Universidade Federal do Amazonas
Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla
UFPA-UFAM

Classificação da Base de Produtos Warped Quase-Sólitons de Ricci

Manoel Vieira de Matos Neto

Manaus-AM
Dezembro/2016

Classificação da Base de Produtos Warped Quase-Sólitons de Ricci

por

Manoel Vieira de Matos Neto

sob orientação do

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus-AM
Dezembro/2016

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

M433c

Matos Neto, Manoel Vieira de
Classificação da base de produtos warped quase-sólitons de Ricci / Manoel Vieira de Matos Neto. 2016
45 f.: 31 cm.

Orientador: José Nazareno Vieira Gomes
Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Variedades tipo Ricci-Hessiano. 2. Localmente conformemente plana. 3. Tensor de Weyl harmônico. 4. Quase-sólitons de Ricci. I. Gomes, José Nazareno Vieira II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Manoel Vieira de Matos Neto

Classificação da Base de Produtos Warped Quase-Sólitons de Ricci

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Matemática em Associação Ampla UFPA-UFAM, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Manaus, 2 de dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

José Nazareno Vieira Gomes

....

Prof. Dr. José Nazareno Vieira Gomes (Orientador)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Mikhail Neklyudov

....

Prof. Dr. Mikhail Neklyudov (Cientista Visitante)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Inês Silva de Oliveira Padilha

....

Profa. Dra. Inês Silva de Oliveira Padilha (Membro Externo)

Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Abigail Silva Duarte Folha

....

Profa. Dra. Abigail Silva Duarte Folha (Membro Externo)

Universidade Federal Fluminense - UFF

Fábio Reis dos Santos

....

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Membro Externo)

Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Dedico este trabalho a minha esposa Samara e aos meus filhos Samuel e Manuela.

Agradecimentos

Agradeço a minha querida esposa Samara Amaro, que sempre esteve ao meu lado nos momentos difíceis, por todo seu apoio e por segurar a barra na minha ausência.

A minha mãe Jane Lúcia, por toda a assistência prestada a minha esposa e aos meus filhos.

Aos estimados amigos Adan Silva, Halyson Baltazar, José Tiago Cruz e Kelton Bezerra, pela amizade e companheirismo.

Aos professores Ernani Ribeiro da UFC e Marcondes Clark da UFPI, pelo apoio imprescindível para a conclusão desta jornada.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFAM, pelo acolhimento.

Aos meus fraternos amigos Paulo César e Édio, que mesmo a distância sempre estiveram na torcida por mim.

Aos colegas de doutorado Abraão Caetano, Adrian Ribeiro, Airton Freitas, Andrea Mota, Clebes Brandão, Kelly Karyna, João Felipe e Roberto Nascimento, pela convivência harmoniosa e pelos momentos de descontração.

Aos membros da banca pelas correções e sugestões que melhoraram a redação deste trabalho.

E ao professor José Nazareno, pela amizade e orientação. Um exemplo de dedicação ao trabalho, de honestidade e de prontidão em ajudar as pessoas. Suas orientações foram pra mim, muito além da finalidade de elaborar esta tese.

Life is a waterfall.
We're one in the river
and one again after the fall.

Aerials, System of a Down

Resumo

Nesta tese apresentamos a noção de variedades tipo Ricci-Hessiano $(\mathbb{M}, g, \varphi, f, \lambda)$ que está intrinsecamente relacionada à construção de quase-sólitons de Ricci que são produtos warped. Classificamos certas classes de variedades tipo Ricci-Hessiano e deduzimos algumas implicações para quase-sólitons de Ricci e variedades m–quasi-Einstein generalizadas. Consideramos dois casos complementares: ∇f e $\nabla\varphi$ são linearmente independentes no $C^\infty(\mathbb{M})$–módulo $\mathfrak{X}(\mathbb{M})$ e $\nabla f = h\nabla\varphi$ para alguma função suave h sobre $\mathbb{M}$. No primeiro caso mostramos que o campo vetorial $\nabla\lambda$ pertence ao $C^\infty(\mathbb{M})$–módulo gerado por ∇f e $\nabla\varphi$, enquanto que no segundo caso, sob hipóteses adicionais, a variedade é, em uma vizinhança de qualquer ponto regular de f, localmente isométrica a um produto warped.

Palavras-chave: Variedade tipo Ricci-Hessiano; Quase-sólitons de Ricci; Localmente conformemente plana; Tensor de Weyl harmônico.

Abstract

In this work we introduce the notion of Ricci-Hessian type manifolds $(\mathbb{M}, g, \varphi, f, \lambda)$ which is closely related to the construction of almost Ricci sólitons realised as a warped product. We classify certain classes of the Ricci-Hessian type manifolds and derive some implications for almost Ricci solitons and generalised m–quasi-Einstein manifolds. We consider two complementary cases: ∇f and $\nabla\varphi$ are linearly independent in $C^{\infty}(\mathbb{M})$–module $\mathfrak{X}(\mathbb{M})$; and $\nabla f = h\nabla\varphi$ for some smooth function h on $\mathbb{M}$. In the first case we show that the vector field $\nabla\lambda$ belongs to the $C^{\infty}(\mathbb{M})$–module generated by ∇f and $\nabla\varphi$, while in the second case, under additional hypothesis, the manifold is, around any regular point of f, locally isometric to a warped product.

Keywords: Ricci-Hessian type manifolds; Almost Ricci solitons; Locally conformally flat; Harmonic Weyl tensor.

Conteúdo

Introdução

Nas últimas décadas, tem havido um interesse crescente pelas variedades Einstein e suas generalizações. Por exemplo, Case-Shu-Wei introduziram em [10] o conceito de variedade m–quasi-Einstein, isto é, uma variedade Riemanniana cujo tensor de Bakry-Émery Ricci modificado é um múltiplo constante do tensor métrico. Este conceito originou-se do estudo de produtos warped que são variedades Einstein. Entretanto, já havia sido observado por Kim-Kim em [32] que uma condição necessária para que um produto warped seja uma variedade Einstein é que sua base seja uma variedade m–quasi-Einstein. Além disso, eles também mostraram que não existe um produto warped Einstein compacto com função warping não-constante se a curvatura escalar é não-positiva. Ressaltamos que outras importantes propriedades de variedades m–quasi-Einstein e alguns resultados de rigidez podem ser encontrados em [10].

Analisando os resultados recentes na literatura podemos notar que outras variedades tipo Einstein também estão relacionadas com produtos warped. Por exemplo, um quase-sóliton de Ricci localmente conformemente plano, em torno de qualquer ponto regular da função potencial, é localmente um produto warped com fibra de curvatura seccional constante. Isto foi provado por Catino em [13] quando ele introduziu a noção de variedade quasi-Einstein generalizada que pode ser vista como uma generalização do conceito de sóliton de Ricci, quase-sóliton de Ricci e variedade m–quasi-Einstein. Ele denominou uma variedade Riemanniana completa $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 2$, uma (gradiente) variedade quasi-Einstein generalizada se existem funções suaves ψ, λ e μ sobre $\mathbb{M}^n$ satisfazendo

$$Ric + \nabla^2\psi - \mu d\psi \otimes d\psi = \lambda g \tag{1}$$

onde Ric e $\nabla^2\psi$ denotam, respectivamente, o tensor de Ricci e o operador Hessiano de ψ, ambos calculados na métrica g. Observe que Catino essencialmente modificou a definição de variedade m–quasi-Einstein adicionando a condição do parâmetro λ ser uma função suave, assim como acrescentando uma nova função μ. De fato, como mencionado anteriormente, uma variedade m–quasi-Einstein é caracterizada pela equação

$$Ric_m^\psi := Ric + \nabla^2\psi - \frac{1}{m}d\psi \otimes d\psi = \lambda g \tag{2}$$

onde m é um inteiro positivo ou $m = \infty$, λ é uma constante e Ric_m^ψ é o tensor de Bakry-Émery Ricci modificado de g.

Para $0 < m < \infty$ e considerando a função não-constante $u = e^{-\frac{\psi}{m}}$, a Equação (2) é equivalente a

$$Ric - \frac{m}{u}\nabla^2 u = \lambda g. \tag{3}$$

Portanto, quando m é finito, podemos usar (2) para estudar (3) e vice versa.

Um caso particular de variedade quasi-Einstein generalizada foi explorada por Barros e Ribeiro em [4], onde eles estudaram o caso $\mu = 1/m$ em (1) introduzindo o conceito de variedade m–quasi-Einstein generalizada. Um fato interessante é que a classe das variedades m–quasi-Einstein generalizada compacta com curvatura escalar constante é não-trivial e rígido. Mais precisamente, considere as seguintes funções sobre a esfera unitária padrão $(\mathbb{S}^n, g)$, $n \geq 2$,

$$\psi = -m \ln\left(\tau - \frac{h_v}{n}\right) \quad \text{e} \quad \lambda = (n-1) - \frac{mnh_v}{n\tau - h_v},$$

onde $\tau \in (\frac{1}{n}, +\infty)$ é um número real e h_v é a função altura com respeito a algum vetor unitário fixo $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Barros e Ribeiro mostraram que a quádrupla $(\mathbb{S}^n, g, \psi, \lambda)$ é uma variedade m–quasi-Einstein generalizada. A rigidez desta classe foi provada por Barros e Gomes em [2].

Pensando em obter novos exemplos de variedades tipo Einstein, o próximo passo é analisar produtos warped que são sólitons de Ricci ou quase-sólitons. Estas duas classes de variedades tem atraído muita atenção da comunidade matemática. Sólitons de Ricci correspondem a soluções auto-similares do fluxo de Ricci de Hamilton e surgem como limites de dilatações de singularidades no fluxo de Ricci. Enquanto que quase-sólitons de Ricci surgem do fluxo de Ricci-Bourguignon, como foi verificado recentemente por Catino et al. em [14].

Um dos primeiros resultados nesta direção foi obtido por Robert Bryant. Ele construiu um sóliton de Ricci estável com o produto warped $(0, \infty) \times_f \mathbb{S}^m$, $m > 1$, e função warping radial. Outras construções deste tipo podem ser encontradas em [21, 26, 31]. Mais geralmente, em [23] é apresentada uma condição necessária e suficiente para construir produtos warped que são sólitons de Ricci gradiente, como consequência, originou-se uma classe de sólitons de Ricci expansivos e completos, cuja fibra é uma variedade Einstein com curvatura escalar não-positiva.

A ideia inicial em [23] foi também usada na construção de quase-sólitons de Ricci que são produtos warped [24]. Deve ser observado, entretanto, que as técnicas usadas nestes dois artigos são, em geral, diferentes. Em ambos os casos os autores também discutem algumas obstruções para as referidas construções, em especial quando a base é compacta. Além disso, eles encontraram uma nova classe de métricas tipo Einstein, definidas como métricas tipo Ricci-Hessiano, cuja caracterização é dada pela fórmula

$$Ric + \nabla^2\varphi = \lambda g + \frac{m}{f}\nabla^2 f, \tag{4}$$

em que φ, f e λ são funções suaves.

Apontamos que, se $\nabla\varphi$ é um campo vetorial homotético e λ é constante, a Equação (4) reduz-se a uma métrica m–quasi-Einstein. Variedades tipo Ricci-Hessiano com $m = 1$ e função warping satisfazendo $\Delta f + \Lambda f = 0$, para Λ constante, podem ser relacionadas à uma métrica estática. O interesse em métricas estáticas é motivado pela relatividade geral, ver por exemplo [6, 17].

A proposta deste trabalho é estudar as variedades tipo Ricci-Hessiano com tensor de Weyl harmônico, bem como obter algumas implicações para variedades m–quasi-Einstein generalizadas e quase-sólitons de Ricci. Neste sentido consideraremos dois casos complementares:

(A) ∇f e $\nabla\varphi$ são linearmente independente no $C^\infty(\mathbb{M})$–módulo $\mathfrak{X}(\mathbb{M})$;

(B) $\nabla f = h\nabla\varphi$ para uma função suave h sobre $\mathbb{M}$.

No primeiro caso, mostraremos que o campo vetorial $\nabla\lambda$ pertence ao $C^\infty(\mathbb{M})$–módulo gerado por ∇f e $\nabla\varphi$, enquanto que no segundo caso, sob hipóteses adicionais, a variedade é, em uma vizinhança de qualquer ponto regular de f, localmente isométrica a um produto warped. Para efeito de cálculos, a abordagem aqui utilizada será, salvo algumas exceções, via $(1, r)$–tensorial.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 estabelecemos algumas equações de estrutura que generalizam identidades já conhecidas para variedades contidas na classe das variedades tipo Ricci-Hessiano. Também calculamos outras com a condição do tensor de Weyl ser harmônico, o que nos deixará em condições de provarmos nossos principais resultados: Na Proposição 1.1 apresentamos restrições às funções parâmetros de uma variedade tipo Ricci-Hessiano. No Teorema 1.1 mostramos que o campo vetorial $\nabla\lambda$ é combinação linear de ∇f e $\nabla\varphi$ quando estes dois últimos são linearmente independentes. Na Proposição 1.2 relacionamos os entes geométricos da métrica g e as funções parâmetros f e φ. Em particular, provamos que o campo vetorial ∇f é um autovetor do tensor de Ricci quando $\nabla\varphi$ é normal às f–hipersuperfícies. Na Proposição 1.3 relacionamos os valores de $\nabla^2 f$, $\nabla^2\varphi$ e da curvatura radial sobre pontos das f–hipersuperfícies. Com o auxílio das Proposições 1.2 e 1.3 provamos que, uma variedade tipo Ricci-Hessiano com tensor de Weyl harmônico, quando $\nabla\varphi$ é normal às f–hipersuperfícies e sua curvatura na direção radial $\nabla\varphi$ é nula, é localmente isométrica a um produto warped com fibra Einstein (cf. Preposição 1.4). Como consequência, temos a validade deste resultado sob a hipótese da variedade ser localmente conformemente plana (cf. Teorema 1.3).

No Capítulo 2 fazemos algumas considerações acerca das variedades tipo Ricci-Hessiano Kähler, neste caso, veremos que as restrições são menores comparadas às exigidas para os quase-sólitons de Ricci Kähler. Por fim, tratamos das variedades tipo Ricci-Hessiano sobre variedades que são conformes ao espaço Euclidiano e usamos a invariância por um grupo de translação para obtermos, via solução de um sistema de equações diferenciais, classes particulares de métricas m–quasi-Einstein e de tipo Ricci-Hessiano com métricas estáticas.

Capítulo 1

Classificação da base de produtos warped quase-sólitons de Ricci

1.1 Preliminares

Nesta secção apresentaremos algumas definições úteis e fixaremos nossas convenções e notações.

