

UNIVERSIDADE FEDERAL PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

Tese de Doutorado

**A primeira e a segunda variação da medida de
subvariedades não-horizontais em grupos de Lie
estratificados.**

Maria Rosilene Barroso dos Santos

Belém - PA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA UFPA/UFAM

**A primeira e a segunda variação da medida de subvariedades
não-horizontais em grupos de Lie estratificados.**

Maria Rosilene Barroso dos Santos

Tese apresentada ao PDM
UFPA/UFAM como parte dos
requisitos para a obtenção do
título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso

Belém - PA

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)

Sistema de Bibliotecas da UFPA

Santos, Maria Rosilene Barroso dos, 1982

A Primeira e a segunda variação da medida de subvariedades não-horizontais
em grupos de Lie estratificados / Maria Rosilene Barroso dos Santos. - 2015.

Orientador: José Miguel Martins Veloso.

Tese(Doutorado)-Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais,
Programa de Pós-Graduação em Matemática (Doutorado), Belém, 2015.

1. Lie, grupos de. 2. Lie, Álgebra de. 3. Medida de Hausdorff.
4. Subvariedades. 5. Subvariedades mínimas-Estabilidade. I. Título.

CDD 22. ed. 512.482

Banca Examinadora



PROF. DR. JOSÉ MIGUEL MARTINS

Presidente



PROF. DR. PAOLO PICCIONE

Membro



PROF. DR. LUQUESIO PETROLLA DE MELLO JORGE

Membro



PROF. DR. JOSÉ NAZARENO VIEIRA GOMES

Membro



PROF. DR. DRAGOMIR MITKOV TSONEV

Membro

In memoriam
Francisco Márcio Barroso dos Santos

“(...) E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria.(...)” (1 Coríntios 13:2)

Agradecimentos

À meu melhor amigo, à quem me sustenta com um amor incondicional, à quem me ensinou a ser forte nos momentos mais difíceis de minha vida e à quem nunca me abandonou, o maravilhoso Deus agradeço por tudo que tens feito por nós.

Agradeço à minha família pela paciência e pela dedicação. Agradeço ao meu irmão Márcio que agora se encontra perto do Senhor Deus, sinto muito sua falta, sempre colaborou nos meus trabalhos acadêmicos é muito difícil não compartilhar esta conquista sem seu abraço.

Agradeço ao meu querido orientador Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso pela grande aprendizagem, pela dedicação ao trabalho e pela amizade que foram essenciais para esta tese. Aproveito também para agradecer ao meu querido Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz que considero também como orientador, as dicursões matemáticas sempre foram excelentes para o meu aprendizado, obrigada pela atenção.

Agradeço aos meus amigos de Belém, de São Paulo e da Bahia, o grande carinho e a amizade. Uma das belezas desta vida é saber que existem pessoas que mesmo distantes estão dispostas a fazerem parte de nossas vidas.

Finalmente, agradeço à Capes, Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior, pelo financiamento deste projeto.

Resumo

Neste trabalho estudamos a primeira e a segunda variação da medida para subvariedades não-horizontais em grupos de Lie estratificados introduzida em [23] e definimos um conceito de minimalidade para estas subvariedades. Em um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$ introduzimos a derivada covariante $\bar{\nabla}$ que anula os campos invariantes à esquerda da álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^l$. Uma subvariedade M de $\mathbb{G}$ é não-horizontal de codimensão p se $T\mathbb{G} = TM + D$, em que D é a distribuição horizontal gerada por $\mathfrak{g}^1$. O espaço normal horizontal $TM^\perp$ é o complementar ortogonal de $TM \cap D$ em D e o volume da subvariedade M é calculado pela fórmula $d\mu = \eta \lrcorner dV$, em que η é um p -vetor unitário de $TM^\perp$ e dV é a forma volume de $\mathbb{G}$. Projetamos $\bar{\nabla}$ em TM utilizando a decomposição $T\mathbb{G} = TM \oplus TM^\perp$ para encontrar a derivada covariante de ∇ sobre TM . A condição de minimalidade obtida pela primeira variação é o tensor $H + \sigma = 0$, em que H é a curvatura média e σ é a média da torção. Na segunda variação, além dos termos comuns da geometria riemanniana, aparecem vários termos novos oriundos da torção. Generalizamos alguns resultados da geometria das subvariedades do $\mathbb{R}^n$ para grupos de Lie estratificados e discutimos exemplos de subvariedades não-horizontais mínimas no grupo de Heisenberg e sua estabilidade.

Palavra-chave: Grupos de Lie estratificados, subvariedades não-horizontais, subvariedades mínimas, medida esférica de Hausdorff, primeira e segunda variação, estabilidade.

Abstract

In this work we study the first and second variation of the measure on non-horizontal submanifolds of stratified Lie groups as introduced in [23] and we define the concept of minimality for these submanifolds. Given a stratified Lie group $\mathbb{G}$ we introduce the covariant derivative $\bar{\nabla}$ annulling the left invariant fields of the Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^l$. A submanifold M of $\mathbb{G}$ of codimension p is non-horizontal if $T\mathbb{G} = TM + D$, where D is the horizontal distribution generated by $\mathfrak{g}^1$. The normal horizontal space $TM^\perp$ is the orthogonal complement of $TM \cap D$ in D and the volume of the submanifold M is calculated by the formula $d\mu = \eta \lrcorner dV$, where η is a p -vector unit of $TM^\perp$ and dV is the volume form of $\mathbb{G}$. Using the decomposition $T\mathbb{G} = TM \oplus TM^\perp$ we project $\bar{\nabla}$ in TM and thus define the covariant derivative ∇ on TM . The minimality condition obtained by first variation is the tensor $H + \sigma = 0$, where H is mean curvature and σ is mean torsion. In the formula for the second variation, in addition to the common terms of the Riemannian geometry, appear several new terms coming from the torsion. We generalize some results of the geometry of submanifolds of $\mathbb{R}^n$ for stratified Lie groups and we discuss examples of minimal non-horizontal submanifolds in the Heisenberg group as well as their stability.

Key-words: Stratified Lie groups, non-horizontal submanifolds, minimal submanifolds, spherical Hausdorff measure, first and second variation, stability.

Sumário

Introdução	1
1 Grupos de Lie estratificados	6
1.1 Definições e Exemplos	7
1.2 Derivada Covariante $\bar{\nabla}$	12
1.3 Subvariedades não-horizontais	15
1.3.1 A segunda forma fundamental e o operador de Weingarten	22
1.4 Medida μ de subvariedades não-horizontais	26
1.4.1 Grupo de Heisenberg	31
2 A primeira variação da medida μ	35
2.1 A primeira variação	36
2.2 Subvariedades não-horizontais mínimas em $\mathbb{H}^n$	44
2.2.1 Subvariedades verticais	44
2.2.2 Superfícies em $\mathbb{H}^1$	46
2.2.3 Superfícies em $\mathbb{H}^2$	49
2.2.4 Hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$	61
3 A segunda variação da medida μ	64
3.1 O sub-laplaciano de subvariedades não-horizontais	64
3.2 A segunda variação	71

4	Algumas aplicações do Teorema 3.14	91
4.1	Estabilidade de hipersuperfícies	91
4.1.1	Critério de estabilidade para as hipersuperfícies não-horizontais . .	94
4.1.2	Critério de estabilidade para as hipersuperfícies não-horizontais em $\mathbb{H}^2$	100
4.1.3	Estabilidade de hipersuperfície mínima vertical	108
4.1.4	Caso de hipersuperfícies não-horizontais mínimas e verticais em $\mathbb{H}^n$	111
4.2	Critério de estabilidade para superfícies não-horizontais mínimas em $\mathbb{H}^1$. .	114

Introdução

Um clássico problema em geometria é o estudo de subvariedades mínimas. Em $\mathbb{R}^n$, uma subvariedade S é mínima se possui o tensor curvatura média nulo. Grosso modo, esta definição é equivalente a S ser um ponto crítico do funcional volume. Portanto, é natural estudar a segunda variação desse funcional para encontrar condições que tornam uma subvariedade S um mínimo para o volume.

Nos últimos anos, houve uma generalização da geometria riemanniana para variedades subriemannianas [1, 15, 27, 31, 32]. Uma variedade subriemanniana é uma variedade conexa G com uma distribuição $D \subset TG$ tal que os colchetes de Lie sucessivos de campos em D geram todo o espaço tangente TG . Adicionalmente um produto escalar definido positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definido em D , de modo que é possível calcular os comprimentos de curvas admissíveis, ou seja, as curvas tangentes a distribuição D . Assim, dados dois pontos p e q em M é possível definir a distância $\rho(p, q)$ como o ínfimo do comprimento das curvas admissíveis que conectam os pontos p e q . Com esta distância ρ , a variedade subriemanniana é um espaço métrico [4]. Utilizando a distância ρ pode-se definir as várias medidas de Hausdorff para subconjuntos de M , em particular a medida esférica de Hausdorff [14, 22, 23, 24]. Também em [27], foi introduzida uma forma volume, a forma volume de Popp. Em subvariedades subriemannianas que são grupos nilpotentes (os grupos de Lie estratificados) a medida esférica de Hausdorff, a medida de Popp e a medida de Haar coincidem a menos de múltiplos constantes [2, 3, 14, 24]. É natural então perguntar-se que sentido faz uma subvariedade de um grupo de Lie estratificado ser mínima. O principal objeto desta tese é utilizar a medida proposta em [23] para

subvariedades não-horizontais de um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$, calcular a primeira e segunda variação destas subvariedades, generalizar alguns resultados de subvariedades mínimas no $\mathbb{R}^n$ para subvariedades não-horizontais e dar alguns exemplos de subvariedades não-horizontais mínimas e mínimas estáveis.

Um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo, cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^l$ é graduada e $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] = \mathfrak{g}^{i+j}$. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto escalar em $\mathfrak{g}^1$, podemos considerar a distribuição $D \subset T\mathbb{G}$ gerado por $\mathfrak{g}^1$ e com produto escalar em D gerado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Desse modo, $(\mathbb{G}, D, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade subriemanniana também denominada de grupo de Carnot. Tradicionalmente estende-se o produto escalar de D para $T\mathbb{G}$ e considera-se a conexão riemanniana na métrica estendida h . A nosso entender, esta conexão não é o melhor modo para escrever os invariantes da geometria dos grupos de Lie estratificados, o que é ilustrado pela dificuldade de enunciar resultados em vários trabalhos recentes sobre variação de hipersuperfícies em grupos de Lie estratificados. Vamos utilizar a derivada covariante $\bar{\nabla}$ definida por $\bar{\nabla}X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Esta derivada covariante tem torção intrínseca que é essencialmente o negativo do colchete de Lie em $\mathbb{G}$ e curvatura zero. Usando esta derivada covariante poderemos fazer um paralelo interessante entre os invariantes de subvariedades em $\mathbb{R}^n$ e os invariantes de subvariedades em $\mathbb{G}$.

A geometria de subvariedades M em $\mathbb{G}$ depende em cada ponto da posição relativa de TM e D . Subvariedades com um contato “elevado” com D em um ponto podem apresentar singularidades do ponto de vista métrico, mesmo sendo subvariedades C^∞ . Neste trabalho, vamos evitar estas situações considerando subvariedades $M \subset \mathbb{G}$ transversais a D , isto é, em que $TM + D = T\mathbb{G}$. Estas subvariedades são as subvariedades não-horizontais, objeto de nosso estudo. Para estas subvariedades o subespaço normal horizontal $TM^\perp$ tem o mesmo papel do espaço normal a uma subvariedade do $\mathbb{R}^n$. Em nosso caso, definimos $TM^\perp$ como o subespaço ortogonal a $TM \cap D$ em D , isto é, $D = (TM \cap D) \oplus TM^\perp$ é uma decomposição ortogonal de D . Logo $T\mathbb{G} = TM \oplus TM^\perp$ e podemos utilizar esta decomposição (em geral não ortogonal) para projetar $\bar{\nabla}$ em uma conexão ∇ sobre TM . Esta derivada covariante é análoga a derivada covariante em variedades pseudo-hermitianas,

ver por exemplo [7].

Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ e base dual $e^1, \dots, e^n$. Uma base adaptada $f_1, \dots, f_n$ em $T\mathbb{G}$ ao longo de uma subvariedade não-horizontal M é tal que $f_1, \dots, f_p$ é uma base ortonormal de $TM^\perp$, $f_{p+1}, \dots, f_{d_1}$ é uma base ortonormal de $TM \cap D$ e $f_{p+1}, \dots, f_n$ completa $f_{p+1}, \dots, f_{d_1}$ a uma base de TM , em que $d_1 = \dim \mathfrak{g}^1$ e $f_j = e_j - \sum_{\alpha=1}^p A_j^\alpha f_\alpha$, $j = d_1 + 1, \dots, n$. Seja $f^1, \dots, f^n$ base dual a $f_1, \dots, f_n$. A forma volume $\mathbb{G}$ é $dV = e^1 \wedge \dots \wedge e^n = f^1 \wedge \dots \wedge f^n$. Para hipersuperfícies M de $\mathbb{G}$, tem sido prática utilizar como medida o H -perímetro [9, 18, 25, 26]. A medida esférica de Hausdorff para subvariedades não-horizontais de qualquer dimensão foi discutida em [23]. Em particular, foi provado que a medida esférica tem a representação

$$\int_M \theta(\tau_M^d(x)) dS_\rho^d(x) = \int_M |\tau_M^d(x)| d\text{vol}_h(x) ,$$

em que d é a dimensão de Hausdorff de M , $\theta(\tau_M^d(x))$ é o fator métrico (ver Definição 1.22), S_ρ^d é a medida esférica de Hausdorff d -dimensional e $d\text{vol}_h$ é a forma volume em M induzida por h . A medida $d\mu(M) = |\tau_M^d(x)| d\text{vol}_h(x)$ é o candidato “natural” a ser utilizado para definição de volume de subvariedades. Quando o fator métrico é constante (caso do grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$) a medida μ é um múltiplo constante da medida esférica de Hausdorff. Ao escrevermos a densidade da medida μ na base $f^1, \dots, f^n$ provamos uma ótima fórmula para empreender o cálculo variacional, a saber (Teorema 1.23),

$$d\mu = f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n .$$

Temos o análogo subriemanniano $d\mu = (f_1 \wedge \dots \wedge f_p) \lrcorner dV$. Neste trabalho, usaremos a medida μ para subvariedades não-horizontais. Grosso modo este é o conteúdo do capítulo 1.

No capítulo 2, apresentamos o segundo resultado principal deste trabalho, o Teorema 2.1, em que calculamos a primeira variação da medida μ e obtemos uma condição suficiente para a minimalidade das subvariedades não-horizontais. Enfatizamos que a terminologia mínima é usada para as subvariedades que satisfazem esta condição.

Assim, diremos que uma subvariedade não-horizontal $M \subset \mathbb{G}$ é mínima se satisfaz

$$H_\xi + \sigma_\xi = 0, \forall \xi \in TM^\perp,$$

em que H é a curvatura média (Definição 1.18) e σ é a média da torção (Definição 1.19). No caso de hipersuperfícies não-horizontais, devido a graduação de $\mathfrak{g}$, a média da torção é nula, caracterizando assim a mesma definição de subvariedades mínimas da geometria riemanniana e de acordo com os artigos [9, 18, 19, 25, 26, 29].

Como aplicação do Teorema 2.1 apresentamos o cálculo de superfícies não-horizontais mínimas do grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^2$: as superfícies regradas e as superfícies tubulares, exemplos não conhecidos na literatura. Provamos também que se $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ é mínima, então $N = \{(x, t) : x \in M, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}^n$ é mínima.

No capítulo 3 provamos o Teorema 3.14 que é o terceiro resultado principal desta tese, em que calculamos a segunda variação da medida μ . Para a prova é fundamental introduzir a definição de divergente e do operador de segunda ordem sub-laplaciano em M . Conforme [20], se ω é a forma volume de uma variedade diferenciável M paralela com respeito a conexão linear de M , então a função divergente de um campo X em M é definida por $(\operatorname{div} X)\omega = L_X\omega$, em que L é a derivada de Lie de uma forma diferencial. Como $d\mu$ é uma forma paralela com respeito a conexão linear ∇ das subvariedades não-horizontais, então de acordo com a Proposição 3.2 reescrevemos a função divergente de X como

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=p+1}^n f^i(\nabla_{f_i} X) + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(X, f_j),$$

em que $\bar{T}$ é a torção de $\bar{\nabla}$. Em seguida, definimos o sub-laplaciano de uma função ϕ em M como

$$\mathcal{L}\phi = \Delta\phi + \tau\phi,$$

em que $\tau = \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, f_j)f_i$ é uma seção em $TM \cap D$ e $\Delta\phi = \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i(f_i(\phi)) - (\nabla_{f_i} f_i)\phi$ com $f_i, i = p+1, \dots, d_1$ base ortonormal em $TM \cap D$. O sub-laplaciano de ϕ satisfaz a relação $\mathcal{L}\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)$, em que grad denota o operador gradiente definido

por $\text{grad}\phi = \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i(\phi)f_i$. Além disso, mostramos que se existe uma função $\phi > 0$ tal que $\mathcal{L}\phi = q\phi$ para alguma função suave q , então

$$\int_M (|\text{grad}f|^2 + qf^2)d\mu \geq 0,$$

para toda função f de suporte compacto em M . Este resultado é uma generalização do caso riemanniano provado em [13] e do caso subriemanniano para hipersuperfícies provado em [26]. O sub-laplaciano é definido também em seções de $TM^\perp$ e a relação clássica se generaliza:

$$\int_M \langle \mathcal{L}\xi, \eta \rangle d\mu = - \int_M \langle \nabla^\perp \xi, \nabla^\perp \eta \rangle d\mu = \int_M \langle \xi, \mathcal{L}\eta \rangle d\mu.$$

O enunciado e a prova do Teorema 3.14 são extensos, pois apresentam novos termos que são as derivadas de quantidades que envolvem os termos de torção. No caso particular de hipersuperfícies, o nosso resultado é análogo aos resultados de [18, 26]. Neste trabalho, diremos que uma subvariedade não-horizontal mínima e compacta é estável se a derivada segunda do μ -volume é não negativa.

No capítulo 4, apresentamos algumas aplicações do Teorema 3.14. Generalizamos a fórmula do laplaciano do produto escalar de um campo paralelo a com o normal f_1 a uma hipersuperfície, obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\langle a, f_1 \rangle = & -\langle a, f_1 \rangle \left(\text{traço}(A_{f_1}^2) - \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle \right. \right. \\ & \left. \left. - \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_1, f_i)), f_1 \rangle \right) \right) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle \right) \end{aligned}$$

e a aplicamos para encontrar um critério de estabilidade para hipersuperfícies não-horizontais mínimas (Teorema 4.4). Em particular, damos uma outra prova de que o parabolóide hiperbólico $x_5 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$ é estável em $\mathbb{H}^2$. Uma outra aplicação é a de que se $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ é uma hipersuperfície mínima estável, então a hipersuperfície não-horizontal mínima vertical $N = \{(x, t) : x \in M, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}^n$ é estável. Finalmente, parametrizamos as superfícies não-horizontais mínimas em $\mathbb{H}^1$ e com esta parametrização obtemos um critério geral de estabilidade.

Capítulo 1

Grupos de Lie estratificados

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos da teoria de grupos de Lie estratificados, como também as identidades geométricas necessárias para as demonstrações dos principais resultados desta tese. A seguir, descrevemos brevemente o conteúdo de cada seção.

Na Seção 1.1 recordamos alguns conceitos elementares da teoria de grupos de Lie. Definimos uma classe especial de grupos de Lie, os grupos de Lie nilpotentes, cuja álgebra de Lie é nilpotente. Em particular, destacamos os grupos de Lie simplesmente conexos, conexos e nilpotentes, para os quais a aplicação exponencial é um difeomorfismo. Definimos também um tipo de álgebra de Lie nilpotente, as álgebras graduadas, que sob certa condição definem os grupos de Lie centrais dos nossos estudos, *os grupos de Lie estratificados*.

Na Seção 1.2 definimos a derivada covariante $\bar{\nabla}$ de um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$, de modo que os campos invariantes à esquerda são campos paralelos com respeito a $\bar{\nabla}$. Exceto o caso em que $\mathbb{G}$ é um grupo abeliano, observamos que $\bar{\nabla}$ não é livre de torção e portanto não é a conexão de *Levi-Civita* de $\mathbb{G}$. Além disso, estendemos o produto escalar definido positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathfrak{g}^1$ a um produto escalar definido positivo h em $\mathfrak{g}$ (Proposição 1.11). A extensão de h em $T\mathbb{G}$ faz de $(\mathbb{G}, h)$ uma variedade riemanniana.

Na Seção 1.3 definimos uma classe de subvariedades de $\mathbb{G}$, as subvariedades não-horizontais. Construímos uma base adaptada a estas subvariedades em $T\mathbb{G}$ e descrevemos

$\bar{\nabla}$ nesta base. Definimos a derivada covariante ∇ de subvariedades não-horizontais como a projeção sobre TM de $\bar{\nabla}$ utilizando a decomposição $T\mathbb{G} = TM \oplus TM^\perp$. Calculamos a curvatura, a torção e as equações de estruturas destas subvariedades. Em analogia ao caso riemanniano, obtemos a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten e assim apresentamos a versão subriemanniana das equações fundamentais: *equação de Gauss, equação de Ricci e equação de Codazzi*.

Na Seção 1.4 utilizamos o artigo [23] para identificar uma medida μ para subvariedades não-horizontais e escrever a densidade desta medida como uma forma volume na base adaptada. Por fim, apresentamos uma prova de que no grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ a medida μ é um múltiplo constante da medida esférica de Hausdorff.

1.1 Definições e Exemplos

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e de dimensão n . Denotamos por $*$ a operação de grupo, 0 o elemento identidade e $\mathcal{X}(\mathbb{G})$ o conjunto das seções suaves de $T\mathbb{G}$, isto é, $\mathcal{X}(\mathbb{G}) := C^\infty(\mathbb{G}, T\mathbb{G})$. Além disso, para cada $p \in \mathbb{G}$, denotamos, respectivamente, as translações à esquerda e à direita de p do grupo $\mathbb{G}$, por ℓ_p e r_p .

Definição 1.1. *Um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie se existe uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (chamada colchete de Lie) tal que para cada X, Y e $Z \in \mathfrak{g}$ são satisfeitas as seguintes propriedades*

1. (*Anti-comutatividade*) $[X, Y] = -[Y, X]$;
2. (*Identidade de Jacobi*) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Seja $X \in \mathcal{X}(\mathbb{G})$. O campo X é um campo invariante à esquerda se para qualquer $p \in \mathbb{G}$, $X(p) = d\ell_p(X(0))$. Isto é equivalente a

$$(Xf)(\ell_p(q)) = X(f \circ \ell_p)(q), \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{G}) \text{ e } q \in \mathbb{G}.$$

Consideremos o subespaço linear de $\mathcal{X}(\mathbb{G})$ de todos os campos invariantes à esquerda de $\mathbb{G}$ munido da operação colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$. Denotamos esse subespaço por $\mathfrak{g}$. Verificamos

facilmente que o colchete de Lie de dois campos invariantes à esquerda é um campo invariante à esquerda e portanto $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie conforme Definição 1.1. Além disso, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é isomorfa ao espaço tangente de $\mathbb{G}$ em 0, via aplicação $X \mapsto X_0$, assim $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial de dimensão n , ver por exemplo [33].

Outro conceito importante é o de aplicação exponencial de grupos de Lie.

Definição 1.2. *Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ e o sistema*

$$\begin{cases} \varphi_t \circ \varphi_s &= \varphi_{t+s} \\ \frac{d\varphi_t}{dt} \Big|_{t=0} &= X \end{cases}$$

em que $X \in \mathfrak{g}$ e φ é o fluxo local de X . Para cada $X \in \mathfrak{g}$, a aplicação diferenciável $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{G}$ é definida por

$$\exp(X) = \varphi_1(0).$$

É bem conhecido da teoria de grupos de Lie que a aplicação exponencial é um difeomorfismo local em alguma vizinhança de 0, pois $d(\exp)_0 = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$, em que $\text{Id}_{\mathfrak{g}}$ é aplicação identidade de $\mathfrak{g}$. Destacamos a seguir que se $\mathbb{G}$ é simplesmente conexo, conexo e nilpotente, então $\exp$ é um difeomorfismo.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ subespaços de $\mathfrak{g}$ e $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ o subespaço gerado por combinações lineares de elementos de $[X, Y]$ com $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{B}$. Para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ definimos a seguinte sequência de subespaços

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}], \dots$$

Definição 1.3. *Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente se existe l menor inteiro positivo tal que $\mathfrak{g}^{l+1} = 0$, em que l é chamado de step de $\mathfrak{g}$. Um grupo de Lie é nilpotente se sua álgebra de Lie é nilpotente.*

Teorema 1.4. ([8]) *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie nilpotente, simplesmente conexo, conexo com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{G}$ é um difeomorfismo.*

Nas condições do Teorema 1.4, podemos relacionar a operação $*$ de $\mathbb{G}$ com a operação colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ de $\mathfrak{g}$ via fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, a qual denotaremos por

BCH. Para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$, seja $C(X, Y) \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(C(X, Y)) = \exp(X) * \exp(Y)$.

Então, a fórmula BCH afirma que

$$\begin{aligned} C(X, Y) &:= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{r_i + s_i \geq 1 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\operatorname{ad} X)^{r_1} (\operatorname{ad} Y)^{s_1} \cdots (\operatorname{ad} X)^{r_n} (\operatorname{ad} Y)^{s_n-1} Y}{\left(\sum_{j=1}^n (r_j + s_j) \right) r_1! s_1! \cdots r_n! s_n!} \\ &= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] - \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

em que $(\operatorname{ad} A)B = [A, B]$, $(\operatorname{ad} A)^0$ é a aplicação identidade e $n \in \{1, \dots, l\}$ com l o step de $\mathfrak{g}$.

Além disso, se $s_n = 0$, os termos da soma (1.1) é por convenção $\cdots (\operatorname{ad} X)^{r_{n-1}} (\operatorname{ad} Y)^{s_{n-1}} (\operatorname{ad} X)^{r_n-1} X$.

Se $s_n > 1$, ou $s_n = 0$, e $r_n > 1$, o termo é zero.

Como $\mathbb{G}$ é nilpotente, então a soma $C(X, Y)$ é finita. Além disso, $C(X, Y)$ define em $\mathfrak{g}$ a estrutura do grupo de Lie $\mathbb{G}$, ver por exemplo [5].

Com a fórmula acima, podemos conhecer a operação de grupo em coordenadas, as quais são chamadas de coordenadas exponenciais.

Definição 1.5. *Um sistema de coordenadas exponenciais associado a base $X_1, \dots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ é o difeomorfismo definido por*

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{G} \\ x &\longmapsto \exp \left(\sum_{j=1}^n x_j X_j \right). \end{aligned}$$

Identificamos as coordenadas exponenciais $\exp \left(\sum_{j=1}^n x_j X_j \right)$ com as coordenadas canônicas $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1. Seja $\mathbb{H}^1$ o grupo de Heisenberg que é um grupo de Lie nilpotente de step 2 cuja variedade diferenciável é o $\mathbb{R}^3$ e a sua álgebra de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ com $\dim \mathfrak{h}_1 = 2$, $\dim \mathfrak{h}_2 = 1$ tal que

$$[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_2 ; \quad [\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] = [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2] = 0 .$$

Sejam e_1, e_2 base de $\mathfrak{h}_1$ e $e_3 = [e_1, e_2]$ base de $\mathfrak{h}_2$. Como $\mathfrak{h}$ é nilpotente, então $\exp: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{H}^1$ é um difeomorfismo. Assim, segue da fórmula BCH que

$$C(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] .$$

Se $X = x_0e_1 + y_0e_2 + z_0e_3$ e $Y = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3$, então

$$X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] = (x_0 + x_1)e_1 + (y_0 + y_1)e_2 + (z_0 + z_1 + \frac{1}{2}(x_0y_1 - x_1y_0))e_3 .$$

Logo, a operação de grupo em coordenadas exponenciais é da forma

$$(x_0, y_0, z_0) * (x_1, y_1, z_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1 + \frac{1}{2}(x_0y_1 - x_1y_0)) .$$

Portanto, os campos invariantes à esquerda e_1, e_2 e e_3 são dados por

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z} .$$

Uma classe particular de álgebras de Lie nilpotentes e de grande interesse na literatura são as álgebras de Lie graduadas.

Definição 1.6. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie graduada se existem subespaços $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}$ tais que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^l, \quad l \in \mathbb{N} ,$$

em que $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$, $i, j \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\mathfrak{g}^j = \{0\}$ para $j > l$. Um grupo de Lie cuja álgebra é graduada é um grupo de Lie graduado.

A graduação da álgebra garante a existência de um grupo a 1-parâmetro de dilatações.

Definição 1.7. (Dilatação) Para cada $r > 0$, dizemos que a aplicação $\delta_r : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definida por

$$\delta_r(v) = \sum_{i=1}^l r^i v_i ,$$

em que $v = \sum_{i=1}^l v_i$, $v_i \in \mathfrak{g}^i$, é a família das dilatações de $\mathbb{G}$.

A aplicação δ_r é naturalmente transportada de $\mathfrak{g}$ a $\mathbb{G}$, pois $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{G}$ é um difeomorfismo. Também, denotamos por δ_r a dilatação do grupo $\mathbb{G}$. Assim, aproveitamos para introduzir uma classe de distâncias que são compatíveis com geometria dos grupos graduados.

Definição 1.8. (Distância homogênea) *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie graduado. Uma distância homogênea em $\mathbb{G}$ é uma aplicação contínua $\rho : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow [0, +\infty[$ tal que $(\mathbb{G}, \rho)$ é um espaço métrico e satisfaz as seguintes propriedades*

1. *(Invariância à esquerda) $\rho(x, y) = \rho(ux, uy)$ para todo $u, x, y \in \mathbb{G}$;*
2. *(Homogeneidade) $\rho(\delta_r(x), \delta_r(y)) = r\rho(x, y)$ para cada $r > 0$.*

Na próxima definição, destacamos o conceito central desta seção.

Definição 1.9. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e graduado com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie estratificado se existem subespaços $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \dots, \mathfrak{g}^l$ de $\mathfrak{g}$ tais que*

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] = \mathfrak{g}^{i+j}, \quad \forall i, j.$$

Na literatura, os grupos de Lie estratificados também são chamados de *grupos de Carnot*.

Exemplo 1.2. O grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ de dimensão $2n + 1$ é um grupo de Lie estratificado cuja álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é gerada por $e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}$ e graduada por

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2,$$

em que $\mathfrak{h}_1$ é um subespaço $2n$ -dimensional gerado por $e_1, \dots, e_{2n}$ e $\mathfrak{h}_2$ é um subespaço 1-dimensional gerado por $e_{2n+1} = [e_i, e_{i+n}]$, $i = 1, \dots, n$. Outro exemplo importante de grupo de Lie estratificado é o grupo de Engel $\mathbb{E}^4$ cuja variedade diferenciável é o $\mathbb{R}^4$. O grupo de Engel é um grupo de Lie nilpotente de step 3 com álgebra de Lie $\mathfrak{e}$ gerada por e_1, e_2, e_3, e_4 , em que $e_3 = [e_1, e_2]$, $e_4 = [e_1, e_3]$ e os demais colchetes são todos nulos. A álgebra de Lie $\mathfrak{e}$ é graduada da seguinte forma

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_1 \oplus \mathfrak{e}_2 \oplus \mathfrak{e}_3,$$

em que $\mathfrak{e}_1$ é gerado por e_1, e_2 , $\mathfrak{e}_2$ é gerado por e_3 e $\mathfrak{e}_3$ é gerado por e_4 .

Definição 1.10. (Coordenadas graduadas) *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie estratificado com a álgebra Lie graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^l$. Sejam $d_j = \dim \mathfrak{g}^j$ para $j = 1, \dots, l$, $m_0 = 0$ e $m_i = \sum_{j=1}^i d_j$, para $i = 1, \dots, l$. Dizemos que $X_1, \dots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ é uma base graduada se $X_{m_{j-1}+1}, X_{m_{j-1}+2}, \dots, X_{m_j}$ é uma base para $\mathfrak{g}^j$ com $j = 1, \dots, l$. Além disso, o difeomorfismo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{G}$ definido por*

$$F(x) = \exp \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right)$$

é chamado de sistema de coordenadas graduadas.

1.2 Derivada Covariante $\bar{\nabla}$

Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie estratificado e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^l$ e $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] = \mathfrak{g}^{i+j}$. Seja $e_1, \dots, e_n$ uma base graduada de $\mathfrak{g}$ com base dual $e^1, \dots, e^n$. Para cada elemento de $\mathfrak{g}^j$ associamos o inteiro j chamado *grau do vetor* e assim diremos que o grau de e_k , ou simplesmente, $\deg(k)$, é igual a j se $d_{j-1} < k \leq d_j$. Por exemplo, o grau de $e_1, \dots, e_{d_1} \in \mathfrak{g}^1$ é igual a 1, pois $0 < k \leq d_1$.

A *derivada covariante* ou *conexão linear* $\bar{\nabla}$ em $T\mathbb{G}$ é definida tal que

$$\bar{\nabla} e_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Se $(\psi_i^j)_{1 \leq i, j \leq n}$ representa a matriz das 1-formas de conexão com respeito a base $e_1, \dots, e_n$, ou seja,

$$\bar{\nabla}_X e_i = \sum_{j=1}^n \psi_i^j(X) e_j, \quad \forall X \in T\mathbb{G},$$

então (1.2) é equivalente a $\psi_i^j = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$.

Se $\bar{K}$ denota a curvatura de $\mathbb{G}$ e $\bar{T}$ a torção de $\bar{\nabla}$, então para cada $X, Y \in T\mathbb{G}$ temos que

$$\bar{K}(X, Y) e_i = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y e_i - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X e_i - \bar{\nabla}_{[X, Y]} e_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

e para cada $i \neq j$

$$\bar{T}(e_i, e_j) = \bar{\nabla}_{e_i} e_j - \bar{\nabla}_{e_j} e_i - [e_i, e_j] = -[e_i, e_j] = - \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k,$$

em que c_{ij}^k são as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ com respeito a base $e_1, \dots, e_n$.

Notemos que $\bar{T} = \sum_{k=1}^n \bar{T}^k \otimes e_k$, em que $\bar{T}^k = \text{de}^k$. Logo,

$$-c_{ij}^k = \bar{T}^k(e_i, e_j) = \text{de}^k(e_i, e_j) = -e^k([e_i, e_j]) .$$

Assim, $c_{ij}^k = 0$ se $\deg(i) + \deg(j) \neq \deg(k)$, pois $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] = \mathfrak{g}^{i+j}$. Em particular, se $e_i, e_j \in \mathfrak{g}^1$ e $k = 1, \dots, d_1$, então $c_{ij}^k = 0$. Portanto,

$$\bar{T} = \sum_{k=d_1+1}^n \bar{T}^k \otimes e_k , \quad (1.3)$$

em que $\bar{T}^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^k e^i \wedge e^j$.

A igualdade (1.3) mostra que, em geral, a conexão $\bar{\nabla}$ não é livre de torção e portanto não é a conexão de *Levi-Civita* em $T\mathbb{G}$.

Para cada $p \in \mathbb{G}$, o subespaço $\mathfrak{g}^1$ de $\mathbb{G}$ define um subespaço $\{X_p ; X \in \mathfrak{g}^1\}$ chamado subespaço horizontal. Seja $D \subset T\mathbb{G}$ a distribuição definida pelo subespaço horizontal

$$D_p = \{X_p ; X \in \mathfrak{g}^1\} .$$

Consideremos em D , o produto escalar definido positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que $e_1, \dots, e_{d_1}$ são ortonormais. Desse modo, $(\mathbb{G}, D, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade subriemanniana.

Os próximos resultados trazem duas importantes propriedades do produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em D .

Proposição 1.11. *Existe uma extensão canônica de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a um produto escalar em $T\mathbb{G}$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^l$. Usando indução sobre l , vamos mostrar que o produto escalar de $\mathfrak{g}^1$ é estendido a todo l .

