f não é identicamente nula em uma vizinhança de

0, então existe k tal que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{k-1}} = 0$ mas $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^k}$ pode não existir. Pelo Lema (2.7), sabemos entretanto que existe este último limite e assim ele é diferente de zero, digamos $c \in \mathbb{R}$. Logo podemos escrever:

$$f(z) = cz^k + R, \text{ com } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{R}{z^k} = 0$$

ou ainda

$$f(z) = z^k f_k(z), \quad f_k(z) = c + \frac{R}{z^k}$$

De modo que $f_k(0) = c \neq 0$ e isto prova nossa afirmação. Resta agora provarmos os Lemas 2.7 e 2.8. $\square$

Demonstração: [Lema 2.7] A partir de agora nós denotamos por $D_c(\varsigma)$ um disco do plano $\mathbb{C}$ com centro ς e raio c . Seja $w \in D_R(0)$, com $w \neq 0$ e definimos no conjunto $W = D_R(0) - \{D_a(0) \cup D_a(w)\}$ uma forma diferencial

$$\phi = \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz.$$

Uma vez que $\frac{1}{z^r(z-w)}$ é holomorfa em W , nós obtemos

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = -\frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Agora consideremos discos $D_a(0)$ e $D_a(w)$ em $D_R(0)$ e apliquemos o teorema de Stokes,

$$\int \int_W d\phi + \int_{\partial D_R(0)} \phi - \int_{\partial D_a(0)} \phi - \int_{\partial D_a(w)} \phi = 0. \quad (2.7)$$

Vamos explicitamente calcular as integrais acima. Coloquemos $g(z) = \frac{f(z)}{z^r}$ e $z = w + ae^{i\theta}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Então

$$\int_{\partial D_a(w)} \phi = \int_{\partial D_a(w)} \frac{g(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(w + ae^{i\theta})}{ae^{i\theta}} aie^{i\theta} d\theta$$

e também

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(w)} \phi = ig(w) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(w) w^{-r}.$$

A seguir, coloquemos $z = ae^{i\theta}$ e uma vez que por hipótese, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^{r-1}} = 0$, obtemos:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(0)} \phi = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta}) id\theta}{a^{r-1} e^{(r-1)i\theta} (ae^{i\theta} - w)} = 0.$$

Segue que ao tomarmos os limites em (3.1) quando $a \rightarrow 0$ temos

$$-2\pi i f(w) w^{-r} + \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z) dz}{z^r(z-w)} = \int \int_{D_R(0)} \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}, \quad (2.8)$$

onde o limite na integral dupla existe pois o membro esquerdo da equação está bem definido.

Uma vez que a função h no enunciado do Lema principal é contínua, existe $A > 0$ tal que

$$\max_{x \in D_R(0)} h(z) \leq A.$$

Então segue de (2.8)

$$2\pi|f(w)w^{-r}| \leq \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-w|} + \int \int_{D_R(0)} \frac{2A|f(z)|}{|z|^r|z-w|} du \wedge dv \quad (2.9)$$

pois $dz \wedge d\bar{z} = -2idu \wedge dv$, e $z = u + iv$. Agora considere $z_0 \in D$ com $z_0 \neq 0$, multiplique a desigualdade acima por $\frac{1}{|w-z_0|}$, e integremos esta desigualdade com relação a $dx \wedge dy$, onde $w = x + iy$. Então se colocamos $D_\varepsilon = D_R(0) - D_\varepsilon(z_0)$, nós temos:

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \frac{2\pi|f(w)w^{-r}|}{|w-z_0|} dx \wedge dy &\leq \int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-w||w-z_0|} dx \wedge dy \\ + \int_{D_\varepsilon} \int \int_{D_R(0)} \frac{2A|f(z)| du \wedge dv}{|z|^r|z-w||w-z_0|} dx \wedge dy \end{aligned} \quad (2.10)$$

Queremos então fazer uma estimativa para a integral em (2.10). Começamos observando que

$$\frac{1}{|z-w||w-z_0|} = \frac{1}{|z-z_0|} \left| \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w-z_0} \right| \quad (2.11)$$

E que

$$\int_{D_R(0)} \frac{dx \wedge dy}{|z-w|} \leq \int_{D_{2R}(z)} \frac{dx \wedge dy}{|z-w|} = \int_0^{2R} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\rho} = 4\pi R. \quad (2.12)$$

Segue-se que para o primeiro termo do lado direito da desigualdade (2.10) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-w||w-z_0|} dx \wedge dy &\leq \int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-z_0|} \frac{dx \wedge dy}{|w-z_0|} \\ + \int_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-z_0|} \frac{dx \wedge dy}{|z-w|} &\leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-z_0|}, \end{aligned}$$

onde usamos (2.8) e (2.9). De modo similar, para o segundo termo do lado direito de (2.10) obtemos

$$2A \int_{D_\varepsilon} \int \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} \frac{du \wedge dv}{|z-w||w-z_0|} dx \wedge dy \leq 16A\pi R \int \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r|z-z_0|} du \wedge dv.$$

Desse modo podemos reescrever a desigualdade (2.10) como

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{D_\varepsilon} \frac{|f(w)||w|^{-r}}{|w - z_0|} dx \wedge dy &\leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)dz}{|z|^r|z - z_0|} \\ &+ 16A\pi R \int \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|du \wedge dv}{|z|^r|z - z_0|}, \end{aligned}$$

ou ainda

$$(1 - 8AR) \int \int_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r|z - z_0|} du \wedge dv \leq 4R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z - z_0|}. \quad (2.13)$$

Uma vez que A não muda de sinal se R diminui, nós podemos escolher R suficientemente pequeno de modo que $(1 - 8AR) > 0$.

Agora, a integral no membro direito da desigualdade (2.13) é limitada à medida que $z_0 \rightarrow 0$ e portanto o mesmo ocorre com a integral do membro esquerdo. Considerando-se que o integrando cresce monotonicamente à medida que $z_0 \rightarrow 0$, temos que o limite

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \int \int_{D_R(0)} \frac{f(z)}{|z|^r|z - z_0|} du \wedge dv$$

existe. Segue então disto e de (2.9) que $f(w)w^{-r}$ é limitado quando $w \rightarrow 0$. Assim a partir de (2.8) podemos concluir que $f(w)w^{-r}$ existe, como queríamos. $\square$

Demonstração: [Prova do Lema 2.8] Assumamos que f não é identicamente nula em uma vizinhança de 0 e seja z_0 tal que $f(z_0) \neq 0$, com $|z_0| < R$.

Agora, multiplicando (2.9) por $dx \wedge dy$ e integrando, nós obtemos

$$\begin{aligned} &2\pi(1 - 8AR) \int \int_{D_R(0)} |f(w)||w|^{-r} dx dy \\ &\leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r}, \quad \text{para todo } r \geq 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observemos que se colocarmos $D^* = \{z \in D_R(0); |z| \leq |z_0| \text{ e } |f(z)| \geq \frac{|f(z_0)|}{2}\}$, obtemos

$$\begin{aligned} &(1 - 8AR) \int \int_{D_R(0)} |f(z)||z|^{-r} du \wedge dv \geq \\ &(1 - 8AR) \int \int_{D^*} |f(z)||z|^{-r} du \wedge dv \geq \\ &\frac{(1 - 8AR)}{2} |f(z_0)||z_0|^{-r} \text{vol}(D^*) = a|z_0|^{-r}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $a = \frac{1-8AR}{2}|f(z_0)|\text{vol}D^*$.

Por outro lado,

$$4R \int_{\partial D_R(0)} |f(z)| |z|^{-r} |dz| \leq bR^{-r},$$

onde

$$b = 4R \max_{\partial D_R(0)} |f(z)| \int_{\partial D_R(0)} |dz|.$$

Assim temos a partir destas estimativas e de (2.14) que $a|z_0|^{-r} \leq bR^{-r}$, para todo r , onde a e b não dependem de r . Assim, uma vez que $|z_0| < R$,

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{|z_0|}{R} \right)^r = 0.$$

Considerando que $a = \frac{1-8AR}{2} |f(z_0)| \text{vol} D^*$, isto implica que $|f(z_0)| = 0$, uma contradição com a definição de z_0 . Assim completamos a prova do Lema 2.8 e do lema principal. $\square$

Seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica de uma superfície e

$$Q(X, Y) = 2\langle \alpha(X, Y), H \rangle - c\langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle,$$

a forma bilinear simétrica apresentada em [3], onde α é a segunda forma fundamental da imersão, H é o vetor curvatura média e $\xi : E^n(c) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é novamente a projeção $\xi(p, t) = t$.

