

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA-UFAM

Willian Cintra da Silva

**Problemas elípticos com difusão não linear provenientes
de modelos em Dinâmica de Populações**

**BELÉM-PA
Julho/2017**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA-UFAM

Willian Cintra da Silva

**Problemas elípticos com difusão não linear provenientes
de modelos em Dinâmica de Populações**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA - UFAM, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática

Área de concentração: Análise

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antonio Suárez Fernández
COORIENTADOR: Prof. Dr. Cristian Morales Rodrigo

BELÉM-PA
Julho/2017

Silva, Willian Cintra,

Problemas elípticos com difusão não linear provenientes de
modelos em Dinâmica de Populações / Willian Cintra da Silva;
Orientador, Antonio Suárez Fernández.-2017

174, il. 29 cm

Inclui bibliografias

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto
de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Belém, 2017.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Teoria de bifurcação.
3. Equações diferenciais elípticas. 4. Métodos variacionais 5.
Dinâmica de populações I. Fernández, Antonio Suárez, orient.
II. Título.

CDD - 22. ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA EM ASSOCIAÇÃO AMPLA
UFPA-UFAM

Willian Cintra da Silva

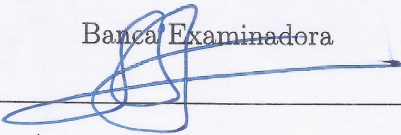
Problemas elípticos com difusão não linear provenientes de modelos em
Dinâmica de Populações

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA - UFAM, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Matemática

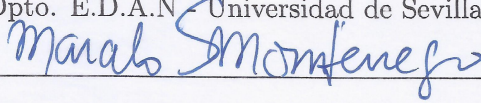
Data da defesa: 07 de julho de 2017.

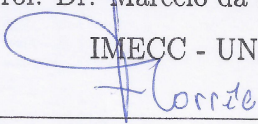
Resultado: APROVADO

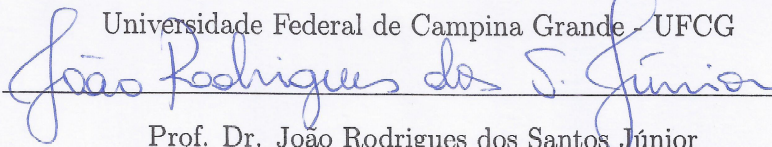
Banca Examinadora


Prof. Dr. Antonio Suárez Fernández (Orientador)
Dpto. E.D.A.N - Universidad de Sevilla - Espanha


Prof. Dr. Cristian Morales Rodrigo (Coorientador)
Dpto. E.D.A.N - Universidad de Sevilla - Espanha


Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro
IMECC - UNICAMP


Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG


Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior
PPGME/PDM - UFPA

Agradecimentos

A minha família, em especial à minha mãe e meu irmão Marcos Paulo, por me proporcionarem apoio incondicional desde sempre.

A minha esposa Jéssica Cintra, minha segunda família. Que os frutos deste trabalho nos traga muitas alegrias.

Gostaria de fazer um agradecimento muito especial a duas pessoas:

Ao professor Dr. Giovany Figueiredo por ter me proporcionado esta oportunidade espetacular de ser orientado pelo professor Dr. Antonio Suárez e realizar um doutorado sanduíche na Universidad de Sevilla. Serei eternamente grato;

Y al profesor Dr. Antonio Suárez por su estupenda dirección. No conozco suficientes palabras en castellano (ni tampoco en portugués) para expresar toda mi gratitud por su esfuerzo, dedicación, disponibilidad, comprensión, ayuda etc. Muchísimas gracias por compartir sus conocimientos y amistad.

Aprovecho para agradecer a mi codirector, el profesor Dr. Cristian Morales Rodrigo, sus contribuciones fueron importantísimas para mi formación. Espero que nos veamos pronto pra estudiar y comer un solomillo a la carbonara con una Cruzcampo.

Mi agradecimiento también a todo Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico e IMUS por haberme recibido tan bien durante mi estancia en Sevilla.

Aos professores Dr. Marcelo Montenegro, Dr. Francisco Júlio S. A. Corrêa, Dr. João Rodrigues, Dr. Antonio Suárez e Dr. Cristian Morales por aceitarem avaliar este trabalho e contribuir para a melhoria do mesmo.

A todos os professores do mestrado e doutorado que contribuíram para minha formação, em especial ao professor Dr. João Rodrigues pelos ensinamentos e amizade.

A todos os amigos do mestrado e doutorado que fizeram parte desta jornada: Andréia Gomes, Claudionei Pereira, Fernando Bruno, Gelson dos Santos, Julio Roberto, Jeziel Nascimento, João Fortes, Mirelson Martins, Raimundo Leão.

Ao meu grande amigo Ítalo Bruno pelas horas de estudo e diversão, em Belém e em Sevilla.

A Capes pelo apoio financeiro, permitindo inclusive a oportunidade de morar e estudar na maravilhosa cidade Sevilla.

Resumo

Neste trabalho estudaremos alguns problemas elípticos com difusão não linear provenientes de modelos em Dinâmica de Populações. Primeiro analisaremos uma equação logística. Provaremos resultados de existência, não existência, unicidade e multiplicidade de soluções positivas. Além disso iremos obter algumas propriedades qualitativas das soluções obtidas com respeito à certos parâmetros da equação. Para provar tais resultados utilizaremos Teoria de Bifurcação, Métodos de Sub e Supersolução, Métodos Variacionais e Propriedades do Autovalor Principal. Neste estudo também será necessário considerar um problema elíptico com singularidade na fronteira. Em seguida vamos estudar uma certa classe de sistemas de equações elípticas quasilineares e fortemente acoplados. Vamos obter um teorema de bifurcação unilateral e aplicar-lo a dois sistemas particulares para obter condições que garantem existência e não existência de soluções com componentes positivas e não nulas. Na medida do possível, os resultados obtidos ao longo deste trabalho serão interpretados no contexto da Dinâmica de Populações.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais, equações elípticas, difusão não linear, bifurcação, sub-supersolução, métodos variacionais, soluções largas, sistemas elípticos quasilineares, Dinâmica de Populações.

Abstract

In this work we will study some elliptic problems with nonlinear diffusion arising from Population Dynamics models. First we will analyse a logistic equation. We will prove existence, nonexistence, uniqueness and multiplicity results of positive solution. In addition, we will give some qualitative properties of the solutions obtained with respect to certain parameters of the equation. To prove such results we will use Bifurcation Theory, Sub and Supersolution Methods, Variational Methods, and Principal Eigenvalue Properties. In this study it will also be necessary to consider a singular boundary value elliptic problem. Next, we will study a certain class of quasilinear elliptic equation systems strongly coupled. We will obtain a unilateral global bifurcation result and we apply to some particular cases to provide conditions that guarantee existence and nonexistence of solutions with both components positive and non-zero. As far as possible, the results obtained throughout this work will be interpreted in the context of Population Dynamics.

Keywords: partial differential equations, elliptic equations, nonlinear diffusion, bifurcation, sub-supersolution, variational methods, large solutions, quasilinear elliptic systems, population dynamics.

Sumário

Notações	1
Introdução	3
1 Resultados Preliminares	19
1.1 Autovalor Principal e Princípio do Máximo Forte	19
1.2 Resultados de bifurcação	28
1.2.1 Bifurcação operadores quasilineares	30
1.2.2 Bifurcação para operadores de Fredholm de índice zero	34
1.2.3 Bifurcação para operadores positivos	42
1.3 Método de sub e supersolução para uma equação	44
1.4 Outros Resultados	46
2 Um problema logístico com difusão não linear I	51
2.1 Introdução	52
2.2 Existência e unicidade de solução positiva	59
2.3 Resultado auxiliar: Soluções Largas	72
2.4 Comportamento pontual das soluções positivas	84
3 Um problema logístico com difusão não linear II	89
3.1 Introdução	90
3.2 Resultados preliminares	93
3.3 Caso $b = 0$	98
3.4 Caso $b > 0$	100
3.5 Multiplicidade de soluções positivas	111

4	Bifurcação global para uma classe de sistemas elípticos quasilineares	117
4.1	Introdução	118
4.2	Construção do operador	122
4.3	Resultados preliminares	125
4.4	Estudo do operador $\mathfrak{L}(\mu) = D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0)$	128
4.5	Demonstração do Teorema Principal	135
4.6	Aplicação: Um modelo de simbiose com autodifusão e difusão cruzada . . .	141
5	Um modelo de predador-presa com termo de saciedade do predador	149
5.1	Introdução	150
5.2	Resultados Preliminares	154
5.3	Estimativas a priori e resultados de não existência	156
5.4	Existência de estado de coexistência	158
5.5	Influência da taxa de rotação na região de coexistência de solução	161
	Referências Bibliográficas	167

Notações

Ω	- Domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira regular.
$\ \cdot\ _{H_0^1}$	- Norma do espaço $H_0^1(\Omega)$.
$ \cdot _{L^s(D)}$	- Norma do espaço $L^s(D)$ em um aberto D .
$ \cdot _s$	- Norma do espaço $L^s(\Omega)$, $s \geq 1$.
$\ \cdot\ _0$	- Norma do espaço $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$.
$\ \cdot\ _{\mathcal{C}_0^1}$	- Norma do espaço $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$.
$\mathcal{C}_0^{1,1-}(\overline{\Omega})$	$:= \bigcap_{0 < \gamma < 1} \mathcal{C}_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$.
∂_i	$:= \frac{\partial}{\partial x_i}$ Derivada parcial com respeito à i -ésima coordenada.
∇u	$:= (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$ para $u \in H_0^1(\Omega)$.
$\text{div}(\vec{u})$	$:= \sum_{i=1}^N \partial_i u_i$ para $\vec{u} = (u_1, \dots, u_N) \in (H_0^1(\Omega))^N$.
P	$:= \{u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}); u(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega\}$.
$\frac{\partial u}{\partial n}(x)$	- Derivada normal exterior de u em um ponto $x \in \partial\Omega$.
$\dot{P}$	$:= \text{int}(P) = \left\{ u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}); u(x) > 0 \ \forall x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0 \ \forall x \in \partial\Omega \right\}$.
λ_1	- Principal autovalor de $-\Delta$ em Ω com condição de fronteira homogênea de Dirichlet.
φ_1	- Autofunção positiva associada a λ_1 com $\ \varphi_1\ _0 = 1$.
$\mathcal{L}(U)$	- Espaço dos operadores lineares e limitados em um espaço de Banach U .
$N[T]$	- Núcleo de um operador $T \in \mathcal{L}(U)$.
$R[T]$	- Imagem de um operador $T \in \mathcal{L}(U)$.
$r(T)$	- Raio espectral de um operador $T \in \mathcal{L}(U)$.
T^*	- Adjunto de um operador $T \in \mathcal{L}(U)$.

$\text{codim}[D] := \dim[U/D]$, onde D é um subespaço de U e U/D denota o espaço quociente de U .

$D^\perp$ - Ortogonal de um subespaço vetorial D .

$\hookrightarrow$ - Imersão contínua.

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ - Imersão compacta.

Introdução

Dinâmica de Populações é um importante ramo da Ecologia que estuda uma ou mais espécies vivendo em uma determinada região, buscando entender como a(s) espécie(s) interagem entre si e com o ambiente e como as populações se distribuem através do espaço. Neste contexto, a *difusão*, ou seja, o movimento espacial da espécie, é um termo central. O efeito ecológico da dispersão tem consequências inclusive na sobrevivência da espécie. Além disso, o tratamento matemático é de fundamental importância para o estudo desses fenômenos e muitos modelos veem sendo empregados (veja [71]). Uma abordagem bastante utilizada são as equações de *reação-difusão-advecção* e suas generalizações.

Em termos gerais, podemos considerar a seguinte equação parabólica como modelo de reação-difusão-advecção para uma espécie, proposto em [27] (veja equação (7)):

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}[d_2(x)\nabla(d_1(x)u) - u\vec{e}(x)] = f(x, u)u & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(t, x) = 0 & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

com dado inicial não negativo, onde Ω é um domínio limitado e regular do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. No contexto da Dinâmica de Populações a equação (1) pode ser interpretada do seguinte modo: Ω representa o habitat da espécie, $u(x)$ mede a densidade populacional em cada ponto $x \in \Omega$. A condição de fronteira homogênea de Dirichlet ($u(t, x) = 0$ em $(0, \infty) \times \partial\Omega$) significa que a fronteira do habitat é uma região inóspita para a espécie. Vale ressaltar que outras condições de fronteira tem interpretações do ponto de vista da Ecologia, por exemplo a condição de Neumann ($\nabla_x u(t, x) \cdot n = 0$ em $(0, \infty) \times \partial\Omega$), que significa que não há fluxo na fronteira, ou seja, a espécie não pode abandonar o habitat Ω , ou a condição de Robin ($k\nabla_x u(t, x) \cdot n + lu(t, x) = 0$ em $(0, \infty) \times \partial\Omega$, $k, l > 0$) que combina as condições de fronteira de Dirichlet e de Neumann. Com respeito aos termos que aparecem na primeira equação de (1), $-\operatorname{div}[d_2(x)\nabla(d_1(x)u)]$ modela a difusão da espécie, ou seja, seu movimento espacial, $\nabla[u\vec{e}(x)]$ é chamado termo de *advecção*, ele descreve um comportamento individual ou um processo de transporte físico, tais como o vento,

a correnteza de um rio etc. Já a função $f(x, u)$ (ou $f(x, u)u$) é o termo de *reação*, que representa a taxa local de reprodução por indivíduo, em outras palavras, a taxa de crescimento populacional per capita. A interpretação evolucionária de $f(x, u)$ é a aptidão média dos indivíduos em uma localidade x com densidade u . Destacamos também que eventualmente as funções d_1 e d_2 podem depender, por exemplo, de u , o que acarreta interpretações em Dinâmica de Populações, como veremos adiante. Do mesmo modo, f pode depender de ∇u , $|u|_1$, etc.

As soluções estacionárias de (1) são de particular interesse quando buscamos uma situação constante no tempo ou se queremos estudar o que ocorre às soluções de (1) quando t tende ao infinito. Nomeadamente, as soluções de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [d_2(x)\nabla(d_1(x)u) - u\vec{e}(x)] = f(x, u)u & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

são chamadas de soluções estacionárias de (1). A equação (2) é chamada de equação de equilíbrio relacionada a (1). Assim, as soluções de (2) fornecem informações das soluções de (1) a longo prazo, isto é, quando t tende ao infinito. Tais interpretações motivam o estudo de equações elípticas como (2). Ressaltamos ainda que as mesmas considerações seguem válidas quando consideremos um sistema ao invés de uma única equação.

Neste trabalho investigaremos equações e sistemas de equações elípticas com difusão não linear provenientes de modelos em Dinâmica de Populações. Motivados pela interpretação em Ecologia, buscaremos resultados de existência e unicidade de *soluções positivas*, usando principalmente métodos variacionais e métodos de Análise Não Linear, tais como sub e supersolução e bifurcação. Na medida do possível, interpretaremos nossos resultados no contexto da Ecologia.

Assim, este trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 faremos uma revisão do *background* matemático necessário para os capítulos posteriores, a saber: uma revisão sobre autovalores e o Princípio do Máximo para operadores uniformemente elípticos, em seguida apresentaremos alguns resultados de bifurcação disponíveis na literatura, abordando os resultados mais recentes. Por fim, apresentaremos um método de sub-supersolução para uma equação e alguns resultados gerais da teoria de Equações Diferenciais Parciais, Análise Funcional e Análise Não Linear. A maioria dos teoremas deste capítulo são conhecidos, por isso apenas indicaremos as referências adequadas com as demonstrações.

Nos Capítulos 2 e 3 estudaremos a seguinte equação elíptica:

$$\begin{cases} -\Delta(u + a(x)u^r) = \lambda u - b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado com fronteira regular, $p > 1$, $r > 0$, $a \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$ e $b \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha < 1$ são funções que podem se anular em subconjuntos de Ω . Observe que esta equação se enquadra no modelo (2) quando $d_2 \equiv 1$, $\vec{e} \equiv 0$ e d_1 é uma função que depende da posição x e da densidade u e é dada por $d_1(x, u) = 1 + a(x)u^{r-1}$. Por outro lado, a função $f(x, u) = \lambda - b(x)u^{p-1}$ é o conhecido termo de reação logístico degenerado. Por degenerado entendemos que $b(x)$ pode se anular em regiões de Ω . É comum referir-se a (3) como um modelo de reação-difusão, uma vez que o termo de advecção não está presente.

Especificamente, no Capítulo 2 apresentamos os resultados que obtivemos em [25] e que tratam da equação (3) com $r > 1$. De acordo [85], do ponto de vista das aplicações o conjunto $\{x \in \Omega; a(x) > 0\}$ denota uma zona onde movimento é repulsivo, ou seja, a espécie evita aglomeração. Neste caso a difusão depende da densidade u , quanto maior u , maior a difusão/dispersão. Em contrapartida, o conjunto $\{x \in \Omega; a(x) = 0\}$ representa uma zona onde o movimento é linear, ou seja, a difusão ocorre de modo randômico e independentemente da densidade u . Por outro lado, o conjunto $\{x \in \Omega; b(x) = 0\}$ representa uma zona de refúgio para espécie (veja Seção 2.1).

Existem diversos trabalhos focados no estudo do caso $a \equiv 0$, como [72, 43, 41, 70, 71, 21, 62] e alguns resultados parciais quando $a \geq a_0 > 0$, como [67, 77] (veja mais detalhes na Seção 2.1), porém, ao menos em nosso conhecimento, não existe qualquer trabalho tratando o caso em que a e b se anulam simultaneamente. Neste sentido, nosso resultado é pioneiro em acoplar uma equação logística degenerada com uma degeneração linear na difusão não linear. O principal resultado deste capítulo é o Teorema 2.2 que mostra que a posição relativa entre $\{x \in \Omega; a(x) = 0\}$ e $\{x \in \Omega; b(x) = 0\}$ determina o intervalo de valores de λ para os quais (3) admite solução positiva e também fornece uma análise do comportamento pontual das soluções positivas com respeito ao parâmetro λ . Para enunciar este resultado, adotaremos a seguinte notação

$$\Omega_{a+} := \{x \in \Omega; a(x) > 0\}, \quad \text{e} \quad \Omega_{a0} := \Omega \setminus \overline{\Omega_{a+}}.$$

Assumiremos também a seguinte hipótese:

(H_1) Os conjuntos abertos

$$\Omega_{b+} := \{x \in \Omega; b(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_{b0} := \Omega \setminus \overline{\Omega}_{b+}$$

são de classe $\mathcal{C}^2$ e Ω_{b0} consiste de finitas componentes conexas B_i , $1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, tais que

$$\overline{B}_i \subset \Omega, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \overline{B}_j \cap \overline{B}_i = \emptyset \quad \text{se } j \neq i.$$

A Figura 2.2 no Capítulo 2 apresenta um esboço de uma configuração admissível para os conjuntos Ω_{a0} e Ω_{b0} .

No caso em que $\Omega_{a0} \cap B_i \neq \emptyset$, o seguinte problema de autovalor desempenhará um papel fundamental:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \chi_{\Omega_{a0} \cap B_i} u & \text{em } B_i, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_i. \end{cases} \quad (4)$$

Assim, denotando

$$\lambda_{0,i} = \begin{cases} \text{principal autovalor de (4)} & \text{se } \Omega_{a0} \cap B_i \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se } \Omega_{a0} \cap B_i = \emptyset \end{cases}$$

e supondo, sem perda de generalidade, que a indexação dos B_i 's já foi realizada de modo que os autovalores $\lambda_{0,i}$ satisfaçam

$$\lambda_{0,1} = \dots = \lambda_{0,m_1} < \lambda_{0,m_1+1} \leq \dots \leq \lambda_{0,m}$$

para algum $m_1 \in \{1, \dots, m-1\}$ ou

$$\lambda_{0,1} = \dots = \lambda_{0,m},$$

então, o Teorema 2.2 é enunciado como segue:

Teorema 0.1 *Supondo (H_1).*

a) Se $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$, então (3) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$. Além disso, para $p \geq r$, se existe a solução é única. Mais ainda, denotando por u_λ esta única solução, então a aplicação

$$\lambda \in (\lambda_1, \infty) \mapsto u_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

é crescente e de classe $\mathcal{C}^1$ e u_λ satisfaz

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = 0$$

e

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} u_\lambda = \infty \quad \text{uniformemente em } \Omega_{b0}.$$

b) Se $\Omega_0 := \Omega_{a0} \cap \Omega_{b0} \neq \emptyset$ e $p > r$, então (3) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$. Além disso, se existe a solução é única. Mais ainda, denotando por u_λ esta única solução, então a aplicação

$$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1}) \mapsto u_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

é crescente e de classe $\mathcal{C}^1$ e u_λ satisfaz

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = 0$$

e

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} u_\lambda(x) \begin{cases} = \infty & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i, \\ < \infty & \text{se } x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i. \end{cases}$$

Os diagramas de bifurcação que ilustram estes resultados podem ser vistos no Capítulo 2, Figura 2.3. Destacamos que para provar que este último limite é finito, necessitaremos estudar as soluções de problemas elípticos com singularidade na fronteira (veja Seção 2.3). Ressaltamos ainda que o teorema acima inclui o caso $b \equiv 0$.

O Capítulo 3 é dedicado aos resultados obtidos em [24] e que lidam com a equação (3) com $0 < r < 1$ e $b \geq 0$ constante, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta(u + a(x)u^r) = \lambda u - bu^p & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5)$$

A presença da difusão não linear u^r , $0 < r < 1$, é conhecido na literatura como *difusão rápida*. Nossa principal contribuição é apresentar um estudo relativamente completo concernente a existência e multiplicidade de solução positiva de (5) quando $\{x \in \Omega; a(x) = 0\}$ possui medida não nula (veja Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3), além de analisar o efeito da interação entre a difusão não linear $u + a(x)u^r$ e o termo de reação logístico $\lambda u - bu^p$.

Com o intuito de provar tais resultados aplicaremos diferentes técnicas, tais como: sub-supersolução, teoria de bifurcação e métodos variacionais.

Precisamente, considerando o autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \mathcal{K}_{\Omega_{a0}} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

quando $\Omega_{a0} \neq \emptyset$ e denotando por

$$\lambda_{a0} = \begin{cases} \text{principal autovalor de (6)} & \text{se } \Omega_{a0} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se } \Omega_{a0} = \emptyset, \end{cases}$$

o principal resultado do Capítulo 3 para o caso $b = 0$ é o Teorema 3.1 que é enunciado como segue:

Teorema 0.2 *Se $b = 0$, então (5) possui uma solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0})$. Além disso, existe uma família de soluções positivas u_λ de (5) satisfazendo*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = \infty$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{a0}} \|u_\lambda\|_0 = 0 \quad \text{se } \lambda_{a0} < \infty.$$

Enquanto que o principal resultado para o caso $b \neq 0$ é o Teorema 3.2, ou seja,

Teorema 0.3 *Se $b > 0$, considere*

$$\Lambda_b = \{\lambda \in \mathbb{R}; \text{ (5) possui uma solução positiva}\}.$$

Então $\Lambda_b \neq \emptyset$ e denotando por $\lambda^(b) = \inf \Lambda_b$, temos $\lambda_1 < \lambda^*(b) \leq \lambda_{a0}$. Além disso,*

- (a) *Se $\Omega_{a0} = \emptyset$, então (5) possui uma solução positiva para todo $\lambda \geq \lambda^*$.*
- (b) *Se $\Omega_{a0} \neq \emptyset$, então λ_{a0} é o único ponto de bifurcação de soluções positivas de (5) a partir da solução trivial. Além disso, se $\lambda^* < \lambda_{a0}$ (resp. $\lambda^* = \lambda_{a0}$), então (5) possui solução positiva para todo $\lambda \geq \lambda^*$ (resp. $\lambda > \lambda^*$).*
- (c) *No caso em que $\lambda^* < \lambda_{a0}$, então para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_{a0})$, (5) possui pelo menos duas soluções positivas ordenadas, isto é, w_λ e v_λ soluções positivas de (5) satisfazendo*

$$w_\lambda < v_\lambda.$$

O Teorema 3.3 fornece algumas propriedades das soluções positivas com respeito ao parâmetro b . Especificamente,

Teorema 0.4 *Supondo $b > 0$.*

(a) *Para cada $\lambda \geq \lambda^*(b)$, (5) possui uma solução maximal denotada por $W_{\lambda(b)}$. Isto é, toda solução, w , de (5) satisfaz*

$$w \leq W_{\lambda(b)}.$$

Além disso, se $\lambda^ \leq \mu < \lambda$, então $W_{\mu(b)} < W_{\lambda(b)}$.*

(b) *$\lambda^*(b)$ satisfaz*

$$\lambda^*(b) \rightarrow \lambda_1 \quad \text{quando } b \rightarrow 0.$$

(c) *A solução maximal $W_{\lambda(b)}$ verifica*

$$\lim_{b \rightarrow 0} \|W_{\lambda(b)}\|_0 = \infty \quad \forall \lambda(b) > \lambda^*(b).$$

Os diagramas de bifurcação obtidos a partir destes resultados estão ilustrados no Capítulo 3, Figuras 3.1, 3.2 e 3.3.

A partir do Capítulo 4 passamos ao estudo de uma classe sistemas de equações elípticas quasilineares. Do ponto de vista da Dinâmica de Populações tais sistemas modelam uma ampla variedade aplicações e tratam de situações mais realísticas se comparados aos sistemas semilineares (veja, por exemplo, [81]). Tomemos como modelo o seguinte sistema estacionário:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(u, v)\nabla u + S(u, v)\nabla v) = f_1(x, u, v)u & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(Q(u, v)\nabla u + R(u, v)\nabla v) = f_2(x, u, v)v & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Em (7), P – R e Q – S são as taxas de *autodifusão* e de *difusão cruzada*, respectivamente. Ressaltamos ainda que outras formas de autodifusão e difusão cruzada aparecem na literatura, bem como outras nomenclaturas são utilizadas, dependendo da natureza do fenômeno modelado. Veja, por exemplo, [27, 47] e suas referências.

Existem três tipos básicos de interação entre espécies: cooperação (mutualismo ou simbiose), competição e predador-presa, e os termos de reação f_1 e f_2 determinam o tipo da interação. Como exemplo, consideraremos os termos de reação de Lotka-Volterra,

uma vez que é a forma mais simples e que ainda é muitas vezes útil para entender como diferentes fatores afetam os resultados das interações entre as espécies. Assim, dados parâmetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e constantes positivas $b_i, c_i, i = 1, 2$, temos:

- Modelo de cooperação:

$$\begin{aligned} f_1(x, u, v) &= \lambda - b_1 u + c_1 v, \\ f_2(x, u, v) &= \mu + b_2 u - c_2 v. \end{aligned}$$

- Modelo de competição:

$$\begin{aligned} f_1(x, u, v) &= \lambda - b_1 u - c_1 v, \\ f_2(x, u, v) &= \mu - b_2 u - c_2 v. \end{aligned}$$

- Modelo de predador-presa:

$$\begin{aligned} f_1(x, u, v) &= \lambda - b_1 u + c_1 v, \\ f_2(x, u, v) &= \mu - b_2 u - c_2 v. \end{aligned}$$

Para mais detalhes e outros exemplos de termos de reação utilizados, recomendamos [27], Seção 3.

Observe que (7) admite três tipos de soluções não negativas: a solução trivial $(0, 0)$, as soluções semitriviais $(u, 0)$, $u > 0$ e $(0, v)$, $v > 0$ onde u e v satisfazem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(u, 0)\nabla u) = f(x, u, 0)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(R(0, v)\nabla v) = g(x, 0, v)v & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (9)$$

respectivamente, e os *estados de coexistência*, ou seja, soluções (u, v) com ambas as componentes não negativas e não nulas. Segundo [27], uma questão em Ecologia que é central no estudo da interação entre espécies é determinar quando elas podem coexistir e como a coexistência é influenciada pela dispersão. Ou seja, determinar quando há estados de coexistência e compreender a influência dos termos de difusão neste processo. Além da motivação proveniente destas interpretações, sistemas quasilineares são de particular interesse devido a dificuldade matemática desse estudo. A presença dos termos de difusão cruzada tornam o sistema fortemente acoplados, acarretando várias dificuldades técnicas.

Com respeito a abordagem matemática para responder a estas questões, nas últimas décadas sistemas elípticos quasilineares como (7) vem sendo investigados por diversos autores e vários métodos tem sido aplicados para determinar existência de estado de coexistência, por exemplo, teoria de índice ([77, 78, 79, 55, 49]), método de sub-supersolução ([74]) e teoria de bifurcação ([39, 36, 80, 53, 69, 54, 87]). Ressaltamos ainda que a maioria dos trabalhos que usam teoria de bifurcação lidam com sistemas do tipo

$$\begin{cases} -\Delta(\phi(u, v)) = f(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta(\psi(u, v)) = g(x, u, v) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (10)$$

com alguma condição de contorno. Neste caso, a abordagem padrão é aplicar a mudança de variável $U = \phi(u, v)$ e $V = \psi(u, v)$, convertendo (10) em um sistema semilinear desacoplado. Entretanto, em geral sistemas como (7) não podem ser escritos na forma (10) e não existe uma mudança de variável imediata que transforme (7) em um sistema semilinear desacoplado.

Neste sentido, inspirados pelo teorema de bifurcação unilateral para sistemas semilineares devido a [56] (veja Teorema 1.28), no Capítulo 4 provaremos uma versão deste resultado para o seguinte sistema de equações elípticas quasilineares:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(u, v)\nabla u + S(u, v)\nabla v) = \lambda a(x)u + f(x, u)u + F(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(Q(u, v)\nabla u + R(u, v)\nabla v) = \mu b(x)u + g(x, v)v + G(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e as funções $P, Q, R, S : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $F, G : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(H_{PQRS}) $P(u, v)$, $R(u, v)$, $Q(u, v)$ e $S(u, v)$ são funções reais definidas em $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ de classe $\mathcal{C}^2$ tais que:

$$Q(u, 0) = 0 \quad \forall u \geq 0,$$

$$S(0, v) = 0 \quad \forall v \geq 0,$$

$$|P(u, v)R(u, v) - Q(u, v)S(u, v)| \geq \delta_0 > 0 \quad \forall u, v \geq 0$$

e

$$P(u, v) \geq P_0 > 0 \quad \text{e} \quad R(u, v) \geq R_0 > 0 \quad \forall u, v \geq 0,$$

onde δ_0 , P_0 e R_0 são constantes.

(H_{ab}) $a, b : \overline{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ são funções contínuas e não nulas.

(H_{fg}) $f(x, w)$ e $g(x, w)$ são funções reais definidas em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, contínuas em x e de classe $\mathcal{C}^1$ em w tais que

$$f(x, 0) = g(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega};$$

(H_{FG}) $F(x, u, v)$ e $G(x, u, v)$ são funções reais definidas em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, contínuas em x e de classe $\mathcal{C}^1$ em (u, v) .

Neste estudo, o seguinte problema de autovalor desempenhará um papel fundamental:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M_1(v)u\nabla v + M_2(v)\nabla u) + B(x)u = \lambda C(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12)$$

onde $B, C \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, com $C > 0$, $M_1, M_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \mathring{P}$ e existe uma constante M_0 tal que $M_2 \geq M_0 > 0$. A existência deste autovalor é discutida no Capítulo 1 e será denotado por

$$\sigma_1[-\operatorname{div}(M_1(v)\nabla v + M_2(v)\nabla) + B(x); C(x)].$$

Nessas condições, o principal resultado do Capítulo 4 nos diz que, se temos uma solução semitrivial não degenerada (no sentido de que a respectiva equação linearizada admite apenas a solução trivial, veja Definição 4.2), então existe um continuum de estados de coexistência de (7) emanando da referida solução semitrivial. Além disso, é possível inferir informações sobre o comportamento global deste continuum. Especificamente, denotando por θ_λ e θ_μ uma solução não negativa de (8) e (9), respectivamente, temos:

Teorema 0.5 *Suponha que as hipóteses (H_{PQRS}) , (H_{ab}) , (H_{fg}) e (H_{FG}) são satisfeitas. Seja $(\lambda, \theta_\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathring{P}$ uma solução não degenerada de (8) e considere*

$$\mu_\lambda := \sigma_1[-\operatorname{div}(Q_v(\theta_\lambda, 0)\nabla\theta_\lambda + R(\theta_\lambda, 0)\nabla) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda; b].$$

Então do ponto $(\mu, u, v) = (\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$ emana um continuum

$$\mathfrak{C} \subset \mathbb{R} \times \mathring{P} \times \mathring{P}$$

de estado de coexistência de (7) tal que: ou

1. $\mathfrak{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$; ou

2. Existe uma solução positiva (μ^*, θ_{μ^*}) de (9) tal que

$$\lambda = \sigma_1 [-\operatorname{div}(S_u(0, \theta_{\mu^*}) \nabla \theta_{\mu^*} + P(0, \theta_{\mu^*}) \nabla) - F(x, 0, \theta_{\mu^*}) \theta_{\mu^*}; a]$$

e $(\mu^*, 0, \theta_{\mu^*}) \in \overline{\mathfrak{E}}$; ou

3. Existe uma outra solução positiva de (8), (λ, ψ_λ) , com $\psi_\lambda \neq \theta_\lambda$ tal que

$$(\sigma_1 [-\operatorname{div}(Q_v(\psi_\lambda, 0) \nabla \psi_\lambda + R(\psi_\lambda, 0) \nabla) - G(x, \psi_\lambda, 0) \psi_\lambda; b], \psi_\lambda, 0) \in \overline{\mathfrak{E}};$$

ou

4. $\lambda = \sigma_1 [-\operatorname{div}(P(0, 0) \nabla); a]$ e $(\sigma_1 [-\operatorname{div}(R(0, 0) \nabla); b], 0, 0) \in \overline{\mathfrak{E}}$.

Por comodidade, este resultado será enunciado novamente no Capítulo 4 como Teorema 4.3. Veja também o Teorema 4.4 para uma versão com uma bifurcação a partir da semitrivial $(0, \theta_\mu)$. A demonstração deste teorema é baseada nos recentes resultados de bifurcação global unilateral devidos a [66] (veja também [60] e Seção 1.2.2), que tratam de operadores mais gerais e com menos regularidade que os clássicos resultados de bifurcação de Crandall e Rabnowitz ([76] e [28]). Para ilustrar nosso resultado, consideraremos o seguinte modelo de simbiose com autodifusão e difusão cruzada, estudado em [67]:

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta((1 + \alpha v + \beta u)v) = v(\mu - v + cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda, \mu, \alpha, \beta, b, c \in \mathbb{R}$ com $\alpha, \beta, b, c > 0$. Usando teoria de índice de ponto fixo sobre cone positivo de [30], os autores determinam condições sobre os parâmetros λ, μ que garantem existência e não existência de estados de coexistência (veja Teorema 4.17). Na Seção 4.6 provaremos o mesmo resultado usando diretamente os Teoremas 4.3 e 4.4. Os resultados deste capítulo fazem parte do artigo [23] que está em preparação.

No Capítulo 5 apresentamos os resultados obtidos em [22]. Assim, também aplicaremos os teoremas de bifurcação global unilateral para sistemas elípticos quasilineares obtidos no Capítulo 4 para estudar o seguinte modelo de predador-presa proposto por [50] (veja também [27]):

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{u R'(v) \nabla v}{R(v)[R(v) + g(v)]} \right] = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -d_v \Delta v = v(\mu - v - cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13)$$

onde $d_v, b, c > 0$ são constantes positivas, $R, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathcal{C}^2$ que satisfazem $R(0) > 0$, $g(s), R'(s) > 0$ e $C \geq R(s)$ para todo $s \geq 0$ e para alguma constante $C > 0$. Do ponto de vista da Dinâmica de Populações, u e v denotam as densidades do predador e da presa, respectivamente. A parcela $uR'(v)\nabla u/(R(v)[R(v) + g(v)]$ modela a difusão cruzada (ou *prey-taxis*), onde R descreve a *taxa de rotação* e g a saciedade do predador. Neste sentido, este modelo leva em consideração que a saciedade da predador influencia em seu movimento espacial. E de fato, naturalmente se espera que predadores famintos se movam com maior frequência em direção à presa.

Existem artigos que tratam modelos semelhantes a (13), como por exemplo [86, 88, 48] e suas referências. Por outro lado, o termo de difusão em (13) é mencionado por [27] como um modelo com várias questões em aberto e, ao menos em do nosso conhecimento, o sistema (13) com o presente termo de difusão do predador não havia sido estudado.

Para enunciar o principal resultado de existência de estado de coexistência referente a (13), note que as soluções semitriviais são soluções de

$$\begin{cases} -R_0\Delta u = u(\lambda - u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -d_v\Delta u = u(\mu - u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (14)$$

onde $R_0 := R(0)^{-1}$. Denotando estas soluções por $\theta_{[R_0, \lambda]}$ e $\theta_{[d_v, \mu]}$, respectivamente, e definindo

$$F(\mu) = \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}/R(\theta_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}; e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}], \quad \mu \geq \sigma_1[-d_v\Delta]$$

e

$$G(\lambda) = \sigma_1[-d_v\Delta + c\theta_{[R_0, \lambda]}], \quad \lambda \geq \sigma_1[-R_0\Delta],$$

onde

$$h(s) := \int_0^s \frac{R'(t)}{R(t) + g(t)} dt, \quad s > 0,$$

temos o seguinte resultado referente a existência e não existência de estado de coexistência de (11) (veja Teoremas 5.1 e 5.2):

Teorema 0.6 *a) Se $\mu \leq \sigma_1[-d_v\Delta]$, então (13) não admite estado de coexistência.*

b) Se $\mu > \sigma_1[-d_v\Delta]$, então (13) não admite estado de coexistência para $\lambda < F(\mu)$.

c) Defina

$$\mathcal{R} := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > F(\mu) \text{ e } \mu > G(\lambda)\}.$$

Se $(\lambda, \mu) \in \mathcal{R}$ então (13) possui pelo menos um estado de coexistência.

Na última seção do Capítulo 5 vamos analisar o efeito da taxa de rotação na região de coexistência $\mathcal{R}$. Para isso, vamos considerar a seguinte função proposta por [46]:

$$R_\beta(v) = k_0 + k_1 \left(\frac{v}{k_2 + v} \right)^\beta,$$

onde k_0, k_1, k_2 e β são constantes positivas. De acordo com os autores em [46], o parâmetro β pode ser pensado como um limiar de rotação: valores pequenos resultam em um comportamento em que o predador muda de lento para rápido sua taxa de rotação sob densidades de presa relativamente baixas; reciprocamente, valores grandes de β resultam em um comportamento em que o predador não muda para taxas de rotação rápidas, mesmo sob alta densidade de presa. Em outras palavras, podemos pensar que, quando β é pequeno, o predador é um bom caçador, no sentido de que, mesmo sob baixas densidades de presa, é capaz de mover-se de maneira mais eficiente em busca de sua caça. Por simplicidade, iremos supor também

$$g \equiv \text{constante}.$$

Com estas considerações, denotando por $\mathcal{R}_\beta$ a região de coexistência de (13) com R_β ao invés de R , provaremos que as seguintes inclusões ocorrem (veja Lemas 5.6 e 5.7):

$$\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}_{\beta_2} \subset \mathcal{R}_{\beta_1} \subset \mathcal{R}_0 \quad \forall \beta_1, \beta_2 > 0; \beta_1 < \beta_2,$$

onde $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_\infty$ denotam as regiões limite $\lim_{\beta \rightarrow 0} \mathcal{R}_\beta$ e $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{R}_\beta$, respectivamente. Tais resultados serão interpretados no contexto da Dinâmica de populações.

Por fim, vamos abordar agora alguns problemas que não foram solucionados durante a realização deste trabalho e comentar sobre possíveis líneas de pesquisas que podem nortear nossas investigações futuras.

Sobre a equação estudada no Capítulo 2, destacamos os seguintes problemas em aberto:

- Note que o Teorema 0.1 b) não fornece informação do comportamento pontual $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{0,1}} u_\lambda(x)$, $x \in \partial B_i$, $i = 1, \dots, m_1$. Em contrapartida, no caso $a \equiv 0$ é bem conhecido que este limite tende ao infinito (veja [65], Teorema 4.3). Neste sentido não foi possível estender tal teorema para nosso caso. Vale ressaltar que a ferramenta chave para obter esta conclusão é o Teorema 3.2 de [65] que, grosso modo, nos diz que o principal autovalor do operador Laplaciano em $\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N; d(x, \Omega) < \delta\}$

sob a condição de fronteira homogênea de Dirichlet é diferenciável com respeito a δ , além de calcular sua derivada, permitindo expressar tal autovalor em termos de λ_1 e δ via a Fórmula de Taylor. Tendo isso em mente, acreditamos que, sendo possível conseguir um resultado similar para autovalores com peso como $\lambda_{0,i}$ (veja (4)), o comportamento pontual das soluções de (3) pode ser obtido adaptando os argumentos do Teorema 4.3 de [65].

- É conhecido também que, no caso $a \equiv 0$, as soluções positivas de (3) convergem pontual em $\Omega \setminus \cup_{i=1}^{m_1} \overline{B_i}$ para a solução larga associada (veja Teorema 4.8 em [62]). Também não mostramos este resultado para o caso $a \not\equiv 0$, pois para isso necessitamos conhecer o limite em ∂B_i , $i = 1, \dots, m_1$ comentado no item anterior.
- De um modo mais geral, destacamos também dois estudos que ficaram de fora do escopo deste trabalho: a análise da equação parabólica associada a (3) como é feita, por exemplo, em [62] para o caso $a \equiv 0$; e o estudo de soluções largas de problemas elípticos com difusão não linear, ou seja, problemas da forma

$$\begin{cases} -\Delta(\varphi(x, u)) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = \infty & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este problema tem sido pouco abordado na literatura.

Com respeito aos problemas em aberto relacionados à equação estudada no Capítulo 3, temos:

- No Teorema 0.2 não foi possível fornecer informações de $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{a0}} \|u_\lambda\|_0$ no caso em que $\lambda_{a0} = \infty$.
- Para completar o Teorema 0.3 seria interessante provar existência ou não existência de solução não trivial para (5) com $\lambda = \lambda^*$ no caso $\lambda^* = \lambda_{a0}$.
- Nossos resultados admitem o diagrama de bifurcação representado pela Figura 3.3 (veja mais detalhes no Capítulo 3). Essa suspeita poderia ser confirmada estudando se ocorrer ou não a presença *isolas*, ou seja, uma componente compacta do conjunto das soluções positivas de (5) afastadas da solução trivial (para um conceito preciso, veja Definição 2.1 de [16]). Neste sentido, o estudo de *isolas* (em equações elípticas em geral) pode ser objeto de futuras pesquisas.

Ainda sobre a equação estuda nos Capítulos 1 e 2, observe que não abordamos o caso superlinear, ou seja, quando $b(x)$ é uma função negativa ou mesmo que pode mudar de sinal. Observamos também que já temos alguns resultados em desenvolvimento nesta direção.

Com respeito aos resultados do Capítulo 4 enfatizamos que sistemas elípticos quasilineares como (11) são foco de nossos estudos atualmente. Neste sentido, possuímos trabalhos em andamento e perspectivas de trabalhos a curto prazo. Destacamos dois pontos:

- Aplicar o Teorema 0.5 a outros casos particulares de modelos em Dinâmica de Populações.
- Obter resultados de cotas a priori. Esta é uma dificuldade técnica significativa em sistemas gerais como (11). Sobre o tema, indicamos [55].

Sobre o sistema estudado no Capítulo 5, os seguintes problemas não foram solucionados:

- Obter um resultado de existência ou não existência de estado de coexistência de (13) para o caso $\lambda > \sigma_1[-R_0\Delta]$ e $\sigma_1[-d_v\Delta] < \mu < G(\lambda)$.
- Estudar o efeito da taxa de rotação com g não necessariamente constante.

Para finalizar, apresentamos duas classes de problemas gerais que podem servir de linhas de pesquisas:

- (i) Estudar equações com difusão não linear do tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(d(x, u)\nabla u) = f(\lambda, x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Referente a este problema, como referências principais podemos citar [18, 8, 20, 75] e suas referências.

- (ii) Estudar sistemas elípticos acoplando difusões não lineares degeneradas e/ou áreas de refugio, como ocorre em (3). Em termos gerais, podemos pensar em sistemas da forma

$$\begin{cases} -\Delta[(1 + a_1(x)u + \alpha_1 v)u] = (\lambda - b_1(x)u \pm \beta_1 v)u & \text{em } \Omega, \\ -\Delta[(1 + a_2(x)v + \alpha_2 u)v] = (\mu - b_2(x)v \pm \beta_2 u)v & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\beta_2$ são constantes não negativas e $a_1, a_2 \in \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, $b_1, b_2 \in \mathcal{C}^\gamma(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$ são funções que eventualmente podem se anular em subconjuntos de Ω . Esta é a generalização natural da equação (3) a sistemas do tipo Shigesada-Kawasaki-Teramoto (veja [81]) com termos de reação do tipo Lotka-Volterra. Podemos citar os seguintes artigos relacionados a este modelo: [38, 51, 64] e suas referências.

Ou ainda, mais geralmente, estudar sistemas quasilineares da forma (7) com funções P, Q, R, S dependendo de $x \in \Omega$, ou seja:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(x, u, v)\nabla u + S(x, u, v)\nabla v) = f_1(x, u, v)u & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(Q(x, u, v)\nabla u + R(x, u, v)\nabla v) = f_2(x, u, v)v & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

que também possui poucos resultados disponíveis na literatura.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os resultados prévios que serão utilizados ao longo deste trabalho, muito dos quais são conhecidos na literatura e por isso serão apresentados sem demonstração. A distribuição dos conteúdos será feita da seguinte maneira: na Seção 1.1 apresentaremos alguns dos principais resultados disponíveis referentes ao autovalor principal de operador elípticos de segunda ordem, bem como a caracterização do Princípio do Máximo. A Seção 1.2 é dedicada aos resultados de bifurcação global que serão úteis nos próximos capítulos. Na seção 1.3 enunciaremos alguns teoremas de sub e supersolução. Por fim, na Seção 1.4 coletaremos alguns resultados gerais de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais.

1.1 Autovalor Principal e Princípio do Máximo Forte

Nesta seção faremos uma revisão sobre uma certa classe de problemas de autovalor e o Princípio do Máximo Forte que serão de fundamental importância para os seguintes capítulos. Os resultados aqui apresentados são baseados em [59], [57] e [33].

Inicialmente, consideremos o operador diferencial de segunda ordem dado por

$$\mathcal{L} := - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial}{\partial_i} + c(x) \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

com

$$a_{ij} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \quad i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{e} \quad b_j, c \in L^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Trataremos o caso em que $\mathcal{L}$ é *uniformemente elíptico*. Precisamente,

Definição 1.1 Dizemos que o operador $\mathcal{L}$ definido em (1.1) é uniformemente elíptico quando existe uma constante $a > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a |\xi|^2,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

Durante toda esta seção $\mathcal{L}$ será um operador uniformemente elíptico com coeficientes satisfazendo (1.2).

Fixemos agora algumas notações que serão utilizadas ao longo de todo este trabalho. Dadas funções mensuráveis

$$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

escreveremos $f \geq g$ se $f(x) \geq g(x)$ quase sempre (abreviação: q.s.) em Ω . Além disso, escrevemos $f > g$ quando $f \geq g$ e $f \neq g$. Similarmente, para todos $f, g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, dizemos que $f \geq g$ (resp. $f > g$) quando $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ (resp. $f(x) > g(x)$ e existe $x \in \partial\Omega$ tal que $f(x) > g(x)$).

Feitas essas considerações iniciais, podemos começar o estudo de um problema que é central nesta seção e no desenvolvimento dos resultados dos seguintes capítulos que é a questão da *existência de um autovalor principal* de $\mathcal{L}$.

Definição 1.2 (Autovalor Principal) Um valor $\lambda \in \mathbb{C}$ é chamado autovalor de $\mathcal{L}$ se o problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

admite solução não trivial.

Além disso, $\lambda \in \mathbb{R}$ é chamado autovalor principal de $\mathcal{L}$ em Ω se (1.3) admite uma solução que não muda de sinal. Caso exista, denotaremos o autovalor principal por

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]. \quad (1.4)$$

Além disso, quando não houver risco de confusão, omitiremos o superíndice Ω e escreveremos simplesmente

$$\sigma_1[\mathcal{L}].$$

O primeiro teorema desta seção lida com a existência e unicidade do autovalor principal de $\mathcal{L}$, além de fornecer algumas propriedades importantes:

Teorema 1.3 *Existe um único autovalor principal, $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]$, de $\mathcal{L}$ e existe uma única autofunção associada $\varphi_0 \in \mathring{P} \cap \mathcal{C}^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$ normalizada. Além disso, as seguintes propriedades se verificam:*

(i) $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]$ é algebricamente simples, isto é, todas as autofunções são múltiplos de φ_0 .

Ou de maneira equivalente:

$$N[\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]I - \mathcal{L}] = \text{span}\langle \varphi_0 \rangle.$$

(ii) $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]$ é dominante, isto é, qualquer outro autovalor λ de (1.3) satisfaz

$$\text{Re } \lambda > \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}],$$

onde $\text{Re } \lambda$ denota a parte real de $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) Para todo

$$k > -\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]$$

o operador (linear e contínuo)

$$(\mathcal{L} + k)^{-1} : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega), \quad p > N$$

é positivo, compacto e irredutível.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [59] (veja Capítulo 7).