Suponhamos que para $k < l$ temos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é estendido a um produto escalar em $\mathfrak{g}^k$ e mostremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é estendido a um produto escalar em $\mathfrak{g}^{k+1}$.

Considere a seguinte aplicação bilinear sobre o corpo $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k &\rightarrow \mathfrak{g}^{k+1} \\ X \otimes Y &\mapsto [X, Y]. \end{aligned}$$

Notemos que B é sobrejetiva e o produto escalar de $\mathfrak{g}^1$ e $\mathfrak{g}^k$ induzem um produto escalar em $\mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k$. De fato, sejam $X \otimes Y, Z \otimes W \in \mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k$, então

$$\langle X \otimes Y, Z \otimes W \rangle_{\mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k} = \langle X, Z \rangle_{\mathfrak{g}^1} \langle Y, W \rangle_{\mathfrak{g}^k}$$

define um produto escalar em $\mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k$.

Se considerarmos $B : (\ker B)^\perp \rightarrow \mathfrak{g}^{k+1}$, então B é injetiva e sobrejetiva e portanto um isomorfismo linear. Assim, este isomorfismo transporta o produto escalar de $(\ker B)^\perp$ a $\mathfrak{g}^{k+1}$. $\square$

Nesta tese denotaremos por h ou também por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar em $T\mathbb{G}$.

Proposição 1.12. *Seja $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ um automorfismo de álgebras de Lie estratificadas tal que*

$$f|_{\mathfrak{g}^1} : \mathfrak{g}^1 \rightarrow \mathfrak{g}^1$$

é uma isometria, isto é, para cada $x, y \in \mathfrak{g}^1$ temos que

$$\langle fx, fy \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Então, f é uma isometria de $\mathfrak{g}$, ou seja,

$$\langle fX, fY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall \quad X, Y \in \mathfrak{g} \tag{1.4}$$

Demonstração. Novamente, faremos a prova por indução sobre l . Suponhamos que $f : \mathfrak{g}^1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^k \rightarrow \mathfrak{g}^1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^k$ satisfaz (1.4). Seja $f \otimes f : \mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k \rightarrow \mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k$ definida por

$$f \otimes f(x \otimes Y) = f(x) \otimes f(Y) .$$

Então, $f \otimes f$ é uma isometria, pois

$$\begin{aligned} \langle f \otimes f(x \otimes Y), f \otimes f(x' \otimes Y') \rangle &= \langle fx \otimes fY, fx' \otimes fY' \rangle \\ &= \langle fx, fx' \rangle \langle fY, fY' \rangle \\ &= \langle x, x' \rangle \langle Y, Y' \rangle \\ &= \langle x \otimes Y, x' \otimes Y' \rangle . \end{aligned}$$

Consideremos a aplicação linear $B : \mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{g}^k \rightarrow \mathfrak{g}^{k+1}$ definida por $B(x \otimes Y) = [x, Y]$. Como f é um automorfismo segue que

$$B(f \otimes f(x \otimes Y)) = B(f(x) \otimes f(Y)) = [fx, fY] = f[x, Y] = f(B(x \otimes Y)) .$$

Assim, $f \otimes f(\ker B) = \ker B$ e $f \otimes f((\ker B)^\perp) = (\ker B)^\perp$.

Agora, sejam $Z, Z' \in \mathfrak{g}^{k+1}$. Então, existem U e $U' \in (\ker B)^\perp$ tais que

$$Z = B(U), \quad Z' = B(U') .$$

Notemos que $f \otimes f(U), f \otimes f(U') \in (\ker B)^\perp$ e B restrita ao $(\ker B)^\perp$ é uma isometria. Portanto,

$$\begin{aligned} \langle fZ, fZ' \rangle &= \langle B(f \otimes f(U)), B(f \otimes f(U')) \rangle \\ &= \langle f(B(U)), f(B(U')) \rangle \\ &= \langle Z, Z' \rangle. \end{aligned}$$

□

Sem perda de generalidade, suporemos que a base $e_1, \dots, e_n$ é ortonormal no produto escalar estendido em $T\mathbb{G}$.

É importante observar que a conexão linear $\bar{\nabla}$ é compatível com o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $T\mathbb{G}$. Com efeito, sejam $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n b_j e_j \in T\mathbb{G}$, em que a_i, b_j são funções suaves definida em $\mathbb{G}$. Então,

$$\bar{\nabla} \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n b_i da_i + a_i db_i = \langle \bar{\nabla} X, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla} Y \rangle .$$

1.3 Subvariedades não-horizontais

Seja M uma subvariedade de $\mathbb{G}$ de codimensão p . Diremos que M é não-horizontal se $TM + D = T\mathbb{G}$. Assim, $\dim(TM \cap D) = d_1 - p$.

A seguir, construíremos uma base $f_1, \dots, f_n$ em $T\mathbb{G}$ adaptada as subvariedades não-horizontais.

Em D , consideremos a mudança de base

$$f_i = \sum_{j=1}^{d_1} a_i^j e_j, \quad i = 1, \dots, d_1, \quad (1.5)$$

com $f_1, \dots, f_{d_1}$ ortonormal, de modo que $f_1, \dots, f_p$ são ortogonais a $TM \cap D$ e $f_{p+1}, \dots, f_{d_1}$ é uma base de $TM \cap D$. Dessa forma, a matriz $(a_i^j)_{1 \leq i, j \leq d_1}$ é ortogonal.

Com a projeção de $e_j, j = d_1+1, \dots, n$, em TM , paralelamente a $TM \cap D$, completamos $f_{p+1}, \dots, f_{d_1}$ a uma base $f_{p+1}, \dots, f_n$ de TM por

$$f_j = e_j - \sum_{\alpha=1}^p A_j^\alpha f_\alpha, \quad j = d_1 + 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

em que $A_j^\alpha = -\langle f_j, f_\alpha \rangle$. Vamos considerar uma base satisfazendo (1.5) e (1.6) em uma vizinhança aberta que contém M .

Agora analisaremos a derivada covariante $\bar{\nabla}$ na base $f_1, \dots, f_n$.

Notemos que as relações inversas de $f_1, \dots, f_n$ são da forma

$$\begin{aligned} e_j &= \sum_{k=1}^{d_1} a_k^j f_k, \quad j = 1, \dots, d_1 \\ e_j &= f_j + \sum_{\alpha=1}^p A_j^\alpha f_\alpha, \quad j = d_1 + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A base dual $f^1, \dots, f^n$ de $f_1, \dots, f_n$ é dada por

$$\begin{aligned} f^\alpha &= \sum_{k=1}^{d_1} a_\alpha^k e^k + \sum_{k=d_1+1}^n A_k^\alpha e^k, \quad \alpha = 1, \dots, p \\ f^i &= \sum_{k=1}^{d_1} a_i^k e^k, \quad i = p+1, \dots, d_1 \\ f^j &= e^j, \quad j = d_1 + 1, \dots, n \end{aligned}$$

e as relações inversas são

$$\begin{aligned} e^i &= \sum_{j=1}^{d_1} a_j^i f^j - \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{\alpha=1}^p a_\alpha^i A_j^\alpha f^j, \quad i = 1, \dots, d_1 \\ e^j &= f^j, \quad j = d_1 + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Usando que $\bar{\nabla}e_i = 0, i = 1, \dots, n$, obtemos a conexão linear $\bar{\nabla}$ na base $f_1, \dots, f_n$ como

$$\bar{\nabla}f_j = \sum_{k=1}^{d_1} da_j^k \otimes e_k = \sum_{k=1}^{d_1} da_j^k \sum_{i=1}^{d_1} a_i^k \otimes f_i, \quad j = 1, \dots, d_1$$

e assim

$$\bar{\nabla}f_j = \sum_{i=1}^{d_1} \bar{\omega}_j^i \otimes f_i,$$

em que

$$\bar{\omega}_j^i = \sum_{k=1}^{d_1} a_i^k da_j^k, \quad i, j = 1, \dots, d_1. \quad (1.7)$$

Para $j = d_1 + 1, \dots, n$, obtemos

$$\bar{\nabla}f_j = \bar{\nabla}(e_j - \sum_{\alpha=1}^p A_j^\alpha f_\alpha) = - \sum_{\alpha=1}^p (dA_j^\alpha \otimes f_\alpha + A_j^\alpha \sum_{i=1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^i \otimes f_i).$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}f_j = \sum_{i=1}^{d_1} \bar{\omega}_j^i \otimes f_i,$$

em que

$$\bar{\omega}_j^\alpha = -dA_j^\alpha - \sum_{\beta=1}^p A_j^\beta \bar{\omega}_\beta^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad j = d_1 + 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

$$\bar{\omega}_j^i = - \sum_{\beta=1}^p A_j^\beta \bar{\omega}_\beta^i \quad i = p + 1, \dots, d_1, \quad j = d_1 + 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Portanto, segue das equações acima que

$$\bar{\nabla}f^i = \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_j^i \otimes f^j, \quad i = 1, \dots, d_1, \quad (1.10)$$

$$\bar{\nabla}f^j = 0, \quad j = d_1 + 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Assim, concluimos que

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_j^i &= -\bar{\omega}_i^j \quad \text{se } i, j = 1, \dots, d_1 \\ \bar{\omega}_j^i &= 0 \quad \text{se } i = d_1 + 1, \dots, n, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Proposição 1.13. (Equações de estruturas de $\mathbb{G}$) As 1-formas f^i e $\bar{\omega}_j^i, i, j = 1, \dots, n$ satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} df^\alpha &= - \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_j^\alpha \wedge f^j + \tilde{T}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p, \\ df^i &= - \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_j^i \wedge f^j, \quad i = p+1, \dots, d_1, \\ df^j &= \bar{T}^j, \quad j = d_1+1, \dots, n, \\ d\bar{\omega}_i^k &= - \sum_{j=1}^{d_1} \bar{\omega}_j^k \wedge \bar{\omega}_i^j = 0, \quad k = 1, \dots, d_1, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

em que

$$\tilde{T}^\alpha = \sum_{k=d_1+1}^n A_k^\alpha \bar{T}^k, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (1.12)$$

Demonstração. De fato, usando as relações inversas de $f^1, \dots, f^n$ e as igualdades (1.7), (1.8) e (1.9) obtemos que

$$\begin{aligned} df^\alpha &= \sum_{k=1}^{d_1} (da_\alpha^k \wedge e^k + a_\alpha^k \bar{T}^k) + \sum_{k=d_1+1}^n (dA_k^\alpha \wedge e^k + A_k^\alpha \bar{T}^k) \\ &= \sum_{k=1}^{d_1} da_\alpha^k \wedge \left(\sum_{j=1}^{d_1} a_j^k f^j - \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{\beta=1}^p a_\beta^k A_j^\beta f^j \right) + \sum_{k=d_1+1}^n (dA_k^\alpha \wedge f^k + A_k^\alpha \bar{T}^k) \\ &= \sum_{j=1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^j \wedge f^j - \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{\beta=1}^p A_j^\beta \bar{\omega}_\alpha^\beta \wedge f^j + \sum_{k=d_1+1}^n (dA_k^\alpha \wedge f^k + A_k^\alpha \bar{T}^k) \\ &= - \sum_{j=1}^{d_1} \bar{\omega}_j^\alpha \wedge f^j - \sum_{j=d_1+1}^n \bar{\omega}_j^\alpha \wedge f^j + \sum_{k=d_1+1}^n A_k^\alpha \bar{T}^k \\ &= - \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_j^\alpha \wedge f^j + \tilde{T}^\alpha \end{aligned}$$

para $\alpha = 1, \dots, p$,

$$\begin{aligned}
df^i &= \sum_{k=1}^{d_1} (da_i^k \wedge e^k + a_i^k \bar{T}^k) \\
&= \sum_{k=1}^{d_1} da_i^k \wedge \left(\sum_{j=1}^{d_1} a_j^k f^j - \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{\beta=1}^p a_\beta^k A_j^\beta f^j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{d_1} \bar{\omega}_i^j \wedge f^j - \sum_{j=d_1+1}^n \bar{\omega}_i^\beta \wedge A_j^\beta f^j \\
&= - \sum_{j=1}^{d_1} \bar{\omega}_j^i \wedge f^j - \sum_{j=d_1+1}^n \bar{\omega}_j^i \wedge f^j \\
&= - \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_j^i \wedge f^j
\end{aligned}$$

para $i = p+1, \dots, d_1$ e

$$df^j = de^j = \bar{T}^j$$

para $j = d_1+1, \dots, n$.

Por fim, como a curvatura de $\mathbb{G}$ é nula, segue facilmente das equações acima, que as formas de curvatura de $\mathbb{G}$ são dada por

$$d\bar{\omega}_i^k + \sum_{j=1}^{d_1} \bar{\omega}_j^k \wedge \bar{\omega}_i^j = 0, \quad k = 1, \dots, d_1, \quad i = 1, \dots, n.$$

□

Proposição 1.14. *Se $\bar{T} = \sum_{j=1}^n \bar{T}^j \otimes f_j$ representa o tensor torção na base $f_1, \dots, f_n$, então $\bar{T}^i = 0$, $i = p+1, \dots, d_1$, $\bar{T}^j = \bar{T}^j$, $j = d_1+1, \dots, n$ e*

$$\begin{aligned}
d\bar{T}^\alpha &= - \sum_{k=d_1+1}^n \omega_k^\alpha \wedge \bar{T}^k - \sum_{\beta=1}^p \omega_\beta^\alpha \wedge \bar{T}^\beta, \\
\sum_{\beta=1}^p \bar{\omega}_\beta^i \wedge \bar{T}^\beta &= - \sum_{j=d_1+1}^n \bar{\omega}_j^i \wedge \bar{T}^j, \quad i = p+1, \dots, d_1, \\
d\bar{T}^j &= 0.
\end{aligned}$$

Demonstração. A primeira afirmação é imediata da Proposição 1.13. De (1.12) e (1.8) segue que

$$\begin{aligned} d\tilde{T}^\alpha &= \sum_{k=d_1+1}^n dA_k^\alpha \bar{T}^k \\ &= - \sum_{k=d_1+1}^n \omega_k^\alpha \wedge \bar{T}^k - \sum_{k=d_1+1}^n \sum_{\beta=1}^p A_k^\beta \omega_\beta^\alpha \wedge \bar{T}^k \\ &= - \sum_{k=d_1+1}^n \omega_k^\alpha \wedge \tilde{T}^k - \sum_{\beta=1}^p \omega_\beta^\alpha \wedge \tilde{T}^\beta \end{aligned}$$

para $\alpha = 1, \dots, p$.

Para $i = p+1, \dots, d_1$ obtemos da Proposição 1.13 que

$$- \sum_{j=1}^n d\bar{\omega}_j^i \wedge f^j + \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_j^i \wedge df^j = 0 .$$

Portanto,

$$\sum_{\beta=1}^p \bar{\omega}_\beta^i \wedge \tilde{T}^\beta + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{\omega}_j^i \wedge \tilde{T}^j = 0 .$$

□

Seja $TM^\perp$ o subfibrado normal horizontal gerado por $f_1, \dots, f_p$ e ortogonal a $TM \cap D$ em D . Exceto no caso de subvariedade não-horizontal e vertical que será definida no próximos capítulos, em geral $TM^\perp$ não é ortogonal a TM , pois $\langle f_j, f_\alpha \rangle = -A_j^\alpha \neq 0$, $j = d_1+1, \dots, n$ e assim a base adaptada $f_1, \dots, f_n$ não é ortogonal na métrica estendida de $T\mathbb{G}$.

Definimos a conexão linear ∇ em TM como a projeção de $\bar{\nabla}$ em TM , isto é,

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha (\bar{\nabla}_X Y) f_\alpha , \quad (1.13)$$

para $X, Y \in TM$.

Se T é a torção de ∇ , então, segue de (1.13) que

$$\begin{aligned}
T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= \bar{\nabla}_X Y - \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha (\bar{\nabla}_X Y) f_\alpha - (\bar{\nabla}_Y X - \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha (\bar{\nabla}_Y X) f_\alpha) - [X, Y] \\
&= \bar{T}(X, Y) - \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha (\bar{T}(X, Y)) f_\alpha
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Como $\bar{T} = \sum_{i=1}^n \tilde{T}^i \otimes f_i$, então de (1.12) e (1.14) obtemos

$$T = \sum_{i=d_1+1}^n T^i \otimes f_i$$

com $T^i = \tilde{T}^i|_M = \bar{T}^i|_M$.

Além disso, segue de (1.13) e das relações (1.7) a (1.10) que a conexão ∇ na base f_j é da forma

$$\begin{aligned}
\nabla f_j &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \omega_j^i \otimes f_i, \quad j = p+1, \dots, n \\
\nabla f^i &= - \sum_{j=p+1}^n \omega_j^i \otimes f^j, \quad i = p+1, \dots, d_1 \\
\nabla f^i &= 0, \quad i = d_1 + 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

em que $\omega_j^i = \bar{\omega}_j^i|_M$.

Analogamente, pela Proposição 1.13 segue facilmente que as equações de estrutura de M são

$$\begin{aligned}
df^i &= - \sum_{j=p+1}^n \omega_j^i \wedge f^j, \quad i = p+1, \dots, d_1, \\
df^i &= T^i, \quad i = d_1 + 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

e portanto as formas de curvatura K_j^i de M são

$$\begin{aligned}
K_i^j &= d\omega_i^j + \sum_{k=1}^{d_1} \omega_k^j \wedge \omega_i^k, \quad i = p+1, \dots, n, \quad j = p+1, \dots, d_1 \\
K_i^j &= 0, \quad i = p+1, \dots, n, \quad j = d_1 + 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

1.3.1 A segunda forma fundamental e o operador de Weingarten

Para cada $x \in M$, decompomos $v \in T_x \mathbb{G}$ por $v = v^\top + v^\perp$, em que $v^\top \in T_x M$ e $v^\perp \in T_x M^\perp$. Assim, para cada $X, Y \in TM$ temos que

$$\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$$

e portanto de (1.13) a conexão linear ∇ em M é definida por

$$\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_X Y)^\top .$$

Escrevemos a projeção normal horizontal $(\bar{\nabla}_X Y)^\perp$ na base $f_1, \dots, f_p$ de $TM^\perp$ como

$$(\bar{\nabla}_X Y)^\perp = - \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha (\bar{\nabla}_X Y) f_\alpha = - \sum_{\alpha=1}^p (\bar{\nabla}_X f^\alpha)(Y) f_\alpha .$$

Definição 1.15. A forma bilinear $S: TM \times TM \rightarrow TM^\perp$ definida por

$$S(X, Y) = - \sum_{\alpha=1}^p (\bar{\nabla}_X f^\alpha)(Y) f_\alpha$$

é a segunda forma fundamental associada a M .

Diferentemente do caso riemanniano, a segunda forma fundamental, em geral, não é simétrica. De fato, para cada $X, Y \in TM$, temos que

$$S(X, Y) - S(Y, X) = (\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y])^\perp = \bar{T}(X, Y)^\perp .$$

Em termos de coordenadas,

$$S(X, f_j) = (\bar{\nabla}_X f_j)^\perp = \sum_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_j^\alpha(X) f_\alpha, \quad j = p+1, \dots, n.$$

Portanto,

$$S(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=p+1}^n f^j(Y) \bar{\omega}_j^\alpha(X) f_\alpha, \quad \forall X, Y \in TM .$$

Sejam $\xi \in TM^\perp$ e $X \in TM$. Então,

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi,$$

em que

$$A_\xi(X) = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top \in TM \quad \text{e} \quad \nabla_X^\perp \xi = (\bar{\nabla}_X \xi)^\perp \in TM^\perp.$$

Não é difícil verificar que $A : TM \times TM^\perp \rightarrow TM$ é uma forma bilinear e $\nabla^\perp$ é uma conexão linear em $TM^\perp$. A forma bilinear A é chamada o *operador de Weingarten* associado a M e $\nabla^\perp$ a *conexão normal*.

Em termos de coordenadas,

$$A_{f_\alpha}(X) = - \sum_{i=p+1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^i(X) f_i \quad (1.15)$$

e

$$\nabla^\perp f_\alpha = \sum_{\beta=1}^p \bar{\omega}_\alpha^\beta \otimes f_\beta.$$

para todo $\alpha = 1, \dots, p$. Portanto, se $\xi = \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\xi) f_\alpha$, então para todo $X \in TM$

$$\begin{aligned} A_\xi(X) &= - \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\xi) \bar{\omega}_\alpha^i(X) f_i, \\ \nabla_X^\perp \xi &= \sum_{\alpha,\beta=1}^p f^\alpha(\xi) \bar{\omega}_\alpha^\beta(X) f_\beta. \end{aligned}$$

A seguir, mostraremos uma relação entre a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten. Seja $P : TM \times TM^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $P(X, \xi) = \langle X, \xi \rangle$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar em $\mathbb{G}$. Consideremos $\tilde{\nabla}$ a derivada covariante de tensores e portanto

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X P(Y, \xi) &= X(P(Y, \xi)) - P(\nabla_X Y, \xi) - P(Y, \nabla_X^\perp \xi) \\ &= X\langle Y, \xi \rangle - \langle \nabla_X Y, \xi \rangle - \langle Y, \nabla_X^\perp \xi \rangle. \end{aligned}$$

Notemos que $P(f_j, f_\alpha) = 0$ para $j = p+1, \dots, d_1$ e $P(f_j, f_\alpha) = -A_j^\alpha$ para $j = d_1+1, \dots, n$, pois

$$P(f_j, f_\alpha) = \langle f_j, f_\alpha \rangle = \langle e_j - \sum_{\beta=1}^p A_j^\beta f_\beta, f_\alpha \rangle = -A_j^\alpha.$$

Proposição 1.16. *Sejam $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$. Então,*

$$\langle S(X, Y), \xi \rangle = \tilde{\nabla}_X P(Y, \xi) + \langle A_\xi(X), Y \rangle. \quad (1.16)$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle S(X, Y), \xi \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \xi \rangle \\
&= X \langle Y, \xi \rangle - \langle Y, \bar{\nabla}_X \xi \rangle - \langle \nabla_X Y, \xi \rangle \\
&= X \langle Y, \xi \rangle - \langle Y, \nabla_X^\perp \xi + (\bar{\nabla}_X \xi)^\top \rangle - \langle \nabla_X Y, \xi \rangle \\
&= X \langle Y, \xi \rangle - \langle \nabla_X Y, \xi \rangle - \langle Y, \nabla_X^\perp \xi \rangle + \langle A_\xi(X), Y \rangle .
\end{aligned}$$

□

Observamos que, se $Y \in TM \cap D$, então $\tilde{\nabla}_X P(Y, \xi) = 0$, pois $\nabla_X Y \in TM \cap D$ para todo $X \in TM$. Portanto, (1.16) é análogo ao caso riemanniano, ou seja,

$$\langle S(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi(X), Y \rangle .$$

Agora, se $Y = \sum_{j=d_1+1}^n f^j(Y) f_j$, então

$$\langle S(X, Y), \xi \rangle = \tilde{\nabla}_X P(Y, \xi) .$$

Seja $K^\perp$ a curvatura de $\nabla^\perp$ definida por

$$K^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi, \quad \forall X, Y \in TM \text{ e } \xi \in TM^\perp .$$

Para a segunda forma fundamental S , a derivada covariante $\tilde{\nabla}$ é da forma

$$(\tilde{\nabla}_X S)(Y, Z) = \nabla_X^\perp (S(Y, Z)) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z) .$$

Com as identidades geométricas acima, obtemos uma versão subriemanniana das equações fundamentais para a subvariedade não-horizontal M .

Teorema 1.17. *Sejam K a curvatura de ∇ , $K^\perp$ a curvatura de $\nabla^\perp$, S a segunda forma fundamental e A o operador de Weingarten. Então, para cada $X, Y, Z \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$ as seguintes equações são satisfeitas*

$$1. \text{ (Equação de Gauss) } K(X, Y)Z = A_{S(Y, Z)}(X) - A_{S(X, Z)}(Y);$$

2. (Equação de Codazzi) $\tilde{\nabla}_Y S(X, Z) - \tilde{\nabla}_X S(Y, Z) - S(T(X, Y), Z) = 0;$

3. (Equação de Ricci) $K^\perp(X, Y)\xi = S(X, A_\xi Y) - S(Y, A_\xi X),$

em que T é a torção de ∇ .

Demonstração. Segue da definição de curvatura que

$$\begin{aligned}
 K(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
 &= \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z - S(X, \nabla_Y Z) - \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z + S(Y, \nabla_X Z) - \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z + S([X, Y], Z) \\
 &= \overline{\nabla}_X (\overline{\nabla}_Y Z - S(Y, Z)) - S(X, \nabla_Y Z) - \overline{\nabla}_Y (\overline{\nabla}_X Z - S(X, Z)) + S(Y, \nabla_X Z) \\
 &\quad - \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z + S([X, Y], Z) \\
 &= \overline{K}(X, Y)Z + A_{S(Y, Z)}(X) - \nabla_X^\perp S(Y, Z) - S(X, \nabla_Y Z) - A_{S(X, Z)}(Y) \\
 &\quad + \nabla_Y^\perp S(X, Z) + S(Y, \nabla_X Z) - S([X, Y], Z) \\
 &= A_{S(Y, Z)}(X) - A_{S(X, Z)}(Y) - ((\tilde{\nabla}_X S)(Y, Z) + S(\nabla_X Y, Z) + S(Y, \nabla_X Z)) \\
 &\quad - S(X, \nabla_Y Z) + ((\tilde{\nabla}_Y S)(X, Z) + S(\nabla_Y X, Z) + S(X, \nabla_Y Z)) + S(Y, \nabla_X Z) \\
 &\quad + S([X, Y], Z) \\
 &= A_{S(Y, Z)}(X) - A_{S(X, Z)}(Y) - (\tilde{\nabla}_X S)(Y, Z) + (\tilde{\nabla}_Y S)(X, Z) - S(T(X, Y), Z).
 \end{aligned}$$

Como $K(X, Y)Z \in TM$, então

$$K(X, Y)Z = A_{S(Y, Z)}(X) - A_{S(X, Z)}(Y) \text{ e } (\tilde{\nabla}_Y S)(X, Z) - (\tilde{\nabla}_X S)(Y, Z) - S(T(X, Y), Z) = 0.$$

Analogamente, vejamos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \overline{K}(X, Y)\xi = \overline{\nabla}_X (\nabla_Y^\perp \xi - A_\xi(Y)) - \overline{\nabla}_Y (\nabla_X^\perp \xi - A_\xi(X)) - (\nabla_{[X, Y]}^\perp \xi - A_\xi([X, Y])) \\
 &= \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X - \nabla_X (A_\xi Y) - S(X, A_\xi Y) \\
 &\quad - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi + A_{\nabla_X^\perp \xi} Y + \nabla_Y (A_\xi X) + S(Y, A_\xi X) - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi + A_\xi([X, Y]) \\
 &= K^\perp(X, Y)\xi - S(X, A_\xi Y) + S(Y, A_\xi X) \\
 &\quad - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X - \nabla_X (A_\xi Y) + A_{\nabla_X^\perp \xi} Y + \nabla_Y (A_\xi X) + A_\xi([X, Y]).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$K^\perp(X, Y)\xi - S(X, A_\xi Y) + S(Y, A_\xi X) = 0 .$$

□

A seguir, trazemos duas definições importantes para os próximos capítulos. Uma delas é bem conhecida da geometria riemanniana, a *curvatura média*.

Definição 1.18. A curvatura média de M é o tensor $H : TM^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$H_\xi = -\text{traço } A_\xi .$$

Definição 1.19. A média da torção de M é o tensor $\sigma : TM^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\sigma_\xi = \sigma(\xi) = \sum_{j=d_1+1}^n f^j(\overline{T}(\xi, f_j)) .$$

1.4 Medida μ de subvariedades não-horizontais

Em [23], os autores calcularam uma fórmula para a densidade da medida esférica de Hausdorff associada a uma subvariedade não-horizontal M de $\mathbb{G}$. Nesta seção introduziremos esta fórmula e a escreveremos utilizando uma base adaptada sobre a variedade M . O fator desta medida independente da posição da variedade M em relação a distribuição D será a medida μ que utilizaremos como medida canônica para subvariedades não-horizontais em $\mathbb{G}$. No caso do grupo de Heisenberg provamos que a medida μ é um múltiplo constante da medida esférica de Hausdorff.

Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma base graduada de $\mathfrak{g}$ e X_J um q -vetor simples da forma

$$X_J = X_{j_1} \wedge \dots \wedge X_{j_q} ,$$

com $J = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ e $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_q \leq n$. Indicamos por $\Lambda_q \mathfrak{g}$ o espaço do q -vetor simples da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Vimos na seção 1.2 que o grau de X_j é o único inteiro k tal que $X_j \in \mathfrak{g}^k$, assim definimos o grau de $X_J \in \Lambda_q \mathfrak{g}$ como a soma $d_{j_1} + d_{j_2} + \dots + d_{j_q}$, a qual denotamos por d_J .

Definição 1.20. (Grau de um q -vetor) *Seja $\tau = \sum_J \tau_J X_J, \tau_J \in \mathbb{R}$ um q -vetor simples com respeito a base graduada $\{X_1, \dots, X_n\}$. A projeção de τ com grau $r \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \leq r \leq Q$, em que Q é a dimensão de Hausdorff de M , é definida como $(\tau)_r = \sum_{d_J=r} \tau_J X_J$ e o grau de τ é definido como o inteiro $d(\tau) = \max\{d_J \mid \tau_J \neq 0\}$.*

Definição 1.21. (Grau de subvariedades) *Sejam M uma subvariedade de dimensão q e $\tau_M(x)$ um q -vetor tangente de M em $x \in M$. Então, o grau de M em x é um inteiro positivo*

$$d_M(x) = d(\tau_M(x)) .$$

O grau de M é o número $d(M) = \max_{x \in M} d_M(x)$. Dizemos que $x \in M$ possui grau máximo se $d_M(x) = d(M)$.

Portanto, de acordo com a Definição 1.20 e 1.21, definimos $\tau_M^d(x)$ como a parte de $\tau_M(x)$ com grau máximo $d = d(M)$, isto é,

$$\tau_M^d(x) = (\tau_M(x))^d .$$

A próxima definição introduz o fator métrico associado ao q -vetor.

Definição 1.22. (Fator Métrico) *Sejam $\tau \in \Lambda_q \mathfrak{g}$ e $\mathcal{L}(\tau)$ o único subespaço associado a τ . Então, o fator métrico é definido por*

$$\theta(\tau) = \mathcal{H}_{|\cdot|}^d(F^{-1}(\exp(\mathcal{L}(\tau)) \cap B_1)),$$

em que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{G}$ é um sistema de coordenadas com respeito a base $e_1, \dots, e_n$, $\mathcal{H}_{|\cdot|}^d$ é a medida de Hausdorff de dimensão d com respeito a norma euclidiana $|\cdot|$ de $\mathbb{R}^n$ e B_1 é a bola aberta unitária com respeito a distância homogênea ρ . O subespaço associado a τ é definido como $\{v \in \mathfrak{g}; v \wedge \tau = 0\}$.

Agora usaremos a linguagem acima para o caso em que M é uma subvariedade não-horizontal de $\mathbb{G}$ conforme seção 1.3.

Seja

$$\tau_M(x) = \frac{f_{p+1} \wedge \dots \wedge f_n}{|f_{p+1} \wedge \dots \wedge f_n|}$$

um $(n-p)$ -vetor tangente unitário a M em x com respeito a métrica estendida $h = \langle, \rangle$ de $\mathbb{G}$. Então, $\tau_M^d(x)$ é a parte de $\tau_M(x)$ com grau máximo $d = Q - p$, em que $Q = \sum_{i=1}^l id_i$ é a dimensão de Hausdorff de $\mathbb{G}$.

Sejam $v_1, \dots, v_p$ uma base ortonormal de seções do espaço ortogonal $TM^{\perp h}$ com relação ao produto escalar h , isto é, $\langle v_i, TM \rangle = 0$, $i = 1, \dots, p$ e $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$ é uma p -forma unitária de $TM^{\perp h}$.

Foi mostrado em [23] que

$$\int_M \theta(\tau_M^d(x)) dS_\rho^d(x) = \int_M |\tau_M^d(x)| d\text{vol}_h(x), \quad (1.17)$$

em que $\theta(\tau_M^d(x))$ é o fator métrico segundo Definição 1.22, S_ρ^d é a medida esférica de Hausdorff d -dimensional e $d\text{vol}_h$ é a forma volume em M induzida por h .

Dessa forma, a densidade da medida μ em M é igual a

$$d\mu = |\tau_M^d| d\text{vol}_h \lrcorner M, \quad (1.18)$$

em que

$$d\text{vol}_h = e^1 \wedge \dots \wedge e^n = f^1 \wedge \dots \wedge f^n$$

é a densidade da medida esférica de Hausdorff em $\mathbb{G}$ como espaço métrico subriemanniano, $\text{vol}_h \lrcorner M := (v \lrcorner \text{vol}_h)|_M$, $\lrcorner$ é a contração de uma forma diferencial e $|\cdot|$ é a norma induzida pela métrica riemanniana h . Portanto,

$$\begin{aligned} d\mu &= |\tau_M^d| v \lrcorner d\text{vol}_h \\ &= |\tau_M^d| v \lrcorner f^1 \wedge \dots \wedge f^n. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Teorema 1.23.

$$d\mu = f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n. \quad (1.20)$$

Demonstração. Conforme seção 1.3,

$$\begin{aligned} \langle f_j, f_k \rangle &= \delta_{jk} + \sum_{\alpha=1}^p A_j^\alpha A_k^\alpha, \quad j, k = d_1 + 1, \dots, n \\ \langle f_\alpha, f_k \rangle &= -A_k^\alpha, \quad k = d_1 + 1, \dots, n, \alpha = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Se denotarmos por $B_{jk} = \langle f_j, f_k \rangle$, $j, k = d_1 + 1, \dots, n$, então $B = (B_{jk})$ é uma matriz quadrada de ordem $(n - d_1)$.

Sejam A é a matriz de ordem $(n - d_1) \times p$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} A_{d_1+1}^1 & A_{d_1+1}^2 & \cdots & A_{d_1+1}^p \\ A_{d_1+2}^1 & A_{d_1+2}^2 & \cdots & A_{d_1+2}^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^1 & A_n^2 & \cdots & A_n^p \end{pmatrix}$$

e I_{n-d_1} é a matriz identidade de ordem $(n - d_1)$. Então,

$$B = I_{n-d_1} + AA^t.$$

Vamos calcular a p -forma unitária v .

Considere

$$w_\alpha := f_\alpha + \sum_{j=d_1+1}^n x_\alpha^j f_j,$$

em que escolhemos x_α^j tal que $\langle w_\alpha, f_j \rangle = 0$ para $\alpha = 1, \dots, p$, $j = p + 1, \dots, n$. Em particular,

$$\sum_{k=d_1+1}^n x_\alpha^k B_{jk} = A_j^\alpha, \quad (1.21)$$

pois

$$0 = \langle w_\alpha, f_j \rangle = -A_j^\alpha + \sum_{k=d_1+1}^n x_\alpha^k B_{jk}.$$

Como $f_\alpha, \alpha = 1, \dots, p$ são linearmente independentes, então os vetores w_α também são linearmente independentes e pela condição acima estes vetores são ortogonais a TM . Assim, escolhemos

$$v = \frac{w_1 \wedge \cdots \wedge w_p}{|w_1 \wedge \cdots \wedge w_p|}.$$

Notemos que $|w_1 \wedge \cdots \wedge w_p| = |\det W|$, em que $W = (W_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq p}$ é uma matriz quadrada de ordem p tal que

$$W_{\alpha\beta} = \langle w_\alpha, w_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{j,k=d_1+1}^n x_\alpha^j x_\beta^k B_{jk} - \sum_{j=d_1+1}^n x_\alpha^j A_j^\beta - \sum_{j=d_1+1}^n x_\beta^j A_j^\alpha.$$

Assim,

$$W_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{j=d_1+1}^n x_{\beta}^j A_j^{\alpha}.$$

Se $C = (C_{kj})$ denota a matriz inversa de B , então segue de (1.21) que

$$x_{\alpha}^j = \sum_{k=d_1+1}^n C_{kj} A_k^{\alpha}. \quad (1.22)$$

Logo, $W_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{j=d_1+1}^n A_j^{\alpha} C_{jk} A_k^{\beta}$ ou

$$W = I_p - A^t B^{-1} A.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v \lrcorner \text{dvol}_h &= \frac{w_1 \wedge \cdots \wedge w_p}{|w_1 \wedge \cdots \wedge w_p|} \lrcorner f^1 \wedge \cdots \wedge f^n \\ &= \frac{1}{\det W} (f_1 + \sum_{j=d_1+1}^n x_1^j f_j) \wedge \cdots \wedge (f_p + \sum_{k=d_1+1}^n x_p^k f_k) \lrcorner f^1 \wedge \cdots \wedge f^n \\ &= \frac{1}{|\det W|} (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p + \text{termos com } f_{d_1+1}, \dots, f_n) \lrcorner (f^1 \wedge \cdots \wedge f^n) \\ &= \frac{1}{|\det W|} (f^{p+1} \wedge \cdots \wedge f^n + \text{termos com } f^1, \dots, f^p) \\ &= \frac{1}{|\det W|} f^{p+1} \wedge \cdots \wedge f^n, \end{aligned}$$

pois $f^{\alpha} = 0$ em M para $\alpha = 1, \dots, p$.