No decorrer deste texto $\mathfrak{X}(\mathbb{M})$ denotará o $C^\infty(\mathbb{M})$–módulo dos campos de vetores tangentes sobre $\mathbb{M}$ e ∇ a conexão de Levi-Civita sobre uma variedade Riemanniana $(\mathbb{M}^n, g)$ com tensor curvatura de Riemann dado por

$$Rm(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Estabelecido o sinal da curvatura de Riemann, denotamos o tensor de Ricci por

$$Ric(X,Y) = \sum_i^n g(Rm(E_i, X)Y, E_i),$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal para $\mathbb{M}$. R denotará a curvatura escalar dada pela contração do tensor de Ricci.

Uma variedade Riemanniana $(\mathbb{M}^n, g)$ é *localmente conformemente plana* se cada ponto de $\mathbb{M}$ está contido em uma vizinhança que é conforme a um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ com métrica canônica $g_\circ$, i.e., se existe um difeomorfismo $\Psi : V \subset \mathbb{R}^n \to U$ tal que $\Psi^* g = f^2 g_\circ$ para alguma função suave positiva f e um subconjunto aberto U em $\mathbb{M}$. Toda superfície é conformemente plana porque admite coordenadas isotérmicas locais [15]. É bem conhecido que toda variedade Riemanniana com curvatura seccional constante é localmente conformemente plana, mas a recíproca não é verdadeira. Mais precisamente, uma variedade tem curvatura seccional constante se, e somente se, é uma variedade Einstein conformemente plana [20]. O principal invariante sob mudanças conformes é o tensor de Weyl.

O *tensor curvatura de Weyl* de $(\mathbb{M}, g)$ é definido pela seguinte fórmula de decomposição

$$W = Rm - S \odot g, \tag{1.1}$$

em que S denota o *tensor de Schouten* definido por

$$S = \frac{1}{n-2}\Big(Ric - \frac{R}{2(n-1)}g\Big) \tag{1.2}$$

e $S \odot g$ é o *produto Kulkarni-Nomizu* dado na forma $(1,3)$–tensorial por

$$\begin{aligned} S \odot g(X,Y,Z) = {} & \frac{1}{n-2}\big(Ric(X,Z)Y + g(X,Z)Ric(Y) - g(Y,Z)Ric(X) - Ric(Y,Z)X\big) \\ & - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\big(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\big), \end{aligned}$$

onde estamos usando a identificação $Ric(\cdot,\cdot) = g(Ric(\cdot),\cdot)$.

A classe das variedades Riemannianas localmente conformemente plana tem uma caracterização clássica em termos dos tensores de Schouten e de Weyl como segue. Uma variedade Riemanniana $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geq 3$, é conformemente plana se, e somente se, $W = 0$ e o tensor de Schouten S é Codazzi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = (\nabla_Y S)(X,Z). \tag{1.3}$$

O tensor de Cotton é aquele que mede essa propriedade, pois ele é definido por

$$C(X,Y,Z) = (\nabla_X S)(Y,Z) - (\nabla_Y S)(X,Z). \tag{1.4}$$

A divergência de um $(1,r)$–tensor T em $(\mathbb{M}, g)$ é definida como o $(0,r)$–tensor

$$(\mathrm{div}T)(p) = \mathrm{tr}\big(v \mapsto (\nabla_v T)(p)\big),$$

onde $p \in \mathbb{M}$, $v \in T_p\mathbb{M}$, ∇ denota a derivada covariante de T e tr é o traço calculado na métrica g. Em particular, é bem conhecida a relação (cf. [6], Cap.16, Sec.B.)

$$\mathrm{div}W = (n-3)C \tag{1.5}$$

O tensor de Weyl de $(\mathbb{M}, g)$ é *harmônico* quando ele é livre de divergência, ou seja, $\mathrm{div}W = 0$. Em dimensão três esta condição é equivalente a ser localmente conformemente flat. Em dimensão $n \geq 4$, o tensor de Weyl harmônico é uma condição mais fraca desde que, ser localmente conformemente plana é equivalente ao tensor de Weyl ser nulo. Toda variedade Einstein satisfaz a condição $\mathrm{div}W = 0$ e a relação (1.5) verifica que a nulidade do tensor de Cotton é equivalente a harmonicidade do tensor de Weyl.

Nesta tese estaremos constantemente usando a identificação de um $(0, 2)$–tensor T com seu $(1, 1)$–tensor associado pela equação

$$g(TX, Y) = T(X, Y).$$

Daí, conseguimos

$$\mathrm{div}(\phi T) = \phi \mathrm{div}T + T(\nabla\phi, \cdot) \quad \text{e} \quad \nabla(\phi T) = \phi\nabla T + d\phi \otimes T$$

para todo $\phi \in C^\infty(\mathbb{M})$. Em particular, temos $\mathrm{div}(\phi g) = d\phi$.

As próximas duas identidades serão cruciais para os nossos cálculos.

$$2\mathrm{div}Ric = dR \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\nabla^2\phi = Ric(\nabla\phi, \cdot) + d\Delta\phi. \tag{1.6}$$

A primeira é conhecida como a segunda identidade de Bianchi duas vezes contraída e a segunda como fórmula de Bochner. Além destas, por um cálculo direto temos

$$d[g(\nabla\phi, \nabla\psi)] = \nabla^2\phi(\nabla\psi, \cdot) + \nabla^2\psi(\nabla\phi, \cdot). \tag{1.7}$$

e

$$(\nabla_X\nabla^2\phi)Y - (\nabla_Y\nabla^2\phi)X = Rm(X, Y)\nabla\phi \tag{1.8}$$

para todo $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{M})$. Estas identidades serão usadas no transcorrer deste trabalho sem maiores comentários.

Para o que segue, consideraremos ainda a forma de curvatura dada por

$$\Omega(X, Y)(\cdot, \cdot) = g(Rm(\cdot, \cdot)X, Y) \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$$

e o produto wedge entre duas 1–formas α e β dado pela convenção de determinante

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha.$$

1.2 Variedades tipo Ricci-Hessiano

Dadas duas variedades Riemannianas $(\mathbb{B}, g_B)$ e $(\mathbb{F}, g_F)$ e uma função suave e positiva f sobre $\mathbb{B}$, definimos o produto warped $\mathbb{B} \times_f \mathbb{F}$ como a variedade produto $\mathbb{B} \times \mathbb{F}$ provida com a métrica

$$g = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F$$

onde π e σ são as projeções sobre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{F}$, respectivamente. Por simplicidade, podermos escrever $g = g_B + f^2 g_F$.

Um produto warped $\mathbb{M} = \mathbb{B}^n \times_f \mathbb{F}^m$ de duas variedades Riemannianas é um quase-sóliton de Ricci se seu tensor de Ricci satisfaz $Ric + \nabla^2 \widetilde{\varphi} = \lambda g$, onde λ é uma função suave sobre $\mathbb{M}$ e $\widetilde{\varphi}$ é o levantamento de uma função suave φ sobre $\mathbb{B}$ para $\mathbb{M}$. Em particular, é bem conhecido que (ver [35])

$$Ric = Ric_{\mathbb{B}} - \frac{m}{f} \nabla^2 f, \tag{1.9}$$

para campos de vetores sobre a base $\mathbb{B}$, o que motiva a seguinte definição

Definição 1 *Uma métrica Riemanniana g sobre uma variedade suave $\mathbb{M}$ é uma métrica tipo Ricci-Hessiano se existe funções reais suaves φ, f, λ sobre $\mathbb{M}$ satisfazendo*

$$Ric + \nabla^2 \varphi = \lambda g + \frac{m}{f} \nabla^2 f \tag{1.10}$$

em que m é um inteiro positivo, $f > 0$ a função warping, φ a função potencial e λ é uma função suave sobre $\mathbb{M}$.

Denotaremos por $(\mathbb{M}, g, \varphi, f, \lambda)$ uma **variedade tipo Ricci-Hessiano** e iremos nos referir a (1.10) como **equação fundamental**. Se a função λ é não-constante sobre $\mathbb{M}$, a variedade tipo Ricci-Hessiano é denominada **própria**.

Ressaltamos que, se uma variedade Riemanniana $(\mathbb{B}, g)$ possui uma estrutura tipo Ricci-Hessiano, então ela satisfaz apenas as condições necessárias para que o produto warped $\mathbb{M} = \mathbb{B}^n \times_f \mathbb{F}^m$ seja um quase-sóliton de Ricci, mas não as condições suficientes.

Nesse sentido, enfatizamos que a noção de variedade tipo Ricci-Hessiano se justifica não somente por causa da Equação (1.9) mas também pelo fato de que tal variedade, sob alguma hipótese adicional para f e φ, é a base de um produto warped que é um quase-sóliton de Ricci gradiente com fibra de dimensão m, função warping f e função potencial $\tilde{\varphi}$.

O nosso interesse no estudo da base de um produto warped que é um quase-sóliton de Ricci deve-se ao fato desta referida base satisfazer uma estrutura que generaliza as variedades m–quasi-Einstein, ou seja, as variedades tipo Ricci-Hessiano são uma generalização das variedades Einstein, e contém os sólitons de Ricci gradiente, os quase-sólitons de Ricci gradiente, as variedades quasi-Einstein assim como as variedades quasi-Einstein generalizadas e está também proximamente relacionada a construção de quase-sólitons de Ricci que são produtos warped. Para mais detalhes sobre tal construção recomendamos [24].

Destacamos que, em se tratando das variedades tipo Ricci-Hessiano, a função φ é uma obstrução natural para a validade das propriedades de uma variedade quasi-Einstein generalizada. Logo, é de se esperar que muitas destas propriedades dependam de hipóteses sobre φ. Em particular, quando φ é constante ou $\nabla\varphi$ é um campo vetorial conforme, uma variedade tipo Ricci-Hessiano reduz-se a uma variedade m–quasi Einstein generalizada. Para uma redução não trivial veja mais a frente a Observação 1.1.

Se denotarmos $\overset{\circ}{T} = T - \frac{tr(T)}{n}g$ o *tensor sem traço* associado a um $(0,2)$–tensor T, podemos deduzir a partir da equação fundamental que

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{Ric} + \overset{\circ}{\nabla^2}\varphi &= Ric - \frac{R}{n}g + \nabla^2\varphi - \frac{\Delta\varphi}{n}g \\ &= \frac{m}{f}\nabla f + \lambda g - \frac{1}{n}\Big(\frac{m}{f}\Delta f + n\lambda\Big)g \\ &= \frac{m}{f}\overset{\circ}{\nabla^2} f.\end{aligned}$$

Daí, analisando esta relação verifica-se facilmente que, se $(\mathbb{M}, g)$ é Einstein, então ∇f é conforme se, e somente se, $\nabla\varphi$ também é. Reciprocamente, se ambos ∇f e $\nabla\varphi$ são simultaneamente conformes, claramente $(\mathbb{M}, g)$ será Einstein. Além do mais, é bem conhecido que a existência de campos vetoriais conformes gradientes não-triviais sobre variedades Riemannianas implicam restrições geométricas na variedade (ver [39]).

O exemplo a seguir mostra que a esfera padrão e o espaço hiperbólico admitem uma estrutura tipo Ricci-Hessiano e é bastante esclarecedor no sentido que contém algumas das propriedades apresentadas posteriormente neste trabalho.

Exemplo 1.1 (Feitosa, Freitas e Gomes[23]) *Seja* $(\mathbb{M}^n(\tau), g_\circ)$ *a esfera padrão* $\mathbb{S}^n$ *ou o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$ *dependendo de* $\tau = 1$ *ou* $\tau = -1$*, respectivamente. Denotamos por* h_v *a função altura com respeito a um vetor unitário fixo* $v \in \mathbb{R}^{n+1}$*. Então, para cada número real* $m \neq 0$*, as funções* $\lambda = \tau(n-1) - \frac{\tau}{m}h_v^2 - h_v$*,* $f = e^{-\frac{\tau}{m}h_v}$ *e* $\varphi = \frac{1}{2m}h_v^2$ *satisfazem a Equação (1.10) sobre* $(\mathbb{M}^n(\tau), g_\circ)$*, uma vez que*

$$d\varphi = \frac{h_v}{m}dh_v, \quad df = -\frac{\tau}{m}e^{-\frac{\tau}{m}h_v}dh_v \quad e \quad \nabla^2 h_v = -\tau h_v g_\circ,$$

assim obtemos

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{m}dh_v \otimes dh_v - \frac{\tau}{m}h_v^2 g_\circ \quad e \quad \frac{m}{f}\nabla^2 f = \frac{1}{m}dh_v \otimes dh_v + h_v g_\circ.$$

Por outro lado, $Ric = \tau(n-1)g_\circ$*. Logo, é suficiente escolher* λ *como no presente exemplo com o objetivo de obter a nossa afirmação.*

Observação 1.1 *Convém observar que a classe das métricas* m*–quasi-Einstein generalizadas é um subconjunto da classe das métricas tipo Ricci-Hessiano. De fato, para uma variedade* m*–quasi-Einstein generalizada* $(\mathbb{M}^n, g, \psi, \lambda)$ *satisfazendo*

$$Ric + \nabla^2\psi - \frac{1}{m}d\psi \otimes d\psi = \lambda g.$$

Tome $m = 4r$*,* $\varphi = \frac{\psi}{2}$ *e* $f = e^{-\frac{\varphi}{r}}$*. Então,*

$$df = -\frac{f}{2r}d\psi \quad e \quad \nabla^2 f = -\frac{f}{2r}\nabla^2\psi - \frac{1}{2r}df \otimes d\psi.$$

Combinando estas duas expressões temos

$$-\frac{r}{f}\nabla^2 f = \frac{1}{2}\nabla^2\psi - \frac{1}{4r}d\psi \otimes d\psi.$$

Ou ainda,

$$-\frac{r}{f}\nabla^2 f + \frac{1}{2}\nabla^2\psi = \nabla^2\psi - \frac{1}{4r}d\psi \otimes d\psi. \tag{1.11}$$

Como $\nabla^2\varphi = \frac{1}{2}\nabla^2\psi$ *e* $m = 4r$ *então (1.11) torna-se*

$$-\frac{r}{f}\nabla^2 f + \nabla^2\varphi = \nabla^2\psi - \frac{1}{m}d\psi \otimes d\psi = \lambda g - Ric.$$

Logo, $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$ *satisfaz uma equação tipo Ricci-Hessiano. Isso também verifica que a diferença entre as classes não está apenas na não-conformidade do campo* $\nabla\varphi$*. Por outro lado, se assumirmos que* $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$ *satisfaz a equação fundamental, então*

$$Ric + \nabla^2\eta = \lambda g + \frac{1}{m}d\xi \otimes d\xi, \tag{1.12}$$

onde $\xi = -m\ln(f)$ *e* $\eta = \varphi + \xi$ *(note que* $\eta \neq \xi$ *em (1.12)).*

1.3 Equações de estrutura e aplicações

Apresentaremos agora algumas propriedades que serão úteis para o estabelecimento dos resultados desta tese. Antes de tudo, deduziremos, para variedades tipo Ricci-Hessiano, fórmulas de caráter geral que se aplicam a sólitons de Ricci, quase-sólitons de Ricci e variedades m–quasi-Einstein generalizadas.