Vamos considerar parâmetros isotérmicos (u, v) em um conjunto aberto $U \subset M$ e vamos definir $z = u + iv$, $dz = du + idv$, $d\bar{z} = du - idv$. Temos $\langle z, \bar{z} \rangle = \lambda^2$ e $|z| = |\bar{z}| = \lambda$. Portanto:

$$Q(Z, Z) = 2\langle \alpha(Z, Z), H \rangle - c\langle Z, \xi \rangle^2$$

Chamaremos de diferencial de Abresch-Rosenberg generalizada a

$$Q^{(2,0)} = Q(Z, Z)dz^2 = (2\langle \alpha(Z, Z), H \rangle - c\langle Z, \xi \rangle^2)dz^2 \quad (2.16)$$

Lema 2.9 $\bar{Z}\langle Z, \xi \rangle^2 = 2\lambda^2\langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle$.

Demonstração: $\bar{Z}\langle Z, \xi \rangle^2 = 2\langle Z, \xi \rangle (\langle \tilde{\nabla}_{\bar{Z}} Z, \xi \rangle + \langle Z, \tilde{\nabla}_{\bar{Z}} \xi \rangle)$. Como ξ é paralelo, temos

$$\bar{Z}\langle Z, \xi \rangle^2 = 2\langle Z, \xi \rangle \langle \nabla_{\bar{Z}} Z + \alpha(Z, \bar{Z}), \xi \rangle.$$

Usando o item (ii) do Lema 1.1 $\bar{Z}\langle Z, \xi \rangle^2 = 2\langle Z, \xi \rangle \langle \alpha(Z, \bar{Z}), \xi \rangle$.

Usando o item (iii) do Lema 1.1 anterior $\bar{Z}\langle Z, \xi \rangle^2 = 2\langle Z, \xi \rangle \langle \lambda^2 H, \xi \rangle = 2\lambda^2\langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle$.

$\square$

Lema 2.10 *Seja $\tilde{R}$ o tensor curvatura do espaço ambiente $E^n(c) \times \mathbb{R}$, então $\langle \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, H \rangle = c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle$.*

Demonstração: A partir da Equação (2.6) teremos que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, H \rangle &= \\
&= c\{(\langle Z, Z \rangle - \langle Z, \xi \rangle^2)(\langle \bar{Z}, H \rangle - \langle \bar{Z}, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle) \\
&\quad - (\langle Z, H \rangle - \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle)(\langle \bar{Z}, Z \rangle - \langle \bar{Z}, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle)\} \\
&= c\{\langle Z, \xi \rangle^2 \langle \bar{Z}, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle + \lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle - \langle Z, \xi \rangle^2 \langle \bar{Z}, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle\} \\
&= c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle,
\end{aligned}$$

Provando o que queríamos. □

Proposição 2.1 $\bar{Z}Q(Z, Z) = 2\langle \langle Z, \bar{Z} \rangle \nabla_Z^\perp H, H \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp H \rangle$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\bar{Z}Q(Z, Z) &= 2\bar{Z}\langle \alpha(Z, Z), H \rangle - c\bar{Z}\langle Z, \xi \rangle^2 \\
&= 2\langle \nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha(Z, Z), H \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp H \rangle - 2c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle \\
&= 2\langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(Z, Z) + 2\alpha(\nabla_{\bar{Z}} Z, Z), H \rangle - 2c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle \\
&\quad + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp H \rangle.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando o item 2. do Lema acima e usando a equação de Codazzi

$$\begin{aligned}
\bar{Z}Q(Z, Z) &= 2\langle (\nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha)(Z, Z) + \tilde{R}(\bar{Z}, Z) + \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, H \rangle \\
&\quad - 2c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp H \rangle \\
&= 2\langle \nabla_{\bar{Z}}^\perp \alpha(\bar{Z}, Z) - \alpha(\nabla_{\bar{Z}} \bar{Z}, Z) - \alpha(\bar{Z}, \nabla_Z Z), H \rangle \\
&\quad + \langle \tilde{R}(\bar{Z}, Z)Z, H \rangle - 2c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp H \rangle.
\end{aligned}$$

Usando (ii) e (iii) do Lema 1.1 e dos lemas acima obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{Z}Q(Z, Z) &= 2\langle \nabla_{\bar{Z}}^\perp \langle Z, \bar{Z} \rangle H - \langle \nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle H, H \rangle + 2c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle \\
&\quad - 2c\lambda^2 \langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp H \rangle \\
&= 2\langle Z \langle Z, \bar{Z} \rangle H, H \rangle + 2\langle \langle Z, \bar{Z} \rangle \nabla_Z^\perp H, H \rangle - 2\langle \langle \nabla_Z Z, \bar{Z} \rangle H, H \rangle \\
&\quad + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\bar{Z}}^\perp H \rangle.
\end{aligned}$$

E uma vez mais usando (ii) do Lema 1.1, concluímos a demonstração. $\square$

Como consequência imediata temos o seguinte

Corolário 2.3 *Se a imersão x for pmc, então $Q(Z, Z)$ é holomorfa.*

Lema 2.11 *Seja H não nulo, paralelo na conexão do fibrado normal e uma direção umbílica em um aberto de M . Então $\langle X, \xi \rangle = 0$ para todo $X \in TM$. Assim vemos que $TM \subset TE^n(c)$ e consequentemente $x(M) \subset E^n(c)$.*

Demonstração:

Observe que por analiticidade teremos umbilicidade em todo ponto de M .

Consideremos $Q(X, Y) = 2\langle \alpha(X, Y), H \rangle - C\langle X, \xi \rangle \langle Y, \xi \rangle$ a forma bilinear introduzida em [3] e Z como no resultado anterior. Então

$$Q(Z, Z) = 2\langle \alpha(Z, Z), H \rangle - c\langle \xi, Z \rangle^2 = 2\langle A_H Z, Z \rangle - c\langle \xi, Z \rangle^2$$

Sendo H uma direção umbílica

$$\begin{aligned} Q(Z, Z) &= 2\langle A_H(\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})), Z \rangle - c\langle \xi, Z \rangle^2 \\ &= 2\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}), Z \rangle - c\langle \xi, Z \rangle^2 \\ &= 2\langle \lambda Z, Z \rangle - c\langle \xi, Z \rangle^2 = -c\langle \xi, Z \rangle^2. \end{aligned}$$

Além disso, do resultado acima temos que sendo H paralelo, então $Q(Z, Z)$ é holomorfa.

Teremos então que

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{Z}Q(Z, Z) = -c\bar{Z}\langle Z, \xi \rangle^2 \\ &= -2c\langle Z, \xi \rangle \langle \tilde{\nabla}_{\bar{Z}} Z, \xi \rangle \\ &= -2c\langle Z, \xi \rangle \langle \nabla_{\bar{Z}} Z + \alpha(Z, \bar{Z}), \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle, \end{aligned}$$

onde usando $\nabla_{\bar{Z}} Z = 0$ e que $\alpha(Z, \bar{Z}) = \lambda^2 H$ obtemos

$$\langle Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle = 0. \quad (2.18)$$

Derivando a equação acima com relação a Z :

$$(\langle \tilde{\nabla}_Z Z, \xi \rangle + \langle Z, \tilde{\nabla}_Z \xi \rangle) \langle H, \xi \rangle + \langle Z, \xi \rangle (\langle \tilde{\nabla}_Z H, \xi \rangle + \langle H, \tilde{\nabla}_Z \xi \rangle) = 0.$$

Sendo ξ paralelo na conexão do ambiente.