Para concluirmos o resultado, calculamos τ_M^d .

Notemos que

$$\begin{aligned} \tau_M &= |f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_n|^{-1} f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_n \\ &= |f_{d_1+1} \wedge \cdots \wedge f_n|^{-1} f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_n \\ &= |\det B|^{-1} f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_{d_1} \wedge (e_{d_1+1} - \sum_{\alpha=1}^p A_{d_1+1}^{\alpha} f_{\alpha}) \wedge \cdots \wedge (e_n - \sum_{\omega=1}^p A_n^{\omega} f_{\omega}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tau_M^d = |\det B|^{-1} f_{p+1} \wedge \cdots \wedge f_{d_1} \wedge e_{d_1+1} \wedge \cdots \wedge e_n,$$

em que $d = d_1 + 2d_2 + \dots + ld_l - p = Q - p$. Segue de (1.5) e $|e_1 \wedge \dots \wedge e_n| = 1$ que

$$|\tau_M^d| = |\det B|^{-1}.$$

Assim,

$$d\mu = |\det B|^{-1} |\det W|^{-1} f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n.$$

Afirmamos que $|\det B| |\det W| = 1$. De fato, usando a generalização de “*matrix determinant lemma*” mostrado em [6, 11, 16] obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & A^t \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - A^t B^{-1} A & 0 \\ B^{-1} A & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & A^t \\ A & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^t \\ 0 & B - A A^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\det(B) \det(W) = \det(B - A A^t) = \det(I) = 1.$$

□

1.4.1 Grupo de Heisenberg

Um grupo estratificado especial que é o principal objeto das aplicações deste trabalho é grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$. Recordamos do exemplo 1.2 que $\mathbb{H}^n$ é um grupo de Lie estratificado cuja álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é gerada por $e_1, \dots, e_{2n}, e_0$ de modo que $[e_i, e_{i+n}] = e_0$ para $i = 1, \dots, n$ e os demais colchetes são todos nulos. A álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é graduada como $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, em que $\mathfrak{h}_1$ é gerado por $e_1, \dots, e_{2n}$ e $\mathfrak{h}_2$ por e_0 .

Suponhamos que a base $e_1, \dots, e_{2n}$ de $\mathfrak{h}_1$ é ortonormal. Consideremos a aplicação B da Seção 1.2. Então, $\ker B \subset \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_1$ é gerado por $e_i \otimes e_j, e_{i+n} \otimes e_{j+n}, e_i \otimes e_{i+n} + e_{j+n} \otimes e_j$ para $i, j = 1, \dots, n$ e $e_i \otimes e_{j+n}, e_{i+n} \otimes e_j$, para $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$. Notemos que $\ker B^\perp$ é gerado pelo vetor unitário

$$v = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (e_i \otimes e_{i+n} - e_{i+n} \otimes e_i),$$

e $B(v) = e_0$, assim e_0 é unitário no produto escalar estendido de $T\mathbb{G}$.

Em coordenadas exponenciais, temos que a operação de grupo é dada por

$$(x^1, \dots, x^{2n}, x^{2n+1})(y^1, \dots, y^{2n}, y^{2n+1}) = (x^1 + y^1, \dots, x^{2n} + y^{2n}, x^{2n+1} + y^{2n+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x^i y^{i+n} - y^i x^{i+n}))$$

e os campos invariantes à esquerda são

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2} x^{i+n} \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}, \\ e_{i+n} &= \frac{\partial}{\partial x^{i+n}} + \frac{1}{2} x^i \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}, \\ e_0 &= \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Conforme [12] , Proposição 5.1, as geodésicas Carnot-Caratheodory $c(t)$ que passam pelo elemento identidade de $\mathbb{H}^n$ são soluções de

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \sum_{r=1}^{2n} \lambda_r e_r \\ \dot{\lambda}_j &= -\lambda_0 \lambda_{j+n} \\ \dot{\lambda}_{j+n} &= \lambda_0 \lambda_j \\ \dot{\lambda}_0 &= 0 \end{aligned}$$

com condições iniciais $c(0) = (0, \dots, 0)$, $\lambda_k(0) = \mu_k$, $k = 0, \dots, 2n$. Então,

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \mu_0 \\ \lambda_j &= \mu_j \cos(\mu_0 t) - \mu_{j+n} \sin(\mu_0 t) \\ \lambda_{j+n} &= \mu_{j+n} \cos(\mu_0 t) + \mu_j \sin(\mu_0 t) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{x}^j &= \mu_j \cos(\mu_0 t) - \mu_{j+n} \sin(\mu_0 t) \\ \dot{x}^{j+n} &= \mu_{j+n} \cos(\mu_0 t) + \mu_j \sin(\mu_0 t) \\ \dot{x}^{2n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\dot{x}^{j+n} x^j - \dot{x}^j x^{j+n}). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t , obtemos

$$\begin{aligned} x^j(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, t) &= \frac{\mu_j}{\mu_0} \sin(\mu_0 t) - \frac{\mu_{j+n}}{\mu_0} (1 - \cos(\mu_0 t)) \\ x^{j+n}(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, t) &= \frac{\mu_j}{\mu_0} (1 - \cos(\mu_0 t)) + \frac{\mu_{j+n}}{\mu_0} \sin(\mu_0 t) \\ x^{2n+1}(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, t) &= \frac{n}{2\mu_0^2} \left(\sum_{r=1}^{2n} \mu_r^2 \right) (\mu_0 t - \sin(\mu_0 t)). \end{aligned}$$

A bola unitária B_1 definida pela distância homogênea ρ é parametrizada pela exponencial Carnot-Caratheodory

$$\exp_{CC}(\mu_0, \dots, \mu_{2n}) = (x^1(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, 1), \dots, x^{2n+1}(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, 1))$$

com $-2\pi \leq \mu_0 \leq 2\pi$, $\sum_{r=1}^{2n} \mu_r^2 \leq 1$.

Observamos que

$$\begin{bmatrix} x^j(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, 1) \\ x^{j+n}(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, 1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \sin(\mu_0) & -(1 - \cos(\mu_0)) \\ (1 - \cos(\mu_0)) & \sin(\mu_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_j \\ \mu_{j+n} \end{bmatrix}.$$

Ortogonalizamos a matriz do lado direito do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} x^j(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, 1) \\ x^{j+n}(\mu_0, \dots, \mu_{2n}, 1) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{1 - \cos(\mu_0)}}{|\mu_0|} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_j \\ \mu_{j+n} \end{bmatrix}$$

em que $\alpha = \alpha(\mu_0)$. Se introduzirmos uma mudança de variáveis

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu}_j \\ \bar{\mu}_{j+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_j \\ \mu_{j+n} \end{bmatrix},$$

então parametrizamos B_1 por

$$\begin{aligned} F(\mu_0, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{2n}) &= \left(\frac{\sqrt{1 - \cos(\mu_0)}}{|\mu_0|} \bar{\mu}_1, \dots, \frac{\sqrt{1 - \cos(\mu_0)}}{|\mu_0|} \bar{\mu}_{2n}, \right. \\ &\quad \left. \frac{n}{2\mu_0^2} \left(\sum_{r=1}^{2n} \bar{\mu}_r^2 \right) (\mu_0 - \sin(\mu_0)) \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Teorema 1.24. *Se M é uma subvariedade não-horizontal de $\mathbb{H}^n$, então a μ -medida em M é um múltiplo constante da medida esférica de Hausdorff.*

Demonstração. De fato, notemos que

$$\int_M \theta(\tau_M^d(x)) dS_\rho^d(x) = \int_M d\mu.$$

O subespaço associado ao $(2n + 1 - p)$ -vetor $\tau_M^d(x) = |\det B|^{-1} f_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{2n+1}$, em que $|\det B|^{-1} = |f_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{2n+1}|$, é definido por $\{v \in \mathfrak{h}; v \wedge \tau_M^d = 0\}$. Como B_1 é parametrizada por (1.24), então $\theta(\tau_M^d(x))$ não depende da direção vertical de τ_M^d , mas apenas do fator de B_1 que é constante.

□

Capítulo 2

A primeira variação da medida μ

Neste capítulo apresentamos o segundo resultado principal desta tese: *a primeira variação da medida μ* de uma subvariedade não-horizontal imersa em um grupo de Lie estratificado.

Na Seção 2.1, inspirados pela demonstração do resultado clássico de variação da forma volume de uma variedade riemanniana feito em [30], determinamos uma fórmula para a variação da medida μ de uma subvariedade não-horizontal. Encontramos condições necessárias para que a medida μ seja mínima e definimos as subvariedades não-horizontais mínimas de um grupo de Lie estratificado como aquelas que satisfazem estas condições.

Na Seção 2.2 investigamos algumas subvariedades não-horizontais do grupo de Heisenberg. Em especial, estudamos duas classes de superfícies não-horizontais mínimas de $\mathbb{H}^2$: as superfícies regradas e as superfícies tubulares. Finalizamos este capítulo com uma condição de mínima para hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$ que são definidas implicitamente por uma função suave.

Continuamos com as mesmas notações do capítulo 1.

2.1 A primeira variação

Seja $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão tal que $i(M) \subset \mathbb{G}$ é uma subvariedade não-horizantal de codimensão p . De acordo com a Seção 1.4,

$$\Phi = d\mu = f^{p+1} \wedge \cdots \wedge f^n$$

é o elemento volume de $i(M)$.

Seja $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma aplicação diferenciável tal que $F_u : M \rightarrow \mathbb{G}$ é uma imersão para todo $u \in (-\epsilon, \epsilon)$, em que $F_u(p) = F(u, p)$ e $F_0 = i$. Nessas condições, dizemos que F é uma variação da imersão i .

Suponhamos, reduzindo ϵ se necessário, que $F_u(M)$ é uma subvariedade não-horizantal em $\mathbb{G}$, para todo u . Em cada subvariedade $F_u(M)$, seja $\tilde{\Gamma}(u)$ a forma volume construída na Seção 1.4. Denotaremos por $\Gamma(u) = F_u^*(\tilde{\Gamma}(u))$ a família de formas volume de M . Assim, se M é uma variedade compacta com bordo, então pela Regra de Leibniz, Proposição 10 da pag. 286 de [30] temos que

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=u_0} \int_M \Gamma(u) = \int_M \left. \frac{d}{du} \right|_{u=u_0} \Gamma(u) . \quad (2.1)$$

Em analogia ao teorema clássico de variação da forma volume de uma variedade riemanniana, obtemos a seguir o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.1. *Seja $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão de uma variedade M orientada de dimensão $(n-p)$ em um grupo de Lie estratificado e subriemanniano $(\mathbb{G}, D, \langle, \rangle)$ como subvariedade não-horizantal. Seja $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma variação de i por imersões com campo variacional W . Se $\Gamma(u) = F_u^*(\tilde{\Gamma}(u))$, em que $\tilde{\Gamma}(u)$ é uma forma volume em $F_u(M)$ de acordo com a orientação de M , então*

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}(0) &= i^* \left(- \sum_{j=p+1}^{d_1} \langle A_{W^\perp}(f_j), f_j \rangle + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(W^\perp, f_j) \right) \Gamma(0) + d(i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner \Gamma(0)) \\ &= i^*(H_{W^\perp} + \sigma_{W^\perp}) \Gamma(0) + d(i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner \Gamma(0)) , \end{aligned}$$

em que A é o operador de Weingarten associado a $i(M)$, $\bar{T}$ é o tensor torção de $\mathbb{G}$, H é a curvatura média e σ é a média da torção segundo definição (1.19).

Demonstração. Para a demonstração deste Teorema seguimos a estrutura da prova de [30].

Sejam $W = \frac{dF}{du}|_{u=0}$ o campo variacional da variação F e $p_0 \in M$ tal que $W(i(p_0))$ não é tangente a $i(M)$. Para alguma vizinhança suficientemente pequena O de p_0 , se necessário diminuimos ϵ , podemos supor $F : (-\epsilon, \epsilon) \times O \rightarrow \mathbb{G}$ um mergulho. Denotamos por $F_u(O) = O_u$.

Consideremos um aberto $\tilde{O}$ de $\mathbb{G}$ que contém $F((-\epsilon, \epsilon) \times O)$ e escolhemos uma base de campos de vetores $f_1, \dots, f_n$ de $T\mathbb{G}$ tal que

- (i) $f_1, \dots, f_p$ restrito a O_u pertencem a $TO_u^\perp$;
- (ii) $f_{p+1}, \dots, f_n$ restrito a O_u pertencem a TO_u ;
- (iii) $f_1, \dots, f_{d_1}$ são ortonormais em D ;
- (iv) $f_j = e_j - \sum_{\alpha=1}^p A_j^\alpha f_\alpha$, para $j = d_1 + 1, \dots, n$.

Sejam $f^1, \dots, f^n$ as 1-formas duais de $f_1, \dots, f_n$. Então, $F_u^*(f^\alpha) = 0$ para $\alpha = 1, \dots, p$. Além disso, se

$$\Phi = f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n,$$

então $\tilde{\Gamma}(u) = \Phi|_{O_u}$ e $\Gamma(u) = F_u^* \tilde{\Gamma}(u) = F_u^* \Phi = F_u^*(f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n)$ é uma forma volume de M .

O campo variacional W ao longo de O é a restrição do campo $\frac{dF}{du}$ definido ao longo da imagem de F . Portanto, estendemos $\frac{dF}{du}$ ao um aberto $\tilde{O}$ que contém a imagem de F . Denotamos por $\tilde{W}$ esta extensão. Assim, associado a $\tilde{W}$ existe um grupo a 1-parâmetro de difeomorfismo ρ_u tal que $\rho_u(F_v(p)) = F_{u+v}(p)$. Portanto, se X é um campo tangente em O , então

$$(\rho_u)_*(F_v)_*X = (F_{u+v})_*X.$$

Pela definição de derivada de Lie de formas diferenciais, ver por exemplo [17, 21], segue que

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}(u)(X_{p+1}, \dots, X_n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Gamma(u+h)(X_{p+1}, \dots, X_n) - \Gamma(u)(X_{p+1}, \dots, X_n)) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((F_{u+h}^* \Phi)(X_{p+1}, \dots, X_n) - (F_u^* \Phi)(X_{p+1}, \dots, X_n)) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi((F_{u+h})_* X_{p+1}, \dots, (F_{u+h})_* X_n) \\
&\quad - \Phi((F_u)_* X_{p+1}, \dots, (F_u)_* X_n)) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi((\rho_h)_* (F_u)_* X_{p+1}, \dots, (\rho_h)_* (F_u)_* X_n) \\
&\quad - \Phi((F_u)_* X_{p+1}, \dots, (F_u)_* X_n)) \\
&= L_{\widetilde{W}} \Phi((F_u)_* X_{p+1}, \dots, (F_u)_* X_n) \\
&= F_u^* (L_{\widetilde{W}} \Phi)(X_{p+1}, \dots, X_n).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{\Gamma}(u) = F_u^* L_{\widetilde{W}} \Phi .$$

Mas,

$$F_u^* L_{\widetilde{W}} \Phi = F_u^* (\widetilde{W} \lrcorner d\Phi + d(\widetilde{W} \lrcorner \Phi)) . \quad (2.2)$$

Portanto, mostraremos que os dois termos que aparecem em (2.2) são os termos da afirmação do teorema para $u = 0$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
d\Phi &= d(f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n) \\
&= \sum_{i=p+1}^n (-1)^{i-(p+1)} f^{p+1} \wedge \dots \wedge df^i \wedge \dots \wedge f^n \\
&= \sum_{i=p+1}^{d_1} (-1)^{i-(p+1)} f^{p+1} \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k=1}^n f^k \wedge \bar{\omega}_k^i \right) \wedge \dots \wedge f^n \\
&\quad + \sum_{j=d_1+1}^n (-1)^{j-(p+1)} f^{p+1} \wedge \dots \wedge \bar{T}^j \wedge \dots \wedge f^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^i(f_i) f^\alpha \wedge f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^i(f_\beta) f^\alpha \wedge f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^\beta \wedge \dots \wedge f^n \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^p \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_\alpha, f_\beta) f^\alpha \wedge f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^\beta \wedge \dots \wedge f^n \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_\alpha, f_j) f^\alpha \wedge f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n \\
&= \sum_{\alpha=1}^p \left(\sum_{i=p+1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^i(f_i) + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_\alpha, f_j) \right) f^\alpha \wedge \Phi \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta=1}^p \left(\sum_{i=p+1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^i(f_\beta) + \frac{1}{2} \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_\alpha, f_\beta) \right) f^\alpha \wedge \Psi \\
&= \sum_{\alpha=1}^p (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) f^\alpha \wedge \Phi + \sum_{\alpha,\beta=1}^p \Omega_{\alpha\beta} f^\alpha \wedge \Psi,
\end{aligned}$$

em que $\Psi = f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^\beta \wedge \dots \wedge f^n$ e $\Omega_{\alpha\beta} = \sum_{i=p+1}^{d_1} \bar{\omega}_\alpha^i(f_\beta) + \frac{1}{2} \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_\alpha, f_\beta)$.

Então,

$$\begin{aligned}
\widetilde{W} \lrcorner d\Phi &= \sum_{\alpha=1}^p (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) \widetilde{W} \lrcorner (f^\alpha \wedge \Phi) + \sum_{\alpha,\beta=1}^p \Omega_{\alpha\beta} \widetilde{W} \lrcorner (f^\alpha \wedge \Psi) \\
&= \sum_{\alpha=1}^p (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) (f^\alpha (\widetilde{W}) \Phi - f^\alpha \wedge (\widetilde{W} \lrcorner \Phi)) + \sum_{\alpha,\beta=1}^p \Omega_{\alpha\beta} (f^\alpha (\widetilde{W}) \Psi - f^\alpha \wedge (\widetilde{W} \lrcorner \Psi)).
\end{aligned}$$

Como $F_u^* \Psi = 0$ e $F_u^* f^\alpha = 0$, então

$$\begin{aligned}
F_u^* (\widetilde{W} \lrcorner d\Phi) &= F_u^* \left(\sum_{\alpha=1}^p f^\alpha (\widetilde{W}) (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) \right) \Gamma(u) \\
&= F_u^* (H_{\widetilde{W}^\perp} + \sigma_{\widetilde{W}^\perp}) \Gamma(u).
\end{aligned}$$

Para o outro termo verificamos facilmente que

$$\widetilde{W} \lrcorner \Phi = \widetilde{W}^\top \lrcorner \Phi,$$

pois

$$\begin{aligned}
(-1)^{k-p+1} \widetilde{W} \lrcorner \Phi(f_{p+1}, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n) &= (-1)^{k-p+1} \Phi(\widetilde{W}, f_{p+1}, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n) \\
&= (-1)^{k-p+1} f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n(\widetilde{W}, f_{p+1}, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n) \\
&= (-1)^{k-p+1} f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n(\widetilde{W}^\top, f_{p+1}, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n) \\
&= (-1)^{k-p+1} \Phi(\widetilde{W}^\top, f_{p+1}, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n) .
\end{aligned}$$

Portanto, (2.2) é da forma

$$F_u^* L_{\widetilde{W}} \Phi = F_u^* (H_{\widetilde{W}^\perp} + \sigma_{\widetilde{W}^\perp}) \Gamma(u) + d(F_u^* (\widetilde{W}^\top \lrcorner \Phi)) .$$

Para $u = 0$, obtemos a prova do teorema para qualquer ponto p_0 tal que $W(p_0)$ não é tangente a $i(M)$. O caso geral, ainda seguimos a apresentação de [30].

Seja $\mathbf{G} = \mathbb{G} \times \mathbb{R}$ um grupo de Lie cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$, em que $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de $\mathbb{G}$, possui a seguinte estratificação $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^l$ tal que

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^1 \oplus \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}^i = \mathfrak{g}^i, \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, l \text{ e } [\mathfrak{g}^i, \mathbb{R}] = 0 \quad \forall i.$$

Seja $\mathbf{D}$ a distribuição horizontal em $\mathbf{G}$ gerada por $\mathfrak{g}^1$. Portanto, $(\mathbf{G}, \mathbf{D}, \langle, \rangle)$ é um grupo de Lie estratificado subriemanniano, em que $\langle, \rangle$ é a métrica produto definida em $\mathbf{G}$.

Seja $\mathbf{F} : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbf{G}$ uma aplicação diferenciável definida por

$$\mathbf{F}(u, p) = (F(u, p), u).$$

A aplicação $\mathbf{F}$ é uma variação de i cujo campo variacional $\mathbf{W}$ é da forma

$$\mathbf{W}(p) = (W(p), 1),$$

em que 1 denota o campo unitário de $\mathbb{R}$. Observe que $\mathbf{W}$ não é tangente a $\mathbf{F}_0(M)$ e portanto o teorema é válido para a variação $\mathbf{F}$. Assim, seja $\overline{\nabla}^{\mathbf{G}}$ a conexão linear em $T\mathbf{G}$ definida por

$$\overline{\nabla}_{Y+\xi_2}^{\mathbf{G}}(X + \xi_1) = \overline{\nabla}_Y X + \overline{\nabla}_{\xi_2}^{\mathbb{R}} \xi_1, \quad \forall X, Y \in T\mathbf{G}, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},$$

em que $\overline{\nabla}$ é a conexão linear em $\mathbb{G}$ definida na seção 1.2, $\overline{\nabla}^{\mathbb{R}}$ é a conexão canônica em $\mathbb{R}$. Então, verificamos facilmente que

$$\mathbf{A}_{\widetilde{\mathbf{W}}^\perp}(\mathbf{X}) = A_{\widetilde{W}^\perp}(X) \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{T}}(\widetilde{\mathbf{W}}^\perp, \mathbf{X}) = \overline{T}(\widetilde{W}^\perp, X),$$

em que $\mathbf{X} = X + \xi \in T\mathbf{G} = T\mathbb{G} \oplus \mathbb{R}$. Portanto, o resultado para $\mathbf{F}$ implica o resultado para F . $\square$

Corolário 2.2. *Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie estratificado n -dimensional e M uma variedade compacta, orientada com bordo ∂M e de dimensão $n - p$. Seja $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão de M em $\mathbb{G}$ como subvariedade não-horizontal com $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma variação de i por imersões e campo variacional W . Se $\Gamma(u) = F_u^*(\tilde{\Gamma}(u))$, em que $\tilde{\Gamma}(u)$ é uma forma volume em $F_u(M)$ de acordo com a orientação de M e*

$$V(u) = \int_M \Gamma(u),$$

então

$$\left. \frac{d}{du} V(u) \right|_{u=0} = \int_M i^*(H_{W^\perp} + \sigma_{W^\perp}) \Gamma(0) + \int_{\partial M} i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner \Gamma(0).$$

Em particular, se F é uma variação que mantém ∂M fixada, então

$$\left. \frac{d}{du} V(u) \right|_{u=0} = \int_M i^*(H_{W^\perp} + \sigma_{W^\perp}) \Gamma(0).$$

Para todas as imersões $f : M \rightarrow \mathbb{G}$ com $f = i$ em ∂M , a imersão i é um ponto crítico para V se e somente se

$$H + \sigma = 0$$

em $TM^\perp$.

Demonstração. Aplicando o Teorema 2.1, a fórmula (2.1) e o Teorema de Stokes, obtemos a primeira afirmação deste Corolário. Se F é uma variação que mantém ∂M fixada, então $W = 0$ em ∂M , assim $i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner \Gamma(0) = 0$ em ∂M , o que prova a segunda afirmação. Vejamos agora que $H + \sigma = 0$ em $TM^\perp$. De fato, escolhemos $v \in TM^\perp$ tal que para

cada $w \in TM^\perp$, $H_w + \sigma_w = \langle v, w \rangle$ e uma função suave ϕ tal que $\phi|_{\partial M} = 0$ e $\phi > 0$ em $M - \partial M$. Se tomarmos $W^\perp = \phi w$, então em $M - \partial M$ obtemos

$$\phi(H_w + \sigma_w) = \langle v, \phi w \rangle = \langle v, W^\perp \rangle = H_{W^\perp} + \sigma_{W^\perp} = 0 .$$

Portanto, $H_w + \sigma_w = 0$, $\forall w \in TM^\perp$, concluindo a última afirmação. $\square$

É bem conhecido na geometria riemanniana que a imersão i é um ponto crítico para o volume riemanniano se a curvatura média é nula. A seguir, veremos que este é o caso para as hipersuperfícies não-horizontais de $\mathbb{G}$.

Corolário 2.3. *Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie estratificado n -dimensional e M uma variedade compacta, orientada com bordo ∂M e de dimensão $n - 1$. Seja $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão de M em $\mathbb{G}$ como subvariedade não-horizontal com $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma variação de i por imersões e campo variacional W . Se $\Gamma(u) = F_u^*(\tilde{\Gamma}(u))$, em que $\tilde{\Gamma}(u)$ é uma forma volume em $F_u(M)$ de acordo com a orientação de M e*

$$V(u) = \int_M \Gamma(u),$$

então

$$\frac{d}{du} V(u)|_{u=0} = \int_M i^*(H_{W^\perp}) \Gamma(0) + \int_{\partial M} i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner \Gamma(0),$$

Em particular, se F é uma variação que mantém ∂M fixada, então

$$\left. \frac{d}{du} V(u) \right|_{u=0} = \int_M i^*(H_{W^\perp}) \Gamma(0),$$

Para todas as imersões $f : M \rightarrow \mathbb{G}$ com $f = i$ em ∂M , a imersão i é um ponto crítico para V se e somente se

$$H = 0$$

em $TM^\perp$.

Demonstração. Para $\alpha = 1, \dots, p$, observamos que

$$\overline{T}^j(f_\alpha, f_j) = \overline{T}^j(f_\alpha, e_j - \sum_{\beta=1}^p A_j^\beta f_\beta) = \overline{T}^j\left(\sum_{i=1}^{d_1} a_\alpha^i e_i, e_j\right) - \sum_{\beta=1}^p A_j^\beta \overline{T}^j(f_\alpha, f_\beta) .$$

Como $c_{ij}^j = 0$, então

$$\overline{T}^j(f_\alpha, f_j) = - \sum_{\beta=1}^p A_j^\beta \overline{T}^j(f_\alpha, f_\beta)$$

e $\overline{T}^j(f_\alpha, f_\beta) = 0$ se $\deg j \neq 2$. Em particular, se M é uma hipersuperfície de $\mathbb{G}$, então $p = 1$ e $\overline{T}^j(f_1, f_j) = 0$ para cada $j = d_1 + 1, \dots, n$. $\square$

Um caso especial é quando M possui a mesma dimensão de $\mathbb{G}$, isto é, M é uma variedade compacta, n -dimensional com fronteira em $\mathbb{G}$ e $T_p M = T_p \mathbb{G}$. Então, $TM^\perp = 0$ para todo $p \in M$. Consequentemente, $H_{W^\perp} + \sigma_{W^\perp} = 0$ e

$$\left. \frac{d}{du} V(u) \right|_{u=0} = \int_{\partial M} i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner \Gamma(0) .$$

Se ∂M é uma subvariedade não-horizontal em todos seus pontos, então podemos escolher uma base adaptada $f_1, \dots, f_n$ de $T\mathbb{G}|_{\partial M}$ e assim

$$\begin{aligned} i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner \Gamma(0) &= i_*^{-1}(W^\top) \lrcorner (f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n) \\ &= f^1(W^\top) f^2 \wedge \dots \wedge f^n, \end{aligned}$$

pois $f^1 = 0$ em $T\partial M$. Logo,

$$\left. \frac{d}{du} V(u) \right|_{u=0} = \int_{\partial M} f^1(W^\top) d\mu ,$$

em que $d\mu = f^2 \wedge \dots \wedge f^n$.

Neste trabalho, usaremos a terminologia *mínima* para designar as subvariedades não-horizontais que são pontos críticos do funcional volume V .

Definição 2.4. Dizemos que uma subvariedade não-horizontal é *mínima* se

$$H_\xi + \sigma_\xi = - \sum_{j=p+1}^{d_1} \langle A_\xi(f_j), f_j \rangle + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(\xi, f_j) = 0$$

para todo $\xi \in TM^\perp$.

2.2 Subvariedades não-horizontais mínimas em $\mathbb{H}^n$

Nesta seção, mostraremos algumas aplicações do teorema da primeira variação da medida μ para o grupo de Heisenberg.

Inicialmente, lembramos que $\mathbb{H}^n$ é um grupo de Lie estratificado cuja álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é gerada por $e_1, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}$ de modo que $[e_i, e_{i+n}] = e_{2n+1}$ para $i = 1, \dots, n$ e os demais colchetes são todos nulos. A álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é graduada como $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, em que $\mathfrak{h}_1$ é gerado por $e_1, \dots, e_{2n}$ e $\mathfrak{h}_2$ por e_{2n+1} .

2.2.1 Subvariedades verticais

Seja $M \subset \mathbb{G}$ uma subvariedade não-horizontal de codimensão p . Dizemos que M é vertical se $A_j^\alpha = 0$, $\forall \alpha = 1, \dots, p, j = d_1 + 1, \dots, n$.

Aplicação 2.1. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ uma subvariedade mínima de codimensão p e $N = \{(x, t) \in \mathbb{H}^n : x \in M, t \in \mathbb{R}\}$ uma subvariedade não-horizontal de $\mathbb{H}^n$. Então, N é mínima.*

Seja $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a projeção natural. Em $\mathbb{R}^{2n}$, denotamos por $\langle, \rangle_{\mathbb{R}}$ a métrica riemanniana, $\nabla^{\mathbb{R}}$ a conexão riemanniana canônica e em $\mathbb{H}^n$, denotamos por $\langle, \rangle$ a métrica sub-riemanniana e $\bar{\nabla}$ a conexão linear.

Sejam $\{g_1, \dots, g_p\}$ e $\{g_{p+1}, \dots, g_{2n}\}$ bases ortonormais de $TM^\perp$ e TM , respectivamente. Assim, se $f_1, \dots, f_{2n}$ é uma base em D restrita a N tal que $\pi_*(f_j) = g_j$ para $j = 1, \dots, 2n$, então $f_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial x^{2n+1}}$ e $f_{p+1}, \dots, f_{2n}, f_{2n+1}$ é uma base de TN .

Notemos que π_* restrita a D é uma isometria e portanto $\pi_*(\bar{\nabla}_{f_i} f_\alpha) = \nabla_{g_i}^{\mathbb{R}} g_\alpha$ para $i = p+1, \dots, 2n$ e $\alpha = 1, \dots, p$. Como $\bar{\nabla} f_\alpha = \sum_{i=p+1}^{2n} \bar{\omega}_\alpha^i \otimes f_i$ e $\nabla^{\mathbb{R}} g_\alpha = \sum_{i=p+1}^{2n} \psi_\alpha^i \otimes g_i$ para $\alpha = 1, \dots, p$, obtemos que $\pi^* \psi_\alpha^i = \bar{\omega}_\alpha^i$. Assim, segue de (1.15) que

$$\pi_*(A_{f_\alpha}(f_i)) = - \sum_{j=p+1}^{2n} \pi_*(\bar{\omega}_\alpha^j(f_i) f_j) = - \sum_{j=p+1}^{2n} \psi_\alpha^j(g_i) g_j = A_{g_\alpha}(g_i).$$

Como M é uma subvariedade mínima de $\mathbb{R}^{2n}$, então $\sum_{j=p+1}^{2n} \langle A_{g_\alpha}(g_j), g_j \rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Portanto,

$$\sum_{j=p+1}^{2n} \langle A_{f_\alpha}(f_j), f_j \rangle = 0.$$

O segundo termo da Proposição 2.2 é da forma

$$\overline{T}^{2n+1}(f_\alpha, f_{2n+1}) = \sum_{k=1}^{2n} a_\alpha^k \overline{T}^{2n+1}(e_k, e_{2n+1}) = 0,$$

pois $\overline{T}(e_k, e_{2n+1}) = -[e_k, e_{2n+1}] = 0$ para $k = 1, \dots, 2n$. Logo,

$$H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha} = - \sum_{j=p+1}^{2n} \langle A_{f_\alpha}(f_j), f_j \rangle + \overline{T}^{2n+1}(f_\alpha, f_{2n+1}) = 0$$

para todo f_α , $\alpha = 1, \dots, p$. Portanto, segue da Definição 2.4 que N é mínima.

Aplicação 2.2. *Se γ é uma curva transversa mínima em $\mathbb{H}^n$, então γ é uma reta vertical.*

De fato, se $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ é uma curva transversa, então $e^{2n+1}(\gamma') \neq 0$ e

$$\gamma' = f_{2n+1} = e_{2n+1} - \sum_{\alpha=1}^{2n} A_{2n+1}^\alpha f_\alpha.$$

Portanto, pela Definição 2.4, temos que

$$\overline{T}^{2n+1}(f_\beta, f_{2n+1}) = 0$$

para todo $\beta = 1 \dots, 2n$. Mas,

$$\overline{T}^{2n+1}(f_\beta, f_{2n+1}) = \overline{T}^{2n+1}(f_\beta, e_{2n+1} - \sum_{\alpha=1}^{2n} A_{2n+1}^\alpha f_\alpha) = - \sum_{\alpha=1}^{2n} A_{2n+1}^\alpha \overline{T}^{2n+1}(f_\beta, f_\alpha).$$

Então, $A_{2n+1}^\alpha = 0$ para todo $\alpha = 1, \dots, 2n$. Portanto, $\gamma' = e_{2n+1}$ e

$$\gamma(t) = \gamma(0) + (0, \dots, 0, t).$$

2.2.2 Superfícies em $\mathbb{H}^1$

Seja $\mathbb{G} = \mathbb{H}^1$ com álgebra de Lie, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ gerada por

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

tal que $[e_1, e_2] = e_3$ e os demais são todos nulos. Assim,

$$\bar{T}^3(e_1, e_2) = -e^3([e_1, e_2]) = -1.$$

Seja $J : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$ um operador linear definido em $\mathfrak{h}_1$ por

$$Je_1 = e_2 \quad \text{e} \quad Je_2 = -e_1.$$

Claramente, $J^2 = -\text{Id}$ e J é uma isometria no produto escalar de $\mathfrak{h}_1$. Consequentemente, obtemos o seguinte resultado

Proposição 2.5. *Se $v_2 \in \mathfrak{h}_1$ é um vetor unitário tal que $v_1 = -Jv_2$, então v_1, v_2 é uma base ortonormal de $\mathfrak{h}^1$ e $[v_1, v_2] = e_3$.*

Demonstração. Segue diretamente da definição de J . □

Consideremos $S \subset \mathbb{H}^1$ uma superfície não-horizontal e D a distribuição horizontal em $T\mathbb{H}^1$. Naturalmente, estendemos o operador linear J a D e conforme Proposição 2.5 se f_2 é um vetor unitário em $TS \cap D$, escolhemos $f_1 = -Jf_2$ e assim f_1, f_2 é uma base ortonormal em D e $\bar{T}^3(f_1, f_2) = -1$. O próximo resultado é bem discutido na literatura, ver por exemplo [10, 28].