Lema 1.1 *Se* $(\mathbb{M}, g, f, \varphi, \lambda)$ *é uma variedade tipo Ricci-Hessiano, então vale a seguinte relação.*

$$\begin{aligned}(\nabla_X Ric)Y - (\nabla_Y Ric)X &= X(\lambda)Y - Y(\lambda)X - \frac{m}{f^2}\{X(f)(\nabla^2 f)Y - Y(f)(\nabla^2 f)X\} \\ &+ \frac{m}{f} Rm(X,Y)\nabla f - Rm(X,Y)\nabla\varphi \qquad (1.13)\end{aligned}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$.

Demonstração: Calculando a derivada covariante da equação fundamental com respeito a X encontramos

$$(\nabla_X Ric)Y + (\nabla_X \nabla^2\varphi)Y = X(\lambda)Y - \frac{m}{f^2}X(f)(\nabla^2 f)Y + \frac{m}{f}(\nabla_X\nabla^2 f)Y. \qquad (1.14)$$

Analogamente, encontramos a derivada covariante com respeito a Y. Em seguida, subtraindo a segunda derivada da primeira obtemos

$$\begin{aligned}&(\nabla_X Ric)Y - (\nabla_Y Ric)X = \\ &X(\lambda)Y - Y(\lambda)X - \frac{m}{f^2}\{X(f)(\nabla^2 f)Y - Y(f)(\nabla^2 f)X\} \qquad (1.15)\\ &+\frac{m}{f}\{(\nabla_X\nabla^2 f)Y - (\nabla_Y\nabla^2 f)X\} - \{(\nabla_X\nabla^2\varphi)Y - (\nabla_Y\nabla^2\varphi)X\}.\end{aligned}$$

Usando a identidade (1.8) em (1.15) obtemos (1.13). □

Lema 1.2 *Para qualquer variedade tipo Ricci-Hessiano* $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$ *temos as seguintes equações equivalentes:*

$$\begin{aligned}\frac{dR}{2} &= -\frac{m-1}{f}Ric(\nabla f, \cdot) - \frac{R-(n-1)\lambda}{f}df + (n-1)d\lambda + Ric(\nabla\varphi, \cdot) \\ &+\frac{1}{f}\nabla^2\varphi(\nabla f, \cdot) - \frac{\Delta\varphi}{f}df \qquad (1.16)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{dR}{2} &= (n-1)d\lambda + \frac{m}{f}d[g(\nabla\varphi, \nabla f)] - \frac{m(m-1)}{2f^2}d|\nabla f|^2 - \frac{d|\nabla\varphi|^2}{2} \\ &-\frac{m}{f^2}\Delta f df - \frac{m}{f}\lambda df + \lambda d\varphi. \qquad (1.17)\end{aligned}$$

Demonstração: Dado um ponto $p \in \mathbb{M}$, considere $\{E_1, \ldots, E_n\}$ uma base ortonormal para $T_p\mathbb{M}$. Tomemos o produto interno de (1.13) com um campo vetorial E_i e façamos $Y = E_i$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X Ric)(E_i, E_i) - (\nabla_{E_i} Ric)(X, E_i) = \\
&X(\lambda) - E_i(\lambda)g(X, E_i) - \frac{m}{f^2}\{X(f)\nabla^2 f(E_i, E_i) - E_i(f)\nabla^2 f(X, E_i)\} \\
&+\frac{m}{f} g(Rm(X, E_i)\nabla f, E_i) - g(Rm(X, E_i)\nabla\varphi, E_i).
\end{aligned}
$$

Somando em $i \in \{1, \ldots, n\}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\nabla_X Ric) - (\mathrm{div} Ric)X = (n-1)X(\lambda) &- \frac{m}{f^2}\{X(f)\Delta f - \nabla^2 f(\nabla f, X)\} \\
&-\frac{m}{f} Ric(\nabla f, X) + Ric(\nabla\varphi, X).
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

Como o traço comuta com a derivada covariante, usamos (1.6) para assegurar que

$$
\mathrm{tr}(\nabla_X Ric) - (\mathrm{div} Ric)X = \frac{1}{2}X(R).
$$

Daí, (1.18) torna-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}X(R) = (n-1)X(\lambda) &- \frac{m}{f^2}\{X(f)\Delta f - \nabla^2 f(\nabla f, X)\} \\
&-\frac{m}{f} Ric(\nabla f, X) + Ric(\nabla\varphi, X).
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

Sendo (1.19) válido para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$, ele é equivalente a

$$
\frac{dR}{2} = (n-1)d\lambda - \frac{m}{f^2}\Delta f df + \frac{m}{f^2}\nabla^2 f(\nabla f, \cdot) - \frac{m}{f} Ric(\nabla f, \cdot) + Ric(\nabla\varphi, \cdot). \tag{1.20}
$$

Pela equação fundamental,

$$
\frac{m}{f}\nabla^2 f(\nabla f, \cdot) = Ric(\nabla f, \cdot) + \nabla^2\varphi(\nabla f, \cdot) - \lambda df \tag{1.21}
$$

e

$$
\frac{m}{f}\Delta f = R + \Delta\varphi - n\lambda. \tag{1.22}
$$

Substituindo (1.21) e (1.22) em (1.20) obtemos a Equação (1.16). Por outro lado, substituindo $Ric(\nabla f, \cdot)$ e $Ric(\nabla\varphi, \cdot)$ em (1.20) por suas representações dadas a partir da equação fundamental e usando a identidade (1.7) deduzimos a segunda equação. $\square$

A seguir, um resultado crucial para o desenvolvimento deste trabalho.

Proposição 1.1 *Para toda variedade tipo Ricci-Hessiano* $(\mathbb{M}^n, g, f, \varphi, \lambda)$ *temos*

(i) $f d\varphi \wedge d\lambda = df \wedge \Big\{(n+m-2)d\lambda + \frac{m}{f} d[g(\nabla\varphi, \nabla f)] - d|\nabla\varphi|^2 + 2\lambda d\varphi + d\Delta\varphi\Big\}$

(ii) $df \wedge d\varphi \wedge d\lambda = 0.$

Demonstração: Multiplicando a Equação (1.17) no Lema 1.2 por f^2 obtemos

$$\begin{aligned}\frac{f^2 dR}{2} =& (n-1)f^2 d\lambda + mfd[g(\nabla\varphi, \nabla f)] - \frac{m(m-1)}{2} d|\nabla f|^2 - \frac{f^2 d|\nabla\varphi|^2}{2} - m\Delta f df \\ & - mf\lambda df + \lambda f^2 d\varphi.\end{aligned}$$

Aplicando a derivada exterior, encontramos

$$\begin{aligned}fdf \wedge dR =& 2(n-1)fdf \wedge d\lambda + mdf \wedge d[g(\nabla\varphi, \nabla f)] - fdf \wedge d|\nabla\varphi|^2 - md\Delta f \wedge df \\ & - mfd\lambda \wedge df + f^2 d\lambda \wedge d\varphi + 2\lambda fdf \wedge d\varphi.\end{aligned}$$

Agora, dividindo por f e reagrupando alguns termos conseguimos

$$\begin{aligned}df \wedge dR \;=\;& (2n+m-2)df \wedge d\lambda + \frac{m}{f} df \wedge d[g(\nabla\varphi, \nabla f)] - df \wedge d|\nabla\varphi|^2 \\ & + fd\lambda \wedge d\varphi + 2\lambda df \wedge d\varphi + \frac{m}{f} df \wedge d\Delta f. \qquad (1.23)\end{aligned}$$

Tomando a derivada da equação fundamental obtemos

$$\frac{m}{f} d\Delta f = dR + d\Delta\varphi + \frac{m}{f^2}\Delta f df - nd\lambda. \qquad (1.24)$$

A substituição de (1.24) no último termo de (1.23) fornece a primeira parte da proposição, isto é,

$$fd\varphi \wedge d\lambda = df \wedge \Big\{(n+m-2)d\lambda + \frac{m}{f} d[g(\nabla\varphi, \nabla f)] - d|\nabla\varphi|^2 + 2\lambda d\varphi + d\Delta\varphi\Big\}.$$

A derivada exterior da expressão acima fornece

$$3df \wedge d\varphi \wedge d\lambda = df \wedge d(\frac{m}{f} d[g(\nabla\varphi, \nabla f)]) = 0,$$

o que prova a segunda parte da proposição. □

A primeira consequência desta proposição está no contexto das métrica m–quasi-Einstein generalizadas, como segue:

Corolário 1.1 *Para toda variedade m−quasi-Einstein generalizada* $(\mathbb{M}^n, g, \psi, \lambda)$*, é valido*

$$(n+m-2)d\lambda \wedge du = -\frac{u}{m}(n+m-2)d\lambda \wedge d\psi = 0, \tag{1.25}$$

onde $u = e^{-\frac{\psi}{m}}$*. Em particular, para* $n \geq 2$*,* $\nabla\lambda = \eta\nabla\psi$ *para alguma função* η *sobre* $\mathbb{M}$.

Demonstração: Tomando $u = e^{-\frac{\psi}{m}}$, a equação

$$Ric + \nabla^2\psi - \frac{1}{m}d\psi \otimes d\psi = \lambda g$$

pode ser reescrita como

$$Ric - \frac{m}{u}\nabla^2 u = \lambda g.$$

Logo, considerando φ constante no item (i) da Proposição 1.1, obtemos (1.25). Sendo $n \geq 2$, temos $d\lambda \wedge d\psi = 0$, donde concluímos nossa afirmação. □

Observação 1.2 *Apontamos que o Corolário 1.1 é uma extensão do caso de quase-sólitons de Ricci provado em [37] para o caso de variedades m−quasi-Einstein generalizadas. Este último caso foi provado recentemente em [30], usando uma técnica diferente da aplicada acima, no caso, a propriedade de simetria de* ΔRic*, mas com a restrição da dimensão ser* $n \geq 3$ *e o número* $m < \infty$*. Devido a esta última restrição, o resultado em [30] não pode ser aplicado para quase-sólitons de Ricci. Contudo, a nossa técnica permite obter o resultado de [37], conforme provamos no próximo corolário.*

Corolário 1.2 ([37]) *Para todo quase-sóliton de Ricci* $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, \lambda)$*, vale a relação*

$$d\varphi \wedge d\lambda = 0. \tag{1.26}$$

Em particular, $\nabla\lambda = \eta\nabla\varphi$*, para alguma função* η *sobre* $\mathbb{M}^n$.

Demonstração: Observe que sempre podemos completar a equação fundamental de um quase-sóliton de Ricci $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, \lambda)$ com uma função constante positiva f, de modo que, podemos aplicar o item (i) da Proposição 1.1, com o objetivo de obter (1.26), o qual é suficiente para concluir o corolário. □

A Proposição 1.1 é realmente uma boa ferramenta no contexto de variedade tipo Einstein. No nosso caso, ela estabelece restrições sobre as funções f, φ e λ que parametrizam a variedade tipo Ricci-Hessiano. A partir dela também deduzimos o principal resultado desta secção, a saber:

Teorema 1.1 *Seja $(\mathbb{M}^n, g, f, \varphi, \lambda)$, $n \geq 3$, uma variedade tipo Ricci-Hessiano. Se ∇f e $\nabla\varphi$ são linearmente independentes em $\mathfrak{X}(\mathbb{M})$, então o campo vetorial $\nabla\lambda$ pertence ao $C^\infty(\mathbb{M})$–módulo gerado por ∇f e $\nabla\varphi$.*

Demonstração: A segunda parte da Proposição 1.1 equivale aos campos vetoriais $\nabla\varphi$, ∇f e $\nabla\lambda$ serem linearmente dependentes. Portanto, o resultado segue imediatamente da hipótese da independência linear dos campos ∇f e $\nabla\varphi$. $\square$

1.4 Variedades tipo Ricci-Hessiano com tensor de Weyl harmônico

As variedades Riemannianas com tensor de Weyl harmônico são comumente estudadas no sentido de simplificar vários argumentos envolvendo a curvatura de Riemann. Um fato conhecido é que, uma variedade Riemanniana com tensor de Weyl harmônico e curvatura escalar constante é equivalente a ter a curvatura de Riemann com divergência nula. Com efeito, tomando a divergência na decomposição (1.1) e a segunda identidade de Bianchi, a afirmação segue de

$$\mathrm{div}Rm = \mathrm{div}W + (\mathrm{div}S) \otimes g = \mathrm{div}W + \frac{dR \otimes g}{2(n-1)}.$$

Agora trataremos de variedades tipo Ricci-Hessiano com tensor de Weyl harmônico. Primeiramente provaremos alguns lemas e proposições auxiliares para em seguida provarmos a Proposição 1.4 e o Teorema 1.3, que são os principais resultados desta secção.

Lema 1.3 *Para qualquer variedade tipo Ricci-Hessiano $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$, $n \geq 3$, com tensor de Weyl harmônico, vale a relação*

$$\begin{aligned} Rm(X,Y)\nabla f =& \frac{1}{f}\{X(f)\nabla^2 f(Y) - Y(f)\nabla^2 f(X)\} + \frac{f}{2m(n-1)}\{X(R)Y - Y(R)X\} \\ &+ \frac{f}{m}\{Rm(X,Y)\nabla\varphi + Y(\lambda)X - X(\lambda)Y\}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Demonstração: Como $\mathrm{div}W = 0$, de (1.4) e (1.5) temos que S é um tensor Codazzi. Assim, a partir de (1.2) um cálculo direto fornece

$$(\nabla_X Ric)Y - (\nabla_Y Ric)X = \frac{1}{2(n-1)}(X(R)Y - Y(R)X). \tag{1.28}$$

Relembremos a equação (1.15) como segue

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X Ric)Y - (\nabla_Y Ric)X + (\nabla_X \nabla^2\varphi)Y - (\nabla_Y \nabla^2\varphi)X = \\
&X(\lambda)Y - Y(\lambda)X + \frac{m}{f}\{(\nabla_X \nabla^2 f)Y - (\nabla_Y \nabla^2 f)X\} \\
&-\frac{m}{f^2}\{X(f)\nabla^2 f(Y) - Y(f)\nabla^2 f(X)\}.
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

Agora, combinando as equações (1.28) e (1.29) e utilizando a identidade (1.8) nesta combinação encontramos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2(n-1)}(X(R)Y - Y(R)X) + Rm(X,Y)\nabla\varphi = \\
&X(\lambda)Y - Y(\lambda)X + \frac{m}{f}(Rm(X,Y)\nabla f) - \frac{m}{f^2}\{X(f)\nabla^2 f(Y) - Y(f)\nabla^2 f(X)\}.
\end{aligned}
$$

Multiplicando a última equação por $\frac{f}{m}$ e reordenando adequadamente os termos encontramos a relação desejada. $\square$

Definição 1.1 *Denominaremos por f–hipersuperfície a subvariedade mergulhada em uma variedade suave $\mathbb{M}^n$ que é a imagem inversa de um valor regular de uma função real suave f sobre $\mathbb{M}^n$ e denotaremos por $\mathcal{F} = \bigcup_i f^{-1}(c_i)$ a família das f–hipersuperfícies para os valores regulares c_i.*

Em tais hipersuperfícies, cada componente conexa será uma folha de $\mathcal{F}$ e $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ será um campo vetorial unitário normal a cada f–hipersuperfície. Deste modo, $\mathbb{M}^n$ pode ser representada como a união $\mathbb{M}^n = \mathcal{F} \bigcup \mathcal{Z}_f$, onde $\mathcal{Z}_f$ é o conjunto dos pontos críticos de f. Se assumirmos que $\mathcal{Z}_f$ tem medida nula e que cada f–hipersuperfície seja conexa teremos que a coleção $\mathcal{F}$ definirá, a menos de um conjunto de medida nula, uma folheação de dimensão $n-1$ sobre $\mathbb{M}^n$ onde cada folha é totalmente umbílica.