Além deste teorema, as seguintes propriedades de monotonia são extremamente úteis nas aplicações.

Teorema 1.4 (Propriedades de monotonia) (i) *Seja $\tilde{c} \in L^\infty(\Omega)$. O autovalor*

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \tilde{c}]$$

é crescente e contínuo em $\tilde{c}$, isto é,

$$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in L^\infty(\Omega), \quad \tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_2 \Rightarrow \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \tilde{c}_1] \leq \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \tilde{c}_2]$$

e se $\tilde{c}_1(x) < \tilde{c}_2(x)$ em um subconjunto de medida não nula de Ω , então $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \tilde{c}_1] < \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \tilde{c}_2]$; e

$$\tilde{c}_n, \tilde{c} \in L^\infty(\Omega), \quad \tilde{c}_n \rightarrow \tilde{c} \text{ em } L^\infty(\Omega) \Rightarrow \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \tilde{c}_n] \rightarrow \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} + \tilde{c}] \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

(ii) $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]$ é decrescente em Ω , isto é, dado $D \subset \Omega$ um subdomínio com fronteira regular, então

$$\sigma_1^D[\mathcal{L}] > \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}].$$

A demonstração pode ser encontrada em [59] (veja Proposição 8.1.3, Corolário 8.1.4 e Proposição 8.1.2).

O próximo teorema caracteriza o famoso Princípio do Máximo Forte, relacionando-o com a positividade de $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}]$.

Teorema 1.5 *Seja $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathcal{L}$ satisfaz o **Princípio do Máximo Forte**, isto é, se

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com pelo menos uma das desigualdades estrita, então $u \in \mathring{P}$.

(ii) $\mathcal{L}$ satisfaz o **Princípio do Máximo**, isto é,

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \Rightarrow u \geq 0.$$

(iii) $\mathcal{L}$ admite uma **supersolução estrita positiva** $h \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, isto é,

$$\begin{cases} \mathcal{L}h \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ h \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com pelo menos uma das desigualdades estrita.

(iv) $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}] > 0$.

(v) O operador resolvente do problema linear

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = f \in L^p(\Omega) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

está bem definido e é fortemente positivo.

A demonstração deste pode ser encontrada, por exemplo, em [59] (veja Teorema 7.5.2).

Sobre o parágrafo (v), por operador resolvente, entendemos a aplicação

$$\mathcal{R} : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \cap \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

que a cada $f \in L^p(\Omega)$, $p > N$ é associado à $w = \mathcal{R}(f) \in L^p(\Omega) \cap \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, a única solução do problema linear (1.5). Por fortemente positivo entendemos que

$$\mathcal{R}(P \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{P},$$

ou seja, se $f > 0$, então a solução não trivial de (1.5) $w = \mathcal{R}(f)$ satisfaz $w(x) > 0$ em Ω e $(\partial w / \partial n)(x) < 0$ sobre $\partial\Omega$.

Vale ressaltar que esta poderosa ferramenta foi demonstrada em 1994 de forma independente por [63] e [11], posteriormente generalizado por [5], [58] e [4]. Observamos também que estas equivalências seguem validas para outras condições de fronteira. Sugere-remos [59] que possui uma abordagem bastante completa sobre o tema.

No que segue, apresentaremos alguns resultados referentes ao seguinte *problema de autovalor com peso*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda W(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $W \in L^\infty(\Omega)$. Denotando

$$\mu(\lambda) = \sigma_1^\Omega[\mathcal{L} - \lambda W] \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

um valor $\lambda^* \in \mathbb{R}$ é dito um *autovalor principal* de (1.6) se

$$\mu(\lambda^*) = 0.$$

O próximo resultado coleta algumas propriedades importantes da aplicação $\mu(\lambda)$.

Proposição 1.6 *Supondo $W \in L^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$. Então a aplicação $\mu(\lambda)$ definida por (1.7) satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mu(\lambda)$ é real analítica e concava, no sentido de que $\mu''(\lambda) \leq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Portanto, ou $\mu'' = 0$ em $\mathbb{R}$, ou existe um conjunto discreto $Z \subset \mathbb{R}$ tal que $\mu''(\lambda) < 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus Z$.

(ii) Assumindo que existe $x_+ \in \Omega$ e $R > 0$ tais que

$$B_+ := B_R(x_+) \subset \Omega \quad \text{e} \quad \inf_{B_+} V > 0.$$

Então,

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \mu(\lambda) = -\infty. \quad (1.8)$$

Suponha, em adicional, que $W \geq 0$ em Ω . Então $\mu'(\lambda) < 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para uma demonstração deste resultado veja [59], Teorema 9.1.1.

O próximo teorema caracteriza a existência de principal autovalor de (1.6) no caso em que $W > 0$.

Teorema 1.7 *Supondo que $W \geq 0$ e que existem $x_+ \in \Omega$ e $R > 0$ tais que*

$$B_+ := B_R(x_+) \subset \Omega \quad e \quad \inf_{B_+} W > 0.$$

Então, (1.6) possui um autovalor principal se, e somente se,

$$\mu(-\infty) := \lim_{\lambda \downarrow -\infty} \mu(\lambda) > 0.$$

Além disso, este autovalor é único se existe e será denotado por

$$\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}; W].$$

E ainda $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}; W]$ é um autovalor simples de $\mathcal{L} - \lambda W$ com peso W , no sentido de que

$$W\varphi \notin R[\mathcal{L} - \sigma_1^\Omega[\mathcal{L}; W]W],$$

para qualquer autofunção $\varphi \in \mathring{P}$ de (1.6) associado a $\sigma_1^\Omega[\mathcal{L}; W]$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [59] (veja Teorema 9.2.1).

A partir de agora, veremos alguns exemplos de casos particulares dos problemas de autovalores (1.3) e (1.6) que aparecerão nos próximos capítulos e que possui outras propriedades interessantes para as aplicações além das relatadas nos teoremas anteriores.

Exemplo 1:

O primeiro caso particular que destacamos é o autovalor do operador de Laplace $-\Delta$ em Ω sob a condição de fronteira homogênea de Dirichlet, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

cujo autovalor principal é positivo. Por simplicidade, adotaremos a notação

$$\lambda_1 := \sigma_1^\Omega[-\Delta],$$

Além disso, ao longo de todo este trabalho, φ_1 denotará a principal autofunção positiva associada a λ_1 com $\|\varphi_1\|_0 = 1$.

Exemplo 2:

Considere o seguinte *problema de autovalor com peso*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u = \lambda m(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $A \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e $c, m \in L^\infty(\Omega)$ tais que

$$A \geq A_0 > 0 \quad \text{e} \quad m > 0.$$

De acordo com a notação introduzida anteriormente, o autovalor principal de (1.9) é denotado por

$$\sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)].$$

Além disso, quando não houver risco de confusão, omitiremos o superíndice Ω e escreveremos simplesmente

$$\sigma_1[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)].$$

E ainda, quando A é constante, $-\operatorname{div}(A\nabla u) = -A\Delta u$ e escreveremos

$$\sigma_1^\Omega[-A\Delta + c(x); m(x)].$$

Para ser consistente com a notação introduzida na Definição 1.2, adotaremos também

$$\sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); 1] := \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x)].$$

Com respeito a este problema temos

Teorema 1.8 (1.9) *admite um único autovalor principal e que é dado pela caracterização variacional*

$$\sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)] = \inf_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega A(x)|\nabla \phi|^2 + \int_\Omega c(x)\phi^2}{\int_\Omega m(x)\phi^2}.$$

Além disso, uma autofunção associada, φ , satisfaz

$$\sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)] = \frac{\int_\Omega A(x)|\nabla \varphi|^2 + \int_\Omega c(x)\varphi^2}{\int_\Omega m(x)\varphi^2}.$$

E ainda, $\sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)]$ satisfaz as seguintes propriedades de monotonia:

(i) *É crescente com respeito às funções A e c . Isto é, se $A < \bar{A}$ (resp. $c < \bar{c}$), então*

$$\sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)] < \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(\bar{A}(x)\nabla) + c(x); m(x)]$$

$$(\text{resp. } \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)] < \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + \bar{c}(x); m(x)]).$$

Além disso, a aplicação $c \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \mapsto \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)]$ é contínua.

(ii) *É decrescente com respeito à função m . Isto é, se $m < \bar{m}$, então*

$$\sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)] > \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); \bar{m}(x)].$$

(iii) *É decrescente com respeito ao domínio Ω . Isto é, se $D \subsetneq \Omega$ onde D é um subdomínio com fronteira regular, então*

$$\sigma_1^D[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)] > \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x)\nabla) + c(x); m(x)].$$

O seguinte corolário lida com o caso em que A, c e m são constantes.

Corolário 1.9 *Se A, c e m são constantes, então*

$$\sigma_1^\Omega[-A\Delta + c; m] = \frac{A\sigma_1^\Omega[-\Delta] + c}{m}.$$

Demonstração: Por definição de $\sigma_1^\Omega[-A\Delta + c; m]$, existe uma função positiva φ tal que

$$\begin{cases} -A\Delta\varphi + c\varphi = \sigma_1^\Omega[-A\Delta + c; m]m\varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ou de maneira equivalente,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \frac{\sigma_1^\Omega[-A\Delta + c; m]m - c}{A}\varphi & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto o número real $(\sigma_1^\Omega[-A\Delta + c; m]m - c)/A$ é o autovalor principal de $-\Delta$ em Ω sob a condição de fronteira homogênea de Dirichlet. Isto é,

$$\frac{\sigma_1^\Omega[-A\Delta + c; m]m - c}{A} = \sigma_1^\Omega[-\Delta],$$

concluindo a demonstração do resultado. □

Exemplo 3:

Para finalizar este capítulo, veremos outro problema de autovalor que desempenhará um

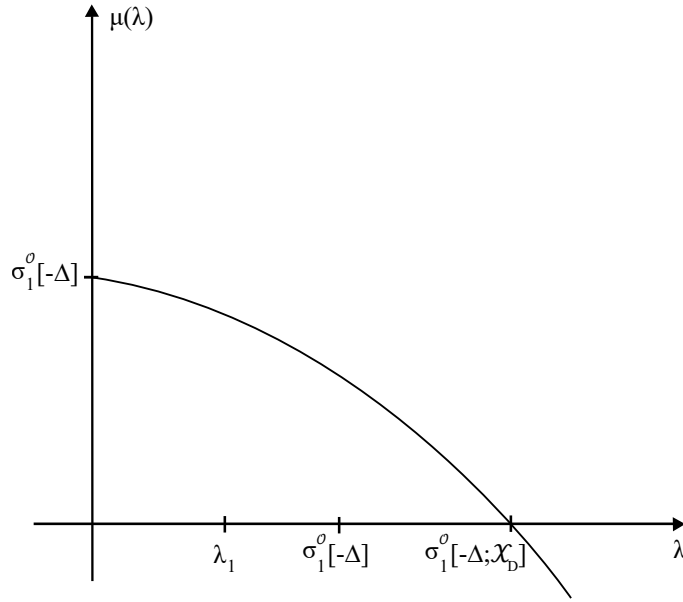


Figura 1.1: Gráfico da função $\mu_{D,\mathcal{O}}(\lambda)$.

papel fundamental nos Capítulos 2 e 3. Seja D um conjunto aberto e $\mathcal{O}$ um domínio com fronteira regular tais que

$$D \subset \mathcal{O} \subset \Omega.$$

Considere o seguinte problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \mathcal{X}_D(x)u & \text{em } \mathcal{O}, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{O}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Para estudar este caso, consideremos a função

$$\mu_{D,\mathcal{O}}(\lambda) := \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta - \lambda \mathcal{X}_D], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Esta função está bem definida uma vez que $-\lambda \mathcal{X}_D \in L^\infty(\Omega)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e o seguinte resultado nos dará informações sobre $\mu_{D,\mathcal{O}}$ e sobre o autovalor principal de (1.10).

Proposição 1.10 (i) A função $\mu_{D,\mathcal{O}}$ definida em (1.11) possui um único zero que é o autovalor principal de (1.10), isto é,

$$\sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D] = \mu_{D,\mathcal{O}}^{-1}(0).$$

(ii)

$$\mu_{D,\mathcal{O}}(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda < \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D].$$

(iii)

$$\lambda_1 < \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta] < \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D].$$

Demonstração: Como

$$\mu_{D,\mathcal{O}}(0) = \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta] > 0,$$

segue do Teorema 1.7 que $\sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D]$ é um zero de $\mu_{D,\mathcal{O}}$. Além disso, pela Proposição 1.6, $\mu_{D,\mathcal{O}}$ é decrescente. Em particular, $\mu_{D,\mathcal{O}}$ possui um único zero e satisfaz (ii).

Para verificar (iii), usando a monotonia de $\sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta - \lambda\mathcal{X}_D]$ com respeito a $\lambda\mathcal{X}_D$, temos

$$\lambda\mathcal{X}_D < \lambda\mathcal{X}_{\mathcal{O}} \Rightarrow \mu_{D,\mathcal{O}}(\lambda) = \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta - \lambda\mathcal{X}_D] > \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta - \lambda\mathcal{X}_D] = \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta] - \lambda.$$

Fazendo $\lambda = \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D]$, segue que

$$0 = \mu_{D,\mathcal{O}}(\sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D]) > \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta] - \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D] \Rightarrow \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta; \mathcal{X}_D] > \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta].$$

Usando a monotonia de $\sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta]$ com respeito ao domínio (Proposição 1.8 (iii)), obtemos

$$\mathcal{O} \subset \Omega \Rightarrow \lambda_1 < \sigma_1^{\mathcal{O}}[-\Delta].$$

□

Veja Figura 1.1 para um esboço do gráfico de $\mu_{D,\mathcal{O}}(\lambda)$.

1.2 Resultados de bifurcação

A teoria de bifurcação é uma poderosa ferramenta de análise não linear para estudar certas classes de equações diferenciais. Desde os pioneiros trabalhos de Krasnosel'skii (veja [52]), Crandall e Rabinowitz (veja [28] e [76]), diversos estudos se desenvolveram realizando resultados similares e melhorias. Neste capítulo reunimos alguns destes resultados que serão ferramenta chave no restante deste trabalho.

Para fornecer uma definição precisa de ponto de bifurcação, consideremos um operador não linear abstrato

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow V$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo (possivelmente ilimitado) e U e V são espaços de Banach. Consideremos também a seguinte equação não linear associada

$$\mathcal{F}(\lambda, u) = 0. \tag{1.12}$$

Iremos supor que o par $(\lambda, 0) \in I \times U$ é uma solução de (1.12) para todo $\lambda \in I$, ou seja,

$$\mathfrak{F}(\lambda, 0) = 0 \quad \forall \lambda \in I.$$

Desse modo, iremos nos referir a esta solução como *solução trivial*, uma vez que ela é conhecida. Com estas considerações temos

Definição 1.11 *Seja $\lambda_0 \in I$. $(\lambda_0, 0)$ (ou simplesmente λ_0) é um ponto de bifurcação de (1.12) da curva de soluções triviais $(\lambda, 0)$ se existe uma sequência*

$$(\lambda_n, u_n) \in I \times (U \setminus \{0\})$$

onde $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, u_n) = (\lambda_0, 0) \quad \text{em } I \times U$$

e

$$\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$$

para todo $n \geq 1$.

De maneira semelhante podemos definir ponto de bifurcação do infinito.

Definição 1.12 *$\lambda_\infty \in I$ é um ponto de bifurcação de (1.12) a partir do infinito se existe uma sequência*

$$(\lambda_n, u_n) \in I \times U \setminus \{0\}$$

onde $n \geq 1$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, u_n) = (\lambda_\infty, \infty) \quad \text{em } I \times U$$

e

$$\mathcal{F}(\lambda_n, u_n) = 0$$

para todo $n \geq 1$.

Vamos enunciar alguns teoremas de *bifurcação global*. Tais resultados recebem este nome pois fornecem a existência de um *continuum* ilimitado maximal, isto é, um subconjunto do conjunto das soluções não triviais de (1.12) em $I \times U$ que é fechado e conexo (na topologia de $I \times U$) e maximal no sentido de que não é um subconjunto próprio de nenhum outro subconjunto fechado e conexo do conjunto das soluções não triviais de (1.12).

1.2.1 Bifurcação operadores quasilineares

O primeiro teorema que apresentaremos nesta seção é devido a [8] e nos dá um critério para obter um ponto bifurcação para uma certa classe de operadores elípticos quasilineares. Especificamente, considere o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) = f(\lambda, x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.13)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Caratheodory (isto é, $f(\lambda, x, s)$ é mensurável com respeito a x para todo $(\lambda, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e contínua com respeito a (λ, s) para $x \in \Omega$ q.s.) tal que

$$f(\lambda, x, 0) = 0 \quad x \in \Omega \text{ q.s.}, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

e satisfazendo:

(f_1) Para todo conjunto limitado $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e todo $s_0 > 0$, existe uma função positiva $C(x) \in L^m(\Omega)$ com $m > N/2$ tal que

$$|f(\lambda, x, s)| \leq C(x) \quad x \in \Omega \text{ q.s.}, \forall \lambda \in \Lambda, \forall s \in [0, s_0],$$

(f_2) Para todo conjunto limitado $\Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\lambda \in \Lambda$,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(\lambda, x, s)}{s} = \lambda f'_+(x, 0), \quad \text{uniformemente em } (\lambda, x) \in \Lambda \times \Omega, \quad (1.14)$$

com $f'_+(x, 0)$ satisfazendo: ou $0 \leq f'_+(x, 0) \in L^m(\Omega)$, $m > N/2$ não identicamente nulo ou

$$f'_+(x, 0) = \infty, \quad x \in \Omega \text{ q.s.}$$

No caso em que a função peso $f'_+(x, 0)$ é integrável, supomos também

(f_3) Se $f'_+(x, 0) \in L^m(\Omega)$, $m > N/2$, então o limite (1.14) é uniforme em todo conjunto limitado $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e existe uma contante positiva $K(x) \in L^m(\Omega)$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$,

$$|f(\lambda, x, s) - f(\bar{\lambda}, x, s)| \leq |\lambda - \bar{\lambda}| K(x) s \quad \forall s \in (0, \varepsilon_0]. \quad (1.15)$$

Já a aplicação $A(x, s) := (a_{ij}(x, s))$, $i, j = 1, \dots, N$ supomos ser uma matriz simétrica (i.e., $a_{ij} = a_{ji}$, para todos $i, j = 1, \dots, N$) com coeficientes de Caratheodory $a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existem constantes positivas α e β satisfazendo, para todo $(s, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ e $x \in \Omega$ q.s.,

$$(A_1) \quad |A(x, s)| \leq \beta.$$

$$(A_2) \quad A(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

Supomos também que

(A₃) Existe uma função de Osgood $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, ω é não crescente, $\omega(0) = 0$ e

$$\int_{0^+} \frac{ds}{\omega(s)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty,$$

tal que

$$|A(x, s) - A(x, t)| \leq \omega(|s - t|) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^+.$$

Desde que as funções a_{ij} são de Caratheodory, existe o limite

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} A(x, s) = A(x, 0) \quad x \in \Omega \text{ q.s..}$$

Observe ainda que, no caso em que $f'_+(x, 0) \in L^m(\Omega)$, o problema de autovalor com peso

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, 0)\nabla u) = \lambda f'_+(x, 0)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui um autovalor principal (conforme o Teorema 1.8) que é denotado por

$$\sigma_1[-\operatorname{div}(A(x, 0)\nabla); f'_+(x, 0)].$$

Para escrever (1.13) como uma equação não linear do tipo (1.12), os autores argumentam como segue. Das hipóteses (A₁) e (A₂), o operador solução de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u) = f \in \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

está bem definido e admite uma única solução em $\mathcal{C}^{1+\gamma}(\overline{\Omega})$. Então, denotando por K esse operador solução que é compacto de $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ em $\mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$, então $u \in \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$ é uma solução positiva de (1.13) se, e somente se,

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = u - K(f(\lambda, x, u)) \equiv 0,$$

onde estamos considerando $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$.

Assim, seja φ a autofunção positiva associada a este autovalor. Definindo

$$\lambda_0 := \begin{cases} \sigma_1[-\operatorname{div}(A(x, 0)\nabla), f'_+(x, 0)] & \text{se } f'_+(x, 0) \in L^m(\Omega), \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

e $\mathfrak{C}$ o fecho do conjunto

$$\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}); \mathfrak{F}(\lambda, u) = u - K(f(\lambda, x, u)) \equiv 0, u \neq 0\},$$

temos o seguinte resultado de bifurcação global para (1.13), cuja a demonstração pode ser encontrada em [8], Teorema 4.4:

Teorema 1.13 *Assumindo que $f(\lambda, x, s) = 0$ para $x \in \Omega$ q.s., para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s \leq 0$, e que as hipóteses (f_1) – (f_3) e (A_1) – (A_3) ocorrem. Então λ_0 é um ponto de bifurcação de (1.13) da solução trivial e este é o único para soluções positivas. Além disso, existe um continuum ilimitado, isto é, um subconjunto $\mathfrak{C}_0$ em $\mathfrak{C}$ fechado e conexo, contendo $(\lambda_0, 0)$. Mais ainda, se $\lambda_0 > 0$, $r > N$ e a seguinte condição de regularidade é satisfeita*

$$\begin{cases} a_{i,j} \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+) & i, j = 1, \dots, N, \ 0 < \gamma < 1, \\ f(\lambda, \cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+) & \text{para todo } \lambda > 0. \end{cases}$$

Então a seguinte conclusão ocorre:

(i) Se existe $\varepsilon_0, s_0 > 0$, $\sigma < 0$ e $\underline{C}(x) \in L^1(\Omega)$ tais que, denotando

$$\underline{\mu}(x) \equiv \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\lambda_0, 0^+)} [f(\lambda, x, s) - \lambda f'_+(x, 0)s] s^{\sigma-1},$$

para $x \in \Omega$ q.s. e para todos $s \in [0, s_0]$ e $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$, temos

$$\begin{cases} [A(x, s) - A(x, 0)] \leq 0, \\ [f(\lambda, x, s) - \lambda f'_+(x, 0)s] s^{\sigma-1} \geq \underline{C}(x), \\ \int_{\Omega} \underline{\mu}(x) \varphi^{2-\sigma}(x) > 0, \end{cases}$$

então a bifurcação de soluções positivas de $\lambda = \lambda_0$ é subcrítica.

(ii) Se existem $\varepsilon_1, s_1 > 0$, $\sigma < 0$ e $\overline{C}(x) \in L^1(\Omega)$ tais que, denotando

$$\overline{\mu}(x) \equiv \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\lambda_0, 0^+)} [f(\lambda, x, s) - \lambda f'_+(x, 0)s] s^{\sigma-1},$$

para $x \in \Omega$ q.s. e para todos $s \in [0, s_1]$ e $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0 + \varepsilon_1)$, temos

$$\begin{cases} [A(x, s) - A(x, 0)] \geq 0, \\ [f(\lambda, x, s) - \lambda f'_+(x, 0)s] s^{\sigma-1} \leq \overline{C}(x), \\ \int_{\Omega} \overline{\mu}(x) \varphi^{2-\sigma}(x) < 0, \end{cases}$$

então a bifurcação de soluções positivas de $\lambda = \lambda_0$ é supercrítica.

Há uma versão deste teorema para bifurcações do infinito. Para enunciá-la necessitamos as seguintes hipóteses: sobre a função A iremos admitir que

(A_4) Existe o limite pontual

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(x, s) = A(x, \infty) \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Concernente à função f iremos supor que

(f'_2) f é assintoticamente linear no infinito, isto é, existe uma função positiva $f'_\infty \in L^m(\Omega)$, $m > N/2$, tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda, x, s)}{s} = \lambda f'_\infty(x),$$

uniformemente com respeito a $x \in \Omega$ e para todo $\lambda \in [0, \infty)$.

(f'_3) Existem funções positivas $K_1(x), K_2(x) \in L^m(\Omega)$ tais que

$$|f(\lambda, x, s) - f(\bar{\lambda}, x, s)| \leq |\lambda - \bar{\lambda}|[K_1(x)s + K_2(x)],$$

para todos $\lambda, \bar{\lambda} \in [\lambda, +\infty)$.

Com estas premissas temos o

Teorema 1.14 *Assumindo que $f(\lambda, x, s) \geq 0$ para $x \in \Omega$ q.s., para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in (0, \infty)$ e que as hipóteses (f_1), (f'_2), (f'_3) e (A_1)–(A_4) ocorrem. Então*

$$\lambda_\infty := \sigma_1^\Omega[-\operatorname{div}(A(x, \infty)\nabla); f'_\infty(x)]$$

é um ponto de bifurcação de (1.13) a partir do infinito e este é o único para soluções positivas. Além disso, existe uma componente ilimitado, isto é, um subconjunto $\mathfrak{C}_\infty \subset \mathfrak{C}$ tal que

$$\widehat{\mathfrak{C}}_\infty := \{(\lambda, u) \text{ com } u \neq 0, (\lambda, u/\|u\|_0^2) \in \mathfrak{C}_\infty\} \cup \{(\lambda_\infty, 0)\}$$

é conexo e, se $f(0, x, s) \equiv 0$ para todo $x \in \Omega$ e $s \geq 0$, é também ilimitado.

A demonstração pode ser encontrada em [8], Teorema 3.4.

Observação 1.15 *Os resultados de bifurcação desta seção serão utilizados no Capítulo 3 para o operador Laplaciano. Por completude, optamos por enunciá-los para operadores quasilineares, tal como são apresentados em [8].*

1.2.2 Bifurcação para operadores de Fredholm de índice zero

Para o próximo resultado de bifurcação seguiremos [66] e [60] (veja também [61]) que estendem de modo substancial os clássicos resultados de [28] e [76], permitindo a aplicação dos teoremas de bifurcação à uma ampla classe de operadores de Fredholm de índice zero.

Faremos agora algumas considerações iniciais sobre operadores de Fredholm. Começemos com a

Definição 1.16 (Operador de Fredholm) *Um operador $L \in \mathcal{L}(U)$ é chamado de operador de Fredholm se*

$$\dim N[L] < \infty \quad \text{codim } R[L] < \infty.$$

Neste caso $R[L]$ deve ser fechado e definimos o índice de L por

$$\text{ind}[L] := \dim N[L] - \text{codim } R[L].$$

O exemplo mais conhecido de operador de Fredholm de índice zero são as perturbações compactas da identidade, isto é,

$$I_U - T$$

onde I_U denota o operador identidade em U e $T \in \mathcal{L}(U)$ é um operador compacto. E com efeito, da Alternativa de Fredholm (veja Teorema 6.6 em [13]), temos que

$$\dim N[I_U - T] < \infty$$

e

$$\dim N[I_U - T] = \dim N[I_U - T^*] = \dim R[I_U - T]^\perp = \text{codim } N[I_U - T].$$

Assim, retornando à equação não linear abstrata (1.12), consideraremos o caso particular em que $U = V$ e $I = \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U.$$

Daqui em diante assumiremos as seguintes hipóteses sobre $\mathfrak{F}$:

(F₁) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a aplicação $\mathfrak{F}(\lambda, \cdot)$ é de classe $\mathcal{C}^1(U)$ e

$$D_u \mathfrak{F}(\lambda, u) \in \mathcal{L}(U)$$

é um operador de Fredholm de índice zero, para todo $u \in U$.

(F₂) $D_u \mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ é uma aplicação contínua.

(F_3) $\mathfrak{F}(\lambda, 0) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 1.17 *Note que, se existe $\Theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, U)$ tal que*

$$\mathfrak{F}(\lambda, \Theta(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

com a mudança de variável

$$\mathfrak{J} : (\lambda, u) = \mathfrak{F}(\lambda, u + \Theta(\lambda)), \quad (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times U$$

recuperamos a condição (F_3) .

Denotaremos também por

$$\mathfrak{L}(\lambda) := D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

a linearização de $\mathfrak{F}$ em $(\lambda, 0)$. Pela hipótese (F_2) , $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U))$. Além disso, desde que $\mathfrak{L}(\lambda)$ é um operador de Fredholm de índice zero, temos que $\mathfrak{L}(\lambda)$ é um isomorfismo se $\dim N[\mathfrak{L}(\lambda)] = 0$. Consequentemente, o espectro de $\mathfrak{L}$ pode ser definido como

$$\Sigma := \Sigma(\mathfrak{L}) = \{\lambda \in \mathbb{R}; \dim N[\mathfrak{L}(\lambda)] \geq 1\}.$$

Os resultados de bifurcação global que apresentaremos adiante consistem em estudar a estrutura das componentes de $\mathfrak{F}^{-1}(0)$ do ponto de vista da teoria de bifurcação global, isto é, estudamos a equação não linear abstrata

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0. \tag{1.16}$$

Observação 1.18 *Na literatura clássica sobre teoria de bifurcação, encontramos que $\mathfrak{F}$ deve ser da forma*

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) := \mathfrak{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u),$$

onde $\mathfrak{L}(\lambda)$ é um operador linear que é uma perturbação compacta da identidade e

$$\mathfrak{N} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$$

é contínuo e compacto sobre conjuntos limitados tais que

$$\mathfrak{N}(\lambda, u) = o(\|u\|_U).$$

quando $u \rightarrow 0$ em U . Porém, supondo apenas que as hipóteses (F_1) – (F_3) são verdadeiras e escrevendo

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0)u - D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0)u + \mathfrak{F}(\lambda, u)$$

então

$$\mathfrak{N}(\lambda, u) := -D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0)u + \mathfrak{F}(\lambda, u)$$

satisfaz

$$\mathfrak{N}(\lambda, u) = o(\|u\|_U).$$

quando $u \rightarrow 0$ em U (veja demonstração do Lema 2.1 em [60]), mas neste caso estamos pedindo apenas que $\mathcal{L}(\lambda) := D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0)$ seja um operador de Fredholm de índice zero, não necessariamente uma perturbação compacta da identidade. Portanto, a abordagem aqui apresentada (baseada em [60]) é substancialmente uma generalização da clássica teoria de bifurcação para operadores da forma $\mathfrak{F}(\lambda, u) = \mathfrak{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u)$.

O primeiro resultado referente a operadores $\mathfrak{F}$ satisfazendo apenas (F_1) – (F_3) nos diz que os possíveis pontos de bifurcação da equação (1.16) são elementos do espectro de $\mathfrak{F}$.

Lema 1.19 *Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação de (1.16) a partir da solução trivial $(\lambda, 0)$. Então $\lambda_0 \in \Sigma(\mathfrak{L})$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [60], Lema 2.1.

Este lema motiva o estudo do espectro de $\mathfrak{L}$ para conhecer os possíveis pontos de bifurcação de (1.16). Assim, apresentamos agora uma caracterização de $\Sigma := \Sigma(\mathfrak{L})$ quando a dependência de λ é real analítica, que é um caso que ocorre na maioria das aplicações.

Teorema 1.20 *Supondo que $\mathfrak{L}$ é real analítica, então ou $\Sigma = \mathbb{R}$ ou Σ é um subconjunto discreto de $\mathbb{R}$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [66], Teoremas 4.4.1 e 4.4.4. Veja também [60], Teorema 4.1.

O próximo conceito é de fundamental importância e foi introduzido (em uma forma mais geral) por [40] para estender o teorema de [28] sobre bifurcação a partir de autovalores simples. Dado $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, denotaremos

$$\mathfrak{L}_0 := \mathfrak{L}(\lambda_0) \quad \text{e} \quad \mathfrak{L}_1 := \frac{d\mathfrak{L}}{d\lambda}(\lambda_0).$$

Definição 1.21 (Autovalor 1-transversal) *Supondo $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U))$ tal que $\mathfrak{L}(\lambda)$ é um operador de Fredholm de índice zero, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\dim N[\mathfrak{L}(\lambda_0)] \geq 1$ para algum*

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Então dizemos que λ_0 é um autovalor 1-transversal de $\mathfrak{L}(\lambda)$ se

$$\mathfrak{L}_1(N[\mathfrak{L}_0]) \oplus R[\mathfrak{L}_0] = U.$$

Observe que a condição de transversalidade de [28] ocorre se, e somente se,

$$\dim N[\mathfrak{L}_0] = 1$$

e λ_0 é um autovalor 1-transversal de $\mathfrak{L}$ que, neste caso, pode ser expressada como

$$\mathfrak{L}_1\varphi_0 \notin R[\mathfrak{L}_0], \quad \text{onde } N[\mathfrak{L}(\lambda_0)] = \text{span}\langle\varphi_0\rangle.$$

Ressaltamos que, em [66], os autores introduzem o conceito de *autovalor algébrico* (veja Definição 4.3.1 em [66] ou Definição 4.1 em [60]) que está intimamente relacionado com a noção de autovalor transversal e é fundamental para o desenvolvimento das generalizações de bifurcação global à operadores de Fredholm de índice zero. Porém, tal estudo foge ao escopo deste trabalho e, como estamos interessados apenas em enunciar os resultados de bifurcação, a definição de autovalor 1-transversal é suficiente para nossos propósitos.

No que segue, enunciamos a generalização do celebrado teorema de bifurcação global de [28] e [76].

Teorema 1.22 *Suponha que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U))$ e $\mathfrak{L}(\lambda)$ é um operador de Fredholm de índice zero, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ é uma autovalor 1-transversal de $\mathfrak{L}(\lambda)$ com*

$$\dim N[\mathfrak{L}_0] = 1,$$

então $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação de (1.16) da solução trivial. Além disso, existe um continuum de soluções não triviais de (1.16) para todo $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ satisfazendo $(F_1)-(F_3)$ e tal que $\mathfrak{L} = D_u\mathfrak{F}(\lambda, 0)$.

A demonstração pode ser encontrada em [60], veja Corolário 4.1.

Quando o $\mathfrak{L}$ é uma perturbação compactada da identidade, temos mais informações sobre o comportamento global deste continuum. Além disso, este é caso bastante comum nas aplicações, como veremos nos próximos capítulos.

Teorema 1.23 *Suponha que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U))$ e $\mathfrak{L}(\lambda)$ é real analítica em λ da forma*

$$\mathfrak{L}(\lambda) = I_U - \mathfrak{R}(\lambda)$$

onde $\mathfrak{N}(\lambda) \in \mathcal{L}(U)$ é compacto, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ é uma autovalor 1-transversal de $\mathfrak{L}(\lambda)$ então $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação de (1.16) da solução trivial. Além disso, existe um continuum de soluções não triviais de (1.16)

$$\mathfrak{C} \subset \mathcal{S} := \{(\lambda, u) \in I \times (U \setminus \{0\}); \mathfrak{F}(\lambda, u) = 0\} \cup \{(\lambda, 0); \lambda \in \Sigma\}$$

emanando de $(\lambda, 0)$ em $(\lambda_0, 0)$ satisfazendo uma das seguintes condições não excludentes: ou

A1. $\mathfrak{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times U$; ou

A2. Existe $\lambda_1 \in \Sigma \setminus \{\lambda_0\}$ tal que $(\lambda_1, 0) \in \mathfrak{C}$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [66], Corolário 6.3.2.

Observação 1.24 Se olharmos o enunciado do Corolário 6.3.2 em [66], veremos que as premissas exigidas são as seguintes: $\mathfrak{F}(\lambda, u) : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ é um operador da forma

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) := \mathfrak{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u),$$

onde $\mathfrak{L}(\lambda)$ é um operador linear que é uma perturbação compacta da identidade e

$$\mathfrak{N} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$$

é contínuo e compacto sobre conjuntos limitados tais que

$$\mathfrak{N}(\lambda, u) = o(\|u\|_U).$$

quando $u \rightarrow 0$ em U , uniformemente em intervalos compactos de $\mathbb{R}$. Além disso, o espectro de $\mathfrak{L}$ é discreto e existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\text{Ind}(0, \mathfrak{N})$ muda de sinal quando λ cruza λ_0 , onde $\text{Ind}(0, \mathfrak{N})$ denota o índice de Leray-Schauder definido para perturbações compactas da identidade. Porém, tendo em vista as condições (F_1) – (F_3) e escrevendo

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = \mathfrak{L}(\lambda) - \mathfrak{L}(\lambda) + \mathfrak{F}(\lambda, u),$$

então definindo

$$\mathfrak{N}(\lambda, u) := -\mathfrak{L}(\lambda) + \mathfrak{F}(\lambda, u)$$

já vimos que $\mathfrak{N}(\lambda, u) = o(\|u\|_U)$ quando $u \rightarrow 0$ em U (veja demonstração do Lema 2.1 [60]). Por outro lado, uma vez que λ_0 é um autovalor 1-transversal de $\mathfrak{L}(\lambda)$, a teoria

de autovalores algébricos desenvolvida em [40] garante que λ_0 é um autovalor isolado de $\mathfrak{L}$ (veja Definição 4.2 em [60]) assim, pelo Teorema 1.20, Σ é discreto. Além disso, é possível mostrar que $\text{ind}(0, \mathfrak{R}(\lambda))$ muda de sinal quando λ cruza λ_0 (veja Teorema 6.5.2 em [66]).

Observação 1.25 Em realidade, há uma versão do Teorema 1.23 quando $\mathfrak{L}$ é um operador de Fredholm de índice zero (não necessariamente uma perturbação compacta da identidade), veja Teorema 6.2 em [60].

Este teorema nos fornece a existência de um continuum de soluções da equação (1.16), porém não nos diz informações sobre o sinal destas soluções e em muitos modelos matemáticos buscamos por soluções positivas. Para resolver esta questão temos o seguinte teorema, conhecido como *bifurcação global unilateral*:

Teorema 1.26 Suponha que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U))$ e $\mathfrak{L}(\lambda)$ é real analítica em λ da forma

$$\mathfrak{L}(\lambda) = I_U - \mathfrak{R}(\lambda),$$

onde $\mathfrak{R}(\lambda) \in \mathcal{L}(U)$ é compacto, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ é um autovalor 1-transversal de $\mathfrak{L}(\lambda)$ com

$$\dim N[\mathfrak{L}(\lambda_0)] = 1,$$

e denotando por Y o complemento de $N[\mathfrak{L}(\lambda_0)]$ em U , então o continuum $\mathfrak{C}$ dado pelo Teorema 1.23 possui dois subcontinuuus $\mathfrak{C}^+$ e $\mathfrak{C}^-$ tais que, fixo $\eta \in (0, 1)$, existe $\delta_0 = \delta_0(\eta) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$(\lambda, u) \in (\mathfrak{C}^+ \setminus \{(\lambda_0, 0)\}) \cap B_\delta(\lambda_0, 0)$$

$$(\text{resp. } (\lambda, u) \in (\mathfrak{C}^- \setminus \{(\lambda_0, 0)\}) \cap B_\delta(\lambda_0, 0))$$

pode ser escrito como

$$(\lambda, u) = (\lambda_0 + o(1), s\varphi_0 + y_0), \quad s > \eta\|u\| > 0$$

$$(\text{resp. } (\lambda, u) = (\lambda_0 + o(1), s\varphi_0 + y_0), \quad s < -\eta\|u\|)$$

onde $y_0 \in Y$ (único) e $y = o(s)$.

Além disso, cada uma das componente $\mathfrak{C}^+$ e $\mathfrak{C}^-$ satisfaz uma das alternativas do Teorema 1.23 ou contém um ponto

$$(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times (Y \setminus \{0\}).$$

Para uma demonstração deste resultado veja Teorema 6.4.3 em [66].

Para finalizar esta seção, destacamos que estes teoremas podem ser aplicados também à sistemas envolvendo operadores uniformemente elípticos. No que segue, apresentaremos um resultado devido a [56] que fornece uma aplicação dos teoremas anteriores ao sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = \lambda u + f(x, u)u + F(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 v = \mu v + g(x, v)v + G(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde

$$\mathcal{L}_k := - \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^k(x) \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_j} + \sum_{i=1}^N b_i^k(x) \frac{\partial}{\partial_i} + c^k(x) \quad x \in \Omega, \quad k = \{1, 2\},$$

são operadores uniformemente elípticos com coeficientes satisfazendo (1.2). As seguintes hipóteses sobre as funções f, g, F e G serão adotadas:

(H_{fg}) $f(x, w)$ e $g(x, w)$ são funções reais definidas em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, contínuas em x e de classe $\mathcal{C}^1$ em w tais que

$$f(x, 0) = g(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

(H_{FG}) $F(x, u, v)$ e $G(x, u, v)$ são funções reais definidas em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, contínuas em x e de classe $\mathcal{C}^1$ em (u, v) .

O problema (1.17) admite três tipos de soluções com componentes não negativas. Nomeadamente, a solução trivial $(0, 0)$, as soluções semitriviais não negativas $(u, 0)$ e $(0, v)$, onde u e v são soluções de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = \lambda u + f(x, u)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.18)$$

e

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 v = \mu v + g(x, v)v & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.19)$$

respectivamente, e o *estado de coexistência*, que são as soluções (u, v) com ambas as componentes não nulas.

Para escolher um espaço de Banach adequado para aplicar os Teoremas 1.23 e 1.26, argumentamos como segue:

Fixo

$$\omega > \max\{-\sigma_1[\mathcal{L}_1], -\sigma_1[\mathcal{L}_2]\}$$

e para cada $k \in \{1, 2\}$, seja e_k a única solução de

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_k + \omega)e_k = 1 & \text{em } \Omega, \\ e_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que, para cada $k \in \{1, 2\}$,

$$\sigma_1[\mathcal{L}_k + \omega] > 0$$

e segue do Teorema 1.5 que e_k é fortemente positivo. Assim, para cada $k \in \{1, 2\}$, denotamos por E_k o espaço de Banach consistindo de todas as funções $w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ tais que existe $\gamma = \gamma(w) > 0$ satisfazendo

$$-\gamma e_k < w < \gamma e_k$$

equipado com a norma

$$\|u\|_E := \inf\{\gamma > 0; -\gamma e < u < \gamma e\}.$$

Com a ordem pontual natural este é um espaço de Banach cujo cone positivo é normal e possui interior não vazio (conforme [3], Seção 2). Para enunciar o teorema de bifurcação para (1.17), precisamos do seguinte conceito:

Definição 1.27 *Seja $(\lambda, \theta_\lambda)$ uma solução positiva de (1.18). Dizemos que $(\lambda, \theta_\lambda)$ é uma solução não degenerada de (1.18) se zero é a única solução forte da equação linearizada de (1.18) em θ_λ , que é dada por*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = \lambda u + [\theta_\lambda D_u f(x, \theta_\lambda) + f(x, \theta_\lambda)]u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Com essas considerações e denotando por P_k o cone de positivo E_k , $k \in \{1, 2\}$, temos

Teorema 1.28 *Supondo (H_{fg}) e (H_{FG}) . Seja*

$$(\lambda, \theta_\lambda) \in \mathbb{R} \times \text{int}(P_1)$$

uma solução positiva não degenerada de (1.18) e considere

$$\mu_\lambda := \sigma_1[\mathcal{L}_2 - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda].$$

Então do ponto $(\mu, u, v) = (\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$ emana um continuum

$$\mathfrak{C} \subset \mathbb{R} \times \text{int}(P_1) \times \text{int}(P_2)$$

de estado de coexistência de (1.17) tal que uma das seguintes afirmativas ocorre

1. $\mathfrak{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times E_1 \times E_2$.

2. Existe uma solução positiva (μ^*, θ_μ) de (1.19) tal que

$$\lambda = \sigma_1[\mathcal{L}_1 - F(x, 0, \theta_{\mu^*})\theta_{\mu^*}]$$

$$e (\mu^*, 0, \theta_{\mu^*}) \in \overline{\mathfrak{C}}.$$

3. Existe um outra solução positiva de (1.18), digamos (λ, ψ_λ) , com $\psi_\lambda \neq \theta_\lambda$, tal que

$$(\sigma_1[\mathcal{L}_2 - G(x, \psi_\lambda, 0)\psi_\lambda], \psi_\lambda, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}.$$

4. $\lambda = \sigma_1[\mathcal{L}_1]$ e $(\sigma_1[\mathcal{L}_2], 0, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [66], Teorema 7.2.2.

Grosso modo, este teorema nos diz que o continuum bifurcando da solução semi-trivial $(\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$ ou é ilimitado (alternativa 1); ou vai à outra curva de soluções semi-triviais, que são da forma $(0, \theta_\mu)$ (alternativa 2); ou retorna à curva de semi-triviais da forma $(\theta_\lambda, 0)$ em outro ponto (alternativa 3); ou vai à origem $(0, 0)$ (alternativa 4).

No Capítulo 4 provaremos uma versão deste resultado para sistemas elípticos envolvendo operadores quasilineares.

1.2.3 Bifurcação para operadores positivos

Seguindo a notação na seção anterior, ou seja,

$$\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$$

satisfazendo as hipóteses (F_1) – (F_3) , observe que quanto mais propriedades exigimos do operador $\mathfrak{L}$, melhores são os resultados de bifurcação obtidos.

Primeiramente necessitamos da seguinte definição:

Definição 1.29 *Seja U um espaço de Banach ordenado. Dizemos que U possui cone normal se o subconjunto*

$$P^* := \{f \in U'; f(u) \geq 0 \quad \forall u \in P_U\}$$

satisfaz $U' = P^ - P^*$.*

Assim, nesta seção apresentaremos um teorema de bifurcação para operadores positivos. Para isso, além das hipóteses (F_1) – (F_3) iremos supor as seguintes condições:

- (A) U é um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo, denotado por P_U , é normal e possui interior não vazio.
- (B) A família $\mathfrak{L}(\lambda)$ é da forma

$$\mathfrak{L}(\lambda) = I_U - \lambda K,$$

onde K é um operador compacto e fortemente positivo, isto é,

$$K(P_U \setminus \{0\}) \subset \text{int}(P_U),$$

$\text{int}(P_U)$ denota o interior do cone P_U .

- (C) As soluções da equação

$$\mathfrak{F}(\lambda, 0) = 0$$

satisfazem o Princípio do Máximo Forte, no sentido de que

$$\left. \begin{array}{l} (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (P_U \setminus \{0\}) \\ \mathfrak{F}(\lambda, 0) = 0 \end{array} \right\} \implies u \in \text{int}(P).$$

Das hipóteses (A), (B) e pelo Teorema 1.37, temos que $r(K) > 0$ é um autovalor principal do operador K . Assim, definindo

$$\lambda_0 := \frac{1}{r(K)},$$

temos o seguinte resultado, que pode ser comparado com o Teorema 1 de [29].

Teorema 1.30 *Seja $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ satisfazendo (F_1) – (F_3) . Suponha que as premissas (A), (B) e (C) são verdadeiras, então $(\lambda_0, 0)$ é o único ponto de bifurcação da solução trivial para soluções positivas de $\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0$. Além disso, existe um continuum de soluções não triviais de $\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0$,*

$$\mathfrak{C}^P \subset \mathbb{R} \times \text{int}(P_U),$$

emanando de $(\lambda, 0)$ em $(\lambda_0, 0)$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [66], veja Teorema 6.5.5.

1.3 Método de sub e supersolução para uma equação

Considere a equação elíptica

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.20)$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Caratheodory (isto é, mensurável em $x \in \Omega$ para todo $u \in \mathbb{R}$ e contínua em $u \in \mathbb{R}$ para $x \in \Omega$ q.s.).

O método de sub-supersolução é ferramenta muito utilizada para determinar existência de solução de problemas como (1.20). Existem diferentes versões deste métodos, tratando soluções fracas e fortes (veja, por exemplo, [10, 37, 31]) ou clássicas (veja, por exemplo, [2, 73]), impondo condições sobre f e sobre o par de sub e supersolução, como veremos logo adiante.

Apresentaremos dois resultados de sub e supersolução. O primeiro deles é devido a [2] e nos fornece soluções clássicas de (1.20).

Teorema 1.31 *Suponha que (1.20) admite um par $(\underline{u}, \bar{u})$ de sub-supersoluções ordenadas, isto é, $\underline{u}, \bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfazendo*

$$\underline{u} \leq \bar{u} \quad \text{em } \bar{\Omega},$$

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(x, \underline{u}) & \text{em } \Omega, \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} -\Delta \bar{u} \geq f(x, \bar{u}) & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Supondo ainda que

$$f \in C^\gamma(\bar{\Omega} \times [\underline{u}, \bar{u}]) \quad 0 < \gamma < 1.$$

Então existem funções $u_, u^* \in C^2(\bar{\Omega})$ (não necessariamente distintas) que são soluções de (1.20). Além disso, qualquer solução u de (1.20) satisfazendo*

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad \text{em } \bar{\Omega},$$

satisfaz

$$u_* \leq u \leq u^* \quad \text{em } \bar{\Omega}.$$

O próximo resultado é devido a [31] e nos fornece soluções apenas contínuas, no seguinte sentido:

Definição 1.32 Dizemos que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é uma **C-solução** de (1.20) se

$$-\int_{\Omega} u \Delta \varphi = \int_{\Omega} f(x, u) \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$$

e

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Com isso, temos o

Teorema 1.33 Suponha que (1.20) admite um par $(\underline{u}, \overline{u})$ de sub e supersoluções fracas ordenadas, isto é, $\underline{u}, \overline{u} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\underline{u} \leq \overline{u} \quad \text{em } \overline{\Omega},$$

$$\begin{cases} -\int_{\Omega} \underline{u} \Delta \varphi \leq \int_{\Omega} f(x, \underline{u}) \varphi & \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega), \varphi \geq 0, \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\int_{\Omega} \overline{u} \Delta \varphi \geq \int_{\Omega} f(x, \overline{u}) \varphi & \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega), \varphi \geq 0, \\ \overline{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha ainda que

$$f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}).$$

Então existem funções $u_*, u^* \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (não necessariamente distintas) que são C-soluções de (1.20). Além disso, qualquer C-solução u de (1.20) satisfazendo

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{em } \overline{\Omega},$$

satisfaz

$$u_* \leq u \leq u^* \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Para finalizar esta seção, apresentaremos um lema devido a [10] que nos fornece método prático para obter subsoluções fracas por prolongamento e que será utilizado no Capítulo 2.