Proposição 2.6. *Seja $S \subset \mathbb{H}^1$ uma superfície não-horizontal em todos os pontos e mínima. Então, S é uma superfície regrada.*

Demonstração. De fato, como S é mínima, segue do Corolário 2.2 que

$$\langle A_{f_1}(f_2), f_2 \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \langle \bar{\nabla}_{f_2} f_1, f_2 \rangle = 0.$$

Logo, $\langle \bar{\nabla}_{f_2} f_2, f_1 \rangle = 0$, pois

$$0 = f_2 \langle f_1, f_2 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{f_2} f_1, f_2 \rangle + \langle f_1, \bar{\nabla}_{f_2} f_2 \rangle = \langle f_1, \bar{\nabla}_{f_2} f_2 \rangle .$$

Portanto, $\bar{\nabla}_{f_2} f_2 = 0$.

Sejam $\pi : \mathbb{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção natural e $\nabla^{\mathbb{R}}$ a conexão riemanniana canônica em $\mathbb{R}^2$. Se $\alpha(t)$ é uma curva tangente a S com $\alpha'(t) = f_2(\alpha(t))$ e $\delta(t) = \pi(\alpha(t))$ a projeção de α em $\mathbb{R}^2$, então $|\delta'(t)| = |\pi_* \alpha'(t)| = 1$ e

$$\nabla_{\delta'(t)}^{\mathbb{R}} \delta'(t) = \pi_*(\bar{\nabla}_{f_2} f_2) = 0. \quad (2.3)$$

Se k_δ é a curvatura da curva δ , então de (2.3) temos que $k_\delta = 0$ e assim δ é uma reta em $\mathbb{R}^2$. Se $\delta(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$, Então

$$\alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + \frac{1}{2}(bx_0 - ay_0)t)$$

é uma reta em $\mathbb{H}^1$ e portanto S é uma superfície regada. $\square$

Descrevemos, a seguir uma parametrização para superfícies não-horizontais mínimas de $\mathbb{H}^1$ e a usaremos no capítulo 4.

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^1$ uma curva transversa a retas em S , em que I é um intervalo em $\mathbb{R}$. Então, $e^3(\gamma'(t)) \neq 0$, $\forall t \in I$ e a superfície não-horizontal mínima S é parametrizada por

$$f(t, s) = \gamma(t) + s f_2(\gamma(t)).$$

Se escrevermos $f_2(\gamma(t)) = a_1(t)e_1(\gamma(t)) + a_2(t)e_2(\gamma(t))$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, então

$$f(t, s) = (x(t), y(t), z(t)) + s a_1(t)(1, 0, -\frac{1}{2}y(t)) + s a_2(t)(0, 1, \frac{1}{2}x(t))$$

ou

$$f(t, s) = (x(t) + s a_1(t), y(t) + s a_2(t), z(t) + \frac{s}{2}(a_2(t)x(t) - a_1(t)y(t))) .$$

Assim, os campos tangentes a S são

$$\begin{aligned}
f_s(t, s) &= f_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) (t, s) = a_1(t) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(t) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} (a_2(t)x(t) - a_1(t)y(t)) \frac{\partial}{\partial z} \\
&= a_1(t) \left(e_1(t, s) + \frac{1}{2} (y(t) + sa_2(t)) e_3(t, s) \right) \\
&\quad + a_2(t) \left(e_2(t, s) - \frac{1}{2} (x(t) + sa_1(t)) e_3(t, s) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (a_2(t)x(t) - a_1(t)y(t)) e_3(t, s) \\
&= a_1(t) e_1(t, s) + a_2(t) e_2(t, s) = f_2(t, s)
\end{aligned}$$

e portanto

$$f_s = f_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = f_2 .$$

Também,

$$\begin{aligned}
f_t(t, s) &= f_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (t, s) = (x'(t) + sa_1'(t)) \left(e_1(t, s) + \frac{1}{2} (y(t) + sa_2(t)) e_3(t, s) \right) \\
&\quad + (y'(t) + sa_2'(t)) \left(e_2(t, s) - \frac{1}{2} (x(t) + sa_1(t)) e_3(t, s) \right) \\
&\quad + (z'(t) + \frac{s}{2} (a_2'(t)x(t) + a_2(t)x'(t) - a_1'(t)y(t) - a_1(t)y'(t))) e_3(t, s) \\
&= (x'(t) + sa_1'(t)) e_1(t, s) + (y'(t) + sa_2'(t)) e_2(t, s) \\
&\quad + (z'(t) + \frac{1}{2} (x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) + s(a_2(t)x'(t) - a_1(t)y'(t))) \\
&\quad + \frac{s^2}{2} (a_1'(t)a_2(t) - a_1(t)a_2'(t))) e_3(t, s) \\
&= (x'(t) + sa_1'(t)) (a_2(t)f_1(t, s) + a_1(t)f_2(t, s)) \\
&\quad + (y'(t) + sa_2'(t)) (-a_1(t)f_1(t, s) + a_2(t)f_2(t, s)) + B(t, s) e_3(t, s)
\end{aligned}$$

em que

$$B(t, s) = z'(t) + \frac{1}{2} (x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) + s(a_2(t)x'(t) - a_1(t)y'(t)) + \frac{s^2}{2} (a_1'(t)a_2(t) - a_2'(t)a_1(t)) .$$

Se escolhermos γ de modo que $\langle \gamma'(t), f_2(\gamma(t)) \rangle = 0$, obtemos

$$x'(t)a_1(t) + y'(t)a_2(t) = 0 .$$

Então,

$$f_t(t, s) = ((x'(t) + sa'_1(t))a_2(t) - (y'(t) + sa'_2(t))a_1(t))f_1(t, s) + B(t, s)e_3(t, s).$$

Como S é não-horizontal, então $B(t, s) \neq 0$ em S . Portanto,

$$\frac{f_t(t, s)}{B(t, s)} = \frac{(a_2x'(t) - a_1y'(t) + s(a'_1(t)a_2(t) - a_1(t)a'_2(t)))f_1(t, s)}{B(t, s)} + e_3(t, s)$$

Assim,

$$A_3^1(t, s) = -\frac{1}{B(t, s)}(a_2x'(t) - a_1y'(t) + s(a'_1(t)a_2(t) - a_1(t)a'_2(t))) = -\frac{B_s(t, s)}{B(t, s)}$$

e

$$f_t = Bf_3.$$

2.2.3 Superfícies em $\mathbb{H}^2$

Seja $\mathbb{G} = \mathbb{H}^2$. Os campos invariantes à esquerda da álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ são definidos por

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_3}{2} \frac{\partial}{\partial x_5}; e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{x_4}{2} \frac{\partial}{\partial x_5}; e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_5}; e_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_5}; e_5 = \frac{\partial}{\partial x_5},$$

com $[e_1, e_3] = [e_2, e_4] = e_5$ e os demais são todos nulos.

Sejam J e R operadores lineares definidos em $\mathfrak{h}_1$ por

$$Je_1 = e_3, Je_2 = e_4, Je_3 = -e_1, Je_4 = -e_3$$

e

$$Re_1 = e_2, Re_2 = -e_1, Re_3 = -e_4, Re_4 = e_3.$$

Os operadores J e R satisfazem naturalmente algumas propriedades.

Proposição 2.7. *J e R satisfazem as seguintes propriedades:*

1. $J^2 = R^2 = -I$;
2. $RJ + JR = 0$.

- 3. $\langle Rx, Ry \rangle = \langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathfrak{h}_1;$
- 4. $\langle Jx, Ry \rangle + \langle Rx, Jy \rangle = 0, \forall x, y \in \mathfrak{h}_1;$
- 5. $[x, Jy] = \langle x, y \rangle e_5, [x, Ry] = \langle Jx, Ry \rangle e_5, \forall x, y \in \mathfrak{h}_1.$

Demonstração. As propriedades (1), (2) e (3) seguem diretamente da definição de J e R na base de $\mathfrak{h}_1$. Consequentemente, para cada $x, y \in \mathfrak{h}_1$ obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (RJ + JR)x, y \rangle = \langle RJx, y \rangle + \langle JRx, y \rangle \\ &= -\langle Jx, Ry \rangle - \langle Rx, Jy \rangle. \end{aligned}$$

Para (5), basta notarmos que $[e_i, Je_i] = e_5$ para $i = 1, \dots, 4$ e $[e_i, Je_j] = 0$ para $i \neq j$. Assim, segue diretamente que

$$[x, Jy] = \langle x, y \rangle e_5.$$

Consequentemente,

$$[x, Ry] = -[J^2x, Ry] = [Ry, J(Jx)] = \langle Ry, Jx \rangle e_5.$$

□

Observamos que, $x = y$ na propriedade (4) da proposição acima é equivalente a

$$\langle Rx, x \rangle = \langle Jx, x \rangle = \langle Jx, Rx \rangle = 0. \quad (2.4)$$

A seguir, usaremos os operadores lineares J e R e as propriedades acima para construir uma base ortonormal de $\mathfrak{h}_1$.

Proposição 2.8. *Se $v_4 \in \mathfrak{h}_1$ é um vetor unitário e $v_3 = Rv_4$, $v_2 = -Jv_4$, $v_1 = -Rv_2$, então v_1, v_2, v_3, v_4 é uma base ortonormal de $\mathfrak{h}_1$ tal que*

$$[v_1, v_3] = [v_2, v_4] = e_5 \quad e \quad [v_1, v_2] = [v_1, v_4] = [v_2, v_3] = [v_3, v_4] = 0.$$

Demonstração. Segue diretamente de (2.4) que

$$\begin{aligned}\langle v_3, v_4 \rangle &= \langle Rv_4, v_4 \rangle = 0, \\ \langle v_2, v_4 \rangle &= \langle -Jv_4, v_4 \rangle = 0, \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= -\langle Jv_4, Rv_4 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Aplicando as demais propriedades da Proposição 2.7, obtemos

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_4 \rangle &= -\langle Rv_2, v_4 \rangle = \langle v_2, Rv_4 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0, \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= -\langle Rv_2, Rv_4 \rangle = -\langle v_2, v_4 \rangle = 0, \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= -\langle Rv_2, Jv_4 \rangle = \langle Jv_2, Rv_4 \rangle = \langle v_4, Rv_4 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Além disso, segue facilmente que

$$\begin{aligned}[v_1, v_3] &= -[Rv_2, Rv_4] = -\langle JRv_2, Rv_4 \rangle e_5 = \langle RJv_2, Rv_4 \rangle e_5 = \langle Jv_2, v_4 \rangle e_5 = \langle v_4, v_4 \rangle e_5 = e_5 \\ [v_2, v_4] &= [-Jv_4, v_4] = \langle v_4, v_4 \rangle e_5 = e_5, \\ [v_2, v_3] &= [-Jv_4, Rv_4] = \langle Rv_4, v_4 \rangle e_5 = 0, \\ [v_1, v_4] &= -[Rv_2, v_4] = \langle Jv_4, Rv_2 \rangle e_5 = -\langle v_2, Rv_2 \rangle e_5 = 0, \\ [v_1, v_2] &= [Rv_2, Jv_4] = \langle Rv_2, v_4 \rangle e_5 = -\langle v_1, v_4 \rangle e_5 = 0, \\ [v_3, v_4] &= [Rv_4, v_4] = -\langle Jv_4, Rv_4 \rangle = 0.\end{aligned}$$

□

A Proposição 2.8 é estendida naturalmente a distribuição horizontal $D \subset T\mathbb{H}^2$.

Corolário 2.9. *Se $f_4 \in D$ é um campo unitário e $f_3 = Rf_4, f_2 = -Jf_4, f_1 = -Rf_2$, então f_1, f_2, f_3, f_4 é uma base ortonormal em D tal que $\bar{T}^5(f_1, f_3) = \bar{T}^5(f_2, f_4) = -1$ e os demais são todos nulos.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 2.8.

□

Sejam $M \subset \mathbb{H}^2$ uma subvariedade não-horizontal de dimensão 2 e D a distribuição horizontal em $T\mathbb{H}^2$. Estendemos os operadores lineares J e R a D e como $\bar{\nabla}e_i = 0, i = 1, \dots, 5$, obtemos facilmente que

$$\bar{\nabla}J = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}R = 0. \quad (2.5)$$

Como $TM \cap D$ é 1-dimensional, então escolhemos um campo unitário f_4 em $TM \cap D$. Em seguida, escolhemos $f_3 = Rf_4$, $f_2 = -Jf_4$, $f_1 = -Rf_2$ em $TM^\perp$ conforme Corolário 2.9 e assim, obtemos uma base ortonormal em D , tal que $\bar{T}^5(f_1, f_3) = -1$, $\bar{T}^5(f_2, f_4) = -1$ e os demais são todos nulos. Com $f_5 = e_5 - \sum_{\alpha=1}^3 A_5^\alpha f_\alpha$, construímos uma base adaptada de $T\mathbb{H}^2$ satisfazendo: $f_1, f_2, f_3 \in TM^\perp$ e $f_4, f_5 \in TM$.

Usando (2.5) e a definição de f_1, f_2, f_3, f_4 , obtemos para cada $X \in TM$ que

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_4^1(X) &= \langle \bar{\nabla}_X f_4, f_1 \rangle = \langle \bar{\nabla}_X f_4, -Rf_2 \rangle = \langle R\bar{\nabla}_X f_4, f_2 \rangle = \langle \bar{\nabla}_X f_3, f_2 \rangle = \bar{\omega}_3^2(X), \\ \bar{\omega}_4^2(X) &= \langle \bar{\nabla}_X f_4, f_2 \rangle = \langle R\bar{\nabla}_X f_4, Rf_2 \rangle = \langle \bar{\nabla}_X f_3, -f_1 \rangle = -\bar{\omega}_3^1(X), \\ \bar{\omega}_2^1(X) &= \langle \bar{\nabla}_X f_2, f_1 \rangle = \langle -J\bar{\nabla}_X f_4, -Rf_2 \rangle = -\langle R\bar{\nabla}_X f_4, Jf_2 \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X f_3, f_4 \rangle = -\bar{\omega}_3^4(X). \end{aligned}$$

Se M é uma superfície não-horizontal mínima em $\mathbb{H}^2$, então

$$-\langle A_\xi(f_4), f_4 \rangle + \bar{T}^5(\xi, f_5) = 0, \quad \forall \xi \in TM^\perp.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle A_{f_1}(f_4), f_4 \rangle &= \bar{T}^5(f_1, f_5) = A_5^3, \\ \langle A_{f_2}(f_4), f_4 \rangle &= \bar{T}^5(f_2, f_5) = 0, \\ \langle A_{f_3}(f_4), f_4 \rangle &= \bar{T}^5(f_3, f_5) = -A_5^1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$0 = \langle A_{f_2}(f_4), f_4 \rangle = -\langle (\bar{\nabla}_{f_4} f_2)^\top, f_4 \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{f_4} f_2, f_4 \rangle = -\bar{\omega}_2^4(f_4).$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\begin{aligned} A_5^3 &= \langle A_{f_1}(f_4), f_4 \rangle = -\bar{\omega}_1^4(f_4), \\ A_5^1 &= -\langle A_{f_3}(f_4), f_4 \rangle = \bar{\omega}_3^4(f_4). \end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{\nabla}_{f_4} f_4 = \bar{\omega}_4^1(f_4) f_1 + \bar{\omega}_4^2(f_4) f_2 + \bar{\omega}_4^3(f_4) f_3 = A_5^3 f_1 - A_5^1 f_3.$$

Suponhamos que

$$f_4 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4,$$

em que $a_i : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Então,

$$f_2 = -J f_4 = a_3 e_1 + a_4 e_2 - a_1 e_3 - a_2 e_4,$$

$$f_3 = R f_4 = -a_2 e_1 + a_1 e_2 + a_4 e_3 - a_3 e_4,$$

$$f_1 = -R f_2 = a_4 e_1 - a_3 e_2 + a_2 e_3 - a_1 e_4.$$

Seja $h(t, s)$ uma parametrização de M , tal que $h_s(t, s) = f_4(h(t, s))$. Então,

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{da_i}{ds} \right) e_i = \bar{\omega}_4^1(f_4)(a_4 e_1 - a_3 e_2 + a_2 e_3 - a_1 e_4) + \bar{\omega}_4^3(f_4)(-a_2 e_1 + a_1 e_2 + a_4 e_3 - a_3 e_4).$$

ou

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{\omega}_4^3(f_4) & 0 & \bar{\omega}_4^1(f_4) \\ \bar{\omega}_4^3(f_4) & 0 & -\bar{\omega}_4^1(f_4) & 0 \\ 0 & \bar{\omega}_4^1(f_4) & 0 & \bar{\omega}_4^3(f_4) \\ -\bar{\omega}_4^1(f_4) & 0 & -\bar{\omega}_4^3(f_4) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Se $\Phi(t, s) \in O(4, \mathbb{R})$, em que $O(4, \mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes ortogonais de ordem 4, é uma solução fundamental de (2.6), então a solução satisfaz

$$\begin{bmatrix} a_1(t, s) \\ a_2(t, s) \\ a_3(t, s) \\ a_4(t, s) \end{bmatrix} = \Phi(t, s) \begin{bmatrix} a_1(t, 0) \\ a_2(t, 0) \\ a_3(t, 0) \\ a_4(t, 0) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Se escrevermos $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ como

$$h(t, s) = (x^1(t, s), x^2(t, s), x^3(t, s), x^4(t, s), x^5(t, s)),$$

então $\frac{\partial x^i}{\partial s} = a_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ e $\frac{\partial x^5}{\partial s} = \frac{1}{2}(a_3x^1 + a_4x^2 - a_1x^3 - a_2x^4)$. Nessas condições, obtemos

$$x^i(t, s) = x^i(t, 0) + \int_0^s a_i(t, u) du, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

e

$$x^5(t, s) = x^5(t, 0) + \frac{1}{2} \int_0^s (a_3(t, u)x^1(t, u) + a_4(t, u)x^2(t, u) - a_1(t, u)x^3(t, u) - a_2(t, u)x^4(t, u)) du$$

Suponhamos que a parametrização $h(t, s)$ satisfaz

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial h}{\partial s}(t, 0) \right\rangle = 0,$$

então

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, 0) = e^5 \left(\frac{\partial h}{\partial t}(t, 0) \right) f_5(t, 0).$$

Portanto,

$$h(t, 0) = \int_0^t b(v) (e_5(v, 0) - A_5^1(v, 0)f_1(v, 0) - A_5^2(v, 0)f_2(v, 0) - A_5^3(v, 0)f_3(v, 0)) dv.$$

em que $b(v) = e^5 \left(\frac{\partial h}{\partial t}(t, 0) \right)$.

A seguir, veremos dois modelos de superfícies não-horizontais mínimas de $\mathbb{H}^2$.

Caso 2.1. Superfícies regradas

Consideremos $\bar{\omega}_4^1(f_4) = \bar{\omega}_4^3(f_4) = 0$. Neste caso, $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ são funções constantes ao longo das curvas características de M . Assim,

$$x^i(t, s) = x^i(t, 0) + a_i(t)s, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.8)$$

e

$$x^5(t, s) = x^5(t, 0) + \frac{s}{2}(a_3(t)x^1(t, 0) + a_4(t)x^2(t, 0) - a_1(t)x^3(t, 0) - a_2(t)x^4(t, 0)). \quad (2.9)$$

Se

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial h}{\partial s}(t, 0) \right\rangle = 0,$$

então $\frac{\partial h}{\partial t}(t, 0) = e^5(\frac{\partial h}{\partial t}(t, 0))f_5(t, 0)$ e

$$h(t, 0) = \int_0^t b(v) (e_5(v, 0) - A_5^2(v, 0)f_2(v, 0)) dv,$$

pois $A_5^3 = \bar{\omega}_4^1(f_4) = 0$ e $A_5^1 = -\bar{\omega}_4^3(f_4) = 0$.

Se escrevermos

$$\begin{aligned} h(t, s) - h(t, 0) &= \sum_{i=1}^5 (x^i(t, s) - x^i(t, 0)) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^4 (x^i(t, s) - x^i(t, 0)) e_i(t, 0) + (x^5(t, s) - x^5(t, 0)) \\ &\quad + \frac{1}{2} ((x^1(t, s) - x^1(t, 0))x^3(t, 0) + (x^2(t, s) - x^2(t, 0))x^4(t, 0) \\ &\quad - (x^3(t, s) - x^3(t, 0))x^1(t, 0) - (x^4(t, s) - x^4(t, 0))x^3(t, 0)) e_5(t, 0) \end{aligned}$$

Então, segue de (2.8) e (2.9) que

$$h(t, s) = h(t, 0) + sf_4(t, 0).$$

Caso 2.2. Superfícies tubulares

Consideremos $\bar{\omega}_4^1(f_4) = b_1(t)$, $\bar{\omega}_4^3(f_4) = b_3(t)$ constantes ao longo das curvas características de M tal que $b_1(t)^2 + b_3(t)^2 \neq 0$. Notemos que os autovalores da matriz de ordem 4 do sistema (2.6) são $\pm i\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}$, em que $i = \sqrt{-1}$. Assim, pelo método de resolução de sistemas de equações diferenciais lineares a matriz fundamental é da forma

$$\Phi(t, s) = \begin{bmatrix} \cos(sb) & -\frac{b_3 \sin(sb)}{b} & 0 & \frac{b_1 \sin(sb)}{b} \\ \frac{b_3 \sin(sb)}{b} & \cos(sb) & -\frac{b_1 \sin(sb)}{b} & 0 \\ 0 & \frac{b_1 \sin(sb)}{b} & \cos(sb) & \frac{b_3 \sin(sb)}{b} \\ -\frac{b_1 \sin(sb)}{b} & 0 & -\frac{b_3 \sin(sb)}{b} & \cos(sb) \end{bmatrix},$$

em que $b = \sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}$. Então,

$$\begin{aligned} a_1(t, s) &= \cos(sb)a_1(t, 0) - \frac{b_3 \sin(sb)}{b}a_2(t, 0) + \frac{b_1 \sin(sb)}{b}a_4(t, 0) \\ a_2(t, s) &= \frac{b_3 \sin(sb)}{b}a_1(t, 0) + \cos(sb)a_2(t, 0) - \frac{b_1 \sin(sb)}{b}a_3(t, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3(t, s) &= \frac{b_1 \sin(sb)}{b} a_2(t, 0) + \cos(sb) a_3(t, 0) + \frac{b_3 \sin(sb)}{b} a_4(t, 0) \\
a_4(t, s) &= -\frac{b_1 \sin(sb)}{b} a_1(t, 0) - \frac{b_3 \sin(sb)}{b} a_3(t, 0) + \cos(sb) a_4(t, 0) .
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
x^1(t, s) &= x^1(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b} a_1(t, 0) + b_3 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_2(t, 0) - b_1 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_4(t, 0) \\
x^2(t, s) &= x^2(t, 0) - b_3 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_1(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b} a_2(t, 0) + b_1 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_3(t, 0) \\
x^3(t, s) &= x^3(t, 0) - b_1 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_2(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b} a_3(t, 0) - b_3 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_4(t, 0) \\
x^4(t, s) &= x^4(t, 0) + b_1 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_1(t, 0) + b_3 \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} a_3(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b} a_4(t, 0)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de $a_i(t, s)$ em (2.9) e integrando os termos, obtemos que

$$\begin{aligned}
x^5(t, s) &= x^5(t, 0) + \frac{\cos(sb) - 1}{2b^2} \left(-(b_1 a_2(t, 0) + b_3 a_4(t, 0)) x^1(t, 0) \right. \\
&\quad \left. + (b_1 a_1(t, 0) + b_3 a_3(t, 0)) x^2(t, 0) - (b_3 a_2(t, 0) - b_1 a_4(t, 0)) x^3(t, 0) \right. \\
&\quad \left. - (b_3 a_1(t, 0) + b_1 a_3(t, 0)) x^4(t, 0) \right) + \frac{\sin(sb)}{2b} \left(a_3(t, 0) x^1(t, 0) + a_4(t, 0) x^2(t, 0) \right. \\
&\quad \left. - a_1(t, 0) x^3(t, 0) - a_2(t, 0) x^4(t, 0) \right) .
\end{aligned}$$

Portanto, a parametrização de M é dada por

$$\begin{aligned}
h(t, s) - h(t, 0) &= \frac{\sin(sb)}{b} \sum_{i=1}^4 a_i(t, 0) e_i(t, 0) \\
&\quad + \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} b_3(t) (a_2(t, 0) e_1(t, 0) - a_1(t, 0) e_2(t, 0) - a_4(t, 0) e_3(t, 0) \\
&\quad + a_3(t, 0) e_4(t, 0)) + \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} b_1(t) (-a_4(t, 0) e_1(t, 0) + a_3(t, 0) e_2(t, 0) \\
&\quad - a_2(t, 0) e_3(t, 0) + a_1(t, 0) e_4(t, 0)) + (x^5(t, s) - x^5(t, 0) \\
&\quad + \frac{1}{2} (x^1(t, s) - x^1(t, 0)) x^3(t, 0) + \frac{1}{2} (x^2(t, s) - x^2(t, 0)) x^4(t, 0) \\
&\quad - \frac{1}{2} (x^3(t, s) - x^3(t, 0)) x^1(t, 0) - \frac{1}{2} (x^4(t, s) - x^4(t, 0)) x^2(t, 0) \Big) e_5(t, 0) \\
&= \frac{\sin(sb)}{b} f_4(t, 0) - \frac{\cos(sb) - 1}{b^2} (b_3(t) f_3(t, 0) + b_1(t) f_1(t, 0)) .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$h(t, s) = h(t, 0) + \frac{\sin(s\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2})}{\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}} f_4(t, 0) - \frac{\cos(s\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}) - 1}{\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}} \left(\frac{b_3(t)}{\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}} f_3(t, 0) + \frac{b_1(t)}{\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}} f_1(t, 0) \right).$$

Reciprocamente, sejam γ uma curva transversa em $M \subset \mathbb{H}^2$ e f_4 um campo unitário ao longo da curva γ . Então, completamos a uma base de $D_{\gamma(t)}$, escolhendo $f_2(t) = -Jf_4(t)$, $f_3(t) = Rf_4(t)$ e $f_2(t) = -Rf_3(t)$. Se $f_5(t) = e_5(t) - \sum_{\alpha=1}^3 A_5^\alpha(t) f_\alpha(t)$, então $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), f_5(t)$, é uma base de $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^2$ de modo que $f_4(t), f_5(t)$ é uma base de $T_{\gamma(t)}M$. Como $\frac{d\gamma}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$, então $\frac{d\gamma}{dt} = \lambda_1(t)f_4(t) + \lambda_2(t)f_5(t)$, em que λ_1 e λ_2 são funções suaves em $\mathbb{H}^2$.

Se $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ uma parametrização de M definida por

$$h(t, s) = h(t, 0)(t) + \frac{\sin(s\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2})}{\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}} f_4(t, 0) - \frac{\cos(s\sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}) - 1}{b_1(t)^2 + b_3(t)^2} (b_3(t)f_3(t, 0) + b_1(t)f_1(t, 0)),$$

em que $h(t, 0) = \gamma(t)$, $b_1(t) = -A_5^3(t)$ e $b_3(t) = A_5^1(t)$, então M é mínima. De fato, é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned} \langle A_{f_1}(f_4), f_4 \rangle &= \bar{T}^5(f_1, f_5) = A_5^3, \\ \langle A_{f_2}(f_4), f_4 \rangle &= \bar{T}^5(f_2, f_5) = 0, \\ \langle A_{f_3}(f_4), f_4 \rangle &= \bar{T}^5(f_3, f_5) = -A_5^1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} h(t, s) &= \cos(sb(t)) (a_1(t, 0)e_1(t, 0) + a_2(t, 0)e_2 + a_3(t, 0)e_3(t, 0) + a_4(t, 0)e_4(t, 0)) \\ &\quad + \frac{\sin(sb(t))}{b(t)} (b_3(t)(-a_2(t, 0)e_1(t, 0) + a_1(t, 0)e_2 + a_4(t, 0)e_3(t, 0) - a_3(t, 0)e_4(t, 0)) \\ &\quad + b_1(t) (a_4(t, 0)e_1(t, 0) - a_3(t, 0)e_2 + a_2(t, 0)e_3(t, 0) - a_1(t, 0)e_4(t, 0))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\cos(sb)a_1(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b}(b_1(t)a_4(t, 0) - b_3(t)a_2(t, 0)) \right) e_1(t, 0) \\
&+ \left(\cos(sb)a_2(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b}(b_3(t)a_1(t, 0) - b_1(t)a_3(t, 0)) \right) e_2(t, 0) \\
&+ \left(\cos(sb)a_3(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b}(b_3(t)a_4(t, 0) + b_1(t)a_2(t, 0)) \right) e_3(t, 0) \\
&+ \left(\cos(sb)a_4(t, 0) - \frac{\sin(sb)}{b}(b_3(t)a_3(t, 0) + b_1(t)a_1(t, 0)) \right) e_4(t, 0), \tag{2.10}
\end{aligned}$$

em que $b = \sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2}$.

Como $\frac{\partial}{\partial s}h(t, s) \in TM \cap D$, então escolhemos $f_4(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}h(t, s)$. Assim,

$$\begin{aligned}
f_1(t, s) &= \left(\cos(sb)a_4(t, 0) - \frac{\sin(sb)}{b}(b_3(t)a_3(t, 0) + b_1(t)a_1(t, 0)) \right) e_1(t, 0) \\
&- \left(\cos(sb)a_3(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b}(b_3(t)a_4(t, 0) + b_1(t)a_2(t, 0)) \right) e_2(t, 0) \\
&+ \left(\cos(sb)a_2(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b}(b_3(t)a_1(t, 0) - b_1(t)a_3(t, 0)) \right) e_3(t, 0) \\
&- \left(\cos(sb)a_1(t, 0) + \frac{\sin(sb)}{b}(b_1(t)a_4(t, 0) - b_3(t)a_2(t, 0)) \right) e_4(t, 0).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{f_4}f_1 &= - (b \sin(sb(t))a_4(t, 0) + \cos(sb)(b_3(t)a_3(t, 0) + a_1(t, 0)b_1(t))) e_1(t, 0) \\
&+ (\sin(sb)a_3(t, 0) - \cos(sb)(b_3(t)a_4(t, 0) + b_1(t)a_2(t, 0))) e_2(t, 0) \\
&- (b \sin(sb)a_1(t, 0) - \cos(sb)(b_3(t)a_1(t, 0) - b_1(t)a_3(t, 0))) e_3(t, 0) \\
&+ (b \sin(sb)a_1(t, 0) - \cos(sb)(b_1(t)a_4(t, 0) - b_3(t)a_2(t, 0))) e_4(t, 0).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{f_4}f_1, f_4 \rangle &= - a_4(t, 0)(b_1(t)a_4(t, 0) - b_3(t)a_2(t, 0)) - a_1(t, 0)(b_3(t)a_3(t, 0) + a_1(t, 0)b_1(t)) \\
&+ a_3(t, 0)(b_3(t)a_1(t, 0) - b_1(t)a_3(t, 0)) - a_2(t, 0)(b_3(t)a_4(t, 0) + b_1(t)a_2(t, 0)) \\
&= - (a_1(t, 0)^2 + a_2(t, 0)^2 + a_3(t, 0)^2 + a_4(t, 0)^2)b_1(t) \\
&= - b_1(t) \\
&= - A_5^3(t, 0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle A_{f_1}(f_4), f_4 \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{f_4} f_1, f_4 \rangle = A_5^3(t, 0).$$

Analogamente, obtemos que

$$\langle \bar{\nabla}_{f_4} f_2, f_2 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \bar{\nabla}_{f_4} f_3, f_3 \rangle = A_5^1(t, 0).$$

Exemplo 2.1. Sejam γ uma curva transversa em $\mathbb{H}^2$ definida por

$$\gamma(t) = \left(r \cos \left(\frac{t}{r} \right), 0, r \sin \left(\frac{t}{r} \right), 0, 0 \right)$$

e

$$f_4(\gamma(t)) = \left(0, \cos \left(\frac{t}{r} \right), 0, \sin \left(\frac{t}{r} \right), 0 \right) = \cos \left(\frac{t}{r} \right) e_2(t) + \sin \left(\frac{t}{r} \right) e_4(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_1(\gamma(t)) &= \sin \left(\frac{t}{r} \right) e_1(t) + \cos \left(\frac{t}{r} \right) e_3(t), \\ f_2(\gamma(t)) &= \sin \left(\frac{t}{r} \right) e_2(t) - \cos \left(\frac{t}{r} \right) e_4(t), \\ f_3(\gamma(t)) &= -\cos \left(\frac{t}{r} \right) e_1(t) + \sin \left(\frac{t}{r} \right) e_3(t) \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \left(-\sin \left(\frac{t}{r} \right), 0, \cos \left(\frac{t}{r} \right), 0, 0 \right) \\ &= -\sin \left(\frac{t}{r} \right) e_1(t) + \cos \left(\frac{t}{r} \right) e_3(t) + \frac{r}{2} e_5(t) \\ &= -\sin \left(\frac{t}{r} \right) \left(\sin \left(\frac{t}{r} \right) f_1(t) - \cos \left(\frac{t}{r} \right) f_3(t) \right) \\ &\quad + \cos \left(\frac{t}{r} \right) \left(\cos \left(\frac{t}{r} \right) f_1(t) + \sin \left(\frac{t}{r} \right) f_3(t) \right) + \frac{r}{2} e_5(t) \\ &= \cos \left(\frac{2t}{r} \right) f_1(t) + \sin \left(\frac{2t}{r} \right) f_3(t) + \frac{r}{2} e_5(t) \\ &= \frac{r}{2} \left(\frac{2}{r} \cos \left(\frac{2t}{r} \right) f_1(t) + \frac{2}{r} \sin \left(\frac{2t}{r} \right) f_3(t) + e_5(t) \right). \end{aligned}$$

Então,

$$f_5(t) = e_5(t) + \frac{2}{r} \cos \left(\frac{2t}{r} \right) f_1(t) + \frac{2}{r} \sin \left(\frac{2t}{r} \right) f_3(t).$$

Assim,

$$b_1(t) = A_5^3(t, 0) = -\frac{2}{r} \sin\left(\frac{2t}{r}\right) \quad \text{e} \quad b_3(t) = -A_5^1(t, 0) = \frac{2}{r} \cos\left(\frac{2t}{r}\right)$$

e obtemos que

$$b = \sqrt{b_1(t)^2 + b_3(t)^2} = \frac{2}{r}.$$

Dessa forma, a parametrização de uma superfície não-horizontal mínima em $\mathbb{H}^2$, obtida pela curva $\gamma(t)$ e o vetor unitário $f_4(t)$ é da forma

$$\begin{aligned} h(t, s) &= \left(r \cos\left(\frac{t}{r}\right), 0, r \sin\left(\frac{t}{r}\right), 0, 0 \right) + \frac{r}{2} \sin\left(\frac{2s}{r}\right) \left(0, \cos\left(\frac{t}{r}\right), 0, \sin\left(\frac{t}{r}\right), 0, 0 \right) \\ &\quad - \frac{r}{2} \left(\cos\left(\frac{2s}{r}\right) - 1 \right) \left(\cos\left(\frac{2t}{r}\right) f_3(t) - \sin\left(\frac{2t}{r}\right) f_1(t) \right) \\ &= \left(r \cos\left(\frac{t}{r}\right), \frac{r}{2} \sin\left(\frac{2s}{r}\right) \cos\left(\frac{t}{r}\right), r \sin\left(\frac{t}{r}\right), \frac{r}{2} \sin\left(\frac{2s}{r}\right) \sin\left(\frac{t}{r}\right), 0 \right) \\ &\quad + \frac{r}{2} \left(\cos\left(\frac{2s}{r}\right) - 1 \right) \left(\cos\left(\frac{t}{r}\right), 0, \sin\left(\frac{t}{r}\right), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h(t, s) &= \frac{r}{2} \left(\cos\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right), \sin\left(\frac{2s}{r}\right) \cos\left(\frac{t}{r}\right), \sin\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right), \right. \\ &\quad \left. \sin\left(\frac{2s}{r}\right) \sin\left(\frac{t}{r}\right), 0 \right). \end{aligned}$$

Observamos que $M - p$, em que $p = (0, 0, 0, 0, 0)$ é uma superfície não-horizontal em todos os seus pontos. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h(t, s) &= \frac{1}{2} \left(-\sin\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right), -\sin\left(\frac{t}{r}\right) \sin\left(\frac{2s}{r}\right), \right. \\ &\quad \left. \cos\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right), \cos\left(\frac{t}{r}\right) \sin\left(\frac{2s}{r}\right), 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\sin\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right) e_1 - \sin\left(\frac{t}{r}\right) \sin\left(\frac{2s}{r}\right) e_2 \right. \\ &\quad \left. \cos\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right) e_3 + \cos\left(\frac{t}{r}\right) \sin\left(\frac{2s}{r}\right) e_4 \right) \\ &\quad + \frac{r}{8} \left(\sin^2\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{t}{r}\right) \sin^2\left(\frac{2s}{r}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\left(\frac{t}{r}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2s}{r}\right) \right)^2 + \cos^2\left(\frac{t}{r}\right) \sin^2\left(\frac{2s}{r}\right) \right) e_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(-\sin \left(\frac{t}{r} \right) \left(1 + \cos \left(\frac{2s}{r} \right) \right) e_1 - \sin \left(\frac{t}{r} \right) \sin \left(\frac{2s}{r} \right) e_2 \right. \\
&\quad \left. \cos \left(\frac{t}{r} \right) \left(1 + \cos \left(\frac{2s}{r} \right) \right) e_3 + \cos \left(\frac{t}{r} \right) \sin \left(\frac{2s}{r} \right) e_4 \right) \\
&\quad + \frac{r}{4} \left(1 + \cos \left(\frac{2s}{r} \right) \right) e_5.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial s} h(t, s) = f_4(t, s)$, então

$$e^5 \left(\frac{\partial}{\partial t} h(t, s) \right) = \frac{r}{4} \left(1 + \cos \left(\frac{2s}{r} \right) \right) \quad \text{e} \quad e^5 \left(\frac{\partial}{\partial s} h(t, s) \right) = 0.$$

Portanto,

$$e^5 \left(\frac{\partial}{\partial t} h(t, s) \right) = \frac{r}{4} \left(1 + \cos \left(\frac{2s}{r} \right) \right) = 0$$

se $s = \frac{k\pi r}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$h \left(t, \frac{k\pi r}{2} \right) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

2.2.4 Hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$

Seja $M \subset \mathbb{G}$ uma hipersuperfície não-horizontal em $\mathbb{G}$ definida por

$$M = \{x \in \mathbb{G} : \phi(x) = 0 \text{ e } \text{grad}_D \phi(x) \neq 0\}$$

em que $\phi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real C^∞ e grad_D denota o gradiente horizontal. Então,

$$\text{grad}_D \phi = \sum_{i=1}^{d_1} \phi_i e_i,$$

em que $\phi_i = e_i(\phi)$ ou

$$d\phi(X) = \langle \text{grad}_D \phi, X \rangle, \forall X \in D.$$

Sejam $f_1 = \frac{\text{grad}_D \phi}{N}$, em que $N = \sqrt{\sum_{i=1}^{d_1} \phi_i^2}$, e $f_2, \dots, f_n$ uma base adaptada em TM .