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\nabla}_Z Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle + \langle Z, \xi \rangle \langle \tilde{\nabla}_Z H, \xi \rangle &= 0 \\
\langle \tilde{\nabla}_Z Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle + \langle Z, \xi \rangle \langle -A_H Z + \nabla_Z^\perp H, \xi \rangle &= 0 \\
\langle \tilde{\nabla}_Z Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle - \langle Z, \xi \rangle \langle A_H Z, \xi \rangle &= 0 \\
&\text{pois } H \text{ é paralelo.} \\
\langle \tilde{\nabla}_Z Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle - \lambda \langle Z, \xi \rangle^2 &= 0 \\
&\text{pois } H \text{ é direção umbílica.} \\
\langle \tilde{\nabla}_Z Z, \xi \rangle \langle H, \xi \rangle \langle Z, \xi \rangle - \lambda \langle Z, \xi \rangle^3 &= 0. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Sendo $\lambda \neq 0$ e usando as equações (2.18) e (2.19), obtemos $\langle Z, \xi \rangle = 0$, ou seja

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \xi \right\rangle = 0 = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \xi \right\rangle.$$

E também temos $\langle X, \xi \rangle = 0$ pois $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ geram TM . Isto completa a prova do lema.

□

Capítulo 3

Superfícies PMC em Espaços Produtos

A fim de provar os teoremas, necessitamos dos resultados dados a seguir. Denotaremos daqui em diante a conexão de $E^n(c) \times \mathbb{R}$ por $\tilde{\nabla}$, a conexão de $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}^5$ é possivelmente Lorentz por $\overline{\nabla}$, a conexão do fibrado tangente de $x(M)$ por ∇ e a conexão no fibrado normal de $x(M)$ por $\nabla^\perp$.

Lema 3.1 *Seja M uma superfície e $E^n(c)$ uma variedade riemanniana com curvatura seccional constante $c \neq 0$ e seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média não nulo e paralelo na conexão do fibrado normal. Então ou $x(M) \subset E^n(c)$ ou $x(M) \subset E^4(c) \times \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Se $x(M) \not\subset E^n(c)$ então pelo Lema 2.11 não existe um aberto onde a direção H seja umbílica e assim pelo Lema 2.5, $x(M) \subset E^4(c) \times \mathbb{R}$.

□

Lema 3.2 *Seja M uma superfície e $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média paralelo H e $c \neq 0$. Seja ξ um vetor unitário na direção $\mathbb{R}$. Se H é não é uma direção umbílica em um conjunto aberto da superfície e a projeção normalizada e_1 de ξ no plano tangente é um autovetor de A_H , onde A_H é o operador de forma na direção H , então o subespaço bidimensional $W = \text{span}\{e_2, \overline{\nabla}_{e_2} e_2\}$ é paralelo na conexão*

$\bar{\nabla}$ de $\mathbb{R}^5 \times R \supset E^4(c) \times \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}^5$ é possivelmente Lorentz e $e_2 \in T_p M$ é um vetor unitário ortogonal a e_1 .

Demonstração:

Uma vez que $\{e_1, e_2\}$ é ortonormal, diagonaliza A_H e como H é não-umbílica em um aberto temos de acordo com o Corolário (2.2) que esta base diagonaliza a segunda forma fundamental neste aberto e por analiticidade para toda imersão. Agora, se e_3 é a projeção normalizada de ξ no fibrado normal, nós podemos escrever

$$\xi = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_3. \quad (3.1)$$

De acordo com o Lema (2.5) temos $x(M) \subset E^4(c) \times \mathbb{R}$

Seja η o vetor normal à subvariedade $E^4(c)$ de $\mathbb{R}^5$ (possivelmente de Lorentz) o qual é determinado pela orientação de $E^4(c)$. Como por construção nós já sabemos que $\bar{\nabla}_{e_2} e_2 \in W$, precisamos apenas mostrar que os vetores $\bar{\nabla}_{e_2} \bar{\nabla}_{e_2} e_2$, $\bar{\nabla}_{e_1} \bar{\nabla}_{e_2} e_2$ e $\bar{\nabla}_{e_1} e_2$ pertencem a W .

Por um lado, um cálculo simples fornece a decomposição

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_2 = b e_1 + \alpha_{22} + e \eta.$$

Por outro lado, como $\{e_1, e_2\}$ é ortonormal e diagonaliza α e $E^4(c) \times \mathbb{R}$ é umbílica em $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$, temos

$$\bar{\nabla}_{e_2} (b e_1) = e_2(b) e_1 + b \bar{\nabla}_{e_2} e_1.$$

Usando que $\alpha_{22} \perp e_2$, e novamente que $E^4(c) \times \mathbb{R}$ é umbílica em $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ e e_2 é autovetor, temos que

$$\bar{\nabla}_{e_2} \alpha_{22} = -A_{\alpha_{22}} e_2 + \nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = -|\alpha_{22}|^2 e_2 + \nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22}.$$

Visto que a função e é constante, pois $E^4(c) \times \mathbb{R}$ é umbílica em $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ e que o campo η é paralelo no fibrado normal de $E^4(c) \times \mathbb{R}$, temos

$$\bar{\nabla}_{e_2} (e \eta) = -e^2 e_2.$$

Note agora que, como

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 0,$$

obtemos

$$\nabla_{e_2} e_1 = -\langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle e_2 = -b e_2.$$

Usando agora as condições abaixo satisfeitas conforme veremos nos três lemas exibidos após esta demonstração.

$$e_2(b) = 0 \tag{3.2}$$

$$\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = 0 \tag{3.3}$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = 0, \tag{3.4}$$

então de (3.2) e (3.3) e observando que

$$|\overline{\nabla}_{e_2} e_2|^2 = b^2 + |\alpha_{22}|^2 + e^2,$$

temos

$$\overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = -|\overline{\nabla}_{e_2} e_2|^2 e_2 \in W.$$

Uma vez que $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza α e $E^4(c) \times \mathbb{R}$ é umbílica, temos $\overline{\nabla}_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_2$. Assim, usando (3.4) obtemos $\overline{\nabla}_{e_1} e_2 = 0 \in W$.

Se usamos novamente a expressão para a curvatura (2.6) e $\overline{\nabla}_{e_1} e_2 = 0$ então

$$0 = \overline{R}(e_1, e_2)e_2 = \overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_2} e_2 - \overline{\nabla}_{e_2} \overline{\nabla}_{e_1} e_2 + \overline{\nabla}_{[e_1, e_2]} e_2$$

obtemos

$$\overline{\nabla}_{e_1} \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = -\overline{\nabla}_{[e_1, e_2]} e_2.$$

Além disso, como $[e_1, e_2] = r e_1 + s e_2$, segue-se que $\overline{\nabla}_{[e_1, e_2]} e_2 = r \overline{\nabla}_{e_1} e_2 + s \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = s \overline{\nabla}_{e_2} e_2 \in W$.

□

Nas demonstrações que se seguem, estaremos considerando que $\sin \theta$ e $\cos \theta$ não se anulam em um aberto denso de $x(M)$ e assim, por continuidade, os resultados seguem.

No caso em que $\cos \theta = 0$ em um aberto então, por analiticidade, $x(M) \subset E^4(c)$ e a situação está descrita por Yau [33].

Se $\sin \theta = 0$ em um aberto então, por analiticidade, $x(M) \subset E^2(c) \times \mathbb{R}$ e este caso está descrito no sublemma de [?].

Lema 3.3 *Vamos agora mostrar as seguintes identidades:*

$$(A) \quad \nabla_{e_1} e_1 = 0 = \nabla_{e_1} e_2;$$

$$(B) \quad d\theta(e_2) = 0;$$

$$(C) \quad \nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0.$$

Demonstração:

Como $\xi = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_3$ e sendo ξ $\tilde{\nabla}$ -paralelo, obtemos

$$0 = \tilde{\nabla}_{e_1} \xi = -\sin(\theta)d\theta(e_1)e_1 + \cos\theta\nabla_{e_1} e_1 + \cos\theta\alpha_{11} + \cos\theta d\theta(e_1)e_3 + \sin\theta\nabla_{e_1}^\perp e_3 - \sin\theta A_{e_3}(e_1).$$

Note que as componentes tangente e normal de $\tilde{\nabla}_{e_1} \xi$ também se anulam. Assim do anulamento da componente tangente teremos:

$$-\sin(\theta)d\theta(e_1)e_1 + \cos\theta\nabla_{e_1} e_1 - \sin\theta A_{e_3}(e_1) = 0.$$

Como $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza α e é ortonormal, temos $A_{e_3} e_1 = \beta e_1$ e também $\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_2$. Sendo os vetores e_1 e e_2 linearmente independentes temos que o anulamento da expressão acima implica que os coeficiente destes vetores são ambos nulos. Assim $\nabla_{e_1} e_1 = \alpha e_2 = 0$. A ortonormalidade dos vetores da base por sua vez também implica que $\langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle = \langle e_2, \nabla_{e_1} e_1 \rangle = 0$ logo $\nabla_{e_1} e_2 = 0$. Isso nos dá (i).