Considere Ω_1 um subdomínio com fronteira regular de Ω tal que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ e denotemos $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ e n_1 a normal exterior unitária a Ω_1 . Assim,

Lema 1.34 Suponha que

$$f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad f(x, 0) \geq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Se existe $u > 0$, $u \in H^2(\Omega_1) \cap C_0(\overline{\Omega}_1)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(x, u) & \text{q.s. em } \Omega_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n_1} \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

então a função definida por $\underline{u} = u$ em Ω_1 e $\underline{u} = 0$ em $\overline{\Omega}$ é uma subsolução fraca de (1.20), isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \leq f(x, u) \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq 0.$$

1.4 Outros Resultados

Nesta seção enunciaremos alguns resultados clássicos de Análise Funcional e Equações Diferenciais Parciais que serão utilizados ao longo do texto.

Iniciemos com uma versão famoso Teorema da Função Implícita para Espaços de Banach.

Teorema 1.35 (Teorema da Função Implícita) *Seja E e F espaços de Banach reais e $\Lambda \times U \subset \mathbb{R} \times E$ um aberto. Supondo que $\mathcal{H} \in \mathcal{C}(\Lambda \times U, F)$ satisfaz*

- i) $\mathcal{H}(\lambda_0, u_0) = 0$ para algum $(\lambda_0, u_0) \in \Lambda \times U$;
- ii) $\mathcal{H}_u$ é contínua em uma vizinhança de (λ_0, u_0) ;
- iii) $\mathcal{H}_u$ é não singular (tem inversa limitada) ou equivalentemente, $\mathcal{H}_u(\lambda_0, u_0)$ é contínua e bijetiva.

Então existe uma curva contínua $u = u(\lambda)$ definida em um entorno A de λ_0 tal que

$$u(\lambda_0) = u_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(\lambda, u(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in A.$$

Além disso, estas são as únicas soluções de $\mathcal{H}(\lambda, u) = 0$ com $\lambda \in A$. Por fim, se $\mathcal{H} \in \mathcal{C}^k(\Lambda \times U, F)$, então $u \in \mathcal{C}^k(A \times U, F)$, $k \geq 1$.

Demonstração: Veja Teorema 15.1 em [34]. □

O próximo resultado nos fornece um critério de unicidade para uma certa classe de problemas elípticos não lineares.

Teorema 1.36 (Brezis-Oswald) *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u > 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Supondo que $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Caratheodory tal que a função $x \mapsto f(x, u)$ pertence a $L^\infty(\Omega)$ para todo $u \geq 0$.

(i) Se a aplicação

$$u \mapsto f(x, u)/u$$

é decrescente em $(0, \infty)$, então (1.21) admite no máximo uma solução positiva.

(ii) Se a aplicação

$$u \mapsto f(x, u)/u$$

é não crescente em $(0, \infty)$, então se existem duas soluções (positivas) u_1 e u_2 de (1.21), necessariamente

$$\frac{u_1}{u_2} \equiv \text{constante}.$$

A demonstração pode ser encontrada em [15], veja a Seção 2.

O próximo teorema é conhecido como um resultado do tipo Krein–Rutman.

Teorema 1.37 *Seja E um espaço de Banach ordenado e*

$$T : E \longrightarrow E$$

um operador linear contínuo tais que:

i) T é compacto e fortemente positivo.

ii) $\text{int}(P_E) \neq \emptyset$, onde P_E denota o cone positivo de E .

Então as seguintes afirmativas são verdadeiras:

- 1) $r(T) > 0$ é um autovalor algebricamente simples de T e é o único com autovalor de T com autofunção positiva associada.

2) Dado $y \in E$ com $y \geq 0$, a equação

$$\lambda v - Tv = y \quad (v \in E),$$

possui uma única solução positiva se $\lambda > r(T)$, não possui solução positiva se $\lambda < r(T)$ e não possui solução para $\lambda = r(T)$.

A demonstração pode ser encontrada em [32], veja Teorema 12.3 e Corolário 12.4.

Para enunciar o próximo resultado, recordemos algumas definições. Primeiro vamos definir ponto crítico de um funcional relativo a um subconjunto convexo.

Definição 1.38 *Seja M um subconjunto fechado e conexo de um espaço de Banach U e $I \in \mathcal{C}^1(U)$. Dizemos que $u \in M$ é um ponto crítico de I em M se*

$$g(u) = \sup\{I'(u)(u - v); v \in M, \|v - u\|_{H_0^1} \leq 1\} = 0.$$

Recordemos agora a condição Palais-Smale sobre conjuntos convexos.

Definição 1.39 *Dizemos que $I \in \mathcal{C}^1(U)$ satisfaz a condição Palais-Smale sobre M se a seguinte condição ocorre:*

(P.-S.)_M Qualquer sequencia u_n em M tal que $|I(u_n)| \leq c$ uniformemente, enquanto $g(u_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), é relativamente compacto.

Teorema 1.40 *Sejam M um subconjunto fechado e conexo de um espaço de Banach U , $I \in \mathcal{C}^1(U)$ satisfazendo (P.-S.)_M sobre M e suponha que I admite dois mínimos relativos distintos $u_1, u_2 \in M$. Então, a seguinte dicotomia ocorre: ou*

1. *I possui um ponto crítico $\bar{u} \in M$ que não é um mínimo local de I ; ou*
2. *$I(u_1) = I(u_2) = \beta$ e v_λ e 0 podem ser conectados em qualquer vizinhança do conjunto dos mínimos locais de I relativos a M , cada um dos quais satisfazendo $I_\lambda(w) = \beta$.*

A demonstração pode ser encontrada em [82], veja Teorema II.11.8.

Apresentaremos agora um resultado de existência e unicidade para uma certa equação logística. Tal resultado será utilizado diversas vezes ao longo deste trabalho.

Teorema 1.41 *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = u(\lambda - D(x)u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.22)$$

onde $A \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $D \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$ e tais que with $A(x) \geq A_0 > 0$ e $D(x) \geq D_0 > 0$ para constantes positivas A_0 e D_0 . Então, (1.22) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda > \sigma_1[-\operatorname{div}(A(x)\nabla)]$. Além disso, se existe, a solução é única e denotaremos por u_λ . Além disso, a aplicação

$$\lambda \in (\sigma_1[-\operatorname{div}(A(x)\nabla)], \infty) \longrightarrow u_\lambda \in \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega})$$

é crescente. E ainda, a seguinte estimativa ocorre

$$\frac{\lambda - \sigma_1[-\operatorname{div}(A(x)\nabla)]}{\|D\|_0} \varphi \leq u_\lambda \leq \frac{\lambda}{D_0}, \quad (1.23)$$

onde φ denota a autofunção positiva associada a $\sigma_1[-\operatorname{div}(A(x)\nabla)]$ com $\|\varphi\|_0 = 1$.

Para uma demonstração deste resultado, veja [83], Seção 1.4.

Para finalizar esta seção, enunciaremos um resultado devido a [42] que nos fornece condições suficientes para garantir que um ramo de supersolução está por cima de um continuum de soluções para uma certa classe de problemas elípticos não lineares. Em particular, tal resultado nos propicia um resultado de cotas a priori.

Teorema 1.42 *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\lambda, x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega, \end{cases} \quad (1.24)$$

onde f é localmente Lipschitz. Suponha que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e seja $\Sigma \subset I \times C_0^2(\overline{\Omega})$ um continuum do conjunto de soluções de (1.24). Considere uma aplicação contínua

$$\overline{U} : I \rightarrow \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega})$$

tal que $\overline{U}(\lambda)$ é uma supersolução de (1.24), para todo $\lambda \in I$, mas não uma solução. Se

$$u_0 \leq (\neq) \overline{U}(\lambda_0) \quad \text{em } \Omega,$$

para algum $(\lambda_0, u_0) \in \Sigma$, então

$$u < \overline{U}(\lambda) \quad \text{em } \Omega,$$

para todo $(\lambda, u) \in \Sigma$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [42], Teorema 2.2. Veja também a Observação na pág. 626 deste artigo para uma versão com subsoluções.

Capítulo 2

Um problema logístico com difusão não linear I

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos em [25]. Estudaremos o seguinte problema elíptico com difusão não linear:

$$\begin{cases} -\Delta(u + a(x)u^r) = \lambda u - b(x)u^p & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado com fronteira regular, $r, p > 1$, $a \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$ e $b \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha < 1$ são funções que podem se anular em subconjuntos de Ω . O caso $0 < r < 1$ será estudado no Capítulo 3. Note ainda que, quando $r = 1$, (2.1) é um problema de difusão linear já conhecido e não será objetivo de estudo neste trabalho.

Ao longo de todo este capítulo denotaremos:

$$\Omega_{b+} := \{x \in \Omega; b(x) > 0\}, \quad (2.2)$$

$$\Omega_{b0} := \Omega \setminus \overline{\Omega}_{b+}, \quad (2.3)$$

$$\Omega_{a+} := \{x \in \Omega; a(x) > 0\} \quad (2.4)$$

e

$$\Omega_{a0} := \Omega \setminus \overline{\Omega}_{a+}. \quad (2.5)$$

Observemos que estes conjuntos são abertos. As hipóteses serão apresentadas oportunamente ao longo da exposição.

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira: na Seção 2.1 veremos uma motivação em Dinâmica de Populações para este modelo, apresentaremos as hipóteses adotadas,

alguns resultados conhecidos sobre este problema e enunciaremos nossos principais teoremas que se referem as soluções positivas de (2.1), interpretando tais resultados no contexto da Ecologia. A Seção 2.2 é dedicada a provar a existência e unicidade de solução positiva (2.1). Para estudar o comportamento pontual das soluções positivas com respeito ao parâmetro λ necessitaremos de um resultado auxiliar sobre soluções largas, que será apresentado na Seção 2.3. Por fim, estudaremos este comportamento pontual na Seção 2.4.

Neste estudo, os subconjuntos onde a e b se anulam desempenharam um papel fundamental. O conjunto dos valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que (2.1) admite solução positiva bem como o comportamento pontual destas soluções com respeito a este parâmetro dependem diretamente da localização de Ω_{a0} e Ω_{b0} , como veremos adiante.

2.1 Introdução

No estudo da Dinâmica de Populações, equações de reação-difusão tem sido utilizadas para modelar o comportamento de uma espécie vivendo em um habitat. Denotando por $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ o habitat e por $u(x)$ a densidade populacional de uma especie em cada ponto $x \in \Omega$, um clássico modelo estacionário de reação-difusão pode ser escrito como

$$\begin{cases} -\Delta(\phi(x, u)) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde ϕ e f são funções regulares em $\Omega \times \mathbb{R}$. O termo no lado esquerdo representa a difusão da espécie, isto é, seu movimento espacial. Neste caso, a difusão depende da posição ($x \in \Omega$) e da densidade populacional (u). ϕ é chamada *função de difusão não linear* e ϕ_u é a *taxa de difusão* (veja [71] e [85] para mais detalhes). Esta função pode ter diferentes formas, dependendo da natureza do comportamento interativo entre os indivíduos da espécie. Por exemplo, de acordo com [85], se os indivíduos se movem completamente independentes uns dos outros, ϕ é caracterizado por ser uma função linear da densidade u , isto é, é crescente com respeito a u a uma taxa constante. Neste caso, a difusão é chamada *simples* ou *linear*. Se a interação entre os indivíduos é repulsiva, então a taxa de movimento será crescente com a densidade populacional, desde que em alta densidade os indivíduos estão continuamente em contato uns com os outros, induzindo uma dispersão. Neste caso, a taxa de difusão ϕ_u será crescente com a densidade. Similarmente, se o

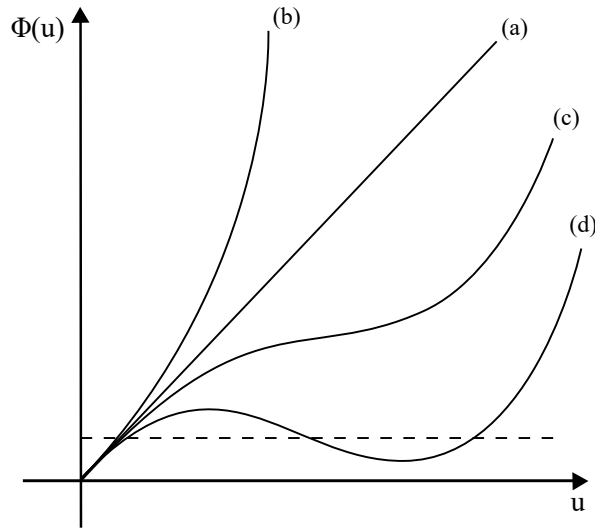


Figura 2.1: Efeito da interação entre indivíduos dependendo da forma da função de difusão $\phi(u)$: movimento linear (a); dispersivo (b); fracamente agregativo (c) e fortemente dispersivo (d) (veja [85]).

movimento é agregativo, a taxa de difusão é inicialmente decrescente com a densidade u , uma vez que os organismos em localidades de baixa densidade reduzem, em média, a sua taxa de movimento. Veja a Figura 2.1 com o esboço de diferentes funções ϕ .

Por outro lado, $f(x, u)$ é o *termo de reação* e este representa a taxa local de reprodução por indivíduos, ou seja, a taxa de crescimento populacional per capita.

Especificamente, em (2.1) temos os seguintes termos de difusão e reação: no termo de difusão $\phi(x; u) = u + a(x)u^r$, a função a determina o tipo de movimento espacial da espécie, isto é, linear quando $a = 0$ e repulsivo quando $a > 0$. Assim, o conjunto Ω_{a+} (isto é, $\{x \in \Omega; a(x) > 0\}$) é a região onde a espécie evita aglomeração. Já a função $f(x, u) = \lambda u - b(x)u^p$ é o bem conhecido termo de reação logístico. No contexto da Dinâmica de Populações, λ é a taxa de natalidade intrínseca da espécie e

$$C(x) := \frac{\lambda}{b(x)}$$

denota a densidade máxima suportada localmente pelos recursos disponíveis, de modo que quanto maior o valor de $C(x)$, mais recursos disponíveis e consequentemente mais indivíduos podem sobreviver nesta região. Neste sentido, quando $b(x) = 0$, temos $C(x) = \infty$ e podemos pensar o conjunto Ω_{b0} como uma zona de refugio para espécie. Para mais detalhes, veja os artigos pioneiros [72] e [41], que são os trabalhos onde aparecem pela primeira vez áreas de refúgio, isto é, zonas onde $b(x) = 0$. Indicamos também

[70, 71, 21, 62] e suas referências.

Estudaremos resultados de existência e unicidade de solução deste problema considerando diversas disposições do refugio (Ω_{b0}) e da zona de difusão linear (Ω_{a0}) para compreender a influência destes conjuntos na existência e perfil das soluções obtidas, isto é, o comportamento pontual das soluções com respeito ao parâmetro λ . Para este estudo admitiremos a seguinte hipótese

(H_1) Os conjuntos abertos definidos em (2.2) e (2.3), isto é,

$$\Omega_{b+} := \{x \in \Omega; b(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_{b0} := \Omega \setminus \overline{\Omega}_{b+}$$

são de classe $\mathcal{C}^2$ e Ω_{b0} consiste de finitas componentes conexas B_i , $1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, tais que

$$\overline{B}_i \subset \Omega, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \overline{B}_j \cap \overline{B}_i = \emptyset \quad \text{se } j \neq i.$$

Observe que esta premissa não exclui a possibilidade $b \equiv 0$. Além disso, quando $b \neq 0$ dois casos serão considerados: $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$ e $\Omega_{a0} \cap \Omega_{b0} \neq \emptyset$. Em particular, sempre que $\Omega_{a0} \cap B_i \neq \emptyset$, denotaremos por $\lambda_{0,i}$ o principal autovalor de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \chi_{\Omega_{a0} \cap B_i} u & \text{em } B_i, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_i, \end{cases} \quad (2.7)$$

e definimos $\lambda_{0,i} = \infty$ no caso em que $\Omega_{a0} \cap B_i = \emptyset$. Recordemos que este autovalor foi estudado na Seção 1.1 (Veja Exemplo 3).

Iremos supor, sem perda de generalidade, que a indexação dos B_i 's já foi realizada de modo que os autovalores

$$\lambda_{0,i} := \lambda_{\Omega_{a0} \cap B_i, B_i}$$

satisfazam

$$\lambda_{0,1} = \dots = \lambda_{0,m_1} < \lambda_{0,m_1+1} \leq \dots \leq \lambda_{0,m} \quad (2.8)$$

para algum $m_1 \in \{1, \dots, m-1\}$ ou

$$\lambda_{0,1} = \dots = \lambda_{0,m}. \quad (2.9)$$

A Figura 2.2 apresenta uma disposição possível para os conjuntos Ω_{a0} e Ω_{b0} .

Vejam agora um resumo dos resultados conhecidos referentes a este problema. Se $a \equiv 0$, (2.1) é a equação logística clássica com difusão linear. O estudo de (2.1) com

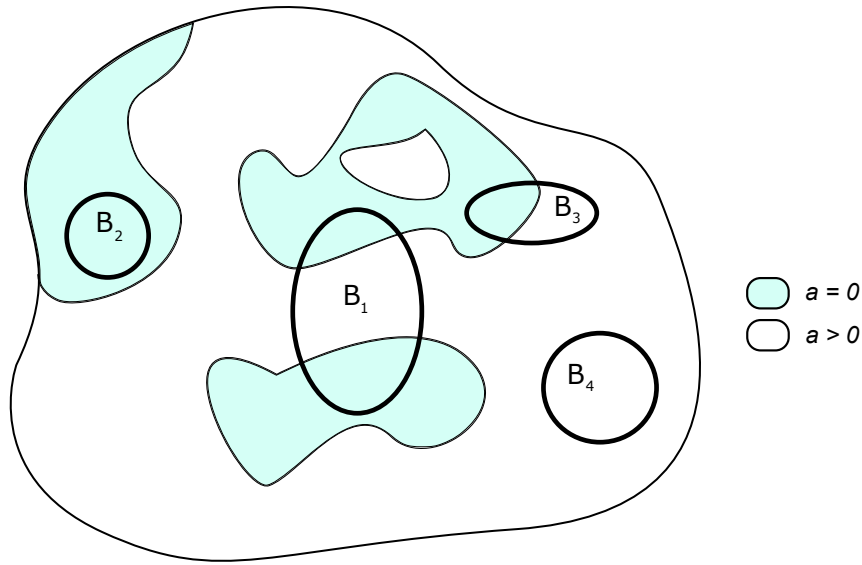


Figura 2.2: Uma configuração admissível para Ω_{a0} e Ω_{b0} com $m = 4$ e $m_1 = 1$. A região pintada representa o conjunto Ω_{a0} .

$a \equiv 0$ e $b > 0$ constante iniciou com o artigo [17] e desde então diversos trabalhos se desenvolveram, como [15], [72] e [65]. Os primeiros trabalhos que apresentam o estudo do comportamento pontual das soluções positivas com respeito ao parâmetro λ são [65] e [43], enquanto que o caso em que Ω_{b0} possui diversas componentes conexas aparece pela primeira vez em [45]. É neste artigo também que se constrói pela primeira vez uma solução larga de um problema auxiliar com várias regiões de refúgio. Indicamos ainda o livro [62] que é inteiramente dedicado à análise da dinâmica de (2.1) com $a \equiv 0$, fazendo um estudo bastante completo deste problema, tratando o caso com várias componentes conexas para Ω_{b0} , além de uma análise da equação parabólica associada. Vamos enunciar um teorema que resume os resultados conhecidos do caso $a \equiv 0$. Para isso, observe que $a \equiv 0$ implica

$$\Omega_{a0} \cap B_i = B_i$$

e portanto $\mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_i} \equiv 1$ em B_i . Logo, o problema de autovalor (2.7) se torna

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } B_i, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_i, \end{cases}$$

que será denotado por

$$\lambda_1^{B_i}[-\Delta],$$

conforme a notação introduzida no Capítulo 1. Assim, podemos resumir os resultados

conhecidos de (2.1) com $a \equiv 0$ e $b > 0$ da seguinte maneira:

Teorema 2.1 *Supondo, sem perda de generalidade,*

$$\lambda_1^{B_1}[-\Delta] = \dots = \lambda_1^{B_{m_0}}[-\Delta] < \dots \leq \lambda_1^{B_m}[-\Delta],$$

para algum $m_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$. Se $a \equiv 0$ em Ω , então (2.1) admite solução positiva se, e somente se $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^{B_1}[-\Delta])$. Além disso, se existe a solução é única. Mais ainda, denotando por u_λ esta única solução, então a aplicação

$$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1^{B_1}[-\Delta]) \mapsto u_\lambda \in C_0^1(\overline{\Omega})$$

é crescente e de classe C^1 e u_λ satisfaz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = 0$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^{B_1}[-\Delta]} u_\lambda(x) \begin{cases} = \infty & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{m_0} \overline{B}_i, \\ < \infty & \text{se } x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m_0} \overline{B}_i. \end{cases}$$

Destacamos dois aspectos neste resultado: dentre os autovalores $\lambda_1^{B_i}[-\Delta]$, com $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, o menor deles marca o intervalo de existência de solução de (2.1) com respeito à taxa de natalidade λ . Além disso, o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^{B_1}[-\Delta]} u_\lambda(x)$$

é infinito exatamente nos B_i tais que $\lambda_1^{B_1}[-\Delta] = \dots = \lambda_1^{B_{m_0}}[-\Delta]$ (ou seja, os menores). Em termos de dinâmica de população, temos a seguinte interpretação: recordando que este autovalor é decrescente com respeito ao domínio, então os menores autovalores são gerados pelos "maiores" B_i 's, precisamente, maiores $|B_i|$, onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue. Assim, a espécie busca aglomerar-se nos maiores refúgios, e estes são as zonas onde os indivíduos crescem indefinidamente a medida que λ cresce e se aproxima de $\lambda_1^{B_1}[-\Delta]$.

Vejamos os resultados sobre (2.1) com $a \neq 0$. Neste caso, apenas resultados parciais são conhecidos. Quando $a = \text{const.} > 0$, $b \equiv 0$ (ou $b \equiv 1$) e $p = r = 2$ há resultados em [67] e se $a(x), b(x) > 0$ em $\overline{\Omega}$ com $p \geq r$ o resultado de existência e está incluído no

Teorema 2.1 de [77]. Ambos os artigos mostram existência e unicidade de solução positiva de (2.1) se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$. Destacamos que nenhum destes resultados lida com o caso em que a e b são simultaneamente não nulos e a interseção $\Omega_{a0} \cap \Omega_{b0}$ é não vazia.

Nosso principal resultado com respeito a esse problema é apresentado a seguir

Teorema 2.2 *Supondo (H_1) .*

a) *Se $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$, então (2.1) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$. Além disso, para $p \geq r$, se existe a solução é única. Mais ainda, denotando por u_λ esta única solução, então a aplicação*

$$\lambda \in (\lambda_1, \infty) \mapsto u_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

é crescente e de classe $\mathcal{C}^1$ e u_λ satisfaz

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = 0 \quad (2.10)$$

e

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} u_\lambda = \infty \quad \text{uniformemente em } \Omega_{b0}. \quad (2.11)$$

b) *Se $\Omega_0 := \Omega_{a0} \cap \Omega_{b0} \neq \emptyset$, $p > r$ e supondo sem perda de generalidade que os $\lambda_{0,i}$'s satisfazem (2.8) ou (2.9), então (2.1) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$. Além disso, se existe a solução é única. Mais ainda, denotando por u_λ esta única solução, então a aplicação*

$$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1}) \mapsto u_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

é crescente e de classe $\mathcal{C}^1$ e u_λ satisfaz

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = 0, \quad (2.12)$$

e

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} u_\lambda(x) \begin{cases} = \infty & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i, \\ < \infty & \text{se } x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i. \end{cases} \quad (2.13)$$

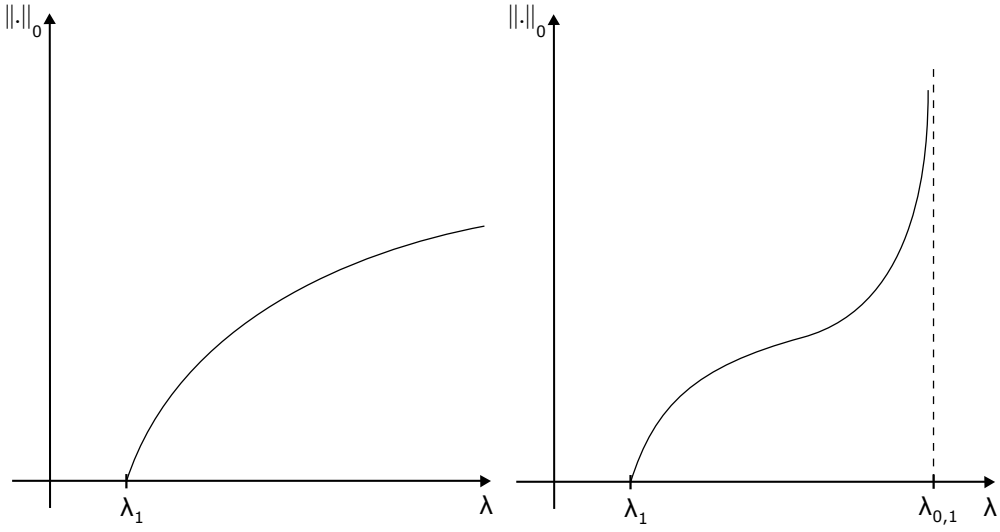


Figura 2.3: Diagramas de bifurcação do problema (2.1). À esquerda o caso $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$ e à direita representa o caso $\Omega_{a0} \cap \Omega_{b0} \neq \emptyset$.

Observemos que o caso $b \equiv 0$ pode ser obtido como um corolário do Teorema 2.2 b). De fato, quando Ω_{b0} possui uma única componente conexa que é exatamente o aberto Ω (i.e., $\Omega_{b0} = \Omega$), $\lambda_{0,1}$ se torna o autovalor do seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \chi_{\Omega_{a0}} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Denotando este autovalor por

$$\lambda_{a0},$$

temos

Teorema 2.3 *Supondo $b \equiv 0$ em Ω . Então, (2.1) possui solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0})$. Além disso, se existe a solução é única. Mais ainda, denotando por u_λ esta única solução, então a aplicação*

$$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0}) \mapsto u_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

é crescente e de classe $\mathcal{C}^1$ e u_λ satisfaz

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = 0 \tag{2.14}$$

e

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{a0}} u_\lambda(x) = \infty \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.15}$$

A Figura 2.3 apresenta os diagramas de bifurcação obtidos pelo Teorema 2.2.

Com o intuito de fornecer uma interpretação em Dinâmica de Populações para o Teorema 2.2, vamos considerar o caso em que o refugio Ω_{b0} consiste de duas componentes B_1 e B_2 (isto é, $\Omega_{b0} = B_1 \cup B_2$). Então:

- a) Se a zona onde a espécie evita aglomeração (Ω_{a+}) contem o refugio (Ω_{b0}), isto é $\Omega_{b0} \subset \Omega_{a+}$, então a espécie se mantém controlada para todo $\lambda > \lambda_1$.
- b) Assumindo que uma porção do refugio, digamos Ω_0 , a espécie se difunde linearmente, isto é, $\Omega_{b0} \cap \Omega_{a0} \neq \emptyset$, então a espécie explode para valores $\lambda \geq \min\{\lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}\}$. Além disso,
 - (i) Se $\lambda_{0,1} < \lambda_{0,2}$ (resp. $\lambda_{0,1} > \lambda_{0,2}$), então a espécie explode não apenas em $\Omega_0 \cap B_1$ (resp. $\Omega_0 \cap B_2$), mas em todo B_1 (resp. B_2) e se mantém limitada em $\Omega \setminus \overline{B_1}$ (resp. $\Omega \setminus \overline{B_2}$), incluindo a outra parte do refugio B_1 (resp. B_2).
 - (ii) Se $\lambda_{0,1} = \lambda_{0,2}$, então a especie explode em todo o refugio Ω_{b0} , não apenas em Ω_0 .

A demonstração do Teorema 2.2 será feita em vários lemas e proposições e o roteiro da demonstração é o seguinte: primeiramente obter um continuum ilimitado bifurcando da solução trivial em $\lambda = \lambda_1$ em seguida estudar o comportamento deste continuum, mostrando que a aplicação $\lambda \mapsto u_\lambda$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e que possuem os aspectos apresentados na Figura 2.3. Por último, vamos estudar o comportamento pontual das soluções, ou seja, o limite

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} u_\lambda(x),$$

para cada $x \in \Omega$. Este estudo é dividido em dois casos: quando limite é infinito e quando o limite é finito. No primeiro caso vamos usar argumentos inspirados em [43] que consiste em tomar uma subsolução adequada. No segundo precisaremos construir uma supersolução e para isso necessitaremos estudar um problema de soluções largas.

2.2 Existência e unicidade de solução positiva

Nesta seção vamos provar existência e unicidade de solução positiva para o problema (2.17), além das propriedades de monotonia e regularidade da aplicação $\lambda \mapsto u_\lambda$.

Inicialmente, para tratar a equação (2.1), vamos introduzir a seguinte mudança de variável

$$w = I(x, u) = u + a(x)u^r \Leftrightarrow q(x, w) = u, \quad (2.16)$$

para cada $x \in \Omega$. Desta forma, (2.1) é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Assim, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ é uma solução de (2.1) se, e somente se, $w = u + a(x)u^r$ é solução de (2.17).

Desde que estamos interessados em soluções positivas de (2.1), podemos definir

$$q(x, s) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad s \leq 0.$$

Consequentemente, pelo Princípio do Máximo, $\lambda > 0$ é uma condição necessária para a existência de solução não negativa. Além disso, qualquer solução não nula de (2.17) é não negativa. De fato, se w é uma solução não trivial de (2.17), w satisfaz

$$-\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p \quad \forall x \in \Omega.$$

Multiplicando esta equação pela parte negativa de w , isto é, $w^- := \min\{w, 0\}$ e integrando em Ω segue que

$$\int_{\Omega} (-w^- \Delta w) dx = \int_{\Omega} w^- (\lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p) dx.$$

Usando integração por partes obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w^- dx = \int_{\Omega} w^- (\lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p) dx.$$

Como $w^- = 0$ se $w \geq 0$, denotando $\{w < 0\} := \{x \in \Omega; w(x) < 0\}$, segue que

$$\|w^-\|_{H_0^1}^2 = \int_{\{w < 0\}} w^- (\lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p) dx = 0$$

onde esta última igualdade é obtida uma vez que $q(x, w) = 0$ quando $w < 0$. Portanto $w^- \equiv 0$ e w é não negativa. Em realidade, pelo Princípio do Máximo Forte, $w \in \mathring{P}$, ou seja, $w(x) > 0$ em Ω e $(\partial w / \partial n)(x) < 0$ sobre $\partial\Omega$. Com efeito, se $w \geq 0$ é uma solução não trivial de (2.17), então ela satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w + b(x)q(x, w)^p = \lambda q(x, w) > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

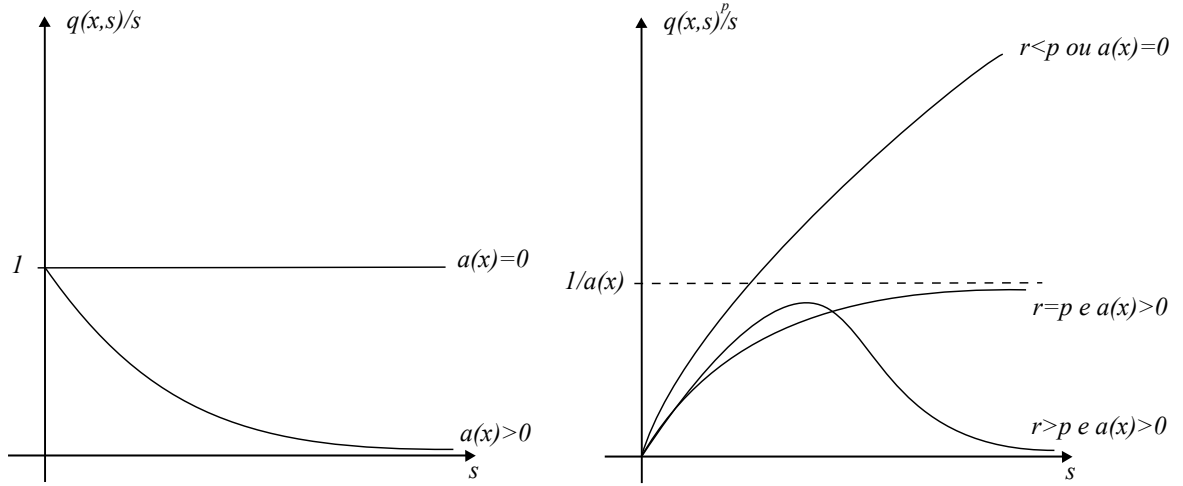


Figura 2.4: Gráfico das funções $q(x, s)/s$ e $q(x, s)^p/s$.

Definindo

$$a_0(x) := \begin{cases} b(x) \frac{q(x, w(x))^p}{w(x)} & \text{se } w(x) > 0, \\ 0 & \text{se } w(x) = 0, \end{cases}$$

então $a_0 > 0$ e portanto

$$\lambda_1^\Omega[-\Delta + a_0(x)] = \inf_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega (|\nabla \phi|^2 + a_0(x)\phi^2)}{\int_\Omega \phi^2} > 0.$$

Assim, pelo Teorema 1.5, o operador $\mathcal{L} := -\Delta + a_0(x)$ satisfaz o princípio do máximo forte. Tendo em vista (2.18), temos

$$\begin{cases} -\Delta w + a_0(x)w = \lambda q(x, w) > 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo w não nula, segue que $w \in \mathring{P}$.

Feitas essas considerações, vejamos o primeiro resultado desta seção que fornece algumas propriedades básicas sobre $q(x, w)$ que serão extensivamente utilizadas ao longo deste capítulo (veja Figura 2.4).

Lema 2.4 a) Para cada $x \in \Omega$, a aplicação $s \mapsto q(x, s)$, $s \geq 0$ é de classe $\mathcal{C}^1$ em $[0, \infty)$.

b) Para cada $x \in \Omega$, a aplicação

$$s \mapsto \frac{q(x, s)}{s} \quad s \geq 0$$

é não crescente e satisfaz

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(x, s)}{s} = 1 \quad \text{uniformemente em } \Omega, \quad (2.19)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(x, s)}{s} = \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a(x) > 0, \\ 1 & \text{se } a(x) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

e

$$\mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x)s \leq q(x, s) \leq s \quad \forall x \in \Omega, \quad s \geq 0. \quad (2.21)$$

c) Para cada $x \in \Omega$, a aplicação

$$s \mapsto \frac{q(x, s)^p}{s} \quad s \geq 0$$

satisfaz

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(x, s)^p}{s} = 0, \quad (2.22)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{q(x, s)^p}{s} = \begin{cases} \infty & \text{se } r < p \text{ ou } a(x) = 0, \\ \frac{1}{a(x)} & \text{se } r = p \text{ e } a(x) > 0, \\ 0 & \text{se } r > p \text{ e } a(x) > 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

e é crescente se $p \geq r$.

Demonstração:

a) Desde que $q(x, \cdot)$ é a função inversa de $I(x, s) = s + a(x)s^r$, temos que

$$q_s(x, s) = \frac{1}{I_s(x, q(x, s))} = \frac{1}{1 + a(x)r q(x, s)^{r-1}},$$

mostrando que $s \mapsto q_s(x, s)$ é contínua em $[0, \infty)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$ e, portanto, $q(x, \cdot)$ é de classe $\mathcal{C}^1$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

b) Desde que $q(x, \cdot)$ é a função inversa de $I(x, \cdot)$, então

$$s = I(x, q(x, s)) = q(x, s) + a(x)q(x, s)^r.$$

Consequentemente

$$\frac{q(x, s)}{s} = \frac{q(x, s)}{q(x, s) + a(x)q(x, s)^r} = \frac{1}{1 + a(x)q(x, s)^{r-1}}. \quad (2.24)$$

Primeiramente, vamos verificar que $s \mapsto q(x, s)/s$ é não crescente. De fato, se $a(x) = 0$ então $q(x, s)/s = 1$. Se $a(x) > 0$, uma vez que $r > 1$, $q(x, \cdot)^{r-1}$ é crescente e de (2.24) concluímos que $q(x, s)/s$ é decrescente.

Observando que

$$\lim_{s \rightarrow 0} q(x, s)^{r-1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} q(x, s)^{r-1} = +\infty,$$

é fácil obter (2.19), (2.20) e (2.21).

c) Para obter (2.22), note que

$$\frac{q(x, s)^p}{s} = q(x, s)^{p-1} \frac{q(x, s)}{s}.$$

Assim, usando o limite (2.19) obtido no item anterior temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(x, s)^p}{s} = q(x, 0)^{p-1} \cdot 1 = 0$$

Por outro lado, usando (2.20) e (2.24), obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(x, s)^p}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{q(x, s)^{1-p} + a(x)q(x, s)^{r-p}} = \begin{cases} \infty, & \text{se } r < p \text{ ou } a(x) = 0, \\ \frac{1}{a(x)}, & \text{se } r = p \text{ e } a(x) > 0, \\ 0, & \text{se } r > p \text{ e } a(x) > 0, \end{cases}$$

e $q(x, s)^p/s$ é crescente se $p \geq r$.

□

Provaremos agora um resultado de comparação que nos ajudará ao longo deste capítulo.

Lema 2.5 *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\lambda, x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.25)$$

onde $u_0 \geq 0$ é uma função em $\mathcal{C}(\partial\Omega)$. Assumindo que $f : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que

$$s \mapsto \frac{f(\lambda, x, s)}{s}$$

é não crescente para todo $x \in \Omega$ e existe $x_1 \in \Omega$ tal que $f(\lambda, x_1, s)/s$ é decrescente. Então:

a) Existe no máximo uma solução positiva de (2.25).

b) Seja $\underline{u}, \bar{u} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, $\underline{u} \geq 0$ e $\bar{u} > 0$ um par de sub e supersolução de (2.25), respectivamente. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \underline{u} \leq \bar{u}$, então

$$\underline{u} \leq \bar{u}.$$

Demonstração:

a) Desde que $f(\lambda, x, s)/s$ é não crescente em s para todo $x \in \Omega$, se existem duas soluções (positivas), w e v , de (2.25), então $w = cv$ para alguma constante positiva c (veja Teorema 1.36). Assim, em x_1 temos

$$\left(\frac{f(\lambda, x_1, v)}{v} - \frac{f(\lambda, x_1, cv)}{cv} \right) v = 0. \quad (2.26)$$

Desde que $s \mapsto f(\lambda, x_1, s)/s$ é decrescente, se $c > 1$ teríamos

$$\left(\frac{f(\lambda, x_1, v)}{v} - \frac{f(\lambda, x_1, cv)}{cv} \right) v < 0,$$

o que é uma contradição com (2.26). Analogamente, $c < 1$ não pode ocorrer e, portanto, $c = 1$ e $w = v$.

b) Seja

$$\Lambda = \{t \in [0, 1]; t\underline{u} \leq \bar{u}\}.$$

Por hipótese, $\varepsilon \in \Lambda$. Vamos provar que $1 \in \Lambda$. De fato, caso contrário teríamos

$$0 < t_0 := \sup \Lambda < 1.$$

Escolhendo $K > 0$ suficientemente grande tal que $f(\lambda, x, s) + Ks$ é crescente sobre $[0, \max \bar{u}]$, obtemos para $\underline{u} \neq 0$

$$\begin{aligned} -\Delta(\bar{u} - t_0 \underline{u}) + K(\bar{u} - t_0 \underline{u}) &\geq f(\lambda, x, \bar{u}) - t_0 f(\lambda, x, \underline{u}) + K(\bar{u} - t_0 \underline{u}) \\ &\geq f(\lambda, x, \bar{u}) + K\bar{u} - t_0 f(\lambda, x, \underline{u}) - Kt_0 \underline{u} \\ &\geq f(\lambda, x, t_0 \underline{u}) + Kt_0 \underline{u} - t_0 f(\lambda, x, \underline{u}) - Kt_0 \underline{u} \\ &\geq t_0 \underline{u} \left[\frac{f(\lambda, x, t_0 \underline{u})}{t_0 \underline{u}} - \frac{f(\lambda, x, \underline{u})}{\underline{u}} \right] > 0, \end{aligned}$$

para esta última desigualdade usamos que $s \mapsto f(\lambda, x, s)/s$ é não crescente e $t_0 < 1$.

Deste modo, $\underline{u} = 0$ fornece $-\Delta(\bar{u} - t_0 \underline{u}) + K(\bar{u} - t_0 \underline{u}) \geq 0$. Assim, $w := \bar{u} - t_0 \underline{u}$ verifica

$$\begin{cases} -\Delta w + Kw > 0 & \text{em } \Omega, \\ w \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo Forte, podemos obter $\delta > 0$ pequeno tal que $t_0 + \delta \in \Lambda$, o que é uma contradição.

□

O próximo lema nos fornece um resultado de não existência de solução positiva para (2.17).

Lema 2.6 *Se existe solução positiva de (2.1), então $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$.*

Demonstração: Supondo que $w > 0$ é uma solução positiva de (2.1). Assim, $w > 0$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w} w = \lambda \frac{q(x, w)}{w} w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e portanto

$$\lambda = \lambda_1^\Omega \left[-\Delta + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w}; \frac{q(x, w)}{w} \right]. \quad (2.27)$$

Usando as propriedades de monotonia deste autovalor dadas pelo Teorema 1.8 e as cotas sobre $q(x, s)$ obtidas no Lema 2.4 temos:

$$\frac{q(x, w)}{w} < 1 \Rightarrow \lambda = \lambda_1^\Omega \left[-\Delta + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w}; \frac{q(x, w)}{w} \right] > \lambda_1^\Omega [-\Delta; 1] = \lambda_1.$$

Se $\bar{\Omega}_{a0} \cap \bar{\Omega}_{b0} = \emptyset$ então $\lambda_{0,1} = \infty$ a demonstração esta terminada.

Por outro lado, se $\Omega_{a0} \cap \Omega_{b0} \neq \emptyset$ (e consequentemente $\lambda_{0,1} < \infty$), então

$$\begin{aligned} B_1 \subsetneq \Omega \Rightarrow \lambda = \lambda_1^\Omega \left[-\Delta + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w}; \frac{q(x, w)}{w} \right] &< \lambda_1^{B_1} \left[-\Delta + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w}; \frac{q(x, w)}{w} \right] \\ &= \lambda_1^{B_1} \left[-\Delta; \frac{q(x, w)}{w} \right]. \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_1}(x) < \frac{q(x, w)}{w} \text{ em } B_1 \Rightarrow \lambda < \lambda_1^{B_1} \left[-\Delta; \frac{q(x, w)}{w} \right] < \lambda_1^{B_1} [-\Delta; \mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_1}] = \lambda_{0,1}.$$

Completando a demonstração. □

O próximo resultado nos dará a unicidade de soluções para o problema (2.17).

Lema 2.7 *Se $b \equiv 0$ ou $b \not\equiv 0$ e $p \geq r$ então (2.17) admite no máximo uma solução positiva.*

Demonstração: Se $b \equiv 0$, então pelo Lema 2.4, a aplicação

$$s \mapsto \lambda \frac{q(x, s)}{s}$$

é não decrescente para todo $x \in \Omega$, sendo estritamente decrescente para $x \in \Omega_{a+}$ e a unicidade segue do Lema 2.5 a).

Se $b \not\equiv 0$, novamente pelo Lema 2.4, a aplicação

$$s \mapsto \lambda \frac{q(x, s)}{s} - b(x) \frac{q(x, s)^p}{s}$$

é não crescente para todo $x \in \Omega$, sendo estritamente decrescente se $x \in \Omega_{a+}$ e mais uma vez a unicidade segue do Lema 2.5 a).

□

Agora, iremos mostrar que λ_1 é o único ponto de bifurcação de soluções positivas de (2.17) a partir da solução trivial. Para isso, seja e_1 a única solução (positiva) de

$$\begin{cases} -\Delta e_1 = 1 & \text{em } \Omega, \\ e_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

e seja E o espaço de Banach consistindo de todas as funções $u \in C(\overline{\Omega})$ para as quais existe $\gamma = \gamma(u) > 0$ tal que

$$-\gamma e < u < \gamma e$$

equipado com a norma

$$\|u\|_E := \inf\{\gamma > 0; -\gamma e < u < \gamma e\}$$

e a ordem pontual natural. Então E é um espaço de Banach ordenado cujo cone positivo, P_E , é normal e possui interior não vazio (conforme [3], Seção 2). Assim, considere a aplicação $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ definida por

$$\mathfrak{F}(\lambda, w) = w - (-\Delta)^{-1}(\lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p),$$

onde $(-\Delta)^{-1}$ é a inversa do operador Laplaciano sob as condições de fronteira homogênea de Dirichlet. Então $\mathfrak{F}$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Além disso, $w \in E$ é uma solução positiva de (2.17) se, e somente se, $\mathfrak{F}(\lambda, w) = 0$. Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{R} \times E$ o conjunto das soluções não triviais de (2.17) unido com os possíveis pontos de bifurcação.

Proposição 2.8 λ_1 é um ponto de bifurcação de (2.1) da solução trivial e é o único de soluções positivas. Além disso, existe um continuum ilimitado em $\mathbb{R} \times E$, isto é, um conjunto fechado e conexo $\Sigma_0 \subset \mathcal{S}$ contendo $(\lambda_1, 0)$.

Demonstração: Vamos aplicar o Teorema 1.30.

Graças a (2.19) e (2.22), temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\lambda q(x, s) - b(x)q(x, s)^p}{s} = \lambda.$$

Assim, a linearização de $\mathfrak{F}$ em $(\lambda, 0)$ é dada por

$$D_w \mathfrak{F}(\lambda, 0) = I_{C_0} - \lambda(-\Delta)^{-1}.$$

Consequentemente, $D_w \mathfrak{F}(\lambda, 0)$ é um operador de Fredholm de índice zero cujo espectro consiste dos autovalores de $-\Delta$ em Ω sob as condições de fronteira homogênea de Dirichlet. Além disso, já vimos que as soluções de (2.17) (e portanto de $\mathfrak{F} = 0$) satisfazem o princípio do máximo, ou seja, qualquer solução não negativa e não nula de (2.17) é na verdade uma solução em $\mathring{P}$. Então, pelo Teorema 1.30,

$$\lambda_1 = \frac{1}{r((-\Delta)^{-1})}$$

é um ponto de bifurcação da solução trivial. $\square$

Agora vamos mostrar a existência de solução positiva para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$ considerando dois casos: quando $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$ e quando $\Omega_{a0} \cap \Omega_{b0} \neq \emptyset$. Observe que no primeiro caso $\lambda_{0,1} = +\infty$ e no segundo $\lambda_{0,1} < +\infty$.

Proposição 2.9 *O problema (2.17) admite solução positiva para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$*

Demonstração: Caso $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$.