Denotaremos por $\mathcal{Z}_\varphi$ o conjunto dos zeros do campo vetorial $\nabla\varphi$. Desde que $\mathcal{Z}_\varphi$ pode ser extremamente grande, assumiremos, daqui em diante, que ele será no máximo um subconjunto discreto de $\mathbb{M}^n$. É bem conhecido que campos vetoriais gradientes conformes não-triviais tem no máximo dois zeros (ver [39]). Entretanto, relembramos que a existência de tais campos vetoriais sobre uma variedade Riemanniana implica restrições geométricas sobre a variedade.

Observação 1.3 *Como já mencionamos, uma variedade tipo Ricci-Hessiano tornar-se uma variedade m–quasi-Einstein generalizada quando tomamos φ constante. Mas, diferentemente da secção anterior, aqui isto não é conveniente para nós, uma vez que $\mathcal{Z}_\varphi$ seria toda a variedade $\mathbb{M}$. Entretanto, sempre podemos transformar uma variedade m–quasi-Einstein generalizada $(\mathbb{M}, g, \psi, \lambda)$ em uma variedade tipo Ricci-Hessiano $(\mathbb{M}, g, \varphi, f, \lambda)$, de modo que, o conjunto dos pontos críticos das respectivas funções potenciais coincidem, por exemplo, na Observação 1.1 temos $\varphi = \frac{\psi}{2}$, $f = e^{-\frac{\psi}{2r}}$ e $\nabla\varphi = -\frac{r}{f}\nabla f$. Assumindo que $\mathcal{Z}_\psi$ seja um conjunto discreto, os resultados que obteremos a seguir serão generalizações naturais do caso de variedades m–quasi-Einstein generalizada para o caso das variedades tipo Ricci-Hessiano.*

Proposição 1.2 *Para qualquer variedade tipo Ricci-Hessiano $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$, $n \geq 3$, com tensor de Weyl harmônico, vale a relação*

$$\big((m+n-2)Ric(\nabla f, \cdot) - fRic(\nabla\varphi, \cdot) + (n-2)\nabla^2\varphi(\nabla f, \cdot)\big) \wedge df = (n-1)f\Omega(\nabla\varphi, \nabla f).$$

Em particular, se o campo vetorial $\nabla\varphi$ for normal às f–hipersuperfícies, ∇f será um autovetor do tensor de Ricci.

Demonstração: Efetuando o produto interno de (1.27) com ∇f obtemos

$$\begin{aligned}
&Y(f)\nabla^2 f(\nabla f, X) - X(f)\nabla^2 f(\nabla f, Y) = \\
&\frac{f^2}{m} g(Rm(X,Y)\nabla\varphi, \nabla f) - \frac{f^2}{m}\Big\{d\lambda(X) - \frac{dR(X)}{2(n-1)}\Big\}df(Y) \\
&+ \frac{f^2}{m}\Big\{d\lambda(Y) - \frac{dR(Y)}{2(n-1)}\Big\}df(X). \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

Observe que a Equação (1.16) do Lema 1.2 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
d\lambda - \frac{dR}{2(n-1)} =& \frac{m-1}{f(n-1)}Ric(\nabla f, \cdot) + \frac{R-(n-1)\lambda}{f(n-1)}df - \frac{1}{(n-1)}Ric(\nabla\varphi, \cdot) \\
&- \frac{1}{f(n-1)}\nabla^2\varphi(\nabla f, \cdot) + \frac{\Delta\varphi}{f(n-1)}df. \qquad (1.31)
\end{aligned}$$

Substituindo (1.31) em (1.30) teremos

$$\begin{aligned}
&Y(f)\nabla^2 f(\nabla f, X) - X(f)\nabla^2 f(\nabla f, Y) = \\
&\frac{f^2}{m} g(Rm(X,Y)\nabla\varphi, \nabla f) - \frac{f(m-1)}{m(n-1)}\{Ric(\nabla f, X)df(Y) - Ric(\nabla f, Y)df(X)\} \\
&+ \frac{f^2}{m(n-1)}\{Ric(\nabla\varphi, X)df(Y) - Ric(\nabla\varphi, Y)df(X)\} \\
&+ \frac{f}{m(n-1)}\{\nabla^2\varphi(\nabla f, X)df(Y) - \nabla^2\varphi(\nabla f, Y)df(X)\}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Por outro lado, a equação fundamental fornece

$$\begin{aligned}
&Y(f)\nabla^2 f(\nabla f, X) - X(f)\nabla^2 f(\nabla f, Y) = \\
&\frac{f}{m}\{Ric(\nabla f, X)df(Y) - Ric(\nabla f, Y)df(X)\} \\
&+ \frac{f}{m}\{\nabla^2\varphi(\nabla f, X)df(Y) - \nabla^2\varphi(\nabla f, Y)df(X)\}.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

De (1.32) e (1.33) conseguimos

$$\begin{aligned}
&(m+n-2)\{Ric(\nabla f, X)df(Y) - Ric(\nabla f, Y)df(X)\} = \\
&(n-1)fg(Rm(X,Y)\nabla\varphi, \nabla f) + f\{Ric(\nabla\varphi, X)df(Y) - Ric(\nabla\varphi, Y)df(X)\} \\
&-(n-2)\{\nabla^2\varphi(\nabla f, X)df(Y) - \nabla^2\varphi(\nabla f, Y)df(X)\}.
\end{aligned}$$

Agora, usando a forma de curvatura Ω e a definição de produto warped, verificamos a primeira parte da proposição.

Para o caso particular do campo vetorial $\nabla\varphi$ ser normal às f–hipersuperfícies, podemos escrever $\nabla\varphi = h\nabla f$ para alguma função suave h definida sobre $\mathbb{M}$. Logo,

$$\nabla^2\varphi(\nabla f, \cdot) = h\nabla^2 f(\nabla f, \cdot) + \nabla f(h)df. \tag{1.34}$$

Usando (1.34) e (1.10) obtemos

$$Ric(\nabla f, \cdot) = \frac{m - fh}{f}\nabla^2 f(\nabla f, \cdot) + (\lambda - \nabla f(h))df. \tag{1.35}$$

Substituindo (1.34) na relação enunciada nesta proposição temos

$$\Big((m+n-2)Ric(\nabla f, \cdot) - fhRic(\nabla f, \cdot) + (n-2)\nabla^2 f(\nabla\varphi, \cdot)\Big) \wedge df = 0. \tag{1.36}$$

Logo, para todo $p \in \mathbb{M}$ tal que $h(p) \neq 0$, temos

$$\Big(\nabla^2 f(\nabla f, \cdot) - \frac{fh - (m+n-2)}{(n-2)h} Ric(\nabla f, \cdot)\Big) \wedge df = 0.$$

Segue que na vizinhança de p existe uma função suave μ tal que

$$\nabla^2 f(\nabla f) = \frac{fh-(m+n-2)}{(n-2)h}Ric(\nabla f) + \mu\nabla f. \tag{1.37}$$

Substituindo (1.37) em (1.35) conseguimos

$$Ric(\nabla f) = (n-2)h\Big\{\frac{(m-fh)\mu + (\lambda - \nabla f(h))f}{(m-fh)^2 + m(n-2)}\Big\}\nabla f. \tag{1.38}$$

Desde que os pontos onde h é zero são pontos do conjunto $\mathcal{Z}_\varphi$, segue por um argumento de continuidade que a Equação (1.38) também se aplica para estes pontos, o que é suficiente para completar a prova da proposição. □

Observamos que a Proposição 1.2 é uma generalização natural do caso das variedades m–quasi Einstein generalizadas para o caso das variedades tipo Ricci-Hessiano e que o Exemplo 1.1 ilustra o caso em que $\nabla\varphi$ é normal às f–hipersuperfícies em $\mathbb{M}$.

Como consequência imediata da Proposição 1.2 temos que: Se a variedade tipo Ricci-Hessiano $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$, com $n \geq 3$, tem curvatura seccional constante, então ∇f é um autovetor de $\nabla^2\varphi$.

Com efeito, como $(\mathbb{M}^n, g)$ tem curvatura seccional constante, então ela é localmente conformemente plana. Daí, aplica-se a Proposição 1.2. Além disto, vale a identidade

$$Ric = (n-1)Kg,$$

onde K é a curvatura seccional de $\mathbb{M}$. Deste modo, temos que

$$\begin{aligned}\Omega(\nabla\varphi, \nabla f)(X,Y) &= g(Rm(X,Y)\nabla\varphi, \nabla f)\\ &= K\{g(\nabla f, X)g(\nabla\varphi, Y) - g(\nabla f, Y)g(\nabla\varphi, X)\}\\ &= -Kd\varphi \wedge df(X,Y)\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$. Ou seja, $\Omega(\nabla\varphi, \nabla f) = -Kd\varphi \wedge df$

Substituindo tais identidades na Proposição 1.2 obtemos

$$\nabla^2\varphi(\nabla f, \cdot) = \gamma g(\nabla f, \cdot)$$

para alguma função suave γ sobre $\mathbb{M}$. Isto prova nossa afirmação.

Como uma outra consequência desta proposição podemos verificar que, se $(\mathbb{M}^n, g, \psi, \lambda)$ é uma variedade m–quasi-Einstein generalizada localmente conformemente plana com

$n \geq 3$, então $\nabla\psi$ é um autovetor do operador do Ricci. De fato, pela Proposição 1.2 temos que $Ric(\nabla\psi, \cdot) \wedge d\psi = 0$. Logo, em uma vizinhança de qualquer ponto de $\mathbb{M}$ existe uma função suave η tal que $Ric(\nabla\psi, \cdot) = \eta d\psi$. Isto é suficiente para concluir que $Ric(\nabla\psi) = \eta\nabla\psi$ sobre toda $\mathbb{M}$. Tal fato é também verificado em [8] e [13] fazendo uso de outra técnica.

A proposição seguinte constitui-se em um instrumento técnico para a demonstração do Teorema 1.4.

Proposição 1.3 *Seja* $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$ *uma variedade tipo Ricci-Hessiano com* $n \geq 3$. *Se* $(\mathbb{M}^n, g)$ *tem tensor de Weyl harmônico e* $W(\nabla f, \cdot, \cdot)$ *é identicamente nulo, então sobre qualquer* f*–hipersuperfície de* $\mathbb{M}$ *vale a seguinte relação*

$$\begin{aligned}
&(n+m-2)\Big\{\nabla^2 f(E_i, E_j) - \frac{1}{(n-1)}(\Delta f - \nabla^2 f(\nu,\nu))g_{ij}\Big\} = \\
&- f\Big\{\nabla^2\varphi(E_i, E_j) - \frac{1}{(n-1)}(\Delta\varphi - \nabla^2\varphi(\nu,\nu))g_{ij}\Big\} \\
&+ \frac{(n-2)f^2}{m|\nabla f|^2}\Big\{g(Rm(E_i, \nabla f)\nabla\varphi, E_j) - \frac{Ric(\nabla f, \nabla\varphi)}{(n-1)}g_{ij}\Big\},
\end{aligned} \tag{1.39}$$

onde $\{E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n = \nu\}$, *para* $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, *é um referencial ortonormal de* $\mathbb{M}$ *adaptado às* f*–hipersuperfícies.*

Demonstração: Sendo $W(\nabla f, \cdot, \cdot)$ identicamente nulo, segue de (1.1) que

$$Rm(X, Y, Z, \nabla f) = S \odot g(X, Y, Z, \nabla f).$$

Então, pelo Lema 1.3 deduzimos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f}\{g(\nabla f, Y)\nabla^2 f(X, Z) - g(\nabla f, X)\nabla^2 f(Y, Z)\} + \frac{f}{m}g(Rm(X, Y)Z, \nabla\varphi) \\
&+ \frac{f}{m}\{g(\nabla\lambda, X)g(Y, Z) - g(\nabla\lambda, Y)g(X, Z)\} \\
&- \frac{f}{2m(n-1)}\{g(\nabla R, X)g(Y, Z) - g(\nabla R, Y)g(X, Z)\} = \\
&S(X, \nabla f)g(Y, Z) + S(Y, Z)g(X, \nabla f) - S(X, Z)g(Y, \nabla f) - S(Y, \nabla f)g(X, Z).
\end{aligned}$$

Considere o referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n = \nu\}$ em uma vizinhança de qualquer ponto regular de f. Fazendo $X = \nu$, $Y = E_i$ e $Z = E_j$, e dividindo ambos os lados da última equação por $|\nabla f|$, conseguimos

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(E_i,E_j) =& \frac{f^2}{m|\nabla f|} g\big(\nabla\lambda - \frac{\nabla R}{2(n-1)}, \nu\big) g_{ij} + \frac{f^2}{m|\nabla f|} g(Rm(\nu,E_i)E_j,\nabla\varphi) \\ & - f\{S(\nu,\nu)g_{ij} - S(E_i,E_j)\},\end{aligned} \tag{1.40}$$

onde $g_{ij} = g(E_i,E_j)$ para todo $i,j \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Usando a equação fundamental e a identificação para o tensor de Schouten, obtemos

$$S(\nu,\nu)g_{ij} = \frac{1}{n-2}\Big\{\lambda g_{ij} + \frac{m}{f}\nabla^2 f(\nu,\nu)g_{ij} - \nabla^2\varphi(\nu,\nu)g_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}\Big\} \tag{1.41}$$

e

$$S(E_i,E_j) = \frac{1}{n-2}\Big\{\lambda g_{ij} + \frac{m}{f}\nabla^2 f(E_i,E_j) - \nabla^2\varphi(E_i,E_j) - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}\Big\}. \tag{1.42}$$