Usando a mesma abordagem,

$$0 = \tilde{\nabla}_{e_2} \xi = -\sin(\theta)d\theta(e_2)e_1 + \cos\theta\nabla_{e_2} e_1 + \cos\theta\alpha_{12} + \cos\theta d\theta(e_2)e_3 + \sin\theta\nabla_{e_2}^\perp e_3 - \sin\theta A_{e_3}(e_2).$$

Cujas componentes tangente e normal, devido $\alpha_{12} = 0$, são respectivamente

$$-\sin(\theta)d\theta(e_2)e_1 + \cos\theta\nabla_{e_2} e_1 - \sin\theta A_{e_3}(e_2) = 0$$

$$\cos\theta d\theta(e_2)e_3 + \sin\theta\nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0.$$

Como $\nabla_{e_2} e_1 = -\beta e_2$ e ainda e_2 é autovetor de A_{e_3} , temos da primeira igualdade que $d\theta(e_2) = 0$, portanto da segunda igualdade $\nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0$. Isto prova (ii) e (iii), concluindo-se o lema. □

Lema 3.4 *O vetor normal $\alpha_{22} = \alpha(e_2, e_2)$ é paralelo na conexão normal ao longo das curvas integrais de e_2 .*

Demonstração:

Queremos mostrar que

$$\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = 0$$

Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} &= -\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{11} = -(\nabla_{e_2}^\perp \alpha)(e_1, e_1) - 2\alpha(\nabla_{e_2} e_1, e_1) = \\ &= -(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1) + (\tilde{R}(e_2, e_1)e_1)^\perp = -(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1), \end{aligned}$$

onde usamos que H é $\nabla^\perp$ -paralelo, $\nabla_{e_2} e_1 = -be_2$, $\alpha(e_1, e_2) = 0$, a equação de Codazzi, e que $(\tilde{R}(e_2, e_1)e_1)^\perp = 0$, onde esta última igualdade vem da expressão (2.5) observando que nela o vetor D está no fibrado normal. Entretanto como $\nabla_{e_1} e_1 = 0 = \nabla_{e_1} e_2$ temos também que

$$(\nabla_{e_1}^\perp \alpha)(e_2, e_1) = \nabla_{e_1}^\perp \alpha(e_2, e_1) - \alpha(\nabla_{e_1} e_2, e_1) - \alpha(e_2, \nabla_{e_1} e_1) = 0,$$

e isto conclui o lema. □

Lema 3.5 $\nabla_{e_2} e_2 = be_1$ e b é constante ao longo das curvas integrais de e_2 .

Demonstração:

Uma vez que $\xi = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_3$, temos que $\langle \xi, e_2 \rangle = 0$. Derivando obtemos:

$$0 = e_2 \langle \xi, e_2 \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{e_2} \xi, e_2 \rangle + \langle \xi, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle.$$

Considerando que ξ é $\tilde{\nabla}$ -paralelo temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \tilde{\nabla}_{e_2} e_2, \xi \rangle = \langle \nabla_{e_2} e_2, \xi \rangle + \langle \alpha(e_2, e_2), \xi \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_2} e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_3 \rangle + \langle \alpha_{22}, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_3 \rangle \\ &= \cos \theta \langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle + \sin \theta \langle \alpha_{22}, e_3 \rangle, \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade decorre de $e_3 \in TM^\perp$.

Disto obtemos então

$$\langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle = b = -tg\theta \langle \alpha_{22}, e_3 \rangle.$$

Diferenciamos agora b , deduzimos

$$e_2(b) = -\sec^2 \theta d\theta(e_2) \langle \alpha_{22}, e_3 \rangle - tg\theta \{ \langle \nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22}, e_3 \rangle + \langle \alpha_{22}, \nabla_{e_2}^\perp e_3 \rangle \} = 0.$$

Considerando que $d\theta(e_2) = 0$, usando (ii) do Lema (3.3), $\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = 0$ pelo Lema (3.4) e $\nabla_{e_2}^\perp e_3 = 0$ por (iii) do lema (3.3) e isto conclui a demonstração.

□

Teorema 3.1 *Seja M uma superfície e seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão com vetor curvatura média não nulo o qual é paralelo na conexão do fibrado normal. Seja ξ um campo de vetores unitário na direção da segunda componente do espaço tangente ambiente definido ao longo da imersão. Se a projeção de ξ no espaço tangente é um autovetor de A_H , onde A_H é o operador de forma na direção de H , então uma das seguintes afirmações ocorre:*

1. *A superfície é mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $E^n(c)$;*
2. *A superfície M tem curvatura média constante em uma variedade 3-dimensional totalmente umbílica ou totalmente geodésica em $\mathbb{E}^n(c)$.*
3. *A superfície $M \subset \mathbb{E}^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^5$ pode ser considerada com a métrica de Lozentz e esta superfície é deixada invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias. Este subgrupo age como aplicação identidade sobre o complemento ortogonal de um plano $W \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$. De fato, todas as trajetórias nas direções horizontais (e_2) são deixadas invariantes pelo subgrupo e a menos de translações, elas são círculos em W se $c > 0$, e se $c < 0$, elas são círculos, horocírculos ou hipercírculos em uma superfície totalmente geodésica de $E^4(c)$, $E^2(c)$.*

Demonstração:

Do Lema (3.1) temos que ou $M \subset E^n(c)$ ou $M \subset E^4(c) \times \mathbb{R}$. Na primeira situação podemos aplicar o Teorema de Yau [Yau] e então ocorre ou (1) ou (2). Se estivermos na segunda situação, segue do Lema (3.2) que $W = \text{span}\{e_2, \bar{\nabla}_{e_2} e_2\}$ é paralelo na conexão $\bar{\nabla}$ de $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R} \supset E^4(c) \times \mathbb{R}$ com $\mathbb{R}^5$ possivelmente de Lorentz.

Desde que $W \perp \xi$, pois $e_2 \perp \xi$ e ξ é paralelo, teremos $W \subset \mathbb{R}^5$.

No caso $c > 0$ podemos escrever a imersão como $x = (f, g)$ com a primeira componente em W e a segunda em $W^\perp$. Observamos que $df.e_2 = e_2$ pois $e_2 \in W$ e $df.e_2$ é a projeção ortogonal de $e_2(x) = e_2$ em W .

Seja $df.e_1$ a projeção ortogonal de $e_1(x) = e_1$ em W , então $df.e_1 \perp df.e_2$. Em verdade,

$$\langle df.e_1, df.e_2 \rangle = \langle df.e_1 + dg.e_1, df.e_2 \rangle = \langle e_1, df.e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0;$$

Seja ${}^w\nabla$ a conexao de W , que por definição é a projeção ortogonal de $\bar{\nabla}$ em W . Se $\beta(t)$ é uma trajetória de e_1 , seja $\beta_w(t)$ a trajetória correspondente de $df.e_1$.

O campo vetorial $df.e_2$ é paralelo ao longo das trajetórias de $df.e_1$. Com efeito, para cada t tal que $\beta(t)$ esteja definido, temos $e_2(\beta_w(t)) = e_2(\beta(t))$ e consequentemente

$${}^w\nabla_{df.e_1} df.e_2 = (\bar{\nabla}_{df.e_1} df.e_2)^w = (\bar{\nabla}_{df.e_1} e_2)^w = (\bar{\nabla}_{e_1} e_2)^w = 0.$$

Além disso, as trajetórias de $df.e_1$ são retas ortogonais às trajetórias do campo $df.e_2$ devido as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} \langle df.e_1, df.e_2 \rangle = 0 &\Rightarrow df.e_1 \langle df.e_1, df.e_2 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle {}^w\nabla_{df.e_1} df.e_1, df.e_2 \rangle = -\langle df.e_1, {}^w\nabla_{df.e_1} df.e_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto ${}^w\nabla_{df.e_1} df.e_1$ é paralelo a $df.e_1$.

Para o caso $c > 0$ as trajetórias de $df.e_2$ são círculos pois sua curvatura geodésica $|\bar{\nabla}_{e_2} e_2|$ é constante já que como vimos

$$|\bar{\nabla}_{e_2} e_2|^2 = b^2 + |\alpha_{22}|^2 + e^2,$$

com $e_2(b) = 0$, $\nabla_{e_2}^\perp \alpha_{22} = 0$ e $E^4(c) \times \mathbb{R}$ é umbílica em $\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$.