Uma vez que $\lambda_{0,1} = \infty$, devemos provar existência de solução positiva para todo $\lambda > \lambda_1$. Para isso, é suficiente mostrar que dado $\lambda_* > \lambda_1$, existe uma constante $C = C(\lambda_*)$ tal que

$$\|w\|_0 \leq C \quad \forall (\lambda, w) \in \Sigma_0, \quad \lambda \leq \lambda_*. \quad (2.28)$$

De fato, esta estimativa implica, pela natureza global de Σ_0 , que $\text{Proj}_{\mathbb{R}} \Sigma_0 = (\lambda_1, \infty)$, onde $\text{Proj}_{\mathbb{R}} \Sigma_0$ é a projeção de Σ_0 em $\mathbb{R}$. Para provar (2.28), vamos construir uma família $\overline{W}(\lambda)$ de supersoluções de (2.17) e aplicar o Teorema 1.42. Considere a aplicação contínua $\overline{W} : [\lambda_1, \lambda_*] \rightarrow \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega})$ definida por $\overline{W}(\lambda) = K(\lambda)e$, onde $K = K(\lambda)$ é uma constante positiva a ser escolhida e $e \in \mathcal{C}_0^2(\overline{\Omega})$ é a única solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta e = 1 & \text{em } \widehat{\Omega}, \\ e = 0 & \text{sobre } \partial\widehat{\Omega}, \end{cases} \quad (2.29)$$

para algum domínio regular $\widehat{\Omega}$ tal que $\Omega \subset\subset \widehat{\Omega}$. Então, $\overline{W}(\lambda) = K(\lambda)e$ é uma supersolução de (2.17) se

$$\begin{aligned} K = -\Delta(Ke) &\geq \lambda q(x, Ke) - b(x)q(x, Ke)^p \quad \text{em } \Omega \\ 1 &\geq \lambda \frac{q(x, Ke)}{Ke} e - b(x) \frac{q(x, Ke)^p}{Ke} e \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Vamos usar os limites (2.20)–(2.23), ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(x, s)}{s} = \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{q(x, s)^p}{s} = \begin{cases} \infty & \text{se } r < p \text{ ou } a(x) = 0, \\ \frac{1}{a(x)} & \text{se } r = p \text{ e } a(x) > 0, \\ 0 & \text{se } r > p \text{ e } a(x) > 0, \end{cases}$$

para verificar que a desigualdade (2.30) ocorre em cada parte de Ω , especificamente, vamos analisar esta desigualdade em $\overline{\Omega}_{a0}$, em $\overline{\Omega}_{b0}$ e em $\Omega \setminus (\overline{\Omega}_{a0} \cup \overline{\Omega}_{b0})$. E com efeito, observe inicialmente que, da definição de e e como $\Omega \subset\subset \widehat{\Omega}$, então

$$e_M := \max_{\overline{\Omega}} e(x) > e_m := \min_{\overline{\Omega}} e(x) > 0.$$

Assim, uma vez que $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$, temos que $a(x) > 0$ em $\overline{\Omega}_{b0}$ e, consequentemente,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_* \max_{\overline{\Omega}_{b0}} \frac{q(x, s)}{s} e_M = 0$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\varepsilon > \lambda_* \frac{q(x, s)}{s} e_M \quad \text{sempre que } s > M_1.$$

Em particular, escolhendo $K(\lambda)$ suficientemente grande tal que $K(\lambda)e_M > M_1$, teremos

$$\varepsilon > \lambda_* \max_{\overline{\Omega}_{b0}} \frac{q(x, K(\lambda)e_m)}{K(\lambda)e_m} e_M \geq \lambda \frac{q(x, K(\lambda)e)}{K(\lambda)e} e \quad \forall x \in \overline{\Omega}_{b0}, \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_*.$$

Portanto a desigualdade (2.30) se cumpre em $\overline{\Omega}_{b0}$.

Novamente, uma vez que $\overline{\Omega}_{a0} \cap \overline{\Omega}_{b0} = \emptyset$, temos que $b(x) > 0$ em $\overline{\Omega}_{a0}$ e (2.30) é equivalente a

$$1 > \lambda e - b(x)K^{p-1}e^p.$$

$$b(x)K^{p-1}e^p > \lambda e - 1.$$

Desde que $b(x)e^p > 0$ em $\overline{\Omega}_{a0}$, é fácil ver que a desigualdade acima se cumpre para $K(\lambda)$ suficientemente grande. Por fim, em $\Omega \setminus (\overline{\Omega}_{a0} \cup \overline{\Omega}_{b0})$, temos que $a(x), b(x) > 0$, então (2.30) pode ser escrita como

$$bq(x, Ke)^{p-1} > \lambda - \frac{Ke}{q(x, Ke)e}$$

e novamente podemos escolher K suficientemente grande tal que

$$\min_{\Omega \setminus (\overline{\Omega}_{a0} \cup \overline{\Omega}_{b0})} [b(x)q(x, Ke)^{p-1}] > \lambda$$

e esta desigualdade ocorre.

Consequentemente, tomando $K > 0$ suficientemente grande, $\overline{W}(\lambda) = Ke$ é uma supersolução (mas não uma solução) para todo $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_*]$ e $W(\lambda_1) = K(\lambda_1)e > 0$. Assim o resultado segue.

Caso $\Omega_{a0} \cap \Omega_{b0} \neq \emptyset$.

Graças a Proposição 2.6, (2.17) não admite solução positiva para $\lambda \notin (\lambda_1, \lambda_{0,1})$ e, como consequência, pela natureza global de Σ_0 , existe uma sequência de soluções positivas de (2.17), (λ_n, w_n) , tais que $\|w_n\|_0 \rightarrow \infty$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda^* \leq \lambda_{0,1}$. Vamos mostrar que $\lambda^* = \lambda_{0,1}$ e para isso vamos seguir os argumentos do Lema 2.4 de [7]. Primeiramente note que $|w_n|_2 \rightarrow \infty$, onde $|\cdot|_2$ representa a norma padrão em $L^2(\Omega)$. De fato, caso contrário, multiplicando (2.17) por w_n e integrando em Ω teríamos

$$-\int_{\Omega} w_n \Delta w_n = \lambda_n \int_{\Omega} q(x, w_n) w_n - \int_{\Omega} b(x) q(x, w_n)^p w_n.$$

Usando integração por partes e (2.21) (ou seja, a desigualdade $q(x, s) \leq s$),

$$\int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 \leq \lambda_{0,1} |w_n|_2^2$$

e então $\|w_n\|_{H_0^1}$ seria limitada e consequentemente, por regularidade elíptica, $\|w_n\|_{W^{2,m}}$ seria limitada para todo $m > 1$. Assim, pelas imersões de Morrey $W^{2,m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $m > N$,

$$\|w_n\|_0 \leq C \|w_n\|_{W^{2,m}} \leq \overline{C}$$

que é uma contradição.

Então de fato $|w_n|_2 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Definindo $z_n = w_n |w_n|_2^{-1}$ e multiplicando (2.17) por $z_n |w_n|_2^{-1}$ obtemos

$$-\int_{\Omega} z_n \Delta z_n = \lambda_n \int_{\Omega} \frac{q(x, w_n)}{|w_n|_2} z_n - \int_{\Omega} b(x) \frac{q(x, w_n)^p}{|w_n|_2} z_n.$$

Usando integração por partes e (2.21) e a estimativa $q(x, s) \leq s$ (conforme Lema 2.4), obtemos

$$\|z_n\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} |\nabla z_n|^2 \leq \lambda_n |z_n|_2^2 \leq \lambda_{0,1}.$$

Então z_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Passando a subsequência se necessário, $z_n \rightarrow z$ em $L^2(\Omega)$ com $|z|_2 = 1$ e $z > 0$.

Vamos provar que $z = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_{b_0}$. De fato, se $z(x) > 0$ em um subconjunto de $\Omega \setminus \overline{\Omega}_{b_0}$ com medida de Lebesgue não nula, tomamos D um domínio regular arbitrário tal que $\overline{D} \subset \Omega \setminus \overline{\Omega}_{b_0}$ e $z(x) > 0$ q.s. em D . Então, dado $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$, multiplicando (2.17) por $\phi|w_n|_2^{-1}$ e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned} - \int_D z_n \Delta \phi &= \lambda_n \int_D \frac{q(x, w_n)}{|w_n|_2} \phi - \int_D b(x) \frac{q(x, w_n)^p}{|w_n|_2} \phi \\ &= \lambda_n \int_D \frac{q(x, z_n |w_n|_2)}{z_n |w_n|_2} z_n \phi - \int_D b(x) \frac{q(x, w_n |w_n|_2)^p}{z_n |w_n|_2} z_n \phi. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Desde que $z(x) > 0$ q.s. $x \in D$, então $w_n(x) = z_n(x)|w_n|_2 \rightarrow \infty$ q.s. $x \in D$. Uma vez que $p > r$ e $b > 0$ em $\overline{D}$, passando ao limite $n \rightarrow \infty$ em (2.31) concluímos

$$- \int_D z \Delta \phi - \lambda^* \int_D \mathcal{X}_{\Omega_{a_0}} z \phi = -\infty$$

que é uma contradição. Isto mostra que $z = 0$ q.s. em $\Omega \setminus \Omega_{b_0}$, consequentemente, $z \in H_0^1(\Omega_{b_0})$.

Assim, seja $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{b_0})$, desde que $b \equiv 0$ em Ω_{b_0} , multiplicando (2.17) por $\varphi|w_n|_2^{-1}$ e integrando por partes, segue que

$$- \int_{\Omega_{b_0}} z_n \Delta \varphi = \lambda_n \int_{\Omega_{b_0}} \frac{q(x, w_n)}{|w_n|_2} \varphi = \lambda_n \int_{\Omega_{b_0}} \frac{q(x, z_n |w_n|_2)}{z_n |w_n|_2} z_n \varphi.$$

Passando ao limite $n \rightarrow \infty$ encontramos

$$- \int_{\Omega_{b_0}} z \Delta \varphi = \lambda^* \int_{\Omega_{b_0}} \mathcal{X}_{\Omega_{a_0}} z \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{b_0}).$$

Desde que $z \in H_0^1(\Omega_{b_0})$, $z > 0$ em Ω_{b_0} com $|z|_2 = 1$ e $\lambda^* \leq \lambda_{0,1}$, segue que $\lambda^* = \lambda_{0,1}$. $\square$

O próximo passo será mostrar que as propriedades de monotonia e regularidade da aplicação $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1}) \mapsto w_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$. Estes resultados também nos ajudarão a estudar o comportamento pontual desta aplicação.

Proposição 2.10 *Supondo $p \geq r$, então a aplicação*

$$\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1}) \mapsto w_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

que associa cada $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$ à única solução w_λ de (2.17) é monótona crescente e de classe $\mathcal{C}^1$.

Demonstração: Vamos provar que a aplicação $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1}) \mapsto w_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ é monótona crescente, isto é, dados $\lambda, \mu \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$ tais que $\lambda < \mu$, devemos mostrar que $w_\lambda < w_\mu$. Com efeito, note que w_μ satisfaz

$$-\Delta w_\mu = \mu q(x, w_\mu) - b(x)q(x, w_\mu)^p > \lambda q(x, w_\mu) - b(x)q(x, w_\mu)^p \quad \text{em } \Omega.$$

Assim, w_μ é uma supersolução estrita de (2.17) (com λ) e portanto, pelo método de sub e supersolução, existe uma solução positiva de (2.17) entre 0 e w_μ . Como w_λ é a única solução de (2.17) e satisfaz $w_\lambda > 0$, então esta é a solução que está entre 0 e w_μ , ou seja,

$$w_\lambda < w_\mu,$$

como queríamos demonstrar.

Agora vamos mostrar que a aplicação $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1}) \mapsto w_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e para isso vamos usar o Teorema da Função Implícita (Teorema 1.35). Assim, considere a função $\mathcal{H} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ dada por

$$\mathcal{H}(\lambda, w) = w - (-\Delta)^{-1}[\lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p].$$

Note que $\mathcal{H}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e para cada (λ, u) par de soluções de (2.17) temos $\mathcal{H}(\lambda, w) = 0$. Além disso,

$$\mathcal{H}_w(\lambda, w)\xi = \xi - (-\Delta)^{-1}[\lambda q_w(x, w)\xi - b(x)pq(x, w)^{p-1}q_w(x, w)\xi]. \quad (2.32)$$

Vamos mostrar que $\mathcal{H}_w(\lambda, w)$ é não singular (equivalentemente, bijetivo), para todo (λ, w) par de soluções de (2.17). Desde que $\mathcal{H}_w$ é uma perturbação compacta da identidade, é suficiente verificar que

$$N[\mathcal{H}_w(\lambda, w)] = \{0\}$$

para cada $(\lambda, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ solução de (2.17). Com efeito, se $N[\mathcal{H}_w(\lambda, w)] \neq \{0\}$ para alguma solução (λ, w) de (2.17), então existe $\xi \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ tal que

$$\mathcal{H}_w(\lambda, w)\xi = 0.$$

Ou, de maneira equivalente,

$$\begin{cases} -\Delta \xi = \lambda q_w(x, w)\xi - b(x)pq(x, w)^{p-1}q_w(x, w)\xi & \text{em } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.33)$$

Desde que ξ é não nula, λ é um autovalor de (2.33). Da dominância do autovalor principal (veja Teorema 1.3 (ii)),

$$\lambda \geq \sigma_1^\Omega[-\Delta + b(x)pq(x, w)^{p-1}q_w(x, w); q_w(x, w)]. \quad (2.34)$$

Por outro lado, vamos usar

$$q_w(\lambda, w) = \frac{1}{I_w(x, q(\lambda, w))} = \frac{1}{1 + ra(x)q(\lambda, w)^{r-1}},$$

para mostrar que

$$\frac{q(x, w)}{pw} < q_w(x, w) < \frac{q(x, w)}{w}. \quad (2.35)$$

De fato, a primeira desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{q(x, w)}{pw} &< q_w(x, w) = \frac{1}{1 + ra(x)q(\lambda, w)^{r-1}} \\ q(x, w) + ra(x)q(x, w)^r &< pw = pq(x, w) + pa(x)q(x, w)^r \end{aligned}$$

que ocorre, uma vez que $p \geq r$ e $p > 1$. Já a segunda desigualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + ra(x)q(\lambda, w)^{r-1}} = q_w(x, w) &< \frac{q(x, w)}{w} \\ w &< q(x, w) + ra(x)q(x, w)^r \\ &= q(x, w) + a(x)q(x, w)^r + (r-1)q(x, w)^r \\ &= w + (r-1)q(x, w)^r \end{aligned}$$

que também ocorre uma vez que $r > 1$. Desde que (λ, w) é uma solução positiva de (2.17),

$$\lambda = \sigma_1^\Omega \left[-\Delta + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w}; \frac{q(x, w)}{w} \right].$$

Usando (2.35) e as propriedades de monotonia do autovalor principal (veja Teorema 1.8), deduzimos que

$$\lambda < \sigma_1^\Omega[-\Delta + b(x)pq(x, w)^{p-1}q_w(x, w); q_w(x, w)].$$

o que é uma contradição com (2.34). Mostrando que $\mathcal{H}_w(\lambda, w)$ é não singular para todo (λ, w) par de solução de (2.17) e pelo Teorema 1.35, $\lambda \mapsto w_\lambda$ é de classe $\mathcal{C}^1$. $\square$

2.3 Resultado auxiliar: Soluções Largas

Nesta seção provaremos um resultado auxiliar para demonstrar (2.13). Precisamente, para mostrar que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} u_\lambda(x) < \infty \quad \forall x \in \Omega \setminus (\cup_{i=1}^{m_1} \overline{B_i}).$$

A ideia é provar a existência de uma função U definida em $\Omega \setminus (\cup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i)$ tal que $u_\lambda \leq U$, para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$. Assim, nos dedicaremos agora a construir tal função e, como veremos em seguida, U será a solução larga de um problema auxiliar.

Neste sentido, recordemos que a solução de um problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = \infty & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

é usualmente conhecida como uma *solução larga* de

$$-\Delta u = f(x, u) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.36)$$

que significa uma solução clássica $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ de (2.36) tal que

$$\lim_{\text{dist}(x, \partial\Omega) \downarrow 0} u(x) = \infty.$$

Especificamente, denotando

$$\Omega_1 := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i,$$

vamos estabelecer a existência de solução positiva para o seguinte problema com singularidade na fronteira

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p & \text{em } \Omega_1, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ w = \infty & \text{sobre } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.37)$$

Existem vários resultados sobre soluções largas, veja por exemplo [26], [62], [44] e suas referências. Para nosso estudo, seguiremos a Seção 3 de [35]. Assim, o roteiro da demonstração é o seguinte: primeiramente vamos estudar o problema homogêneo associado a (2.37). Em seguida devemos estabelecer cotas apropriadas para as soluções do problema homogêneo associado a (2.37). Por último, a partir desses dois resultados, provaremos a existência de solução positiva para (2.37).

Começemos estudando o problema homogêneo associado a (2.37), isto é, considere

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p & \text{em } \Omega_1, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ w = M & \text{sobre } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.38)$$

para cada $M > 0$. Vale ressaltar que há dois casos a se considerar: quando $m_1 = m$ e quando $m_1 < m$. Geometricamente é interessante notar que no primeiro caso Ω_1 não

contém zonas com $b(x) = 0$ em seu interior, pois $\Omega_1 = \Omega \setminus \cup_{i=1}^m B_i$. Já no caso $m_1 < m$, $b = 0$ em $B_i \subset \Omega_1$, $i = \{m_1 + 1, \dots, m\}$.

Tendo isto em mente e denotando

$$\lambda_{0,m+1} = \infty,$$

temos o seguinte resultado que caracteriza a existência de solução positiva de (2.38).

Lema 2.11 *Se $p > r$, então (2.38) possui uma solução positiva se, e somente se, $\lambda < \lambda_{0,m_1+1}$. Além disso, se existe a solução é única e será denotada por $w_{[\lambda,M]}$. Mais ainda, as aplicações $\lambda \mapsto w_{[\lambda,M]}$ e $M \mapsto w_{[\lambda,M]}$ são crescentes.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que $\lambda < \lambda_{0,m_1+1}$ é uma condição necessária para a existência de solução positiva de (2.38). Com efeito, no caso em que $m_1 = m$, temos que $\lambda_{0,m+1} = \infty$ e portanto deveremos mostrar existência de solução para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. No caso em que $m_1 < m$ duas situações podem ocorrer:

- (i) $\Omega_{a0} \cap B_{m_1+1} = \emptyset$ e, portanto, $\lambda_{0,m_1+1} = \infty$.
- (ii) $\Omega_{a0} \cap B_{m_1+1} \neq \emptyset$, o que implica em $\lambda_{0,m_1+1} < \infty$.

Se (i) é verdadeiro, novamente devemos mostrar existência de solução positiva para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. No caso (ii) devemos verificar que $\lambda < \lambda_{0,m_1+1}$ é uma condição necessária pra existência de solução positiva de (2.38). Assim, se $w > 0$ é uma solução de (2.38), então essa solução satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w - \lambda \frac{q(x,w)}{w} w + b(x) \frac{q(x,w)^p}{w} w = 0 & \text{em } \Omega_1, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ w = M > 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega. \end{cases}$$

Ou seja, $w > 0$ é uma supersolução estrita para o operador

$$\mathcal{L} := -\Delta - \lambda \frac{q(x,w)}{w} + b(x) \frac{q(x,w)^p}{w} \quad \text{em } \bar{\Omega}_1$$

com a condição de fronteira homogênea de Dirichlet. Pelo Teorema 1.5,

$$\lambda_1^{\Omega_1} \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x,w)}{w} + b(x) \frac{q(x,w)^p}{w} \right] > 0.$$

Usando as propriedades de monotonia deste autovalor, temos

$$\begin{aligned} B_{m_1+1} \subsetneq \Omega_1 \Rightarrow 0 &< \lambda_1^{\Omega_1} \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w)}{w} + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w} \right] \\ &< \lambda_1^{B_{m_1+1}} \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w)}{w} + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w} \right] \\ &= \lambda_1^{B_{m_1+1}} \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w)}{w} \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_{m_1+1}} < \frac{q(x, s)}{s} \Rightarrow 0 < \lambda_1^{B_{m_1+1}} \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w)}{w} \right] &< \lambda_1^{B_{m_1+1}} [-\Delta - \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_{m_1+1}}] \\ &= \mu(\lambda), \end{aligned}$$

onde μ é a função estudada na Proposição 1.10 com $\mathcal{O} = B_{m_1+1}$ e $D = \Omega_{a0} \cap B_{m_1+1}$. Pelas propriedades de μ ,

$$0 < \mu(\lambda) \Rightarrow \lambda < \lambda_{0, m_1+1}.$$

Agora, assumindo $\lambda < \lambda_{0, m_1+1}$, vamos mostrar existência de solução positiva para (2.38) usando o método de sub e supersolução. Observe que $\underline{w} \equiv 0$ é uma subsolução (mas não uma solução) de (2.38). Para construir uma supersolução de (2.38), argumentamos como segue.

Primeiramente consideremos o caso $m_1 < m$ e fixemos $\lambda < \lambda_{0, m_1+1}$. Note que $\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega$ consiste das (finitas) componentes de ∂B_i , $i \in \{1, \dots, m_1\}$. Assim, para $\delta > 0$ pequeno, considere o domínio regular

$$\mathcal{U}_i^\delta := \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial B_i) < \delta\},$$

e $\varphi_i^\delta > 0$ a principal autofunção de $-\Delta$ em $\mathcal{U}_i^\delta$ sub a condição de fronteira homogênea de Dirichlet com $\|\varphi_i^\delta\|_0 = 1$. Ou seja, φ_i^δ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_i^\delta = \lambda_1^\delta \varphi_i^\delta & \text{em } \mathcal{U}_i^\delta, \\ \varphi_i^\delta = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{U}_i^\delta, \end{cases}$$

onde

$$\lambda_i^\delta = \lambda_1^{\mathcal{U}_i^\delta} [-\Delta].$$

Uma vez que

$$|\mathcal{U}_i^\delta| \rightarrow 0 \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0,$$

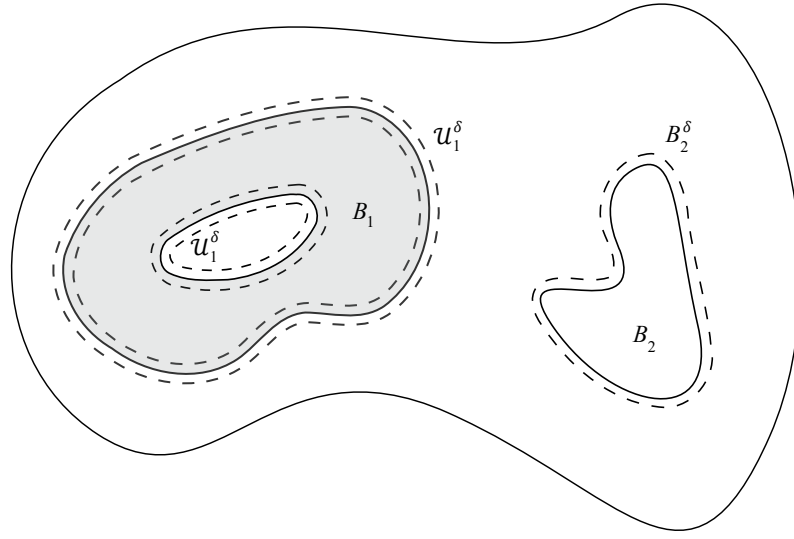


Figura 2.5: Uma típica configuração para os conjuntos U_i^δ e B_i^δ onde $\Omega_1 = \Omega \setminus \overline{B_1}$. A linha tracejada ao redor de ∂B_1 delimita as duas componentes do conjunto U_1^δ e a linha tracejada ao redor de B_2 delimita o conjunto B_2^δ .

onde $|\cdot|$ denota a medida de Lebesgue, pela monotonia do principal autovalor com respeito ao domínio, podemos escolher δ suficientemente pequeno tal que

$$\lambda_i^\delta > \lambda, \quad (2.39)$$

para todas as (finitas) componentes de ∂B_i , $i = 1, \dots, m$.

Por outro lado, considere $\delta > 0$ pequeno tal que

$$B_i^\delta := \{x \in \Omega_1; \text{dist}(x, B_i) < \delta\} \subset\subset \Omega_1, \quad (2.40)$$

para cada $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$, isto é, para os B_i 's que estão contidos Ω_1 . Denotaremos por $\lambda_{0,i}^\delta$ o principal autovalor de

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_i^\delta} w & \text{em } B_i^\delta, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_i^\delta, \end{cases} \quad (2.41)$$

Observe que não excluimos a possibilidade de $\Omega_{a0} \cap B_i^\delta = \emptyset$, e neste caso seguimos a convenção $\lambda_{0,i}^\delta = \infty$. Note ainda que, se é finito, $\lambda_{0,i}^\delta$ é o (único) zero da aplicação $\lambda \mapsto \rho(\lambda, \delta)$ onde

$$\rho(\lambda, \delta) := \lambda_1^{B_i^\delta}[-\Delta - \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_i^\delta}].$$

Por um outro lado, seguindo a prova do Teorema 9.1 de [59], podemos deduzir que a aplicação $\lambda \mapsto \rho(\lambda, \delta)$ é analítica e seus zeros são simples. Por outro lado, da Seção 8.5

de [59], segue que a aplicação $\delta \mapsto \rho(\lambda, \delta)$ varia continuamente. Assim, concluímos que

$$\lambda_{0,i}^\delta \uparrow \lambda_{0,i} \quad \text{quando } \delta \uparrow 0.$$

Uma vez que $\lambda_{0,i} \geq \lambda_{0,m_1+1} > \lambda$, $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$, para δ suficientemente pequeno, temos

$$\lambda_{0,i}^\delta > \lambda. \quad (2.42)$$

Consequentemente, a Proposição 2.9 e o Lema 2.7 garantem que o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \bar{\lambda}_i q(x, w) & \text{em } B_i^\delta, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial B_i^\delta, \end{cases} \quad (2.43)$$

possui uma única solução positiva para $\bar{\lambda}_i \in (\lambda, \lambda_{0,i}^\delta)$. Denotaremos esta única solução por w_i^δ . Portanto, fixado $\delta > 0$ satisfazendo (2.39) e (2.42), considere uma função positiva

$$\phi : \Omega_1 \setminus \left(\left[\bigcup_{i=1}^{m_1} (\mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \bar{\Omega}_1) \right] \cup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^m \bar{B}_i^{\delta/2} \right] \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\Phi(x) = \begin{cases} w_i^\delta(x) & \text{se } x \in \bar{B}_i^{\delta/2}, \quad i = \{m_1 + 1, \dots, m\}, \\ \varphi_i^\delta & \text{se } x \in \mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \bar{\Omega}_1, \quad i = \{1, \dots, m_1\}, \\ \phi(x) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

seja uma função em $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}_1)$. Afirmamos que $K\Phi$ é uma supersolução de (2.38) para uma contante positiva K suficientemente grande. De fato, é fácil ver que $K\Phi = K\phi > 0$ em $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$ e $K\Phi = K\varphi_i^{\delta/2} > M$ em cada componente de $\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega$ se K é suficientemente grande. Então, $K\Phi$ é uma supersolução de (2.38) desde que

$$-\Delta(K\Phi) \geq \lambda q(x, K\Phi) - b(x)q(x, K\Phi)^p \quad \text{em } \Omega_1. \quad (2.44)$$

Em $\Omega_1 \setminus \left(\left[\bigcup_{i=1}^{m_1} (\mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \bar{\Omega}_1) \right] \cup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^m \bar{B}_i^{\delta/2} \right] \right)$, (2.44) é equivalente a

$$-\Delta\phi \geq \lambda \frac{q(x, K\phi)}{K\phi} \phi - b(x) \frac{q(x, K\phi)^p}{K\phi} \phi.$$

Desde que $b(x) > b_0 > 0$ em $\Omega_1 \setminus \left(\left[\bigcup_{i=1}^{m_1} (\mathcal{U}_i^\delta \cap \bar{\Omega}_1) \right] \cup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^m \bar{B}_i^\delta \right] \right)$ e tendo em vista (2.20) – (2.23), obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\lambda \frac{q(x, s)}{s} - b(x) \frac{q(x, s)^p}{s} \right] = -\infty,$$

uniformemente em $\Omega_1 \setminus \left(\left[\bigcup_{i=1}^{m_1} (\mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \overline{\Omega}_1) \right] \cup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^m \overline{B}_i^{\delta/2} \right] \right)$. Assim, para K suficientemente grande tal que

$$\min_{\overline{\Omega}_1} -\Delta\phi \geq \lambda \frac{q(x, K\phi)}{K\phi} \phi - b(x) \frac{q(x, K\phi)^p}{K\phi} \phi,$$

(2.44) é satisfeita em $\Omega_1 \setminus \left(\left[\bigcup_{i=1}^{m_1} (\mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \overline{\Omega}_1) \right] \cup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^m \overline{B}_i^{\delta/2} \right] \right)$.

Agora, em cada $\mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \Omega_1$, $i \in \{1, \dots, m_1\}$, (2.44) é equivalente a

$$\lambda_i^\delta \geq \lambda \frac{q(x, K\varphi_i^\delta)}{K\varphi_i^\delta} - b(x) \frac{q(x, K\varphi_i^\delta)^p}{K\varphi_i^\delta}.$$

Se $\lambda \leq 0$ esta desigualdade é trivialmente verdadeira. Se $\lambda > 0$, usando as propriedades da função $q(x, \cdot)$, temos que

$$\lambda_i^\delta > \lambda \geq \lambda \frac{q(x, K\varphi_i^\delta)}{K\varphi_i^\delta} - b(x) \frac{q(x, K\varphi_i^\delta)^p}{K\varphi_i^\delta}$$

e portanto (2.44) ocorre para todo $K > 0$.

Finalmente, em $\overline{B}_i^{\delta/2}$, $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$, (2.44) é equivalente a

$$\overline{\lambda}_i K q(x, w_i^\delta) \geq \lambda q(x, K w_i^\delta) - b(x) q(x, K w_i^\delta)^p.$$

Novamente, se $\lambda \leq 0$ a desigualdade é imediata. Para $\lambda > 0$, esta desigualdade ocorre se

$$(\overline{\lambda}_i K q(x, w_i^\delta) >) \lambda K q(x, w_i^\delta) \geq \lambda q(x, K w_i^\delta) - b(x) q(x, K w_i^\delta)^p$$

$$\lambda \left(\frac{q(x, w_i^\delta)}{w_i^\delta} - \frac{q(x, K w_i^\delta)}{K w_i^\delta} \right) w_i^\delta \geq -b(x) \frac{q(x, K w_i^\delta)^p}{K}. \quad (2.45)$$

Uma vez que a aplicação $s \mapsto q(x, s)/s$ é não crescente, temos que

$$K > 1 \Rightarrow \frac{q(x, K w_i^\delta)}{K w_i^\delta} \leq \frac{q(x, w_i^\delta)}{w_i^\delta} \Rightarrow \lambda \left(\frac{q(x, w_i^\delta)}{w_i^\delta} - \frac{q(x, K w_i^\delta)}{K w_i^\delta} \right) w_i^\delta \geq 0.$$

Mostrando que (2.45) é satisfeita para $K > 1$ e portanto $K\Phi$ é uma supersolução de (2.38). Isto prova a existência de solução positiva para este problema.

Devemos considerar também o caso $m_1 = m$. Para isso, fixo $\lambda \in \mathbb{R}$, basta tomar as mesmas funções φ_i^δ , $i \in \{1, \dots, m\}$, com $\delta > 0$ suficientemente pequeno satisfazendo

$$\lambda_i^\delta > \lambda.$$

Assim, escolhendo

$$\phi : \Omega \setminus \left[\bigcup_{i=1}^m (\mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \overline{\Omega}_1) \right] \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi_i^\delta & \text{se } x \in \mathcal{U}_i^{\delta/2} \cap \overline{\Omega}_1, \ i = \{1, \dots, m\}, \\ \phi(x) & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

seja uma função em $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}_1)$, de maneira análoga ao caso $m_1 < m$, temos que $K\Phi$ é uma supersolução de (2.38) para $K > 0$ suficientemente grande.

A unicidade segue por um argumento similar ao apresentado na Proposição 2.7. Para a monotonia da aplicação $M \mapsto w_{[\lambda, M]}$, considere $\overline{M} > M$. Então $w_{[\lambda, \overline{M}]}$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w_{[\lambda, \overline{M}]} = \lambda q(x, w_{[\lambda, \overline{M}]}) - b(x)q(x, w_{[\lambda, \overline{M}]})^p & \text{em } \Omega_1, \\ w_{[\lambda, \overline{M}]} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ w_{[\lambda, \overline{M}]} = \overline{M} > M & \text{sobre } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega, \end{cases}$$

e, portanto, $w_{[\lambda, \overline{M}]}$ é uma supersolução de (2.38) (com M). Pelo método de sub e supersolução, existe uma solução de (2.38) entre 0 e $w_{[\lambda, \overline{M}]}$. Por unicidade da solução, necessariamente

$$0 < w_{[\lambda, \overline{M}]} < w_{[\lambda, M]}.$$

A monotonia da aplicação $\lambda \mapsto w_{[\lambda, M]}$ é análoga. $\square$

Observe que na demonstração anterior o Ω_1 não desempenha um papel crucial, apenas é importante que $B_i \subset\subset \Omega_1$, $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$. Então, como consequência da demonstração anterior, obtemos

Corolário 2.12 *Considere $\delta > 0$ pequeno tal que, denotando por*

$$D_\delta := \{x \in \Omega_1; \text{dist}(x, \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega) \leq \delta\} \quad \text{e} \quad \Omega_1^\delta = \Omega_1 \setminus D_\delta,$$

temos

$$\bigcup_{i=m_1+1}^m \overline{B}_i \subset \Omega_1^\delta.$$

Então, para $p > r$ e $M > 0$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p & \text{em } \Omega_1^\delta, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1^\delta \cap \partial\Omega, \\ w = M & \text{sobre } \partial\Omega_1^\delta \setminus \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma solução positiva se, e somente se, $\lambda < \lambda_{0, m_1+1}$. Além disso, esta solução é única se existe.

Demonstração: Apenas note que os mesmos argumentos do resultado anterior podem ser aplicados, apenas trocando Ω_1 por Ω_1^δ . $\square$

Vamos enunciar um resultado auxiliar.

Teorema 2.13 *Considere o problema de fronteira singular*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - b(x)f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = \infty & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.46)$$

Assumindo que $f \in C^1[0, \infty)$ satisfaz

(A₁) $f \geq 0$ e $f(u)/u$ crescente em $(0, \infty)$

(A₂) $\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} < \infty$, onde $F(t) := \int_0^t f(s)ds$.

Então (2.46) admite solução positiva se, e somente se, $\lambda < \lambda_1^{\Omega_{b_0}}$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [26].

Usaremos este resultado para provar o próximo lema que nos ajudará a obter cotas adequadas para as solução de (2.38). Ressaltamos que a obtenção de tais cotas é um passo crucial na obtenção de soluções largas.

Lema 2.14 *Considere*

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w - b(x)q_d(w)^p & \text{em } \Omega, \\ w = \infty & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.47)$$

onde $d \geq 0, \lambda > 0$ e q_d é a função inversa de $s \mapsto s + ds^r$. Assumindo que $b(x) \geq b_0 > 0$ em Ω e $p > r$. Então (2.47) possui uma solução não negativa.

Demonstração: Para provar este lema, aplicaremos o Teorema 2.13. Portanto, devemos verificar as seguintes hipóteses:

(A₁) $q_d^p \in C^1([0, +\infty))$ com $q_d^p \geq 0$ e $\frac{q_d(s)^p}{s}$ crescente em $(0, +\infty)$,

e a condição de Keller-Osserman

(A₂) $\int_1^\infty \frac{dt}{\sqrt{F(t)}} < \infty$, onde $F(t) = \int_0^t q_d(s)^p ds$.

Primeiramente, note que se $d = 0$ temos $q_d(s) = s$, e é fácil verificar que (A₁)–(A₂) são satisfeitas.

Para $d > 0$, desde que $s = q_d(s) + dq_s(s)^r$, podemos escrever

$$\frac{q_d(s)^p}{s} = \frac{1}{q_d(s)^{1-p} + dq_d(s)^{r-p}} = \frac{q_d(s)^p}{(q_d(s)^p + dq_d(s)^r)}$$

Uma vez que $p > r$, $s \mapsto \frac{q_d(s)^p}{s}$ é crescente em $(0, +\infty)$, (A_1) se cumpre.

Para verificar (A_2) , primeiro vamos mostrar que, como $p > r$, existem constantes $C > 0$ e $k \in (1, p/r)$ tais que

$$Cs^k \leq q_d(s)^p \quad \forall s \geq 1.$$

De fato, defina

$$h(s) := \frac{s^k}{q_d(s)^p} = \left[q_d(s)^{1-\frac{p}{k}} + dq_d(s)^{r-\frac{p}{k}} \right]^k \quad s \geq 1.$$

Como $k \in (1, p/r)$, h é decrescente e portanto

$$\frac{s^k}{q_d(s)^p} \leq \frac{1}{q_d(1)^p} = \frac{1}{C} \quad s \geq 1.$$

Assim, definindo

$$g(s) = \begin{cases} Cs^k & 1 \leq s, \\ 0 & 0 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

temos que $g \leq q_d^p$ em $(0, \infty)$. Então

$$\int_1^\infty \left(\int_0^s q_d(t)^p dt \right)^{-\frac{1}{2}} dt ds \leq \int_1^\infty \left(\int_0^s g(t) dt \right)^{-\frac{1}{2}} dt ds = C_0 \int_1^\infty \frac{1}{s^{(k+1)/2}} ds < \infty.$$

Isto completa a demonstração □

As cotas cruciais para obtenção das soluções largas de (2.37) são dadas a seguir.

Lema 2.15 *Para cada subconjunto compacto $K \subset \{x \in \Omega_1; b(x) > 0\}$, existe uma constante $C := C(K) > 0$ tal que*

$$\|w_{[\lambda, M]}\|_0 \leq C \quad \forall \lambda < \lambda_{0, m_1+1}, \quad M > 0.$$

Demonstração: Seja $K \subset \{x \in \Omega_1; b(x) > 0\}$ compacto e $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$K_\delta := \{x \in \Omega_1; \text{dist}(x, K) < \delta\} \subset \{x \in \Omega_1; b(x) > 0\}.$$

Fixemos δ_0 tal que a inclusão acima ocorra.

Assim temos que $b(x) \geq \min_{K_{\delta_0}} b(x) > 0$ e pelo Lema 2.14, existe uma solução larga (denotada por W_d) de

$$-\Delta w = \lambda w - b(x)q_d(w)^p \quad \text{em } K_{\delta_0}.$$

onde $d = \max_{K_{\delta_0}} a(x) \geq 0$. Mostremos que para todo $M > 0$, existe $c = c(M) \in (0, 1)$ tal que W_d é uma supersolução de

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p & \text{em } K_{c\delta}, \\ w = w_{[\lambda, M]} & \text{sobre } \partial K_{c\delta}. \end{cases} \quad (2.48)$$

De fato, por um lado

$$\lambda s \geq \lambda q(x, s) \quad \text{e} \quad q(x, s) \geq q_d(s) \quad \forall s \geq 0,$$

implicando

$$-\Delta W_d = \lambda W_d - b(x)q_d(W_d)^p \geq \lambda q(x, W_d) - b(x)q(x, W_d)^p \quad \text{em } K_{c\delta}.$$

Por outro lado, uma vez que

$$\text{dist}(x, \partial K_\delta) \rightarrow 0 \Rightarrow W_d(x) \rightarrow \infty,$$

podemos escolher c suficientemente próximo de 1 tal que

$$W_d(x) \geq \max_{\partial K_{c\delta}} w_{[\lambda, M]} \quad \text{sobre } \partial K_{c\delta}.$$

Com esta escolha de c , W_d é uma supersolução de (2.48). Como esse problema possui uma única solução positiva, a saber $w_{[\lambda, M]}|_{K_{c\delta}}$, segue que do Lema 2.5 que

$$w_{[\lambda, M]}|_{K_{c\delta}} < W_d \quad \text{em } K_{c\delta},$$

para cada $M > 0$. Em particular, como $K \subset K_{c\delta}$, temos

$$w_{[\lambda, M]} \leq W_d \quad \text{em } K, \quad \forall M > 0.$$

Consequentemente,

$$\|w_{[\lambda, M]}\|_{C(K)} \leq \max_K W_d < \infty.$$

□

Finalmente estamos em condições de estabelecer um resultado de existência de solução positiva de (2.37).

Proposição 2.16 *Se $\lambda < \lambda_{0,m_1+1}$, então (2.37) possui uma solução positiva. Além disso, neste caso o limite pontual*

$$W_{[\lambda,\infty]} := \lim_{M \uparrow \infty} w_{[\lambda,M]},$$

é uma solução larga positiva e minimal (2.37), isto é, qualquer solução positiva Θ de (2.37) satisfaz

$$W_{[\lambda,\infty]} \leq \Theta.$$

Demonstração: Fixo $\lambda < \lambda_{0,m_1+1}$. Pelo Lema 2.11, a aplicação $M \mapsto w_{[\lambda,M]}$ é não decrescente. Consequentemente, o limite pontual está bem definido. Para mostrar que é solução de (2.37), procedemos como segue. Primeiro vamos mostrar que o limite é finito. Em $\{x \in \Omega_1; b(x) > 0\}$, este limite é finito pelo Lema 2.15. Se $m_1 = m$ Então $\Omega_1 = \{x \in \Omega_1; b(x) > 0\}$ e o resultado segue.

Por outro lado, se $m_1 < m$, para cada $\overline{B}_i \subset \Omega_1$, $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$, podemos escolher $\delta > 0$ pequeno tal que

$$D_\delta := \{x \in \Omega_1; \text{dist}(x, \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega) \leq \delta\} \subset \Omega_1 \setminus \bigcup_{i=m_1+1}^m \overline{B}_i \quad \text{e} \quad \Omega_1^\delta = \Omega_1 \setminus D_\delta, \quad (2.49)$$

e para cada um destes δ 's, existe um conjunto aberto $\mathcal{O}_\delta$ satisfazendo

$$\partial\Omega_1^\delta \subset \mathcal{O}_\delta \subset \subset \Omega_1 \setminus \bigcup_{i=m_1+1}^m \overline{B}_i.$$

Fixemos um destes δ 's. Então, graças ao Lema 2.15, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|w_{[\lambda,M]}\|_{C(\partial\Omega_1^\delta)} \leq \|w_{[\lambda,M]}\|_{C(\overline{\mathcal{O}}_\delta)} \leq C \quad \forall M > 0. \quad (2.50)$$

Consequentemente, $w_{[\lambda,M]}|_{\Omega_1^\delta}$ é uma subsolução de

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p & \text{em } \Omega_1^\delta, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_1^\delta \cap \partial\Omega, \\ w = C & \text{sobre } \partial\Omega_1^\delta \setminus \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.51)$$

Como consequência,

$$w_{[\lambda,M]} \leq w_{[\lambda,C,\delta]} \quad \text{em } \Omega_1^\delta, \quad \forall M > 0, \quad (2.52)$$

onde $w_{[\lambda,C,\delta]}$ representa a única solução de (2.51), cuja a existência é garantida pelo Corolário 2.12. Isto mostra que o limite pontual $W_{[\lambda,\infty]}$ é finito em Ω_1 .

Agora, tomando dois conjuntos abertos $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\mathcal{O} \subset\subset \mathcal{O}_1 \subset\subset \Omega_1^\delta \subset\subset \Omega_1.$$

Pelas estimativas L^p e as imersões de Morrey, existe uma contante $C > 0$ tal que, para cada $M > 0$,

$$\|w_{[\lambda, M]}\|_{C^1(\overline{\mathcal{O}_1})} \leq C.$$

Portanto, da imersão compacta $\mathcal{C}^1(\overline{\mathcal{O}_1})$ em $\mathcal{C}^{0, \alpha}(\overline{\mathcal{O}_1})$ e a unicidade do limite pontual, $W_{[\lambda, \infty]}$ é Hölder contínua. Consequentemente, por regularidade elíptica, temos que $W_{[\lambda, \infty]}$ é solução de (2.37).

Resta provar que $W_{[\lambda, \infty]}$ é solução positiva minimal de (2.37). De fato, seja Θ uma solução positiva de (2.37) e $C > 0$ uma constante positiva que satisfaz (2.50). Desde que $\Theta = \infty$ sobre $\partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega$, temos que, para $\delta > 0$ pequeno,

$$C \leq \Theta \quad \text{sobre } \partial\Omega_1^\delta \setminus \partial\Omega.$$

Portanto, $\Theta|_{\Omega_1^\delta}$ é uma supersolução de (2.51) e consequentemente

$$w_{[\lambda, C, \delta]} \leq \Theta \quad \text{em } \Omega_1^\delta. \quad (2.53)$$

Combinando (2.52) e (2.53), obtemos

$$w_{[\lambda, M]} \leq \Theta \quad \text{em } \Omega_1.$$

Assim, fazendo $M \uparrow \infty$, produz

$$W_{[\lambda, \infty]} \leq \Theta,$$

que estabelece a minimalidade de $W_{[\lambda, \infty]}$. □

2.4 Comportamento pontual das soluções positivas

Nesta seção finalizaremos a demonstração do Teorema 2.2, provando os limites (2.11) e (2.13).

Demonstração do Teorema 2.2: Observe que para o Teorema 2.2 a) e b), a existência de solução de (2.17) é garantida pela Proposição 2.9 e a unicidade é dada pelo Lema 2.7. Além disso, a diferenciabilidade e monotonia da aplicação

$$\lambda \mapsto w_\lambda \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

é estudada na Proposição 2.10 e como λ_1 é um ponto de bifurcação da solução trivial (conforme a Proposição 2.8), segue (2.10), ou seja,

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda_1} \|w_\lambda\|_0 = 0.$$

Então nos resta mostrar os limites (2.11) e (2.13). Começaremos mostrando (2.11), isto é,

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} u_\lambda = \infty \quad \text{uniformemente em } \Omega_{b0}.$$

Para isso, argumentamos como segue. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $\varphi_1^{B_i}$ a autofunção positiva associada ao autovalor $\sigma_1^{B_i}[-\Delta]$ tal que $\|\varphi_1^{B_i}\|_0 = 1$ e considere

$$\Psi_i = \begin{cases} \varphi_1^{B_i} & \text{in } B_i, \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{B_i}. \end{cases}$$

É claro que $\Psi_i \in H_0^1(\Omega)$. Iremos mostrar que, para $\lambda > \lambda_1[-\Delta; B_i]$, $\varepsilon(\lambda)\Psi_i$ é uma sub-solução fraca de (2.17) (veja Teorema 1.33) para uma constante $\varepsilon(\lambda) > 0$ a ser escolhida. Pelo Principio do Máximo sabemos que $\varphi_1^{B_i} \in P_{C_0^1(\overline{B_i})}$, em particular

$$\frac{\partial \varphi_1^{B_i}}{\partial n_i} < 0,$$

onde n_i denota a normal exterior unitária em ∂B_i . Assim, tendo em vista o Lema 1.34, é suficiente verificar que

$$-\Delta(\varepsilon(\lambda)\Psi_i) \leq \lambda q(x, \varepsilon(\lambda)\Psi_i) - b(x)q(x, \varepsilon(\lambda)\Psi_i)^p \quad \forall x \in B_i. \quad (2.54)$$

Como $b \equiv 0$ e $\Psi_i = \varphi_1^{B_i}$ em B_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, (2.54) é equivalente a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda)\sigma_1^{B_i}[-\Delta]\varphi_1^{B_i} = -\Delta(\varepsilon(\lambda)\varphi_1^{B_i}) &\leq \lambda q(x, \varepsilon(\lambda)\varphi_1^{B_i}) \quad \forall x \in B_i \\ 1 + a(x)q(x, \varepsilon(\lambda)\varphi_1^{B_i})^{r-1} = \frac{\varepsilon(\lambda)\varphi_1^{B_i}}{q(x, \varepsilon(\lambda)\varphi_1^{B_i})} &\leq \frac{\lambda}{\sigma_1^{B_i}[-\Delta]} \quad \forall x \in B_i. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Desde que

$$q(x, s) \leq s \quad \text{e} \quad \varphi_1^{B_i}(x) \leq \|\varphi_1^{B_i}\|_0 = 1, \quad \forall x \in \Omega,$$

para que a desigualdade (2.55) se verifique, é suficiente que

$$(1 + a(x)q(x, \varepsilon(\lambda)\varphi_1^{B_i})^{r-1} \leq) \quad 1 + \max_{\overline{B_i}} a(x)\varepsilon(\lambda)^{r-1} \leq \frac{\lambda}{\sigma_1^{B_i}[-\Delta]}.$$

Assim, escolhendo

$$\varepsilon(\lambda) := \left(\frac{\lambda - \sigma_1^{B_i}[-\Delta]}{\sigma_1^{B_i}[-\Delta] \max_{\overline{B_i}} a(x)} \right)^{1/(r-1)}, \quad \lambda > \sigma_1^{B_i}[-\Delta],$$

é fácil ver que (2.55) se cumpre. Além disso,

$$\varepsilon(\lambda) \rightarrow \infty \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.56)$$

Por outro lado, já mostramos que $K(\lambda)e$ é uma supersolução de (2.17), onde e é a única solução positiva de (2.29) e $K(\lambda) > 0$ é uma constante suficientemente grande. Assim, existe $K(\lambda) > 0$ tal que

$$\varepsilon(\lambda)\Psi_i \leq K(\lambda)e \quad \text{em } \Omega.$$

Pelo método de sub e supersolução (veja Teorema 1.33) e a unicidade de solução positiva de (2.17), deduzimos que

$$\varepsilon(\lambda)\varphi_1^{B_i} \leq w_\lambda \quad \text{em } B_i, \quad \lambda > \sigma_1^{B_i}[-\Delta].$$

Usando (2.56), concluímos

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} w_\lambda(x) = \infty \quad \text{uniformemente em } B_i.$$

Portanto, uma vez que $w_\lambda = u_\lambda + a(x)u_\lambda^r$, obtemos (2.11).