Agora, considere a Equação (1.16) reformulada como

$$\begin{aligned}\nabla\lambda - \frac{\nabla R}{2(n-1)} =& \frac{m-1}{(n-1)f}Ric(\nabla f) + \frac{R-(n-1)\lambda}{(n-1)f}\nabla f \\ & - \frac{Ric(\nabla\varphi)}{(n-1)} - \frac{\nabla^2\varphi(\nabla f)}{(n-1)f} + \frac{\Delta\varphi\nabla f}{(n-1)f}.\end{aligned}$$

Usando a última equação e a identidade

$$Ric(\nu,\nu) = \lambda + \frac{m}{f}\nabla^2 f(\nu,\nu) - \nabla^2\varphi(\nu,\nu)$$

teremos

$$\begin{aligned}&\frac{f^2}{|\nabla f|} g\big(\nabla\lambda - \frac{\nabla R}{2(n-1)},\nu\big) \\ =& \frac{(m-1)f}{(n-1)}Ric(\nu,\nu) + \frac{(R-(n-1)\lambda)f}{(n-1)} - \frac{f^2 Ric(\nabla\varphi,\nu)}{(n-1)|\nabla f|} - \frac{f\nabla^2\varphi(\nu,\nu)}{(n-1)} + \frac{f\Delta\varphi}{(n-1)} \\ =& \frac{m(m-1)}{(n-1)}\nabla^2 f(\nu,\nu) - \frac{mf}{(n-1)}\nabla^2\varphi(\nu,\nu) + \frac{(R+(m-n)\lambda)f}{(n-1)} + \frac{f\Delta\varphi}{(n-1)} \\ & - \frac{f^2 Ric(\nabla\varphi,\nu)}{(n-1)|\nabla u|}.\end{aligned} \tag{1.43}$$

Substituindo (1.41), (1.42) e (1.43) em (1.40) encontramos

$$\begin{aligned}&\frac{n+m-2}{n-2}\nabla^2 f(E_i,E_j) = \\ & - \frac{n+m-2}{(n-1)(n-2)}\nabla^2 f(\nu,\nu)g_{ij} - \frac{f}{(n-1)(n-2)}\nabla^2\varphi(\nu,\nu)g_{ij} + \frac{f}{n-2}\nabla^2\varphi(E_i,E_j) \\ & + \frac{f^2}{m|\nabla f|}g(Rm(\nu,E_i)E_j,\nabla\varphi) - \frac{f^2}{m|\nabla f|}\frac{Ric(\nu,\nabla\varphi)}{n-1}g_{ij} \\ & + \frac{f}{n-1}\left\{\frac{\Delta\varphi}{m} + \frac{R+(m-n)\lambda}{m} + \frac{R-2(n-1)\lambda}{n-2}\right\}g_{ij}.\end{aligned} \tag{1.44}$$

A Equação $\frac{m}{f}\Delta f = R + \Delta\varphi - n\lambda$ conduz a seguinte identidade

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{m} + \frac{R+(m-n)\lambda}{m} + \frac{R-2(n-1)\lambda}{n-2} &= \frac{\Delta\varphi}{m} + \frac{n+m-2}{m(n-2)}(R-n\lambda)\\ &= \frac{\Delta\varphi}{n-2} + \frac{n+m-2}{n-2}\frac{\Delta f}{f}.\end{aligned}$$

Substituindo esta última expressão em (1.44) e reordernando os termos obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{n+m-2}{n-2}\nabla^2 f(E_i,E_j) + \frac{n+m-2}{(n-1)(n-2)}\nabla^2 f(\nu,\nu)g_{ij} - \frac{(n+m-2)\Delta f}{(n-1)(n-2)}g_{ij} =\\ &-\frac{f}{(n-1)(n-2)}\nabla^2\varphi(\nu,\nu)g_{ij} + \frac{f\Delta\varphi}{(n-1)(n-2)}g_{ij} - \frac{f}{n-2}\nabla^2\varphi(E_i,E_j)\\ &+\frac{f^2}{m|\nabla f|}g(Rm(\nu,E_i)E_j,\nabla\varphi) - \frac{f^2}{m|\nabla f|}\frac{Ric(\nu,\nabla\varphi)}{n-1}g_{ij}\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. $\square$

No estudo de variedades com tensor de Weyl harmônico ou tensor curvatura harmônico ocor naturalmente a existência de tensores Codazzi e muitos resultados derivam de tais variedades. Derdzinski em [18] classificou localmente os tensores Codazzi que admitem exatamente dois autovalores distintos. Ele mostrou que, dado um tensor T Codazzi não-paralelo com traço constante sobre uma variedade Riemanniana $\mathbb{M}^n$ com $n \geq 3$, se p é um ponto de $\mathbb{M}$ tal que, em sua vizinhança T tem exatamente 2 autovalores distintos, então p tem uma vizinhança isométrica a um produto warped $I \times_f \mathbb{F}$ onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Nesta direção, procederemos no intuito de classificar localmente variedades tipo Ricci-Hessiano com tensor de Weyl harmônico.

Além dos resultados obtidos até então, para a prova do nosso próximo teorema será determinante o seguinte:

Teorema 1.2 (Derdzinski[18]) *Dada uma variedade Riemanniana $(\mathbb{M}^n, g)$ e um tensor T sobre $\mathbb{M}$, considere $\mathbb{M}_T$ o subconjunto aberto denso em $\mathbb{M}$ constituído dos pontos nos quais os autovalores de T tem multiplicidade contante. Sendo T um tensor Codazzi, em cada componente conexa de $\mathbb{M}_T$ temos que*

i) Os autoespaços de T são integráveis e suas folhas são totalmente umbílicas em $\mathbb{M}$;

ii) Todo autovalor de multiplicidade maior que 1 é constante ao longo das folhas de seu correspondente autoespaço.

Uma consequência deste teorema é que: se uma variedade Riemanniana $(\mathbb{M}^n, g)$ admite um tensor Codazzi tal que em cada ponto de $\mathbb{M}^n$ ele tem exatamente dois autovalores distintos com multiplicidade 1 e $n-1$, então o fibrado tangente se decompõe como a soma direta ortogonal de duas distribuições integráveis, uma totalmente geodésica de dimensão 1 e outra totalmente umbilílica de dimensão $n-1$ (ver Proposição 16.11 em [6] para maiores detalhes).

Definição 1.2 *Dizemos que uma variedade Riemanniana* $(\mathbb{M}^n, g)$ *é* φ*–radialmente* flat *se seu tensor curvatura satisfaz* $Rm(\cdot, \nabla\varphi)\nabla\varphi = 0$.

Estamos prontos para enunciarmos outro principal resultado desta tese.

Proposição 1.4 *Seja* $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$, $n \geq 3$, *uma variedade tipo Ricci-Hessiano com tensor de Weyl harmônico,* $W(\nabla f, \cdot, \cdot)$ *nulo e* $\nabla\varphi$ *normal às* f*–hipersuperfícies. Além disso, suponha que* $(\mathbb{M}^n, g)$ *é* φ*–radialmente flat. Então,* $(\mathbb{M}^n, g)$ *é, em uma vizinhança de qualquer ponto regular de* f*, localmente isométrica a um produto warped com fibra Einstein de dimensão* $n-1$.

Demonstração: Para esta prova consideraremos ainda o referencial ortonormal, assim como os resultados obtidos até então. Como $\nabla\varphi = h\nabla f$, para h uma função suave sobre $\mathbb{M}$, temos

$$\nabla^2\varphi = h\nabla^2 f + dh \otimes df, \tag{1.45}$$

que implica

$$\nabla^2\varphi(E_i, E_j) = h\nabla^2 f(E_i, E_j) \quad \text{e} \quad \nabla^2\varphi(\nu, \nu) = h\nabla^2 f(\nu, \nu) + g(\nabla h, \nabla f).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \sum_{i=1}^{n-1} \nabla^2\varphi(E_i, E_i) + \nabla^2\varphi(\nu, \nu) \\ &= h\Delta f + g(\nabla h, \nabla f). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$0 = Rm(\cdot, \nabla\varphi)\nabla\varphi = h^2 Rm(\cdot, \nabla f)\nabla f \quad \text{e} \quad 0 = Ric(\nabla\varphi, \nabla\varphi) = h^2 Ric(\nabla f, \nabla f).$$

Assim, temos $(Rm(\cdot,\nabla f)\nabla f)(x) = 0$ e $Ric(\nabla f,\nabla f)(x) = 0$ para $x \in \mathbb{M}$ tal que $h(x) \neq 0$. Por continuidade, o mesmo vale nos pontos $y \in \mathbb{M}$ onde $h(y) = 0$, desde que $y \in \mathcal{Z}_\varphi$.

Com estas considerações em mente a relação (1.39) dada pela Proposição 1.3 torna-se

$$\begin{aligned}(n+m-2)&\left\{\nabla^2 f(E_i,E_j) - \frac{1}{n-1}(\Delta f - \nabla^2 f(\nu,\nu))g_{ij}\right\} = \\ &- fh\nabla^2 f(E_i,E_j) - \frac{fh}{n-1}(\Delta f - \nabla^2 f(\nu,\nu))g_{ij}.\end{aligned}$$

Logo,

$$(n+m-2+hf)\left\{\nabla^2 f(E_i,E_j) - \frac{1}{n-1}(\Delta f - \nabla^2 f(\nu,\nu))g_{ij}\right\} = 0. \tag{1.46}$$

Assim, teremos dois casos a considerar:

Primeiro caso. *Parte* (i)*:* Suponha que exista um ponto q da f–hipersuperfície tal que $(n+m-2+hf)(q) \neq 0$. Então, da Equação (1.46) e por continuidade, existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{M}$ onde ocorre

$$\nabla^2 f(E_i,\cdot) = \sigma g(E_i,\cdot) \ \text{ para } \ i \in \{1,\ldots,n-1\} \ \text{ e } \ \sigma = \frac{1}{n-1}\{\Delta f - \nabla^2 f(\nu,\nu)\}. \tag{1.47}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.2, ∇f é um autovetor de Ric. Consequentemente, pela Equação (1.37), ∇f é também um autovetor de $\nabla^2 f$, o que significa que

$$\nabla^2 f(\nabla f,\cdot) = \rho g(\nabla f,\cdot) \tag{1.48}$$

para uma função suave ρ sobre $\mathbb{M}$.

Das relações (1.47) e (1.48) concluimos que ρ e σ são autovalores de $\nabla^2 f$ com multiplicidade 1 e $n-1$, respectivamente. Usando a Equação (1.45) e a equação fundamental temos

$$Ric + (h - \frac{m}{f})\nabla^2 f = \lambda g - dh \otimes df. \tag{1.49}$$

Não é difícil verificar que ∇f e E_i são autovetores do tensor $dh \otimes df$. Portanto, de (1.49) concluimos que o tensor de Ricci também admitirá dois autovalores com as mesmas multiplicidades, onde ∇f é o autovetor associado ao autovalor de multiplicidade 1. Consequentemente, o mesmo ocorre como o tensor de Schouten dado por (1.2). Ademais, o tensor de Schouten é Codazzi pois $(\mathbb{M}, g)$ tem tensor de Weyl harmônico.

Parte (ii): Para cada ponto $p \in U$ temos a decomposição $T_p\mathbb{M} = [\nabla f]_p \oplus [\nabla f]_p^{\perp}$, onde as variedades integrais de $[\nabla f]_p^{\perp}$ são totalmente umbilílicas. Consideremos um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ com base coordenada $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n-1}, \partial_n = \nu\}$ para o qual a métrica g, restrita a cada subvariedade integral $\mathbb{F} \subset \mathbb{M}$ de $[\nabla f]_p^{\perp}$, satisfaz

$$\mathcal{A}(\partial_i, \partial_j) = H g_{ij},$$

onde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ para $i, j = 1, \ldots, n-1$, enquanto que $\mathcal{A}$ e H representam a segunda forma fundamental e a função curvatura média de $\mathbb{F}$, respectivamente.

Da equação de Codazzi temos

$$\begin{aligned} \partial_i(H)g_{jk} - \partial_j(H)g_{ik} &= (\nabla_{\partial_i}\mathcal{A})(\partial_j, \partial_k) - (\nabla_{\partial_j}\mathcal{A})(\partial_i, \partial_k) \\ &= g(Rm(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \nu). \end{aligned}$$

Então,

$$Ric(\nu, \partial_i) = (n-1)\partial_i(H) \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Como ν é autovetor de Ric temos que $\partial_i(H) = 0$. Logo, H é constante sobre $\mathbb{F}$.

Desde que $[\nu, \partial_i] = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \nu(g_{ij}) &= g(\nabla_\nu \partial_i, \partial_j) + g(\nabla_\nu \partial_j, \partial_i) \\ &= g(\nabla_{\partial_i}\nu, \partial_j) + g(\nabla_{\partial_j}\nu, \partial_i) \\ &= -2\mathcal{A}(\partial_i, \partial_j) \\ &= -2Hg_{ij}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Como H está em função somente da variável x_n, temos a solução $g_{ij} = e^{-\theta}G_{ij}$ de (1.50), onde $\theta = \theta(x_n)$ e G é uma outra métrica sobre $\mathbb{F}$. Logo, na vizinhança de q, $\mathbb{M}$ é da forma $I \times_{e^{-\theta}} \mathbb{F}$ com métrica

$$g = dx_n^2 + e^{-\theta}G.$$

Dado que $(\mathbb{M}, g)$ tem tensor de Weyl harmônico, temos, pelo Teorema 1.1 em [8], que $\mathbb{F}$ é uma variedade Einstein.