Seja C um destes círculos.

As trajetórias de $df.e_1$ são traços de geodésicas ortogonais a C , todas elas se intersectam em um ponto comum $p_0 \in W$. Assim, todas as outras trajetórias de $df.e_2$ são círculos centrados em p_0 e portanto M é invariante por um subgrupo a 1-parametro de isometrias tendo $W^\perp$ como o conjunto de pontos fixos.

Para o caso $c < 0$, observe que t pode estar em W ou não, no caso em que $t \notin W$ tomaremos $\mathbb{R}_1^3 = W \oplus \text{Span}\{t\}$, onde esse t denota a componente tempo do espaço de Lorentz $\mathbb{R}_1^5$. No outro caso $\mathbb{R}_1^3 = W \oplus \text{Span}\{u\}$ com $u \in \mathbb{R}_1^5$, $u \perp W$.

Este espaço pode ser decomposto como $\mathbb{R}_1^5 = \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}^2$.

Vamos considerar a imersão inicial escrita como $x = (x_1, x_2, x_3)$ com $x_1 \in \mathbb{R}_1^3$; $x_2 \in \mathbb{R}^2$; $x_3 \in \mathbb{R}$; $(x_1, x_2) \in E^4(c)$; e assim, com a métrica de Lorentz

$$\langle x_1, x_1 \rangle = -1 - |x_2|^2.$$

Seja $v \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $v \perp W$ e $\langle x_1 + v, x_1 + v \rangle = -1$ com v diferenciável.

Tomemos agora $\tilde{x}$ uma nova imersão tal que

$$\tilde{x} = (x_1 + v, 0, x_3) \Rightarrow \tilde{x}(M) \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \text{ e } x = \tilde{x} + (-v, x_2, 0)$$

Observe que

$$x_1 = w + r\tilde{u} \text{ onde } \tilde{u} \perp W, |\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle| = 1 \text{ e } w \in W$$

$$\text{e } x = (w + r\tilde{u}, x_2, x_3).$$

$$\text{Logo } e_2 = \bar{\nabla}_{e_2} x = (\bar{\nabla}_{e_2} w + e_2(r)\tilde{u} + r\bar{\nabla}_{e_2}\tilde{u}, \bar{\nabla}_{e_2}x_2, \bar{\nabla}_{e_2}x_3).$$

Como $e_2 \in W \subset \mathbb{R}_1^3$ então $\bar{\nabla}_{e_2}x_2 = \bar{\nabla}_{e_2}x_3 = 0$, além disso, como W é paralelo $\bar{\nabla}_{e_2}\tilde{u} = 0$ e assim $e_2(r)\tilde{u} = 0 \Rightarrow e_2(r) = 0$.

Portanto x_2 e r são constantes ao longo das trajetórias de e_2 .

Note agora que

$-1 - |x_2|^2 = \langle x_1, x_1 \rangle = \langle w, w \rangle \pm r^2 \Rightarrow \langle w, w \rangle = \pm r^2 - 1 - |x_2|^2 \Rightarrow \langle w, w \rangle$ é constante ao longo das trajetórias de e_2 .

Como $v = h\tilde{u}$ e $\langle x_1 + v, x_1 + v \rangle = -1$ então

$$\langle w + r\tilde{u} + h\tilde{u}, w + r\tilde{u} + h\tilde{u} \rangle = -1.$$

$\langle w, w \rangle \pm (r + h)^2 = -1 \Rightarrow h$ é constante ao longo das trajetórias de e_2 e assim v também o é.

Podemos agora escrever

$x_1 = (f, r\tilde{u})$ e $\tilde{x}_1 = (f, \tilde{g}) = (f, (r+h)\tilde{u})$, onde f é a projeção de x em W . Observamos que todas as projeções das trajetórias horizontais de $\tilde{x}$ em W , são as mesmas projeções das trajetórias horizontais (trajetórias de e_2) de x em W visto que a primeira componente f não se alterou.

Notemos que $d\tilde{x}_1.e_2 = e_2$ pois $e_2 \in W \subset \mathbb{R}_1^3$ e $d\tilde{x}_1.e_2$ é a projeção ortogonal de $e_2(x) = e_2$ em $T_p E^2(c)$.

Seja $d\tilde{x}_1.e_1$ a projeção ortogonal de $e_1(x) = e_1$ em $T_p E^2(c)$, então $d\tilde{x}_1.e_1 \perp d\tilde{x}_1.e_2$. Em verdade,

$$\langle d\tilde{x}_1.e_1, d\tilde{x}_1.e_2 \rangle = \langle df.e_1 + e_1(\tilde{g}), df.e_2 + e_2(\tilde{g}) \rangle = \langle df.e_1 + e_1(\tilde{g}), df.e_2 \rangle = \langle df.e_1, df.e_2 \rangle = 0$$

Seja a conexão $\tilde{x}\nabla$ de $E^2(c) \subset \mathbb{R}_1^3$ a qual por definição é a projeção ortogonal de $\bar{\nabla}$ em $T_p E^2(c)$. Se $\beta(t)$ é uma trajetória de e_1 então $\beta_2(t)$ é uma trajetória de $df.e_1$.

O campo vetorial $d\tilde{x}_1.e_2$ é paralelo ao longo das trajetórias de $d\tilde{x}_1.e_1$. Com efeito, para cada t tal que $\beta(t)$ esteja definido, temos $e_2(\beta_2(t)) = e_2(\beta(t))$ e consequentemente

$$\tilde{x}\nabla_{d\tilde{x}_1.e_1}d\tilde{x}_1.e_2 = (\bar{\nabla}_{d\tilde{x}_1.e_1}d\tilde{x}_1.e_2)^{T_p E^2(c)} = (\bar{\nabla}_{df.e_1}e_2)^{T_p E^2(c)} = (\bar{\nabla}_{e_1}e_2)^{T_p E^2(c)} = 0.$$

Além disso, as trajetórias de $d\tilde{x}_1.e_1$ são geodésicas ortogonais às trajetórias do campo $d\tilde{x}_1.e_2$ devido as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{x}_1.e_1, d\tilde{x}_1.e_2 \rangle = 0 &\Rightarrow d\tilde{x}_1.e_1 \langle d\tilde{x}_1.e_1, d\tilde{x}_1.e_2 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \tilde{x}\nabla_{d\tilde{x}_1.e_1}d\tilde{x}_1.e_1, d\tilde{x}_1.e_2 \rangle = -\langle d\tilde{x}_1.e_1, \tilde{x}\nabla_{d\tilde{x}_1.e_1}d\tilde{x}_1.e_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{x}\nabla_{d\tilde{x}_1.e_1}d\tilde{x}_1.e_1$ é paralelo à $d\tilde{x}_1.e_1$.

Assim, as trajetórias de $d\tilde{x}_1.e_2$ são círculos, horocírculos e hipercírculos já que sua curvatura geodésica é constante.

Para o caso dos círculos (ou similarmente para horocírculos), escolhamos um destes círculos, digamos C . As trajetórias de $d\tilde{x}_1.e_1$ são traços de geodésicas ortogonais a C , todas elas intersectam-se em um ponto comum $p_0 \in E^2(c)$ no caso em que C é um círculo e em $p_0 \in \partial E^2(c)$ se C for um horocírculo. Segue-se que todas as trajetórias de $d\tilde{x}_1.e_2$ são círculos centrados em p_0 . Portanto, esta nova imersão é folheada por círculos ou horocírculos de mesmo centro em $E^2(c)$.

E assim a imersão $\tilde{x}(M)$ é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias, o qual tem o $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2(\text{segunda componente da decomposição de } \mathbb{R}_1^5) \times \text{Span } \xi$ como seu conjunto de pontos fixos. Uma vez que as duas imersões diferem de um fator que é invariantes ao longo das trajetórias de e_2 , como foi mostrado acima, então nossa imersão original também é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias, o qual tem o $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2(\text{segunda componente da decomposição de } \mathbb{R}^5) \times \text{Span } \xi$ como seu conjunto de pontos fixos.

Para o caso dos hipercírculos devemos lembrar que são um conjunto de pontos equidistantes a uma geodésica. Dizemos que esta é a geodésica associada a este hipercírculo.