Para o próximo resultado, indicamos a fórmula (3.3) para a definição de divergente de um campo $X \in T\mathbb{G}$, isto é,

$$\text{div}_{\mathbb{G}} X = \sum_{k=1}^n e^k (\bar{\nabla}_{e_k} X).$$

Proposição 2.10.

$$-H_{f_1} = \operatorname{div}_{\mathbb{G}} \left(\frac{\operatorname{grad}_D \phi}{|\operatorname{grad}_D \phi|} \right).$$

Demonstração. De fato, por definição

$$\begin{aligned} -H_{f_1} &= - \sum_{i=2}^{d_1} \langle A_{f_1}(f_i), f_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{\nabla}_{f_i}(f_1), f_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_1} \langle \bar{\nabla}_{f_i} \left(\frac{\phi_j}{N} e_j \right), f_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_1} \langle f_i \left(\frac{\phi_j}{N} \right) e_j, f_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{i=2}^{d_1} \langle e_j, f_i \rangle f_i \left(\frac{\phi_j}{N} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{d_1} (e_j - \langle e_j, f_1 \rangle f_1) \left(\frac{\phi_j}{N} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{d_1} e_j \left(\frac{\phi_j}{N} \right) - \sum_{j=1}^{d_1} \langle e_j, f_1 \rangle f_1 (\langle e_j, f_1 \rangle) \\ &= \operatorname{div}_{\mathbb{G}} \left(\frac{\operatorname{grad}_D \phi}{|\operatorname{grad}_D \phi|} \right) - \frac{1}{2} f_1 \left(\sum_{j=1}^{d_1} \langle e_j, f_1 \rangle^2 \right) \\ &= \operatorname{div}_{\mathbb{G}} \left(\frac{\operatorname{grad}_D \phi}{|\operatorname{grad}_D \phi|} \right), \end{aligned}$$

pois $\sum_{j=1}^{d_1} \langle e_j, f_1 \rangle^2 = 1$. □

Aplicação 2.3. *Hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$ definidas por $\phi = u(x_1, \dots, x_{2n}) - x_{2n+1} = 0$.*

Neste caso, para $j = 1, \dots, n$,

$$\phi_j = u_{x_j} - \frac{1}{2} x_{j+n}, \quad \phi_{j+n} = u_{x_{j+n}} + \frac{1}{2} x_j,$$

em que $u_{x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k}$. Assim,

$$\begin{aligned} e_i(\phi_j) &= u_{x_i, x_j}, \\ e_i(\phi_{j+n}) &= u_{x_i, x_{j+n}} + \frac{1}{2}\delta_{ij}, \\ e_{i+n}(\phi_j) &= u_{x_{i+n}, x_j} - \frac{1}{2}\delta_{ij}, \\ e_{i+n}(\phi_{j+n}) &= u_{x_{i+n}, x_{j+n}} \end{aligned}$$

para $i, j = 1, \dots, n$. Se $N = \sqrt{\phi_1^2 + \dots + \phi_{2n}^2}$, então

$$-H_{f_1} = \sum_{i=1}^{2n} e_i \frac{\phi_i}{N} = \sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{e_i(\phi_i)}{N} - \phi_i \sum_{j=1}^{2n} \frac{\phi_j e_i(\phi_j)}{N^3} \right) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{2n} u_{i,i} - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{2n} \phi_i \phi_j u_{i,j} \right).$$

Portanto, M é mínima se

$$\sum_{i=1}^{2n} u_{i,i} - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{2n} \phi_i \phi_j u_{i,j} = 0,$$

em que $u_{i,j} = u_{x_i, x_j}$. Nestas condições, o *parabolóide hiperbólico* definido por

$$u(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i+n}^2)$$

é mínima.

De fato, neste caso $\phi_i = \phi_{i+n} = \frac{1}{2}(x_i - x_{i+n})$, $u_i = \frac{x_i}{2}$, $u_{i+n} = -\frac{x_{i+n}}{2}$, $u_{i,i} = \frac{1}{2}$, $u_{i+n,i+n} = -\frac{1}{2}$ e os demais são todos nulos. Aplicando a fórmula de H_{f_1} obtemos

$$-H_{f_1} = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{2n} u_{i,i} - \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{2n} \phi_i \phi_j u_{i,j} \right) = \frac{1}{N} \left(\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{2} \right) - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\phi_i^2}{2} - \frac{\phi_{i+n}^2}{2} \right) \right) = 0.$$

Capítulo 3

A segunda variação da medida μ

Este capítulo é dedicado ao cálculo da segunda variação da medida μ de uma subvariedade não-horizontal e mínima imersa em um grupo estratificado $\mathbb{G}$.

Inicialmente, definimos na Seção 3.1 o sub-laplaciano de uma subvariedade não-horizontal e destacamos algumas propriedades análogas a teoria de subvariedades riemannianas. Por último, na Seção 3.2 demonstramos o resultado principal deste capítulo, o Teorema 3.14. Alguns resultados técnicos para a prova são semelhantes aos resultados obtidos em [30].

3.1 O sub-laplaciano de subvariedades não-horizontais

Sejam M uma variedade diferenciável orientada m -dimensional e ω uma forma volume em M . De acordo com [20], para cada campo diferenciável X em M com uma forma volume fixada, a função divergente de X é definida como

$$(\operatorname{div} X)\omega = L_X\omega , \quad (3.1)$$

em que L_X é a derivada de Lie na direção X .

Proposição 3.1. ([20], pag.282) *Seja M uma variedade orientada com uma forma volume fixada ω . Se ∇ é uma conexão linear em M tal que ω é paralela com respeito a ∇ , então*

para cada campo X em M

$$\operatorname{div} X = -\operatorname{traço} (L_X - \nabla_X) .$$

Demonstração. Seja $X_1, \dots, X_m$ uma base de TM . Para cada X , denote $C_X = L_X - \nabla_X$. Como ω é paralela com respeito a ∇ , isto é, $\nabla_X \omega = 0$, e $C_X f = 0$ para toda função diferenciável f em M , então

$$\begin{aligned} (L_X \omega)(X_1, \dots, X_m) &= (C_X \omega)(X_1, \dots, X_m) \\ &= C_X(\omega(X_1, \dots, X_m)) - \sum_{i=1}^m \omega(X_1, \dots, C_X X_i, \dots, X_m) \\ &= - \sum_{i=1}^m \omega(X_1, \dots, C_X X_i, \dots, X_m) \\ &= -(\operatorname{traço} C_X) \omega(X_1, \dots, X_m) . \end{aligned}$$

Portanto, segue de (3.1) que

$$\operatorname{div} X = -\operatorname{traço} C_X .$$

□

Nesse contexto, suponhamos que M é uma subvariedade não-horizontal de $\mathbb{G}$ e ∇ é a conexão linear $\bar{\nabla}$ projetada em TM . Vimos na Seção 1.4 que $d\mu = f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n$ é o elemento volume em M . Assim, se $X \in TM$, então

$$\begin{aligned} \nabla_X(f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n) &= \sum_{i=p+1}^n f^{p+1} \wedge \dots \wedge \nabla_X f^i \wedge \dots \wedge f^n \\ &= \sum_{i=p+1}^{d_1} f^{p+1} \wedge \dots \wedge \left(- \sum_{j=p+1}^n \omega_j^i(X) \wedge f^j \right) \wedge \dots \wedge f^n \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Logo, $d\mu$ é uma $(n - p)$ -forma paralela com respeito ∇ . Portanto, de acordo com a Proposição 3.1, a função divergente em M é definida por

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= -\operatorname{traço}(L_X - \nabla_X) \\
&= - \sum_{i=p+1}^n f^i(L_X f_i - \nabla_X f_i) \\
&= - \sum_{i=p+1}^n f^i([X, f_i] - \nabla_X f_i) \\
&= \sum_{i=p+1}^n f^i(\nabla_{f_i} X + T(X, f_i)),
\end{aligned}$$

em que T é a torção de ∇ . Portanto,

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=p+1}^n f^i(\nabla_{f_i} X) + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(X, f_j). \quad (3.2)$$

Observamos que $e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$ é a forma volume em $\mathbb{G}$ que é paralela com respeito a $\bar{\nabla}$. Assim, conforme Proposição 3.1, o divergente de um campo $X \in T\mathbb{G}$ é da forma

$$\operatorname{div}_{\mathbb{G}} X = \sum_{i=1}^n e^i(\bar{\nabla}_{e_i} X) + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(X, e_j) = \sum_{i=1}^n e^i(\bar{\nabla}_{e_i} X). \quad (3.3)$$

Seja $\tau \in TM \cap D$ definido por

$$\tau = \sum_{i=p+1}^{d_1} (\operatorname{traço} f_i \lrcorner T) f_i = \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, f_j) f_i. \quad (3.4)$$

Assim, se X é uma seção de $TM \cap D$, então

$$\begin{aligned}
\langle X, \tau \rangle &= \sum_{k=p+1}^{d_1} f^k(X) \langle f_k, \tau \rangle \\
&= \sum_{k=p+1}^{d_1} \sum_{j=d_1+1}^n f^k(X) \bar{T}^j(f_k, f_j) \\
&= \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(X, f_j) \\
&= \operatorname{traço}(X \lrcorner T).
\end{aligned}$$

A partir da definição de divergente, introduzimos um operador de segunda ordem que será o *sub-laplaciano*.

Definição 3.2. *Seja ϕ uma função suave em M . O sub-laplaciano de ϕ é um operador de segunda ordem definido por*

$$\mathcal{L}\phi = \Delta\phi + \tau(\phi), \quad (3.5)$$

em que

$$\Delta\phi = \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i(f_i(\phi)) - (\nabla_{f_i} f_i)(\phi)$$

com $f_i, i = p+1, \dots, d_1$ base ortonormal em $TM \cap D$.

Outra definição importante é a de campo gradiente.

Definição 3.3. *Seja ϕ uma função suave em M . O campo diferenciável gradiente de ϕ com valores em $TM \cap D$ é definido por*

$$\text{grad}\phi = \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i(\phi) f_i.$$

Com as definições acima, obtemos a seguinte relação

Proposição 3.4. *Se ϕ, ψ são funções suaves em M , então*

$$\phi \mathcal{L}\psi = - \langle \text{grad}\phi, \text{grad}\psi \rangle + \text{div}X, \quad (3.6)$$

em que $X = \phi \text{grad}\psi$.

Demonstração. Se

$$X = \phi \text{grad}\psi = \sum_{i=p+1}^{d_1} \phi f_i(\psi) f_i,$$

então de (3.2) obtemos que

$$\begin{aligned} \text{div}X &= \sum_{i=p+1}^n f^i(\nabla_{f_i} X) + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(X, f_j) \\ &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(f_i(\phi f_i(\psi)) + \sum_{j=p+1}^{d_1} \phi f_i(\psi) f^j(\nabla_{f_j} f_i) + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(\phi f_i(\psi) f_i, f_j) \right) \\ &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(f_i(\phi f_i(\psi)) + \sum_{j=p+1}^n \phi f_i(\psi) f^j(\nabla_{f_j} f_i) \right) + \phi \tau(\psi). \end{aligned}$$

Mostraremos posteriormente, Lema 3.11, que dado um ponto $p_0 \in M$ podemos considerar um referencial em p_0 tal que $\nabla f_i = 0, i = p + 1, \dots, d_1$. Então, em p_0

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i(\phi f_i(\psi)) + \phi \tau(\psi)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \phi \mathcal{L}\psi &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \phi(f_i(f_i(\psi)) - (\nabla_{f_i} f_i)(\psi) + \tau(\psi)) \\ &= \sum_{i=p+1}^{d_1} (f_i(\phi f_i(\psi)) - f_i(\phi) f_i(\psi)) + \phi \tau(\psi) \\ &= -\langle \operatorname{grad} \phi, \operatorname{grad} \psi \rangle + \operatorname{div} X. \end{aligned}$$

Como p_0 é um ponto arbitrário de M , então a proposição é válida para todo ponto de M . $\square$

Notemos que se $\phi = 1$ em (3.6), então

$$\mathcal{L}\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi).$$

O próximo resultado é bem conhecido na geometria riemanniana, ver por exemplo [13], e a versão subriemanniana para o caso de hipersuperfícies foi estudado em [26].

Proposição 3.5. *Seja M uma subvariedade não-horizontal de $\mathbb{G}$. Se existe $\phi > 0$ satisfazendo $\mathcal{L}\phi = q\phi$ para alguma função suave q em M , então para toda função suave f de suporte compacto em M , obtemos*

$$\int_M (|\operatorname{grad} f|^2 + qf^2) d\mu \geq 0.$$

Demonstração. Para a demonstração, seguiremos a prova de [13] com as modificações necessárias.

Sejam $\phi > 0$ tal que $\mathcal{L}\phi = q\phi$, em que q é uma função suave em M e $\psi = \log \phi$. Então,

$$\mathcal{L}\psi = q - |\operatorname{grad} \psi|^2. \quad (3.7)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\psi &= \Delta\psi + \tau\psi \\
&= \sum_{i=p+1}^{d_1} (f_i(f_i(\log\phi)) - \nabla_{f_i} f_i(\log\phi)) + \frac{\tau\phi}{\phi} \\
&= \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(-\frac{1}{\phi^2} f_i(\phi)^2 + \frac{1}{\phi} f_i(f_i(\phi)) - \frac{1}{\phi} \nabla_{f_i} f_i(\phi) \right) + \frac{\tau\phi}{\phi} \\
&= -\frac{|\text{grad}\phi|^2}{\phi^2} + \frac{\mathcal{L}\phi}{\phi} \\
&= -|\text{grad}\psi|^2 + q
\end{aligned}$$

Seja f uma função suave de suporte compacto em M . Multiplicando (3.7) por f^2 , e aplicando a Proposição 3.4 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M f^2(q - |\text{grad}\psi|^2) d\mu &= \int_M f^2 \mathcal{L}\psi d\mu \\
&= \int_M (-\langle \text{grad} f^2, \text{grad}\psi \rangle + \text{div} X) d\mu \\
&= - \int_M 2f \langle \text{grad} f, \text{grad}\psi \rangle d\mu
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz, a média aritmética e a média geométrica temos que

$$2f \langle \text{grad} f, \text{grad}\psi \rangle \leq 2|f| |\text{grad} f| |\text{grad}\psi| \leq f^2 |\text{grad}\psi|^2 + |\text{grad} f|^2.$$

Logo,

$$\int_M f^2(q - |\text{grad}\psi|^2) d\mu \geq - \int_M (f^2 |\text{grad}\psi|^2 + |\text{grad} f|^2) d\mu.$$

Portanto,

$$\int_M q f^2 d\mu \geq - \int_M |\text{grad} f|^2 d\mu.$$

□

Analogamente, estendemos a Definição 3.2 a seções suaves de $TM^\perp$.

Definição 3.6. O sub-laplaciano $\mathcal{L}$ em seções de $TM^\perp$ é definido por

$$\mathcal{L}\xi = \Delta\xi + \nabla_\tau^\perp \xi, \quad (3.8)$$

em que

$$\Delta\xi = \sum_{i=p+1}^{d_1} \nabla_{f_i}^\perp \nabla_{f_i}^\perp \xi - \nabla_{\nabla_{f_i} f_i}^\perp \xi$$

com $f_i, i = p+1, \dots, d_1$ base ortonormal em $TM \cap D$ e ξ é uma seção de $TM^\perp$.

Reescrevemos a Proposição 3.4 para o caso de seções suaves em $TM^\perp$ como

Proposição 3.7. Se ξ, η são seções de $TM^\perp$, então

$$\langle \mathcal{L}\xi, \eta \rangle = - \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \nabla_{f_i}^\perp \eta \rangle + \operatorname{div} X,$$

em que

$$X = \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \eta \rangle f_i$$

Demonstração. Se

$$X = \sum_{j=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_j}^\perp \xi, \eta \rangle f_j,$$

então

$$\operatorname{div} X = \operatorname{traço} (\nabla X + X \lrcorner T) = \operatorname{traço} \nabla X + \langle X, \tau \rangle.$$

Se considerarmos em um ponto $p_0 \in M$ um referencial como no Lema 3.11, então $\nabla_{f_j} f_i = 0$ em p_0 , para $p+1 \leq i, j \leq d_1$, assim

$$\operatorname{traço} \nabla X = \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_i} X, f_i \rangle = \sum_{i,j=p+1}^{d_1} \langle f_i \langle \nabla_{f_j}^\perp \xi, \eta \rangle f_j + \langle \nabla_{f_j}^\perp \xi, \eta \rangle \nabla_{f_i} f_j, f_i \rangle,$$

$$\langle X, \tau \rangle = \sum_{j=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_j}^\perp \xi, \eta \rangle \langle f_j, \tau \rangle = \langle \nabla_\tau^\perp \xi, \eta \rangle$$

Logo, em p_0

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \nabla_\tau^\perp \xi, \eta \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}\xi, \eta \rangle &= \left\langle \sum_{i=p+1}^{d_1} \nabla_{f_i}^\perp \nabla_{f_i}^\perp \xi + \nabla_\tau^\perp \xi, \eta \right\rangle \\
&= \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \eta \rangle - \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \nabla_{f_i}^\perp \eta \rangle + \langle \nabla_\tau^\perp \xi, \eta \rangle \\
&= - \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \nabla_{f_i}^\perp \eta \rangle + \operatorname{div} X.
\end{aligned}$$

Como p_0 é um ponto arbitrário de M , então concluímos a proposição para todo ponto de M . $\square$

Como consequência da Proposição 3.5, o próximo resultado traz outra relação de subvariedades riemannianas que também se generaliza.

Corolário 3.8. *Se ξ é uma seção de suporte compacto, então*

$$\int_M \langle \mathcal{L}\xi, \eta \rangle d\mu = - \int_M \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \nabla_{f_i}^\perp \eta \rangle d\mu = \int_M \langle \xi, \mathcal{L}\eta \rangle d\mu$$

e

$$\int_M \langle \mathcal{L}\xi, \xi \rangle d\mu = - \int_M \|\nabla^\perp \xi\|^2 d\mu,$$

em que

$$\|\nabla^\perp \xi\|^2 = \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle \nabla_{f_i}^\perp \xi, \nabla_{f_i}^\perp \xi \rangle.$$

3.2 A segunda variação

Esta seção é uma continuação da prova do Teorema 2.1. Recordaremos a seguir alguns pontos desse resultado.

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie estratificado n -dimensional e $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão de uma subvariedade não-horizontal, orientada e de codimensão p . Seja $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma variação de i com campo variacional $W = \frac{dF}{du} \Big|_{t=0}$. Assim, dado um ponto arbitrário $p_0 \in \mathbb{G}$ tal que W_{p_0} não é tangente a $i(M)$, existe uma vizinhança O de p_0 tal que

$F : (-\epsilon, \epsilon) \times O \rightarrow \mathbb{G}$ é um mergulho. Denotamos por $\tilde{O}$ um aberto de $\mathbb{G}$ que contém $F((-\epsilon, \epsilon) \times O)$ e escolhemos uma base de campos de vetores $f_1, \dots, f_n$ de $T\mathbb{G}$ tal que

- (i) $f_1, \dots, f_p$ restrito a O_u pertencem a $TO_u^\perp$;
- (ii) $f_{p+1}, \dots, f_n$ restrito a O_u pertencem a TO_u ;
- (iii) $f_1, \dots, f_{d_1}$ são ortonormais em D ;
- (iv) $f_j = e_j - \sum_{\alpha=1}^p A_j^\alpha f_\alpha$, para $j = d_1 + 1, \dots, n$.

em que $O_u = F_u(O)$. Além disso, denotamos por $\Phi = d\mu = f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^n$ e $\Gamma(u) = F_u^*(\Phi|_{O_u})$ a forma volume em M .

Na seção 2.1, mostramos que

$$\dot{\Gamma}(u) = F_u^*(L_{\tilde{W}}\Phi).$$

Do mesmo modo, provamos que

$$\ddot{\Gamma}(u) = F_u^*(L_{\tilde{W}}L_{\tilde{W}}\Phi).$$

Como $L_{\tilde{W}}\Phi = \tilde{W} \lrcorner d\Phi + d(\tilde{W} \lrcorner \Phi)$, então

$$\begin{aligned} F_u^*(L_{\tilde{W}}L_{\tilde{W}}\Phi) &= F_u^*(L_{\tilde{W}}(\tilde{W} \lrcorner d\Phi + d(\tilde{W} \lrcorner \Phi))) \\ &= F_u^*(\tilde{W} \lrcorner d(\tilde{W} \lrcorner d\Phi)) + F_u^*(L_{\tilde{W}}d(\tilde{W} \lrcorner \Phi)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\ddot{\Gamma}(0) = i^*(\tilde{W} \lrcorner d(\tilde{W} \lrcorner d\Phi)) + i^*(L_{\tilde{W}}d(\tilde{W} \lrcorner \Phi)) \quad (3.9)$$

em que $i = F_0$.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o resultado principal deste capítulo, apresentaremos alguns lemas que serão úteis na prova. O primeiro deles afirma que o primeiro termo de (3.9) envolve apenas a componente normal de $\tilde{W}$.

Lema 3.9. *Se M é mínima, então*

$$i^*(L_{\tilde{W}}(\tilde{W} \lrcorner d\Phi)) = i^*(L_{\tilde{W}^\perp}(\tilde{W}^\perp \lrcorner d\Phi)).$$

Demonstração. Como $i^*(L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi)) = i^*(\widetilde{W} \lrcorner d(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi))$, então para cada campo diferenciável X e Y em $\mathbb{G}$, defina

$$\mathcal{I}(X, Y) = i^*(X \lrcorner d(Y \lrcorner d\Phi)) .$$

Observamos que a aplicação $\mathcal{I}$ é $\mathbb{R}$ -bilinear e

$$\mathcal{I}(\widetilde{W}, \widetilde{W}) = i^*(\widetilde{W} \lrcorner d(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi)) .$$

Vamos mostrar que se X ou Y é tangente ao longo de M , então $\mathcal{I}(X, Y) = 0$. De fato, suponhamos inicialmente que X é tangente ao longo de M . Assim,

$$\mathcal{I}(X, Y) = i^*(L_X(Y \lrcorner d\Phi)) - i^*d(X \lrcorner Y \lrcorner d\Phi)$$

Para cada Y , temos que

$$i^*(Y \lrcorner d\Phi) = 0,$$

pois

$$i^*(Y \lrcorner d\Phi) = \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(Y)(H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha})\Gamma(0) .$$

Como M é mínima, então do Corolário 2.2 segue que $i^*(Y \lrcorner d\Phi) = 0$. Portanto,

$$i^*(X \lrcorner Y \lrcorner d\Phi) = 0 \text{ e } i^*(L_X(Y \lrcorner d\Phi)) = 0$$

pois X é um campo tangente ao longo de M . Como $i^*d(X \lrcorner Y \lrcorner d\Phi) = d(i^*(X \lrcorner Y \lrcorner d\Phi))$, segue que $\mathcal{I}(X, Y) = 0$.

Agora, suponhamos que Y é um campo tangente ao longo de M e X um campo diferenciável qualquer. Aplicando as propriedades da derivada de Lie, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(X, Y) &= i^*(X \lrcorner (L_Y d\Phi)) \\ &= i^*(L_Y(X \lrcorner d\Phi)) + i^*([X, Y] \lrcorner d\Phi). \end{aligned}$$

Novamente, como M é mínima e Y é um campo tangente ao longo de M , então $\mathcal{I}(X, Y) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\widetilde{W}, \widetilde{W}) &= \mathcal{I}(\widetilde{W}^\top + \widetilde{W}^\perp, \widetilde{W}^\top + \widetilde{W}^\perp) \\ &= \mathcal{I}(\widetilde{W}^\perp, \widetilde{W}^\perp).\end{aligned}$$

□

Lema 3.10. *Para cada $\alpha = 1, \dots, p$*

$$i^*(L_{\widetilde{W}} f^\alpha) = i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} f^\alpha) = 0.$$

Demonstração. Se $X \in TM$, então $f^\alpha(X) = 0$ para $\alpha = 1, \dots, p$ e assim

$$0 = L_{\widetilde{W}}(f^\alpha(X)) = L_{\widetilde{W}} f^\alpha(X) + f^\alpha(L_{\widetilde{W}} X) = L_{\widetilde{W}} f^\alpha(X) + f^\alpha([\widetilde{W}, X]) .$$

Recordamos que associado ao campo $\widetilde{W}$, existe um grupo a 1-parâmetro de difeomorfismo ρ_u e $(\rho_u)_*(TO_s) = TO_{u+s}$. Assim, $[\widetilde{W}, X]$ é um campo tangente a O_u e portanto $f^\alpha([\widetilde{W}, X]) = 0$.

Do mesmo modo,

$$0 = L_{\widetilde{W}^\top}(f^\alpha(X)) = L_{\widetilde{W}^\top} f^\alpha(X) + f^\alpha(L_{\widetilde{W}^\top} X) = L_{\widetilde{W}^\top} f^\alpha(X) + f^\alpha([\widetilde{W}^\top, X]) = L_{\widetilde{W}^\top} f^\alpha(X) .$$

Como $[\widetilde{W}^\top, X]$ é tangente a O_u , segue que $L_{\widetilde{W}^\top} f^\alpha|_{O_u} = 0$. □

No próximo lema, obtemos um referencial especial no ponto p_0 .

Lema 3.11. *Existe uma base adaptada $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ em $T\mathbb{G}$ satisfazendo*

$$1. \quad \tilde{f}_j(p_0) = f_j(p_0) \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$2. \quad \text{As 1-formas de conexão } \tilde{\omega}_k^j \text{ para } \tilde{f}_j \text{ satisfazem}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k^j(p_0) &= 0 & 1 \leq j, k \leq p \\ \tilde{\omega}_s^r(p_0) &= 0 & p+1 \leq r, s \leq d_1\end{aligned}\tag{3.10}$$

Demonstração. Definimos a base $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ como

$$\tilde{f}_j = \sum_{i=1}^n b_j^i f_i \text{ for } j = 1, \dots, n$$

em que (b_j^i) é uma matriz de funções tal que

- (i) (b_j^i) é ortogonal, ou seja, $(b_j^i)^{-1} = b_i^j$;
- (ii) $b_\alpha^k = b_k^\alpha = 0$ para $\alpha = 1, \dots, p$ e $k = p+1, \dots, n$;
- (iii) $b_j^i = \delta_j^i$ para $i = d_1+1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ e para $i = 1, \dots, n$, $j = d_1+1, \dots, n$;
- (iv) $(b_j^i(p_0)) = \text{Id}_n$.

A condição (i) significa que $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{d_1}$ é ortonormal em D . A condição (ii) significa que $\tilde{f}_\alpha, \alpha = 1, \dots, p$ são normais horizontais a O_u , enquanto que $\tilde{f}_j, j = p+1, \dots, n$ são tangentes a O_u . A condição (iii) significa que $\tilde{f}_r = f_r$ para $r = d_1+1, \dots, n$ e a condição (iv) que a base $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ coincide com a base $f_1, \dots, f_n$ em p_0 .

Como $\tilde{f}_r = f_r, r = d_1+1, \dots, n$, então

$$A_r^\alpha = \sum_{\beta=1}^p \tilde{A}_r^\beta b_\beta^\alpha \text{ ou } \tilde{A}_r^\alpha = \sum_{\beta=1}^p A_r^\beta b_\alpha^\beta, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Relacionamos as 1-formas duais $\tilde{f}^i$ com as 1-formas duais f^i por

$$\tilde{f}^j = \sum_{i=1}^n b_j^i f^i \text{ e } \tilde{f}^j(p_0) = f^j(p_0), \quad j = 1, \dots, n$$

e as relações inversas são

$$f^j = \sum_{i=1}^{d_1} b_i^j \tilde{f}^i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Assim, as 1-formas de conexão correspondentes $\tilde{\omega}_j^\alpha$ para $\alpha = 1, \dots, p$ satisfazem

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_j^\alpha \wedge \tilde{f}^j + \sum_{k=d_1+1}^n \tilde{A}_k^\alpha \bar{T}^k &= d\tilde{f}^\alpha = \sum_{\beta=1}^p (db_\alpha^\beta \wedge f^\beta + b_\alpha^\beta df^\beta) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\beta=1}^p \left(b_k^\beta db_\alpha^\beta - \sum_{l=1}^n b_\alpha^\beta \tilde{\omega}_l^\beta b_k^l \right) \wedge \tilde{f}^k + \sum_{\beta=1}^p \sum_{k=d_1+1}^n b_\alpha^\beta A_k^\beta \bar{T}^k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\beta=1}^p \left(b_k^\beta db_\alpha^\beta - \sum_{l=1}^n b_\alpha^\beta \tilde{\omega}_l^\beta b_k^l \right) \wedge \tilde{f}^k + \sum_{k=d_1+1}^n \tilde{A}_k^\alpha \bar{T}^k \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\omega}_\gamma^\alpha = - \sum_{\beta=1}^p \left(b_\gamma^\beta db_\alpha^\beta - \sum_{\delta=1}^p b_\alpha^\beta \bar{\omega}_\delta^\beta b_\gamma^\delta \right) \quad (3.11)$$

para $\alpha, \gamma = 1, \dots, p$.

Analogamente, para $j = p+1, \dots, d_1$, obtemos

$$d\tilde{f}^j = - \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i^j \wedge \tilde{f}^i$$

e assim

$$\tilde{\omega}_k^j = - \sum_{l=p+1}^{d_1} \left(b_k^l db_j^l - \sum_{m=p+1}^{d_1} b_j^l \bar{\omega}_m^l b_k^m \right) \quad (3.12)$$

para $j, k = p+1, \dots, d_1$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\gamma^\alpha(p_0) &= \bar{\omega}_\gamma^\alpha(p_0) - db_\alpha^\gamma(p_0), \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, p. \\ \tilde{\omega}_k^j(p_0) &= \bar{\omega}_k^j(p_0) - db_j^k(p_0), \quad j, k = p+1, \dots, d_1. \end{aligned}$$

É possível escolher as matrizes (b_α^γ) e (b_j^k) tal que

$$db_\alpha^\gamma(p_0) = \bar{\omega}_\gamma^\alpha(p_0) \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, p. \quad (3.13)$$

$$db_j^k(p_0) = \bar{\omega}_k^j(p_0) \quad j, k = p+1, \dots, d_1. \quad (3.14)$$

De fato, sejam X um campo unitário definido em uma vizinhança de p_0 e

$$b_\alpha^\gamma(\exp(tX)) = \exp(t\bar{\omega}_\gamma^\alpha(X)) \quad \alpha, \gamma = 1, \dots, p \quad (3.15)$$

$$b_j^k(\exp(tX)) = \exp(t\bar{\omega}_k^j(X)) \quad j, k = p+1, \dots, d_1 \quad (3.16)$$

$$b_j^\gamma = b_\gamma^j = 0 \quad (3.17)$$

em que $\exp$ do lado esquerdo é a exponencial de $\mathbb{G}$ e a do lado direito é a exponencial de matrizes.

Diferenciando (3.15) e (3.16) no instante $t = 0$, obtemos, respectivamente, (3.13) e (3.14). $\square$

Usando o Lema 3.11, obtemos as seguintes relação:

Lema 3.12. Para $j = p + 1, \dots, d_1$,

$$i^*(L_{\widetilde{W}} f^j) = - \sum_{k=p+1}^n \bar{\omega}_k^j(\widetilde{W}) f^k + \sum_{k=1}^n f^k(\widetilde{W}) \bar{\omega}_k^j + d(f^j(\widetilde{W}))$$

e

$$i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} f^j) = - \sum_{k=p+1}^n \bar{\omega}_k^j(\widetilde{W}^\perp) f^k + \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) \bar{\omega}_\alpha^j .$$

Em p_0 , obtemos

$$i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} f^j) = - \sum_{k=d_1+1}^n \bar{\omega}_k^j(W^\perp) f^k + \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(W^\perp) \bar{\omega}_\alpha^j = - \sum_{k=d_1+1}^n \bar{\omega}_k^j(W^\perp) f^k - \langle A_{W^\perp}, f_j \rangle_{p_0} .$$

Demonstração. Segue diretamente das propriedades de derivada de Lie e das equações de estruturas da Seção 1.3 que

$$L_{\widetilde{W}} f^j = - \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_k^j(\widetilde{W}) f^k + \sum_{k=1}^n f^k(\widetilde{W}) \bar{\omega}_k^j + d(f^j(\widetilde{W}))$$

e portanto as duas fórmulas são satisfeitas. Em particular, segue do Lema 3.11 que em p_0 , $\bar{\omega}_k^j = 0$ se $j, k = p + 1, \dots, d_1$. $\square$

Lema 3.13. Para $r = d_1 + 1, \dots, n$

$$i^*\{L_{\widetilde{W}} f^r\} = \widetilde{W} \lrcorner \overline{T}^r + d(f^r(\widetilde{W})) \quad \text{e} \quad i^*\{L_{\widetilde{W}^\perp} f^r\} = \widetilde{W}^\perp \lrcorner \overline{T}^r .$$

Demonstração. Para $r = d_1 + 1, \dots, n$,

$$L_{\widetilde{W}} f^r = \widetilde{W} \lrcorner df^r + d(f^r(\widetilde{W})) = \widetilde{W} \lrcorner \overline{T}^r + d(f^r(\widetilde{W})) .$$

$\square$

Destacamos agora, o terceiro Teorema principal desta tese.