Para finalizar resta demonstrar o limite (2.13), isto é,

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} u_\lambda(x) \begin{cases} = \infty & \text{se } x \in \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i, \\ < \infty & \text{se } x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i. \end{cases}$$

Para esse fim, argumentamos como segue. Primeiro vamos mostrar que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} u_\lambda(x) = \infty, \quad \forall x \in \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i.$$

Desde que a aplicação $\lambda \mapsto w_\lambda$ é de classe $\mathcal{C}^1$, podemos diferenciar (2.17) com respeito a λ e obter

$$(-\Delta - \lambda q_w(x, w_\lambda) + b(x)pq(x, w_\lambda)^{p-1}q_w(x, w_\lambda))w'_\lambda = q(x, w_\lambda) > 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.57)$$

onde $w'_\lambda = dw_\lambda/d\lambda$. Uma vez que (λ, w) é uma solução de (2.17), temos

$$0 = \sigma_1^\Omega \left[-\Delta \frac{q(x, w)}{w} + b(x) \frac{q(x, w)^p}{w} \right].$$

Usando a desigualdade (2.35) e as propriedades de monotonia do principal autovalor dadas pelo Teorema 1.8, segue que

$$0 < \sigma_1^\Omega [-\Delta - \lambda q_w(x, w_\lambda) + b(x)pq(x, w_\lambda)^{p-1}q_w(x, w_\lambda)].$$

Então, pelo Teorema 1.5, o operador

$$-\Delta - \lambda q_w(x, w_\lambda) + b(x)pq(x, w_\lambda)^{p-1}q_w(x, w_\lambda)$$

satisfaz o Princípio do Máximo Forte e deduzimos a partir de (2.57) que $w'_\lambda > 0$ em Ω .

Por outro lado, em B_i , $1 \leq i \leq m_1$ temos $b(x) = 0$ e (2.57), fornecendo

$$-\Delta w'_\lambda - \lambda q_w(x, w)w'_\lambda = q(x, w) \quad \text{em } B_i.$$

Desde que $q_w(x, w) > \mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_i}$ em B_i , deduzimos da desigualdade acima que

$$(-\Delta - \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{a0} \cap B_i})w'_\lambda > q(x, w) \quad \text{em } B_i. \quad (2.58)$$

Agora, fixo $\bar{\lambda} \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$ e seja φ_1^i a autofunção positiva associada a $\lambda_{0,i}$ com $\|\varphi_1^i\|_0 = 1$.

Para $c > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$q(x, w_{\bar{\lambda}}) > c\mathcal{X}_{\Omega_{0,i}}\varphi_1^i \quad \text{em } B_i.$$

Como $\lambda \mapsto w_\lambda$ é crescente, temos

$$q(x, w_\lambda) > c\mathcal{X}_{\Omega_{0,i}}\varphi_1^i \quad \text{em } B_i \quad \forall \lambda \in [\bar{\lambda}, \lambda_{0,1}).$$

Denotando por v_λ^i a única solução do problema linear

$$\begin{cases} (-\Delta - \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{0,i}})u = c\mathcal{X}_{\Omega_{0,i}}\varphi_1^i & \text{em } B_i, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_i, \end{cases}$$

que existe, uma vez que $\lambda < \lambda_{0,i}$. Tendo em vista (2.58), o Princípio do Máximo implica

$$w'_\lambda > v_\lambda^i \quad \text{em } B_i.$$

Mas

$$v_\lambda^i = \frac{c\varphi_1^i}{\lambda_{0,i} - \lambda}$$

e, uma vez que $\lambda_{0,i} = \lambda_{0,1}$, para cada $i \in \{1, \dots, m_1\}$ deduzimos

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} w'_\lambda(x) > \lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} v_\lambda^i(x) = \infty,$$

para todo $x \in B_i$. Consequentemente

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} w_\lambda(x) = \infty, \quad \forall x \in B_i, \quad 1 \leq i \leq m_1.$$

Por outro lado, considere $W := W_{[\lambda_{0,1}, \infty]}$ a solução positiva de (2.37), dada pela Proposição 2.16. Tomando Ω_1^δ como em (2.49) com $\delta > 0$ suficientemente pequeno, segue que

$$-\Delta W = \lambda_{0,1}q(x, W) - b(x)q(x, W)^p \geq \lambda q(x, W) - b(x)q(x, W)^p \quad \text{em } \Omega_1^\delta,$$

fara todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{0,1})$. Assim, W é uma supersolução de

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - b(x)q(x, w)^p & \text{em } \Omega_1^\delta, \\ w = w_\lambda|_{\partial\Omega_1^\delta} & \text{sobre } \partial\Omega_1^\delta, \end{cases}$$

cuja a (única) solução é $w_\lambda|_{\Omega_1^\delta}$. Pelo Lema 2.5 b), obtemos

$$w_\lambda \leq W \quad \text{em } \Omega_1^\delta.$$

Desde que δ é arbitrariamente pequeno,

$$w_\lambda \leq W \quad \text{em } \Omega_1.$$

Assim, fazendo $\lambda \uparrow \lambda_{0,1}$ produz

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda_{0,1}} w_\lambda(x) < \infty \quad \forall x \in \Omega_1 = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i.$$

□

Capítulo 3

Um problema logístico com difusão não linear II

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos em [24], dando continuidade ao estudo da equação (3.1), analisando o caso $0 < r < 1$ e $b \geq 0$ constante. Especificamente, consideraremos a equação:

$$\begin{cases} -\Delta(u + a(x)u^r) = \lambda u - bu^p & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado com fronteira regular, r , p , b são constantes tais que $0 < r < 1 < p$, $b \geq 0$ e $a \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+)$ é uma função que pode se anular em regiões de Ω . Assim, seguiremos a mesma notação do Capítulo 2, isto é:

$$\Omega_{a+} := \{x \in \Omega; a(x) > 0\}$$

e

$$\Omega_{a0} := \Omega \setminus \overline{\Omega}_{a+}.$$

Este capítulo está organizado da seguinte: na Seção 3.1 apresentamos um resumo dos resultados conhecidos referente a equação (3.1) e enunciaremos os principais teoremas deste capítulo. Na Seção 3.2 daremos alguns resultados preliminares. A Seção 3.3 tratamos o caso $b = 0$ enquanto a Seção 3.4 é dedicada ao caso $b > 0$. Por fim, abordaremos a multiplicidade de soluções positivas na Seção 3.5

3.1 Introdução

Uma vez que $0 < r < 1$, a equação (3.1) nos fornece o estado estacionário de uma equação com difusão não linear que combina *difusão rápida* (em Ω_{a+}) com difusão linear (em Ω_{a+}). Em particular, quando $a \equiv 0$ em Ω (isto é, $\Omega_{a0} = \Omega$), (3.1) se reduz ao clássico problema de autovalor do operador Laplaciano com condição de fronteira homogênea de Dirichlet em Ω se $b = 0$ e à conhecida equação logística com difusão linear se $b > 0$. O primeiro caso foi abordado na Seção 1.1 do Capítulo 1 e o segundo foi apresentado no Teorema 2.1. Assim, como o problema (3.1) com $a \equiv 0$ é bem conhecido, aqui consideraremos apenas

$$a \neq 0.$$

Para os nossos resultados, o principal autovalor do seguinte problema desempenhará um papel fundamental:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{a0}} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

A existência deste autovalor principal é discutida na Seção 1.1 e adotaremos a mesma notação utilizada na Seção 2.1, isto é,

$$\sigma_1[-\Delta; \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}] := \lambda_{a0}.$$

Definimos também

$$\lambda_{a0} := \infty \quad \text{se } \Omega_{a0} = \emptyset.$$

Além disso, para enfatizar a dependência do parâmetro λ , vamos nos referir a (3.1) por $(3.1)_\lambda$. Com estas considerações, podemos enunciar nosso primeiro resultado que trata do caso $b = 0$:

Teorema 3.1 *Se $b = 0$, então $(3.1)_\lambda$ possui uma solução positiva se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0})$. Além disso, existe uma família de soluções positivas u_λ de $(3.1)_\lambda$ satisfazendo*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \|u_\lambda\|_0 = \infty \quad (3.3)$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{a0}} \|u_\lambda\|_0 = 0 \quad \text{se } \lambda_{a0} < \infty. \quad (3.4)$$

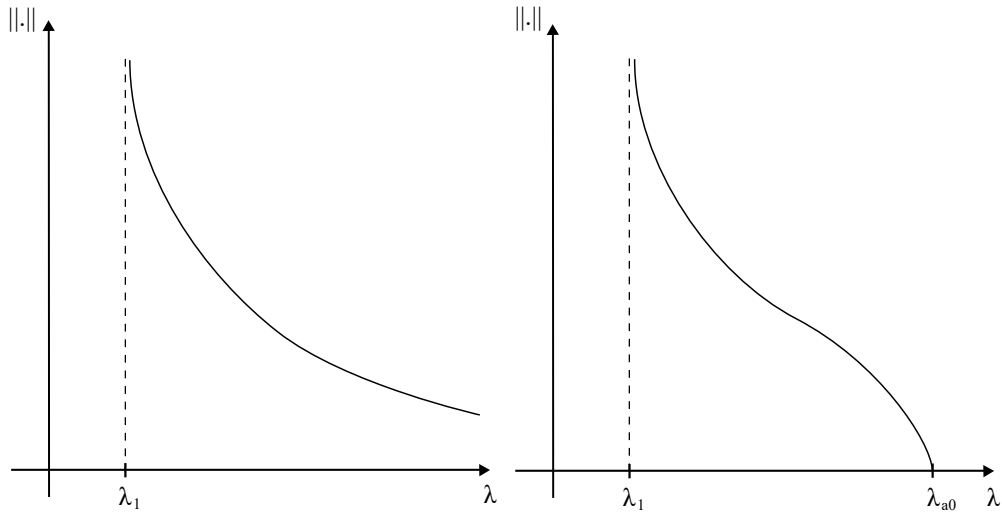


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação para $b = 0$. A esquerda ilustra o caso $\Omega_{a0} = \emptyset$ ($\lambda_{a0} = \infty$) e a direita o caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$ ($\lambda_{a0} < \infty$).

Na Figura 3.1 representamos os correspondentes diagramas de bifurcação de soluções positivas de $(3.1)_\lambda$ com $b = 0$. Para o caso $b > 0$ a bifurcação do infinito desaparece. De fato, temos:

Teorema 3.2 *Se $b > 0$, considere*

$$\Lambda_b = \{\lambda \in \mathbb{R}; (3.1)_\lambda \text{ possui uma solução positiva}\}.$$

Então $\Lambda_b \neq \emptyset$ e denotando por $\lambda^(b) = \inf \Lambda_b$, temos $\lambda_1 < \lambda^*(b) \leq \lambda_{a0}$. Além disso,*

- (a) *Se $\Omega_{a0} = \emptyset$, então $(3.1)_\lambda$ possui uma solução positiva para todo $\lambda \geq \lambda^*$.*
- (b) *Se $\Omega_{a0} \neq \emptyset$, então λ_{a0} é o único ponto de bifurcação de soluções positivas de (3.1) a partir da solução trivial. Além disso, se $\lambda^* < \lambda_{a0}$ (resp. $\lambda^* = \lambda_{a0}$), então $(3.1)_\lambda$ possui solução positiva para todo $\lambda \geq \lambda^*$ (resp. $\lambda > \lambda^*$).*
- (c) *No caso em que $\lambda^* < \lambda_{a0}$, então para cada $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_{a0})$, $(3.1)_\lambda$ possui pelo menos duas soluções positivas ordenadas, isto é, w_λ e v_λ soluções positivas de $(3.1)_\lambda$ satisfazendo*

$$w_\lambda < v_\lambda.$$

A Figura 3.2 mostra alguns possíveis diagramas de bifurcação que ilustram os resultados presentes no Teorema 3.2. Destacamos que no caso $b > 0$ não há ponto de bifurcação do

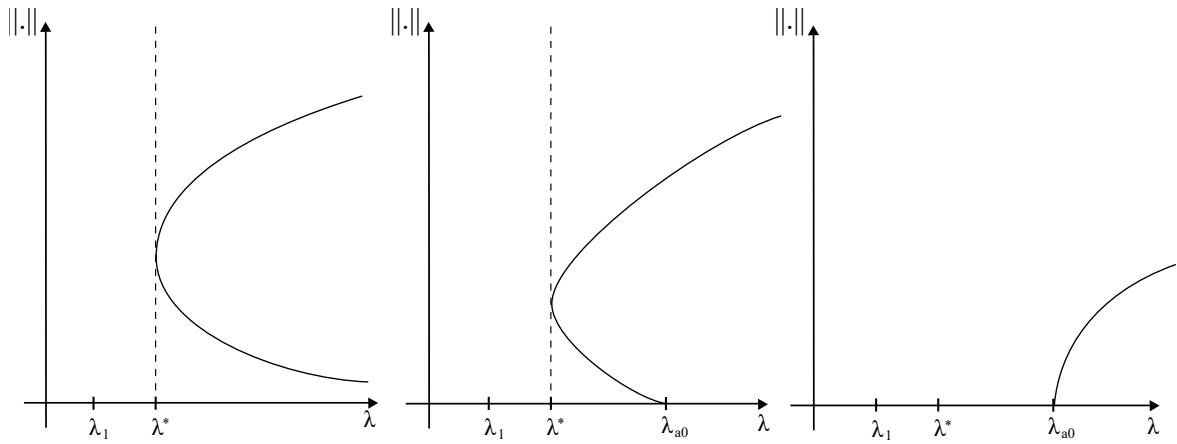


Figura 3.2: Possíveis diagramas de bifurcação. Da esquerda para a direita: caso $\Omega_{a0} = \emptyset$, caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$ com bifurcação subcrítica e caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$ com bifurcação supercrítica.

infinito e se $\Omega_{a0} = \emptyset$ também não há bifurcação da solução trivial. Então, para concluir existência de solução positiva usaremos o método de sub e supersolução.

Além disso, para o caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$, a Proposição 3.9 fornece condições sobre p, r, a e b que nos fornecem a direção de bifurcação. Este resultado nos mostra o efeito da interação entre a difusão rápida $u + a(x)u^r$ e a não linearidade logística $\lambda u - bu^p$. Especificamente, se $1/r < p$, então a bifurcação da solução trivial é subcrítica, enquanto que se $1/r > p$, a bifurcação é supercrítica. No caso $1/r = p$, a e b determinam a direção de bifurcação de acordo com as desigualdades (3.19) e (3.20).

O próximo resultado nos dá informações sobre as soluções positivas de (3.1) com respeito ao parâmetro b :

Teorema 3.3 *Supondo $b > 0$.*

- (a) *Para cada $\lambda \geq \lambda^*(b)$, (3.1) possui uma solução maximal denotada por $W_{\lambda(b)}$. Isto é, toda solução, w , de (3.1) satisfaz*

$$w \leq W_{\lambda(b)}.$$

Além disso, se $\lambda^ \leq \mu < \lambda$, então $W_{\mu(b)} < W_{\lambda(b)}$.*

- (b) *$\lambda^*(b)$ satisfaz*

$$\lambda^*(b) \rightarrow \lambda_1 \quad \text{quando } b \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

- (c) *A solução maximal $W_{\lambda(b)}$ verifica*

$$\lim_{b \rightarrow 0} \|W_{\lambda(b)}\|_0 = \infty \quad \forall \lambda(b) > \lambda^*(b). \quad (3.6)$$

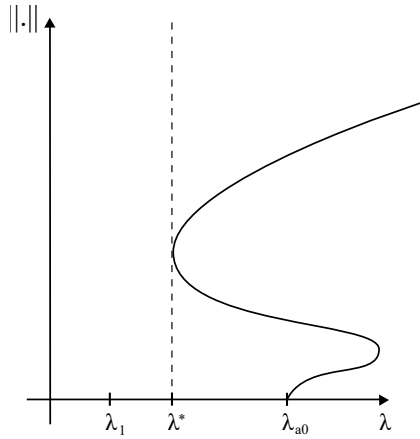


Figura 3.3: Um diagrama de bifurcação admissível quando $b > 0$ é pequeno, $\Omega_{a0} \neq \emptyset$ e a bifurcação é supercrítica.

Como consequência destes resultados, um interessante diagrama de bifurcação é admissível no caso em que b é pequeno e a bifurcação é supercrítica. O paragrafo (b) do Teorema 3.3 nos diz que, para $b > 0$ suficientemente pequeno, $\lambda^*(b) < \lambda_{a0}$. Então, se a bifurcação da solução trivial é supercrítica, o continuum de soluções positivas que emana de λ_{a0} satisfaz $\lambda > \lambda_{a0}$ para λ suficientemente próximo de λ_{a0} . Por outro lado, existe solução positiva para $\lambda \in (\lambda^*(b), \lambda_{a0})$. Então, isso nos leva a um diagrama de bifurcação como ilustrado na Figura 3.3.

3.2 Resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados básicos que serão úteis ao longo deste capítulo. Primeiramente, para tratar a equação $(3.1)_\lambda$, usaremos novamente a mudança de variável (2.16), isto é,

$$I(x, u) = w = u + a(x)u^r \Leftrightarrow u = q(x, w)$$

obtendo o seguinte problema equivalente $(3.1)_\lambda$

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda q(x, w) - bq(x, w)^p & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Desde que estamos interessados em soluções positivas de $(3.1)_\lambda$, podemos definir

$$q(x, s) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad s \leq 0.$$

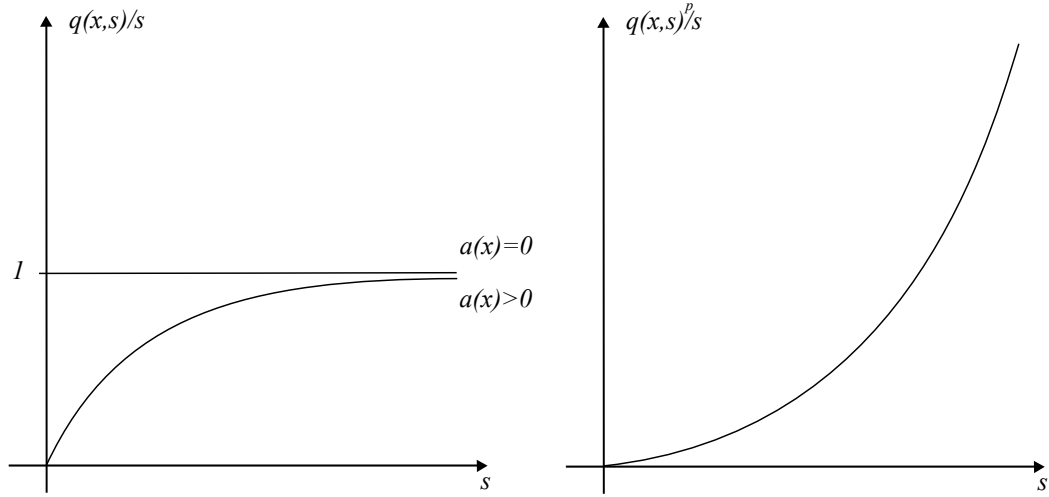


Figura 3.4: Esboço do gráfico das funções $q(x, s)/s$ e $q(x, s)^p/s$ com $0 < r < 1$.

Assim, de maneira análoga ao raciocínio feito no Capítulo 2, qualquer solução não trivial de $(3.1)_\lambda$ é na verdade estritamente positiva. Consequentemente, $u > 0$ é uma solução positiva de $(3.1)_\lambda$ se, e somente se, $w = u + a(x)u^r$ é uma solução positiva de (3.7) . Portanto, vamos analisar o problema equivalente (3.7) . Também iremos nos referir a (3.7) como $(3.7)_\lambda$.

Primeiro, vamos provar algumas propriedades úteis da função $q(x, s)$.

Lema 3.4 a) Para cada $x \in \Omega$, a aplicação $s \mapsto q(x, s)$, $s \geq 0$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Além disso, fixo $s \geq 0$, a aplicação $x \mapsto q(x, s)$ é de classe $\mathcal{C}^2$.

b) Para todo $x \in \Omega$, a aplicação

$$s \mapsto \frac{q(x, s)}{s} \quad s \geq 0,$$

é não decrescente e satisfaz

$$\mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x)s \leq q(x, s) \leq s \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.8)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(x, s)}{s} = \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a(x) > 0, \\ 1 & \text{se } a(x) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(x, s)}{s} = 1. \quad (3.10)$$

c) Para todo $x \in \Omega$, a aplicação

$$s \mapsto \frac{q(x, s)^p}{s}$$

é crescente e satisfaz

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(x, s)^p}{s} = 0 \quad (3.11)$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(x, s)^p}{s} = +\infty. \quad (3.12)$$

Demonstração:

a) Desde que $q(x, \cdot)$ é a função inversa de $I(x, s) = s + a(x)s^r$, temos

$$I(x, q(x, s)) = s = q(x, s) + a(x)q(x, s)^r, \quad (3.13)$$

e

$$q_s(x, s) = \frac{1}{I_s(x, q(x, s))} = \frac{1}{1 + ra(x)q(x, s)^{r-1}}.$$

Portanto $q_s(x, s)$ é contínua em $(0, \infty)$. Por outro lado,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} q_s(x, s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + a(x)r q(x, s)^{r-1}} = \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x) = q_s(x, 0),$$

mostrando a continuidade em 0. Além disso, como $a \in \mathcal{C}^2(x)$, seque que $x \mapsto q(x, s)$ é de classe $\mathcal{C}^2$.

b) De (3.13) temos

$$\frac{q(x, s)}{s} = \frac{1}{1 + a(x)q(x, s)^{r-1}}, \quad (3.14)$$

de onde deduzimos (3.8). Além disso, desde que $s \mapsto q(x, s)$ é crescente e $0 < r < 1$, (3.14) fornece que $q(x, s)/s$ é não decrescente.

Para calcular os limites (3.9)–(3.10), note que se $a(x) = 0$ temos $q(x, s)/s = 1$ e eles são imediatos. Se $a(x) > 0$, usando

$$\lim_{s \rightarrow 0} q(x, s) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} q(x, s) = \infty,$$

(3.14) fornece

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(x, s)}{s} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(x, s)}{s} = 1.$$

c) Analogamente, observe que

$$\frac{q(x, s)^p}{s} = \frac{1}{q(x, s)^{1-p} + a(x)q(x, s)^{r-p}}. \quad (3.15)$$

Pela monotonia da aplicação $s \mapsto q(x, s)$ e com $0 < r < 1 < p$, segue que $q(x, s)/s$ é crescente em s , para todo $x \in \Omega$. Além disso, fazendo $s \rightarrow 0$ e $s \rightarrow \infty$ em (3.15), seguem (3.11)–(3.12).

□

Observação 3.5 *Graças a regularidade de a e q (veja Lema 3.4), w é uma solução clássica de (3.7) ($w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$) se, e somente se, u é solução clássica de (3.1) ($u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_0(\overline{\Omega})$). Entretanto, se assumirmos menos regularidade sobre a função a , por exemplo $a \in L^\infty(\Omega)$, então a solução w de (3.7) será uma função em $W^{2,p}(\Omega)$, para todo $p > 1$. Neste caso, não podemos assegurar a mesma regularidade para u , e então u é solução de (3.1) se $u + a(x)u^r = w$ é uma solução forte de (3.1).*

Para terminar esta seção, iremos estudar um problema auxiliar que nos fornecerá existência de solução maximal e uma estimativa a priori para as soluções positivas de (3.7) $_\lambda$. Especificamente, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w - bq(x, w)^p & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

Proposição 3.6 (3.16) *possui uma solução positiva se, e somente se, $\lambda > \lambda_1$. Além disso, se existe ela é única e será denotada por θ_λ e satisfaz*

$$\theta_\mu \leq \theta_\lambda \quad \text{se } \lambda_1 < \mu \leq \lambda.$$

Demonstração: Se $w > 0$ é uma solução positiva de (3.16), então

$$\begin{cases} -\Delta w + b \frac{q(x, w)^p}{w} w = \lambda w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Implicando que

$$\lambda = \sigma_1 \left[-\Delta + b \frac{q(x, w)^p}{w} \right] > \sigma_1[-\Delta] = \lambda_1.$$

Consequentemente, $\lambda > \lambda_1$ é uma condição necessária para a existência de solução positiva de (3.7) $_\lambda$.

Suponha $\lambda > \lambda_1$. Para provar a existência de solução positiva vamos usar o Método de sub-supersolução. Assim, seja $\varepsilon > 0$ uma constante. Afirmamos que $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (3.16) para $\varepsilon > 0$ pequeno. Com efeito, $\varepsilon\varphi_1$ é subsolução de (3.16) se

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varepsilon \varphi_1 = -\Delta(\varepsilon \varphi_1) &\leq \lambda(\varepsilon \varphi_1) - bq(x, \varepsilon \varphi_1)^p \quad \text{em } \Omega \\ b \frac{q(x, \varepsilon \varphi_1)}{\varepsilon \varphi_1} &\leq \lambda - \lambda_1 \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desde que $\lambda > \lambda_1$ e

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{q(x, s)^p}{s} = 0,$$

segue que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (3.17) se cumpre e portanto $\varepsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (3.16). Para a supersolução escolhemos $K > 0$ constante. E de fato, K é uma supersolução de (3.16) desde que

$$\begin{aligned} 0 = -\Delta K &\geq \lambda K - bq(x, K)^p \quad \text{em } \Omega \\ b \frac{q(x, K)}{K} &\geq \lambda \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(x, s)^p}{s} = \infty,$$

para $K > 0$ suficientemente grande, (3.18) se cumpre. Em adicional, escolhendo $K > 0$ tal que

$$\varepsilon\varphi_1 < K,$$

pelo método de sub e supersolução, existe uma solução θ_λ de (3.16) satisfazendo

$$\varepsilon\varphi_1 < \theta_\lambda < K.$$

A unicidade segue do Teorema 1.36, uma vez que

$$s \mapsto \lambda - b \frac{q(x, s)^p}{s}$$

é decrescente para todo $x \in \Omega$. Finalmente, para verificar a monotonia com respeito a λ basta notar que se $\lambda_1 < \mu \leq \lambda$, a solução θ_μ de (3.16) com $\lambda = \mu$ é uma subsolução de (3.16), então escolhendo $K > 0$ satisfazendo (3.18) e $K > \theta_\lambda$, temos que existe uma

solução de (3.16) entre θ_μ e K . Como a solução positiva deste problema é única e é denotada por θ_λ , segue que

$$\theta_\mu < \theta_\lambda.$$

□

Corolário 3.7 *Para todos $\lambda \geq \mu > \lambda_1$, qualquer solução positiva w_μ de (3.7) $_\mu$ satisfaz*

$$w_\mu < \theta_\mu < \theta_\lambda.$$

Demonstração: Apenas note que w_μ é uma subsolução de (3.16) e K suficientemente grande é uma supersolução. Consequentemente, pela unicidade de solução positiva de (3.16), devemos ter

$$w_\mu \leq \theta_\mu \leq \theta_\lambda.$$

□

3.3 Caso $b = 0$.

Esta seção é dedicada ao estudo do caso $b = 0$. Para isso, usaremos bifurcação global, especificamente o Teorema 1.13.

Proposição 3.8 *Supondo $b = 0$.*

- a) *Se existe uma solução positiva de (3.7) $_\lambda$, então $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0})$.*
- b) *λ_1 é o único ponto de bifurcação do infinito de soluções positivas de (3.7) $_\lambda$. Além disso, existe uma componente ilimitada*

$$\Sigma_\infty \subset \Sigma := \{(\lambda, w) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0(\overline{\Omega}); (\lambda, w) \text{ é uma solução de (3.7)}\}$$

tal que

$$\overline{\Sigma}_\infty = \left\{ (\lambda, w) \text{ com } w \neq 0; \left(\lambda, \frac{w}{\|w\|_0^2} \right) \in \Sigma_\infty \right\} \cup \{(\lambda_1, 0)\}$$

é conexa e ilimitada.

Demonstração:

a) Se $w > 0$ é uma solução de $(3.7)_\lambda$, temos

$$\begin{cases} \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w)}{w} \right] w = 0, & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando (3.8) e as propriedades de monotonia do principal autovalor, obtemos

$$0 = \sigma_1 \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w)}{w} \right] > \sigma_1[-\Delta - \lambda] = \lambda_1 - \lambda.$$

Implicando que $\lambda > \lambda_1$ é uma condição necessária para existência de solução de (3.7).

Se $\Omega_{a0} = \emptyset$, então $\lambda_{a0} = \infty$ e terminamos a demonstração do parágrafo a). No caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$ temos $\lambda_{a0} < \infty$ e precisamos provar que $\lambda < \lambda_{a0}$ é uma condição necessária para a existência de solução positiva de (3.7). E com efeito, se $w > 0$ é uma solução de $(3.7)_\lambda$, usando novamente (3.8) e as propriedades de monotonia do principal autovalor deduzimos

$$0 = \sigma_1 \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w)}{w} \right] < \sigma_1[-\Delta - \lambda \chi_{\Omega_{a0}}] = \mu(\lambda).$$

Pelas propriedades da função μ dadas na Proposição 1.10, segue que $\lambda < \lambda_{a0}$.

b) Tendo em vista (3.10) e desde que $f(\lambda, x, s) := \lambda q(x, s)$ satisfaz $f(0, x, s) \equiv 0$ para todo $x \in \Omega$ e $s \geq 0$, podemos aplicar o Teorema 1.13 e obter o resultado.

□

Para finalizar o estudo do caso $b = 0$, vamos provar o Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1: Pela Proposição 3.8 b), λ_1 é o único ponto de bifurcação do infinito de soluções positivas de $(3.7)_\lambda$. Com o objetivo de provar existência de soluções positivas para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0})$, consideraremos dois casos: $\Omega_{a0} = \emptyset$ e $\Omega_{a0} \neq \emptyset$.

Caso $\Omega_{a0} = \emptyset$: Para concluir o resultado, é suficiente verificar o seguinte

Afirmção: para todo conjunto compacto $\Lambda \subset [\lambda_1, \infty)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(3.7)_\lambda$ não possui solução positiva com $(\lambda, w) \in \Lambda \times B_\varepsilon(0)$.

De fato, a natureza global de Σ_∞ implica que este continuum é ilimitado com respeito a λ e, desde que $(3.7)_\lambda$ não possui solução positiva para $\lambda < \lambda_1$ (conforme a Proposição 3.8), teremos $\text{Proj}_{\mathbb{R}} \Sigma_\infty = (\lambda_1, \infty)$, e o resultado segue.

Vamos provar a afirmação. Argumentando por contradição, se a afirmação não fosse verdadeira, existiria (λ_n, w_n) uma sequência de soluções de (3.7) $_{\lambda_n}$ tais que $\lambda_n \in \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|w_n\|_0 \rightarrow 0$. Desde que Λ é compacto, passando a uma subsequência se necessária, temos

$$(\lambda_n, w_n) \rightarrow (\bar{\lambda}, 0) \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0(\bar{\Omega})$$

De (3.9) e do limite anterior obtemos que para todo $\delta > 0$, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{q(x, w_n)}{w_n} \leq \delta \quad \forall n > n_\delta.$$

Assim, desde que (λ_n, w_n) é uma solução de (3.7) $_{\lambda_n}$, concluimos

$$0 = \sigma_1 \left[-\Delta - \lambda_n \frac{q(x, w_n)}{w_n} \right] > \sigma_1[-\Delta - \lambda_n \delta] = \lambda_1 - \lambda_n \delta \quad \forall n > n_\delta,$$

isto é,

$$\lambda_n \delta > \lambda_1.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e graças a $\lambda_n \rightarrow \bar{\lambda} < \infty$, a desigualdade acima fornece $\lambda_1 \leq \bar{\lambda} \delta$, para todo $\delta > 0$, o que é uma contradição, o que prova a afirmação e termina a demonstração para este caso.

Caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$: Tendo em vista (3.9), podemos aplicar o Teorema 1.13 e obter que λ_{a0} é o único ponto de bifurcação da solução trivial de soluções positivas de (3.7). Além disso, existe uma componente ilimitada $\Sigma_0 \subset \Sigma$ tal que $(\lambda_{a0}, 0) \in \bar{\Sigma}_0$. Uma vez que o ponto de bifurcação é único, obtemos

$$\Sigma_\infty = \Sigma_0.$$

Como consequência, pela natureza global deste continuum, $\text{Proj}_{\mathbb{R}} \Sigma_\infty = (\lambda_1, \lambda_{a0})$ e obtemos que existe solução positiva para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0})$. $\square$

3.4 Caso $b > 0$

Nesta seção iremos provar os Teoremas 3.2 e 3.3, com exceção da existência da segunda solução positiva, que será tratado na próxima seção.

Primeiramente, denotando por φ_{a0} a autofunção principal associada a λ_{a0} normalizado em $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$, isto é, $\|\varphi_{a0}\|_0 = 1$. Temos o seguinte resultado de existência e não existência de soluções positivas.

Proposição 3.9 1. Se $(3.7)_\lambda$ possui uma solução positiva, então $\lambda > \lambda_1$.

2. Se $\Omega_{a0} \neq \emptyset$, então λ_{a0} é um ponto de bifurcação de (3.7) da solução trivial e este é o único de soluções positivas. Além disso, a bifurcação é

(a) Subcrítica se $1/r < p$.

(b) Subcrítica se $1/r = p$ e

$$\int_{\Omega_{a+}} \frac{\varphi_{a0}^{p+1}}{a(x)^p} > b \int_{\Omega_{a0}} \varphi_{a0}^{p+1}. \quad (3.19)$$

(c) Supercrítica se $1/r = p$, $a(x)^{-p} \in L^1(\Omega_{a+})$ e

$$\int_{\Omega_{a+}} \frac{\varphi_{a0}^{p+1}}{a(x)^p} < b \int_{\Omega_{a0}} \varphi_{a0}^{p+1}. \quad (3.20)$$

(d) Supercrítica se $1/r > p$.

3. Existe $\bar{\lambda} > \lambda_1$ tal que $(3.7)_{\bar{\lambda}}$ possui solução positiva.

Demonstração: Desde que a prova do primeiro parágrafo é similar à apresentada na Proposição 3.8, iremos provar apenas 2 e 3.

Vamos demonstrar o parágrafo 2. Se $\Omega_{a0} \neq \emptyset$, por (3.9), podemos aplicar o Teorema 1.13 para obter que λ_{a0} é o único ponto de bifurcação da solução trivial. Para concluir a direção de bifurcação, vamos usar (i) e (ii) do Teorema 1.13 e argumentar como segue. Denotando

$$g(\lambda, x, s) := \frac{\lambda q(x, s) - bq(x, s)^p - \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x)s}{s^{1-\sigma}},$$

onde $\sigma < 0$ será escolhido posteriormente.

(a) Se $1/r < p$, escolhemos $\sigma = 1 - 1/r$. Assim, em Ω_{a+} temos

$$\begin{aligned} g(\lambda, x, s) &= \lambda \frac{(q(x, s)^r)^{1/r}}{(q(x, s) + a(x)q(x, s)^r)^{1/r}} - b \frac{(q(x, s)^{pr})^{1/r}}{(q(x, s) + a(x)q(x, s)^r)^{1/r}} \\ &= \lambda \frac{1}{(q(x, s)^{1-r} + a(x))^{1/r}} - b \frac{1}{(q(x, s)^{1-pr} + a(x)q(x, s)^{(1-p)r})^{1/r}} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) = \frac{\lambda_{a0}}{a(x)^{1/r}} \quad \text{em } \Omega_{a+}.$$

Por outro lado, em Ω_{a0} temos

$$g(\lambda, x, s) = \frac{\lambda s - bs^p - \lambda s}{s^{1/r}} = -bs^{p-1/r},$$

e, uma vez que $1/r < p$, resulta

$$\liminf_{(\lambda,s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) = 0 \quad \text{em } \Omega_{a0}.$$

Consequentemente,

$$\underline{\mu}(x) \equiv \liminf_{(\lambda,s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) \geq 0$$

e

$$\int_{\Omega} \underline{\mu}(x) \varphi_{a0}^{1/r+1} > 0.$$

Então, pelo Teorema 1.13 (i), a bifurcação da solução positiva em $\lambda = \lambda_{a0}$ é subcrítica.

(b) Se $1/r = p$, escolhemos $\sigma = 1 - p$. Assim, em Ω_{a+} temos

$$g(\lambda, x, s) = \lambda \frac{1}{(q(x, s)^{1-1/p} + a(x))^p} - b \left(\frac{q(x, s)}{s} \right)^p.$$

Implicando que

$$\underline{\mu}(x) \equiv \liminf_{(\lambda,s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) = \frac{\lambda_{a0}}{a(x)^p} \quad \text{em } \Omega_{a+}.$$

Por outro lado, em Ω_{a0} temos

$$g(\lambda, x, s) = \frac{\lambda s - bs^p - \lambda s}{s^p} = -b.$$

Consequentemente,

$$\underline{\mu}(x) \equiv \liminf_{(\lambda,s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) = \begin{cases} \frac{\lambda_{a0}}{a(x)^p} & \text{se } x \in \Omega_{a+}, \\ -b & \text{se } x \in \Omega_{a0}. \end{cases}$$

Portanto, $\underline{\mu}(x) \geq -b$ e (3.19) é equivalente a

$$\int_{\Omega} \underline{\mu}(x) \varphi_{a0}^{p+1} > 0.$$

Assim, pelo Teorema 1.13 (i), a bifurcação de soluções positivas em $\lambda = \lambda_{a0}$ é subcrítica.

(c) Analogamente ao caso anterior, tomando $\sigma = 1 - p$ temos

$$\bar{\mu}(x) \equiv \limsup_{(\lambda,s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) = \begin{cases} \frac{\lambda_{a0}}{a(x)^p} & \text{se } x \in \Omega_{a+}, \\ -b & \text{se } x \in \Omega_{a0}. \end{cases}$$

Uma vez que $a(x)^{-p} \in L^1(\Omega_{a+})$, obtemos $\bar{\mu} \in L^1(\Omega)$ e (3.20) é equivalente a

$$\int_{\Omega} \bar{\mu}(x) \varphi_{a0}^{p+1} < 0.$$

Então o Teorema 1.13 (ii) implica que a bifurcação de soluções positivas em $\lambda = \lambda_{a0}$ é supercrítica.

(d) Se $1/r > p$, escolhamos $\sigma = 1 - p$. Em Ω_{a+} temos

$$g(\lambda, x, s) = \lambda \frac{1}{(q(x, s)^{1-1/p} + a(x)q(x, s)^{r-1/p})^p} - b \left(\frac{q(x, s)}{s} \right)^p$$

e, desde que $1/r > p$,

$$\limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) = 0 \quad \text{em } \Omega_{a+}.$$

Por outro lado, em Ω_{a0} temos

$$g(\lambda, x, s) = \frac{\lambda s - bs^p - \lambda s}{s^p} = -b.$$

Consequentemente,

$$\bar{\mu}(x) \equiv \limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\lambda_{a0}, 0^+)} g(\lambda, x, s) = -\mathcal{X}_{\Omega_{a0}} b \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} \bar{\mu}(x) \varphi_{a0}^{p+1} < 0.$$

Então, pelo Teorema 1.13 (ii), a bifurcação de soluções positivas em $\lambda = \lambda_{a0}$ é supercrítica.

Para provar o terceiro parágrafo, note que o caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$ é uma imediata consequência do parágrafo 2.

Se $\Omega_{a0} = \emptyset$, então não há pontos de bifurcação, por isso iremos usar o método de sub-supersolução para provar a existência de solução positiva para $\lambda > \lambda_1$ grande.

Para construir a subsolução, denotando por $\varphi_1 > 0$, o autovalor associado a λ_1 com $\|\varphi_1\|_0 = 1$. Assim, para $m > 1$ a função φ_1^m satisfaz

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi_1^m) &= m\varphi_1^{m-1}\nabla\varphi_1 \\ \Delta(\varphi_1^m) &= m(m-1)\varphi_1^{m-2}|\nabla\varphi_1|^2 + m\varphi_1^{m-1}\Delta\varphi_1 \\ &= m(m-1)\varphi_1^{m-2}|\nabla\varphi_1|^2 - m\lambda_1\varphi_1^m. \end{aligned}$$

Portanto, $\underline{w} = \varphi_1^m$ é uma subsolução de $(3.7)_\lambda$ desde que

$$m(1-m)\varphi_1^{m-2}|\nabla\varphi_1|^2 + m\lambda_1\varphi_1^m = -\Delta(\varphi_1^m) \leq \lambda q(x, \varphi_1^m) - bq(x, \varphi_1^m)^p \quad \forall x \in \Omega.$$

Uma vez que estamos considerando o caso $\Omega_{a0} = \emptyset$, temos $q(x, \varphi_1^m) > 0$ para todo $x \in \Omega$ e esta desigualdade é equivalente a

$$\frac{m\varphi_1^m}{q(x, \varphi_1^m)} \left((1-m)\frac{|\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2} + \lambda_1 \right) + bq(x, \varphi_1^m)^{p-1} \leq \lambda \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.21)$$

Note que o termo $bq(x, \varphi_1^m)$ é limitado. Vamos mostrar que os termos restantes também são limitados. De fato, observe que

$$(1-m)\frac{|\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2} + \lambda_1 \leq 0, \quad (3.22)$$

sempre que

$$\left(\frac{\lambda_1}{m-1} \right)^{1/2} \leq \frac{|\nabla\varphi_1|}{\varphi_1}.$$

Como $\varphi_1 = 0$ e $(\partial\varphi_1/\partial n)(x) < 0$ em $\partial\Omega$, onde $(\partial\varphi_1/\partial n)(x)$ denota a derivada normal exterior de φ_1 no ponto $x \in \partial\Omega$, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \Omega_\delta &:= \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) \leq \delta\} \subset \\ &\{x \in \Omega; (\lambda_1/(m-1))^{1/2} \leq |\nabla\varphi_1(x)|/\varphi_1(x)\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como consequência, (3.22) ocorre para todo $x \in \Omega_\delta$. Por outro lado, temos

$$M = \min_{x \in \Omega \setminus \Omega_\delta} \varphi_1^m(x) > 0.$$

Desde que a aplicação $s \mapsto s/q(x, s)$ é não crescente (conforme Lema 3.4), segue que

$$\frac{\varphi_1^m}{q(x, \varphi_1^m)} \leq \frac{M}{q(x, M)} \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_\delta. \quad (3.24)$$

Assim,

$$\frac{m\varphi_1^m}{q(x, \varphi_1^m)} \left((1-m)\frac{|\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2} + \lambda_1 \right) \leq \frac{mM}{q(x, M)} \left((1-m)\frac{|\nabla\varphi_1|^2}{\varphi_1^2} + \lambda_1 \right) < \infty \quad \text{em } \Omega \setminus \Omega_\delta.$$

Então podemos escolher λ suficientemente grande para que (3.21) ocorra, implicando que $\underline{w} = \varphi_1^m$ é uma subsolução de $(3.7)_\lambda$.

Agora, seja $K > 0$ uma constante positiva. Então $\bar{w} = K$ é uma supersolução de $(3.7)_\lambda$ desde que

$$0 = -\Delta K \geq \lambda q(x, K) - bq(x, K)^p,$$

o que é equivalente a

$$q(x, K)^{p-1} \geq \frac{\lambda}{b}. \quad (3.25)$$

Assim, escolhendo K satisfazendo (3.25) e $K > \varphi_1^m$, fornece que $\bar{w} = K$ é uma supersolução de $(3.7)_\lambda$. Consequentemente, existe uma solução positiva, w , de $(3.7)_\lambda$ para λ grande, e que satisfaz

$$\varphi_1^m \leq w \leq K.$$

□

Agora vamos provar o Teorema 3.2 (b) e (c).

Demonstração do Teorema 3.2 (a) e (b): Uma vez que $b > 0$ está fixado neste teorema, iremos denotar $\lambda^*(b)$ simplesmente por λ^* .

Graças à Proposição 3.9, já sabemos que $\Lambda_b \neq \emptyset$ e $\lambda_1 \leq \lambda^* < \infty$. Com a notação $\lambda_{a0} = \infty$ se $\Omega_{a0} = \emptyset$, podemos tratar os parágrafos (b) e (c) simultaneamente para mostrar a existência de solução positiva para todo $\lambda > \lambda_1$.

Assim, se $\lambda > \lambda^*$, pela definição de λ^* , obtemos que existe $\bar{\lambda}$ com

$$\lambda^* < \bar{\lambda} < \lambda$$

tal que $(3.7)_{\bar{\lambda}}$ possui uma solução positiva, $w_{\bar{\lambda}}$. Como $\bar{\lambda} < \lambda$, $w_{\bar{\lambda}}$ é uma subsolução de $(3.7)_\lambda$. Por outro lado, uma constante $K > 0$ suficientemente grande satisfazendo (3.25) e $K > w_{\bar{\lambda}}$ é uma supersolução. Consequentemente, $(3.7)_\lambda$ possui uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda^*$.

Agora vamos mostrar que, se $\lambda^* < \lambda_{a0}$, então o problema $(3.7)_\lambda$ admite solução também para $\lambda = \lambda^*$. Com efeito, suponha

$$\lambda^* < \lambda_{a0}. \quad (3.26)$$

Seja σ_n uma sequência minimizante tal que $\sigma_n \downarrow \lambda^*$ e w_n uma respectiva solução positiva. Então w_n é limitado em $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Como $\sigma_1 > \lambda_1$ e $\sigma_n \leq \sigma_1$, o Corolário 3.7 fornece

$$w_n \leq \theta_{\sigma_1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde θ_{σ_1} denota a única solução positiva de (3.16) com $\lambda = \sigma_1$. Assim, $\|w_n\|_0 \leq \|\theta_{\sigma_1}\|_0$.

Em adicional, uma vez que (σ_n, w_n) é uma solução de $(3.7)_{\sigma_n}$, temos

$$\int_{\Omega} \nabla w_n \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} (\sigma_n q(x, w_n) - b q(x, w_n)^p) \phi \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.27)$$

Tomando $\phi = w_n$ como função teste e usando (3.8), deduzimos que

$$\begin{aligned} \|w_n\|_{H_0^1}^2 &= \int_{\Omega} (\sigma_n q(x, w_n) - bq(x, w_n)^p) w_n \\ &\leq \sigma_1 \int_{\Omega} q(x, w_n) w_n \leq \sigma_1 \int_{\Omega} w_n^2 \leq \sigma_1 \|\theta_{\sigma_1}\|_0^2 |\Omega|. \end{aligned}$$

Como consequência, w_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Passando a uma subsequência se necessário,

$$w_n \rightharpoonup w^* \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad w_n \rightarrow w^* \text{ em } L^m(\Omega) \quad m < 2^*.$$

Passando ao limite $n \rightarrow \infty$ em (3.27), concluímos

$$\int_{\Omega} \nabla w^* \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} (\lambda^* q(x, w^*) - bq(x, w^*)^p) \phi \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto w^* é uma solução fraca de $(3.7)_{\lambda^*}$ e pela regularidade elíptica, obtemos que w^* é uma solução clássica não negativa. Afirmamos que $w^* \neq 0$. De fato, caso contrário, pela regularidade elíptica, e as imersões de Morrey, teríamos

$$\|w_n\|_{C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C,$$

para alguma constante positiva C . Assim, da imersão compacta de $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, passando a subsequência se necessário,

$$\|w_n\|_0 \rightarrow 0.$$

Tendo em vista (3.9), para todo $\delta > 0$, existe $n_{\delta} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{q(x, w_n)}{w_n} - \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x) \leq \delta \quad \forall n > n_{\delta}, \quad x \in \Omega.$$

Consequentemente,

$$0 = \sigma_1 \left[-\Delta - \sigma_n \frac{q(x, w_n)}{w_n} + b \frac{q(x, w_n)^p}{w_n} \right] > \sigma_1 [-\Delta - \sigma_n (\delta + \mathcal{X}_{\Omega_{a0}})].$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$, implica $n \rightarrow \infty$ e obtemos que

$$0 \geq \sigma_1 [-\Delta - \lambda^* \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}] = \mu(\lambda^*).$$

Pelas propriedades da função μ (veja a Proposição 1.10), a desigualdade acima nos fornece $\lambda^* \geq \lambda_{a0}$, o que é uma contradição com (3.26).

Para completar a demonstração, resta mostrar que $\lambda_1 < \lambda^* \leq \lambda_{a0}$. Vamos verificar a desigualdade $\lambda^* \leq \lambda_{a0}$. De fato, se $\Omega_{a0} = \emptyset$ então $\lambda_{a0} = \infty$ e $\lambda^* \leq \lambda_{a0}$ é imediato. Se

$\Omega_{a0} \neq \emptyset$ então λ_{a0} é um ponto de bifurcação da solução trivial e, pela definição de λ^* , segue que $\lambda^* \leq \lambda_{a0}$.

Para verificar $\lambda_1 < \lambda^*$, argumentamos como segue: se $\lambda^* < \lambda_{a0}$, então já sabemos que $(3.7)_\lambda$ possui uma solução positiva para $\lambda = \lambda^*$ e como $\lambda > \lambda_1$ é uma condição necessária para existência de solução positiva, segue que $\lambda^* > \lambda_1$. Se $\lambda^* = \lambda_{a0}$, desde que estamos considerando apenas o caso $a \neq 0$ em Ω , isso implica que $\lambda_1 < \lambda_{a0} = \lambda^*$. $\square$

No que segue, estudaremos as propriedades das soluções de $(3.7)_\lambda$ com respeito ao parâmetro b . Iniciamos provando a existência de solução maximal.