Segundo caso: Suponha que exista um ponto q pertencente a f–hipersuperfície tal que $(n+m-2+fh)(q) = 0$. Então, neste ponto temos

$$h = \frac{c}{f} < 0 \quad \text{para} \quad c = -(n+m-2). \tag{1.51}$$

Por continuidade, a Equação (1.51) é também verdadeira em pontos de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{M}$ contendo q e temos $\nabla\varphi = \dfrac{c}{f}\nabla f$ sobre este conjunto aberto. Além disso, um cálculo direto mostra que

$$\nabla^2(\ln f) = \frac{1}{f}\nabla^2 f - d(\ln f) \otimes d(\ln f).$$

Logo,

$$\nabla^2\varphi = \frac{c}{f}\nabla^2 f - \frac{c}{f^2}df \otimes df = c\Big(\frac{1}{f}\nabla^2 f - d(\ln f) \otimes d(\ln f)\Big) = c\nabla^2(\ln f)$$

e a equação fundamental torna-se

$$Ric_g - (m-c)\nabla^2(\ln f) - md(\ln f) \otimes d(\ln f) = \lambda g \tag{1.52}$$

Sabendo que $(\mathbb{M}, g)$ tem tensor de Weyl harmônico, podemos escolher uma função suave u e uma métrica $\bar{g}$ tal que $\bar{g} = e^{2u}g$. Pela teoria conforme, $Ric_{\bar{g}}$ é relacionado a Ric_g pela bem conhecida fórmula (veja, por exemplo, [6])

$$Ric_{\bar{g}} = Ric_g - (n-2)\nabla^2 u + (n-2)du \otimes du - [(n-2)|\nabla u|^2 + \Delta u]g.$$

Tomando $u = \dfrac{m-c}{n-2}\ln f$ temos

$$\begin{aligned} Ric_{\bar{g}} &= \lambda g + md(\ln f) \otimes d(\ln f) + (n-2)du \otimes du - [(n-2)|\nabla u|^2 + \Delta u]g \\ &= \lambda g + m\frac{(n-2)^2}{(m-c)^2}du \otimes du + (n-2)du \otimes du - [(n-2)|\nabla u|^2 + \Delta u]g \\ &= \left[m\frac{(n-2)^2}{(m-c)^2} + (n-2)\right] du \otimes du - [(n-2)|\nabla u|^2 + \Delta u - \lambda]e^{-2u}\bar{g}. \end{aligned}$$

Levando em conta que ambos os tensores $du \otimes du$ e $\bar{g}$ admitem autovalores de multiplicidade 1 (com autovetor $\nabla u = \frac{m-c}{(n-2)f}\nabla f$) e $n-1$, deduzimos que $Ric_{\bar{g}}$ também admite. Logo, mais uma vez teremos o tensor de Schouten $S_{\bar{g}}$ com dois autovalores de multiplicidade 1 e $n-1$.

Os tensores de Cotton $C_{\bar{g}}$ e C_g podem ser relacionados pela fórmula

$$(n-2)C_{\bar{g}} = (n-2)C_g - W_g(\nabla u, \cdot, \cdot). \tag{1.53}$$

Para uma demonstração desta relação veja o apêndice em [13]. Pela hipótese $\mathrm{div}_g W = 0$ e pela equação (1.5) temos $C_g = 0$. A partir de (1.53) obtemos $C_{\bar{g}} = 0$. Logo, $S_{\bar{g}}$ é um tensor Codazzi. Agora, procedemos como na parte (ii) do primeiro caso para concluirmos a prova do teorema. $\square$

Corolário 1.3 (Catino [13]) *Seja* $(\mathbb{M}^n, g, \psi, \lambda)$, $n \geq 3$, *uma variedade* m*–quasi-Einstein generalizada com tensor de Weyl harmônico e* $W(\nabla\psi, \cdot, \cdot)$ *nulo. Então, em uma vizinhança de qualquer ponto regular de* ψ*, a variedade* $(\mathbb{M}^n, g)$ *é localmente isométrica a um produto warped com fibra Einstein de dimensão* $n-1$.

Demonstração: Conforme já explicamos na Observação 1.3, sempre podemos converter uma variedade m–quasi-Einstein generalizada $(\mathbb{M}, g, \psi, \lambda)$ em uma variedade tipo Ricci-Hessiano $(\mathbb{M}, g, \varphi, f, \lambda)$, de modo que, $\mathcal{Z}_\psi = \mathcal{Z}_\varphi = \mathcal{Z}_f$. Assim, desde que $\mathcal{Z}_\psi$ tenha medida nula, podemos aplicar o Teorema 1.4 para obtermos o resultado do corolário.

Notando que a classe das variedades com tensor de Weyl harmônico incluem a classe das variedades conformemente plana, *a fortiori*, vale o seguinte teorema.

Teorema 1.3 *Seja* $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$, $n \geq 3$, *uma variedade tipo Ricci-Hessiano localmente conformemente plana com* $\nabla\varphi$ *normal às* f*–hipersuperfícies. Além disso, suponha que* $(\mathbb{M}^n, g)$ *é* φ*–radialmente* flat. *Então,* $(\mathbb{M}^n, g)$ *é, em uma vizinhança de qualquer ponto regular de* f*, localmente isométrica a um produto warped com fibra Einstein de dimensão* $n-1$.

Observação 1.4 *A relação* (1.48) *implica* $|\nabla f|$ *constante sobre às* f*–hipersuperfícies. De fato, para todo* E_i *sobre uma* f*–hipersuperfície temos*

$$\begin{aligned} d|\nabla f|^2(E_i) &= 2g(\nabla_{\nabla f}\nabla f, E_i) \\ &= \nabla^2 f(\nabla f, E_i) = 0. \end{aligned}$$

Tal fato é consequência direta da Proposição 1.2, pois quando $\nabla\varphi$ *é normal às* f*–hipersuperfícies,* ∇f *também será um autovetor de* $\nabla^2 f$.

Observação 1.5 *Um resultado devido a E. Cartan afirma que uma hipersuperfície de uma variedade conformemente plana de dimensão* $n \geq 5$ *é conformemente plana se, e somente se, sua segunda forma fundamental tem um único autovalor ou dois autovalores onde um deles tem multiplicidade* 1 *[20]. Deste modo, as* f*–hipersuperfícies de uma variedade tipo Ricci-Hessiano nas condições do Teorema 1.4 e com* $n \geq 5$ *serão também conformemente plana.*

Como já foi dito, o parâmetro φ constitui uma obstrução para a validade das propriedades das m–quasi-Einstein generalizadas sobre uma variedade tipo Ricci-Hessiano.

Toda variedade tipo Ricci-Hessiano localmente conformemente plana com φ constante ou $\nabla\varphi$ conforme é localmente um produto warped com fibra Einstein de dimensão $n-1$. A verificação desta afirmação é imediata desde que em qualquer um destes casos tal variedade reduz-se a uma variedade m–quasi-Einstein generalizada e a classe das variedades com tensor de Weyl harmônico e com $W(\nabla f, \cdot, \cdot)$ nulo incluem a classe das variedades localmente conformemente plana. Desta forma, a hipótese $\nabla\varphi$ normal às f–hipersuperfícies é crucial para o Teorema 1.4. Perguntamos, então, sob que outras hipóteses para φ o Teorema 1.4 ainda é válido. A resposta é positiva se $\nabla\varphi$ é um campo vetorial conforme não-trivial.

A proposição seguinte exibe um outro caso bem menos geral, ou mesmo particular do Teorema 1.4, e será mostrado à guisa de outro exemplo.

Proposição 1.5 *Seja* $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$*,* $n \geq 3$*, uma variedade tipo Ricci-Hessiano com tensor de Weyl harmônico e* $W(\nabla f, \cdot, \cdot)$ *nulo. Se* $\nabla^2\varphi$ *admite dois autovalores distintos de multiplicidade* 1 *e* $n-1$ *com* ∇f *sendo o autovetor de multiplicidade* 1*, então, em uma vizinhança de qualquer ponto regular de* f*,* $(\mathbb{M}^n, g)$ *é localmente um produto warped com fibra Einstein de dimensão* $n-1$*.*

Demonstração: O procedimento para a demonstração é semelhante àquele executado no segundo caso do demonstração do Teorema 1.4. Basta que $(\mathbb{M}, g)$, munida com uma métrica tipo Ricci-Hessiano, admita um tensor Codazzi com dois autovalores distintos de multiplicidade 1 e $n-1$, e que ∇f seja o autovetor de multiplicidade 1. Para que isto ocorra, é suficiente verificar que o tensor de Ricci na métrica g também tem essa mesma propriedade.

Tomando sobre $\mathbb{M}$ a métrica conforme $\bar{g} = e^{-\frac{2u}{(n-2)}}g$, a relação (1.53) entre $C_{\bar{g}}$ e C_g terá a forma

$$(n-2)C_{\bar{g}} = (n-2)C_g + \frac{1}{n-2}W_g(\nabla u, \cdot, \cdot).$$

Considere $f = e^{-\frac{u}{m}}$. Segue que $C_g = 0$ e $W_g(\nabla u, \cdot, \cdot) = -\frac{m}{f}W_g(\nabla f, \cdot, \cdot) = 0$ implicam $C_{\bar{g}} = 0$, ou seja, o tensor de Schouten $S_{\bar{g}}$ é Codazzi.

Sendo $(\mathbb{M}^n, g, \varphi, f, \lambda)$ uma variedade tipo Ricci-Hessiano, temos que

$$\begin{aligned} Ric_g + \nabla^2 u - \frac{1}{m} du \otimes du &= Ric_g - \frac{m}{f}\nabla^2 f \\ &= -\nabla^2\varphi + (Ric_g + \nabla^2\varphi - \frac{m}{f}\nabla^2 f) \\ &= -\nabla^2\varphi + \lambda g. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Usando (1.54) e a expressão do tensor de Ricci na métrica $\bar{g}$ temos

$$\begin{aligned} Ric_{\bar{g}} &= Ric_g + \nabla^2 u + \frac{1}{n-2} du \otimes du + \frac{\Delta u - |\nabla u|^2}{n-2} g \\ &= Ric_g + \nabla^2 u - \frac{1}{m} du \otimes du + \frac{m+n-2}{m(n-2)} du \otimes du + \frac{\Delta u - |\nabla u|^2}{n-2} g \\ &= -\nabla^2\varphi + \lambda g + \frac{m+n-2}{m(n-2)} du \otimes du + \frac{\Delta u - |\nabla u|^2}{n-2} g \\ &= -\nabla^2\varphi + \frac{m+n-2}{m(n-2)} du \otimes du + \frac{\Delta u - |\nabla u|^2 + (n-2)\lambda}{n-2} g. \end{aligned}$$

Desde que ambos os tensores $\nabla^2\varphi$, $du \otimes du = \frac{m^2}{f^2} df \otimes df$ e g admitem dois autovalores distintos de multiplicidade 1 e $n-1$, todos com os mesmos autoespaços, temos que o mesmo ocorre com o tensor de Ricci na métrica $\bar{g}$. Consequentemente, também vale para o tensor de Schouten $S_{\bar{g}}$ que é Codazzi. O resto da demonstração se processa como no Teorema 1.4. $\square$

Capítulo 2

Considerações sobre variedades tipo Ricci-Hessiano

2.1 Variedades tipo Ricci-Hessiano Kähler

Nesta secção mostramos que a Proposição 1.2 se apresenta de modo particular para as variedades tipo Ricci-Hessiano Kähler.

Para qualquer variedade complexa $\mathbb{M}$, um homomorfismo linear $J : TM \to TM$ satisfazendo $J^2 = -Id$, onde Id é a aplicação identidade em $T\mathbb{M}$, é chamado uma *estrutura complexa* em $T\mathbb{M}$. Uma variedade Kähler $(\mathbb{M}, g, J)$ é uma variedade diferenciável complexa $\mathbb{M}$ com métrica Riemanniana g que torna J auto-adjunto e paralelo na conexão Riemanniana. Ou seja, satisfazem $g(JX, Y) = -g(X, JY)$ e $\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y$.

Definição 2.1 *Uma variedade tipo Ricci-Hessiano Kähler* $(\mathbb{M}^n, g, J, f, \varphi, \lambda)$ *é uma variedade Kähler com funções reais suaves* φ, f *e* λ *sobre* $\mathbb{M}$ *satisfazendo*

$$Ric + \nabla^2\varphi = \lambda g + \frac{m}{f}\nabla^2 f$$

onde m *é um inteiro positivo e* J *é uma estrutura complexa em* $T\mathbb{M}$.

Lembramos que a forma Ricci ρ e a forma Kähler ω são as 2–formas dadas por

$$\rho(X, Y) = Ric(JX, Y) \quad \text{e} \quad \omega(X, Y) = g(JX, Y),$$

tais formas são fechadas sob uma variedade Kähler.

Um campo vetorial suave X sobre uma variedade complexa é chamado *holomórfico* se satisfaz $\mathcal{L}_X J = 0$, onde $\mathcal{L}$ representa a derivada de Lie.

Temos que o campo vetorial ∇f é holomórfico se, e somente se, o tensor Hessiano $\nabla^2 f$ é Hermitiano, isto é, vale

$$\nabla^2 f(JX, Y) = -\nabla^2 f(X, JY).$$

Neste caso, f é chamada *potencial de Killing*, isto é, uma função suave para o qual $J\nabla f$ é um campo vetorial de Killing. Para mais informações acerca deste tema o leitor poderá consultar [19] e [33]. Consequentemente, $\nabla^2 f$ pode ser escrito como

$$\nabla^2 f(JX, Y) = \frac{1}{2} d(i_{\nabla f}\omega)$$

onde $i_X\omega$ representa a operação produto interior de ω pelo campo vetorial X. De fato, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ temos

$$\begin{aligned} d(i_{\nabla f}\omega)(X, Y) &= X(i_{\nabla f}\omega)(Y) - Y(i_{\nabla f}\omega)(X) - (i_{\nabla f}\omega)([X, Y]) \\ &= Xg(J\nabla f, Y) - Yg(J\nabla f, X) - g(J\nabla f, [X, Y]) \\ &= g(\nabla_X J\nabla f, Y) - g(\nabla_Y J\nabla f, X) = 2g(\nabla_Y \nabla f, JX) \\ &= 2\nabla^2 f(JX, Y). \end{aligned}$$

Com estes conceitos verificamos a seguinte

Propriedade 2.1 *Seja* $(\mathbb{M}^n, g, J, f, \varphi, \lambda)$ *uma variedade tipo Ricci-Hessiano Kähler. Se* ∇f *e* $\nabla\varphi$ *são campos vetoriais holomóficos, então é válida a relação* $\nabla\lambda = \psi\nabla f$ *para alguma função suave* ψ *sobre* $\mathbb{M}$.