Proposição 3.1 *Dada uma família de hipercírculos que são cortados ortogonalmente pelas mesmas geodésicas então tais hipercírculos são associados a mesma geodésica.*

Lema 3.6 *Dado um elemento qualquer da família a geodésica associada a este hipercírculo, também é cortada ortogonalmente pelas geodésicas.*

Demonstração:

Para isto, seja Γ_1 a geodésica associada a H_1 e Γ_2 uma geodésica que corta ortogonalmente H_1 . Como as geodésicas da definição de H_1 que medem a equidistância dos pontos entre H_1 e Γ_1 realizam a distância entre Γ_1 e H_1 , então cortam ortogonalmente Γ_1 e H_1 . Pela unicidade das geodésicas, Γ_2 deve ser uma daquelas e portanto corta ortogonalmente Γ_1 . $\square$

Demonstração:

Da proposição 3.1] Se assim não fosse, pelo Lema 3.6, usando o Teorema de Gauss-Bonnet teríamos um quadrado geodésico com soma dos ângulos internos igual a 2π o que é um absurdo pois estamos em um espaço de curvatura negativa. $\square$

Para o caso de hipercírculos, usaremos o modelo do semiplano superior $\mathbb{H}^2$ descrito como

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}; \\ \partial\mathbb{R}_+^2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}. \end{cases}$$

Seja γ_0 uma trajetória das projeções de e_1 . Sendo uma geodésica, a curva γ_0 pode ser considerada como interseção de $\mathbb{R}_+^2$ com um semicírculo euclidiano centrado em $p_0 \in \partial\mathbb{R}_+^2$. Esta geodésica deve intersectar ortogonalmente todas as trajetórias da projeção de e_2 . Estas trajetórias têm curvatura geodésica constante e são equidistantes de uma geodésica específica Γ que intersecta γ_0 ortogonalmente.

Como as trajetórias de $d\tilde{x}.e_1$ são traços de geodésicas que cortam ortogonalmente os hipercírculos que são as trajetórias de $d\tilde{x}.e_2$, então, pela Proposição 3.1, estes hipercírculos estão associados a uma mesma geodésica Γ . Assim, podemos definir um subgrupo de isometrias a 1-parâmetro que deixa invariante a geodésica Γ associada aos hipercírculos, e também estes. A saber os transvections. Portanto esta nova imersão é folheada por hipercírculos. Segue agora as mesmas considerações observadas nos casos dos círculos e horocírculos. Isto conclui a demonstração do Teorema 3.1. $\square$

Observação

Se a projeção das trajetórias de e_1 em W for apenas um ponto sobre uma trajetória de e_2 então estaremos na situação em que nossa imersão é um cilindro.

Teorema 3.2 *Seja M uma superfície e $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão com curvatura*

média não nula e paralela na conexão do fibrado normal. Assuma a existência de um triângulo geodésico T em M com ângulos internos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ satisfazendo

$$\Pi - \sum_{i=1}^3 \beta_i = \int_R - \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta} \right)^2 |d\phi|^2 \pm 2|H| \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta} \right) |d\phi| + c \sin^2 \theta, \quad (3.5)$$

onde R denota a região limitada por T , a função ϕ mede o ângulo entre H e ξ . A função θ é o ângulo entre ξ e $T_p M$. Aqui ξ denota um vetor unitário na direção da segunda componente. Admitamos que a menos de pontos isolados no interior de R , a expressão $\frac{\sin \phi}{\cos \theta}$ esteja definida e seja não-nula. Observando que o mais ou menos no interior da integral é tomado de acordo com o sinal da expressão anterior. Então $M \subset E^3(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_1^4 \times \mathbb{R}$. Além disso, M é invariante por um grupo a 1-parâmetro de isometrias de $E^2(c) \subset E^3(c)$ e as trajetórias das direções horizontais são círculos se $c > 0$, e se $c < 0$, são círculos, horocírculos ou hipercírculos de $E^2(c)$, invariantes por este grupo.

Demonstração:

A curvatura de Gauss de M é dada por

$$K = \det A_h + \sum_{i=1}^{n-2} \det(A_{f_i}) + \tilde{K},$$

onde $h = \frac{H}{|H|}$, $\{h, f_1, \dots, f_{n-2}\}$ é uma base para $T^\perp M$ e $\tilde{K}$ é a curvatura seccional do espaço ambiente com respeito a TM . Considerando a matriz 2×2 simétrica do operador de forma $A_h = (A_h^{ij})$ com $A_h^{12} = A_h^{21}$, temos $\text{tr}(A_h) = A_h^{11} + A_h^{22}$ e $\det(A_h) = A_h^{11}(\text{tr}(A_h) - A_h^{11}) - (A_h^{12})^2$. Vamos denotar por Φ o ângulo entre H e ξ , i.e. $\cos(\Phi) = \langle h, \xi \rangle$.

Como H é $\nabla^\perp$ -paralelo então $\nabla^\perp h \equiv 0$. Derivando com respeito a e_i e sendo ξ paralelo temos:

$$\begin{aligned} e_i \langle h, \xi \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} h, \xi \rangle = -\langle A_h e_i, \xi \rangle \\ &= \langle -\langle A_h e_i, e_1 \rangle e_1 - \langle A_h e_i, e_2 \rangle e_2, \xi \rangle = -\langle A_h e_i, e_1 \rangle \langle e_1, \xi \rangle \\ &= -A_h^{1i} \cos \theta. \end{aligned}$$

Pois $\langle e_2, \xi \rangle = 0$ Logo temos que

$$-\sin(\phi) d\phi(e_i) = e_i(\cos \phi) = -A_h^{1i} \cos \theta$$

ou seja

$$A_h^{1i} = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} d\phi(e_i),$$

onde, por hipótese, a expressão acima está bem definida a menos de pontos isolados.

Substituindo-se na expressão $\det(A_h)$ e observando que $|d\phi|^2 = (d\phi^2(e_1) + d\phi^2(e_2))$ segue-se que

$$\det A_h = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} d\phi(e_1) \operatorname{tr}(A_h) - \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right)^2 |d\phi|^2.$$

Através de um cálculo simples provamos que $\tilde{K} = c \sin^2 \theta$. Com efeito, observando a expressão da curvatura (2.6) temos

$$\begin{aligned} \tilde{K} = \langle \tilde{R}(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle &= c\{(\langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_1, \xi \rangle \langle e_1, \xi \rangle)(\langle e_2, e_2 \rangle - \langle e_2, \xi \rangle \langle e_2, \xi \rangle) \\ &\quad - (\langle e_1, e_2 \rangle - \langle e_1, \xi \rangle \langle e_2, \xi \rangle)(\langle e_2, e_1 \rangle - \langle e_2, \xi \rangle \langle e_1, \xi \rangle)\} \\ &= c(1 - \cos^2 \theta) = c \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

E assim,

$$K = \frac{\sin \phi}{\cos \theta} d\phi(e_1) \operatorname{tr}(A_h) - \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right)^2 |d\phi|^2 + \sum_{f_i \perp H} \det(A_{f_i}) + c \sin^2 \theta$$

Para o caso em que $\frac{\sin \phi}{\cos \theta}$ é positivo (respectivamente negativo) e assim a expressão dentro da integral no enunciado tem o sinal de + (respectivamente -).

Podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma:

$$K = \pm \frac{\sin \phi}{\cos \theta} |d\phi| \operatorname{tr}(A_h) - \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right)^2 |d\phi|^2 + c \sin^2 \theta + (d\phi(e_1) \mp |d\phi|) \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \operatorname{tr}(A_h) + \sum_{f_i \perp H} \det(A_{f_i})$$

Observemos que os dois últimos fatores da expressão acima são não positivos com efeito, como $\operatorname{tr}(A_v) = 2\langle H, v \rangle$, então

$$\operatorname{tr}(A_h) = 2\langle H, h \rangle = 2|H| \text{ e } \operatorname{tr}(A_{f_i}) = 2\langle H, f_i \rangle = 0, \text{ e, assim}$$

$\det(A_{f_i})$ é não positivo pois a matriz A_{f_i} é simétrica.

Além disso, $\frac{\sin \phi}{\cos \theta} (d\phi(e_1) \mp |d\phi|)$ também é não positiva, nos respectivos casos, já que $d\phi(e_1) \leq |d\phi|$.