Demonstração do Teorema 3.3 (a): Recordemos que, pelo Corolário 3.7, toda solução $w > 0$ de $(3.7)_\lambda$ satisfaz

$$w \leq \|\theta_\lambda\|_0.$$

Assim, considere a função

$$f(x, s) := \lambda q(x, s) - bq(x, s)^p + Ks.$$

Como

$$f_s(x, s) = \lambda q_s(x, s) - bpq(x, s)^{p-1}q_s(x, s) + K \quad \forall s > 0,$$

e $q_s(x, s)$ é limitada para $0 < s < \|\theta_\lambda\|_0$, podemos escolher $K > 0$ suficientemente grande tal que esta função é crescente em $[0, \|\theta_\lambda\|_0]$. Assim, obtemos uma sequência w_n a partir da interação monotônica

$$-\Delta w_{n+1} + Kw_{n+1} = \lambda q(x, w_n) - bq(x, w_n)^p + Kw_n, \quad w_0 = \theta_\lambda. \quad (3.28)$$

Vamos mostrar que, a menos de subsequência, w_n é convergente e o limite fornece uma solução maximal em $[0, \theta_\lambda]$. Note que w_1 é a solução do problema problema linear

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + Kw_1 = f(x, \theta_\lambda) & \text{em } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por regularidade elíptica, $w_1 \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Além disso, usando que θ_λ é uma supersolução de $(3.7)_\lambda$,

$$\begin{cases} -\Delta(\theta_\lambda - w_1) + K(\theta_\lambda - w_1) \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \theta_\lambda - w_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo Forte,

$$w_1 \leq \theta_\lambda.$$

De maneira análoga, temos que $w_n \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$0 \leq w_{n+1} \leq w_n \leq \theta_\lambda \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, como w_n é monótona e limitada, existe o limite pontual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = W(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Por outro lado, como w_n é limitada em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, por regularidade elíptica, temos que w_n também é limitada em $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Da imersão compacta $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, w_n é convergente em $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e pela unicidade do limite

$$w_n \rightarrow W \quad \text{em } \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}).$$

Por fim, passando ao limite $n \rightarrow \infty$ em (3.28), segue que W é solução de $(3.7)_\lambda$. Uma vez que toda solução positiva $w > 0$ satisfaz $w < \theta_\lambda$, resulta que $w \leq w_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implicando $w \leq W$ e provando que W é uma solução maximal de $(3.7)_\lambda$.

Agora, dado $\lambda^*(b) \leq \mu < \lambda$, então W_μ é uma subsolução de $(3.7)_\lambda$. Como $K > 0$ suficientemente grande é uma supersolução de $(3.7)_\lambda$, derivamos que $(3.7)_\lambda$ possui uma solução positiva w com

$$W_\mu < w \leq K.$$

A desigualdade estrita ocorre pois W_μ não é uma solução de $(3.7)_\lambda$. Como W_λ é uma solução maximal de $(3.7)_\lambda$, deduzimos

$$W_\mu < w \leq W_\lambda.$$

Isso completa a demonstração. □

O seguinte resultado auxiliar nos ajudará na demonstração do Teorema 3.3 b)

Lema 3.10 *Se $b_1 < b_2$, então $\inf \Lambda_{b_1} \leq \inf \Lambda_{b_2}$.*

Demonstração: Apenas note que $\Lambda_{b_2} \subset \Lambda_{b_1}$. De fato, se $\lambda \in \Lambda_{b_2}$, então $w_{\lambda(b_2)}$ é uma subsolução de $(3.7)_\lambda$ com $b = b_1$. Escolhendo K suficientemente grande satisfazendo (3.25) e $K \geq w_{\lambda(b_2)}$, concluímos que existe uma solução positiva de $(3.7)_\lambda$ com $b = b_1$. Além disso,

$$w_{\lambda(b_2)} \leq w_{\lambda(b_1)}.$$

□

Agora vamos mostrar o item b) do Teorema 3.3, isto é,

$$\lim_{b \rightarrow 0} \lambda^*(b) = \lambda_1.$$

Demonstração do Teorema 3.3 (b): Vamos mostrar que para todo $\lambda > \lambda_1$, existe $b = b(\lambda) > 0$ tal que $(3.7)_\lambda$ admite solução positiva.

De fato, fixo $\lambda > \lambda_1$, podemos escrever $\lambda = \lambda_1 + \varepsilon_0$, com $\varepsilon_0 = \lambda - \lambda_1 > 0$. Seja $C > 0$ uma constante positiva, então $\underline{w} = C\varphi_1^m$ é subsolução de $(3.7)_\lambda$ se

$$Cm(1-m)|\nabla\varphi_1|^2 \frac{\varphi_1^{m-2}}{q(x, C\varphi_1^m)} + \lambda_1 \left(m \frac{C\varphi_1^m}{q(x, C\varphi_1^m)} - 1 \right) + bq(x, C\varphi_1^m)^{p-1} \leq \varepsilon_0, \quad (3.29)$$

para todo $x \in \Omega$. Vamos obter condições para que (3.29) se verifique em Ω_δ assim como em $\Omega \setminus \Omega_\delta$, onde Ω_δ é dado em (3.23).

Primeiramente fixamos $m = m(\lambda) > 1$ tal que

$$\lambda_1(m-1) < \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (3.30)$$

Para este m , tomamos $\delta = \delta(m)$ como na Proposição 3.9. Observe que δ não depende de C .

A primeira parcela em (3.29) é negativa. Para mostrar que a segunda parcela é pequena, recordemos que a aplicação $s \mapsto q(x, s)/s$ é crescente e $\lim_{s \rightarrow \infty} q(x, s)/s = 1$ (veja Lema 3.4), portanto

$$\frac{s}{q(x, s)} \downarrow 1 \quad \text{quando } s \uparrow \infty.$$

Como

$$\min_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \varphi_1^m > 0,$$

de (3.30) e do limite acima, podemos obter $C > 0$ grande tal que

$$\lambda_1 \left(m \frac{C\varphi_1^m}{q(x, C\varphi_1^m)} - 1 \right) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_\delta.$$

Além disso, tomando $b > 0$ satisfazendo

$$bq(x, C\varphi_1^m)^{p-1} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.31)$$

deduzimos que (3.29) ocorre para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$.

Por outro lado, se $x \in \Omega_\delta$ temos

$$m(1-m)|\nabla\varphi_1|^2\varphi_1^{m-2} + m\lambda_1\varphi_1^m \leq 0,$$

implicando

$$Cm(1-m)|\nabla\varphi_1|^2 \frac{\varphi_1^{m-2}}{q(x, C\varphi_1^m)} + m\lambda_1 \frac{C\varphi_1^m}{q(x, C\varphi_1^m)} \leq 0.$$

Tendo em vista (3.31), segue que (3.29) também se cumpre em Ω_δ e portanto $\underline{w} = C\varphi_1^m$ é uma subsolução de (3.7) $_\lambda$. Tomando K satisfazendo (3.25) e $K \geq C\varphi_1^m$, temos que K é uma supersolução de (3.7) $_\lambda$. Desse modo, existe uma solução $w_{[\lambda, b]}$ de (3.7) $_\lambda$ tal que

$$C\varphi_1^m \leq w_{[\lambda, b]} \leq K. \quad (3.32)$$

Como consequência, dado $\varepsilon > 0$, existe $b_\varepsilon > 0$ tal que

$$\lambda_1 < \lambda^*(b_\varepsilon) \leq \lambda_1 + \varepsilon.$$

Pela Proposição 3.10, a desigualdade acima é verificada para todo $0 < b \leq b_\varepsilon$, mostrando (3.5). $\square$

O seguinte resultado terá como corolário o Teorema 3.3 (c).

Proposição 3.11 *Seja $(w_{\lambda^*(b)})_{b>0}$ uma família de soluções positivas de (3.7) $_{\lambda^*(b)}$. Então*

$$\lim_{b \rightarrow 0} \|w_{\lambda^*(b)}\|_0 = \infty. \quad (3.33)$$

Demonstração: Argumentando por contradição, supondo que $\|w_{\lambda^*(b)}\|_0 < M$, para cada $0 < b < b_0$. Em particular, como a aplicação $s \mapsto q(x, s)/s$ é não decrescente,

$$w_{\lambda^*(b)} \leq \|w_{\lambda^*(b)}\|_0 < M \Rightarrow \frac{q(x, w_{\lambda^*(b)})}{w_{\lambda^*(b)}} \leq \frac{q(x, M)}{M}.$$

Por outro lado, como $w_{\lambda^*(b)}$ é solução de (3.7) $_{\lambda^*(b)}$, temos

$$\begin{cases} -\Delta w_{\lambda^*(b)} - \lambda^*(b) \frac{q(x, w_{\lambda^*(b)})}{w_{\lambda^*(b)}} w_{\lambda^*(b)} + b \frac{q(x, w_{\lambda^*(b)})^p}{w_{\lambda^*(b)}} w_{\lambda^*(b)} = 0 & \text{em } \Omega, \\ w_{\lambda^*(b)} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_1 \left[-\Delta - \lambda^*(b) \frac{q(x, w_{\lambda^*(b)})}{w_{\lambda^*(b)}} + b \frac{q(x, w_{\lambda^*(b)})^p}{w_{\lambda^*(b)}} \right] \\ &> \sigma_1 \left[-\Delta - \lambda^*(b) \frac{q(x, M)}{M} \right]. \end{aligned}$$

Fazendo $b \rightarrow 0$, obtemos

$$0 \geq \sigma_1 \left[-\Delta - \lambda_1 \frac{q(x, M)}{M} \right].$$

Como $\Omega_{a0} \neq \Omega$, então $q(x, M)/M < 1$ e isso implica

$$0 > \sigma_1[-\Delta - \lambda_1] = \lambda_1 - \lambda_1 = 0,$$

o que é uma contradição. $\square$

Como consequência desse resultado, temos a

Demonstração do Teorema 3.3 (c): Pelo Teorema 3.3 (a), para todo $b > 0$,

$$w_{\lambda^*(b)} \leq W_{\lambda^*(b)} \leq W_{\lambda(b)}.$$

Assim, como $\lim_{b \rightarrow 0} \|w_{\lambda^*(b)}\|_0 = \infty$ (conforme a Proposição anterior), segue que

$$\lim_{b \rightarrow 0} \|W_{\lambda(b)}\|_0 = \infty.$$

□

3.5 Multiplicidade de soluções positivas

Esta seção é dedicada a obter uma segunda solução positiva de $(3.7)_\lambda$ e para este propósito usaremos Métodos Variacionais. Os argumentos aqui apresentados são inspirados em [1] e [6].

Para cada $\lambda > \lambda_1$, seja $M > 0$ uma constante tal que $\|\theta_\lambda\|_0 < M$ onde θ_λ representa a única solução positiva de (3.16) (veja a Proposição 3.6). Fixo $\varepsilon > 0$, definimos

$$\bar{q}(x, s) = \begin{cases} q(x, s) & \text{se } s \leq M, \\ \phi(x, s) & \text{se } M \leq s \leq M + \varepsilon, \\ q(x, M + \varepsilon) & \text{se } M + \varepsilon < s, \end{cases}$$

onde $\phi(x, s)$ é uma função regular tal que a aplicação $s \in (0, \infty) \mapsto \bar{q}(x, s)$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Definindo o funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - \lambda \int_\Omega Q(x, w) dx + b \int_\Omega Q_p(x, w) dx,$$

onde

$$Q(x, w) := \int_0^w \bar{q}(x, s) ds \quad \text{e} \quad Q_p(x, w) := \int_0^w \bar{q}(x, s)^p ds.$$

Assim, I_λ está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^2$, para todo $\lambda > \lambda_1$. Além disso, toda solução positiva de $(2.17)_\lambda$ é limitada superiormente por M (de acordo com o Corolário 3.7), então pontos críticos de I_λ são soluções fracas de $(3.7)_\lambda$ e, por regularidade elíptica, são soluções clássicas.

Vamos coletar algumas propriedades deste funcional.

Proposição 3.12 *O funcional I_λ é coercivo e limitado inferiormente.*

Demonstração: Para cada $w \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(w) &= \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - \lambda \int_{\Omega} Q(x, w) dx + b \int_{\Omega} Q_p(x, w) dx \\ &= \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - \int_{\Omega} \int_0^w (\lambda \bar{q}(x, w) - b \bar{q}(x, w)^p) ds dx \end{aligned}$$

desde que a aplicação

$$s \mapsto \lambda s - bs^p, \quad s \geq 0$$

é limitado superiormente, podemos obter uma constante $C > 0$ tal que

$$\lambda \bar{q}(x, s) - b \bar{q}(x, s)^p \leq C, \quad s \geq 0.$$

Deste modo, obtemos

$$I_\lambda(w) \geq \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - C \int_{\Omega} w dx \geq \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - C |w|_1.$$

Da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, segue que

$$I_\lambda(w) \geq \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - C_1 \|w\|_{H_0^1}.$$

Mostrando que o funcional I_λ é coercivo e limitado inferiormente. □

Proposição 3.13 *Se w_n é uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ com $I_\lambda(w_n)$ limitado, então, passando a uma subsequência se necessário,*

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$I_\lambda(w) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(w_n).$$

Em particular, I_λ atinge o ínfimo sobre $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Graças a coercividade de I_λ , a sequência w_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, passando a uma subsequência se necessário,

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$w_n \rightarrow w \text{ em } L^s(\Omega), \quad s \in [1, 2^*).$$

Consequentemente,

$$I_\lambda(w) - I_\lambda(w_n) = \frac{1}{2}(\|w\|_{H_0^1}^2 - \|w_n\|_{H_0^1}^2) + \int_{\Omega} [(\lambda Q(x, w_n) - bQ_p(x, w_n)) - (\lambda Q(x, w) - bQ_p(x, w))] dx.$$

Escrevendo $F(x, s) = \lambda Q(x, s) - bQ_p(x, s)$, $s \geq 0$, temos

$$I_\lambda(w) - I_\lambda(w_n) = \frac{1}{2}(\|w\|_{H_0^1}^2 - \|w_n\|_{H_0^1}^2) + \int_{\Omega} [F(x, w_n) - F(x, w)] dx. \quad (3.34)$$

Pelas propriedades de $\bar{q}$,

$$F_s(x, s) = \lambda \bar{q}(x, s) - b\bar{q}(x, s)^p$$

é limitado em $\Omega \times [0, \infty)$. Assim, (3.34) implica que

$$\begin{aligned} I_\lambda(w) - I_\lambda(w_n) &= \frac{1}{2}(\|w\|_{H_0^1}^2 - \|w_n\|_{H_0^1}^2) + \\ &\int_{\Omega} \left[\int_0^1 (\lambda \bar{q}(x, tw_n + (1-t)w) - b\bar{q}(x, tw_n + (1-t)w)^p) dt (w_n - w) \right] dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\|w\|_{H_0^1}^2 - \|w_n\|_{H_0^1}^2) + C \int_{\Omega} |w_n - w| dx. \end{aligned}$$

Desde que $w_n \rightarrow w$ em $L^1(\Omega)$ e $w_n \rightharpoonup w$ em $H_0^1(\Omega)$, segue que

$$I_\lambda(w) - \liminf_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(w_n) \leq 0.$$

Finalmente, uma vez que I_λ é coercivo e limitado inferiormente (conforme a Proposição 3.12), I_λ atinge o ínfimo sobre $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Com o objetivo de aplicar o Teorema 1.40, vamos mostrar que I_λ possui duas soluções que são mínimos locais de I_λ em $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 3.14 *Para todo $\lambda > \lambda^*$, $(3.7)_\lambda$ possui uma solução $w \neq 0$ que é um mínimo local para I_λ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.3 (a), a solução maximal de $(3.7)_{\lambda^*}$, W_{λ^*} , é uma sub-solução estrita de $(2.17)_\lambda$ para todo $\lambda > \lambda^*$. Assim, obtemos uma solução v_λ para $(2.17)_\lambda$ via minimização

$$I_\lambda(v_\lambda) = \inf\{I_\lambda(w); w \in H_0^1(\Omega), w(x) \geq W_{\lambda^*}\}.$$

Note que v_λ existe graças as Proposições 3.12 e 3.13 e v_λ define uma solução de $(3.7)_\lambda$.

Para verificar que esta solução é um mínimo de I_λ em $H_0^1(\Omega)$, é suficiente mostrar que é um mínimo local na topologia de $\mathcal{C}^1$ (veja [14]).

Tomando $K > 0$ suficientemente grande tal que $s \mapsto \lambda \bar{q}(x, s) - b\bar{q}(x, s)^p + Ks$ é crescente em $[0, \max_{\bar{\Omega}} v_\lambda]$ e como $v_\lambda > W_{\lambda^*}$, deduzimos

$$\begin{aligned} -\Delta(v_\lambda - W_{\lambda^*}) + K(v_\lambda - W_{\lambda^*}) &= (\lambda \bar{q}(x, v_\lambda) - b\bar{q}(x, v_\lambda)^p + Kv_\lambda) \\ &\quad - (\lambda^* \bar{q}(x, W_{\lambda^*}) - b\bar{q}(x, W_{\lambda^*})^p + KW_{\lambda^*}) > 0. \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo Forte, segue que $v_\lambda - W_{\lambda^*}$ está no interior do cone positivo de $\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$. Com isso, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(v_\lambda) \subset \{u \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}); u \geq W_{\lambda^*}\},$$

onde $B_\varepsilon(v_\lambda)$ denota a bola aberta de raio ε e centro em v_λ na topologia de $\mathcal{C}^1$.

Desde que $I_\lambda(v_\lambda)$ é o mínimo em $\{u \in H_0^1(\Omega); u \geq W_{\lambda^*}\}$, então também é um mínimo local em $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$. $\square$

O próximo resultado nos fornece um segundo mínimo local de I_λ em $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 3.15 *Se $\lambda < \lambda_{a0}$, então a solução trivial $w \equiv 0$ é um mínimo local de I_λ sobre $H_0^1(\Omega)$ e é uma solução isolada de $(3.7)_\lambda$.*

Demonstração: Consideremos dois casos:

Caso $\Omega_{a0} \neq \emptyset$

Fixo $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\lambda}{\lambda_{a0}} > 0.$$

Então, graças a definição de $\bar{q}$, podemos obter uma constante $C > 0$ e $1 < r < 2^*$ tais que

$$\bar{q}(x, s) \leq q(x, s) \leq (\varepsilon + \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x))s + Cs^r \quad \forall (x, s) \in \Omega \times [0, \infty).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} I_\lambda(w) &\geq \frac{1}{2} \|w\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon + \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}(x)) w^2 - \frac{C}{r+1} \int_{\Omega} w^{r+1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \varepsilon \frac{\lambda}{\lambda_1} - \frac{\lambda}{\lambda_{a0}} \right) \|w\|_{H_0^1}^2 - \frac{C}{\lambda_1(r+1)} \|w\|_{H_0^1}^{r+1}. \end{aligned}$$

Portanto, existe $\delta > 0$ pequeno tal que

$$I_\lambda(w) \geq 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \|w\|_{H_0^1} \leq \delta,$$

mostrando que $w \equiv 0$ é um mínimo local de I_λ em $H_0^1(\Omega)$.

Para provar que 0 é uma solução isolada de $(3.7)_\lambda$, argumentamos por contradição. Caso contrário, existiria uma sequência de soluções positivas w_n tal que $\|w_n\|_{H_0^1} \rightarrow 0$. Portanto, teríamos também $\|w_n\|_0 \rightarrow 0$. De (2.19), para todo $\delta > 0$, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{q(x, w_n)}{w_n} - \mathcal{X}_{\Omega_{a0}} \leq \delta \quad \forall n > n_\delta, x \in \Omega.$$

Consequentemente,

$$0 = \sigma_1 \left[-\Delta - \lambda \frac{q(x, w_n)}{w_n} + b \frac{q(x, w_n)^p}{w_n} \right] > \sigma_1 [-\Delta - \lambda(\delta + \mathcal{X}_{\Omega_{a0}})].$$

Fazendo $\delta \rightarrow 0$, concluímos

$$0 \geq \sigma_1 [-\Delta - \lambda \mathcal{X}_{\Omega_{a0}}] = \mu(\lambda).$$

Das propriedades de μ (veja Proposição 1.10), a desigualdade acima fornece $\lambda \geq \lambda_{a0}$, o que é uma contradição.

Caso $\Omega_{a0} = \emptyset$

Observe que os mesmos argumentos do caso anterior podem ser aplicados, apenas notando que $\mathcal{X}_{\Omega_{a0}} \equiv 0$ e $\lambda_{a0} = \infty$. $\square$

No que segue, vamos argumentar para aplicar o Teorema 1.40. Definimos

$$\mathcal{M} = \{w \in H_0^1(\Omega); 0 \leq w(x) \leq v_\lambda(x)\}.$$

Como $w \equiv 0$ e v_λ são soluções de $(3.7)_\lambda$, então pontos críticos de I_λ em $\mathcal{M}$ também são pontos críticos de I_λ em $H_0^1(\Omega)$. Vamos mostrar uma condição Palais-Smale para o funcional I em $\mathcal{M}$.

Proposição 3.16 *Se w_n é uma sequência em $\mathcal{M}$ tal que*

$$I_\lambda(w_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad g(w_n) \rightarrow 0,$$

então w_n possui uma subseqüência convergindo forte em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Se w_n é uma sequência em $\mathcal{M}$, então w_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Passando a uma subseqüência se necessário, temos

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad w_n(x) \rightarrow w(x) \text{ q. s. em } \Omega.$$

Uma vez que $0 \leq w_n \leq v_\lambda$, então $0 \leq w \leq v_\lambda$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\int_{\Omega} (\lambda \bar{q}(x, w_n) - b \bar{q}(x, w_n)^p)(w_n - w) dx \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g(w_n) \|w_n - w\|_{H_0^1} &\geq I'_\lambda(w_n)(w_n - w) \\ &= \int_{\Omega} \nabla w_n \nabla(w_n - w) + o(1) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(w_n - w)|^2 + o(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$g(w_n) \geq \|w_n - w\|_{H_0^1} + o(1).$$

Passando ao limite $n \rightarrow \infty$, deduzimos que $w_n \rightarrow w$ em $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Finalmente estamos em condições provar a existência de um par de soluções ordenadas de $(3.7)_\lambda$.

Demonstração do Teorema 3.2 (c): Considere novamente o conjunto

$$\mathcal{M} = \{w \in H_0^1(\Omega); 0 \leq w(x) \leq v_\lambda(x)\},$$

onde v_λ é a solução que é um mínimo local de I_λ sobre $\mathcal{M}$ (de acordo com a Proposição 3.14). Como I_λ satisfaz a condição Palais-Smale em $\mathcal{M}$ (Proposição 3.16), podemos aplicar o Teorema 1.40 e concluir a seguinte dicotomia: ou

1. I_λ possui um ponto crítico w_λ em $\mathcal{M}$ que não é um mínimo local;
- ou
2. $I_\lambda(v_\lambda) = I_\lambda(0)$ e v_λ e 0 podem ser conectados em qualquer vizinhança do conjunto dos mínimos locais de I_λ relativos a $\mathcal{M}$, cada um dos quais satisfazendo $I_\lambda(w) = 0$.

Porém, pela Proposição 3.15, 0 é uma solução isolada de $(3.7)_\lambda$, para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_{a0})$. Isso exclui a possibilidade de que o paragrafo 2 ocorra, completando a demonstração. $\square$

Capítulo 4

Bifurcação global para uma classe de sistemas elípticos quasilineares

Este capítulo é dedicado aos nossos resultados contidos no artigo [23]. Desse modo, o principal objetivo deste capítulo é demonstrar uma versão do Teorema 1.28 para uma classe de sistemas elípticos quasilineares. Para isso, vamos aplicar os Teoremas 1.23 e 1.26, com argumentos inspirados em [66]. Especificamente, vamos estudar o sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(u, v)\nabla u + S(u, v)\nabla v) = \lambda a(x)u + f(x, u)u + F(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(Q(u, v)\nabla u + R(u, v)\nabla v) = \mu b(x)v + g(x, v)v + G(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ é um domínio limitado com fronteira regular. Iremos adotar as seguintes hipóteses sobre as funções P, Q, R, S, a e b :

(H_{PQRS}) $P(u, v)$, $R(u, v)$, $Q(u, v)$ e $S(u, v)$ são funções reais definidas em $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ de classe $\mathcal{C}^2$ tais que:

$$Q(u, 0) = 0 \quad \forall u \geq 0, \quad (4.2)$$

$$S(0, v) = 0 \quad \forall v \geq 0, \quad (4.3)$$

$$|P(u, v)R(u, v) - Q(u, v)S(u, v)| \geq \delta_0 > 0 \quad \forall u, v \geq 0 \quad (4.4)$$

e

$$P(u, v) \geq P_0 > 0 \quad \text{e} \quad R(u, v) \geq R_0 > 0 \quad \forall u, v \geq 0, \quad (4.5)$$

onde δ_0 , P_0 e R_0 são constantes.

(H_{ab}) $a, b : \bar{\Omega} \rightarrow [0, \infty)$ são funções contínuas e não nulas.

Também admitiremos as mesmas hipóteses (H_{fg}) e (H_{FG}) presentes no Teorema 1.28, ou seja:

(H_{fg}) $f(x, w)$ e $g(x, w)$ são funções reais definidas em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, contínuas em x e de classe $\mathcal{C}^1$ em w tais que

$$f(x, 0) = g(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega};$$

(H_{FG}) $F(x, u, v)$ e $G(x, u, v)$ são funções reais definidas em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2$, contínuas em x e de classe $\mathcal{C}^1$ em (u, v) .

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira: na Seção 4.1 faremos algumas considerações iniciais sobre as soluções não negativas de (4.1) e enunciaremos nosso teorema principal. Na Seção 4.2 vamos reescrever o sistema (4.1) como uma equação não linear adequada para aplicar os teoremas de bifurcação global enunciados no Capítulo 1. Nas Seções 4.3 e 4.4 apresentaremos os resultados necessários para demonstrar o principal deste capítulo, que será feita na Seção 4.5.

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos um teorema de bifurcação para o sistema quasilinear (4.1). Tal resultado é uma versão do Teorema 1.28 que trata de sistemas semilineares. Para a demonstração aplicaremos os teoremas de bifurcação global unilateral da Seção 1.2 (Teoremas 1.23 e 1.26).

Antes de enunciar nosso resultado precisamos fazer algumas considerações iniciais. Primeiramente destacamos que estamos buscando soluções fortes de (4.1) (em $\mathcal{C}_0^{1,1^-}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,1^-}(\bar{\Omega})$) com componentes *não negativas*. Observe que (4.1) admite três tipos de soluções não negativas: a solução trivial $(0, 0)$; as soluções semitriviais, $(u, 0)$ e $(0, v)$, com $u \geq 0$ e $u \neq 0$ (respectivamente, $v \geq 0$ e $v \neq 0$); e o chamado *estado de coexistência* de solução, isto é, (u, v) com $u, v \geq 0$ e ambas não nulas.

Observação 4.1 *Se estivermos interessados em soluções não negativas de (4.1) com regularidade $\mathcal{C}^{2,\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, é suficiente assumir, em adicional às hipóteses (H_{fg}) , (H_{FG}) e (H_{ab}) , que as funções*

$$a(x), b(x), f(x, w), g(x, w), F(x, u, v), G(x, u, v)$$

são de classe $\mathcal{C}^\gamma$ em x , para todos $u, v, w \in [0, \infty)$.

Com respeito as soluções semitriviais (não negativas) $(u, 0)$ e $(0, v)$, estas são soluções positivas de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(u, 0)\nabla u) = \lambda a(x)u + f(x, u)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(R(0, v)\nabla v) = \mu b(x)v + g(x, v)v & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

respectivamente. Ressaltamos ainda que, por regularidade elíptica, tais soluções são de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Vamos definir o conceito de solução não degenerada de (4.6).

Definição 4.2 *Seja $(\lambda, \theta_\lambda)$ uma solução positiva de (4.6). Dizemos que $(\lambda, \theta_\lambda)$ é uma solução não degenerada de (4.6) se zero é a única solução forte da equação linearizada de (4.6) em θ_λ , que é dada por*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P_u(\theta_\lambda, 0)u\nabla\theta_\lambda + P(\theta_\lambda, 0)\nabla u) = \lambda a(x)u + [\theta_\lambda f_u(x, \theta_\lambda) + f(x, \theta_\lambda)]u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega. \end{cases}$$

De maneira análoga definimos solução não degenerada de (4.7).

Por fim, faremos um comentário sobre um problema de autovalor que aparecerá ao enunciar nosso teorema principal. Sejam $B, C \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $M_1, M_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, M_0 constante e $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \mathring{P}$ tais que $M_2 \geq M_0 > 0$, $C > 0$. Pelo Teorema 1.7, existe o principal autovalor de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M_1(v)u\nabla v + M_2(v)\nabla u) + B(x)u = \lambda C(x)u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

que é denotado por

$$\lambda_0 = \sigma_1[-\operatorname{div}(M_1(v)\nabla v + M_2(v)\nabla) + B(x); C(x)],$$

conforme notação introduzida no Capítulo 1. Agora, seja φ a autofunção positiva de (4.8) com $\|\varphi\|_0 = 1$. Usando a mudança de variável

$$z = \varphi e^{h(v)} \Leftrightarrow z e^{-h(v)} = \varphi, \quad h(v) := \int_0^v \frac{M_1(s)}{M_2(s)} ds$$

em (4.8) com $(\lambda, u) = (\lambda_0, \varphi)$ obtemos

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M_2(v)e^{-h(v)}\nabla z) + B(x)ze^{-h(v)} = \lambda_0 C(x)ze^{-h(v)} & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $z = \varphi e^{-h(v)} > 0$, segue que

$$\lambda_0 = \sigma_1[-\operatorname{div}(M_2(v)e^{-h(v)}\nabla) + B(x)e^{-h(v)}; C(x)e^{-h(v)}].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sigma_1[-\operatorname{div}(M_1(v)\nabla v + M_2(v)\nabla) + B(x); C(x)] = \\ \sigma_1[-\operatorname{div}(M_2(v)e^{-h(v)}\nabla) + B(x)e^{-h(v)}; C(x)e^{-h(v)}]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Finalmente, para enunciar o principal resultado deste capítulo, definimos as funções

$$h_1, h_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

dadas por

$$h_1(z) := \int_0^z \frac{Q_v(s, 0)}{R(s, 0)} ds \quad (4.10)$$

e

$$h_2(z) := \int_0^z \frac{S_u(0, s)}{P(0, s)} ds. \quad (4.11)$$

Com isso, temos o

Teorema 4.3 *Suponha que as hipóteses (H_{PQRS}) , (H_{ab}) , (H_{fg}) e (H_{FG}) são satisfeitas.*

Seja $(\lambda, \theta_\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathring{P}$ uma solução não degenerada de (4.6) e considere

$$\begin{aligned} \mu_\lambda &:= \sigma_1[-\operatorname{div}(Q_v(\theta_\lambda, 0)\nabla\theta_\lambda + R(\theta_\lambda, 0)\nabla) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda; b] \\ &= \sigma_1[-\operatorname{div}(R(\theta_\lambda, 0)e^{-h_1(\theta_\lambda)}\nabla) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda e^{-h_1(\theta_\lambda)}; be^{-h_1(\theta_\lambda)}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Então do ponto $(\mu, u, v) = (\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$ emana um continuum

$$\mathfrak{C} \subset \mathbb{R} \times \mathring{P} \times \mathring{P}$$

de estado de coexistência de (4.1) tal que: ou

1. $\mathfrak{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$; ou

2. Existe uma solução positiva (μ^*, θ_{μ^*}) de (4.7) tal que

$$\begin{aligned}\lambda &= \sigma_1 [-\operatorname{div}(S_u(0, \theta_{\mu^*}) \nabla \theta_{\mu^*} + P(0, \theta_{\mu^*}) \nabla) - F(x, 0, \theta_{\mu^*}) \theta_{\mu^*}; a] \\ &= \sigma_1 [-\operatorname{div}(P(0, \theta_{\mu^*}) e^{-h_2(\theta_{\mu^*})} \nabla) - F(x, \theta_{\mu^*}, 0) \theta_{\mu^*} e^{-h_2(\theta_{\mu^*})}; a e^{-h_2(\theta_{\mu^*})}]\end{aligned}$$

e $(\mu^*, 0, \theta_{\mu^*}) \in \overline{\mathfrak{C}}$; ou

3. Existe uma outra solução positiva de (4.6), (λ, ψ_λ) , com $\psi_\lambda \neq \theta_\lambda$ tal que

$$\begin{aligned}(\sigma_1 [-\operatorname{div}(Q_v(\psi_\lambda, 0) \nabla \psi_\lambda + R(\psi_\lambda, 0) \nabla) - G(x, \psi_\lambda, 0) \psi_\lambda; b], \psi_\lambda, 0) = \\ (\sigma_1 [-\operatorname{div}(R(\psi_\lambda, 0) e^{-h_1(\psi_\lambda)} \nabla) - G(x, \psi_\lambda, 0) \psi_\lambda e^{-h_1(\psi_\lambda)}; b e^{-h_1(\psi_\lambda)}], \psi_\lambda, 0) \in \overline{\mathfrak{C}};\end{aligned}$$

ou

4. $\lambda = \sigma_1 [-\operatorname{div}(P(0, 0) \nabla); a]$ e $(\sigma_1 [-\operatorname{div}(R(0, 0) \nabla); b], 0, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}$.

Da mesma forma podemos fixar μ e considerar λ como parâmetro de bifurcação. Assim, temos

Teorema 4.4 *Suponha que as hipóteses (H_{PQRS}) , (H_{ab}) , (H_{fg}) e (H_{FG}) são satisfeitas.*

Seja $(\mu, \theta_\mu) \in \mathbb{R} \times \dot{P}$ uma solução não degenerada de (4.7) e considere

$$\begin{aligned}\lambda_\mu &= \sigma_1 [-\operatorname{div}(S_u(0, \theta_\mu) \nabla \theta_\mu + P(0, \theta_\mu) \nabla) - F(x, 0, \theta_\mu) \theta_\mu; a] \\ &= \sigma_1 [-\operatorname{div}(P(0, \theta_\mu) e^{-h_2(\theta_\mu)} \nabla) - F(x, \theta_\mu, 0) \theta_\mu e^{-h_2(\theta_\mu)}; a e^{-h_2(\theta_\mu)}].\end{aligned}\quad (4.13)$$

Então do ponto $(\lambda, u, v) = (\lambda_\mu, 0, \theta_\mu)$ emana um continuum

$$\mathfrak{C} \subset \mathbb{R} \times \dot{P} \times \dot{P}$$

de estado de coexistência de (4.1) tal que: ou

1. $\mathfrak{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$; ou

2. Existe uma solução positiva $(\lambda^*, \theta_{\lambda^*})$ de (4.6) tal que

$$\begin{aligned}\mu &= \sigma_1 [-\operatorname{div}(Q_v(\theta_{\lambda^*}, 0) \nabla \theta_{\lambda^*} + R(\theta_{\lambda^*}, 0) \nabla) - G(x, \theta_{\lambda^*}, 0) \theta_{\lambda^*}; b] \\ &= \sigma_1 [-\operatorname{div}(R(\theta_{\lambda^*}, 0) e^{-h_1(\theta_{\lambda^*})} \nabla) - G(x, \theta_{\lambda^*}, 0) \theta_{\lambda^*} e^{-h_1(\theta_{\lambda^*})}; b e^{-h_1(\theta_{\lambda^*})}]\end{aligned}$$

e $(\lambda^*, \theta_{\lambda^*}, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}$; ou

3. Existe uma outra solução positiva de (4.7), (μ, ψ_μ) , com $\psi_\mu \neq \theta_\mu$ tal que

$$\begin{aligned} & (\sigma_1[-\operatorname{div}(S_u(0, \psi_\mu)\nabla\psi_\mu + P(0, \psi_\mu)\nabla) - F(x, 0, \psi_\mu)\psi_\mu; a], 0, \psi_\mu) = \\ & (\sigma_1[-\operatorname{div}(P(0, \psi_\mu)e^{-h_2(\psi_\mu)}\nabla) - F(x, \psi_\mu, 0)\psi_\mu e^{-h_2(\psi_\mu)}; ae^{-h_2(\psi_\mu)}], 0, \psi_\mu) \in \overline{\mathfrak{C}}; \end{aligned}$$

ou

4. $\mu = \sigma_1[-\operatorname{div}(R(0, 0)\nabla); b]$ e $(\sigma_1[-\operatorname{div}(P(0, 0)\nabla); a], 0, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}$.

Observação 4.5 Note que o autovalor μ_λ que aparece nos Teoremas 4.3 e 4.4 pode ser visto como

$$\mu_\lambda = \sigma_1[-\operatorname{div}(Q_v(\theta_\lambda, 0)\nabla\theta_\lambda + R(\theta_\lambda, 0)\nabla) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda; b] \quad (4.14)$$

ou

$$\mu_\lambda = \sigma_1[-\operatorname{div}(R(\theta_\lambda, 0)e^{-h_1(\theta_\lambda)}\nabla) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda e^{-h_1(\theta_\lambda)}; be^{-h_1(\theta_\lambda)}], \quad (4.15)$$

onde $h_1(\theta_\lambda) = \int_0^{\theta_\lambda} Q_v(s, 0)/R(s, 0)ds$. Graças à hipótese (4.2) em (H_{PQRS}) , (4.14) aparece naturalmente quando linearizamos a segunda equação de (4.1) em $(\theta_\lambda, 0)$ e será utilizado ao longo da demonstração do Teorema 4.3. Já a forma (4.15) é mais conveniente para as aplicações pois, devido as propriedades de monotonia deste autovalor (veja Teorema 1.8), é de mais fácil manipulação. A mesma observação é válida para o autovalor λ_μ .

Observação 4.6 Similarmente ao que ocorre no Teorema 7.2.2 (veja Observação 7.2.3 em [66]), a alternativa 3 do Teorema 4.3 (resp. Teorema 4.4) não pode ocorrer se o problema (4.6) (resp. (4.7)) possui uma única solução positiva e a alternativa 4 não ocorre quando $\lambda \neq \sigma_1[-\operatorname{div}(P(0, 0)\nabla); a]$ (resp. $\mu \neq \sigma_1[-\operatorname{div}(R(0, 0)\nabla); b]$). Esta é uma situação comum nas aplicações, como veremos na Seção 4.6 e no Capítulo 5.

Uma vez que a demonstração do Teorema 4.4 é análoga, provaremos apenas o Teorema 4.3.

4.2 Construção do operador

O objetivo desta seção é reescrever o sistema (4.1) como uma equação do tipo (1.16), isto é,

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0, \quad (4.16)$$

para um operador $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ e um espaço de Banach U adequados. Para isso, argumentamos como segue.

Observação 4.7 *Como veremos em seguida, não podemos definir $\mathfrak{F}$ sobre os espaços e_k , como na foi feito para o Teorema 1.28, devido a presença de termos envolvendo o gradiente das funções u e v . Por isso o espaço escolhido será $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, que também possui cone com interior não vazio, permitindo a aplicação do Teorema 1.37.*

Primeiramente, tendo em vista (4.4), podemos prolongar as funções

$$P, Q, R, S : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

aos números negativos de modo que $P, Q, R, S \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e

$$|P(u, v)Q(u, v) - R(u, v)S(u, v)| \geq \widehat{\delta}_0 > 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Assim, ao longo do restante deste capítulo, $P, Q, R, S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathcal{C}^2$ que satisfazem (H_{PQRS}) e (4.17).

Suponha agora que $(u, v) \in \mathcal{C}_0^{1,1-}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,1-}(\overline{\Omega})$ é uma solução não negativa de (4.1). Note que (4.1) é equivalente a

$$\begin{cases} -P_u(u, v)|\nabla u|^2 - S_v(u, v)|\nabla v|^2 - (P_v(u, v) + S_u(u, v))\nabla u \nabla v \\ -P(u, v)\Delta u - S(u, v)\Delta v = \lambda a(x)u + f(x, u)u + F(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ -Q_u(u, v)|\nabla u|^2 - R_v(u, v)|\nabla v|^2 - (Q_v(u, v) + R_u(u, v))\nabla u \nabla v \\ -Q(u, v)\Delta u - R(u, v)\Delta v = \mu b(x)v + g(x, v)v + G(x, u, v)uv & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.18)$$

Assim, denotando por simplicidade

$$P = P(u, v), \quad Q = Q(u, v), \quad R = R(u, v), \quad S = S(u, v)$$

e o mesmo para suas derivadas, podemos reescrever (4.18) como

$$\begin{cases} -P\Delta u - S\Delta v = M & \text{em } \Omega, \\ -Q\Delta u - R\Delta v = N & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$M := M(u, v) = P_u|\nabla u|^2 + S_v|\nabla v|^2 + (P_v + S_u)\nabla u \nabla v + \lambda a(x)u + f(x, u)u + F(x, u, v)uv$$

e

$$N := N(\mu, u, v) = Q_u |\nabla u|^2 + R_v |\nabla v|^2 + (Q_v + R_u) \nabla u \nabla v + \mu b(x)v + g(x, v)v + G(x, u, v)uv.$$

Ou em forma matricial

$$-\begin{bmatrix} P & S \\ Q & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}.$$

Pela hipótese (4.17), a matriz

$$\begin{bmatrix} P(s, t) & S(s, t) \\ Q(s, t) & R(s, t) \end{bmatrix}$$

é inversível para todos $s, t \in \mathbb{R}$ e portanto

$$-\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \frac{1}{PR - QS} \begin{bmatrix} R & -S \\ -Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{RM - SN}{PR - QS} \\ \frac{PN - QM}{PR - QS} \end{bmatrix}.$$

Seja $(\lambda, \theta_\lambda)$ uma solução de (4.6). Adicionando a ambos os lados da segunda equação acima o termo

$$Z(v) := \frac{-(Q_v(\theta_\lambda, 0) + R_u(\theta_\lambda, 0)) \nabla \theta_\lambda \nabla v + kv}{R(\theta_\lambda, 0)}$$

onde $k > 0$ é uma constante a ser escolhida posteriormente, segue que

$$\begin{bmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v + Z(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{RM - SN}{PR - QS} \\ \frac{PN - QM}{PR - QS} + Z(v) \end{bmatrix}.$$

Observação 4.8 A adição do termo Z é necessário para que o operador T_μ definido na seção seguinte (veja (4.21)) seja fortemente positivo (veja também Lema 4.10).

Finalmente

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right) \\ (-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} + Z(v) \right) \end{bmatrix}.$$

Então, fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o operador

$$\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

dado por

$$\mathfrak{F}(\mu, u, v) = \begin{bmatrix} u - (-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right) (\mu, u, v) \\ v - (-\Delta + Z)^{-1} \left(\left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right) (\mu, u, v) + Z(v) \right) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Note que $\mathfrak{F}$ está bem definido, pois dado $(\mu, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, temos

$$P(u, v), Q(u, v), R(u, v), S(u, v), M(u, v), N(\mu, u, v), Z(v) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Desde que os operadores

$$(-\Delta)^{-1}, (-\Delta + Z)^{-1} : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

estão bem definidos, segue que $\mathfrak{F}$ também está bem definido. Além disso, $(u, v) \in \mathcal{C}_0^{1,1-}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,1-}(\overline{\Omega})$ é uma solução não negativa de (4.1) se, e somente se,

$$\mathfrak{F}(\mu, u, v) = 0$$

com $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. E ainda,

$$\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

consequentemente $(\mu, \theta_\lambda, 0)$ será escolhida como a curva conhecida de solução da qual esperamos que bifurque um continuum de estado de coexistência de (4.1).

Por fim, denotaremos

$$\mathfrak{L}(\mu) := D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0).$$

Desse modo, reescrevemos o sistema (4.1) como uma equação não linear abstrata do tipo (4.16). Nas próximas seções nos dedicaremos a verificar as condições dos Teoremas 1.23 e 1.26 para obter a existência de um continuum de estado de coexistência de solução de (4.1).

4.3 Resultados preliminares

Nesta seção vamos analisar alguns operadores e suas propriedades que serão úteis mais adiante. Por exemplo, aqui ficará claro a importância da escolha da constante $k > 0$.

Recordemos que, conforme a Definição 4.2, uma solução $(\lambda, \theta_\lambda)$ é não degenerada de (4.6) se zero é a única solução forte da equação linearizada de (4.6) em θ_λ , que é dada por

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P_u(\theta_\lambda, 0)u \nabla \theta_\lambda + P(\theta_\lambda, 0) \nabla u) = \lambda a(x)u + [\theta_\lambda f_u(x, \theta_\lambda) + f(x, \theta_\lambda)]u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, esta equação é equivalente a

$$\begin{aligned} T_{1,\lambda}u &:= u - (-\Delta)^{-1} [P(\theta_\lambda, 0)^{-1} \{ \operatorname{div}(P_u(\theta_\lambda, 0)u \nabla \theta_\lambda) + P_u(\theta_\lambda, 0) \nabla \theta_\lambda \nabla u \\ &\quad + \lambda a(x)u + [\theta_\lambda f_u(x, \theta_\lambda) + f(x, \theta_\lambda)]u \}] = 0, \quad (u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Em outras palavras, definindo o operador

$$T_{1,\lambda} : \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

dado em (4.20), então $(\lambda, \theta_\lambda)$ é uma solução não degenerada de (4.6) se, e somente se,

$$N[T_{1,\lambda}] = \{0\}.$$

Desde que $T_{1,\lambda}$ é um operador linear que é uma perturbação compacta da identidade, segue que isto é equivalente a dizer que $T_{1,\lambda}$ é inversível. Para facilitar a referência nas próximas seções, vamos formalizar essa discussão no seguinte lema:

Lema 4.9 *Uma solução $(\lambda, \theta_\lambda)$ de (4.6) é não degenerada se, e somente, o operador $T_{1,\lambda}$ é inversível.*

O próximo operador a ser estudado é o

$$T_\mu : \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \quad \mu \in \mathbb{R}$$

dado por

$$T_\mu = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\frac{Q_{vu}(\theta_\lambda, 0)|\nabla\theta_\lambda|^2 + \mu b(x) + G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda + Q_v(\theta_\lambda, 0)\Delta\theta_\lambda + k}{R(\theta_\lambda, 0)} \right], \quad (4.21)$$

Este operador está bem definido e é compacto pois, graças as condições de regularidade dadas nas hipóteses (H_{PQRS}) e (H_{FG}) ,

$$\frac{Q_{vu}(\theta_\lambda, 0)|\nabla\theta_\lambda|^2 + \mu b(x) + G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda + Q_v(\theta_\lambda, 0)\Delta\theta_\lambda + k}{R(\theta_\lambda, 0)} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

e $(-\Delta + Z)^{-1} : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ está bem definido e é compacto. T_μ aparecerá ao calcularmos a derivada com respeito a v de $\mathfrak{F}$ em $(\mu, \theta_\lambda, 0)$, por isso será útil conhecer algumas informações sobre ele. As propriedades que necessitamos são resumidas no lema a seguir:

Lema 4.10 *Para $k > 0$ suficientemente grande, o operador T_{μ_λ} definido por (4.21) com*

$$\mu = \mu_\lambda = \sigma_1 [-\operatorname{div}(Q_v(\theta_\lambda, 0)\nabla\theta_\lambda + R(\theta_\lambda, 0)\nabla) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda; b],$$

é fortemente positivo e satisfaz

$$r(T_{\mu_\lambda}) = 1,$$

onde $r(T_{\mu_\lambda})$ denota o raio espectral de T_{μ_λ} .

Demonstração: Note que podemos escolher $k > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{Q_{vu}(\theta_\lambda, 0)|\nabla\theta_\lambda|^2 + \mu_\lambda b(x) + G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda + Q_v(\theta_\lambda, 0)\Delta\theta_\lambda + k}{R(\theta_\lambda, 0)} \geq 0.$$

Com isso, para $v > 0$, $y = T_{\mu_\lambda}v$ satisfaz

$$\begin{aligned} -\Delta y + Z(y) &= \frac{Q_{vu}(\theta_\lambda, 0)|\nabla\theta_\lambda|^2v + \mu_\lambda b(x)v + G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda v + Q_v(\theta_\lambda, 0)v\Delta\theta_\lambda + kv}{R(\theta_\lambda, 0)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Desde que constantes positivas são supersoluções estritas de $-\Delta + Z$, pelo Teorema 1.5, este operador satisfaz o Princípio do Máximo Forte, implicando

$$y \in \mathring{P},$$

mostrando que T_{μ_λ} é fortemente positivo.

Para mostrar que $r(T_{\mu_\lambda}) = 1$, argumentamos como segue. Seja φ_2 a autofunção positiva e normalizada associada ao autovalor

$$\mu_\lambda = \sigma_1 [-\operatorname{div}(Q_v(\theta_\lambda, 0)\nabla\theta_\lambda + R(\theta_\lambda, 0)\nabla) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda; b].$$

Afirmamos que

$$T_{\mu_\lambda}\varphi_2 = \varphi_2.$$

Com efeito, essa igualdade é equivalente a

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi_2 + Z(\varphi_2) &= \\ &= \frac{Q_{vu}(\theta_\lambda, 0)|\nabla\theta_\lambda|^2\varphi_2 + \mu_\lambda b(x)\varphi_2 + G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda\varphi_2 + Q_v(\theta_\lambda, 0)\varphi_2\Delta\theta_\lambda + k\varphi_2}{R(\theta_\lambda, 0)}. \end{aligned}$$

Substituindo $Z(\varphi_2)$, por um calculo direto chegamos a

$$-\operatorname{div}(Q_v(\theta_\lambda, 0)\varphi_2\nabla\theta_\lambda + R(\theta_\lambda, 0)\nabla\varphi_2) - G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda\varphi_2 = \mu_\lambda b(x)\varphi_2 \quad (4.22)$$

que de fato ocorre por definição de φ_2 . Assim 1 é um autovalor de T_{μ_λ} com autofunção associada com sinal definido. Desde que T_{μ_λ} é fortemente positivo e $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ possui cone com interior não vazio, pelo Teorema 1.37, necessariamente $r(T_{\mu_\lambda}) = 1$. $\square$

Para finalizar esta seção, temos o seguinte corolário

Corolário 4.11 *Dado $y \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ com $y \geq 0$. Então a equação*

$$v - T_{\mu_\lambda}v = y$$

não admite solução $v \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$

Demonstração: Desde que T_{μ_λ} é fortemente positivo, $r(T_{\mu_\lambda}) = 1$ e $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ possui cone com interior não vazio, o resultado segue do Teorema 1.37. $\square$

Destacamos que nas próximas seções $(\lambda, \theta_\lambda)$ denotará uma solução não degenerada de (4.6) com $\theta_\lambda \in \mathring{P}$ e adotaremos $k > 0$ suficientemente grande fixado tal que T_{μ_λ} seja fortemente positivo.