Demonstração: Compondo a equação fundamental com o operador J temos

$$Ric(JX, Y) + \nabla^2\varphi(JX, Y) = \frac{m}{f}\nabla^2 f(JX, Y) + \lambda g(JX, Y).$$

Tal equação pode então ser escrita como

$$\rho + \frac{1}{2} d(i_{\nabla\varphi}\omega) = \frac{m}{2f} d(i_{\nabla\varphi}\omega) + \lambda\omega.$$

Aplicando a diferencial exterior e usando que ρ e ω são fechadas, obtemos

$$\frac{m}{2} df \wedge d(i_{\nabla\varphi}\omega) = f^2 d\lambda \wedge \omega.$$

Diferenciando novamente e sendo f positiva, temos

$$df \wedge d\lambda \wedge \omega = 0.$$

Levando em conta que a aplicação $\Theta : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+2}$ dada por $\Theta(\cdot) = \omega \wedge (\cdot)$ é um isomorfismo, segue que $df \wedge d\lambda = 0$. Logo, teremos $\nabla f = \psi \nabla \lambda$ para alguma função suave ψ sobre $\mathbb{M}$. $\square$

Observação 2.1 *É sabido que nenhuma variedade Kähler admite uma estrututa de quase-sóliton de Ricci gradiente própria. De fato, podemos garantir este resultado imediatamente fazendo f constante na Propriedade 2.1. Além disso, essa propriedade também mostra uma condição necessária relevante para que variedades Kähler estejam munidas de métricas quasi-Einstein gradiente ou tipo Ricci-Hessiano, ambas próprias.*

2.2 Variedades tipo Ricci-Hessiano conformes ao espaço Euclidiano

Nesta secção abordamos o espaço Euclidiano com estrutura tipo Ricci-Hessiano cuja métrica é conforme a métrica canônica g_0 do $\mathbb{R}^n$. Utilizamos ainda a invariância sob um grupo de translação para deduzirmos um sistema de equações diferenciais cujas soluções são classes de variedades tipo Ricci-Hessiano.

Destacamos que Barbosa, Pina e Tenenblat [1] abordaram sólitons de Ricci gradientes conformes a um pseudo-espaço Euclidiano de dimensão $n-1$ que são invariantes sob a ação de um grupo de translação de dimensão $n-1$ e forneceram todas as tais soluções para o caso de um sóliton de Ricci gradiente estável. Sousa e Pina em [38] consideraram o produto warped $\mathbb{M} = \mathbb{B}^n \times_f \mathbb{F}^m$ sóliton de Ricci gradiente quando a base $\mathbb{B}$ é conforme a um pseudo-espaço Euclidiano de dimensão n invariante sob a ação de um grupo de translação de dimensão $n-1$ e a fibra $\mathbb{F}$ é Ricci *flat*, e também fornecem as soluções para o caso dos sólitons de Ricci gradiente estacionário. Além disso, provaram que a função potencial depende somente da base e a fibra $\mathbb{F}$ é necessariamente Einstein.

A seguir, mostraremos relações similares àquelas obtidas nos trabalhos citados acima e que envolvem o fator conforme φ, a função potencial u, a função warping f e a função sóliton λ. Como aplicação de tais relações, exibiremos classes específicas de variedades m–quasi-Einstein pelo mesmo método empregado em [1] e [38]. Consideremos a variedade tipo Ricci-Hessiano $(\mathbb{M}^n, g, u, f, \lambda)$ com equação fundamental

$$Ric_g + \nabla_g^2 u = \frac{m}{f}\nabla_g^2 u = \lambda g. \tag{2.1}$$

Seja g_0 uma métrica Riemanniana sobre $\mathbb{M}$. Se $g = \frac{1}{\varphi^2} g_o$ é uma métrica conforme a g_0 com φ uma função suave positiva sobre $\mathbb{M}$, então o tensor de Ricci na métrica g é dado pela relação

$$Ric_g = Ric_{g_o} + \frac{1}{\varphi^2}\left\{(n-2)\varphi\nabla_{g_o}^2\varphi + \big(\varphi\Delta\varphi - (n-1)|\nabla\varphi|^2\big)g_o\right\}, \tag{2.2}$$

onde as grandezas $\Delta\varphi$ e $|\nabla\varphi|$ que aparecem no segundo termo desta equação são calculadas na métrica g_o.

Agora consideremos g_o a métrica canônica do espaço Euclidiano. Calculando (2.2) sob um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ com respeito a g_o temos

$$Ric_g(e_i, e_i) = \frac{1}{\varphi^2}\left\{(n-2)\varphi\nabla_{g_o}^2\varphi(e_i, e_i) + \varphi\Delta\varphi - (n-1)|\nabla\varphi|^2\right\} \tag{2.3}$$

e para $i \neq j$

$$Ric_g(e_i, e_j) = \frac{1}{\varphi}(n-2)\nabla_{g_o}^2\varphi(e_i, e_j). \tag{2.4}$$

De agora em diante, $(x_1, \ldots, x_n)$ será um sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1 *Se $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2} g_o, u, f, \lambda)$ é uma variedade tipo Ricci-Hessiano, então temos*

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\varphi^2} &= (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} + u_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}u_{x_i} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}u_{x_k} + \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} - (n-1)\frac{\varphi_{x_i}^2}{\varphi^2}\Big) \\
&\quad - \frac{m}{f}\Big(f_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}f_{x_i} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi}f_{x_k}\Big)
\end{aligned}$$

e para $i \neq j$

$$(n-2)\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi} + u_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi}u_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}u_{x_j} - \frac{m}{f}\Big(f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi}f_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}f_{x_j}\Big) = 0.$$

Demonstração: Adotando ainda $\{e_1, \ldots, e_n\}$ como referencial ortonormal canônico no espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g_o)$, temos

$$\nabla_{g_o}^2\varphi(e_i, e_i) = \varphi_{x_i x_j}, \quad \Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i x_i} \quad \text{e} \quad |\nabla\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}^2.$$

Combinando as equações anteriores com (2.3) e (2.4) obtemos

$$Ric_g(e_i, e_i) = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{x_i x_i}}{\varphi} - (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_{x_i}^2}{\varphi^2}. \tag{2.5}$$

e para $i \neq j$

$$Ric_g(e_i, e_j) = (n-2)\frac{\varphi_{x_i x_j}}{\varphi}. \tag{2.6}$$

Lembremos que

$$\nabla_g^2 f(e_i, e_j) = f_{x_i x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k f_{x_k},$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel para a métrica g.

Tomando i, j e k distintos com valores em $\{1, \ldots, n\}$, temos

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \Gamma_{ij}^i = -\frac{\varphi_{x_j}}{\varphi}, \quad \Gamma_{ii}^k = -\frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} \quad \text{e} \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi}.$$

Portanto, de um cálculo direto segue que

$$\nabla_g^2 f(e_i, e_i) = f_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} f_{x_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} f_{x_k} \tag{2.7}$$

e para $i \neq j$

$$\nabla_g^2 f(e_i, e_j) = f_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} f_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} f_{x_j}. \tag{2.8}$$

Analogamente,

$$\nabla_g^2 u(e_i, e_i) = u_{x_i x_i} + 2\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} u_{x_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{x_k}}{\varphi} u_{x_k} \tag{2.9}$$

e para $i \neq j$

$$\nabla_g^2 u(e_i, e_j) = u_{x_i x_j} + \frac{\varphi_{x_j}}{\varphi} u_{x_i} + \frac{\varphi_{x_i}}{\varphi} u_{x_j}. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.5), (2.7) e (2.9) em (2.1) obtemos a primeira equação do lema. Do mesmo modo, substituindo (2.6), (2.8) e (2.10) em (2.1) conseguimos a segunda equação. $\square$

A análise das soluções das equações apresentadas pelo Lema 2.1 fica simplificada quando usamos variáveis que são invariantes sob a ação de um grupo de translação de dimensão $n-1$. Para este propósito, contruiremos as soluções das duas equações na forma $\varphi(\xi)$, $u(\xi)$, $f(\xi)$ e $\lambda(\xi)$. Isto é, elas dependem somente de $\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$. Sempre que tivermos $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$ poderemos, sem perda de generalidade, considerar $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$.

Para a próxima proposição, faremos uma breve consideração acerca de um caso particular de equações diferenciais ordinárias.

Uma equação diferencial do tipo descrito abaixo é chamada *equação de Ricatti.*

$$y'(x) = p(x) + q(x)y(x) + r(x)y(x)^2 \tag{2.11}$$

para p, q e r funções reais sobre $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema de existência e unicidade de Picard, a solução da Equação (2.11) é dada por

$$y(x) = y_p(x) + \frac{e^{\int P(x)dx}}{-\int r(x)e^{\int P(x)dx}dx + c}, \tag{2.12}$$

onde $P(x) = q(x) + 2y_p(x)r(x)$, $y_p(x)$ é uma solução particular de (2.11) e c é uma constante.

A proposição seguinte fornece o sistema de equações diferenciais ordinárias que deve ser satisfeito pelas funções $\varphi(\xi)$, $u(\xi)$, $f(\xi)$ e $\lambda(\xi)$.

Proposição 2.1 *Seja* $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_o, u, f, \lambda)$, $n \geq 3$, *uma variedade tipo Ricci-Hessiano. Assuma que* φ, u, f *e* λ *são invariantes sob a ação de um grupo de translação de dimensão* $n-1$ *cujos invariantes básicos são* $\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ *e* $\sum_i \alpha_i^2 = 1$. *Então, temos*

$$0 = (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} + u'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u' - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} \tag{2.13}$$

e

$$\lambda = \varphi^2\left\{\frac{\varphi''}{\varphi} - (n-1)\Big(\frac{\varphi'}{\varphi}\Big)^2 - \frac{\varphi'}{\varphi}u' + m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f}\right\}, \tag{2.14}$$

onde o símbolo subescrito $'$ *denota a derivação com respeito a* ξ. *Em particular, para uma variedade* m*−quasi-Einstein generalizada* $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_o, f, \lambda)$, f *e* λ *podem ser escritos em termo de* φ *e de uma função apropriada* z_p, *como segue*

$$f = \frac{1}{\varphi} + e^{\int z_p(\xi)d\xi} + \int e^{-2\int z_p(\xi)d\xi}d\xi + k \tag{2.15}$$

e

$$\lambda = \varphi^2\left\{\frac{\varphi''}{\varphi} - (n-2)\Big(\frac{\varphi'}{\varphi}\Big)^2 + \frac{\varphi'}{\varphi}z_p(\xi) + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{e^{-2\int z_p(\xi)d\xi}}{\int e^{-2\int z_p(\xi)d\xi}d\xi + c}\right\}. \tag{2.16}$$

Demonstração: Desde que

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \varphi = \varphi(\xi), \quad u = u(\xi) \quad \text{e} \quad f = f(\xi),$$

temos

$$\begin{aligned} \varphi_{x_i} &= \varphi' \alpha_i, \quad \varphi_{x_i x_j} = \varphi'' \alpha_i \alpha_j, \\ u_{x_i} &= u' \alpha_i, \quad u_{x_i x_j} = u'' \alpha_i \alpha_j, \\ f_{x_i} &= f' \alpha_i \quad \text{e} \quad f_{x_i x_j} = f'' \alpha_i \alpha_j. \end{aligned}$$

Aplicando estas relações no Lema 2.1 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\varphi^2} =& (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi}\alpha_i^2 + u''\alpha_i^2 + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u'\alpha_i^2 - \frac{\varphi'}{\varphi}u' \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \frac{\varphi''}{\varphi} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - (n-1)\Big(\frac{\varphi'}{\varphi}\Big)^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \\ & - \frac{m}{f}\Big(f''\alpha_i^2 + 2\frac{\varphi'}{\varphi}f'\alpha_i^2 - \frac{\varphi'}{\varphi}f' \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\Big) \end{aligned} \tag{2.17}$$

e para $i \neq j$

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi}\alpha_i\alpha_j + u''\alpha_i\alpha_j + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u'\alpha_i\alpha_j - m\frac{f''}{f}\alpha_i\alpha_j - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f}\alpha_i\alpha_j = 0. \tag{2.18}$$

Como $n \geq 3$, podemos escolher esta invariância de tal forma que pelo menos dois índices i, j sejam tais que $\alpha_i\alpha_j \neq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$. Assim, da Equação (2.18) obtemos (2.13). Reagrupando os termos da Equação (2.17) e levando em conta a nulidade de (2.18) a Equação (2.14) segue imediatamente.

Para o que falta, tomemos u constante em (2.13) e (2.14) e utilizemos a identidade

$$\frac{f''}{f} = (\frac{f'}{f})^2 + (\frac{f'}{f})' \tag{2.19}$$

na Equação (2.13) para obter

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m(\frac{f'}{f})^2 - m(\frac{f'}{f})' - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} = 0.$$

Fazendo $y = \frac{f'}{f}$ obtemos a seguinte equação de Riccati

$$y' = \frac{(n-2)}{m}\frac{\varphi''}{\varphi} - 2\frac{\varphi'}{\varphi}y - y^2. \tag{2.20}$$

Efetivando algumas manipulações, a expressão anterior torna-se

$$(y + \frac{\varphi'}{\varphi})' + (y + \frac{\varphi'}{\varphi})^2 = (\frac{m+n-2}{m})\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Escrevendo $z = y + \frac{\varphi'}{\varphi}$ temos a equação de Riccati simplificada

$$z' + z^2 = (\frac{m+n-2}{m})\frac{\varphi''}{\varphi}. \tag{2.21}$$

Identificando cada coeficiente da equação (2.21) com seus correspondentes em (2.11), segue que

$$P(\xi) = -2z_p(\xi), \tag{2.22}$$

onde $z_p(\xi)$ é uma solução particular de (2.21). Logo, a expressão (2.12) fornece a seguinte solução para (2.20)

$$\frac{f(\xi)'}{f(\xi)} = y(\xi) = -\frac{\varphi'}{\varphi} + z_p(\xi) + \frac{e^{-2\int z_p(\xi)d\xi}}{\int e^{-2\int z_p(\xi)d\xi}d\xi + c}. \tag{2.23}$$

Integrando (2.23) obtemos (2.15) e substituindo-a em (2.14) encontramos (2.16). $\square$

Exemplo 2.1 *Considerando* $\varphi(\xi) = e^{k\xi}$, *com* $k = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{m+n-2}{m}}}$, *obtemos* $z_\xi = -\frac{1}{2}$ *como uma solução particular para* (2.21). *Assim, a solução geral é dada por*

$$z(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{e^\xi}{e^\xi + c_1}$$

onde c_1 *é uma constante tal que* $e^\xi + c_1 > 0$.

Deste modo, temos que $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_o, f, \lambda)$ *é uma variedade* m*-quasi Einstein generalizada para as funções*

$$\varphi(\xi) = e^{k\xi}, \qquad f(\xi) = -m\ln(e^\xi + c_1) + m(k + \frac{1}{2})\xi + c_2$$

e

$$\lambda(\xi) = -ke^{2k\xi}\{\frac{e^\xi}{e^\xi + c_1} + (n-3)k - \frac{1}{2}\}$$

para c_2 *constante.*

Agora, utilizaremos a Proposição 2.1 para fornecer uma classe particular de variedades tipo Ricci-Hessiano: a das variedades m–quasi-Einstein estacionárias sobre $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi}g_o)$ invariantes sob a ação de grupos de translação de dimensão $n-1$. Apontamos que nossa próxima proposição generaliza um resultado para sólitons de Ricci gradiente em espaços pseudo-Euclidiano obtido por Barbosa-Pina-Tenenblat em [1].

