UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

EXAME DE SELEÇÃO

Candidato:

Data: 27/01/2017

LEIA COM ATENÇÃO

- Este exame possui 5 (cinco) questões e vale 10 (dez) pontos;
- Os teoremas, proposições, lemas e corolários demonstrados no curso de verão poderão ser usados no exame (sem necessidade de demonstração). Outros resultados, se utilizados, devem ser devidamente justificados no exame.
- A duração deste exame será de no máximo 240 (duzentos e quarenta) minutos ou 4 (quatro) horas;
- O exame deve ser realizado individualmente por cada candidato com caneta esferográfica azul ou preta e sem consulta bibliográfica;
- É proibido o empréstimo de materiais (tais como caneta, lápis, borracha, corretivo,...) durante a realização do exame;
- É proibido o uso de qualquer aparelho eletrônico durante a realização deste exame, incluindo celular, calculadora e notebook. Os mesmos devem estar desligados;
- Não é permitido o uso de folhas que não sejam as que já vêm grampeadas no exame. Não é permitido desgrampear as folhas do exame;
- O não cumprimento de qualquer um dos 5 (cinco) últimos itens anteriores implicará em nota 0 (zero).

1. Resolva cada uma das questões abaixo.

   (a) Mostre que se E é um espaço normado e F é um espaço de Banach então o espaço $\mathcal{L}(E,F)$ dos operadores lineares limitados $T : E \to F$, munido da norma
$$\|T\| = \sup_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$
é um espaço de Banach.

   (b) Mostre que se E é um espaço vetorial de dimensão finita então duas normas quaisquer em E são equivalentes. Dê um exemplo de duas normas que não são equivalentes, em algum espaço vetorial.

2. Resolva cada uma das questões abaixo.

   (a) Sejam E e F espaços normados. Mostre que se o espaço $\mathcal{L}(E, F)$ dos operadores lineares limitados $T : E \to F$, munido da norma

$$\|T\| = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E},$$

   é um espaço de Banach, então F é Banach.

   (b) Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares sobre um espaço vetorial X tais que

$$\bigcap_{i=1}^{n} Ker(\varphi_i) \subset Ker(\varphi).$$

   Mostre que existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i.$$

3. Resolva cada uma das questões abaixo.

(a) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear satisfazendo: "Se $x_n \to 0$ em E então $f(Tx_n) \to 0$ em $\mathbb{R}$, para todo $f \in F'$". Mostre que $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

(b) Mostre que se E e F são espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é bijetivo, então $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

4. Resolva cada uma das questões abaixo.

   (a) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma isometria. Mostre que E é reflexivo se, e somente se, F é reflexivo.

   (b) Dê exemplo de uma sequência $\{x_n\}$ em um espaço normado E que converge fraco em E mas não converge forte em E.

5. Resolva cada uma das questões abaixo.

(a) Mostre que todo espaço de Hilbert Separável e isométrico a $(l^2, \|.\|_2)$.

(b) Sejam E Banach, com $dimE = \infty$, $z \in E \backslash \{0\}$, $f \in E' \backslash \{0\}$ e $T : E \to E$ dado por

$$T(x) = f(x)z.$$

Mostre que $\sigma(T) = \{0, f(z)\}$.