Teorema 3.14. Seja $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão mínima e não-horizontal de uma variedade orientada M com bordo ∂M e de dimensão $(n - p)$, em um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$

de dimensão n . Seja $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma variação de $i = F(0) : M \rightarrow \mathbb{G}$ por imersões com campo variacional W e seja $\widetilde{W} = \frac{\partial F}{\partial u}$. Se $\Gamma(u)$ é a forma volume em M determinada pela estrutura subriemanniana de $\mathbb{G}$ e a orientação de M , então

$$\begin{aligned} \ddot{\Gamma}(0) = & \left(-\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \overline{T}^\top)) - \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, \tau), W^\perp \rangle \right. \\ & + \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle W^\perp, \overline{T}^\top(\overline{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, f_i) \rangle + \langle W^\perp, \overline{T}^\top(W^\perp, S(f_i, f_i)) \rangle - \langle W^\perp, \overline{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle \right. \\ & + \langle W^\perp, S(f_i, \overline{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle + \langle \overline{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle + \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i), \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle \Big) \\ & + \sum_{j=d_1+1}^n \left(\overline{T}^j(W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_j)) + \overline{T}^j(W^\perp, \overline{\nabla}_{f_j}^\perp W^\perp) \right) \Big) \Gamma(0) \\ & + d \left(([\widetilde{W}^\perp, \widetilde{W}^\top]^\top + \text{div}(W^\top)W^\top) \lrcorner \Gamma(0) \right) . \end{aligned}$$

Demonstração. A prova consiste em calcular os dois termos de (3.9) para $u = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} \ddot{\Gamma}(0) &= i^* \{ L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi) \} + i^* \{ L_{\widetilde{W}} d(\widetilde{W} \lrcorner \Phi) \} \\ &= i^* \{ L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi) \} + d(i^* \{ L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner \Phi) \}) . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Recordamos que

$$d\Phi = \sum_{\alpha=1}^p (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) f^\alpha \wedge \Phi + \sum_{\alpha, \beta=1}^p \Omega_{\alpha\beta} f^\alpha \wedge \Psi, \quad (3.19)$$

em que $\Psi = f^{p+1} \wedge \dots \wedge f^\beta \wedge \dots \wedge f^n$ e $\Omega_{\alpha\beta} = \sum_{i=p+1}^{d_1} \overline{\omega}_\alpha^i(f_\beta) + \frac{1}{2} \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(f_\alpha, f_\beta)$.

Para simplificar, reescrevemos (3.19) como

$$d\Phi = \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha \wedge \mu_\alpha, \quad (3.20)$$

em que

$$\mu_\alpha = (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) \Phi + \sum_{\beta=1}^p \Omega_{\alpha\beta} \Psi.$$

Iniciamos agora a prova do primeiro termo de (3.18).

Usando o Lema 3.9 e a igualdade (3.20) obtemos que

$$\begin{aligned}
i^*(L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi)) &= i^*(L_{\widetilde{W}^\perp}(\widetilde{W}^\perp \lrcorner d\Phi)) \\
&= i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner d(\widetilde{W}^\perp \lrcorner d\Phi)) \\
&= i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner L_{\widetilde{W}^\perp} d\Phi) \\
&= \sum_{\alpha=1}^p i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner L_{\widetilde{W}^\perp} (f^\alpha \wedge \mu_\alpha)) \\
&= \sum_{\alpha=1}^p i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner (L_{\widetilde{W}^\perp} f^\alpha \wedge \mu_\alpha + f^\alpha \wedge L_{\widetilde{W}^\perp} \mu_\alpha)) \\
&= \sum_{\alpha=1}^p (i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner L_{\widetilde{W}^\perp} f^\alpha) i^* \mu_\alpha - i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} f^\alpha) \wedge i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner \mu_\alpha) \\
&\quad + i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner f^\alpha) i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} \mu_\alpha) - i^* f^\alpha \wedge i^*(\widetilde{W}^\perp \lrcorner L_{\widetilde{W}^\perp} \mu_\alpha)) .
\end{aligned}$$

Como M é mínima, ou seja, $H_\xi + \sigma_\xi = 0$ para todo $\xi \in TM^\perp$ e

$$i^* \Psi = i^* f^{p+1} \wedge \dots \wedge i^* f^\beta \wedge \dots \wedge i^* f^n = 0,$$

pois $i^* f^\beta = 0$, então

$$i^* \mu_\alpha = i^*(H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) i^* \Phi + \sum_{\beta=1}^p i^*(\Omega_{\alpha\beta}) i^* \Psi = 0 .$$

Portanto, aplicando o Lema 3.10, $i^* f^\alpha = 0$ e $i^* \mu_\alpha = 0$ obtemos que

$$\begin{aligned}
i^*(L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi)) &= \sum_{\alpha=1}^p i^*\{\widetilde{W}^\perp \lrcorner (f^\alpha \wedge L_{\widetilde{W}^\perp} \mu_\alpha)\} \\
&= \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} \mu_\alpha) .
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} \mu_\alpha) &= (L_{\widetilde{W}^\perp} (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha})) i^* \Phi + (H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}) i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} \Phi) \\
&\quad + \sum_{\beta=1}^p ((L_{\widetilde{W}^\perp} (\Omega_{\alpha\beta})) i^* \Psi + \Omega_{\alpha\beta} i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} \Psi)) .
\end{aligned}$$

Como $i^*\Psi = 0$ e $i^*(L_{\widetilde{W}^\perp}f^\beta) = 0$ (Lema 3.10), segue que $i^*(L_{\widetilde{W}^\perp}\Psi) = 0$. Além disso, M é mínima e assim

$$i^*(L_{\widetilde{W}^\perp}\mu_\alpha) = (L_{\widetilde{W}^\perp}(H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}))i^*\Phi,$$

Portanto,

$$\begin{aligned} i^*(L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi)) &= \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)(L_{\widetilde{W}^\perp}(H_{f_\alpha} + \sigma_{f_\alpha}))\Gamma(0) \\ &= \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)(L_{\widetilde{W}^\perp}H_{f_\alpha})\Gamma(0) + \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)(L_{\widetilde{W}^\perp}\sigma_{f_\alpha})\Gamma(0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

A seguir, desenvolveremos o primeiro termo de (3.21).

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)L_{\widetilde{W}^\perp}H_{f_\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)L_{\widetilde{W}^\perp}(\overline{\omega}_\alpha^i(f_i)) \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)(L_{\widetilde{W}^\perp}\overline{\omega}_\alpha^i)(f_i) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)\overline{\omega}_\alpha^i([\widetilde{W}^\perp, f_i]). \end{aligned}$$

Por outro lado, como $[\widetilde{W}^\perp, f_i] \in TM$ (prova do Lema 3.10), segue que

$$[\widetilde{W}^\perp, f_i] = (\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp}f_i)^\top - (\overline{\nabla}_{f_i}\widetilde{W}^\perp)^\top - \overline{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, f_i).$$

Em p_0 , segue do Lema 3.11 que $(\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp}f_i)^\top = \sum_{k=p+1}^{d_1} \overline{\omega}_i^k(\widetilde{W}^\perp)f_k = 0$ e assim

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_\alpha^i([\widetilde{W}^\perp, f_i]) &= \overline{\omega}_\alpha^i(A_{W^\perp}(f_i) - \overline{T}^\top(W^\perp, f_i)) \\ &= -\langle A_{f_\alpha}(A_{W^\perp}(f_i)), f_i \rangle + \langle A_{f_\alpha}(\overline{T}^\top(W^\perp, f_i)), f_i \rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, em p_0

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)\overline{\omega}_\alpha^i([\widetilde{W}^\perp, f_i]) &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(-\langle A_{W^\perp}(A_{W^\perp}(f_i)), f_i \rangle + \langle A_{W^\perp}(\overline{T}^\top(W^\perp, f_i)), f_i \rangle \right) \\ &= -\text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ W^\perp \lrcorner \overline{T}^\top). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) L_{\widetilde{W}^\perp} H_{f_\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(W^\perp) (L_{\widetilde{W}^\perp} \bar{\omega}_\alpha^i)(f_i) \\ &\quad - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) . \end{aligned}$$

Usando as formas de curvatura de $\mathbb{G}$, segue que

$$L_{\widetilde{W}^\perp} \bar{\omega}_\alpha^i = d(\bar{\omega}_\alpha^i(\widetilde{W}^\perp)) - \sum_{k=1}^{d_1} \left(\bar{\omega}_\alpha^k(\widetilde{W}^\perp) \bar{\omega}_k^i - \bar{\omega}_k^i(\widetilde{W}^\perp) \bar{\omega}_\alpha^k \right) .$$

Assim, em p_0 , $i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} \bar{\omega}_\alpha^i) = i^*(d(\bar{\omega}_\alpha^i(\widetilde{W}^\perp)))$ e portanto

$$\sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) (L_{\widetilde{W}^\perp} \bar{\omega}_\alpha^i)(f_i) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(\bar{\omega}_\alpha^i(\widetilde{W}^\perp)) .$$

Por outro lado, segue do Lema 3.10 que

$$\begin{aligned} 0 &= i^*(L_{\widetilde{W}^\perp} f^\alpha) = i^* \left(\widetilde{W}^\perp \lrcorner \left(- \sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i^\alpha \wedge f^i + \tilde{T}^\alpha \right) + d(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)) \right) \\ &= i^* \left(- \sum_{i=p+1}^n \bar{\omega}_i^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f^i + \sum_{\beta=1}^p f^\beta(\widetilde{W}^\perp) \bar{\omega}_\beta^\alpha + \widetilde{W}^\perp \lrcorner \tilde{T}^\alpha + d(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)) \right) . \end{aligned}$$

Logo, para $i = p+1, \dots, n$

$$-\bar{\omega}_i^\alpha(\widetilde{W}^\perp) = -f_i(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)) - \sum_{\beta=1}^p f^\beta(\widetilde{W}^\perp) \bar{\omega}_\beta^\alpha(f_i) - \tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i) \quad (3.22)$$

e

$$-f_i(\bar{\omega}_i^\alpha(\widetilde{W}^\perp)) = -f_i(f_i(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp))) - \sum_{\beta=1}^p f_i(f^\beta(\widetilde{W}^\perp) \bar{\omega}_\beta^\alpha(f_i)) - f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) .$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) (L_{\widetilde{W}^\perp} \bar{\omega}_\alpha^i)(f_i) &= - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(f_i(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp))) \\ &\quad - \sum_{\alpha, \beta=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(f^\beta(\widetilde{W}^\perp) \bar{\omega}_\beta^\alpha(f_i)) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) . \end{aligned}$$

Em particular, no ponto p_0

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)(L_{\widetilde{W}^\perp} \bar{\omega}_\alpha^i)(f_i) &= - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(f_i(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp))) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)), \end{aligned}$$

pois $\bar{\omega}_\beta^\alpha = -\bar{\omega}_\alpha^\beta$ e $\bar{\omega}_\beta^\alpha(p_0) = 0$.

Afirmamos que em p_0

$$\sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(W^\perp) f_i(f_i(f^\alpha(W^\perp))) = \langle \Delta W^\perp, W^\perp \rangle. \quad (3.23)$$

De fato, lembramos que $\nabla f_j = \sum_{i=p+1}^{d_1} \omega_j^i \otimes f_i$, para $j = p+1, \dots, n$, assim

$$\begin{aligned} \Delta W^\perp &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \nabla_{f_i}^\perp \nabla_{f_i}^\perp W^\perp - \sum_{i=p+1}^{d_1} \nabla_{\nabla_{f_i} f_i}^\perp W^\perp \\ &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \nabla_{f_i}^\perp \sum_{\beta=1}^p (f_i(f^\beta(W^\perp))) + \sum_{\delta=1}^p f^\delta(W^\perp) \bar{\omega}_\delta^\beta(f_i) f_\beta \\ &\quad - \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\beta=1}^p \left(\nabla_{f_i} f_i(f^\beta(W^\perp)) + \sum_{\delta=1}^p f^\delta(W^\perp) \bar{\omega}_\delta^\beta(\nabla_{f_i} f_i) \right) f_\beta \\ &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\beta=1}^p f_i \left(f_i(f^\beta(W^\perp)) + \sum_{\delta=1}^p f^\delta(W^\perp) \bar{\omega}_\delta^\beta(f_i) \right) f_\beta \\ &\quad + \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\beta=1}^p \left(f_i(f^\beta(W^\perp)) + \sum_{\delta=1}^p f^\delta(W^\perp) \bar{\omega}_\delta^\beta(f_i) \right) \nabla_{f_i}^\perp f_\beta \\ &\quad - \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\beta=1}^p \left(\nabla_{f_i} f_i(f^\beta(W^\perp)) + \sum_{\delta=1}^p f^\delta(W^\perp) \bar{\omega}_\delta^\beta(\nabla_{f_i} f_i) \right) f_\beta. \end{aligned}$$

Como $\bar{\omega}_\delta^\beta = -\bar{\omega}_\beta^\delta$, segue que

$$\begin{aligned} \langle \Delta W^\perp, W^\perp \rangle &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\beta=1}^p \left(f_i(f_i(f^\beta(W^\perp))) + \sum_{\delta=1}^p f_i(f^\delta(W^\perp)) \bar{\omega}_\delta^\beta(f_i) \right) f^\beta(W^\perp) \\ &\quad - \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\beta=1}^p \nabla_{f_i} f_i(f^\beta(W^\perp)) f^\beta(W^\perp). \end{aligned}$$

Assim, em p_0 a igualdade (3.23) é satisfeita. Portanto,

$$\sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)(L_{\widetilde{W}^\perp} \bar{\omega}_\alpha^i)(f_i) = - \langle \Delta W^\perp, W^\perp \rangle - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) .$$

Agora, estamos no seguinte ponto da prova

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) L_{\widetilde{W}^\perp} H_{f_\alpha} &= - \langle \Delta W^\perp, W^\perp \rangle - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) \\ &\quad - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) . \end{aligned}$$

Finalizamos o primeiro termo de (3.21), desenvolvendo a soma

$$\sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) . \quad (3.24)$$

Para isso, usaremos os seguintes lemas:

Lema 3.15.

$$\bar{\nabla} \bar{T} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\nabla} \bar{T}^j = 0 .$$

Demonstração. De fato, para $j \neq k$,

$$\bar{\nabla}_{e_i} \bar{T}(e_j, e_k) = \bar{\nabla}_{e_i}(\bar{T}(e_j, e_k)) - \bar{T}(\bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_k) - \bar{T}(e_j, \bar{\nabla}_{e_i} e_k) = -c_{jk}^l \bar{\nabla}_{e_i} e_l = 0.$$

Também,

$$\bar{\nabla} \bar{T}^j = \bar{\nabla}(f^j \circ \bar{T}) = \bar{\nabla} f^j \circ \bar{T} + f^j \circ \bar{\nabla} \bar{T} = 0.$$

□

Lema 3.16.

$$\langle \bar{T}^\perp(X, Y), \xi \rangle = -\langle \bar{T}^\top(X, Y), \xi \rangle, \quad \forall X, Y \in T\mathbb{G} \quad \text{e} \quad \xi \in D .$$

Demonstração. De fato, $\bar{T} = \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j \otimes e_j$ e portanto

$$0 = \langle \bar{T}(X, Y), \xi \rangle = \langle \bar{T}^\perp(X, Y) + \bar{T}^\top(X, Y), \xi \rangle$$

□

Como $f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) = f_i\langle f_\alpha, \bar{T}^\perp(\widetilde{W}^\perp, f_i) \rangle$, pelo Lema 3.16, segue que

$$\begin{aligned} f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) &= -f_i\langle f_\alpha, \bar{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, f_i) \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_{f_i} f_\alpha, \bar{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, f_i) \rangle - \langle f_\alpha, \bar{\nabla}_{f_i}(\bar{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, f_i)) \rangle \\ &= -\langle (\bar{\nabla}_{f_i} f_\alpha)^\top, \bar{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, f_i) \rangle - \sum_{k=d_1+1}^n \langle f_\alpha, \bar{\nabla}_{f_i}(\bar{T}^k(\widetilde{W}^\perp, f_i) f_k) \rangle. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.15 e que $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ para $i = p+1, \dots, d_1$ e $j = d_1+1, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) &= - \sum_{k=d_1+1}^n (\langle f_\alpha, \bar{T}^k(\bar{\nabla}_{f_i} \widetilde{W}^\perp, f_i) f_k \rangle + \langle f_\alpha, \bar{T}^k(\widetilde{W}^\perp, \bar{\nabla}_{f_i} f_i) f_k \rangle \\ &\quad + \langle f_\alpha, \bar{T}^k(\widetilde{W}^\perp, f_i) \bar{\nabla}_{f_i} f_k \rangle) \\ &= -\langle f_\alpha, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i} \widetilde{W}^\perp, f_i) \rangle - \langle f_\alpha, \bar{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, \bar{\nabla}_{f_i} f_i) \rangle \\ &\quad - \sum_{k=d_1+1}^n \langle f_\alpha, \bar{T}^k(\widetilde{W}^\perp, f_i) \bar{\nabla}_{f_i} f_k \rangle \\ &= \langle f_\alpha, \bar{T}^\top(A_{\widetilde{W}^\perp}(f_i), f_i) \rangle - \langle f_\alpha, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i}^\perp \widetilde{W}^\perp, f_i) \rangle - \langle f_\alpha, \bar{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, (\bar{\nabla}_{f_i} f_i)^\top) \rangle \\ &\quad - \langle f_\alpha, \bar{T}^\top(\widetilde{W}^\perp, S(f_i, f_i)) \rangle - \sum_{k=d_1+1}^n (\langle f_\alpha, \bar{T}^k(\widetilde{W}^\perp, f_i) (\bar{\nabla}_{f_i} f_k)^\top \rangle \\ &\quad + \langle f_\alpha, \bar{T}^k(\widetilde{W}^\perp, f_i) S(f_i, f_k) \rangle). \end{aligned}$$

Assim, em p_0

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) f_i(\tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i)) &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle W^\perp, \bar{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle - \langle W^\perp, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i}^\perp \widetilde{W}^\perp, f_i) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle W^\perp, \bar{T}^\top(W^\perp, S(f_i, f_i)) \rangle - \langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) L_{\widetilde{W}^\perp} H_{f_\alpha} &= -\langle \Delta W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) \\ &\quad + \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle W^\perp, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, f_i) \rangle + \langle W^\perp, \bar{T}^\top(W^\perp, S(f_i, f_i)) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle W^\perp, \bar{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle + \langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle \right). \quad (3.25) \end{aligned}$$

Vamos agora para o segundo termo de (3.21).

Notemos que

$$L_{\widetilde{W}^\perp} \sigma_{f_\alpha} = \sum_{j=d_1+1}^n L_{\widetilde{W}^\perp} (\overline{T}^j(f_\alpha, f_j)) = \sum_{j=d_1+1}^n \widetilde{W}^\perp (\overline{T}^j(f_\alpha, f_j)) .$$

Então,

$$L_{\widetilde{W}^\perp} \sigma_{f_\alpha} = \sum_{j=d_1+1}^n (\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} \overline{T}^j)(f_\alpha, f_j) + \overline{T}^j(\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_\alpha, f_j) + \overline{T}^j(f_\alpha, \overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_j) .$$

Usando o Lema 3.15 e que $(\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_\alpha)^\perp = 0$ em p_0 (Lema 3.11) segue que

$$L_{\widetilde{W}^\perp} \sigma_{f_\alpha} = \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j((\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_\alpha)^\top, f_j) + \overline{T}^j(f_\alpha, (\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_j)^\top) + \overline{T}^j(f_\alpha, (\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_j)^\perp) .$$

Observamos que

$$(\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_\alpha)^\top = \sum_{i=p+1}^{d_1} \overline{\omega}_\alpha^i(\widetilde{W}^\perp) f_i .$$

Por (3.22), segue que em p_0

$$(\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_\alpha)^\top = - \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)) f_i - \sum_{i=p+1}^{d_1} \tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i) f_i .$$

Analogamente,

$$(\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_j)^\top = \sum_{i=p+1}^{d_1} \overline{\omega}_j^i(\widetilde{W}^\perp) f_i$$

e por (1.9) temos que

$$\overline{\omega}_j^i = - \sum_{\gamma=1}^p A_j^\gamma \overline{\omega}_\gamma^i .$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_{\widetilde{W}^\perp} f_j)^\top &= - \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\gamma=1}^p A_j^\gamma \overline{\omega}_\gamma^i(\widetilde{W}^\perp) f_i \\ &= \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\gamma=1}^p A_j^\gamma f_i(f^\gamma(\widetilde{W}^\perp)) f_i + \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\gamma=1}^p A_j^\gamma \tilde{T}^\gamma(\widetilde{W}^\perp, f_i) f_i . \end{aligned}$$

Portanto, em p_0

$$\begin{aligned}
L_{\widetilde{W}^\perp} \sigma_{f_\alpha} = & - \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{i=p+1}^{d_1} f_i(f^\alpha(\widetilde{W}^\perp)) \overline{T}^j(f_i, f_j) - \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{i=p+1}^{d_1} \tilde{T}^\alpha(\widetilde{W}^\perp, f_i) \overline{T}^j(f_i, f_j) \\
& + \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\gamma=1}^p A_j^\gamma f_i(f^\gamma(\widetilde{W}^\perp)) \overline{T}^j(f_\alpha, f_i) + \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{\gamma=1}^p A_j^\gamma \tilde{T}^\gamma(\widetilde{W}^\perp, f_i) \overline{T}^j(f_\alpha, f_i) \\
& + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(f_\alpha, (\nabla_{\widetilde{W}^\perp} f_j)^\perp).
\end{aligned}$$

Observamos que em p_0

$$\begin{aligned}
\overline{T}^j(f_\alpha, (\nabla_{\widetilde{W}^\perp} f_j)^\perp) &= \overline{T}^j(f_\alpha, (\overline{T}(\widetilde{W}^\perp, f_j) + \nabla_{f_j} \widetilde{W}^\perp + [\widetilde{W}^\perp, f_j])^\perp) \\
&= \overline{T}^j(f_\alpha, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_j)) + \overline{T}^j(f_\alpha, \nabla_{f_j}^\perp \widetilde{W}^\perp),
\end{aligned}$$

pois $[\widetilde{W}^\perp, f_j] \in TM$.

Finalmente, como $\tau = \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(f_i, f_j) f_i$ e $\tilde{T}^\delta = \sum_{j=d_1+1}^n A_j^\delta \overline{T}^j$, para $\delta = 1, \dots, p$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) L_{\widetilde{W}^\perp} \sigma_{f_\alpha} = & - \langle \nabla_\tau^\perp W^\perp, W^\perp \rangle - \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, \tau), W^\perp \rangle \\
& + \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle \nabla_{f_i}^\perp W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle + \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i), \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle \right) \\
& + \sum_{j=d_1+1}^n \left(\overline{T}^j(W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_j)) + \overline{T}^j(W^\perp, \nabla_{f_j}^\perp W^\perp) \right). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.25) e (3.26) em (3.21) obtemos

$$\begin{aligned}
i^*(L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner d\Phi)) = & \left(-\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \overline{T}^\top)) \right. \\
& - \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, \tau), W^\perp \rangle + \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle W^\perp, \overline{T}^\top(\nabla_{f_i}^\perp W^\perp, f_i) \rangle \right. \\
& + \langle W^\perp, \overline{T}^\top(W^\perp, S(f_i, f_i)) \rangle - \langle W^\perp, \overline{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle \\
& + \langle W^\perp, S(f_i, \overline{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle + \langle \nabla_{f_i}^\perp W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle \\
& \left. \left. + \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i), \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=d_1+1}^n \left(\overline{T}^j(W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_j)) + \overline{T}^j(W^\perp, \nabla_{f_j}^\perp W^\perp) \right) \Gamma(0) .$$

Finalmente, vamos para o último termo de (3.18).

$$\begin{aligned} i^*(L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner \Phi)) &= i^*(\widetilde{W} \lrcorner L_{\widetilde{W}} \Phi) \\ &= i^*(\underbrace{\widetilde{W} \lrcorner \sum_{j=p+1}^n f^{p+1} \wedge \dots \wedge L_{\widetilde{W}} f^j \wedge \dots \wedge f^n}_{:=F}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (-1)^{k-p+1} F(f_{p+1}, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n) &= \sum_{j=p+1}^n f^{p+1} \wedge \dots \wedge L_{\widetilde{W}} f^j \wedge \dots \wedge f^n(f_{p+1}, \dots, \widetilde{W}, \dots, f_n) \\ &= \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq k}}^n f^{p+1} \wedge \dots \wedge L_{\widetilde{W}} f^j \wedge \dots \wedge f^n(f_{p+1}, \dots, \widetilde{W}, \dots, f_n) \\ &\quad + f^{p+1} \wedge \dots \wedge L_{\widetilde{W}} f^k \wedge \dots \wedge f^n(f_{p+1}, \dots, \widetilde{W}, \dots, f_n) \\ &= \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq k}}^n \left(f^k(\widetilde{W}) L_{\widetilde{W}} f^j(f_j) - f^k(f_j) L_{\widetilde{W}} f^j(\widetilde{W}) \right) \\ &\quad + L_{\widetilde{W}} f^k(\widetilde{W}) - \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq k}}^n L_{\widetilde{W}} f^k(f_j) f^j(\widetilde{W}) \\ &= L_{\widetilde{W}} f^k(\widetilde{W}) - \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq k}}^n f^j(\widetilde{W}) L_{\widetilde{W}} f^k(f_j) + \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \neq k}}^n f^k(\widetilde{W}) L_{\widetilde{W}} f^j(f_j) \\ &= L_{\widetilde{W}} f^k(\widetilde{W}) - \sum_{j=p+1}^n L_{\widetilde{W}} f^k(f^j(\widetilde{W}) f_j) + \sum_{j=p+1}^n f^k(\widetilde{W}) L_{\widetilde{W}} f^j(f_j) \\ &= L_{\widetilde{W}} f^k(\widetilde{W}) - L_{\widetilde{W}} f^k(\widetilde{W}^\top) + \sum_{j=p+1}^n f^k(\widetilde{W}) L_{\widetilde{W}} f^j(f_j) \\ &= L_{\widetilde{W}} f^k(\widetilde{W}^\perp) + \sum_{j=p+1}^n f^k(\widetilde{W}) L_{\widetilde{W}} f^j(f_j) . \end{aligned}$$

Aplicando os Lemas 3.12 e 3.13 segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=p+1}^n L_{\widetilde{W}} f^j(f_j) &= \sum_{j=p+1}^{d_1} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) \overline{\omega}_\alpha^j(f_j) + \sum_{j=p+1}^n \sum_{l=p+1}^n f^l(\widetilde{W}) \overline{\omega}_l^j(f_j) \\
&\quad + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(\widetilde{W}, f_j) + \sum_{j=p+1}^n d(f^j(\widetilde{W}))(f_j) \\
&= \sum_{j=p+1}^{d_1} \sum_{\alpha=1}^p f^\alpha(\widetilde{W}^\perp) \overline{\omega}_\alpha^j(f_j) + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(\widetilde{W}^\perp, f_j) \\
&\quad + \sum_{j=p+1}^n \sum_{l=p+1}^n f^l(\widetilde{W}) \overline{\omega}_l^j(f_j) + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(\widetilde{W}^\top, f_j) + \sum_{j=p+1}^n f_j(f^j(\widetilde{W}^\top)) .
\end{aligned}$$

Como M é mínima,

$$\sum_{j=p+1}^n L_{\widetilde{W}} f^j(f_j) = \sum_{j=p+1}^n \sum_{l=p+1}^n f^l(\widetilde{W}) \overline{\omega}_l^j(f_j) + \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j(\widetilde{W}^\top, f_j) + \sum_{j=p+1}^n f_j(f^j(\widetilde{W}^\top)) .$$

Mas, por (3.2)

$$\operatorname{div} \widetilde{W}^\top = -\operatorname{traço} (L_{\widetilde{W}^\top} - \nabla_{\widetilde{W}^\top}) = \sum_{k=p+1}^n f^k(\nabla_{\widetilde{W}^\top} f_k - [\widetilde{W}^\top, f_k]) .$$

Então,

$$\operatorname{div} \widetilde{W}^\top = \sum_{k=p+1}^n f^k(\nabla_{f_k} \widetilde{W}^\top + T(\widetilde{W}^\top, f_k)) = \sum_{k=p+1}^n f^k(\nabla_{f_k} \widetilde{W}^\top) + \sum_{k=d_1+1}^n \overline{T}^k(\widetilde{W}^\top, f_k),$$

pois $T = \sum_{j=d_1+1}^n \overline{T}^j \otimes f_j$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_k} \widetilde{W}^\top &= \nabla_{f_k} \left(\sum_{j=p+1}^n f^j(\widetilde{W}^\top) f_j \right) \\
&= \sum_{j=p+1}^n f^j(\widetilde{W}^\top) \nabla_{f_k} f_j + \sum_{j=p+1}^n f_k(f^j(\widetilde{W}^\top)) f_j \\
&= \sum_{j=p+1}^n \sum_{i=p+1}^{d_1} f^j(\widetilde{W}^\top) \overline{\omega}_j^i(f_k) f_i + \sum_{j=p+1}^n f_k(f^j(\widetilde{W}^\top)) f_j .
\end{aligned}$$

Então,

$$\operatorname{div} \widetilde{W}^\top = \sum_{j=p+1}^n \sum_{k=p+1}^{d_1} f^j(\widetilde{W}^\top) \overline{\omega}_j^k(f_k) + \sum_{k=p+1}^n f_k(f^k(\widetilde{W}^\top)) + \sum_{k=d_1+1}^n \overline{T}^k(\widetilde{W}^\top, f_k)$$

e portanto,

$$\sum_{k=p+1}^n L_{\widetilde{W}} f^k(f_k) = \operatorname{div} \widetilde{W}^\top .$$

Assim, para $k = p+1, \dots, n$ segue que

$$L_{\widetilde{W}} f^k(\widetilde{W}^\perp) = L_{\widetilde{W}}(f^k(\widetilde{W}^\perp)) - f^k([\widetilde{W}^\top, \widetilde{W}^\perp]) = f^k([\widetilde{W}^\perp, \widetilde{W}^\top]).$$

Então,

$$(-1)^{k-p+1} F(f_{p+1}, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n) = f^k(\widetilde{W}) \operatorname{div} \widetilde{W}^\top + f^k([\widetilde{W}^\perp, \widetilde{W}^\top])$$

que é equivalente a

$$i^*(L_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \lrcorner \Phi)) = ([\widetilde{W}^\perp, \widetilde{W}^\top]^\top + \operatorname{div}(\widetilde{W}^\top) \widetilde{W}^\top) \lrcorner \Gamma(0) . \quad (3.27)$$

Concluimos assim, a prova do Teorema 3.14 para todo ponto p_0 tal que W_{p_0} não é tangente a $i(M)$.

O caso geral, conforme prova do Teorema 2.1, basta considerarmos o grupo de Lie estratificado subriemanniano $(\mathbf{G}, \mathbf{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e a variação $\mathbf{F} : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbf{G}$ definida por $\mathbf{F}(u, p) = (F(u, p), u)$ com campo variacional $\mathbf{W}(p) = (W(p), 1)$. $\square$

Corolário 3.17. *Seja $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão mínima não-horizontal e compacta de uma variedade orientada M com bordo ∂M e de dimensão $(n - p)$, em um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$ de dimensão n . Seja $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma variação de $i = F(0) : M \rightarrow \mathbb{G}$ por imersões com campo variacional W e seja $\widetilde{W} = \frac{\partial F}{\partial u}$. Se $V(u)$ é o elemento volume em M determinado por $\Gamma(u)$ e a orientação de M , então*

$$\begin{aligned} \ddot{V}(0) = & \int_M \left(-\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \operatorname{traço}(A_{W^\perp}^2) + \operatorname{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \overline{T}^\top)) - \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, \tau), W^\perp \rangle \right. \\ & + \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle W^\perp, \overline{T}^\top(\overline{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, f_i) \rangle + \langle W^\perp, \overline{T}^\top(W^\perp, S(f_i, f_i)) \rangle - \langle W^\perp, \overline{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle \right. \\ & + \langle W^\perp, S(f_i, \overline{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle + \langle \overline{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle + \langle \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i), \overline{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle \Big) \\ & + \sum_{j=d_1+1}^n \left(\overline{T}^j(W^\perp, \overline{T}^\perp(W^\perp, f_j)) + \overline{T}^j(W^\perp, \overline{\nabla}_{f_j}^\perp W^\perp) \right) \Gamma(0) \\ & \left. + \int_{\partial M} \left([\widetilde{W}^\perp, \widetilde{W}^\top]^\top + \operatorname{div}(W^\top)W^\top \right) \lrcorner \Gamma(0) . \end{aligned}$$

Em particular, se F é uma variação que mantém ∂M fixada, então

$$\begin{aligned} \ddot{V}(0) = & \int_M \left(-\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) - \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, \tau), W^\perp \rangle \right. \\ & + \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle W^\perp, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, f_i) \rangle + \langle W^\perp, \bar{T}^\top(W^\perp, S(f_i, f_i)) \rangle - \langle W^\perp, \bar{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle \right. \\ & + \langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle + \langle \bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle + \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i), \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle \Big) \\ & \left. + \sum_{j=d_1+1}^n \left(\bar{T}^j(W^\perp, \bar{T}^\perp(W^\perp, f_j)) + \bar{T}^j(W^\perp, \bar{\nabla}_{f_j}^\perp W^\perp) \right) \Gamma(0) \right) . \end{aligned}$$

Definição 3.18. *Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie estratificado n -dimensional e $M \subset \mathbb{G}$ uma subvariedade não-horizontal, orientada, compacta com bordo ∂M e mínima. Dizemos que M é estável se*

$$\ddot{V}(0) = \frac{d^2}{du^2} \left(\int_M \Gamma(u) \right) \Big|_{u=0} \geq 0$$

para toda variação que mantém ∂M fixada.

Capítulo 4

Algumas aplicações do Teorema 3.14

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações do Teorema 3.14, em especial do Corolário 3.17. Destacamos o caso de hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{H}^2$ e as hipersuperfícies mínimas verticais de um grupo Lie estratificado $\mathbb{G}$. Mostramos também uma condição de estabilidade para superfícies mínimas em $\mathbb{H}^1$.