Proposição 2.2 *Seja* $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_o, f, \lambda)$, $3 \leq n \leq m+2$, *uma variedade* m*–quasi-Einstein onde* g_o *é a métrica canônica do* $\mathbb{R}^n$. *Assumamos que as funções* φ, f *e* λ *sejam invariantes sob a ação de um grupo de translação de dimensão* $n-1$ *cujos invariantes básicos são* $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, *para* $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$, *e* $\displaystyle\sum_i \alpha_i^2 = 1$. *Então, as funções* $f(\xi)$ *e* $\varphi(\xi)$ *são dadas por*

$$f(\xi) = C\big(A\xi + B\big)^{-\frac{1}{A}}$$

e

$$\varphi(\xi) = D\big(A\xi + B\big)^{\frac{1}{(n-2)}\left(1-\frac{m}{A}\right)}$$

para $A = \pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}$ *e* $B, C, D \in \mathbb{R}$ *tais que* $A\xi + B > 0$, $C > 0$ *e* $D > 0$ *se, e somente se,* $(\mathbb{R}^n, g)$ *restrito ao semi-espaço* $A\xi + B > 0$ *é uma variedade* m*–quasi-Einstein estacionária com função potencial* f.

Demonstração: Consideremos $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_0, f, \lambda)$ uma variedade m–quasi-Einstein estacionária, ou seja, com $\lambda = 0$. Fazendo u constante nas equações (2.13) e (2.14) temos

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} + m\frac{f''}{f} + 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} = 0 \tag{2.24}$$

e

$$\frac{\varphi''}{\varphi} - (n-1)(\frac{\varphi'}{\varphi})^2 - m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} = 0. \tag{2.25}$$

Considerando

$$g = \frac{\varphi'}{\varphi} \quad \text{e} \quad h = \frac{f'}{f}$$

as equações (2.24) e (2.25) são equivalentes a

$$(n-2)(g' + g^2) + m(h' + h^2) + 2mgh = 0 \qquad e \tag{2.26}$$

$$g' + g^2 - (n-1)g^2 - 2mgh = 0 \tag{2.27}$$

No intuito de resolver o sistema formado por estas duas últimas equações, tomamos g e h relacionadas por $g(\xi) = ah(\xi)$, onde a é uma constante não-nula.

Agora, escrevemos (2.26) como

$$\frac{h'}{h^2} = \frac{-a^2(n-2) - 2am - m}{a(n-2) + m} \tag{2.28}$$

e (2.27) como

$$\frac{h'}{h^2} = a(n-2) + m. \tag{2.29}$$

Segue de (2.28) e (2.29) que

$$(n-1)(n-2)a^2+2m(n-1)a+m(m+1)=0. \tag{2.30}$$

Portanto, os valores de a são dados por

$$a=\frac{-m\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}}{n-2}. \tag{2.31}$$

Substituindo (2.31) em (2.29) temos

$$-\left(\frac{1}{h}\right)'=\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}. \tag{2.32}$$

Consequentemente,

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=h(\xi)=\frac{-1}{\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}\xi+B}$$

e

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}=g(\xi)=\frac{-a}{\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}\xi+B},$$

para uma constante B. Logo,

$$f(\xi)=C\left(\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}\xi+B\right)^{\frac{-1}{\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}}}$$

e

$$\varphi(\xi)=D\left(\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}\xi+B\right)^{\frac{1}{(n-2)}\left(1\mp m\sqrt{\frac{m(n-1)}{m-n+2}}\right)}$$

onde C e D são constantes positivas e B é de tal modo que $A\xi+B>0$ para $A=\pm m\sqrt{\frac{m-n+2}{m(n-1)}}$. $\square$

Agora, ainda sob a ótica da invariância por grupos de translação, obteremos classes de variedades tipo Ricci-Hessiano conformes ao espaço Euclidiano cujas métricas são também estáticas, ou seja, métricas com curvatura escalar constante.

Uma *métrica estática* é definida como uma métrica Riemanniana g tal que $Ker\mathfrak{L}_g^*$ é não-trivial, onde

$$\mathfrak{L}_g^*(f)=-(\Delta f)g+\nabla^2 f-fRic$$

é o L^2–adjunto formal do operador linearização $\mathfrak{L}_g$ da curvatura escalar dado por

$$\mathfrak{L}_g(h)=-\Delta(\mathrm{tr}h)+div(divh)-g(h,Ric).$$

e h é um $(0,2)$–tensor simétrico qualquer (para mais detalhes veja [17]).

Agora enunciaremos dois pequenos lemas e em seguida provamos uma propriedade que fornecem classes de métricas tipo Ricci-Hessiano estáticas.

Lema 2.2 *Seja* $(\mathbb{M}^n, g, u, f, \lambda)$ *uma variedade tipo Ricci-Hessiano com* $m = 1$. *Se* ∇u *é um campo vetorial conforme com fator de conformidade*

$$\mu = \frac{\Delta f}{f} + \lambda,$$

então $(\mathbb{M}^n, g)$ *tem curvatura escalar constante.*

Demonstração: De fato, se $m = 1$ e $\nabla^2 u = (\frac{\Delta f}{f} + \lambda)g$, a equação fundamental torna-se

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = 0.$$

Tomando a divergência desta equação obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -div((\Delta f)g) + div\nabla^2 f - div(fRic) \\ &= -fdivRic = -f\frac{dR}{2} \end{aligned}$$

Pela hipótese $f > 0$ temos $dR = 0$, logo R é constante. □

Lema 2.3 *Considere* $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_0)$ *invariante sob a ação de um grupo de translação de dimensão* $n-1$ *e* u, f *e* λ *funções suaves sobre* $\mathbb{R}^n$ *com* f *positiva. Tais funções satisfazem a equação*

$$\nabla^2 u = (\frac{\Delta f}{f} + \lambda)g \tag{2.33}$$

se, e somente se, valem as equações diferenciais

$$\lambda = \frac{f''}{f} - (n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + \frac{\varphi'}{\varphi}u' \quad e \quad u'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}u' = 0 \tag{2.34}$$

Demonstração: Sabendo, da teoria conforme, que o Laplaciano da função f na métrica conforme g é dado por

$$\Delta f = \Delta_{g_0} f - \frac{(n-2)}{\varphi} g_0(\nabla f, \nabla \varphi)$$

e considerando ainda que $(x_1, \ldots, x_n)$ é um sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^n$, temos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_i} - \frac{(n-2)}{\varphi} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\varphi_{x_i}. \tag{2.35}$$

Substituindo (2.9), (2.10) e (2.35) em (2.33) e levando em conta as condições de invariância, encontramos as equações (2.34). □

Proposição 2.3 *Seja* $(\mathbb{R}^n, \frac{1}{\varphi^2}g_0, u, f, \lambda)$ *uma variedade tipo Ricci-Hessiano com* $m = 1$*, onde* g_0 *é a métrica canônica e* φ *é uma função suave positiva. Considere* $\varphi(\xi)$*,* $u(\xi)$*,* $f(\xi)$ *e* $\lambda(\xi)$ *onde* $\xi = \sum_i \alpha_i x_i$*,* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *e* $\sum_i \alpha_i^2 = 1$*. Então, as funções dadas por*

$$f = -\ln(\frac{\varphi'}{\varphi}) + c_1, \quad u = c_2 \int \frac{1}{\varphi^2} + c_3 \tag{2.36}$$

e

$$\lambda = (n-2)(\frac{\varphi'}{\varphi})^2 - (\frac{\varphi'}{\varphi})' + \frac{c_2}{\varphi^2}\frac{\varphi'}{\varphi} \tag{2.37}$$

para c_1*,* c_2 *e* c_3 *constantes, fornecem uma classe de variedades tipo Ricci-Hessiano com curvatura escalar constante.*

Demonstração: Consideremos a equação

$$-(\Delta f)g + \nabla^2 f - fRic = 0. \tag{2.38}$$

Substituindo as expressões (2.5) e (2.6) para Ric, (2.7) e (2.8) para $\nabla^2 f$ e (2.35) para Δf em (2.38) temos

$$\frac{f''}{f} - (n-3)\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} = (n-1)(\frac{\varphi'}{\varphi})^2 \tag{2.39}$$

e

$$\frac{f''}{f} + \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} - (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0. \tag{2.40}$$

Subtraindo (2.40) de (2.39) obtemos

$$\frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} = (\frac{\varphi'}{\varphi})^2,$$

o qual pode ser escrito como

$$\frac{f'}{f} = \frac{(\frac{\varphi'}{\varphi})'}{\frac{\varphi'}{\varphi}}. \tag{2.41}$$

Integrando a equação acima encontramos f dado em (2.36). Da equação fundamental e de (2.38) temos (2.33). Daí, pelo Lema (2.3), valem as equações (2.34). Da segunda equação de (2.34) segue que

$$u' = \frac{c_2}{\varphi^2}, \tag{2.42}$$

de onde obtemos u. Combinando (2.40), (2.41) e a primeira equação de (2.34) teremos (2.37). Desde que $f \in Ker\mathfrak{L}_g^*$, a variedade terá curvatura escalar constante. $\square$

Bibliografia

[1] Barbosa, E.; Pina, R.; Tenenblat. K *On gradient Ricci solitons conformal to a pseudo-Euclidean space*, Israel J. Math. 200 (2014) 213–224.

[2] Barros, A.; Gomes, J.N. *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature*, J. Math. Anal. Appl. 401 (2013) 702–705.

[3] Barros, A.; Gomes, J.N.; Ribeiro Jr, E. *A note on rigidity of the almost Ricci Soliton*, Arch. Math. 100 (2013) 481–490.

[4] Barros, A.; Ribeiro Jr, E. *Characterizations and integral formulae for generalized quasi-Einstein metrics*, Bull. of the Brazilian Math. Soc. 45 (2014) 325–341.

[5] Barros, A.; Ribeiro Jr, E. *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 140. 3 (2011) 1033–1040.

[6] Besse, A. *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin (1987).

[7] Bishop, R. L.; O'Neill, B. *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969) 1–49.

[8] Brozos-Vázquez, M.; García-Río, E.; Vázquez-Lorenzo, R. *Some remarks on locally conformally flat static spacetime*, J. Math. Phys. 46(2), 022501 (2005) 11pp.

[9] Calviño-Louzao, E.; Fernández-López, M.; García-Río, E.; Vázquez-Lorenzo, R. *Homogeneous Ricci almost solitons*, arXiv:1501.05224v1 [math.DG].

[10] Case, J.; Shu, Y.; Wei, G. *Rigity of quasi-Einstein metrics*, Diff. Geom. Appl. 29 (2011) 93–100.

[11] Cao, H.D. *Recent progress on Ricci soliton*, Adv. Lect. Math. 11 (2009) 1–38.

[12] Cao, H-D.; Chen, Q. *On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons*, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012) 2377–2391.

[13] Catino, G. *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic Weyl tensor*, Math Z. 271 (2012) 751–756.

[14] Catino, G.; Cremaschi, L.; Djadli, Z.; Mantegazza, C.; Mazzieri, L. *The Ricci-Bourguignon flow*, arXiv:1507.00324v3 [math.DG].

[15] Chern, S. S.; *An elementary proof of the existence of the isothermal parameters on a surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 6. 5 (1955) 771–782.

[16] Colares, A.G.; Palmas, O. *On Riemannian manifold foliated by* $(n-1)$*–umbilical hypersurfaces*, Bull. Braz. Math. Soc. 42 (2011) 105–130.

[17] Corvino, J. *Scalar curvature deformations and a gluing construction for the Einstein constraint equations*, Comm. Math. Phys. 214 (2000) 137–189.

[18] Derdzinski, A. *Some remarks on the local structure of Codazzi tensors* , Global Diff. Geo. and Global Analysis (1985) 243–299.

[19] Derdzinski. A.; Marchler. G. *Local classification of conformally-Einstein Kähler metrics in higher dimensions*, Proc. London Math. Soc. 87 (2003), 779–819.

[20] Dajczer, M. *Submanifolds and isometric immersions, Mathematics Lecture Series*, Houston: Publisher or Perish (1990).

[21] Dancer, A. S.; Wang, M. Y. *Some new examples of non-Kähler Ricci solitons*, Math. Res. Lett. 16 (2) (2009) 349–363.

[22] Ejiri, N. *A negative answer to a conjecture of conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 33 (1981) 261–266.

[23] Feitosa, F. E.; Freitas, A. A.; Gomes, J. N. *On the construction of gradient Ricci soliton warped product*, arXiv:1506.00342v3 [math.DG].

[24] Feitosa, F. E.; Freitas, A. A.; Gomes, J. N. Pina, R. S. *On the construction of gradient almost Ricci soliton warped product*, arXiv:1507.03038v1 [math.DG].

[25] Fernández-López, M.; García-Río, E., *A note on locally conformally flat gradient Ricci soliton*, Geom. Dedicata. 168 (2014) 1–7.

[26] Gastel, A.; Kronz, M. *A family of expanding Ricci solitons, Variational problems in Riemannian geometry*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 59, Birkhuser, Basel (2004) 81–93.

[27] Hamilton, R. S. *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 17 (2) (1982) 255–306.

[28] He, C.; Petersen, P.; Wylie, W. *On the classification of warped product Einstein metrics*, Comm. Anal. Geom. 20 (2) (2012) 271–311.

[29] Hu, Z.; Li, D.; Xu, J. *On generalized m-quasi-Einstein manifolds with constant scalar curvature*, J. Math Anal. Appl. 432 (2) (2015) 733–743.

[30] Hu, Z.; Li, L.; Zhai, S. *On generalized m–quasi-Einstein manifolds with constant Ricci curvatures*, J. Math. Anal. Appl. 446 (1) (2017) 843–851.

[31] Ivey, T. *New examples of complete Ricci solitons*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994) 241–245.

[32] Kim, D.-S.; Kim, Y.H. *Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (8) (2003) 2573–2576.

[33] Maschler, G., *Special Kähler-Ricci potentials and Ricci solitons*, Ann. Global Anal. Geom. 34 (2008) 367–380.

[34] Obata, M. *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 333–340.

[35] O'Neill, B., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic. Press. London (1983).

[36] Petersen, P.; Wylie, W. *On the classification of gradient Ricci solitons*, Geom. Topol. 14 (2010) 2277–2300.

[37] Pigola, S.; Rigoli, M.; Rimold, M.; Setti, A. *Ricci almost solitons*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10 (2011) 757–799.

[38] Pina, R.; Sousa, M. *On warped product gradient Ricci solitons*, arXiv:1505.03833v1 [math.DG].

[39] Tashiro, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, An. Math. Soc. 117 (1965) 251–275.