4.4 Estudo do operador $\mathfrak{L}(\mu) = D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0)$

Conforme discutido na Seção 1.2.2, para aplicar os Teoremas 1.23 e 1.26, devemos verificar que $\mathfrak{F}$ definido em (4.19) satisfaz as condições (F_1) – (F_3) , além de buscar por autovalores 1-transversais de $\mathfrak{L}(\mu) = D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0)$. Então nosso objetivo nesta seção é estudar o operador $\mathfrak{L}(\mu)$ e verificar tais condições.

Primeiro vamos calcular explicitamente $\mathfrak{L}(\mu) = D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0)$. Da definição de $\mathfrak{F}$ (veja (4.19)) temos que

$$\mathfrak{L}(\mu) = D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0) = \begin{bmatrix} I - (-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_u & -(-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_v \\ -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right)_u & I - (-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} + Z \right)_v \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

onde cada termo é calculado em $(\theta_\lambda, 0)$ e já usamos que Z não depende de u e portanto

$$Z_u \equiv 0.$$

Agora vamos calcular cada uma das derivadas que aparecem no operador acima. No que segue, as funções P, Q, R, S, M e N bem como suas derivadas são calculadas em $(\theta_\lambda, 0)$ e omitiremos o ponto por simplicidade. Assim,

$$\begin{aligned} N &= N(\mu, \theta_\lambda, 0) = Q_u |\nabla \theta_\lambda|^2, \\ N_u \xi &= N_u(\mu, \theta_\lambda, 0) \xi = Q_{uu} \xi |\nabla \theta_\lambda|^2 + 2Q_u \nabla \theta_\lambda \nabla \xi, \\ N_v \eta &= N_v(\mu, \theta_\lambda, 0) \eta = Q_{vu} |\nabla \theta_\lambda|^2 \eta + (Q_v + R_u) \nabla \theta_\lambda \nabla \eta + \mu b(x) \eta + G(x, \theta_\lambda, 0) \theta_\lambda \eta, \\ M &= M(\theta_\lambda, 0) = P_u |\nabla \theta_\lambda|^2 + \lambda a(x) \theta_\lambda + f(x, \theta_\lambda) \theta_\lambda = -P \Delta \theta_\lambda, \\ M_u \xi &= M_u(\theta_\lambda, 0) \xi = P_{uu} |\nabla \theta_\lambda|^2 \xi + 2P_u \nabla \theta_\lambda \nabla \xi + \lambda a(x) \xi + f(x, \theta_\lambda) \xi + f_u(x, \theta_\lambda) \theta_\lambda \xi, \\ M_v \eta &= M_v(\theta_\lambda, 0) \eta = P_{vu} |\nabla \theta_\lambda|^2 \eta + (P_v + S_u) \nabla \theta_\lambda \nabla \eta + F(x, \theta_\lambda, 0) \theta_\lambda \eta. \end{aligned}$$

Note que a hipótese

$$Q(u, 0) = 0 \quad \forall u \geq 0 \quad (4.24)$$

implica que

$$Q_u(\theta_\lambda, 0) = Q_{uu}(\theta_\lambda, 0) = N(\mu, \theta_\lambda, 0) = N_u(\mu, \theta_\lambda, 0) = 0. \quad (4.25)$$

Desse modo,

$$\left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_u (\mu, \theta_\lambda, 0) = \left(\frac{M_u P - M P_u}{P^2} \right) (\theta_\lambda, 0).$$

Substituindo os termos $M_u(\theta_\lambda, 0)$, $P(\theta_\lambda, 0)$ e $P_u(\theta_\lambda, 0)$, por um calculo direto chegamos a

$$I - (-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_u (\theta_\lambda, 0) = T_{1,\lambda}, \quad (4.26)$$

onde $T_{1,\lambda}$ é o operador definido em (4.20). Similarmente, (4.24) e (4.25) implica

$$\left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right)_u (\mu, \theta_\lambda, 0) = 0. \quad (4.27)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right)_v &= \\ &= \frac{(P_v N + P N_v - Q_v M - Q N_v)(PR - QS) - (PN - QM)(PR - QS)_v}{(PR - QS)^2}. \end{aligned}$$

Calculando a derivada acima no ponto $(\mu, \theta_\lambda, 0)$ e usando

$$Q(\theta_\lambda, 0) = N(\mu, \theta_\lambda, 0) = 0,$$

deduzimos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right)_v (\mu, \theta_\lambda, 0) &= \frac{P N_v - Q_v M}{P R} (\mu, \theta_\lambda, 0) \\ &= \frac{N_v + Q_v \Delta \theta_\lambda}{R} (\mu, \theta_\lambda, 0). \end{aligned}$$

Usando que Z é linear em v e portanto $Z_v = Z$, obtemos

$$(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} + Z \right)_v (\mu, \theta_\lambda, 0) = T_\mu \quad (4.28)$$

onde T_μ é o operador definido em (4.21).

Finalmente, vamos denotar

$$\hat{T} := (-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_v (\mu, \theta_\lambda, 0). \quad (4.29)$$

Ressaltamos que não será necessário calcular este operador explicitamente.

A partir de (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29), concluimos que

$$\mathfrak{L}(\mu) = \begin{bmatrix} T_{1,\lambda} & -\widehat{T} \\ 0 & I - T_{\mu_\lambda} \end{bmatrix}.$$

Com isso, podemos verificar que a aplicação $\mathfrak{F}$ satisfaz as hipóteses (F_1) – (F_3) da Seção 1.2.2. De fato:

Lema 4.12 *A aplicação não linear $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ definida em (4.19) satisfaz as premissas (F_1) , (F_2) e (F_3) da Seção 1.2.2.*

Demonstração: Devemos verificar que

(F_1) Para cada $\mu \in \mathbb{R}$, a aplicação $\mathfrak{F}(\mu, \cdot, \cdot)$ é de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}))$ e

$$D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, u, v) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}))$$

é um operador de Fredholm de índice zero, para todo $(u, v) \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$.

(F_2) $D_{(u,v)}\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ é uma aplicação contínua

(F_3) Existe $\Theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}))$ tal que

$$\mathfrak{F}(\mu, \Theta(\mu)) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

E de fato, a regularidade de $\mathfrak{F}(\mu, \cdot, \cdot)$ segue da definição de $\mathfrak{F}$ em (4.19). Além disso, da expressão de $D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, u, v)$, ou seja,

$$\begin{aligned} D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\mu, u, v) &= \\ &\begin{bmatrix} I - (-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_u & -(-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_v \\ -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right)_u & I - (-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} + Z \right)_v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} -(-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_u & -(-\Delta)^{-1} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right)_v \\ -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right)_u & -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} + Z \right)_v \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde cada termo é calculado em (μ, u, v) , temos que esta é uma aplicação linear contínua que é uma perturbação compacta da identidade em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$. E ainda, a curva constante

$$\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$$

dada por

$$\Theta(\mu) \equiv (\theta_\lambda, 0)$$

satisfaz $\mathfrak{F}(\mu, \theta_\lambda, 0) = 0$. □

Agora devemos buscar por autovalores 1-transversais de $\mathfrak{L}(\mu)$. Como o candidato natural é o autovalor μ_λ , vamos determinar o núcleo e a imagem de $\mathfrak{L}(\mu_\lambda)$. Isto será feito na proposição a seguir:

Proposição 4.13 (a)

$$N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \text{span}\langle (T_{1,\lambda}^{-1}(\widehat{T}\varphi_2), \varphi_2) \rangle$$

onde φ_2 é a autofunção positiva normalizada associada ao autovalor μ_λ .

(b)

$$R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times R[I - T_{\mu_\lambda}]$$

onde T_{μ_λ} é o operador definido em (4.21).

Demonstração: Para provar (a), observe que $(\xi, \eta) \in N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]$ é equivalente a

$$\mathfrak{L}(\mu_\lambda)(\xi, \eta)^t = (0, 0)^t$$

$$\begin{bmatrix} T_{1,\lambda} & -\widehat{T} \\ 0 & I - T_{\mu_\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

A segunda linha da equação acima fornece que

$$T_{\mu_\lambda}\eta = \eta$$

e já vimos no Lema 4.10 que $r(T_{\mu_\lambda}) = 1$, portanto a equação acima é um problema de autovalor cuja solução é da forma $c\varphi_2$, com $c \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$\eta \in \text{span}\langle \varphi_2 \rangle.$$

Por outro lado, a primeira linha de (4.30) com $\eta = \varphi_2$ fornece que

$$T_{1,\lambda}\xi = \widehat{T}\varphi_2.$$

Desde que $T_{1,\lambda}$ é inversível (de acordo com o Lema 4.9), obtemos

$$\xi = T_{1,\lambda}^{-1}(\widehat{T}\varphi_2).$$

Portanto

$$N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \text{span}\langle (T_{1,\lambda}^{-1}(\widehat{T}\varphi_2), \varphi_2) \rangle.$$

Agora vamos provar (b). Observe que $(\xi, \eta) \in R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]$ é equivalente a dizer que existe $(u, v) \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mu_\lambda)(u, v)^t &= (\xi, \eta)^t \\ \begin{bmatrix} T_{1,\lambda} & -\widehat{T} \\ 0 & I - T_{\mu_\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

A segunda linha da equação acima fornece que

$$\eta \in R[I - T_{\mu_\lambda}]$$

enquanto a primeira linha de (4.31) nos diz que

$$T_{1,\lambda}u = \widehat{T}v + \xi \quad (4.32)$$

Observe que $\widehat{T}$ é um operador que age de $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, assim, para todo $v, \xi \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, temos que

$$\widehat{T}v + \xi \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}).$$

Como $T_{1,\lambda} : \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ é uma bijeção, segue que sempre existe $u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo (4.32). De onde concluímos

$$R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times R[I - T_{\mu_\lambda}]$$

□

Para verificar a condição de transversalidade, resta determinar

$$\mathfrak{L}_1 := D_\mu \mathfrak{L}(\mu_\lambda).$$

Proposição 4.14

$$\mathfrak{L}_1 := D_\mu \mathfrak{L}(\mu_\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta)^{-1} \left(\frac{S(\theta_\lambda, 0)b(x)}{(PR)(\theta_\lambda, 0)} \right) \\ 0 & (-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \end{bmatrix}$$

Demonstração: Tendo em vista a expressão de $\mathfrak{L}(\mu)$ (veja (4.23)), note que dentre todas as funções que aparecem em (4.23) (isto é, P, Q, R, S, M e N e suas devidas) apenas N_v depende de μ . Assim

$$N_{\mu v} \equiv b(x)$$

e as demais derivadas valem zero. Então, derivada de $\mathfrak{L}(\mu)$ em μ_λ é dada por

$$\mathfrak{L}_1 = D_\mu \mathfrak{L}(\mu_\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta)^{-1} \left(\frac{S(\theta_\lambda, 0)b(x)}{(PR)(\theta_\lambda, 0)} \right) \\ 0 & -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \end{bmatrix}.$$

□

Para finalizar esta seção vamos mostrar que μ_λ é um autovalor 1-transversal da família $\mathfrak{L}(\mu)$ e uma caracterização do complemento de $N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]$ em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$.

Proposição 4.15 a)

$$\mathfrak{L}_1(N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]) \oplus R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}). \quad (4.33)$$

b)

$$N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] \oplus R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}).$$

Demonstração: Para provar o parágrafo a), recordemos que

$$N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \text{span}\langle (T_{1,\lambda}^{-1}(\widehat{T}\varphi_2), \varphi_2) \rangle$$

e

$$\mathfrak{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta)^{-1} \left(\frac{S(\theta_\lambda, 0)b(x)}{(PR)(\theta_\lambda, 0)} \right) \\ 0 & -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \end{bmatrix}.$$

Assim, as funções de $\mathfrak{L}_1(N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)])$ são dadas por

$$\begin{bmatrix} 0 & (-\Delta)^{-1} \left(\frac{S(\theta_\lambda, 0)b(x)}{(PR)(\theta_\lambda, 0)} \right) \\ 0 & -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,\lambda}^{-1}\widehat{T}(c\varphi_2) \\ c\varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\Delta)^{-1} \left(\frac{cS(\theta_\lambda, 0)b(x)\varphi_2}{(PR)(\theta_\lambda, 0)} \right) \\ -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{cb(x)\varphi_2}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \end{bmatrix},$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Ou seja,

$$\mathfrak{L}_1(N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]) = \text{span} \left\langle \begin{bmatrix} (-\Delta)^{-1} \left(\frac{S(\theta_\lambda, 0)b(x)\varphi_2}{(PR)(\theta_\lambda, 0)} \right) \\ -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)\varphi_2}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Desde que $\mathfrak{L}(\mu)$ é um operador de Fredholm de índice zero (pois é uma perturbação compacta da identidade), temos que

$$\text{codim} R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \dim N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = 1$$

e, portanto, o complemento de $R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]$ em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ tem dimensão 1. Então, para verificar (4.33) é suficiente mostrar que

$$\begin{bmatrix} (-\Delta)^{-1} \left(\frac{S(\theta_\lambda, 0)\varphi_2}{(PR)(\theta_\lambda, 0)} \right) \\ -(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)\varphi_2}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \end{bmatrix} \notin R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times R[I - T_{\mu_\lambda}]. \quad (4.34)$$

Para provar (4.34) argumentamos por contradição. Se (4.34) não ocorre, então

$$(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)\varphi_2}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \in R[I - T_{\mu_\lambda}]$$

e, consequentemente, existiria $v \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$v - T_{\mu_\lambda}v = (-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)\varphi_2}{R(\theta_\lambda, 0)} \right). \quad (4.35)$$

Por outro lado, desde que $(-\Delta + Z)^{-1}$ satisfaz o Princípio do Máximo e $b(x)\varphi_2/R(\theta_\lambda, 0) > 0$, então

$$(-\Delta + Z)^{-1} \left(\frac{b(x)\varphi_2}{R(\theta_\lambda, 0)} \right) \geq 0.$$

Pelo Corolário 4.11, a equação (4.34) não admite solução $v \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, o que é uma contradição.

A prova do item b) é similar. De fato, como argumentado anteriormente, $\mathfrak{L}(\mu)$ é uma família de operadores de Fredholm de índice zero (pois se trata de uma perturbação compacta da identidade). Logo

$$\text{codim} R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \dim N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = 1.$$

Portanto, o complemento de $R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]$ em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ tem dimensão 1. Então, para mostrar que

$$N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] \oplus R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}),$$

é suficiente verificar que

$$c\varphi_2 \notin R[I - T_{\mu_\lambda}].$$

E com efeito, caso contrário teríamos

$$c\varphi_2 \in R[I - T_{\mu_\lambda}]$$

e portanto existiria $v \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$v - T_{\mu_\lambda} v = c\varphi_2 \geq 0,$$

o que é uma contradição com o Corolário 4.11. Isso completa a demonstração. $\square$

Agora estamos em condições de aplicar os Teoremas 1.23 e 1.26 e consequentemente provar o Teorema 4.3.

4.5 Demonstração do Teorema Principal

Nesta seção apresentaremos a prova do Teorema 4.3. A idéia geral é aplicar os Teoremas 1.23 e 1.26 para garantir a existência de um continuum bifurcando de $\mu = \mu_\lambda$ e argumentar para mostrar que em realidade este continuum é constituído de estados de coexistência de soluções de (4.1) e que satisfaz uma das alternativas do Teorema 4.3.

Demonstração do Teorema 4.3: Como já vimos, $\mathfrak{L}(\mu)$ é uma perturbação compacta da identidade, para cada $\mu \in \mathbb{R}$. Além disso, $\mathfrak{L}(\mu)$ é constituída de polinômios (de grau 0 ou 1) em μ , logo é real analítica em $\mu \in \mathbb{R}$. E ainda, pela Proposição 4.15 a), temos que μ_λ é um autovalor 1-transversal de $\mathfrak{L}(\mu)$ e, pela Proposição 4.13,

$$N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \text{span}\langle (T_{1,\lambda}^{-1}(\hat{T}\varphi_2), \varphi_2) \rangle,$$

em particular, $\dim N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = 1$. Então, pelos Teoremas 1.23 e 1.26, existe um subcontinuum $\mathfrak{C}^+$ de soluções de soluções não triviais de (4.1) satisfazendo uma das seguintes alternativas:

- A1. $\mathfrak{C}^+$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$; ou
- A2. Existe outro autovalor de $\mathfrak{L}(\mu)$, digamos $\hat{\mu} \neq \mu_\lambda$, tal que $(\hat{\mu}, \theta_\lambda, 0) \in \mathfrak{C}^+$; ou
- A3. Existe $\mu \in \mathbb{R}$ e $y \in Y \setminus \{0\}$ tais que $(\mu, y) \in \mathfrak{C}^+$, onde Y denota o complemento de $N[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)]$ em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$.

Além disso, fixo $\eta \in (0, 1)$, próximo de $(\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$, as soluções de $\mathfrak{C}^+$ são da forma

$$(\mu, u) = (\mu_\lambda + o(1), s\varphi_0 + y_0), \quad s > \eta\|u\| > 0 \quad (4.36)$$

onde $y_0 \in Y$ (único) satisfazendo $y_0 = o(s)$.

Agora observe que, pela Proposição 4.15 b), podemos tomar

$$Y := R[\mathfrak{L}(\mu_\lambda)] = \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times R[I - T_{\mu_\lambda}].$$

Por outro lado, tendo em vista (4.36) e como $\theta_\lambda, \varphi_2 \in \mathring{P}$, segue que numa vizinhança do ponto $(\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$, $\mathfrak{C}^+$ é composto de estados de coexistência de solução de (4.1). Então, seja $\mathfrak{C}$ a subcomponente de $\mathfrak{C}^+$ tal que

$$\mathfrak{C} \subset \mathbb{R} \times \mathring{P} \times \mathring{P}.$$

Se $\mathfrak{C}$ é ilimitada, então a alternativa 1 do teorema é satisfeita e, portanto, a prova do teorema está completa. No que segue vamos assumir que $\mathfrak{C}$ é limitada em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$.

Suponhamos que $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^+$.

Então $\mathfrak{C}^+$ é limitada e, conseqüentemente, a alternativa A1 não pode ocorrer. Se A3 fosse verdadeira, então

$$(\mu, y) \in \mathbb{R} \times \mathring{P} \times \mathring{P}$$

para algum $y = (y_1, y_2) \in Y$. Em particular

$$y_2 \in R[I - T_{\mu_\lambda}] \cap \mathring{P}$$

mas isso implica que existe $v \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$v - T_{\mu_\lambda} v = y \geq 0,$$

o que é uma contradição com o Corolário 4.11. Portanto, necessariamente A2 deve ocorrer. Em particular, existem dois pontos de bifurcação de estado de coexistência de solução, a saber: $(\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$ e $(\widehat{\mu}, \theta_\lambda, 0)$. Em particular, existe uma sequência de estados de coexistência (μ_n, u_n, v_n) de (4.1) tal que

$$(\mu_n, u_n, v_n) \rightarrow (\widehat{\mu}, \theta_\lambda, 0) \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}).$$

Agora definimos

$$\widehat{v}_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_0}, \quad n \geq 1.$$

Como $\mathfrak{F}(\mu_n, u_n, v_n) = 0$ e tendo em vista (4.19), segue que $(\mu_n, u_n, \widehat{v}_n)$ satisfaz

$$\widehat{v}_n = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\frac{1}{\|v_n\|_0} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right) (\mu_n, u_n, v_n) + Z(\widehat{v}_n) \right]. \quad (4.37)$$

Uma vez que $\|\widehat{v}_n\|_0 = 1$ e (μ_n, u_n, v_n) é limitada em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ (pois é convergente), segue que

$$\frac{1}{\|v_n\|_0} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right) (\mu_n, u_n, v_n) + Z(\widehat{v}_n)$$

é limitado em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Da compacidade do operador $(-\Delta + Z)^{-1} : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, segue que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\widehat{v}_n \rightarrow w \quad \text{em } \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}),$$

com $\|w\|_0 = 1$ e $w > 0$. Vamos passar ao limite $n \rightarrow \infty$ em (4.37). Uma vez que $N(\mu, u, 0) = 0$ para todos $\mu \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$, $u > 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\mu_n, u_n, v_n)}{\|v_n\|_0} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\mu_n, u_n, \widehat{v}_n \|v_n\|_0)}{\widehat{v}_n \|v_n\|_0} \widehat{v}_n \\ &= N_v(\widehat{\mu}, \theta_\lambda, 0)w. \end{aligned}$$

De maneira análoga temos também

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(u_n, v_n)}{\|v_n\|_0} = Q_v(\theta_\lambda, 0)w.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{PN - QM}{\|v_n\|_0}(\mu_n, u_n, v_n) &= P(u_n, v_n) \frac{N(\mu_n, u_n, v_n)}{\|v_n\|_0} - \frac{Q(u_n, v_n)}{\|v_n\|_0} M(u_n, v_n) \longrightarrow \\ &P(\theta_\lambda, 0)N_v(\widehat{\mu}, \theta_\lambda, 0)w - Q_v(\theta_\lambda, 0)wM(\theta_\lambda, 0) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Além disso,

$$(PQ - RS)(u_n, v_n) \longrightarrow (PQ - RS)(\theta_\lambda, 0) = (PR)(\theta_\lambda, 0) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$Z(\widehat{v}_n) \longrightarrow Z(v) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Com isso, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (4.37) obtemos:

$$w = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\left(\frac{PN_v w - Q_v w M}{PR} \right) (\widehat{\mu}, \theta_\lambda, 0) + Z(w) \right].$$

Em particular, $w \in \mathcal{C}_0^{1,1-}(\overline{\Omega})$. Substituindo $M(\theta_\lambda, 0) = -P\Delta\theta_\lambda$ e $Z(w)$, a igualdade acima é equivalente a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Q_v(\theta_\lambda, 0)w \nabla \theta_\lambda + R(\theta_\lambda, 0) \nabla w) = \widehat{\mu}b(x)w + G(x, \theta_\lambda, 0)\theta_\lambda w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $w > 0$ e pela unicidade do principal autovalor, a equação acima implica que $\hat{\mu} = \mu_\lambda$, o que é uma contradição. Isso mostra que $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^+$ não pode ocorrer, o que nos leva a afirmar

$$\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}^+ \quad \text{e} \quad \mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}^+.$$

Agora vamos mostrar que $\mathfrak{C}$ satisfaz uma das alternativas 2, 3 ou 4. Desde que $\mathfrak{C}$ é um subconjunto próprio de $\mathfrak{C}^+$, então $\mathfrak{C}^+$ abandona o conjunto $\mathbb{R} \times \mathring{P} \times \mathring{P}$. Portanto, existe

$$(\mu^*, u^*, v^*) \in \mathbb{R} \times \partial(P \times P)$$

e uma sequência

$$(\mu_n, u_n, v_n) \in \mathbb{R} \times \mathring{P} \times \mathring{P}$$

tais que

$$(\mu_n, u_n, v_n) \rightarrow (\mu^*, u^*, v^*) \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}).$$

Em particular, por continuidade de $\mathfrak{F}$,

$$0 = \mathfrak{F}(\mu_n, u_n, v_n) \rightarrow \mathfrak{F}(\mu^*, u^*, v^*),$$

ou seja, (μ^*, u^*, v^*) é uma solução não negativa de (4.1). Além disso, desde que

$$(u^*, v^*) \in \partial(P \times P),$$

pelo Princípio do Máximo Forte, $u^* = 0$ ou $v^* = 0$. Vamos considerar os três casos possíveis para esta afirmação:

Se $u^* = 0$ e $v^* > 0$

Defina a sequência

$$\hat{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_0}, \quad n \geq 1.$$

Então, tendo em vista (4.19), $(\mu_n, \hat{u}_n, v_n)$ satisfaz

$$\begin{cases} \hat{u}_n = (-\Delta)^{-1} \left[\frac{1}{\|u_n\|_0} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right) (\mu_n, u_n, v_n) \right], \\ v_n = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right) (\mu_n, u_n, v_n) + Z(v_n) \right]. \end{cases} \quad (4.38)$$

Desde que $\|\hat{u}_n\|_0 = 1$ e (μ_n, u_n, v_n) é limitada em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ (pois é convergente), segue que

$$\frac{1}{\|u_n\|_0} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right) (\mu_n, u_n, v_n)$$

é limitado em $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Da compacidade do operador $(-\Delta)^{-1} : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ obtemos que, passando a uma subsequência se necessária,

$$\widehat{u}_n \rightarrow z \quad \text{em } \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}),$$

com $\|z\|_0 = 1$ e $z > 0$. Passando ao limite $n \rightarrow \infty$ em (4.38) concluímos

$$\begin{cases} z = (-\Delta)^{-1} \left[\left(\frac{RM_u z - S_u z N}{PR} \right) (\mu^*, 0, v^*) \right], \\ v^* = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\left(\frac{PN - QM}{PR} \right) (\mu^*, 0, v^*) + Z(v^*) \right]. \end{cases} \quad (4.39)$$

Assim, $z, v^* \in \mathcal{C}_0^{1,1^-}(\overline{\Omega})$. Além disso, a segunda equação de (4.39) é equivalente a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(R(0, v^*) \nabla v^*) = \mu^* b(x) v^* + g(x, v^*) v^* & \text{em } \Omega, \\ v^* = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.40)$$

Ou seja, (μ^*, v^*) é uma solução de (4.7). Usando que (μ^*, v^*) satisfaz (4.40), a primeira linha de (4.39) é equivalente a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(0, v^*) \nabla z + S_u(0, v^*) z \nabla v^*) = \lambda a(x) z + F(x, 0, v^*) z v^* & \text{em } \Omega, \\ z = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que $z > 0$, isso implica que

$$\lambda = \sigma_1[-\operatorname{div}(P(0, v^*) \nabla + S_u(0, v^*) \nabla v^*) - F(x, 0, v^*) v^*; a].$$

Neste caso a alternativa 2 é satisfeita com

$$\theta_{\mu^*} := v^*.$$

Se $u^* > 0$ e $v^* = 0$

Defina a sequência

$$\widehat{v}_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_0}, \quad n \geq 1.$$

De maneira análoga à argumentação feita anteriormente temos que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\widehat{v}_n \rightarrow w \quad \text{em } \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}),$$

com $\|w\|_0 = 1$ e $w > 0$. Por outro lado, como (μ_n, u_n, v_n) são soluções de (4.1), temos que

$$\begin{cases} u_n = (-\Delta)^{-1} \left[\left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right) (\mu_n, u_n, v_n) \right], \\ \widehat{v}_n = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\frac{1}{\|v_n\|_0} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right) (\mu_n u_n, v_n) + Z(\widehat{v}_n) \right]. \end{cases}$$

Passando ao limite $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\begin{cases} u^* = (-\Delta)^{-1} \left[\left(\frac{RM - SN}{PR} \right) (\mu^*, u^*, 0) \right], \\ w = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\left(\frac{PN_v w - Q_v w M}{PR} \right) (\mu^*, u^*, 0) + Z(w) \right]. \end{cases} \quad (4.41)$$

Assim, $u^*, w \in \mathcal{C}_0^{1,1^-}(\bar{\Omega})$. Além disso, a primeira equação de (4.41) é equivalente a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(u^*, 0)\nabla u^*) = \lambda a(x)u^* + f(x, u^*)u^* & \text{em } \Omega, \\ u^* = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.42)$$

Ou seja, (λ, u^*) é solução de (4.6). Usando que (λ, u^*) satisfaz (4.42), a segunda linha de (4.41) é equivalente a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Q_v(u^*, 0)w\nabla u^* + R(u^*, 0)\nabla w) = \mu^* b(x)w + G(x, u^*, 0)u^*w & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que $w > 0$, isso implica que

$$\mu^* = \sigma_1[-\operatorname{div}(Q_v(u^*, 0)\nabla u^* + R(u^*, 0)\nabla) - G(x, u^*, 0)u^*; b]. \quad (4.43)$$

Por outro lado, por construção temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$(\mu^*, u^*, 0) \in \mathfrak{C}^+ \setminus B_\delta(\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0).$$

Com efeito, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^+$ em $B_\delta(\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$. Em particular,

$$(\mu^*, u^*, 0) \neq (\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0). \quad (4.44)$$

Vamos mostrar que

$$\theta_\lambda \neq u^*.$$

De fato, se $\theta_\lambda = u^*$, a equação (4.43) implicaria que $\mu_\lambda = \mu^*$, o que é uma contradição com (4.44). Portanto, a alternativa 3 é satisfeita com

$$\psi_\lambda := u^*.$$

Se $u^* = v^* = 0$:

Defina

$$\widehat{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_0} \quad \text{e} \quad \widehat{v}_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_0}, \quad n \geq 1.$$

Novamente com o mesmo argumento temos que, passando a uma subsequência se necessário,

$$(\widehat{u}_n, \widehat{v}_n) \rightarrow (z, w) \quad \text{em } \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}),$$

com $\|z\|_0 = \|w\|_0 = 1$ e $z, w > 0$. Assim, $(\mu_n, \widehat{u}_n, \widehat{v}_n)$ satisfaz

$$\begin{cases} \widehat{u}_n = (-\Delta)^{-1} \left[\frac{1}{\|u_n\|_0} \left(\frac{RM - SN}{PR - QS} \right) (\mu_n, u_n, v_n) \right], \\ \widehat{v}_n = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\frac{1}{\|v_n\|_0} \left(\frac{PN - QM}{PR - QS} \right) (\mu_n u_n, v_n) + Z(\widehat{v}_n) \right]. \end{cases}$$

Passando ao limite $n \rightarrow \infty$ concluímos que

$$\begin{cases} z = (-\Delta)^{-1} \left[\left(\frac{RM_u - S_u z N}{PR} \right) (0, 0) \right], \\ w = (-\Delta + Z)^{-1} \left[\left(\frac{PN_v w - Q_v w M}{PR} \right) (0, 0) + Z(w) \right]. \end{cases}$$

Assim, $z, w \in \mathcal{C}_0^{1,1^-}(\overline{\Omega})$ e estas equações são equivalentes a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(P(0, 0) \nabla z) = \lambda a(x) z & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}(R(0, 0) \nabla w) = \mu^* b(x) w & \text{em } \Omega, \\ z = w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

E portanto,

$$\begin{aligned} \lambda &= \sigma_1[-\operatorname{div}(P(0, 0) \nabla); a], \\ \mu^* &= \sigma_1[-\operatorname{div}(R(0, 0) \nabla); b] \end{aligned}$$

e a alternativa 4 é satisfeita. Completando a demonstração. $\square$

Observação 4.16 *Para finalizar, destacamos que os Teoremas 4.3 e 4.4 podem ser aplicados diretamente a um sistema da forma (4.1), como veremos na próxima seção e também no Capítulo 5.*

4.6 Aplicação: Um modelo de simbiose com autodifusão e difusão cruzada

Para ilustrar a aplicação dos Teoremas 4.3 e 4.4, vamos considerar um sistema de simbiose com autodifusão e difusão cruzada estudado por [67]. Especificamente, consideremos

o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta[(1 + \alpha v + \beta u)v] = v(\mu - v + cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.45)$$

onde os parâmetros λ , μ , b , c , α e β são números reais tais que $b, c, \alpha, \beta > 0$.

Para enunciar o teorema de existência de estado de coexistência referente a este sistema, precisamos fazer algumas considerações iniciais. Seguindo a notação adotada em [67], denotaremos por $(\theta_\lambda, 0)$ e $(0, \theta_{\mu, \alpha})$ as soluções semitriviais de (4.45). Note que, para cada $\lambda > \lambda_1$, $u = \theta_\lambda$ é a única solução positiva da equação logística

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\lambda - u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.46)$$

Enquanto que para cada $\mu > \lambda_1$, $v = \theta_{\mu, \alpha}$ é a única solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta[(1 + \alpha v)v] = v(\mu - v) & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.47)$$

As seguintes funções desempenham um papel fundamental na determinação da região de coexistência de (4.45):

$$F(\alpha, \mu) := \begin{cases} \sigma_1[-\Delta - b\theta_{\mu, \alpha}] & \text{se } \mu > \lambda_1, \\ 0 & \text{se } \mu \leq \lambda_1, \end{cases} \quad (4.48)$$

e

$$G(\beta, \lambda) := \begin{cases} \sigma_1[-\Delta - c\theta_\lambda/(1 + \beta\theta_\lambda); 1/(1 + \beta\theta_\lambda)] & \text{se } \lambda > \lambda_1, \\ 0 & \text{se } \lambda \leq \lambda_1. \end{cases} \quad (4.49)$$

Como veremos adiante, estes são os autovalores λ_μ e μ_λ que aparecem nos Teoremas 4.3 e 4.4.

Usando teoria de índice de ponto fixo sobre cone positivo de [30], os autores provam o seguinte resultado de existência de solução positiva com respeito aos parâmetros λ e μ (veja Teorema 1.1 (III) em [67]):

Teorema 4.17 *Se $bc < 1$, então existe pelo menos um estado de coexistência de (4.45) se (λ, μ) verifica a seguinte condição:*

$$\lambda > F(\alpha, \mu) \quad e \quad \mu > G(\beta, \lambda). \quad (4.50)$$

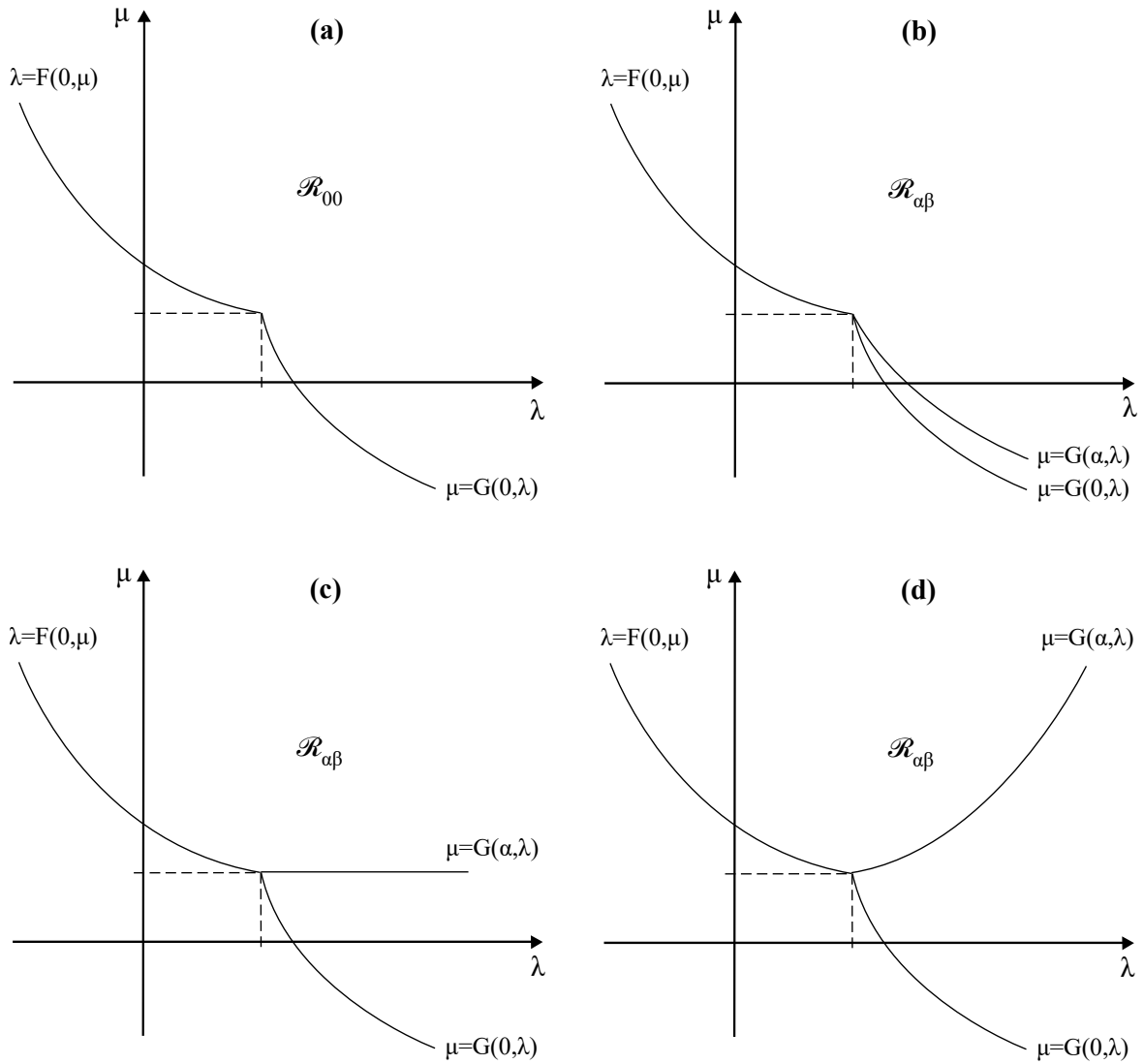


Figura 4.1: Região de coexistência de (4.45): (a) $\alpha = \beta = 0$; (b) $\alpha > 0$, $0 < \beta < c/\lambda_1$; (c) $\alpha > 0$, $\beta = c/\lambda_1$; (d) $\alpha > 0$, $\beta > c/\lambda_1$.

Denotando por

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \text{ (4.50) se verifica} \},$$

a região de coexistência de (4.45) dado pelo Teorema (4.17), a Figura 4.1 temos a representação de alguns casos possíveis, dependendo dos parâmetros α e β . Para maiores detalhes, veja [67].

Com o objetivo de provar o Teorema 4.17 usando os Teoremas 4.3 e 4.4, vamos mostrar que as soluções semitriviais θ_λ e $\theta_{\mu,\alpha}$ são não degeneradas.

Lema 4.18 *Para cada $\mu, \lambda > \lambda_1$, $(\lambda, \theta_\lambda)$ e $(\mu, \theta_{\mu,\alpha})$ são soluções não degeneradas de (4.46) e (4.47), respectivamente.*

Demonstração: Provaremos o resultado para $(\mu, \theta_{\mu, \alpha})$, $\mu > \lambda_1$. O outro caso é análogo.

Observe que a equação linearizada de (4.47) em $(\mu, \theta_{\mu, \alpha})$ é dada por

$$\begin{cases} -\Delta[(1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha})\xi] = (\mu - 2\theta_{\mu, \alpha})\xi & \text{em } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.51)$$

Argumentando por contradição, suponha que $\xi \in \mathcal{C}_0^{1,1^-}(\Omega)$ é uma solução não nula de (4.51). Usando a mudança de variável

$$\psi = (1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha})\xi,$$

(4.51) se converte em

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \frac{(\mu - 2\theta_{\mu, \alpha})\psi}{1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha}} & \text{em } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\psi \neq 0$ (pois $\xi \neq 0$), isso implica que

$$0 = \sigma_j \left[-\Delta + \frac{2\theta_{\mu, \alpha} - \mu}{1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha}} \right],$$

onde

$$\sigma_j \left[-\Delta + \frac{2\theta_{\mu, \alpha} - \mu}{1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha}} \right]$$

denota algum autovalor do operador

$$-\Delta + \frac{2\theta_{\mu, \alpha} - \mu}{1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha}},$$

não necessariamente o principal. Então, pela dominância do principal autovalor (veja Teorema 1.3 (ii)), segue que

$$0 = \sigma_j \left[-\Delta + \frac{2\theta_{\mu, \alpha} - \mu}{1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha}} \right] \geq \sigma_1 \left[-\Delta + \frac{2\theta_{\mu, \alpha} - \mu}{1 + 2\alpha\theta_{\mu, \alpha}} \right]. \quad (4.52)$$

Por outro lado, observe que $(\mu, \theta_{\mu, \alpha})$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta[(1 + \alpha\theta_{\mu, \alpha})\theta_{\mu, \alpha}] = \theta_{\mu, \alpha}(\mu - \theta_{\mu, \alpha}) & \text{em } \Omega, \\ \theta_{\mu, \alpha} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.53)$$

Usando a mudança de variável

$$\phi = (1 + \alpha\theta_{\mu, \alpha})\theta_{\mu, \alpha},$$

(4.53) se converte em

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \frac{(\mu - \theta_{\mu,\alpha})\phi}{1 + \alpha\theta_{\mu,\alpha}} & \text{em } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $\phi = (1 + \alpha\theta_{\mu,\alpha})\theta_{\mu,\alpha} > 0$, isso implica que

$$0 = \sigma_1 \left[-\Delta + \frac{\theta_{\mu,\alpha} - \mu}{1 + \alpha\theta_{\mu,\alpha}} \right].$$

Agora observe que a função

$$f(t) := \frac{t\theta_{\mu,\alpha} - \mu}{1 + t\alpha\theta_{\mu,\alpha}} = \frac{\theta_{\mu,\alpha} - \mu/t}{1/t + \alpha\theta_{\mu,\alpha}}, \quad t > 0$$

é crescente. Em particular,

$$f(1) = \frac{\theta_{\mu,\alpha} - \mu}{1 + \alpha\theta_{\mu,\alpha}} < \frac{2\theta_{\mu,\alpha} - \mu}{1 + 2\alpha\theta_{\mu,\alpha}} = f(2). \quad (4.54)$$

Combinando (4.54) com as propriedades de monotonia do principal autovalor, obtemos:

$$0 = \sigma_1 \left[-\Delta + \frac{\theta_{\mu,\alpha} - \mu}{1 + \alpha\theta_{\mu,\alpha}} \right] < \sigma_1 \left[-\Delta + \frac{2\theta_{\mu,\alpha} - \mu}{1 + 2\alpha\theta_{\mu,\alpha}} \right],$$

o que é uma contradição com (4.52). $\square$

Uma vez que temos soluções semitriviais não degeneradas, para provar o Teorema 4.50, é suficiente, por exemplo, obter cotas a priori e um resultado de não existência adequados.

Usaremos as mesmas cotas obtidas em [67], a saber:

Lema 4.19 *Suponha $bc < 1$.*

(I) *Se (u, v) é um estado de coexistência de (4.45), então*

$$u \leq \frac{\lambda + b\mu}{1 - bc} \quad e \quad v \leq \frac{\mu + c\lambda}{1 - bc}.$$

(II) *Se existe um estado de coexistência de (4.45), então*

$$\lambda + b\mu > 0 \quad e \quad \mu + c\lambda > 0.$$

Em particular, fixado $\mu_0 \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$), existe $C = C(\mu_0)$ (resp. $C = C(\lambda_0)$) uma constante tal que (4.45) não admite estado de coexistência para $\lambda < C$ (resp. $\mu < C$).

Para a demonstração desse resultado, veja [67], Proposição 3.4.

Com estas considerações, podemos provar o Teorema 4.50 aplicando diretamente os Teoremas 4.3 e 4.4.

Demonstração do Teorema 4.50: Observe que o sistema (4.45) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} -\Delta u = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}[\beta v \nabla u + (1 + 2\alpha v + \beta u) \nabla v] = v(\mu - v + cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Com a notação do Teorema 4.3,

$$\begin{cases} P(u, v) = 1, & S(u, v) = 0, \\ Q(u, v) = \beta v, & R(u, v) = 1 + 2\alpha v + \beta u, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, & f(x, u) = -u, & F(x, u, v) = b, \\ b = 1, & g(x, v) = -v, & G(x, u, v) = c. \end{cases}$$

É fácil ver que as condições estruturais (H_{PQRS}) , (H_{ab}) , (H_{fg}) e (H_{FG}) são todas satisfeitas. Então, fixado $\lambda > \lambda_1$, como $(\lambda, \theta_\lambda)$ é uma solução não degenerada de (4.46), pelo Teorema 4.3 existe um continuum $\mathfrak{C}$ de estado de coexistência de (4.45) emanando de $(\mu, u, v) = (\mu_\lambda, \theta_\lambda, 0)$, onde

$$\mu_\lambda := \sigma_1[-\operatorname{div}((1 + \beta\theta_\lambda)e^{-h_1(\theta_\lambda)}\nabla) - c\theta_\lambda e^{-h_1(\theta_\lambda)}; e^{-h_1(\theta_\lambda)}]$$

e

$$-h_1(\theta_\lambda) = -\int_0^{\theta_\lambda} \frac{\beta}{1 + \beta s} ds = \ln\left(\frac{1}{1 + \beta\theta_\lambda}\right).$$

Portanto,

$$\mu_\lambda = \sigma_1[-\Delta - c\theta_\lambda/(1 + \beta\theta_\lambda); 1/(1 + \beta\theta_\lambda)] = G(\beta, \lambda).$$

Além disso, $\mathfrak{C}$ satisfaz uma das condições 1–4 do Teorema 4.3. Vamos mostrar que a condição 1 é satisfeita.

Desde que o problema (4.46) possui unicidade de solução e estamos supondo $\lambda > \lambda_1$, as condições 3 e 4 não podem ocorrer (veja Observação 4.6). Se a condição 2 ocorresse então existiria uma solução positiva $(\mu^*, \theta_{\mu^* \alpha})$ de (4.47) tal que

$$\lambda = \sigma_1[-\Delta - b\theta_{\mu^* \alpha}] = F(\alpha, \mu^*)$$

e $(\mu^*, 0, \theta_{\mu^* \alpha}) \in \overline{\mathfrak{C}}$. Mas a igualdade $\lambda = F(\alpha, \mu^*)$ não pode ocorrer, pois estamos supondo $\lambda > \lambda_1$ e, pelas propriedades de monotonia do principal autovalor,

$$F(\alpha, \mu) = \sigma_1[-\Delta - b\theta_{\mu^* \alpha}] < \sigma_1[-\Delta] = \lambda_1.$$

Portanto $\mathfrak{C}$ é ilimitado. Como os estados de coexistência de (4.45) são limitados em $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (conforme Lema 4.19 (I)), por regularidade elíptica, eles também são limitados em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$. Além disso, como não há estado de coexistência para μ suficientemente pequeno (veja Lema 4.19 (II)), da natureza global de $\mathfrak{C}$ segue que

$$\text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C} \supset (G(\beta, \lambda), \infty).$$

Como $\lambda > \lambda_1$ é arbitrário, então (4.45) admite estado de coexistência sempre que

$$\lambda > \lambda_1 \quad \text{e} \quad \mu > G(\beta, \lambda). \quad (4.55)$$

Analogamente, fixado $\mu > \lambda_1$, como $(\mu, \theta_{\mu^*, \alpha})$ é solução não degenerada de (4.47), pelo Teorema 4.4 existe um continuum $\mathfrak{C}'$ de estado de coexistência de (4.45) emanando de $(\lambda, u, v) = (\lambda_\mu, 0, \theta_{\mu, \alpha})$, onde

$$\lambda_\mu := \sigma_1[-\Delta - b\theta_{\mu, \alpha}] = F(\alpha, \mu).$$

Além disso, $\mathfrak{C}'$ satisfaz uma das condições 1–4 do Teorema 4.4.

De maneira análoga ao caso anterior, as condições 3 e 4 não podem ocorrer. Se a condição 1 ocorre, novamente temos que $\text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}' \supset (F(\alpha, \mu), \infty)$. Se a condição 2 ocorre temos que existe uma solução positiva $(\lambda^*, \theta_{\lambda^*})$ de (4.46) tal que

$$\mu = \sigma_1[-\Delta - c\theta_{\lambda^*}/(1 + \beta\theta_{\lambda^*}); 1/(1 + \beta\theta_{\lambda^*})] = G(\beta, \lambda^*).$$

Em particular, como (4.46) não admite solução positiva para $\lambda < \lambda_1$, necessariamente $\lambda^* > \lambda_1$. Novamente como as soluções de (4.45) são limitadas em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$ e não há estado de coexistência de (4.45) para μ pequeno, segue que

$$\text{Proj}_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}' \supset (F(\alpha, \mu), \lambda_1].$$

Em ambos os casos temos existência de coexistência de solução de (4.45) sempre que

$$\mu > \lambda_1 \quad \text{e} \quad F(\alpha, \mu) < \lambda \leq \lambda_1. \quad (4.56)$$

Em resumo, a análise acima mostra existência de estado de coexistência de (4.45) sempre que (4.55) ou (4.56) ocorrem, implicando coexistência de (4.45) se $\lambda > F(\alpha, \mu)$ e $\mu > G(\beta, \lambda)$. Completando a demonstração. $\square$

Capítulo 5

Um modelo de predador-presa com termo de saciedade do predador

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos em [22]. Assim, iremos estudar existência e não existência de estado de coexistência para o seguinte sistema de reação-difusão proveniente de um modelo de predador-presa com termo de saciedade do predador proposto em [50]

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{u R'(v) \nabla v}{R(v)[R(v) + g(v)]} \right] = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -d_v \Delta v = v(\mu - v - cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $d_v, b, c > 0$ são constantes positivas, $R, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathcal{C}^2$ tais que

$$R(0) > 0, \quad g(s) > 0, \quad R'(s) > 0 \quad \text{e} \quad C \geq R(s) \quad \forall s \in [0, \infty),$$

onde $C > 0$ é uma constante. Além disso, vamos considerar uma particular função R proposta em [46] para analisar a região de coexistência, comparando com o clássico modelo de predador-presa com difusão linear.