4.1 Estabilidade de hipersuperfícies

Seja $M \subset \mathbb{G}$ uma hipersuperfície não-horizontal. O espaço normal horizontal $TM^\perp$ é 1-dimensional e gerado por f_1 e a componente normal horizontal de W é da forma $W^\perp = wf_1$ para alguma função suave $w : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$. Decorre da graduação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que

$$\overline{T}^j(W^\perp, f_j) = \overline{T}^j(wf_1, e_j - A_j^1 f_1) = w\overline{T}^j(f_1, e_j) = 0, \quad j = d_1 + 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Nas condições do Corolário 3.17, se M é uma hipersuperfície não-horizontal mínima, então

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(0) = & \int_M \left(-\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) - \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, \tau), W^\perp \rangle \right. \\
& + \sum_{i=p+1}^{d_1} \left(\langle W^\perp, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, f_i) \rangle - \langle W^\perp, \bar{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle + \langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle \right. \\
& \left. \left. + \langle \bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle + \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i), \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle \right) \right) \Gamma(0) . \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\langle W^\perp, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, f_i) \rangle &= \langle wf_1, \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i}(wf_1), f_i) \rangle \\
&= wf_i(w) \langle f_1, \bar{T}^\top(f_1, f_i) \rangle \\
&= \langle f_i(w)f_1, \bar{T}^\top(wf_1, f_i) \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i) \rangle \\
&= -\langle \bar{\nabla}_{f_i}^\perp W^\perp, \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle .
\end{aligned}$$

Também, como

$$\begin{aligned}
\tau &= \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{i=2}^{d_1} \bar{T}^j(f_i, f_j) f_i \\
&= \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{i=2}^{d_1} \bar{T}^j(f_i, e_j - A_j^1 f_1) f_i \\
&= - \sum_{j=d_1+1}^n \sum_{i=2}^{d_1} A_j^1 \bar{T}^j(f_i, f_1) f_i \\
&= - \sum_{i=2}^{d_1} \langle f_1, \bar{T}^\perp(f_i, f_1) f_i,
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{T}^\perp(W^\perp, \tau), W^\perp \rangle &= \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i), W^\perp \rangle \langle f_1, \bar{T}^\perp(f_1, f_i) \rangle \\
&= w \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i), f_1 \rangle \langle f_1, \bar{T}^\perp(f_1, f_i) \rangle \\
&= \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i), \langle f_1, \bar{T}^\perp(wf_1, f_i) f_1 \rangle \rangle \\
&= \langle \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i), \bar{T}^\perp(W^\perp, f_i) \rangle .
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}W^\perp &= \mathcal{L}(wf_1) \\
&= \Delta(wf_1) + \nabla_\tau^\perp(wf_1) \\
&= (\Delta w)f_1 + 2f_i(w)\nabla_{f_i}^\perp f_1 - w\nabla_{\nabla_{f_i}f_1}^\perp f_1 + w\nabla_{f_i}^\perp \nabla_{f_i}^\perp f_1 + \tau(w)f_1 + w\nabla_\tau^\perp f_1 \\
&= (\mathcal{L}w)f_1 + 2f_i(w)\nabla_{f_i}^\perp f_1 - w\nabla_{\nabla_{f_i}f_1}^\perp f_1 + w\nabla_{f_i}^\perp \nabla_{f_i}^\perp f_1 + w\nabla_\tau^\perp f_1 .
\end{aligned}$$

Como $\nabla^\perp f_1 = 0$, pois $\langle f_1, f_1 \rangle = 1$ e da compatibilidade $\langle \nabla^\perp f_1, f_1 \rangle = 0$, então

$$\mathcal{L}W^\perp = (\mathcal{L}w)f_1 .$$

Portanto, substituindo as igualdades acima na equação 4.2 obtemos

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(0) &= \int_M \left(-\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle - \langle W^\perp, \bar{T}^\top(A_{W^\perp}(f_i), f_i) \rangle \right) \right) \Gamma(0) \\
&= \int_M \left(-w\mathcal{L}w + w^2 \left(-\text{traço}(A_{f_1}^2) + \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) + \sum_{i=2}^{d_1} \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_1, f_i)) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=2}^{d_1} \langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i) \rangle \right) \right) \Gamma(0) .
\end{aligned}$$

Consequentemente, reescrevemos o Corolário 3.17 para o caso de hipersuperfícies não-horizontais mínimas como

Corolário 4.1. *Seja $i : M \rightarrow \mathbb{G}$ uma imersão não-horizontal mínima e compacta de uma variedade orientada M , $(n-1)$ -dimensional com bordo ∂M sobre um grupo estratificado n -dimensional $\mathbb{G}$. Sejam $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{G}$ uma variação de $i = F_0 : M \rightarrow \mathbb{G}$ por imersões com campo variacional W e $\widetilde{W} = \frac{\partial F}{\partial u}$. Se $V(u)$ é o elemento volume de M determinado por $\Gamma(u)$ e a orientação M e F é uma variação que mantém ∂M fixada, então*

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(0) &= \int_M \left(|\text{grad} w|^2 + w^2 \left(-\text{traço}(A_{f_1}^2) + \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=2}^{d_1} \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_1, f_i)) \rangle - \sum_{i=2}^{d_1} \langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i) \rangle \right) \right) \Gamma(0) .
\end{aligned}$$

4.1.1 Critério de estabilidade para as hipersuperfícies não-horizontais

Conhecemos da teoria de subvariedades euclidianas que os gráficos mínimos de $\mathbb{R}^{n+1}$ são estáveis, ver por exemplo [34]. Com a mesma técnica, mostraremos uma condição para estabilidade de hipersuperfícies não-horizontais mínimas imersas em um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$. Antes, mostraremos dois resultados.

Proposição 4.2. *Sejam M uma hipersuperfície não-horizontal mínima de um grupo de Lie estratificado $\mathbb{G}$ e $a \in \mathfrak{g}$ tal que $\bar{\nabla}_X a = 0, \forall X \in TM$. Então,*

$$\begin{aligned} \Delta \langle a, f_1 \rangle &= - \langle a, f_1 \rangle (\text{traço}(A_{f_1}^2)) + \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top (A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle \\ &\quad + \sum_{i,k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, f_k), f_i), f_1 \rangle + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, f_k)), f_1 \rangle + \langle A_{f_1}(\tau), f_k \rangle \right). \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $p_0 \in M$ e $f_2, \dots, f_{d_1}$ base de $TM \cap D$ tal que $\bar{\nabla} f_i = 0$ em p_0 , para todo $i = 2, \dots, d_1$. Então, em p_0 obtemos

$$\Delta \langle a, f_1 \rangle = \sum_{i=2}^{d_1} f_i(f_i(\langle a, f_1 \rangle)) = \sum_{i=2}^{d_1} f_i(\langle a, \bar{\nabla}_{f_i} f_1 \rangle) = \sum_{i=2}^{d_1} \langle a, \bar{\nabla}_{f_i} \bar{\nabla}_{f_i} f_1 \rangle.$$

Como $\bar{\nabla}_{f_i}^\perp f_1 = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{f_i} \bar{\nabla}_{f_i} f_1 &= \bar{\nabla}_{f_i} (\bar{\nabla}_{f_i} f_1)^\top \\ &= -\bar{\nabla}_{f_i} (A_{f_1}(f_i)) \\ &= -(\bar{\nabla}_{f_i} (A_{f_1}(f_i)))^\top - (\bar{\nabla}_{f_i} (A_{f_1}(f_i)))^\perp \\ &= -(\bar{\nabla}_{f_i} (A_{f_1}(f_i)))^\top - S(f_i, A_{f_1}(f_i)) \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta \langle a, f_1 \rangle = - \sum_{i=2}^{d_1} \langle a, (\bar{\nabla}_{f_i} (A_{f_1}(f_i)))^\top \rangle - \sum_{i=2}^{d_1} \langle a, S(f_i, A_{f_1}(f_i)) \rangle.$$

Como

$$S(X, Y) = S(Y, X) + \bar{T}^\perp(X, Y) \quad \text{e} \quad \langle A_\xi(X), Z \rangle = \langle S(X, Z), \xi \rangle$$

$\forall X, Y \in TM, Z \in TM \cap D, \xi \in TM^\perp$, então

$$\begin{aligned} S(f_i, A_{f_1}(f_i)) &= \langle S(f_i, A_{f_1}(f_i)), f_1 \rangle f_1 \\ &= (\langle S(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle + \langle \overline{T}^\perp(f_i, A_{f_1}(f_i)), f_1 \rangle) f_1 \\ &= (\langle A_{f_1}(A_{f_1}(f_i)), f_i \rangle + \langle \overline{T}^\perp(f_i, A_{f_1}(f_i)), f_1 \rangle) f_1 . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} - \sum_{i=2}^{d_1} \langle a, S(f_i, A_{f_1}(f_i)) \rangle &= - \langle a, f_1 \rangle \sum_{i=2}^{d_1} (\langle A_{f_1}(A_{f_1}(f_i)), f_i \rangle + \langle \overline{T}^\perp(f_i, A_{f_1}(f_i)), f_1 \rangle) \\ &= - \langle a, f_1 \rangle (\text{traço}(A_{f_1}^2) + \sum_{i=2}^{d_1} \langle \overline{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle), \end{aligned}$$

pois $\langle \overline{T}^\perp(X, Y), \xi \rangle = - \langle \overline{T}^\top(X, Y), \xi \rangle$.

O próximo passo é calcular o primeiro termo de $\Delta \langle a, f_1 \rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle a, (\overline{\nabla}_{f_i}(A_{f_1}(f_i)))^\top \rangle &= \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, (\overline{\nabla}_{f_i}(\langle A_{f_1}(f_i), f_k \rangle f_k))^\top \rangle \\ &= \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_i(\langle A_{f_1}(f_i), f_k \rangle) f_k + \langle A_{f_1}(f_i), f_k \rangle (\overline{\nabla}_{f_i} f_k)^\top \rangle \\ &= \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle f_i(\langle S(f_i, f_k), f_1 \rangle) \\ &= \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle f_i \left(\langle S(f_k, f_i), f_1 \rangle + \langle \overline{T}^\perp(f_i, f_k), f_1 \rangle \right) . \end{aligned}$$

Assim,

$$f_i(\langle S(f_k, f_i), f_1 \rangle) = f_i(\langle \overline{\nabla}_{f_k} f_i, f_1 \rangle) = \langle \overline{\nabla}_{f_i} \overline{\nabla}_{f_k} f_i, f_1 \rangle$$

pois em p_0 , $\langle \overline{\nabla}_{f_i} f_1, \overline{\nabla}_{f_k} f_i \rangle = 0$.

Por outro lado, sabemos que a curvatura $\overline{K}$ de $\mathbb{G}$ é nula, então

$$0 = \overline{K}(f_i, f_k) f_i = \overline{\nabla}_{f_i} \overline{\nabla}_{f_k} f_i - \overline{\nabla}_{f_k} \overline{\nabla}_{f_i} f_i - \overline{\nabla}_{[f_i, f_k]} f_i .$$

Então,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{f_i} \overline{\nabla}_{f_k} f_i &= \overline{\nabla}_{f_k} (\nabla_{f_i} f_i + S(f_i, f_i)) + \overline{\nabla}_{[f_i, f_k]} f_i \\ &= \nabla_{f_k} \nabla_{f_i} f_i + S(f_k, \nabla_{f_i} f_i) + \overline{\nabla}_{f_k} S(f_i, f_i) + \overline{\nabla}_{[f_i, f_k]} f_i . \end{aligned}$$

Assim, em p_0

$$\langle \bar{\nabla}_{f_i} \bar{\nabla}_{f_k} f_i, f_1 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{f_k} S(f_i, f_i) + \bar{\nabla}_{[f_i, f_k]} f_i, f_1 \rangle .$$

Como

$$\sum_{i=2}^{d_1} S(f_i, f_i) = \sum_{i=2}^{d_1} \langle S(f_i, f_i), f_1 \rangle f_1 = \sum_{i=2}^{d_1} \langle A_{f_1}(f_i), f_i \rangle f_1 = -(H_{f_1}) f_1 = 0,$$

pois M é mínima, então $\langle f_1, \bar{\nabla}_{f_k} S(f_i, f_i) \rangle = 0$.

Além disso, $\forall i, k = 2, \dots, d_1$ segue que em p_0

$$\bar{T}^\top(f_i, f_k) = \nabla_{f_i} f_k - \nabla_{f_k} f_i - [f_i, f_k] = -[f_i, f_k] .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_i(\langle S(f_k, f_i), f_1 \rangle) &= -\langle \bar{\nabla}_{\bar{T}^\top(f_i, f_k)} f_i, f_1 \rangle \\ &= -\langle S(\bar{T}^\top(f_i, f_k), f_i), f_1 \rangle . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vamos agora calcular $f_i(\langle \bar{T}^\perp(f_i, f_k), f_1 \rangle)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} f_i(\langle \bar{T}^\top(f_i, f_k), f_1 \rangle) &= \langle \bar{T}^\top(\bar{\nabla}_{f_i} f_i, f_k), f_1 \rangle + \langle \bar{T}^\top(f_i, \bar{\nabla}_{f_i} f_k), f_1 \rangle \\ &\quad + \langle \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, f_k) \bar{\nabla}_{f_i} f_j, f_1 \rangle + \langle \bar{T}^\top(f_i, f_k), \bar{\nabla}_{f_i} f_1 \rangle . \end{aligned}$$

Portanto, em p_0

$$\begin{aligned} f_i(\langle \bar{T}^\top(f_i, f_k), f_1 \rangle) &= \langle \bar{T}^\top(S(f_i, f_i), f_k), f_1 \rangle + \langle \bar{T}^\top(f_i, S(f_i, f_k)), f_1 \rangle \\ &\quad + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, f_k)), f_1 \rangle - \langle \bar{T}^\top(f_i, f_k), A_{f_1}(f_i) \rangle . \end{aligned}$$

Como $\langle \bar{T}^\top(f_i, f_k), A_{f_1}(f_i) \rangle = 0$ e $f_i(\langle \bar{T}^\perp(f_i, f_k), f_1 \rangle) = -f_i(\langle \bar{T}^\top(f_i, f_k), f_1 \rangle)$, então

$$\begin{aligned} f_i(\langle \bar{T}^\perp(f_i, f_k), f_1 \rangle) &= - \left(\langle \bar{T}^\top(S(f_i, f_i), f_k), f_1 \rangle + \langle \bar{T}^\top(f_i, S(f_i, f_k)), f_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, f_k)), f_1 \rangle \right) . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Portanto, segue de (4.3) e (4.4) que

$$\begin{aligned}\langle a, (\bar{\nabla}_{f_i}(A_{f_1}(f_i)))^\top \rangle &= \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle f_i \left(\langle S(f_k, f_i), f_1 \rangle + \langle \bar{T}^\perp(f_i, f_k), f_1 \rangle \right) \\ &= - \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, f_k), f_i), f_1 \rangle + \langle \bar{T}^\top(S(f_i, f_i), f_k), f_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \bar{T}^\top(f_i, S(f_i, f_k)), f_1 \rangle + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, f_k)), f_1 \rangle \right) .\end{aligned}$$

Como M é mínima, então

$$\begin{aligned}\Delta \langle a, f_1 \rangle &= \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, f_k), f_i), f_1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, f_k)), f_1 \rangle + \langle \bar{T}^\top(f_i, S(f_i, f_k)), f_1 \rangle \right) \\ &\quad - \langle a, f_1 \rangle (\text{traço}(A_{f_1}^2) + \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle)\end{aligned}$$

Para finalizar, notemos que

$$\begin{aligned}\langle \bar{T}^\top(f_i, S(f_i, f_k)), f_1 \rangle &= \langle \bar{T}^\top(f_i, f_1), f_1 \rangle \langle S(f_i, f_k), f_1 \rangle \\ &= \langle \bar{T}^\top(f_i, f_1), f_1 \rangle \langle A_{f_1}(f_i), f_k \rangle\end{aligned}$$

e

$$\tau = \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, f_j) f_i = \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, e_j - A_j^1 f_1) f_i = - \sum_{i=2}^{d_1} \tilde{T}^1(f_i, f_1) f_i,$$

ou seja,

$$\tau = - \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\perp(f_i, f_1), f_1 \rangle f_i = \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top(f_i, f_1), f_1 \rangle f_i, \quad (4.5)$$

então

$$\sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top(f_i, S(f_i, f_k)), f_1 \rangle = \langle A_{f_1}(\tau), f_k \rangle .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta\langle a, f_1 \rangle &= \sum_{i=2}^{d_1} \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, f_k), f_i), f_1 \rangle + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, f_k)), f_1 \rangle + \langle A_{f_1}(\tau), f_k \rangle \right) \\ &\quad - \langle a, f_1 \rangle \left(\text{traço}(A_{f_1}^2) + \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle \right). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.3. *Se $a \in \mathfrak{g}^1$, então*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\langle a, f_1 \rangle &= -\langle a, f_1 \rangle \left(\text{traço}(A_{f_1}^2) - \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_1, f_i)), f_1 \rangle \right) \right) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle \right). \end{aligned}$$

Demonstração. De fato, como $a \in \mathfrak{g}^1 \subset D$ e $f_1, \dots, f_{d_1}$ é uma base ortonormal em D , então

$$a = \langle a, f_1 \rangle f_1 + \sum_{k=2}^{d_1} \langle a, f_k \rangle f_k.$$

Pela proposição 4.2 segue que

$$\begin{aligned} \Delta\langle a, f_1 \rangle &= -\langle a, f_1 \rangle \left(\text{traço}(A_{f_1}^2) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle + \langle S(\bar{T}^\top(f_i, a - \langle a, f_1 \rangle f_1), f_i), f_1 \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a - \langle a, f_1 \rangle f_1)), f_1 \rangle \right) + \langle A_{f_1}(\tau), a - \langle a, f_1 \rangle f_1 \rangle \right) \\ &= -\langle a, f_1 \rangle \left(\text{traço}(A_{f_1}^2) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i), f_1 \rangle + \langle S(\bar{T}^\top(f_i, f_1), f_i), f_i \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, f_1)), f_1 \rangle \right) \right) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle \right) \\ &\quad + \langle A_{f_1}(\tau), a \rangle, \end{aligned}$$

pois $A_{f_1}(\tau) \in TM \cap D$ e portanto $\langle A_{f_1}(\tau), f_1 \rangle = 0$.

Como

$$\text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) = \sum_{i=2}^{d_1} \langle A_{f_1}(\bar{T}^\top(f_1, f_i)), f_i \rangle = \sum_{i=2}^{d_1} \langle S(\bar{T}^\top(f_1, f_i), f_i), f_i \rangle \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
\tau\langle a, f_1 \rangle &= \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top(f_i, f_1), f_1 \rangle f_i(\langle a, f_1 \rangle) \\
&= \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top(f_i, f_1), f_1 \rangle \langle a, \bar{\nabla}_{f_i} f_1 \rangle \\
&= - \sum_{i=2}^{d_1} \langle \bar{T}^\top(f_i, f_1), f_1 \rangle \langle a, A_{f_1}(f_i) \rangle \\
&= - \langle a, A_{f_1}(\tau) \rangle,
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\langle a, f_1 \rangle &= \Delta\langle a, f_1 \rangle + \tau\langle a, f_1 \rangle \\
&= -\langle a, f_1 \rangle \left(\text{traço}(A_{f_1}^2) - \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_1, f_i)) \rangle \right) \right) + \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle \right) .
\end{aligned}$$

□

Como consequência do corolário 4.3 e 4.1 temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja $M \subset \mathbb{G}$ uma hipersuperfície não-horizontal mínima e compacta. Se existe $a \in \mathfrak{g}^1$ tal que $\langle a, f_1 \rangle \neq 0$ em todos os pontos de M , então*

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(0) &= \int_M \left(\left| \text{grad} w - \frac{w \text{grad}(\langle a, f_1 \rangle)}{\langle a, f_1 \rangle} \right|^2 - \frac{w^2}{\langle a, f_1 \rangle} \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)) \rangle \right) \right) \Gamma(0) .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Em particular, M é estável se

$$\frac{1}{\langle a, f_1 \rangle} \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle + \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)) \rangle \right) \leq 0 . \tag{4.7}$$

Demonstração. De fato, se $\langle a, f_1 \rangle \neq 0$, então de (4.3), obtemos que

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(0) &= \int_M \left(|\text{grad} w|^2 + w^2 \left(\frac{\mathcal{L}\langle a, f_1 \rangle}{\langle a, f_1 \rangle} - \frac{1}{\langle a, f_1 \rangle} \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle \right) \right) \Gamma(0) .
\end{aligned}$$

Pela proposição 3.4, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{w^2 \mathcal{L}\langle a, f_1 \rangle}{\langle a, f_1 \rangle} \Gamma(0) &= \int_M - \left\langle \text{grad} \left(\frac{w^2}{\langle a, f_1 \rangle} \right), \text{grad} \langle a, f_1 \rangle \right\rangle \Gamma(0) \\
&= \int_M - \left\langle \frac{2w \text{grad} w \langle a, f_1 \rangle - w^2 \text{grad} \langle a, f_1 \rangle}{\langle a, f_1 \rangle^2}, \text{grad} \langle a, f_1 \rangle \right\rangle \Gamma(0) \\
&= \int_M \left(-\frac{2w}{\langle a, f_1 \rangle} \langle \text{grad} w, \text{grad} \langle a, f_1 \rangle \rangle + \left| \frac{w \text{grad} \langle a, f_1 \rangle}{\langle a, f_1 \rangle} \right|^2 \right) \Gamma(0) .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M \left(|\text{grad} w|^2 - \frac{w^2 \mathcal{L}\langle a, f_1 \rangle}{\langle a, f_1 \rangle} \right) \Gamma(0) = \int_M \left| \text{grad} w - \frac{w \text{grad} \langle a, f_1 \rangle}{\langle a, f_1 \rangle} \right|^2 \Gamma(0)$$

o que prova a equação (4.6). $\square$

4.1.2 Critério de estabilidade para as hipersuperfícies não-horizontais em $\mathbb{H}^2$

Seja $M \subset \mathbb{H}^2$ uma hipersuperfície não-horizontal. Fixado um campo unitário f_1 em D , completamos a uma base ortonormal em D , conforme Corolário 2.9, escolhendo $f_2 = Rf_1, f_3 = Jf_1$ e $f_4 = Jf_2$, em que J e R são operadores lineares definidos em D , tal que $\bar{T}^5(f_1, f_3) = \bar{T}^5(f_2, f_4) = -1$ e os demais são todos nulos.

De acordo com o capítulo 2, se $M \subset \mathbb{H}^2$ é uma hipersuperfície não-horizontal mínima, então

$$\sum_{i=2}^4 \langle A_{f_1}(f_i), f_i \rangle = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=2}^4 \langle \bar{\nabla}_{f_i} f_1, f_i \rangle = 0 .$$

Nas condições do corolário 4.1, a segunda variação do elemento volume de uma hipersuperfície não-horizontal mínima em $\mathbb{H}^2$ é dada por

$$\begin{aligned}
\ddot{V}(0) &= \int_M \left(|\text{grad} w|^2 + w^2 \left(-\text{traço}(A_{f_1}^2) + \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) + \sum_{i=2}^4 \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_1, f_i)) \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=2}^4 \langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i) \rangle \right) \right) \Gamma(0) .
\end{aligned}$$

Como $\bar{T}^5(f_1, f_3) = \bar{T}^5(f_2, f_4) = -1$ e os demais são todos nulos, então

$$\begin{aligned}
 \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) &= \sum_{i=2}^4 \langle A_{f_1}(\bar{T}^\top(f_1, f_i)), f_i \rangle \\
 &= \langle A_{f_1}(\bar{T}^\top(f_1, f_3)), f_3 \rangle \\
 &= -\langle A_{f_1}(f_5), f_3 \rangle \\
 &= -\langle S(f_5, f_3), f_1 \rangle \\
 &= -\langle S(f_3, f_5), f_1 \rangle - \langle \bar{T}^\perp(f_5, f_3), f_1 \rangle \\
 &= -\langle \bar{\nabla}_{f_3} f_5, f_1 \rangle - A_5^1 \bar{T}^5(e_5 - A_5^1 f_1, f_3) \\
 &= f_3(A_5^1) - (A_5^1)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=2}^4 \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_1, f_i)) \rangle &= \langle f_1, S(f_3, \bar{T}^\top(f_1, f_3)) \rangle \\
 &= -\langle f_1, S(f_3, f_5) \rangle \\
 &= f_3(A_5^1)
 \end{aligned}$$

e escrevendo $A_{f_1}(f_i) = \sum_{k=2}^4 \langle A_{f_1}(f_i), f_k \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=2}^4 \langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_i), f_i) \rangle &= \langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_2), f_2) \rangle + \langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_3), f_3) \rangle \\
 &\quad + \langle f_1, \bar{T}^\top(A_{f_1}(f_4), f_4) \rangle \\
 &= \langle A_{f_1}(f_2), f_4 \rangle \langle f_1, f_5 \rangle - \langle A_{f_1}(f_4), f_2 \rangle \langle f_1, f_5 \rangle \\
 &= -\langle S(f_2, f_4), f_1 \rangle A_5^1 + \langle S(f_4, f_2), f_1 \rangle A_5^1 \\
 &= A_5^1 (\langle S(f_4, f_2) - S(f_2, f_4), f_1 \rangle) \\
 &= A_5^1 \langle \bar{T}^\perp(f_4, f_2), f_1 \rangle \\
 &= (A_5^1)^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\ddot{V}(0) = \int_M (|\text{grad} w|^2 + w^2 (-\text{traço}(A_{f_1}^2) + 2f_3(A_5^1) - 2(A_5^1)^2)) \Gamma(0) .$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
 \text{traço}(A_{f_1}^2) &= \sum_{i=2}^4 \langle A_{f_1}(A_{f_1}(f_i)), f_i \rangle \\
 &= \sum_{i,k=2}^4 \langle A_{f_1}(f_k), f_i \rangle \langle A_{f_1}(f_i), f_k \rangle \\
 &= \sum_{i,k=2}^4 \bar{\omega}_1^i(f_k) \bar{\omega}_1^k(f_i) \\
 &= (\bar{\omega}_1^2)^2 + (\bar{\omega}_1^3)^2 + (\bar{\omega}_1^4)^2 + 2(\bar{\omega}_1^2(f_3) \bar{\omega}_1^3(f_2) + \bar{\omega}_1^2(f_4) \bar{\omega}_1^4(f_2) + \bar{\omega}_1^3(f_4) \bar{\omega}_1^4(f_3)) .
 \end{aligned}$$

Como M é mínima, então

$$\begin{aligned}
 0 &= (\bar{\omega}_1^2(f_2) + \bar{\omega}_1^3(f_3) + \bar{\omega}_1^4(f_4))^2 = (\bar{\omega}_1^2(f_2))^2 + (\bar{\omega}_1^3(f_3))^2 + (\bar{\omega}_1^4(f_4))^2 \\
 &\quad + 2(\bar{\omega}_1^2(f_2) \bar{\omega}_1^3(f_3) + \bar{\omega}_1^2(f_2) \bar{\omega}_1^4(f_4) + \bar{\omega}_1^3(f_3) \bar{\omega}_1^4(f_4)) .
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \text{traço}(A_{f_1}^2) &= 2(\bar{\omega}_1^2(f_3) \bar{\omega}_1^3(f_2) + \bar{\omega}_1^2(f_4) \bar{\omega}_1^4(f_2) + \bar{\omega}_1^3(f_4) \bar{\omega}_1^4(f_3)) \\
 &\quad - \bar{\omega}_1^2(f_2) \bar{\omega}_1^3(f_3) - \bar{\omega}_1^2(f_2) \bar{\omega}_1^4(f_4) - \bar{\omega}_1^3(f_3) \bar{\omega}_1^4(f_4)) .
 \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\text{traço}(A_{f_1}^2) = 2(\langle K(f_2, f_3)f_2, f_3 \rangle + \langle K(f_2, f_4)f_2, f_4 \rangle + \langle K(f_3, f_4)f_3, f_4 \rangle),$$

em que K é a curvatura de M . De fato, pela equação de Gauss, Teorema 1.17, segue que

$$\begin{aligned}
 \langle K(f_2, f_3)f_2, f_3 \rangle &= \langle A_{S(f_3, f_2)}(f_2), f_3 \rangle - \langle A_{S(f_2, f_2)}(f_3), f_3 \rangle \\
 &= \langle S(f_3, f_2), f_1 \rangle \langle A_{f_1}(f_2), f_3 \rangle - \langle S(f_2, f_2), f_1 \rangle \langle A_{f_1}(f_3), f_3 \rangle \\
 &= \bar{\omega}_1^2(f_3) \bar{\omega}_1^3(f_2) - \bar{\omega}_1^2(f_2) \bar{\omega}_1^3(f_3) .
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \langle K(f_2, f_4)f_2, f_4 \rangle &= \bar{\omega}_1^2(f_4) \bar{\omega}_1^4(f_2) - \bar{\omega}_1^2(f_2) \bar{\omega}_1^4(f_4), \\
 \langle K(f_3, f_4)f_3, f_4 \rangle &= \bar{\omega}_1^3(f_4) \bar{\omega}_1^4(f_3) - \bar{\omega}_1^3(f_3) \bar{\omega}_1^4(f_4) .
 \end{aligned}$$

Denotaremos

$$K_e = \langle K(f_2, f_3)f_2, f_3 \rangle + \langle K(f_2, f_4)f_2, f_4 \rangle + \langle K(f_3, f_4)f_3, f_4 \rangle$$

e chamaremos K_e de curvatura escalar de M .

Teorema 4.5. *Seja $M \subset \mathbb{H}^2$ uma hipersuperfície não-horizontal mínima. Então, para toda função $w : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de suporte compacto em M ,*

$$\ddot{V}(0) = \int_M (|\text{grad} w|^2 + w^2 (-2K_e + 2f_3(A_5^1) - 2(A_5^1)^2)) \Gamma(0) \, .$$

Em particular, M é estável se

$$-K_e + f_3(A_5^1) - (A_5^1)^2 \geq 0 \, . \quad (4.8)$$

Exemplo 4.1. *O parabolóide hiperbólico em $\mathbb{H}^2$ é estável.*

Seja

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{H}^2; x_5 = \frac{x_1^2 - x_3^2 + x_2^2 - x_4^2}{4} \right\} \, .$$

Assim, parametrizamos M por

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1, x_2, x_3, x_4, u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \, .$$

Assim,

$$\begin{aligned} X_{x_1} &= \frac{\partial X}{\partial x_1} = e_1 + \frac{1}{2}(x_1 + x_3) e_5 \\ X_{x_2} &= \frac{\partial X}{\partial x_2} = e_2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_4) e_5 \\ X_{x_3} &= \frac{\partial X}{\partial x_3} = e_3 - \frac{1}{2}(x_3 + x_1) e_5 \\ X_{x_4} &= \frac{\partial X}{\partial x_4} = e_4 - \frac{1}{2}(x_4 + x_2) e_5 \, . \end{aligned}$$

Denotaremos por

$$\lambda_1 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{x_2 + x_4}{2} \, .$$

Como $p = (x_1, x_2, -x_1, -x_2, 0)$ são os pontos singulares de M , então seja $\tilde{M} = M - \{p\}$. Assim, em $\tilde{M}$

$$\lambda_1 X_{x_1} + \lambda_2 X_{x_2} - \lambda_1 X_{x_3} - \lambda_2 X_{x_4} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 - \lambda_1 e_3 - \lambda_2 e_4 + N^2 e_5,$$

em que $N = \sqrt{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \neq 0$ e $f_5 = e_5 - A_5^1 f_1$, então

$$f_1 = \frac{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 - \lambda_1 e_3 - \lambda_2 e_4}{N} \quad \text{e} \quad A_5^1 = -\frac{1}{N}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_2 &= Rf_1 = \frac{-\lambda_2 e_1 + \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_3 + \lambda_1 e_4}{N} \\ f_3 &= Jf_1 = \frac{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_4}{N} \\ f_4 &= Jf_2 = \frac{\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_3 + \lambda_1 e_4}{N}. \end{aligned}$$

Conforme Aplicação 2.3, $\tilde{M}$ é uma hipersuperfície não-horizontal mínima em $\mathbb{H}^2$. Vamos mostrar que $\tilde{M}$ satisfaz a condição (4.8).

De fato,

$$K(f_2, f_3)f_2 = \nabla_{f_2} \nabla_{f_3} f_2 - \nabla_{f_3} \nabla_{f_2} f_2 - \nabla_{[f_2, f_3]} f_2, \quad (4.9)$$

$$K(f_2, f_4)f_2 = \nabla_{f_2} \nabla_{f_4} f_2 - \nabla_{f_4} \nabla_{f_2} f_2 - \nabla_{[f_2, f_4]} f_2 \quad (4.10)$$

$$K(f_3, f_4)f_3 = \nabla_{f_3} \nabla_{f_4} f_3 - \nabla_{f_4} \nabla_{f_3} f_3 - \nabla_{[f_3, f_4]} f_3. \quad (4.11)$$

Para encontrarmos (4.9), (4.10) e (4.11), calcularemos as derivadas das funções $\frac{\lambda_1}{N}$ e $\frac{\lambda_2}{N}$ na direção f_2, f_3 e f_4 . Notemos que

$$e_1(\lambda_i) = e_3(\lambda_i) = e_2(\lambda_j) = e_4(\lambda_j) = \frac{1}{2},$$

$$e_1(\lambda_j) = e_3(\lambda_j) = e_2(\lambda_i) = e_4(\lambda_i) = 0,$$

para $i = 1, 3$ e $j = 2, 4$. Também,

$$e_1(N) = e_3(N) = \frac{\lambda_1}{N} \quad \text{e} \quad e_2(N) = e_4(N) = \frac{\lambda_2}{N}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f_2\left(\frac{\lambda_1}{N}\right) &= -\frac{2\lambda_2}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_1^2}{N^3}\right) + \frac{2\lambda_1}{N}\left(-\frac{\lambda_1\lambda_2}{N^3}\right) = -\frac{\lambda_2}{N^2}, \\
f_2\left(\frac{\lambda_2}{N}\right) &= -\frac{2\lambda_2}{N}\left(-\frac{\lambda_2\lambda_1}{2N}\right) + \frac{2\lambda_1}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_2^2}{N^3}\right) = \frac{\lambda_1}{N^2}, \\
f_3\left(\frac{\lambda_1}{N}\right) &= \frac{2\lambda_1}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_1^2}{N^3}\right) + \frac{2\lambda_2}{N}\left(-\frac{\lambda_1\lambda_2}{N^3}\right) = -\frac{\lambda_1}{N^2}\left(\frac{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{N^2} - 1\right) = 0, \\
f_3\left(\frac{\lambda_2}{N}\right) &= \frac{2\lambda_1}{N}\left(-\frac{\lambda_2\lambda_1}{N^3}\right) + \frac{2\lambda_2}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_2^2}{N^3}\right) = 0, \\
f_4\left(\frac{\lambda_1}{N}\right) &= \frac{\lambda_2}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_1^2}{N^3}\right) - \frac{\lambda_1}{N}\left(-\frac{\lambda_1\lambda_2}{N^3}\right) - \frac{\lambda_2}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_1^2}{N^3}\right) + \frac{\lambda_1}{N}\left(-\frac{\lambda_1\lambda_2}{N^3}\right) = 0, \\
f_4\left(\frac{\lambda_2}{N}\right) &= \frac{\lambda_2}{N}\left(-\frac{\lambda_1\lambda_2}{N^3}\right) - \frac{\lambda_1}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_2^2}{N^3}\right) - \frac{\lambda_2}{N}\left(-\frac{\lambda_1\lambda_2}{N^3}\right) + \frac{\lambda_1}{N}\left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_2^2}{N^3}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, concluimos facilmente que

$$\nabla_{f_3}f_3 = \nabla_{f_4}f_4 = \nabla_{f_3}f_2 = \nabla_{f_3}f_4 = \nabla_{f_4}f_2 = 0.$$

e

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_2}f_2 &= (\overline{\nabla}_{f_2}f_2)^\top = \left(-f_2\left(\frac{\lambda_2}{N}\right)e_1 + f_2\left(\frac{\lambda_1}{N}\right)e_2 - f_2\left(\frac{\lambda_2}{N}\right)e_3 + f_2\left(\frac{\lambda_1}{N}\right)e_4\right)^\top \\
&= \left(-\frac{\lambda_1}{N^2}e_1 - \frac{\lambda_2}{N^2}e_2 - \frac{\lambda_1}{N^2}e_3 - \frac{\lambda_2}{N^2}e_4\right)^\top \\
&= -\frac{1}{N}f_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_2}f_3 &= (\overline{\nabla}_{f_2}f_3)^\top = \left(f_2\left(\frac{\lambda_1}{N}\right)e_1 + f_2\left(\frac{\lambda_2}{N}\right)e_2 + f_2\left(\frac{\lambda_1}{N}\right)e_3 + f_2\left(\frac{\lambda_2}{N}\right)e_4\right)^\top \\
&= \left(-\frac{\lambda_2}{N^2}e_1 + \frac{\lambda_1}{N^2}e_2 - \frac{\lambda_2}{N^2}e_3 + \frac{\lambda_1}{N^2}e_4\right)^\top \\
&= \frac{1}{N}f_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_2} f_4 &= (\bar{\nabla}_{f_2} f_4)^\top = \left(f_2 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_1 - f_2 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_2 - f_2 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_3 + f_2 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_4 \right)^\top \\
&= \left(\frac{\lambda_1}{N^2} e_1 + \frac{\lambda_2}{N^2} e_2 - \frac{\lambda_1}{N^2} e_3 - \frac{\lambda_2}{N^2} e_4 \right)^\top \\
&= \left(\frac{1}{N} f_1 \right)^\top \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned}
[f_2, f_3] &= \nabla_{f_2} f_3 - \nabla_{f_3} f_2 - T(f_2, f_3) = \frac{1}{N} f_2, \\
[f_2, f_4] &= \nabla_{f_2} f_4 - \nabla_{f_4} f_2 - T(f_2, f_4) = f_5, \\
[f_3, f_4] &= \nabla_{f_3} f_4 - \nabla_{f_4} f_3 - T(f_3, f_4) = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo em (4.9), (4.10) e (4.11) as igualdades acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
K(f_2, f_3) f_2 &= \left(f_3 \left(\frac{1}{N} \right) + \frac{1}{N^2} \right) f_3, \\
K(f_2, f_4) f_2 &= -\nabla_{f_5} f_4 = 0, \\
K(f_3, f_4) f_3 &= 0.
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\nabla_{f_5} f_4 &= (\bar{\nabla}_{f_5} f_4)^\top = f_5 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_1 - f_5 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_2 - f_5 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_3 + f_5 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_4 \\
&= -A_5^1 \left(f_1 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_1 - f_1 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_2 - f_1 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_3 + f_1 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_4 \right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f_1 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) &= \frac{\lambda_1}{N} \left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_1^2}{N} \right) + \frac{\lambda_2}{N} \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2}{N^3} \right) - \frac{\lambda_1}{N} \left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_1^2}{N^3} \right) - \frac{\lambda_2}{N} \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2}{N^3} \right) = 0, \\
f_1 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) &= \frac{\lambda_1}{N} \left(-\frac{\lambda_2 \lambda_1}{N} \right) + \frac{\lambda_2}{N} \left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_2^2}{N^3} \right) - \frac{\lambda_1}{N} \left(-\frac{\lambda_2 \lambda_1}{N^3} \right) - \frac{\lambda_2}{N} \left(\frac{1}{2N} - \frac{\lambda_2^2}{N^3} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$K_e = f_3 \left(\frac{1}{N} \right) + \frac{1}{N^2} = -f_3(A_5^1) + (A_5^1)^2.$$

Assim,

$$-K_e + f_3(A_5^1) - (A_5^1)^2 = 2f_3(A_5^1) - 2(A_5^1)^2.$$

Como

$$\begin{aligned} f_3(A_5^1) - (A_5^1)^2 &= f_3 \left(-\frac{1}{N} \right) - \frac{1}{N^2} \\ &= \frac{f_3(N)}{N^2} - \frac{1}{N^2}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_3(N) &= \frac{\lambda_1 e_1(N) + \lambda_2 e_2(N) + \lambda_1 e_3(N) + \lambda_2 e_4(N)}{N} \\ &= \frac{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{N^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $2f_3(A_5^1) - 2(A_5^1)^2 = 0$ e a condição (4.8) é satisfeita.