Devido isso,

$$K \leq \pm \frac{\sin \phi}{\cos \theta} |d\phi| \operatorname{tr}(A_h) - \left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right)^2 |d\phi|^2 + c \sin^2 \theta \quad (3.6)$$

Devemos observar que a igualdade ocorre se, e somente se,

$$\det(A_{f_i}) = 0 \text{ e } |d\phi| = d\phi(e_1).$$

Da primeira igualdade, teremos que $A_{f_i} = 0$ pois o traço deste operador é nulo e a matriz dele é simétrica.

Da segunda igualdade, como $\{e_1, e_2\}$ forma uma base ortonormal, concluímos que $d\phi(e_2) = 0$, e, portanto teremos que esta base diagonaliza A_h e, conseqüentemente, a segunda forma da imersão pois os A_{f_i} são nulos.

Usando-se agora a hipótese do teorema e o teorema do triângulo geodésico de Gauss temos que

$$\int_R K d\sigma = \pi - \sum_{i=1}^3 \beta_i = \int_R -\left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right)^2 |d\phi|^2 \pm 2|H|\left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right) |d\theta| + c \sin^2 \theta d\theta.$$

Disso e de (3.6) decorre que

$$-\left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right)^2 |d\phi|^2 \pm 2|H|\left(\frac{\sin \phi}{\cos \theta}\right) |d\theta| + c \sin^2 \theta d\theta$$

no interior da região R . Por analiticidade esta igualdade ocorre em $x(M)$. O resultado segue-se observando as conseqüências acima advindas de tal igualdade e procedendo-se da mesma forma que no Teorema 3.1, levando em conta ainda que o $\text{span } \{i\alpha\} = \text{span } \{H\}$ cuja dimensão é 1. Desta forma a redução da codimensão dar-se-á para $E^3(c) \times \mathbb{R}$.

□

Teorema 3.3 *Seja M uma superfície compacta de gênero zero e seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica tal que $|\nabla^\perp H| \leq g|Q^{(2,0)}|$, onde $|\nabla^\perp H|$ é a norma do tensor $\nabla^\perp H$, o vetor H é a curvatura média da imersão, g é uma função real contínua não-negativa e $|Q^{(2,0)}|$ é a norma da forma diferencial generalizada de Abresch-Rosenberg. Uma das seguintes afirmações ocorre:*

1. *A superfície M é mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $E^n(c)$;*
2. *A superfície M é uma esfera umbílica de $E^3(c)$;*
3. *A superfície M satisfaz $M \subset E^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$ onde $\mathbb{R}^5$ é possivelmente Lorentz e é invariante por um grupo a 1-parâmetro de rotações o qual age como a identidade sobre o complemento ortogonal de um plano W . De fato, todas as trajetórias nas direções horizontais são deixadas invariantes por este subgrupo e elas são círculos em uma superfície totalmente geodésica de $E^4(c)$, $E^2(c)$.*

Lema 3.7 *Seja M uma superfície compacta e seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica. Consideramos como $Q^{(2,0)}$ a forma diferencial de Abresch-Rosenberg generalizada 2.16. Se $|\nabla^\perp H| \leq g|Q^{(2,0)}|$, então uma das seguintes afirmações ocorre:*

$$\begin{cases} (A) & Q^{(2,0)} \text{ é não-nula e seus zeros são pontos isolados com índice negativo;} \\ (B) & Q^{(2,0)} \text{ é identicamente nula.} \end{cases}$$

Agora, pela **Proposição 2.1**

$$\overline{Z}Q(Z, Z) = 2\langle \langle Z, \overline{Z} \rangle \nabla_{\overline{Z}}^\perp H, H \rangle + 2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\overline{Z}}^\perp H \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\overline{Z}Q(Z, Z)| &\leq |2\lambda^2 \langle \nabla_{\overline{Z}}^\perp H, H \rangle| + |2\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\overline{Z}}^\perp H \rangle| \\ &\leq 2\lambda^2 |\langle \nabla_{\overline{Z}}^\perp H, H \rangle| + 2|\langle \alpha(Z, Z), \nabla_{\overline{Z}}^\perp H \rangle| \\ &\leq 2\lambda^2 |\nabla_{\overline{Z}}^\perp H| |H| + 2|\alpha(Z, Z)| |\nabla_{\overline{Z}}^\perp H| \\ &\leq 2\lambda^2 |\nabla^\perp H| |Z| |H| + 2|\alpha(Z, Z)| |\nabla^\perp H| |\overline{Z}| \\ &\leq 2\lambda^3 |\nabla^\perp H| |H| + 2\lambda |\alpha(Z, Z)| |\nabla^\perp H| \\ &\leq (2\lambda^3 |H| + 2\lambda |\alpha(Z, Z)|) |\nabla^\perp H| \\ &\leq f(z) |\nabla^\perp H| \\ &\leq f(z)g(z) |Q(Z, Z)| \\ &\leq h(z) |Q(Z, Z)| \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese na penúltima linha e observe que $h(z)$ é uma função contínua e não-negativa. Logo podemos aplicar o Lema 2.6 como segue. Seja $U \subset M$ um conjunto aberto coberto por coordenadas isotérmicas. Vamos assumir que existe um zero $z_0 \in U$ de $Q(Z, Z)$. Pelo Lema 2.6, ou $Q(Z, Z) \equiv 0$ em uma vizinhança V de z_0 ou este zero é isolado e o índice do campo de direções determinado por $\text{Im}[Q(Z, Z)dz^2] = 0$ é $-\frac{k}{2}$ (e portanto negativo).

Se tivermos $Q(Z, Z) \equiv 0$ em alguma vizinhança V de um zero, então devemos ter, por analiticidade, $Q(Z, Z) \equiv 0$ em todos os pontos de M caso contrário os zeros no bordo de V deveriam dar uma contradição àquele lema. Portanto se $Q(Z, Z)$ é não-nulo, então cada zero deve ser isolado e deve ter índice negativo.

Demonstração:

A partir do Lema (3.7), como M tem gênero zero, pelo Teorema de Poincaré-Hopf em [18] a soma dos índices das singularidades de qualquer campo de direções é 2 (que é positivo). Esta contradição mostra que $Q(Z, Z) \equiv 0$ e assim H é paralelo na conexão do fibrado normal.

Se $M \subset E^n(c)$, do Teorema de Yau deveremos ter (1) ou (2) do Teorema. Caso contrário, examinando a prova do Lema (3.1), devemos estudar a situação com H não-umbílico e $M \subset E^4(c) \times \mathbb{R}$.

Para este caso, como M tem gênero zero, a função holomorfa $Q(Z, Z)$, como vimos acima, se anula. Tomando-se e_1 e e_2 como no Lema 3.2 então

$$Q(e_1, e_2) = Q(e_2, e_2), \quad Q(e_1, e_2) = 0.$$

Assim,

$$2 \langle \alpha(e_1, e_2), H \rangle = c \langle \xi, e_1 \rangle \langle \xi, e_2 \rangle.$$

Desde que $\langle \xi, e_2 \rangle = 0$ então $\{e_1, e_2\}$ diagonaliza A_H , e estamos, uma vez mais, nas condições do Teorema 3.1, exceto que para o caso $c < 0$, sendo M compacta então as trajetórias de $d\tilde{x}_{1.e_2}$ são apenas círculos.

□

Para demonstração do próximo teorema, seguiremos as ideias utilizadas em [13] adaptadas à situação presente. Quais sejam:

- (i) Em lugar da diferencial de Abresch-Rosenberg, utilizamos a diferencial de Abresch-Rosenberg generalizada

$$Q^{(2,0)} = Q(Z, Z)dz^2 = (2 \langle \alpha(Z, Z), H \rangle - c \langle \xi, Z \rangle^2)dz^2.$$

- (ii) Os cálculos realizados no Lema 3.3 de [13] seguem as adaptações e raciocínios utilizados no Lema 3.7 do presente trabalho.

Teorema 3.4 *Seja $M \subset E^n(c) \times \mathbb{R}$ uma superfície compacta e simplesmente conexa com bordo formado por uma curva regular por partes. Cujos vértices sejam os (finitos) pontos onde o bordo é não-regular. Assumindo que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) *A superfície está contida como conjunto no interior de uma superfície regular $\overline{M}$ sem bordo.*

- (ii) Em $\overline{M}$ temos $|\nabla^\perp H| \leq g|Q^{(2,0)}|$, onde H é a curvatura média da superfície, $Q^{(2,0)}$ é a diferencial generalizada de Abresch-Rosenberg, e g é uma função contínua e não-negativa.
- (iii) O número de vértices em ∂M com ângulo menor que π é no máximo 3.
- (iv) A parte imaginária de $Q^{(2,0)}$ anula-se em $\partial M \setminus V$. Isto significa que as partes regulares do bordo ∂M são curvas integrais das direções que maximizam ou minimizam os valores da forma quadrática real $\bar{\sigma}$ sobre o círculo unitário.