Este capítulo está estruturado como segue: Na Seção 5.1 faremos algumas considerações iniciais, vamos analisar este modelo do ponto de vista da Dinâmica de Populações e enunciar nosso resultado principal. Na Seção 5.2 apresentamos alguns resultados preliminares que serão utilizados no restante do capítulo. Na Seção 5.3 provaremos um resultado de estimativas a priori e de não existência de coexistência de (5.1). Na Seção 5.4 aplicaremos os Teoremas 4.3 e 4.4 para provar nosso principal resultado de existência de

coexistência de solução de (5.1). Por ultimo, a Seção 5.5 é dedicada a analisar o efeito da função R na região de coexistência de (5.1).

5.1 Introdução

No contexto da dinâmica de populações, existem três tipos básicos de interação entre espécies: cooperação (mutualismo), competição e presa-predador e as principais questões sobre interação entre espécies são: determinar quando elas podem coexistir e como a coexistência é influenciada pela dispersão (veja [27]). Para estudar estas interações e responder a estas questões, diversos modelos matemáticos vem sendo propostos (veja [19], [68], [21] e suas referências). O modelo de reação-difusão, que descreve a distribuição e dinâmica populacional vem recebendo atenção e sendo utilizada nos últimos anos. Veja, por exemplo, [27, 12, 9, 84] e suas referências.

Nesta seção, iremos estudar o problema estacionário associado ao seguinte sistema com difusão cruzada, proveniente de um modelo de predador-presa

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div} \left[\frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{u R'(v) \nabla v}{R(v)[R(v) + g(v)]} \right] = u(\lambda - u + bv) & \text{se } \Omega \times (0, T), \\ v_t - d_v \Delta v = v(\mu - v - cu) & \text{se } \Omega \times (0, T), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado com fronteira regular e $d_v, b, c > 0$ são constantes positivas e $R, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe $\mathcal{C}^2$ satisfazendo

$$R(0) > 0, \quad g(s) > 0, \quad R'(s) > 0 \quad \text{e} \quad C \geq R(s) \quad \forall s \in [0, \infty),$$

onde $C > 0$ é uma constante. Esse sistema é uma versão particular proposta em [27] de um modelo originalmente proposto em [50]. Do ponto de vista da Ecologia, as funções u e v denotam as densidades do predador e da presa, respectivamente. O lado esquerdo das equações em (5.2) são os termos de dispersão (ou difusão): o primeiro contém o termo de dispersão do predador e o segundo contém o termo de dispersão da presa, eles descrevem o movimento espacial das espécies. O lado direito contém o termo de reação de Lotka-Volterra. A parcela $u R'(v) \nabla u / (R(v)[R(v) + g(v)])$ modela a difusão cruzada (ou *prey-taxis*), onde R descreve a *taxa de rotação* e g descreve a saciedade do predador. De acordo com os autores em [50], essa é a principal contribuição do artigo na direção de

obter um modelo mais realístico para descrever o comportamento em uma relação do tipo predador-presa. Em outras palavras, com o foco no predador, os autores introduzem uma variável para medir o grau de saciedade e o efeito sobre o movimento espacial do predador. É natural esperar que a saciedade influencie o movimento. Por exemplo, predadores famintos tendem a se mover com maior frequência em direção à presa, buscando por comida, enquanto que predadores saciados tendem a se mover de modo mais aleatório.

Para compreender melhor o significado da função g , vamos analisar o modelo original deduzido pelos autores (equação (39) em [50]). Neste artigo, o termo de difusão do predador é expressada como segue:

$$-\operatorname{div} \left[\frac{k^2}{2R(S_0(v))} \nabla u - \frac{k^2 u \frac{R}{dS}(S_0(v)) \frac{dS_0}{dv}(v)}{R(S_0(v)) [2R(S_0(v)) - \frac{\partial f}{\partial S}(S_0(v), v)]} \nabla v \right], \quad (5.3)$$

onde k denota a velocidade com que o predador se desloca e que é constante por hipótese. $S = S(t)$ é uma variável que mede o grau de saciedade do predador e varia de 0, que ocorre quando o predador está com o aparelho digestivo vazio, isto é, está faminto, a 1, que ocorre quando o predador está totalmente saciado, sem mais espaço em seu aparelho digestivo para consumir presas. A função $f(S, v)$ determina a saciedade de cada predador segundo a equação diferencial

$$\frac{dS}{dt} = f(S, v). \quad (5.4)$$

Por razões biológicas, esta função deve satisfazer

$$\partial f / \partial S < 0 \quad \text{e} \quad \partial f / \partial v \geq 0.$$

A primeira desigualdade significa que, sob qualquer densidade de presa, incrementos na plenitude do intestino acarretam uma diminuição na taxa com que o intestino enche. Enquanto a segunda desigualdade significa que, sob qualquer grau de saciedade fixada, um crescimento na densidade de presa nas proximidades nunca diminui a taxa com que o intestino enche (veja [50]). Graças a essas condições, pelo Teorema da Função Implícita, quando $S(t) \equiv \text{const.}$, podemos obter uma (única) função $S_0 = S_0(v)$ que verifica (5.4), isto é, satisfazendo $f(S_0(v), v) = 0$.

Com as simplificações $k^2 \equiv 2$ e $S_0(v) \equiv v$, o termo de difusão (5.3) se torna a difusão presente na primeira equação de (5.2) com

$$g(v) = -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial S}(S_0(v), v).$$

Especificamente, a equação estacionária associada a (5.2) que iremos estudar é o sistema (5.1), ou seja:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{u R'(v) \nabla v}{R(v)[R(v) + g(v)]} \right] = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -d_v \Delta v = v(\mu - v - cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nesse sentido, nossa atenção será focada em fornecer condições sobre os parâmetros λ e μ para assegurar a existência ou não existência de estados de coexistência de (5.1), aplicando os Teoremas 4.3 e 4.4.

Com o objetivo de enunciar nossos principais resultados, faremos algumas considerações. Primeiro observe que, quando uma das densidades populacionais é zero ($v \equiv 0$ ou $u \equiv 0$), a outra satisfaz uma das seguintes equações logística

$$\begin{cases} -R_0 \Delta u = u(\lambda - u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

onde

$$R_0 := R(0)^{-1},$$

ou

$$\begin{cases} -d_v \Delta u = u(\mu - u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.6)$$

Já sabemos que a existência e unicidade de solução de (5.5) (resp. (5.6)) ocorre para todo $\lambda > \sigma_1[-R_0 \Delta] = R_0 \sigma_1[-\Delta]$ (resp. $\mu > \sigma_1[-d_v \Delta] = d_v \sigma_1[-\Delta]$) (veja Teorema 1.41). Assim, iremos designar por $\theta_{[R_0, \lambda]}$ (resp. $\theta_{[d_v, \mu]}$) a única solução positiva de (5.5) (resp. (5.6)).

Agora, consideremos duas funções que desempenham um papel fundamental na existência e não existência de estados de coexistência de (5.1), que são as funções λ_μ e μ_λ que aparecem nos Teoremas 4.3 e 4.4. Nomeadamente,

$$F(\mu) = \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}/R(\theta_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}; e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}], \quad \mu \geq \sigma_1[-d_v \Delta] \quad (5.7)$$

e

$$G(\lambda) = \sigma_1[-d_v \Delta + c\theta_{[R_0, \lambda]}], \quad \lambda \geq \sigma_1[-R_0 \Delta],$$

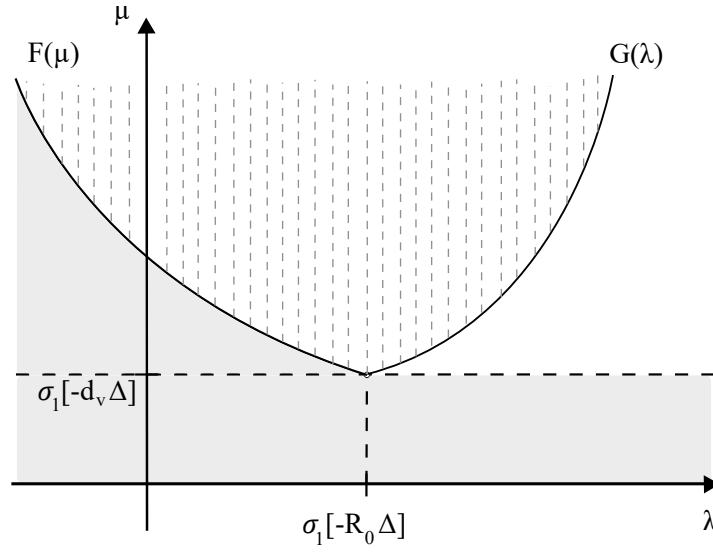


Figura 5.1: Regiões de existência e não existência de estado de coexistência de (5.1): a área hachurada descreve a região onde não há coexistência e a área com linhas tracejadas representa a região $\mathcal{R}$ onde há estado de coexistência.

onde

$$h(s) := \int_0^s \frac{R'(t)}{R(t) + g(t)} dt, \quad s > 0. \quad (5.8)$$

O primeiro resultado nos fornece uma região onde não há estado de coexistência e pode ser enunciado como segue

Teorema 5.1 a) Se $\mu \leq \sigma_1[-d_v\Delta]$, então (5.1) não admite estado de coexistência.

b) Se $\mu > \sigma_1[-d_v\Delta]$, então (5.1) não admite estado de coexistência para $\lambda < F(\mu)$.

Com respeito a região de coexistência, temos

Teorema 5.2 Defina

$$\mathcal{R} := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > F(\mu) \text{ e } \mu > G(\lambda)\}.$$

Se $(\lambda, \mu) \in \mathcal{R}$ então (5.1) possui pelo menos um estado de coexistência.

As regiões de existência e não existência de estado de coexistência dados pelos Teoremas 5.1 e 5.2 são representados na Figura 5.1.

Além destes resultados, na Seção 5.5 vamos considerar uma função particular da taxa de rotação R , proposta por [46]. Com isso, analisaremos o efeito desse termo na região de coexistência $\mathcal{R}$, interpretando os resultados no contexto da Dinâmica de Populações.

5.2 Resultados Preliminares

Nesta seção determinaremos as propriedades de monotonia das funções F e G , que irão nos ajudar mais adiante. Vamos iniciar com um lema que fornece propriedades simples das funções h e e^h/R que, devido sua utilidade no decorrer dessa exposição, merecem ser destacadas.

Lema 5.3 *As funções*

$$s \in [0, \infty) \mapsto h(s) = \int_0^s \frac{R'(t)}{R(t) + g(t)} dt \quad e \quad s \in [0, \infty) \mapsto a(s) := \frac{e^{h(s)}}{R(s)}$$

são de classe $\mathcal{C}^2$ e satisfazem

$$h'(s) > 0 \quad e \quad a'(s) < 0 \quad \forall s \in [0, \infty).$$

Demonstração: De (5.8), temos

$$h'(s) = \frac{R'(s)}{R(s) + g(s)}.$$

Então, das hipóteses sobre as funções R e g , segue que h é de classe $\mathcal{C}^2$ e $h'(s) > 0$ para todo $s \in [0, \infty)$. Similarmente, de

$$a'(s) = \frac{e^{h(s)}h'(s)R(s) - e^{h(s)}R'(s)}{R(s)^2},$$

deduzimos a regularidade de $a(s)$. Além disso,

$$a'(s) < 0$$

é equivalente a

$$e^{h(s)}h'(s)R(s) < e^{h(s)}R'(s),$$

implicando que

$$\frac{R'(s)R(s)}{R(s) + g(s)} < R'(s).$$

Desde que $R'(s), R(s), g(s) > 0$, esta desigualdade é equivalente a

$$0 < g(s),$$

que por hipótese ocorre para todo $s \in [0, \infty)$, provando o resultado. $\square$

Agora vamos usar esse lema e as propriedades de monotonia do principal autovalor para estudar as funções F e G que delimitam a região de coexistência $\mathcal{R}$.

Lema 5.4 a) A aplicação $F : [\sigma_1[-d_v\Delta], \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(\mu) = \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}/R(\theta_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}; e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}]$$

é contínua, decrescente e satisfaz

$$F(\sigma_1[-d_v\Delta]) = \sigma_1[-R_0\Delta] \quad e \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} F(\mu) = -\infty.$$

b) A aplicação $G : [\sigma_1[-R_0\Delta], \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(\lambda) = \sigma_1[-d_v\Delta + c\theta_{[R_0, \lambda]}]$$

é contínua, crescente e satisfaz

$$G(\sigma_1[-R_0\Delta]) = \sigma_1[-d_v\Delta] \quad e \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} G(\lambda) = \infty.$$

Demonstração: A demonstração de a) e b) são similares, então provaremos apenas a), argumentando como no Lema 6.1 de [57].

Pelo Lema 5.3 a aplicação $\mu \mapsto e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}/R(\theta_{[d_v, \mu]})$ é contínua e decrescente. Analogamente, $\mu \mapsto e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}$ e $\mu \mapsto \theta_{[d_v, \mu]}e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}$ são funções contínuas e crescentes. Portanto, pela monotonia do principal autovalor (veja Teorema 1.8), segue que $F(\mu)$ é contínua e decrescente. Além disso, desde que $\theta_{[R_0, \sigma_1[-R_0\Delta]]} \equiv 0$,

$$F(\sigma_1[-R_0\Delta]) = \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(0)}/R(0))\nabla) - 0 \cdot be^{h(0)}; e^{h(0)}] = \sigma_1[-R_0\Delta],$$

e como $e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})} \geq 1$ e $\theta_{[d_v, \sigma_1[-d_v\Delta]]} \equiv 0$,

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}/R(\theta_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}; e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}] \\ &\leq \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(0)}/R(0))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}] \\ &= \sigma_1[-R_0\Delta - b\theta_{[d_v, \mu]}]. \end{aligned}$$

Usando a cota inferior dada pelo Teorema 1.41 (veja (1.23)), isto é,

$$(\mu - \sigma_1[-d_v\Delta])\varphi \leq \theta_{[d_v, \mu]},$$

onde φ denota a autofunção positiva associada a $\sigma_1[-d_v\Delta]$ e com $\|\varphi\|_0 = 1$, obtemos

$$F(\mu) \leq \sigma_1[-R_0\Delta - b(\mu - \sigma_1[-d_v\Delta])\varphi].$$

Essa desigualdade combinado com o limite (1.8) implica que $\lim_{\mu \rightarrow \infty} F(\mu) = -\infty$ (veja Proposição 1.6). $\square$

5.3 Estimativas a priori e resultados de não existência

Começamos esta seção provando um resultado de estimativas a priori.

Lema 5.5 *Suponha que (u, v) é um estado de coexistência de (5.1) com $\mu > \sigma_1[-d_v\Delta]$. Então*

a) $v \leq \theta_{[d_v, \mu]} < \mu$ em Ω .

b) $u \leq e^{h(\mu)}(\lambda + b\mu)$ em Ω .

Demonstração: Para demonstrar a), observe que um estado de coexistência (w, v) satisfaz

$$-d_v\Delta v = v(\mu - v - ce^{h(v)}w) \leq v(\mu - v).$$

Assim, v é uma subsolução de (5.6), cuja única solução é $\theta_{[d_v, \mu]}$. Como constantes positivas suficientemente grande são supersoluções de (5.6), segue do método de sub e supersolução que

$$v \leq \theta_{[d_v, \mu]}.$$

Como $\theta_{[d_v, \mu]} < \mu$, segue o resultado.

Vamos verificar o parágrafo b). Observe que (u, v) também satisfaz

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{uR'(v)\nabla v}{R(v)[R(v) + g(v)]} \right] = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.9)$$

Por outro lado,

$$\frac{e^{h(v)}}{R(v)} \nabla (ue^{-h(v)}) = \frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{uR'(v)}{R(v)[R(v) + g(v)]} \nabla v.$$

Assim, (5.9) pode ser escrito como

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\frac{e^{h(v)}}{R(v)} \nabla (ue^{-h(v)}) \right] = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplicando essa equação por $[ue^{-h(v)} - (\lambda + b\mu)]_+$ e usando integração por partes obtemos

$$0 \leq \int_{\Omega} \frac{e^{h(v)}}{R(v)} |\nabla [ue^{-h(v)} - (\lambda + b\mu)]_+|^2 = \int_{\Omega} u(\lambda - u + bv) [ue^{-h(v)} - (\lambda + b\mu)]_+. \quad (5.10)$$

Contudo,

$$u(\lambda - u + bv)[ue^{-h(v)} - (\lambda + b\mu)]_+ = 0 \quad \text{se } ue^{-h(v)} \leq \lambda + b\mu \quad (5.11)$$

e

$$u(\lambda - u + bv)[ue^{-h(v)} - (\lambda + b\mu)]_+ < 0 \quad \text{se } ue^{-h(v)} > \lambda + b\mu. \quad (5.12)$$

Combinando (5.10), (5.11) e (5.12) chegamos a

$$0 \leq \int_{\Omega} u(\lambda - u + bv)[ue^{-h(v)} - (\lambda + b\mu)]_+ \leq 0.$$

Implicando que

$$u(\lambda - u + bv)[ue^{-h(v)} - (\lambda + b\mu)]_+ \equiv 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Tendo em vista (5.11), devemos ter necessariamente

$$\begin{aligned} ue^{-h(v)} &\leq \lambda + b\mu \\ u &\leq e^{h(v)}(\lambda + b\mu) \leq e^{h(\mu)}(\lambda + b\mu). \end{aligned}$$

□

Agora podemos usar essas estimativas para provar um resultado de não existência de estado de coexistência.

Demonstração do Teorema 5.1:

a) Seja (u, v) um estado de coexistência de (5.1), então esta solução satisfaz

$$\begin{cases} -d_v \Delta v + v^2 + cuv = \mu v & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\mu = \sigma_1[-d_v \Delta + v + cu].$$

Usando as propriedades de monotonia do principal autovalor,

$$\mu = \sigma_1[-d_v \Delta + v + cu] > \sigma_1[-d_v \Delta].$$

Portanto $\mu > \sigma_1[-d_v \Delta]$ é uma condição necessária para a existência de estado de coexistência.

b) Por outro lado, (u, v) também satisfaz

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left[\frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{uR'(v)\nabla v}{R(v)[R(v) + g(v)]} \right] &= u(\lambda - u + bv) \quad \text{em } \Omega \\ -\operatorname{div} \left[\frac{e^{h(v)}}{R(v)} \nabla (ue^{-h(v)}) \right] &= u(\lambda - u + bv) \quad \text{em } \Omega \end{aligned}$$

Usando a mudança de variável

$$ue^{-h(v)} = w \Leftrightarrow u = we^{h(v)},$$

temos que a função $w > 0$ cumpre

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\frac{e^{h(v)}}{R(v)} \nabla w \right] = e^{h(v)}w(\lambda - e^{h(v)}w + bv) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\lambda = \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(v)}/R(v))\nabla) + e^{h(v)}(e^{h(v)}w - bv); e^{h(v)}].$$

Supondo que $\mu > \sigma_1[-d_v\Delta]$, então usando a estimativa a priori dada pelo Lema 5.5 a) combinada com as propriedades de monotonia do principal autovalor, deduzimos que

$$\lambda > \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}/R(\theta_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}; e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}] = F(\mu).$$

□

5.4 Existência de estado de coexistência

Nesta seção usaremos os teoremas do Capítulo 4 para obter um resultado de coexistência de solução de (5.1). Para isso, argumentamos como segue.

Demonstração do Teorema 5.2:

Vamos aplicar o Teorema 4.4 ao sistema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left[\frac{1}{R(v)} \nabla u - \frac{uR'(v)\nabla v}{R(v)[R(v) + g(v)]} \right] = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -d_v\Delta v = v(\mu - v - cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Com a notação do Capítulo 4,

$$\begin{cases} P(u, v) = 1/R(v), & S(u, v) = -uR'(v)/R(v)[R(v) + g(v)], \\ Q(u, v) = 0, & R(u, v) = d_v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1, & f(x, u) = -u, & F(x, u, v) = b, \\ b = 1, & g(x, v) = -v, & G(x, u, v) = -c. \end{cases}$$

É fácil ver que as condições estruturais (H_{PQRS}) , (H_{ab}) , (H_{fg}) e (H_{FG}) são satisfeitas.

Agora vamos verificar que $\theta_{[d_v, \mu]}$ é uma solução não degenerada de

$$\begin{cases} -d_v \Delta u = u(\mu - u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.13)$$

Ou seja, que a equação linearizada de (5.13) em $\theta_{[d_v, \mu]}$, que é dada por

$$\begin{cases} -d_v \Delta u = u(\mu - 2\theta_{[d_v, \mu]}) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.14)$$

só admite a solução trivial. De fato, se (5.14) admite uma solução não trivial, então μ é um autovalor (não necessariamente o principal) do operador

$$-d_v \Delta + 2\theta_{[d_v, \mu]},$$

Da dominância do autovalor principal (veja Teorema 1.3 (ii)),

$$\mu \geq \sigma_1[-d_v \Delta + 2\theta_{[d_v, \mu]}]. \quad (5.15)$$

Por outro lado, como $\theta_{[d_v, \mu]}$ é uma solução positiva de (5.13), temos que

$$\mu = \sigma_1[-d_v \Delta + \theta_{[d_v, \mu]}].$$

Usando as propriedades de monotonia do principal autovalor, obtemos

$$\mu < \sigma_1[-d_v \Delta + 2\theta_{[d_v, \mu]}].$$

Contradição com (5.15). Portanto (5.14) só admite a solução trivial e, consequentemente, $\theta_{[d_v, \mu]}$ é uma solução não degenerada de (5.13). Com isso, podemos aplicar o Teorema 4.4 e concluir que do ponto $(\lambda, u, v) = (\lambda_\mu, 0, \theta_\mu)$, onde

$$\lambda_\mu = \sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}/R(\theta_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}; e^{h(\theta_{[d_v, \mu]})}] = F(\mu)$$

emana um continuum

$$\mathfrak{C} \subset \mathbb{R} \times \mathring{P} \times \mathring{P}$$

de estado de coexistência de (5.1) tal que: ou

1. $\mathfrak{C}$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$; ou
2. Existe uma solução positiva $(\lambda^*, \theta_{[R_0, \lambda^*]})$ de (5.5) tal que

$$\mu = \sigma_1 [-d_v \Delta + c\theta_{[R_0, \lambda^*]}]$$

e $(\lambda^*, \theta_{\lambda^*}, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}$; ou

3. Existe uma outra solução positiva de (5.6), (μ, ψ_μ) , com $\psi_{[d_v, \mu]} \neq \theta_{[d_v, \mu]}$ tal que

$$(\sigma_1[-\operatorname{div}((e^{h(\psi_{[d_v, \mu]})}/R(\psi_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\psi_{[d_v, \mu]}e^{h(\psi_{[d_v, \mu]})}; e^{h(\psi_{[d_v, \mu]})}], 0, \psi_{[d_v, \mu]}) \in \overline{\mathfrak{C}};$$

ou

4. $\mu = \sigma_1[-d_v \Delta]$ e $(\sigma_1[-R_0 \Delta], 0, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}$.

Agora, note que a alternativa 3 não pode ocorrer, pois (5.5) admite uma única solução positiva. Além disso, pela Proposição 5.1, $\mu > \sigma_1[-d_v \Delta]$ é uma condição necessária para existência de estado de coexistência de (5.1), logo a alternativa 4 também não pode ocorrer.

Supondo que o parágrafo 1 ocorre. Desde que as funções de um estado coexistência de (5.1) são limitadas em $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ (de acordo com o Lema 5.5), por regularidade elíptica, elas também são limitadas em $\mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^1(\overline{\Omega})$. Além disso, uma vez que (5.1) não admite estado de coexistência para $\lambda < F(\mu)$ (de acordo com o Teorema 5.1), então $\mathfrak{C}$ é ilimitado com respeito a valores grandes de λ , isto é, $\operatorname{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{C}) = (F(\mu), \infty)$. Em particular, obtemos pelo menos um estado de coexistência para todo $\lambda \in (F(\mu), G^{-1}(\mu))$.

Se a alternativa 2 é verdadeira, temos que

$$(G^{-1}(\mu), \theta_{[R_0, G^{-1}(\mu)]}, 0) \in \overline{\mathfrak{C}}$$

Novamente da natureza global de $\mathfrak{C}$, isso implica que

$$(F(\mu), G^{-1}(\mu)) \subset \operatorname{Proj}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{C}).$$

Mostrando existência de pelo menos um estado de coexistência para cada

$$\lambda \in (F(\mu), G^{-1}(\mu)).$$

Desde que $\mu > \sigma_1[-R_0 \Delta]$ é arbitrário, concluimos existência de estado de coexistência para todo $(\lambda, \mu) \in \mathcal{R}$, completando a prova do Teorema 5.2.

□

5.5 Influência da taxa de rotação na região de coexistência de solução

Nesta seção, vamos considerar uma função particular da taxa de rotação R para compreender melhor sua influência na região de coexistência. Recordemos também que no modelo original proposto por [50], R é uma função da saciedade S (conforme discutido na Seção 5.1), portanto ambos termos estão fortemente relacionados.

Desse modo, considere a seguinte taxa de rotação proposta em [46],

$$R_\beta(v) = k_0 + k_1 \left(\frac{v}{k_2 + v} \right)^\beta \quad (5.16)$$

onde k_0, k_1, k_2 e β são constantes positivas. De acordo com os autores em [46], o parâmetro β pode ser pensado como um limiar de rotação: valores pequenos resultam em um comportamento em que o predador muda de lento para rápido sua taxa de rotação sob densidades de presa relativamente baixas; reciprocamente, valores grandes de β resultam em um comportamento em que o predador não muda para taxas de rotação rápidas, mesmo sob alta densidade de presa. Em outras palavras, podemos pensar que, quando β é pequeno, o predador é um bom caçador, no sentido de que, mesmo sob baixas densidades de presa, é capaz de mover se de maneira mais eficiente em busca de sua caça.

Nosso objetivo é analisar o efeito do parâmetro β na região de coexistência $\mathcal{R}$ dada pelo Teorema 5.2. Por simplicidade, para esta análise iremos considerar

$$g \equiv \text{constant}.$$

Assim, definimos

$$F_\beta(\mu) := \sigma_1[-\text{div}((e^{h_\beta(\theta_{[d_v, \mu]})}/R_\beta(\theta_{[d_v, \mu]}))\nabla) - b\theta_{[d_v, \mu]}e^{h_\beta(\theta_{[d_v, \mu]})}; e^{h_\beta(\theta_{[d_v, \mu]})}], \quad \mu \geq \sigma_1[-d_v\Delta].$$

Então, a região de coexistência $\mathcal{R}_\beta$ dada pelo Teorema 5.2 é

$$\mathcal{R}_\beta := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > F_\beta(\mu) \text{ e } \mu > G(\lambda)\},$$

Vamos comparar $\mathcal{R}_\beta$ com diferentes valores de β . O primeiro resultado desta seção nos fornece que a região $\mathcal{R}_\beta$ é decrescente com respeito a β , precisamente,

Lema 5.6 *Se $\beta_1 < \beta_2$, então*

$$\mathcal{R}_{\beta_2} \subset \mathcal{R}_{\beta_1}$$

Demonstração: Observe que

$$h_\beta(v) = \int_0^v \frac{R'_\beta(t)}{R_\beta(t) + g} dt = \ln(R_\beta(t) + g)|_0^v = \ln \frac{R_\beta(v) + g}{k_0 + g}.$$

Portanto,

$$e^{h_\beta(v)} = \frac{R_\beta(v) + g}{k_0 + g}$$

e

$$a_\beta(v) = \frac{e^{h_\beta(v)}}{R_\beta(v)} = \frac{R_\beta(v) + g}{R_\beta(v)(k_0 + g)} = \frac{1}{k_0 + g} + \frac{g}{R_\beta(v)(k_0 + g)}.$$

Por outro lado, desde que

$$0 < \frac{v}{k_2 + v} < 1 \quad v \in (0, \infty), \quad (5.17)$$

a função R_β é decrescente com respeito ao parâmetro β . Consequentemente $\beta \mapsto e^{h_\beta(v)}$ é decrescente e $\beta \mapsto a_\beta(v)$ é crescente. Assim, usando as propriedades de monotonia do principal autovalor (veja Proposição 1.8), deduzimos que

$$\beta_1 < \beta_2 \Rightarrow F_{\beta_1}(\mu) < F_{\beta_2}(\mu).$$

De onde concluímos

$$\mathcal{R}_{\beta_2} \subset \mathcal{R}_{\beta_1} \quad \text{se } \beta_1 < \beta_2.$$

□

Portanto, no modelo descrito por (5.1) com R_β dado em (5.16), valores pequenos de β produzem uma região de coexistência de solução maior que no caso de valores grandes de β .

Agora, vamos analisar os casos limites, isto é, quando $\beta \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow \infty$. Denotando por

$$F_0(\mu) := \lim_{\beta \rightarrow 0} F_\beta(\mu) \quad \text{e} \quad F_\infty(\mu) := \lim_{\beta \rightarrow \infty} F_\beta(\mu), \quad (5.18)$$

temos

Lema 5.7 *As funções $F_0(\mu)$ e $F_\beta(\mu)$ definidas em (5.18) são dadas por*

$$F_0(\mu) = \sigma_1[-(k_0 + k_1)^{-1}\Delta - b\theta_{[d_v, \mu]}]$$

e

$$F_\beta(\mu) = \sigma_1[-k_0^{-1}\Delta - b\theta_{[d_v, \mu]}].$$

Além disso, se definimos

$$\mathcal{R}_0 = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > F_0(\mu) \text{ e } \mu > G(\lambda)\}$$

e

$$\mathcal{R}_\infty = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \lambda > F_\infty(\mu) \text{ e } \mu > G(\lambda)\},$$

então

$$\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}_\beta \subset \mathcal{R}_0 \quad \forall \beta > 0.$$

Demonstração: Tendo em vista (5.17), obtemos que, para todo $v \in (0, \infty)$,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} R_\beta(v) = k_0 + k_1, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} e^{h_\beta(v)} = \frac{k_0 + k_1 + g}{k_0 + g}$$

e

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} a_\beta(v) = \frac{k_0 + k_1 + g}{(k_0 + k_1)(k_0 + g)}.$$

Então, pela continuidade do principal autovalor,

$$\begin{aligned} F_0(\mu) &:= \lim_{\beta \rightarrow 0} F_\beta(\mu) \\ &= \sigma_1 \left[-\operatorname{div} \left(\frac{k_0 + k_1 + g}{(k_0 + k_1)(k_0 + g)} \nabla \right) - b\theta_{[d_v, \mu]} \frac{k_0 + k_1 + g}{k_0 + g}; \frac{k_0 + k_1 + g}{k_0 + g} \right] \\ &= \sigma_1 [-(k_0 + k_1)^{-1} \Delta - b\theta_{[d_v, \mu]}]. \end{aligned}$$

Analogamente, para todo $v \in (0, \infty)$,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} R_\beta(v) = k_0, \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{h_\beta(v)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} a_\beta(v) = \frac{1}{k_0}.$$

Assim, por continuidade do principal autovalor,

$$F_\infty(\mu) := \lim_{\beta \rightarrow \infty} F_\beta(\mu) = \sigma_1 [-k_0^{-1} \Delta - b\theta_{[d_v, \mu]}].$$

Consequentemente, pelo Lema 5.6,

$$\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{R}_\beta \subset \mathcal{R}_0 \quad \forall \beta > 0.$$

□

Observação 5.8 Note que as regiões $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}_\infty$ são precisamente as regiões de coexistência do clássico sistema de Lotka-Volterra para a interação do tipo predador-presa:

$$\begin{cases} -d^{-1} \Delta u = u(\lambda - u + bv) & \text{em } \Omega, \\ -d_v \Delta v = v(\mu - v - cu) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.19)$$

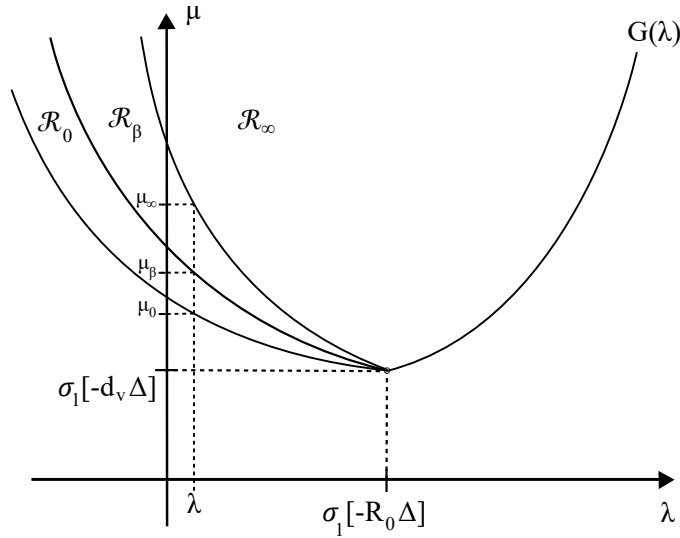


Figura 5.2: Esboço das regiões de coexistência $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_\beta$ e $\mathcal{R}_\infty$.

com $d = k_0 + k_1$ e $d = k_0$, respectivamente. Além disso, $\lim_{v \rightarrow \infty} R_\beta(v) = k_0 + k_1$ e $\lim_{v \rightarrow 0^+} R_\beta(v) = k_0$.

Observação 5.9 Destacamos ainda que, quando $\beta \rightarrow 0$ (resp. $\beta \rightarrow \infty$), a região $\mathcal{R}_\beta$ tende a $\mathcal{R}_0$ (resp. $\mathcal{R}_\infty$).

As regiões $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_\beta$ e $\mathcal{R}_\infty$ são representadas na Figura 5.2. Para finalizar, vamos interpretar tais resultados no contexto da Dinâmica de Populações. Tendo em vista os resultados acima, concluímos:

1. Se a taxa de crescimento natural do predador (λ) é grande (precisamente, $\lambda \geq \sigma_1[-R_0\Delta]$), então ambas as espécies coexistem quando a taxa de crescimento da presa é suficientemente grande ($\mu > G(\lambda)$).
2. Assumindo agora que $\lambda < \sigma_1[-R_0\Delta]$, então existe $\mu_\beta \in \mathbb{R}$ tal que ambas as espécies coexistem para $\mu > \mu_\beta$, apenas a presa sobrevive para $\mu \in (\sigma_1[-d_v\Delta], \mu_\beta)$ e ambas espécies morrem para valores pequenos de μ , isto é, para $\mu < \sigma_1[-d_v\Delta]$. Assim, quando a taxa de crescimento do predador é pequena, o predador só sobrevive quando a taxa de crescimento da presa é suficientemente grande.

Agora, focaremos nossa atenção sobre os resultados com respeito ao parâmetro β . Observe que (veja figura 5.2), $\beta \mapsto \mu_\beta$ é crescente e

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \mu_\beta = \mu_0 \quad \text{e} \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_\beta = \mu_\infty,$$

para valores específicos (e finitos) μ_0 e μ_β . Então, para valores pequenos da taxa de crescimento do predador, $\lambda < \sigma_1[-R_0\Delta]$, a coexistência depende da taxa de crescimento da presa (μ) e do parâmetro β como segue:

1. Para $\mu \leq \sigma_1[-d_v\Delta]$, ambas as espécies tendem à extinção.
2. Se $\mu \in (\sigma_1[-d_v\Delta], \mu_0)$, o predador não persiste e apenas a presa sobrevive para qualquer valor de $\beta > 0$.
3. Se $\mu > \mu_\infty$, as espécies coexistem, independentemente do valor de β .
4. Se $\mu \in (\mu_0, \mu_\infty)$, a coexistência depende do parâmetro β . De fato, existe β_0 tal que $\mu < \mu_\beta$ para $\beta > \beta_0$ e $\mu > \mu_\beta$ para $\beta < \beta_0$. Assim, as espécies coexistem para $\beta < \beta_0$ e o predador tende à extinção para $\beta > \beta_0$. Em resumo, o predador precisa ser um bom caçador (i.e., $\beta > 0$ suficientemente pequeno) para sobreviver.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Alama and G. Tarantello. Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign. *J. Funct. Anal.*, 141(1):159–215, 1996.
- [2] H. Amann. On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 21:125–146, 1971/72.
- [3] H. Amann. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. *SIAM Rev.*, 18(4):620–709, 1976.
- [4] H. Amann. Maximum principles and principal eigenvalues. In *Ten mathematical essays on approximation in analysis and topology*, pages 1–60. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.
- [5] H. Amann and J. López-Gómez. A priori bounds and multiple solutions for superlinear indefinite elliptic problems. *J. Differential Equations*, 146(2):336–374, 1998.
- [6] A. Ambrosetti, H. Brezis, and G. Cerami. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. *J. Funct. Anal.*, 122(2):519–543, 1994.
- [7] A. Ambrosetti and J. L. Gámez. Branches of positive solutions for some semilinear Schrödinger equations. *Math. Z.*, 224(3):347–362, 1997.
- [8] D. Arcoya, J. Carmona, and B. Pellacci. Bifurcation for some quasilinear operators. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 131(4):733–765, 2001.
- [9] N. Bellomo, A. Bellouquid, Y. Tao, and M. Winkler. Toward a mathematical theory of Keller-Segel models of pattern formation in biological tissues. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 25(9):1663–1763, 2015.
- [10] H. Berestycki and P.-L. Lions. Some applications of the method of super and sub-solutions. In *Bifurcation and nonlinear eigenvalue problems (Proc., Session, Univ.*

- Paris XIII, Villetaneuse, 1978*), volume 782 of *Lecture Notes in Math.*, pages 16–41. Springer, Berlin, 1980.
- [11] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S. R. S. Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(1):47–92, 1994.
- [12] A. Bezuglyy and Y. Lou. Reaction-diffusion models with large advection coefficients. *Appl. Anal.*, 89(7):983–1004, 2010.
- [13] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [14] H. Brezis and L. Nirenberg. H^1 versus C^1 local minimizers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(5):465–472, 1993.
- [15] H. Brezis and L. Oswald. Remarks on sublinear elliptic equations. *Nonlinear Anal.*, 10(1):55–64, 1986.
- [16] S. Cano-Casanova, J. López-Gómez, and M. Molina-Meyer. Isolas: compact solution components separated away from a given equilibrium curve. *Hiroshima Math. J.*, 34(2):177–199, 2004.
- [17] R. S. Cantrell and C. Cosner. Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments. *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*, 112 A:293–318, 1989.
- [18] R. S. Cantrell and C. Cosner. Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments. II. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(4):1043–1064, 1991.
- [19] R. S. Cantrell and C. Cosner. Models for predator-prey systems at multiple scales. *SIAM Rev.*, 38(2):256–286, 1996.
- [20] R. S. Cantrell and C. Cosner. Conditional persistence in logistic models via nonlinear diffusion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 132(2):267–281, 2002.

- [21] R. S. Cantrell and C. Cosner. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003.
- [22] W. Cintra, C. Morales-Rodrigo, and A. Suárez. Coexistence states in a cross-diffusion system of a predator-prey model with predator satiation term. Manuscript submitted for publication.
- [23] W. Cintra, C. Morales-Rodrigo, and A. Suárez. A unilateral global bifurcation theorem for quasilinear elliptic systems and some applications. Manuscript in preparation.
- [24] W. Cintra, C. Morales-Rodrigo, and A. Suárez. Combining linear and fast diffusion in a nonlinear elliptic equation. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 56(1):Art. 2, 22, 2017.
- [25] W. Cintra, C. Morales-Rodrigo, and A. Suárez. Refuge versus dispersion in the logistic equation. *J. Differential Equations*, 262(11):5606–5634, 2017.
- [26] F. C. Cîrstea and V. Rădulescu. Existence and uniqueness of blow-up solutions for a class of logistic equations. *Commun. Contemp. Math.*, 4(3):559–586, 2002.
- [27] C. Cosner. Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34(5):1701–1745, 2014.
- [28] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Functional Analysis*, 8:321–340, 1971.
- [29] E. N. Dancer. Global solution branches for positive mappings. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 52:181–192, 1973.
- [30] E. N. Dancer. On the indices of fixed points of mappings in cones and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 91(1):131–151, 1983.
- [31] E. N. Dancer and G. Sweers. On the existence of a maximal weak solution for a semilinear elliptic equation. *Differential Integral Equations*, 2(4):533–540, 1989.
- [32] D. Daners and P. Koch-Medina. *Abstract Evolution Equations, Periodic Problems and Applications*, volume 279 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman

- Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
- [33] D. G. de Figueiredo. Positive solutions of semilinear elliptic problems. In *Differential equations (São Paulo, 1981)*, volume 957 of *Lecture Notes in Math.*, pages 34–87. Springer, Berlin-New York, 1982.
 - [34] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
 - [35] M. Delgado, J. López-Gómez, and A. Suárez. Singular boundary value problems of a porous media logistic equation. *Hiroshima Math. J.*, 34(1):57–80, 2004.
 - [36] M. Delgado, M. Montenegro, and A. Suárez. A Lotka-Volterra symbiotic model with cross-diffusion. *J. Differential Equations*, 246(5):2131–2149, 2009.
 - [37] P. Deuel, J. & Hess. A criterion for the existence of solutions of non-linear elliptic boundary value problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 74:49–54 (1976), 1974/75.
 - [38] Y. Du. Effects of a degeneracy in the competition model. I. Classical and generalized steady-state solutions. *J. Differential Equations*, 181(1):92–132, 2002.
 - [39] Y. Du and Y. Lou. S-shaped global bifurcation curve and Hopf bifurcation of positive solutions to a predator-prey model. *J. Differential Equations*, 144(2):390–440, 1998.
 - [40] J. Esquinas and J. López-Gómez. Optimal multiplicity in local bifurcation theory. I. Generalized generic eigenvalues. *J. Differential Equations*, 71(1):72–92, 1988.
 - [41] J. M. Fraile, P Koch, J. López-Gómez, and S. Merino. Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation. *J. Differential Equations*, 127(1):295–319, 1996.
 - [42] J. L. Gámez. Sub- and super-solutions in bifurcation problems. *Nonlinear Anal.*, 28(4):625–632, 1997.
 - [43] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J. López-Gómez, and J. C. Sabina de Lis. Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 145(3):261–289, 1998.

- [44] J. García-Melián, R. Letelier-Albornoz, and J. Sabina de Lis. Uniqueness and asymptotic behaviour for solutions of semilinear problems with boundary blow-up. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(12):3593–3602, 2001.
- [45] R. Gómez-Reñasco and J. López-Gómez. On the existence and numerical computation of classical and non-classical solutions for a family of elliptic boundary value problems. *Nonlinear Anal.*, 48(4):567–605, 2002.
- [46] D. Grünbaum. Using spatially explicit models to characterize foraging performance in heterogeneous landscapes. *The American Naturalist*, 151(2):97–113, 1998.
- [47] T. Hillen and K. J. Painter. A user’s guide to PDE models for chemotaxis. *J. Math. Biol.*, 58(1-2):183–217, 2009.
- [48] H. Jin and Z. Wang. Global stability of prey-taxis systems. *J. Differential Equations*, 262(3):1257–1290, 2017.
- [49] Z. Jun and C. Kim. Positive solutions for a Lotka-Volterra prey-predator model with cross-diffusion of fractional type. *Results Math.*, 65(3-4):293–320, 2014.
- [50] P. Kareiva and G. Odell. Swarms of predators exhibit ‘preytaxis’ if individual predators use area-restricted search. *The American Naturalist*, 130(2):233–270, 1987.
- [51] W. Ko and K. Ryu. Qualitative analysis of a predator-prey model with Holling type II functional response incorporating a prey refuge. *J. Differential Equations*, 231(2):534–550, 2006.
- [52] M. A. Krasnosel’skii. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Translated by A. H. Armstrong; translation edited by J. Burlak. A Pergamon Press Book. The Macmillan Co., New York, 1964.
- [53] K. Kuto and Y. Yamada. Multiple coexistence states for a prey-predator system with cross-diffusion. *J. Differential Equations*, 197(2):315–348, 2004.
- [54] K. Kuto and Y. Yamada. Multiple existence and stability of steady-states for a prey-predator system with cross-diffusion. In *Nonlocal elliptic and parabolic problems*, volume 66 of *Banach Center Publ.*, pages 199–210. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2004.

- [55] D. Le, L. V. Nguyen, and T. T. Nguyen. Regularity and coexistence problems for strongly coupled elliptic systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(4):1749–1791, 2007.
- [56] J. López-Gómez. Nonlinear eigenvalues and global bifurcation application to the search of positive solutions for general Lotka-Volterra reaction diffusion systems with two species. *Differential Integral Equations*, 7(5-6):1427–1452, 1994.
- [57] J. López-Gómez. The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems. *J. Differential Equations*, 127(1):263–294, 1996.
- [58] J. López-Gómez. Classifying smooth supersolutions for a general class of elliptic boundary value problems. *Adv. Differential Equations*, 8(9):1025–1042, 2003.
- [59] J. López-Gómez. *Linear Second Order Elliptic Operators*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.
- [60] J. López-Gómez. Global bifurcation for Fredholm operators. In *A mathematical tribute to Professor José María Montesinos Amilibia*, pages 437–451. Dep. Geom. Topol. Fac. Cien. Mat. UCM, Madrid, 2016.
- [61] J. López-Gómez. Global bifurcation for Fredholm operators. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 48:539–564, 2016.
- [62] J. López-Gómez. *Metasolutions of Parabolic Equations in Population Dynamics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [63] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer. The maximum principle for cooperative weakly coupled elliptic systems and some applications. *Differential Integral Equations*, 7(2):383–398, 1994.
- [64] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer. Superlinear indefinite systems: beyond Lotka-Volterra models. *J. Differential Equations*, 221(2):343–411, 2006.
- [65] J. López-Gómez and J. C. Sabina de Lis. First variations of principal eigenvalues with respect to the domain and point-wise growth of positive solutions for problems where bifurcation from infinity occurs. *J. Differential Equations*, 148(1):47–64, 1998.

- [66] J. López-Gómez. *Spectral Theory and Nonlinear Function Analysis*. Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [67] M. Montenegro and A. Suárez. A symbiotic self-cross diffusion model. *Adv. Differential Equations*, 19(9-10):833–856, 2014.
- [68] J. D. Murray. *Mathematical Biology. I*, volume 17 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002. An introduction.
- [69] K. Nakashima and Y. Yamada. Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion. *Adv. Differential Equations*, 1(6):1099–1122, 1996.
- [70] A. Okubo. *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, volume 10 of *Biomathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [71] A. Okubo and S. A. Levin. *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*, volume 14 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001.
- [72] T. Ouyang. On the positive solutions of semilinear equations $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$ on the compact manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 331(2):503–527, 1992.
- [73] C. V. Pao. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum Press, New York, 1992.
- [74] C. V. Pao. Strongly coupled elliptic systems and applications to Lotka-Volterra models with cross-diffusion. *Nonlinear Anal.*, 60(7):1197–1217, 2005.
- [75] C. V. Pao. Eigenvalue problems of a degenerate quasilinear elliptic equation. *Rocky Mountain J. Math.*, 40(1):305–311, 2010.
- [76] P. H. Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Functional Analysis*, 7:487–513, 1971.
- [77] W. H. Ruan. Positive steady-state solutions of a competing reaction-diffusion system with large cross-diffusion coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 197(2):558–578, 1996.
- [78] W. H. Ruan. A competing reaction-diffusion system with small cross-diffusions. *Canad. Appl. Math. Quart.*, 7(1):69–91, 1999.

- [79] K. Ryu and I. Ahn. Coexistence theorem of steady states for nonlinear self-cross diffusion systems with competitive dynamics. *J. Math. Anal. Appl.*, 283(1):46–65, 2003.
- [80] J. Shi and X. Wang. On global bifurcation for quasilinear elliptic systems on bounded domains. *J. Differential Equations*, 246(7):2788–2812, 2009.
- [81] N. Shigesada, K. Kawasaki, and E. Teramoto. Spatial segregation of interacting species. *J. Theoret. Biol.*, 79(1):83–99, 1979.
- [82] M. Struwe. *Variational Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Hystems.
- [83] A. Suárez. *Propiedades de las Soluciones de Sistemas Estacionarios de la Dinamica de Poblaciones con Difusion Lineal y no Lineal*. Tese doutoral, Universidad de Sevilla, 1999.
- [84] J. I. Tello and D. Wrzosek. Predator-prey model with diffusion and indirect prey-taxis. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(11):2129–2162, 2016.
- [85] P. Turchin. Population consequences of aggregative movement. *J. of Animal Ecol.*, 58:75–100, 1989.
- [86] X. Wang, W. Wang, and G. Zhang. Global bifurcation of solutions for a predator-prey model with prey-taxis. *Math. Methods Appl. Sci.*, 38(3):431–443, 2015.
- [87] Y. Wang and W. Li. Stationary problem of a predator-prey system with nonlinear diffusion effects. *Comput. Math. Appl.*, 70(8):2102–2124, 2015.
- [88] S. Wu, J. Shi, and B. Wu. Global existence of solutions and uniform persistence of a diffusive predator-prey model with prey-taxis. *J. Differential Equations*, 260(7):5847–5874, 2016.