Observação 4.1. Outra maneira de provar a estabilidade do parabolóide hiperbólico é pelo Teorema 4.4. De fato, seja $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, em que $a_i, i = 1, \dots, 4$ são funções constantes não nulas em $\mathbb{H}^2$. Notemos que

$$\begin{aligned} \langle a, f_1 \rangle &= (a_1 - a_3)\lambda_1 + (a_2 - a_4)\lambda_2 \\ &= \frac{(a_1 - a_3)(x_1 + x_3) + (a_2 - a_4)(x_2 + x_4)}{2}. \end{aligned}$$

Seja $P \subset \tilde{M}$ um domínio conexo e compacto tal que $\exists a \in \mathfrak{g}^1$ com $k = \langle a, f_1 \rangle > 0$ em todos os pontos de P . Então, a equação (4.6) é simplesmente

$$\begin{aligned} \ddot{V}(0) &= \int_P \left(\left| \text{grad} w - \frac{w \text{grad} k}{k} \right|^2 - \frac{w^2}{k} \left(\langle S(\bar{T}^\top(f_2, a), f_2), f_1 \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \langle S(\bar{T}^\top(f_4, a), f_4), f_1 \rangle + \langle S(f_2, \bar{T}^\top(f_2, a)), f_1 \rangle + \langle S(f_4, \bar{T}^\top(f_4, a)), f_1 \rangle \right) \right) \Gamma(0). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a desigualdade (4.7) é satisfeita. De fato, como, $\overline{T}^5(f_2, f_4) = -1$, então

$$\langle S(\overline{T}^\top(f_2, a), f_2), f_1 \rangle = \langle a, f_4 \rangle \langle \overline{\nabla}_{f_5} f_2, f_1 \rangle = 0,$$

pois

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{f_5} f_2 &= -f_5 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_1 + f_5 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_2 - f_5 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_3 + f_5 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_4 \\ &= -A_5^1 \left(-f_1 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_1 + f_1 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_2 - f_1 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) e_3 + f_1 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) e_4 \right) \end{aligned}$$

e conforme demonstrado no exemplo 4.1, $f_1 \left(\frac{\lambda_1}{N} \right) = f_1 \left(\frac{\lambda_2}{N} \right) = 0$. Assim,

$$\langle S(\overline{T}^\top(f_2, a), f_2), f_1 \rangle = 0.$$

Do mesmo modo,

$$\langle S(\overline{T}^\top(f_4, a), f_4), f_1 \rangle = 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle S(f_2, \overline{T}^\top(f_2, a)), f_1 \rangle &= \langle \overline{T}^\perp(f_2, \overline{T}^\top(f_2, a)), f_1 \rangle = 0, \\ \langle S(f_4, \overline{T}^\top(f_4, a)), f_1 \rangle &= \langle \overline{T}^\perp(f_4, \overline{T}^\top(f_4, a)), f_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o parabolóide hiperbólico satisfaz (4.7) e assim é estável em qualquer compacto $P \subset \tilde{M}$.

Observação 4.2. O parabolóide hiperbólico de equação

$$u(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i+n}^2)$$

é uma hipersuperfície estável em $\mathbb{H}^n$.

4.1.3 Estabilidade de hipersuperfície mínima vertical

Seja $M \subset \mathbb{G}$ uma subvariedade não-horizontal mínima vertical. Então, $f_j = e_j$,

$$\overline{T}^\perp = \sum_{\alpha=1}^p \tilde{T}^\alpha \otimes f_\alpha = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{j=d_1+1}^n (A_j^\alpha \overline{T}^j) \otimes f_\alpha = 0$$

e

$$\tau = \sum_{i=p+1}^n \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, f_j) f_i = - \sum_{\alpha=p}^p \sum_{i=p+1}^{d_1} \sum_{j=d_1+1}^n A_j^\alpha \bar{T}^j(f_i, f_\alpha) = 0.$$

Portanto, (3.5) reduz-se a $\mathcal{L}\xi = \Delta\xi$, $\forall \xi \in TM^\perp$. Assim, se M satisfaz as condições do Corolário (3.17), então

$$\begin{aligned} \ddot{V}(0) = \int_M \bigg(& -\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) \\ & + \langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(W^\perp, \bar{\nabla}_{f_j}^\perp W^\perp) \bigg) \Gamma(0). \end{aligned}$$

Mas,

$$\langle W^\perp, S(\bar{T}^\top(W^\perp, f_i), f_i) \rangle - \langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle = \langle W^\perp, \bar{T}^\perp(\bar{T}^\top(W^\perp, f_i), f_i) \rangle,$$

então

$$\begin{aligned} \langle W^\perp, S(\bar{T}^\top(W^\perp, f_i), f_i) \rangle &= \langle W^\perp, S(f_i, \bar{T}^\top(W^\perp, f_i)) \rangle \\ &= \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(W^\perp, f_i) \langle W^\perp, S(f_i, e_j) \rangle \\ &= \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(W^\perp, f_i) \langle W^\perp, \bar{\nabla}_{f_i} e_j \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\text{traço}(A_{W^\perp} \circ (W^\perp \lrcorner \bar{T}^\top)) = \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle A_{W^\perp}(\bar{T}^\top(W^\perp, f_i)), f_i \rangle = \sum_{i=p+1}^{d_1} \langle W^\perp, S(\bar{T}^\top(W^\perp, f_i), f_i) \rangle = 0.$$

Portanto, o elemento volume para subvariedades não-horizontais mínimas e verticais reduz a

$$\ddot{V}(0) = \int_M \left(-\langle \mathcal{L}W^\perp, W^\perp \rangle - \text{traço}(A_{W^\perp}^2) + \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(W^\perp, \bar{\nabla}_{f_j}^\perp W^\perp) \right) \Gamma(0). \quad (4.12)$$

Usaremos (4.12) no caso de hipersuperfícies em $\mathbb{H}^n$.

Observação 4.3. Na Aplicação 2.2, mostramos que as curvas transversas mínimas de $\mathbb{H}^n$ são retas verticais. Por (4.12), segue que estas curvas não são minimizantes.

A equação (4.12) será usada para mostrar um caso de estabilidade para hipersuperfícies verticais em $\mathbb{H}^n$.

Antes, como consequência do Teorema 4.4, mostraremos a seguir um caso geral de estabilidade para hipersuperfícies não-horizontais mínimas verticais de $\mathbb{G}$.

Teorema 4.6. *Seja $M \subset \mathbb{G}$ uma hipersuperfície não-horizontal mínima vertical e compacta. Se existe $a \in \mathfrak{g}^1$ tal que $\langle a, f_1 \rangle \neq 0$ em todos os pontos de M , então M é estável.*

Demonstração. De fato, seja $\lambda = \langle a, f_1 \rangle \neq 0$, então

$$\ddot{V}(0) = \int_M \left| \text{grad} w - \frac{w \text{grad} \lambda}{\lambda} \right|^2 - \frac{w^2}{\lambda} \sum_{i=2}^{d_1} \left(\langle A_{f_1}(\bar{T}^\top(f_i, a)), f_i \rangle + \langle f_1, S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)) \rangle \right) \Gamma(0) .$$

Se M é vertical, então $f_j = e_j$ ou $A_j^1 = 0$, para todo $j = d_1 + 1 \dots, n$. Assim,

$$\bar{T}^\perp = A_j^1 \bar{T}^j = 0 .$$

Consequentemente, $S(X, Y) - S(Y, X) = \bar{T}^\perp(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in TM$ e portanto

$$\begin{aligned} \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle &= \langle S(\bar{T}^\top(f_i, a), f_i), f_1 \rangle \\ &= \langle A_{f_1}(\bar{T}^\top(f_i, a)), f_i \rangle . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle &= \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, a) \langle S(f_i, f_j), f_1 \rangle \\ &= \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, a) \langle \bar{\nabla}_{f_i} f_j, f_1 \rangle \\ &= \sum_{j=d_1+1}^n \bar{T}^j(f_i, a) (f_i \langle f_j, f_1 \rangle - \langle f_j, \bar{\nabla}_{f_i} f_1 \rangle) . \end{aligned}$$

Mas, $\langle f_j, f_1 \rangle = -A_j^1 = 0$ e $\bar{\nabla}_{f_i} f_1 = (\bar{\nabla}_{f_i} f_1)^\top \in TM \cap D$. Assim,

$$\langle S(f_i, \bar{T}^\top(f_i, a)), f_1 \rangle = 0$$

Portanto,

$$\ddot{V}(0) = \int_M \left| \text{grad} w - \frac{w \text{grad} \lambda}{\lambda} \right|^2 \Gamma(0) \geq 0 .$$

□

4.1.4 Caso de hipersuperfícies não-horizontais mínimas e verticais em $\mathbb{H}^n$

Provamos no capítulo 2 que, se $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ é uma subvariedade mínima, então a subvariedade não-horizontal vertical $N = \{(x, t); x \in M, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{H}^n$ é mínima. Assim, usando este resultado e a teoria de hipersuperfícies estáveis de uma variedade riemanniana, provaremos a seguir que se $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ é uma hipersuperfície mínima estável, então N é uma hipersuperfície não-horizontal mínima vertical estável em $\mathbb{H}^n$.

Antes, recordaremos alguns pontos da Aplicação 2.1.

Sejam $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a projeção natural e $f_1, \dots, f_{2n}$ uma base ortonormal de D restrito a N tal que $\pi_*(f_j) = g_j$, $j = 1, \dots, 2n$. Então $g_1, \dots, g_p$ é uma base ortonormal de $TM^\perp$ e $g_{p+1}, \dots, g_{2n}$ é uma base ortonormal de TM .

Se N é uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^n$ e $W^\perp = wf_1$ para alguma função $w : N \rightarrow \mathbb{R}$ de suporte compacto. Então, por (4.12) o elemento volume de N satisfaz

$$\ddot{V}(0) = \int_N (|\text{grad} w|^2 - w^2 \text{traço}(A_{f_1}^2)) \Gamma(0) .$$

Se escrevermos $g_i = \sum_{k=1}^{2n} h_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, então $h_i^k : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções C^∞ tais que $\sum_{k=1}^{2n} (h_i^k)^2 = 1$. Além disso, quando escrevermos g_i na base dos campos invariantes à esquerda, obtemos que

$$f_i = \bar{g}_i - \frac{1}{2} B_i e_{2n+1}, \quad (4.13)$$

em que $\bar{g}_i = \sum_{i=1}^{2n} (h_i^k \circ \pi) e_k$ e B_i é uma função projetável em M , pois é a soma do produto de funções $h_i^k \circ \pi$ com os coeficientes dos campos $e_1, \dots, e_{2n}$. Para simplificar, identificaremos $f \circ \pi$ por f .

Por (3.5), o sub-laplaciano de w é simplesmente

$$\mathcal{L}w = \Delta w = \sum_{i=2}^{2n} (f_i(f_i(w)) - (\nabla_{f_i} f_i)(w)). \quad (4.14)$$

Por outro lado, segue de (4.13) que

$$\begin{aligned} f_i(f_i(w)) &= (\bar{g}_i - \frac{1}{2} B_i e_{2n+1})(\bar{g}_i(w) - \frac{1}{2} B_i e_{2n+1}(w)) \\ &= \bar{g}_i(\bar{g}_i(w)) - \frac{1}{2} \bar{g}_i(B_i e_{2n+1}(w)) - \frac{1}{2} B_i e_{2n+1}(\bar{g}_i(w)) \\ &\quad + \frac{1}{4} B_i e_{2n+1}(B_i e_{2n+1}(w)). \end{aligned}$$

Como $[\bar{g}_i, e_{2n+1}] = 0$ e $e_{2n+1}(B_i) = 0$, então

$$f_i(f_i(w)) = \left(\bar{g}_i(\bar{g}_i(w)) - \frac{1}{2} \bar{g}_i(B_i) e_{2n+1}(w) - B_i \bar{g}_i(e_{2n+1}(w)) + \frac{1}{4} B_i^2 e_{2n+1}(e_{2n+1}(w)) \right). \quad (4.15)$$

Também,

$$\begin{aligned} (\nabla_{f_i} f_i)(w) &= \left(\nabla_{\bar{g}_i} \left(\bar{g}_i - \frac{1}{2} B_i e_{2n+1} \right) \right)(w) - \frac{1}{2} B_i \left(\nabla_{e_{2n+1}} \left(\bar{g}_i - \frac{1}{2} B_i e_{2n+1} \right) \right)(w) \\ &= (\nabla_{\bar{g}_i} \bar{g}_i)(w) - \frac{1}{2} \bar{g}_i(B_i) e_{2n+1}(w), \end{aligned} \quad (4.16)$$

pois $\nabla e_{2n+1} = 0$ e $\nabla_{e_{2n+1}} \bar{g}_i = T(e_{2n+1}, \bar{g}_i) + \nabla_{\bar{g}_i} e_{2n+1} + [e_{2n+1}, \bar{g}_i] = 0$.

Substituindo (4.15) e (4.16) em (4.14) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta w &= \sum_{i=2}^{2n} \left\{ \bar{g}_i(\bar{g}_i(w)) - (\nabla_{\bar{g}_i} \bar{g}_i)(w) - B_i \bar{g}_i(e_{2n+1}(w)) + \frac{1}{4} (B_i)^2 e_{2n+1}(e_{2n+1}(w)) \right\} \\ &= \bar{\Delta} w + \sum_{i=2}^{2n} \left\{ \frac{1}{4} B_i^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^{2n+1} \partial x^{2n+1}} - \sum_{k=1}^{2n} h_i^k B_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^k \partial x^{2n+1}} \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que $\bar{\Delta} w = \sum_{i=2}^{2n} \bar{g}_i(\bar{g}_i(w)) - (\nabla_{\bar{g}_i} \bar{g}_i)(w)$.

Finalmente, usando os cálculos acima obtemos o seguinte resultado

Teorema 4.7. *Se $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ é uma hipersuperfície mínima completa e estável, então $N = \{(x, t); x \in M, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{H}^n$ é uma hipersuperfície mínima estável.*

Demonstração. Observamos que se $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ é uma hipersuperfície estável, então o elemento volume $d\nu$ de M é não negativo. Assim, por [30] temos que para toda função ϕ de suporte compacto em M ,

$$\int_M (|\text{grad}_M \phi|^2 - \text{traço}(A_{g_1}^2) \phi^2) d\nu \geq 0. \quad (4.18)$$

Notemos que (4.18) é equivalente a $\lambda_1(\Omega) \geq 0$ para todo domínio limitado Ω em M , em que $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor do operador $\Delta_M + \text{traço}(A_{g_1}^2)$ definido em [13] por

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} (|\text{grad}_M \phi|^2 - \text{traço}(A_{g_1}^2) \phi^2) d\nu; \text{spt}(\phi) \subset \Omega, \int_{\Omega} \phi^2 d\nu = 1 \right\},$$

em que $\text{spt}\phi$ é o suporte de ϕ .

Além disso, segue de [13] que $\lambda_1(\Omega) \geq 0$ se e somente se existe $\psi > 0$ satisfazendo $\Delta_M \psi = -\text{traço}(A_{g_1}^2) \psi$.

Nessas condições, definimos uma função $\tilde{\psi} : N \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{\psi}(x, r) = \psi(x), \forall x \in N, r \in \mathbb{R}$. Portanto (4.17) se reduz a

$$\Delta \tilde{\psi} = \bar{\Delta} \tilde{\psi}.$$

Além disso, $\bar{g}_i(\tilde{\psi}) = g_i(\psi)$. Então,

$$\bar{\Delta} \tilde{\psi} = \sum_{i=2}^{2n} g_i(g_i(\psi)) - (\nabla_{g_i}^M g_i)(\psi) = \Delta_M \psi.$$

Como $\tau = 0$, $\Delta_M \psi = -\text{traço}(A_{g_1}^2) \psi$ e $\text{traço}(A_{g_1}^2) = \text{traço}(A_{f_1}^2)$, então

$$\mathcal{L} \tilde{\psi} = \Delta \tilde{\psi} = \Delta_M \psi = -\text{traço}(A_{g_1}^2) \psi = -\text{traço}(A_{f_1}^2) \tilde{\psi}$$

Assim, existe uma função suave $\tilde{\psi} > 0$ satisfazendo $\mathcal{L} \tilde{\psi} = -\text{traço}(A_{f_1}^2) \tilde{\psi}$ e portanto pela Proposição 3.5 segue que

$$\int_N (|\text{grad} w|^2 - \text{traço}(A_{f_1}^2) w^2) \Gamma(0) \geq 0,$$

para toda função suave w de suporte compacto em N . □

4.2 Critério de estabilidade para superfícies não-horizontais mínimas em $\mathbb{H}^1$

Seja S uma superfície não-horizontal mínima de um grupo de Lie estratificado 3-dimensional $\mathbb{G}$. Sejam D a distribuição horizontal em $T\mathbb{G}$ e f_1, f_2, f_3 uma base adaptada em $T\mathbb{G}$.

Neste caso, $W^\perp = wf_1$ e de (4.1), obtemos $\bar{T}^3(W^\perp, f_3) = 0$. Como S é mínima segue que

$$\langle A_{W^\perp}(f_2), f_2 \rangle = H_{W^\perp} = 0 .$$

Então, $A_{f_1}(f_2) = 0$. Consequentemente,

$$\text{traço}(A_{f_1}^2) = 0 .$$

Portanto, de acordo com o Corolário 4.1, a segunda variação no caso de superfície é da forma

$$\ddot{V}(0) = \int_S |\text{grad} w|^2 - w^2 \left(-\text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) - \langle S(f_2, \bar{T}^\top(f_1, f_2)), f_1 \rangle \right) \Gamma(0) .$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) &= \langle A_{f_1}(\bar{T}^\top(f_1, f_2)), f_2 \rangle \\ &= \bar{T}^3(f_1, f_2) \langle A_{f_1}(f_3), f_2 \rangle \\ &= \bar{T}^3(f_1, f_2) \langle S(f_3, f_2), f_1 \rangle \\ &= \bar{T}^3(f_1, f_2) (\langle S(f_2, f_3) + \bar{T}^\perp(f_3, f_2), f_1 \rangle) . \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle S(f_2, f_3), f_1 \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{f_2} f_3, f_1 \rangle \\ &= f_2(\langle f_3, f_1 \rangle) - \langle f_3, \bar{\nabla}_{f_2} f_1 \rangle \\ &= -f_2(A_3^1), \end{aligned}$$

pois $(\bar{\nabla}_{f_2} f_1)^\top \in TM \cap D$ e portanto $\langle f_3, \bar{\nabla}_{f_2} f_1 \rangle = 0$. Também,

$$\begin{aligned} \langle \bar{T}^\perp(f_3, f_2), f_1 \rangle &= \langle A_3^1 \bar{T}^3(f_3, f_2) f_1, f_1 \rangle \\ &= A_3^1 \bar{T}^3(e_3 - A_3^1 f_1, f_2) \\ &= -(A_3^1)^2 \bar{T}^3(f_1, f_2) . \end{aligned}$$

Então,

$$\text{traço}(A_{f_1} \circ (f_1 \lrcorner \bar{T}^\top)) = -f_2(A_3^1) \bar{T}^3(f_1, f_2) - (A_3^1 \bar{T}^3(f_1, f_2))^2 .$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle S(f_2, \bar{T}^\top(f_1, f_2)), f_1 \rangle &= \bar{T}^3(f_1, f_2) \langle f_1, S(f_2, f_3) \rangle \\ &= \bar{T}^3(f_1, f_2) \langle f_1, \bar{\nabla}_{f_2} f_3 \rangle \\ &= \bar{T}^3(f_1, f_2) (f_2(\langle f_1, f_3 \rangle) - \langle \bar{\nabla}_{f_2} f_1, f_3 \rangle) \\ &= -f_2(A_3^1) \bar{T}^3(f_1, f_2) . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{V}(0) = \int_S \left(|\text{grad} w|^2 + w^2 \left(-2f_2(A_3^1) \bar{T}^3(f_1, f_2) - (A_3^1 \bar{T}^3(f_1, f_2))^2 \right) \right) \Gamma(0) . \quad (4.19)$$

Se $\mathbb{G} = \mathbb{H}^1$, então $S \subset \mathbb{H}^1$ é uma superfície não-horizontal mínima e conforme seção 2.2.2, S é uma superfície regrada. Usando a mesma notação desta seção, parametrizamos S como

$$\begin{aligned} f(t, s) &= \gamma(t) + s f_2(\gamma(t)) \\ &= (x(t) + s a_1(t), y(t) + s a_2(t), z(t) + \frac{s}{2} (a_2(t)x(t) - a_1(t)y(t))) , \end{aligned}$$

em que $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva transversa a retas em S e $f_2(\gamma(t)) = a_1(t)e_1(t) + a_2(t)e_2(t)$ é um campo unitário ao longo de S tal que $\langle \gamma'(t), f_2(\gamma(t)) \rangle = 0$. A base adaptada a superfícies S em $T\mathbb{H}^1$ é da forma

$$\begin{aligned} f_1(t, s) &= -a_2(t, 0)e_1(t, s) + a_1(t, 0)e_2(t, s), \\ f_2(t, s) &= a_1(t, 0)e_1(t, s) + a_2(t, 0)e_2(t, s), \\ f_3(t, s) &= e_3(t, s) - A_3^1(t, s)f_1(t, s), \end{aligned}$$

em que $A_3^1 = -\frac{B_s(t,s)}{B(t,s)}$ com

$$B(t, s) = z'(t) + \frac{1}{2}(x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) + s(a_2(t)x'(t) - a_1(t)y'(t)) + \frac{s^2}{2}(a_1'(t)a_2(t) - a_2'(t)a_1(t)).$$

Como $\bar{T}^3(f_1, f_2) = -1$ e os demais são todos nulos, então

$$\dot{V}(0) = \int_S (|\text{grad} w|^2 + w^2 (2f_2(A_3^1) - (A_3^1)^2)) \Gamma(0). \quad (4.20)$$

Antes de desenvolvermos o segundo termo de (4.20), consideremos alguns pontos da parametrização de S . Como

$$\langle \gamma'(t), f_2(\gamma(t)) \rangle = a_1(t)x'(t) + a_2(t)y'(t) = 0,$$

Então,

$$a_1(t) = -\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \quad \text{e} \quad a_2(t) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

Além disso, como $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, segue que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= x'(t) \left(e_1 + \frac{y}{2} e_3 \right) + y'(t) \left(e_2 - \frac{x}{2} e_3 \right) + z'(t) e_3 \\ &= x'(t) e_1 + y'(t) e_2 + \left(z'(t) + \frac{1}{2}(x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) \right) e_3 \end{aligned}$$

Então,

$$e^3(\gamma'(t)) = z'(t) + \frac{1}{2}y(t)x'(t) - \frac{1}{2}x(t)y'(t) = B(t, 0).$$

Notemos que $a_2(t)x'(t) - a_1(t)y'(t) = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Portanto,

$$A_3^1(t, 0) = -\frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{e^3(\gamma'(t))}.$$

Agora, consideremos a curva γ_s definida por

$$\gamma_s(t) = f(t, s).$$

Um dos invariantes de γ_s é $\beta_s(t) = \tan \theta_s(t) = -A_3^1(t, s)$, em que $\theta_s(t)$ é o ângulo entre D e TS em $\gamma_s(t)$. O outro invariante é a curvatura κ da curva $c = \pi\gamma_s$ em $\mathbb{R}^2$, em que $\pi : \mathbb{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. O próximo passo é encontrar o valor da curvatura κ .

Notemos que

$$c(t) = \pi\gamma_s(t) = (x_s(t), y_s(t)) = (x(t) + sa_1(t), y(t) + sa_2(t)) .$$

Logo,

$$\begin{aligned} c' &= (x'(t) + sa'_1(t), y'(t) + sa'_2(t)) \\ c'' &= (x''(t) + sa''_1(t), y''(t) + sa''_2(t)) . \end{aligned}$$

Assim,

$$x'_s(t)^2 + y'_s(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + 2s(x'(t)a'_1(t) + y'(t)a'_2(t)) + s^2(a'_1(t)^2 + a'_2(t)^2) .$$

Como

$$a'_1(t) = \frac{x'(t)(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}} ,$$

$$a'_2(t) = \frac{y'(t)(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}} .$$

Então,

$$a'_1(t)^2 + a'_2(t)^2 = \frac{(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t))^2}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^2} ,$$

$$x'(t)a'_1(t) + y'(t)a'_2(t) = \frac{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} .$$

Portanto,

$$x'_s(t)^2 + y'_s(t)^2 = \left(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} + s\rho(t) \right)^2 ,$$

em que $\rho(t) = \frac{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} x'_s(t)y''_s(t) - y'_s(t)x''_s(t) &= (x'(t) + sa'_1(t))(y''(t) + sa''_2(t)) - (y'(t) + sa'_2(t))(x''(t) + sa''_1(t)) \\ &= x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) + s(a''_2(t)x'(t) - a''_1(t)y'(t) + a'_1(t)y''(t) \\ &\quad - a'_2(t)x''(t)) + s^2(a'_1(t)a''_2(t) - a'_2(t)a''_1(t)) . \end{aligned}$$

Derivando $a'_1(t)$ e $a'_2(t)$, obtemos facilmente que

$$a''_2(t)x'(t) - a''_1(t)y'(t) = a'_1(t)y''(t) - a'_2(t)x''(t) = -\frac{(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))^2}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}}$$

e

$$a'_1(t)a''_2(t) - a'_2(t)a''_1(t) = \frac{(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))^3}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x'_s(t)y''_s(t) - y'_s(t)x''_s(t) &= x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) - 2s \left(\frac{(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))^2}{\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3}} \right) \\ &\quad + s^2 \left(\frac{(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))^3}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^3} \right) \\ &= -\rho(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2) - 2s\rho(t)^2(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}) - s^2\rho(t)^3 \\ &= -\rho(t) \left(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} + s\rho(t) \right)^2. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\kappa_s = \frac{x'_s(t)y''_s(t) - y'_s(t)x''_s(t)}{(\sqrt{x'_s(t)^2 + y'_s(t)^2})^3} = -\frac{\rho(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} + s\rho(t)}.$$

Se γ é uma curva transversa normalizada, ou seja, $|\gamma'(t)| = 1$, então $k_0 = -\rho(t)$ e assim

$$\kappa_s = \frac{\kappa_0}{1 - s\kappa_0}.$$

Além disso, como $e^3(\gamma'(t)) = B(t, s) = e^3(\gamma'_s(t)) + s\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} + s^2\frac{\rho(t)}{2}$, então

$$\begin{aligned} \beta_s(t) &= \frac{\sqrt{x'_s(t)^2 + y'_s(t)^2}}{e^3(\gamma'_s(t))} \\ &= \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} + s\rho(t)}{e^3(\gamma'(t)) + s\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} + s^2\frac{\rho(t)}{2}} \\ &= \frac{(1 - s\kappa_0)}{e^3(\gamma'(t)) + s - \frac{\kappa_0}{2}s^2} \\ &= \frac{1 - s\kappa_0}{\frac{1}{\beta_0} + s - \frac{\kappa_0}{2}s^2} = \beta_0 \frac{1 - s\kappa_0}{1 + \beta_0 s - \frac{\beta_0 \kappa_0}{2}s^2}, \end{aligned}$$

pois $e^3(\gamma'(t)) = -\frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{A_3^1(t,0)} = \frac{1}{\beta_0}$.

Com as igualdades acima, afirmamos que o segundo termo de (4.20) é expresso como

$$-(A_3^1)^2 + 2\frac{\partial}{\partial s}(A_3^1) = \frac{1 + 2\frac{\kappa_0(t)}{\beta_0(t)}}{(1 - \frac{s}{2}(s\kappa_0(t) - 2))^2}. \quad (4.21)$$

De fato, como $e^3(\gamma'(t)) = z'(t) + \frac{1}{2}y(t)x'(t) - \frac{1}{2}x(t)y'(t)$, então

$$B(t, s) = e^3(\gamma'(t)) + s + \frac{\rho(t)s^2}{2} = \frac{1}{\beta_0} + s + \frac{\rho(t)s^2}{2}.$$

Consequentemente, $B_s(t, s) = 1 + \rho(t)s$ e assim,

$$\begin{aligned} -(A_3^1)^2 + 2\frac{\partial}{\partial s}(A_3^1) &= -\left(\frac{B_s}{B}\right)^2 + 2\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{B_s}{B}\right) \\ &= -\frac{-B_s^2 - 2B_{ss}B + 2B_s^2}{B^2} \\ &= \frac{(1 + s\rho(t))^2 - 2\rho(t)\left(\frac{1}{\beta_0} + s + \frac{\rho(t)s^2}{2}\right)}{B^2} \\ &= \frac{(1 + 2\rho(t)s + s^2\rho(t)^2) - 2\rho(t)\left(\frac{1}{\beta_0} + s + \frac{\rho(t)s^2}{2}\right)}{B^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$-(A_3^1)^2 + 2\frac{\partial}{\partial s}(A_3^1) = \frac{1 - \frac{2\rho(t)}{\beta_0}}{B^2}.$$

Substituindo o valor de B^2 e $\rho(t) = -k_0(t)$ na equação acima obtemos (4.21).

Portanto, provamos o seguinte resultado

Teorema 4.8. *Sejam $S \subset \mathbb{H}^1$ uma superfície não-horizontal mínima e $w : \mathbb{H}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave de suporte compacto contido em S . Então,*

$$\ddot{V}(0) = \int_S \left(|\text{grad} w|^2 + w^2 \frac{1 + 2\frac{\kappa_0(t)}{\beta_0(t)}}{(1 - \frac{s}{2}(s\kappa_0(t) - 2))^2} \right) \Gamma(0) .$$

Em particular, S é estável se

$$1 + 2\frac{\kappa_0(t)}{\beta_0(t)} \geq 0 .$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Andrei Agrachev, Davide Barilari, and Ugo Boscain. Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry. *Preprint SISSA*, 9, 2012.
- [2] Andrei Agrachev, Davide Barilari, and Ugo Boscain. On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 43(3-4):355–388, 2012.
- [3] Davide Barilari and Luca Rizzi. A formula for Popp’s volume in sub-Riemannian geometry. *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, 1:42–57, 2013.
- [4] André Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. Springer, 1996.
- [5] Andrea Bonfiglioli, Ermanno Lanconelli, and Francesco Uguzzoni. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Springer, 2007.
- [6] Mike Brookes. The matrix reference manual [online], 2005.
- [7] Jih-Hsin Cheng, Jenn-Fang Hwang, Andrea Malchiodi, and Paul Yang. Minimal surfaces in pseudohermitian geometry. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze-Serie V*, 4(1):129–178, 2005.
- [8] Lawrence J Corwin and Frederick P Greenleaf. Representations of nilpotent Lie groups and their applications, volume 127. Cambridge University Press Cambridge, 1990.

- [9] D. Danielli, N. Garofalo, and D. M. Nhieu. Sub-Riemannian calculus on hypersurfaces in Carnot groups. *Adv. Math.*, 215(1):292–378, 2007.
- [10] Donatella Danielli, Nicola Garofalo, Duy-Minh Nhieu, and Scott D. Pauls. The Bernstein problem for embedded surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$. *Indiana Univ. Math. J.*, 59(2):563–594, 2010.
- [11] Jiu Ding and Aihui Zhou. Eigenvalues of rank-one updated matrices with some applications. *Applied Mathematics Letters*, 20(12):1223–1226, 2007.
- [12] Marcos M. Diniz and José M. M. Veloso. Regions where the exponential map at regular points of sub-Riemannian manifolds is a local diffeomorphism. *J. Dyn. Control Syst.*, 15(1):133–156, 2009.
- [13] Doris Fischer-Colbrie and Richard Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(2):199–211, 1980.
- [14] Roberta Ghezzi and Frédéric Jean. Hausdorff measures and dimensions in non equiregular sub-Riemannian manifolds. In *Geometric control theory and sub-Riemannian geometry*, pages 201–218. Springer, 2014.
- [15] M Gromov. Carnot-Carathéodory spaces seen from within. Sub-Riemannian geometry, 79–323. *Progr. Math*, 144.
- [16] David A Harville. Matrix algebra from a statistician’s perspective. *Technometrics*, 40(2):164–164, 1998.
- [17] Noel J Hicks. Notes on differential geometry, volume 3. van Nostrand Princeton, 1965.
- [18] Robert K. Hladky and Scott D. Pauls. Variation of perimeter measure in sub-Riemannian geometry. *Int. Electron. J. Geom.*, 6(1):8–40, 2013.

- [19] Ana Hurtado, Manuel Ritoré, and César Rosales. The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$. *Advances in Mathematics*, 224(2):561–600, 2010.
- [20] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. Foundations of differential geometry, volume 1. New York, 1963.
- [21] Jeffrey Marc Lee. Manifolds and differential geometry, volume 107. *American Mathematical Soc.*, 2009.
- [22] Valentino Magnani. Spherical Hausdorff measure of submanifolds in Heisenberg groups. *Ricerche Mat.*, 54(2):607–613 (2006), 2005.
- [23] Valentino Magnani and Davide Vittone. An intrinsic measure for submanifolds in stratified groups. *J. Reine Angew. Math.*, 619:203–232, 2008.
- [24] John Mitchell. On Carnot-Carathéodory metrics. *Journal of Differential Geometry*, 21(1):35–45, 1985.
- [25] Francescopaolo Montefalcone. Hypersurfaces and variational formulas in sub-Riemannian Carnot groups. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 87(5):453–494, 2007.
- [26] Francescopaolo Montefalcone. Stable H-minimal hypersurfaces. *Journal of Geometric Analysis*, pages 1–51, 2012.
- [27] Richard Montgomery. A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications. Number 91. *American Mathematical Soc.*, 2006.
- [28] Pierre Pansu. Géométrie du groupe d’Heisenberg. PhD thesis, 1982.
- [29] Manuel Ritoré and César Rosales. Area-stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$. *Advances in Mathematics*, 219(2):633–671, 2008.

- [30] Michael Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry. *Vol. IV*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [31] Robert S. Strichartz. Sub-Riemannian geometry. *J. Differential Geom.*, 24(2):221–263, 1986.
- [32] Robert S. Strichartz. Corrections to: “Sub-Riemannian geometry”. *J. Differential Geom.*, 30(2):595–596, 1989.
- [33] Frank W Warner. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, volume 94. Springer, 1971.
- [34] YL Xin. Minimal submanifolds and related topics, volume 8. World Scientific, 2003.