Então uma das seguintes situações ocorre:

1. A superfície é mínima em uma hipersuperfície totalmente umbílica de $E^n(c)$;
2. A superfície M tem curvatura média constante em uma variedade totalmente umbílica 3-dimensional ou ela é totalmente geodésica em $E^n(c)$.
3. A superfície M satisfaz $M \subset \mathbb{E}^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^5$ pode ser considerada com a métrica de Lozentz e esta superfície é deixada invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias. Este subgrupo age como a identidade sobre o complemento ortogonal de um plano $W \subset \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}$. De fato, todas as trajetórias nas direções horizontais são deixadas invariantes pelo subgrupo e a menos de translações, elas são círculos em W se $c > 0$, e se $c < 0$, elas são círculos, horocírculos ou hipercírculos em uma superfície de $E^4(c)$, $E^2(c)$.

Demonstração:

Realizadas as devidas adaptações e seguindo o mesmo roteiro de [17], concluiremos que a diferencial de Abresch-Rosenberg generalizada de $x(M)$ se anula identicamente. A partir daí a demonstração segue a sequência do Teorema 3.3 (anterior). $\square$

Teorema 3.5 *Seja M uma superfície completa com curvatura gaussiana $K \geq 0$, e seja $x : M \rightarrow E^n(c) \times \mathbb{R}$, $c \neq 0$, uma imersão isométrica com vetor curvatura média paralelo. Então uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. $K \equiv 0$.
2. $x(M)$ é uma superfície mínima em uma subvariedade totalmente umbílica de $E^n(c)$.
3. $x(M)$ é uma superfície com curvatura média constante em uma subvariedade de dimensão 3 totalmente umbílica de $E^n(c)$.

4. $x(M)$ está contida em $E^4(c) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^6$ (munido da métrica de Lorentz no caso $c < 0$) e é invariante por um grupo a um parâmetro especial de isometrias de uma variedade totalmente geodésica $E^2(c)$ de $E^4(c)$ e que deixa fixo o espaço complementar ao $\mathbb{R}^3$ (possivelmente com a métrica de Lorentz) que a contém.

Demonstração:

Realizando os mesmos cálculos que [17] conclui-se que ou $K \equiv 0$ ou $Q^{(2,0)}$ se anula em toda a superfície e a partir daí, procedendo-se exatamente como na demonstração do Teorema 3.3 obtemos o resultado desejado. $\square$

Bibliografia

- [1] ABRESH, U. ; ROSENBERG, H. *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$* . Acta Math. 193 (2) (2004) 141-174.
- [2] ABRESH, U. ; ROSENBERG, H. *Generalized Hopf differentials*. Mat.Contemp. 28 (2005) 1-28.
- [3] ALENCAR, H. ; DO CARMO, M. ; TRIBUZY, R. *A theorem of Hopf and the Cauchy Riemann inequality*. Comm. Anal. Geom. 15 (2007) 283-298.
- [4] ALENCAR, H. ; DO CARMO, M. ; TRIBUZY, R. *A Hopf Theorem for ambient spaces of dimensions higher than three*. J. Differential Geom. 84 (2010) 1-17.
- [5] ALENCAR, H. ; DO CARMO, M. ; TRIBUZY, R. *Surfaces of $M_k^2 \times \mathbb{R}$ invariant under a one-parameter group of isometries*. Ann. Mat. Pura Appl. 193 (2012) 517-527.
- [6] xxxxxxxxxxxx ALEXANDROV, A.D. *Uniqueness theorem for surfaces in the large*. V.Vestnik, Leningrad Univ. 13, 19 (1958), 5-8, Amm. Math. Soc. trans. (Series 2) 21 , 412-416.
- [7] xxxxxxxxxxxx CHEN, B. Y. *Geometry of Submanifolds*. Marcel Dekker Inc. New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, No. 22.
- [8] CHERN, S.S. *On surfaces of constant mean curvature in a three-dimensional space of constant curvature*. In Geometric dynamics, vol 1007 of Lecture Notes in Math.Springer Berlin, (1983) 104-108.
- [9] DE CAVALCANTE, M. P. ; DE LIRA, J. H. *Examples and structure of CMC surfaces in some Riemannian and Lorentzian homogeneous spaces*. Michigan Math. J. 55 (2007) 163-181.

- [10] DELAUNAY, C. *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*. J. Math. Pures Appl. 6 (1841) 309-320.
- [11] DO CARMO, M.P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - segunda edição.(Projeto Euclides)
- [12] DO CARMO, M.P. *Formas Diferenciais e Aplicações*. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1971.
- [13] DO CARMO, M. ; FERNÁNDEZ, I. *A Hopf theorem for open surfaces in product spaces*. Forum Math. 21 (6) (2009) 951-963.
- [14] DORFMEISTER, J. ; PEDIT, F. ; WU, H. *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*. Comm. Anal. Geom. 6 (1998) 633-668.
- [15] DORFMEISTER, J. ; McINTOSH, I. ; PEDIT, F. ; WU, H. *On the meromorphic potential for a harmonic surface in a k -symmetric space*. Manuscripta Math. 92 (1997) 143-152.
- [16] ESCHENBURG, J.H. ; TRIBUZY, R. *Existence and uniqueness of maps into affine homogeneous spaces*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 89 (1993) 11-18.
- [17] FETCU, D. ; ROSENBERG, H. *A Note on Surfaces with Parallel Mean Curvature*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 349 (2011) 1195-1197.
- [18] HOPF, H. *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Mathematics 1000, Springer Verlag. 1983.
- [19] HSIANG, W.Y. *Generalized Rotational Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Euclidian Space I*. J. Differential Geom. 17 (1982) 337-356.
- [20] JELLET, J.H. *Sur la surface dont la courbure Moyenne est Constant*. J. Math. Pures Appl. 18 (1853) 163-167.
- [21] KAPOULEAS, N. *Constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*. Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1987) 318-320.
- [22] KAPOULEAS, N. *Compact Constant Mean Curvature Surfaces in Euclidean three-space*. J. Differential Geom. 33 (3) (1991) 683-715.

- [23] KAPOULEAS, N. *Constant Mean Curvature Surfaces constructed by fusing Wente tori*. Invent.Math. 119 (1995) 443-518.
- [24] KENMOTSU, K. *Weierstrass Formula for surfaces of Prescribed Mean Curvature*. Math. Ann. 245 (1979) 89-99.
- [25] MEEKS, W.H. ; ROSENBERG, H. *The theory of minimal surfaces in $M \times R$* . Comment. Math. Helv. 80 (4) (2005) 811-858.
- [26] MEEKS, W.H. ; ROSENBERG, H. *Stable minimal surfaces in $M \times R$* . J. Differential Geom. 68 (3) (2004) 515-534.
- [27] OSSERMAN, R. *Curvature in the Eighties*, Amer. Math. Monthly 97 (8) (1990) 731-755.
- [28] ROS, A. *Compact Hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem*. J. Differential Geom. 20 (1984) 215-220.
- [29] RYAN, P. J. *A note on conformally flat spaces with constant scalar curvature*. In Proceedings of the Thirteenth Biennial Seminar of the Canadian Mathematical Congress, Vol. 2. Canad. Math. Congr. Montreal, Que. 115-124.
- [30] SPIVAK, M. *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*. vol 4. Publish or Perish, Inc., 2ed., 1979, 455-500.
- [31] WEIERSTRASS, K *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*, vol 3 Mayer e Muller, 1903, 39-52.
- [32] WENTE, H.C. *Counterexample to a conjecture of H.Hopf*. Pacific J. Math. 245 (1986) 193-243.
- [33] YAU, S.T. *Submanifolds with constant mean curvature. I, II*. Amer. J. Math. 96 (1974) 346-366; *ibid.* 97 (1975) 76-100.
- [34] ZYGMUND, A. *Trigonometric Series*. Second Edition. Vol. 1. Cambridge University Press 1959.